

Fundação

**CECIERJ**

Consórcio **cederj**

Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

## Cálculo I

Volume 0 – Módulo 0

Mário Olivero

Nancy Cardim



SECRETARIA DE  
CIÊNCIA E TECNOLOGIA



Ministério  
da Educação



Apoio:



Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo  
à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

# Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Rua Visconde de Niterói, 1364 – Mangueira – Rio de Janeiro, RJ – CEP 20943-001  
Tel.: (21) 2334-1569 Fax: (21) 2568-0725

## Presidente

Masako Oya Masuda

## Vice-presidente

Mirian Crapez

## Coordenação do Curso de Matemática

UFF - Regina Moreth

UNIRIO - Luiz Pedro San Gil Jutuca

## Material Didático

### ELABORAÇÃO DE CONTEÚDO

Mário Olivero

Nancy Cardim

### Departamento de Produção

#### EDITORA

Tereza Queiroz

#### PROGRAMAÇÃO VISUAL

Marcelo Freitas

#### CAPA

Eduardo de Oliveira Bordoni

Fábio Muniz de Moura

#### PRODUÇÃO GRÁFICA

Patrícia Seabra

Copyright © 2009, Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Nenhuma parte deste material poderá ser reproduzida, transmitida e gravada, por qualquer meio eletrônico, mecânico, por fotocópia e outros, sem a prévia autorização, por escrito, da Fundação.

O48c

Olivero, Mário.

Cálculo 1. v.0 / Mário Olivero, Nancy Cardim. – Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2009.

136p.; 21 x 29,7 cm.

ISBN: 978-85-7648-585-8

1. Cálculo. 2. Limites das Funções. 3. Funções reais. 4. Teorema do valor intermediário. I. Cardim, Nancy. II. Título.

CDD: 515.15

2009/2

Referências Bibliográficas e catalogação na fonte, de acordo com as normas da ABNT e AACR2.

# Governo do Estado do Rio de Janeiro

**Governador**  
Sérgio Cabral Filho

**Secretário de Estado de Ciência e Tecnologia**  
Alexandre Cardoso

## Universidades Consorciadas

**UENF - UNIVERSIDADE ESTADUAL DO  
NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO**  
Reitor: Almy Junior Cordeiro de Carvalho

**UERJ - UNIVERSIDADE DO ESTADO DO  
RIO DE JANEIRO**  
Reitor: Ricardo Vieiralves

**UFF - UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE**  
Reitor: Roberto de Souza Salles

**UFRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL DO  
RIO DE JANEIRO**  
Reitor: Aloísio Teixeira

**UFRRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL  
DO RIO DE JANEIRO**  
Reitor: Ricardo Motta Miranda

**UNIRIO - UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO  
DO RIO DE JANEIRO**  
Reitora: Malvina Tania Tuttman



## SUMÁRIO

Aula 1 – Cálculo I - um curso para quem quer viver <del>limite</del> _____	7
Mário Olivero / Nancy Cardim	
Aula 2 – Limites de funções - algumas propriedades _____	21
Aula 3 – Limites laterais e mais algumas propriedades dos limites de funções _____	35
Aula 4 – O limite trigonométrico fundamental _____	49
Aula 5 – Limites envolvendo infinito - primeira parte _____	65
Aula 6 – Limites envolvendo infinito - segunda parte _____	81
Aula 7 – Continuidade das funções reais _____	97
Aula 8 – O Teorema do Valor Intermediário _____	113
Aula 9 - Funções deriváveis _____	129
Aula 10 - Propriedades de funções deriváveis _____	139
Aula 11 - Exercícios resolvidos _____	149
Aula 12 - A regra da cadeia _____	157
Aula 13 - Derivação implícita _____	167
Aula 14 - Velocidade e aceleração. Taxa de variação _____	175
Aula 15 - Exercícios resolvidos _____	183



# Aula 1 – Cálculo I – um curso para quem quer viver no *limite*!

Apesar da fonte ser obscura,  
ainda assim o regato corre.

*Poincaré*

## Meta da aula

- Apresentação da disciplina Cálculo I.

## Objetivo

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Calcular limites finitos de funções racionais.

A partir desta aula, você entrará num universo novo, surpreendente. As idéias, os conceitos e as técnicas que você aprenderá neste semestre lhe permitirão resolver problemas que eram completamente inacessíveis mesmo aos matemáticos mais geniais da Antiguidade.

O que vai diferenciar o Cálculo I de todas as outras disciplinas que você já cursou até agora é a maneira como lidaremos com as idéias que envolvem o conceito de infinito.

Neste sentido, o Cálculo I é um portal que separa a Matemática Clássica – gerada na Grécia antiga e aprofundada ao longo dos séculos, passando pela Idade Média, recebendo contribuições de diversas culturas, como a hindu e a árabe – da Matemática Contemporânea, que lida com problemas elaborados, tais como o cálculo de órbitas de satélites, ou que serve para expressar as mais diversas teorias da Física Moderna, por exemplo.

O vulto da Antiguidade que mais se aproximou dos mistérios que seriam revelados com o advento do Cálculo foi Arquimedes, certamente um dos maiores gênios matemáticos de todos os tempos.

## CÁLCULO I

A principal ferramenta matemática que será usada para lidar com o infinito, seja infinitamente grande ou infinitamente pequeno, é chamada limite.

Nossa tarefa será estudar o limite aplicado às funções reais, de uma variável real. O limite será peça fundamental para estabelecer as noções de continuidade e diferenciabilidade dessas funções, assim como na definição de integral, que será apresentada posteriormente, no Cálculo II.

Introduzir a noção de limite não é tarefa fácil. Basta pensar que, apesar de sua formulação ter sido feita por Newton e Leibniz, independentemente, por volta de 1670, o conceito tal como é conhecido hoje só foi plenamente estabelecido com os trabalhos de Augustin-Louis Cauchy e de Karl Weierstrass, no meio do século XIX.

No entanto, é bom lembrar que a falta de rigor, estabelecido posteriormente, não impediu que vários membros da família Bernoulli, que Euler, Lagrange e tantos outros, explorassem e descobrissem aplicações dessas idéias tão importantes.

Neste primeiro curso sobre esse assunto, optamos por uma abordagem mais prática do que teórica. Inclusive, porque estamos falando de um curso de Cálculo! No entanto, isto não impedirá que tratemos esses conteúdos com clareza e precisão.

Muito bem! Mãos à obra!

## Funções

As funções reais, de uma variável real, serão o nosso principal objeto de estudo. Elas já tiveram uma grande participação no conteúdo de Pré-Cálculo, mas agora ocuparão toda a ementa.

Na verdade, lidaremos com as funções  $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ , nas quais o subconjunto  $A$ , da reta real, é uma união de intervalos.

Vamos reafirmar uma convenção que já deve prevalecer desde o Pré-Cálculo. Você já sabe, uma função consiste de uma tripla – o *kit* função: o domínio, o contradomínio e a lei de definição. Aqui está um exemplo.

### Exemplo 1.1

Considere  $f : \mathbb{R} - \{3\} \longrightarrow \mathbb{R}$  a função definida por  $f(x) = \frac{1}{x-3} + 2$ .



$$f: \mathbb{R} - \{3\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \frac{1}{x-3} + 2$$

Neste caso, o domínio é  $\mathbb{R} - \{3\}$ , o contradomínio é  $\mathbb{R}$  e a lei de definição é  $f(x) = \frac{1}{x-3} + 2$ .

Observe que o conjunto imagem de  $f$ ,  $\text{Im}(f)$ , é uma consequência da própria definição e, portanto, não precisa ser declarado.

### Atividade 1.1.

Determine o conjunto imagem da função  $f$ , dada no exemplo anterior.

A convenção estabelecida é: quando nos referimos a uma função e mencionamos apenas a sua lei de definição, estamos considerando que seu domínio é o maior subconjunto de  $\mathbb{R}$  no qual esta lei de definição faz sentido. Neste caso, o contradomínio é  $\mathbb{R}$ .

### Atividade 1.2.

Determine o domínio da função  $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x+2}}$ .

## Gráficos de funções

Antes de iniciarmos o estudo dos limites de funções, é bom lembrar mais um aspecto da teoria de funções – os gráficos.

Você sabe que, dada uma função  $f$ , digamos,

$$f: A \longrightarrow B$$

$$x \longmapsto f(x) ,$$

podemos considerar

$$G_f = \{ (x, y) \in A \times B; y = f(x) \},$$

o gráfico de  $f$ , um subconjunto do produto cartesiano  $A \times B$ .

O gráfico da função  $f$  é uma consequência de sua definição, mas, dado  $G_f$ , podemos *reconstruir* a função  $f$ . Dessa forma, podemos nos referir à função  $f$  ou ao seu gráfico como se fossem, essencialmente, o mesmo objeto.

## CÁLCULO I

A grande vantagem do gráfico, especialmente no caso das funções reais de uma variável real, é que ele pode ser esboçado como um subconjunto do plano cartesiano. Isso permite uma enorme interface entre a álgebra (ou talvez, mais apropriadamente, a análise matemática) e a geometria. Dessa maneira, podemos simplesmente *desenhar* funções, ampliando enormemente nosso estoque de exemplos.

Na verdade, uma das principais metas do nosso curso consiste em desenvolver ferramentas matemáticas que permitirão, a partir da lei de definição de  $f$ , esboçar, com bastante precisão, o seu gráfico.

Só para lembrar uma técnica elementar de esboçar gráficos, veja o exemplo a seguir.

## Exemplo 1.2

Sabendo que o gráfico da função  $f(x) = \frac{1}{x}$  é a hipérbole esboçada na figura a seguir, vamos esboçar o gráfico da função  $g(x) = \frac{2x+3}{x+1}$ .

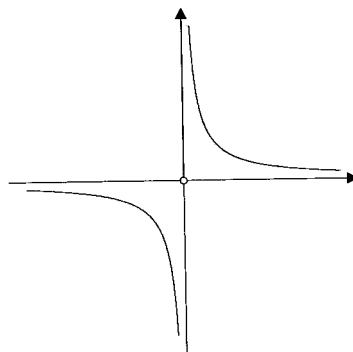


Figura 1.1  
Gráfico da função  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

Você deve ter notado que o domínio de  $f$  é o conjunto  $\mathbb{R} - \{0\}$  e que o domínio de  $g$  é  $\mathbb{R} - \{-1\}$ .

A idéia aqui será escrever  $g$  em termos de  $f$ , a menos de operações algébricas simples, que possam ser interpretadas geometricamente.

Um truque algébrico muito útil consiste em *reescrever* certas expressões algébricas de forma que elas possam ser *lidas* mais facilmente. Veja como isso funciona neste caso.

$$\frac{2x+3}{x+1} = \frac{2x+2+1}{x+1} = \frac{2(x+1)}{x+1} + \frac{1}{x+1} = 2 + \frac{1}{x+1}.$$

Ou seja, podemos reescrever a lei de definição de  $g$  como

$$g(x) = \frac{1}{x+1} + 2.$$

Assim fica mais fácil perceber o *parentesco* que há entre  $f$  e  $g$ .

$$g(x) = f(x + 1) + 2$$

Essa fórmula nos diz que, para obter o gráfico de  $g$  a partir do gráfico de  $f$ , precisamos fazer duas translações: uma na direção do eixo  $Ox$  e outra na direção do eixo  $Oy$ .

Aqui está um estágio intermediário. O gráfico da função

$$h(x) = f(x + 1) = \frac{1}{x + 1},$$

cujo domínio é  $\mathbb{R} - \{-1\}$ , pode ser obtido transladando o gráfico de  $f$  de uma unidade para a esquerda. Veja que o fenômeno que ocorre em  $x = 0$ , no gráfico de  $f$ , ocorre em  $x = -1$ , no gráfico de  $h$ .

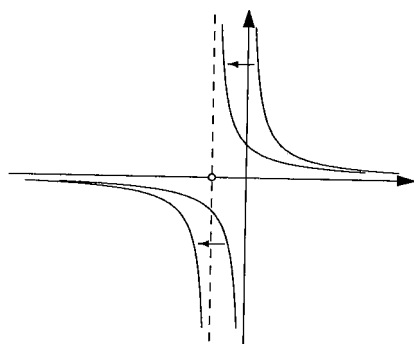


Figura 1.2

Gráfico de  $h$  obtido do gráfico de  $f$  por uma translação.

Para obter o gráfico de  $g$ , observe que

$$g(x) = \frac{1}{x + 1} + 2 = h(x) + 2.$$

Isto quer dizer que você pode obter o gráfico de  $g$  a partir do gráfico de  $h$ , transladando-o duas unidades para cima. O fenômeno que ocorre em  $y = 0$  no gráfico de  $h$  ocorre também em  $y = 2$  no gráfico de  $g$ .

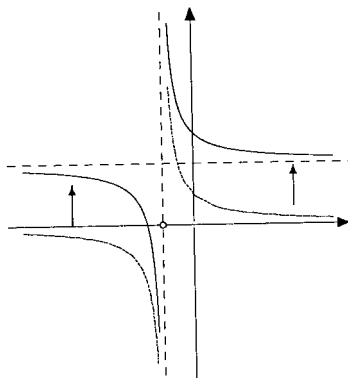


Figura 1.3

Gráfico de  $g$  obtido do gráfico de  $h$  por uma translação.

### Atividade 1.3.

Esboce o gráfico da função  $g(x) = \frac{1}{x-2} + 1$ .

## Funções à beira de um ataque de limites

Nesta seção, queremos lhe dar uma clara idéia do que significa o símbolo

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

sem escrever uma definição *oficial*.

Caso isso seja contra os seus princípios, ou ainda, se a sua curiosidade for do tamanho daquela que matou o gato, você poderá encontrar a definição (oficial) de limites de funções reais, de uma variável real, na aula *Limite e continuidade*, do Módulo 2, volume 2, de Cálculo II.

No entanto, acreditamos que, por agora, esta abordagem informal será mais conveniente.

Começamos com aquela atitude de reconhecimento típica das crianças que desmontam o brinquedo “para saber como é por dentro”, antes de qualquer coisa.

Muito bem, temos a função  $f$  (ou melhor, a lei de definição de  $f$ ), uma constante  $a$ , que aparece em  $x \rightarrow a$ , logo abaixo da abreviação de limite, e outra constante, o  $L$ .

A frase matemática,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , deve ser lida da seguinte maneira: o limite da função  $f$ , quando  $x$  tende para  $a$ , é  $L$ . Ou ainda, o limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende a  $a$  é  $L$ .

Ótimo! Acredito que você deve estar cheio de perguntas a respeito disso tudo. Veja se acerta algumas delas:

1. Qual é a relação de  $a$  com o domínio de  $f$ ? Será que  $a$  pertence ao domínio de  $f$ ? Será que não?
2. Por que usamos letra minúscula para a constante  $a$  e letra maiúscula para a constante  $L$ ?
3. Para que serve o limite? Teria a resposta desta pergunta algo a ver com a definição não-oficial que pretendemos dar para o limite?

Puxa! Vamos respirar um pouco!

Agora, podemos responder à primeira pergunta assim: o ponto  $a$  não precisa, necessariamente, pertencer ao domínio de  $f$ , mas deve estar *bem posicionado* em relação a ele.

É importante esclarecer este ponto. Em primeiro lugar, estaremos lidando apenas com funções cujos domínios são uniões de intervalos. Esses intervalos podem ser abertos, fechados, semi-fechados, infinitos etc. Veja bem, podemos considerar limites para o caso de funções com domínios menos *regulares* do que estes que estamos considerando. Mas, por agora, isto basta.

Muito bem, queremos que haja um número  $r > 0$ , tal que

$$(a - r, a) \cup (a, a + r) \subset \text{Dom}(f).$$

Em termos menos técnicos, queremos que a função esteja definida em alguma *vizinhança em torno de  $a$* , exceto, possivelmente, em  $a$ .

Veja, uma *vizinhança em torno de  $a$*  é um intervalo aberto contendo  $a$ .

### Exemplo 1.3

Se o domínio de  $f$  é  $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$ , podemos considerar

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x),$$

apesar de  $f$  não estar definida em 3.

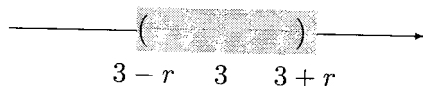


Figura 1.4

A região sombreada indica a vizinhança de 3.

Esta frase nos coloca bem no espírito da coisa. O limite lida, o tempo todo, com proximidade, vizinhanças, tão próximo quanto quisermos etc.

Observe que os casos nos quais  $f$  está definida apenas em um dos lados do ponto, como em 2, caso  $\text{Dom}(f) = (2, 5]$ , ou 5, no mesmo caso, serão abordados futuramente quando estudarmos o conceito limites laterais.

Portanto, focando na primeira pergunta, queremos que haja um número  $r > 0$  (que pode ser tão pequeno quanto precisarmos), tal que

$$(a - r, a) \cup (a, a + r) \subset \text{Dom}(f).$$

Qual era mesmo a segunda pergunta? Ah, sim! Usamos letra minúscula para  $a$  e letra maiúscula para  $L$  por tradição. Quase todo mundo faz assim.

Decepcionado? Bem, na verdade, uma boa razão para isso é enfatizar que  $a$  se relaciona com o domínio de  $f$  enquanto  $L$  se relaciona com a imagem, contida no contradomínio de  $f$ .

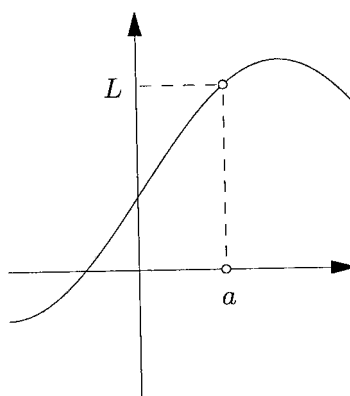


Figura 1.5

Exemplo de uma típica situação onde  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ .

Agora, a última pergunta: para que serve o limite?

O limite é uma ferramenta que permite descrever o comportamento da função  $f$  nas vizinhanças de um dado ponto  $x = a$ . Esse momento exige de você um certo esforço. Veja, você já sabe que a função pode ser vista como um instrumento que *transforma* a variável independente  $x$  na variável dependente  $y = f(x)$ . Podemos, portanto, imaginar uma situação dinâmica: a cada valor atribuído a  $x$ , obtemos correspondente valor  $f(x)$ . Muito bem, o limite descreve como  $f(x)$  se comporta quando a variável  $x$  toma valores *mais e mais próximos* de  $a$ . É claro que, nas situações em que o comportamento da função é previsível, o limite não acrescenta informações muito surpreendentes. Por exemplo,

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 1 = 5.$$

Isso significa que, se tomarmos valores próximos de 2,  $x^2 + 1$  assumirá valores próximos de 5. Realmente, se fizermos  $x = 2 + h$ , teremos

$$f(2 + h) = (2 + h)^2 + 1 = 4 + 2h + h^2 + 1 = 5 + 2h + h^2.$$

Para valores pequenos de  $h$ , os valores correspondentes de  $f(2 + h)$  estarão próximos de 5. Neste caso, 2 é elemento do domínio de  $f$ , uma função polinomial, e o limite coincide com o valor da função no ponto  $f(2) = 5$ . Veja, esta é uma situação de muita regularidade, como veremos mais adiante. De uma certa forma, o limite não foi criado para essas situações. Vamos, portanto, considerar uma situação mais interessante. Como diria o investigador, diga-me algo que eu ainda não sei!

## Um exemplo de importância histórica – velocidades médias e velocidade instantânea

Velocidade é um conceito tão divulgado na nossa cultura que não pensamos muito nela. Mas, se considerarmos a questão da velocidade instantânea – o carro do piloto campeão cruzou a linha de chegada a 187,56 km/h –, mesmo que por um breve instante, veremos que estamos lançando mão de um conceito sofisticado. A velocidade instantânea é a taxa de variação da posição em relação ao tempo calculada no preciso momento em que, digamos, o carro cruzou a linha de chegada.

Pense um pouco: do que, realmente, dispomos para estabelecer essa velocidade instantânea?

Pensou? Muito bem! Para começar, dispomos das velocidades médias. Este será nosso modelo nesta seção: a velocidade instantânea será obtida como um limite das velocidades médias. Vamos a um exemplo.

### Exemplo 1.4

Digamos que, após uma série de testes num laboratório, chegou-se à conclusão de que a função

$$s(t) = t^2 + 3t + 10$$

descreve o deslocamento de um carrinho de experiências. Isto é,  $s(t)$  é a posição, dada em centímetros, em função do tempo  $t$ , dado em segundos (digamos). Assim, no tempo  $t = 0$ , o carrinho estava a 10cm do ponto de referência, na direção positiva.

Queremos calcular a velocidade do carrinho no instante  $t = 1$ .

## CÁLCULO I

Começamos com o que dispomos: a velocidade média do carro entre os instantes  $t$  e 1:

$$v_m(t) = \frac{s(t) - s(1)}{t - 1}.$$

Usamos o índice  $m$  para indicar que essa é uma velocidade média. Além disso, como estamos interessados no específico instante 1, consideramos  $v_m$  como uma função apenas de  $t$ .

Veja, a função  $s(t) = t^2 + 3t + 10$  está bem definida, *a priori*, para quaisquer valores de  $t$ , apesar de o trilho onde a experiência foi feita ser finito. No entanto, estamos interessados na nova função  $v_m(t)$ , que está bem definida em todos os valores de  $t$  menos, exatamente, no ponto 1, em questão. De uma certa forma, gostaríamos de dizer que a velocidade no instante 1 é  $v_m(1)$ , mas não podemos fazer isso.

Para contornar esse impasse, vamos estudar o comportamento da função  $v_m(t)$  quando os valores de  $t$  estão sendo tomados mais e mais próximos de 1, justamente no ponto em que ela não está definida e no qual estamos interessados.

$$\lim_{t \rightarrow 1} v_m(t) = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{s(t) - s(1)}{t - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2 + 3t + 10 - 14}{t - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2 + 3t - 4}{t - 1}.$$

Atenção! Está na hora de aprender algo novo! É inútil tentar calcular diretamente o valor da expressão  $\frac{t^2 + 3t - 4}{t - 1}$ , para  $t = 1$ . No entanto, podemos descobrir os valores de  $v_m(t)$ , para valores próximos de 1, porém diferentes.

Faremos isso de duas maneiras (ligeiramente diferentes).

Primeiro, vamos fazer  $t = 1 + h$ , com  $h \neq 0$ . Assim,

$$v_m(1 + h) = \frac{(1 + h)^2 + 3(1 + h) - 4}{1 + h - 1} = \frac{1 + 2h + h^2 + 3 + 3h - 4}{h} = \frac{5h + h^2}{h}.$$

Veja, para  $h \neq 0$ ,  $v_m(1 + h) = 5 + h$  e, para valores de  $h$  mais e mais próximos de 0, temos  $v_m(1 + h)$  mais e mais próximo de 5.

Assim, diremos que

$$\lim_{t \rightarrow 1} v_m(t) = 5.$$



Parece bom, não?

Vamos tentar a segunda abordagem. Você observou que 1 é uma raiz do polinômio  $t^2 + 3t - 4$ . Portanto, este polinômio se fatora, sendo  $t - 1$  um dos seus fatores. Na verdade,  $t^2 + 3t - 4 = (t - 1)(t + 4)$ .

Ótimo! Observe as expressões

$$\frac{(t + 4)(t - 1)}{t - 1} \quad \text{e} \quad t + 4.$$

Elas são diferentes, pois a primeira não está definida em  $t = 1$ .

No entanto, se  $t \neq 1$ , então podemos usar qualquer uma delas para calcular  $v_m(t)$ .

Assim,

$$\lim_{t \rightarrow 1} v_m(t) = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t + 4)(t - 1)}{t - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} t + 4,$$

e o último limite é, claramente, 5.

Concluimos que a velocidade do carrinho no instante  $t = 1$  é 5 cm/s.

## Considerações finais

Você deve estar cansado e com várias coisas para pensar. Pare por aqui, pois você ainda tem os exercícios para fazer.

Veja, esta aula foi o seu primeiro contato com um conceito importante e difícil: o limite de uma função.

Você deve guardar que o limite serve para indicar o comportamento de uma função nas vizinhanças de um certo ponto sem que seja necessário saber o valor da função neste ponto. Na verdade, a função não precisa estar definida no ponto para que consideremos o limite, basta que ela esteja definida *em torno dele*. Na verdade, as principais situações de interesse ocorrem quando não sabemos o valor da função no ponto em questão, como no exemplo 1.4.

Na próxima aula nos concentraremos mais no aspecto gráfico do limite e aprofundaremos as idéias que foram apresentadas aqui. Até lá!

## CÁLCULO I

## Exercícios

1. Calcule o domínio das seguintes funções:

$$(a) f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - x - 6}{1 - x}} ; \quad (b) g(x) = \ln \left( 1 - \frac{x}{x - 3} \right) ;$$

$$(c) h(t) = \sqrt{t - 2} + \frac{1}{\sqrt{5 - t}} ; \quad (d) k(y) = \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{y} \right) .$$

2. Use a técnica ilustrada no exemplo 1.2 para esboçar os gráficos das seguintes funções:

$$(a) f(x) = \frac{3x - 2}{x - 1} ; \quad (b) g(x) = |x + 2| - 2 ;$$

$$(c) h(x) = 2 + \sqrt{x - 4} ; \quad (d) k(x) = -1 + \ln(x + 3) .$$

3. Da mesma forma que obtivemos a velocidade instantânea a partir das velocidades médias, podemos obter a aceleração instantânea.

Suponha que  $v(t) = t^2 - 4t + 2$  descreva a velocidade de uma partícula que se desloca em uma trajetória retilínea, dada em cm/s. Considerando

$$a_m(t) = \frac{v(t) - v(1)}{t - 1},$$

a aceleração média desse movimento, entre os instantes  $t$  e  $1$ , calcule a aceleração desse movimento no instante  $t = 1$ .

Você poderia interpretar o resultado obtido?

Qual é a aceleração desse movimento no instante  $2s$ ?

4. O custo da produção de sabonetes por dia de trabalho em uma certa fábrica é dado pela equação

$$c(x) = 300 + 0.0005x^2 - 0.02x,$$

onde  $x$  é o número de sabonetes produzidos no dia e  $c(x)$  é dado em reais. Assim, para produzir 1000 sabonetes em um dia, gasta-se  $c(1000) = 780$ , ou seja, setecentos e oitenta reais.

Nesta escala, podemos considerar um sabonete a mais, por dia, um infinitésimo.

Calcule, então, a taxa de variação do custo por dia, se a produção de 1000 sabonetes for passada para 1001 e compare o resultado com

$$\lim_{x \rightarrow 1000} \frac{c(x) - c(1000)}{x - 1000} .$$

Acho que você pode usar uma calculadora.

5. Calcule os seguintes limites:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$  ;

(b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 3x + 2}$  ;

(c)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$  ;

(d)  $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^2 - 2}{x^2 + \sqrt{2}x - 4}$  .



## Aula 2 – Limites de funções – algumas propriedades

Good girls go to heaven;  
Bad girls go everywhere.

Frase de pára-choque de caminhão

americano, que diz algo como

“Garotas bem comportadas vão para o céu;

Garotas sapecas vão a todos os lugares”.

### Meta da aula

- Continuar a apresentação de limites de funções.

### Objetivo

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Calcular graficamente limites finitos de funções.
- Usar certas propriedades de limites para calculá-los.

Nesta aula, você dará continuidade à construção do conceito

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L,$$

que foi iniciada na aula anterior. Será dada atenção especial ao aspecto gráfico do conceito. Você aprenderá algumas propriedades que permitirão determinar o limite em alguns casos, além de entender que algumas funções não são *tão bem comportadas* nas vizinhanças de certos pontos, ou seja, começaremos a reconhecer algumas situações em que as funções não admitem limites.

Muito bem, você aprendeu que usamos o limite para descrever o comportamento de uma função  $f$  nas vizinhanças de um dado ponto, digamos  $a$ . Veja o exemplo a seguir.

## CÁLCULO I

## Exemplo 2.1

Considere o limite

$$\lim_{x \rightarrow 1/4} \text{sen}(2\pi x) = 1.$$

Realmente, se  $x$  toma valores próximos de  $1/4$ , a função  $y = 2\pi x$  toma valores próximos de  $\pi/2$  e os senos de tais arcos são mais e mais próximos do número 1.

Essa é uma situação de bastante regularidade. Veja o gráfico de  $f(x) = \text{sen}(2\pi x)$  na figura a seguir.

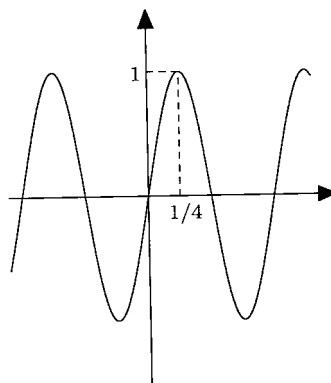


Figura 2.1

Gráfico da função  $f(x) = \text{sen}(2\pi x)$ .

Vamos, no próximo exemplo, fazer um exercício inverso. Em cada caso, primeiro observe o gráfico e, em seguida, veja como o gráfico determina o limite, indicado abaixo da figura.

## Exemplo 2.2

Em cada caso, a informação será obtida diretamente do gráfico da função. Em muitas situações, é mais simples desenhar o gráfico de uma função que ilustra uma certa propriedade do que encontrar especificamente sua lei de definição.

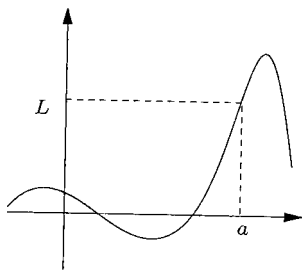


Figura 2.2  
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

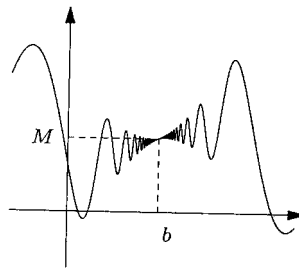


Figura 2.3  
 $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = M$

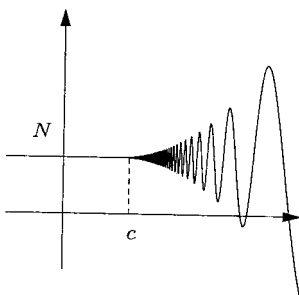


Figura 2.4  
 $\lim_{x \rightarrow c} h(x) = N$

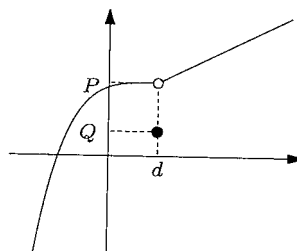


Figura 2.5  
 $\lim_{x \rightarrow d} k(x) = P$  e  $k(d) = Q$

Você percebeu que a função  $f$  não precisa estar definida no ponto em questão para que consideremos o limite neste ponto. No entanto, é necessário que  $f$  esteja definida numa região em torno do ponto considerado.

Também é possível que a função esteja definida no ponto em que calculamos o limite e o valor do limite não coincida com o valor da função, como foi ilustrado no caso da função representada pela Figura 2.5 no Exemplo 2.2.

### Atividade 2.1.

Considerando o gráfico de  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , esboçado na figura a seguir, determine:

- |                                    |                                   |                                   |
|------------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| (a) $f(-2)$                        | (b) $f(0)$                        | (c) $f(2)$                        |
| (d) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ | (e) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ | (f) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ |

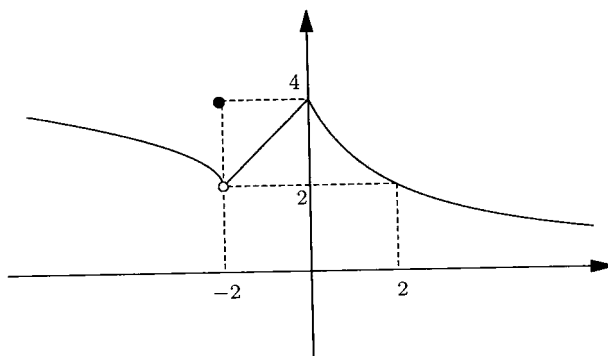


Figura 2.6  
Gráfico da função  $f$ .

Você viu que situações mais interessantes ocorrem quando a função não está definida no ponto em questão ou a lei de definição da função se aplica aos pontos próximos dele mas não se aplica nele, especificamente. Veja mais um exemplo no qual algo assim ocorre.

Exemplo 2.3

Considere  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2} & \text{se } x \geq 0 \text{ e } x \neq 2; \\ 1 & \text{se } x = 2. \end{cases}$$

Vamos calcular  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .

Costumamos dizer que tal função tem uma *indeterminação* em  $x = 2$ , pois, apesar de  $f$  estar definida em  $x = 2$ , não sabemos qual é o seu comportamento nas vizinhanças desse ponto. Queremos saber, então, o que acontece com os valores de  $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2}$  quando tomamos valores para  $x$  próximos porém diferentes de 2.

Calcular o limite significa *levantar* a indeterminação.

Na aula anterior, você aprendeu um truque para fazer isso: usar álgebra elementar. Resumindo: fatorar!

Basta lembrar que  $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ . Assim, a expressão  $x - 2$  pode ser fatorada da seguinte forma:

$$x - 2 = (\sqrt{x} - \sqrt{2})(\sqrt{x} + \sqrt{2}).$$

Veja,  $\sqrt{x} \sqrt{x} = x$ , pois estamos assumindo que  $x \in [0, +\infty)$ .



Portanto,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{(\sqrt{x} - \sqrt{2})(\sqrt{x} + \sqrt{2})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

Veja o gráfico de  $f$  na figura a seguir.

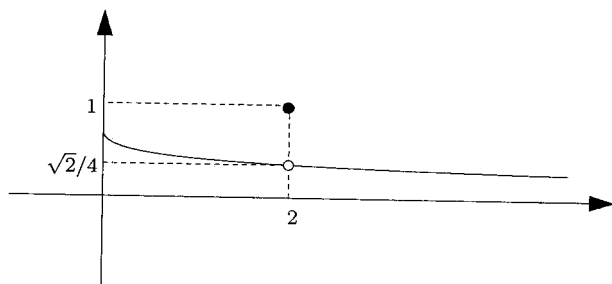


Figura 2.7  
Gráfico da função  $f$ .

Atividade 2.2.

Calcule  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$ .

## Distância entre números reais

Está na hora de aprofundarmos um pouco mais o nosso conceito de

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

Temos usado, com frequência, termos como: vizinhança, proximidade e outros, semelhantes. Esses termos são úteis, pois apelam para a nossa intuição, ajudando-nos a construir o entendimento do conceito, mas precisamos tornar estas idéias um pouco mais precisas, mais *matemáticas*. Para isso, precisamos de uma propriedade do conjunto dos números reais.

O conjunto  $\mathbb{R}$  é munido de uma *distância*, definida pelo módulo de números reais.

Veja, dizemos que a *distância entre os números  $a$  e  $b$*  é  $|a - b|$ . Este conceito é tão natural que quase não notamos a sua importância. Aqui estão algumas de suas propriedades.

# CÁLCULO I

(a) A distância entre dois números é sempre maior ou igual a zero. Na verdade, a distância entre dois números é nula se, e somente se, os números são iguais.

$$\begin{cases} \forall a, b \in \mathbb{R}, & |a - b| \geq 0; \\ |a - b| = 0 & \iff a = b. \end{cases}$$

Isto decorre dos fatos

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, & |x| \geq 0; \\ |x| = 0 & \iff x = 0. \end{cases}$$

(b) A distância entre dois números independe da ordem em que os tomamos. Em símbolos matemáticos, temos:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, |a - b| = |b - a|.$$

Isso é decorrência de  $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = |-x|$ .

(c) Esta terceira propriedade é muito importante, como você verá em breve. Ela será usada diversas vezes ao longo de seus estudos. É chamada *desigualdade triangular*, e envolve três elementos.

$$\forall a, b \text{ e } c \in \mathbb{R},$$

$$|a - b| \leq |a - c| + |c - b|.$$

Veja um diagrama com duas situações possíveis.

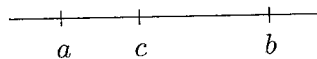


Figura 2.8

$$|a - b| = |a - c| + |c - b|$$

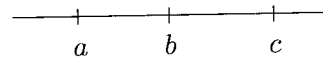


Figura 2.9

$$|a - b| < |a - c| + |c - b|$$

Se  $c$  estiver entre  $a$  e  $b$ , ocorre a igualdade. No outro caso,  $|a - b|$  é estritamente menor do que a soma das outras duas distâncias. No entanto, em ambas as situações, vale

$$|a - b| \leq |a - c| + |c - b|.$$

Podemos usar, por exemplo, a distância para expressar certos conjuntos. Veja na igualdade a seguir.

$$(a - r, a) \cup (a, a + r) = \{x \in \mathbb{R}; 0 < |x - a| < r\}.$$

A desigualdade  $0 < |x - a|$  garante que  $x$  deve ser diferente de  $a$  e a desigualdade  $|x - a| < r$  nos diz que  $x$  está a um raio menor do que  $r$  de  $a$ .

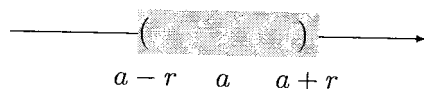


Figura 2.10

### Atividade 2.3.

Expresse os seguintes conjuntos usando uniões de intervalos e represente-os graficamente.

(a)  $\{x \in \mathbb{R}; 0 < |x - 2| < 3\}$ ;      (b)  $\{x \in \mathbb{R}; 0 < |x + 2| \leq 1\}$ ;

(c)  $\{x \in \mathbb{R}; |x - 5| < 4\}$ ;      (d)  $\{x \in \mathbb{R}; |x + 4| \geq 3\}$ .

Chamamos o intervalo aberto  $(a - r, a + r) = \{x \in \mathbb{R}; |x - a| < r\}$  de vizinhança do ponto  $a$ , de raio  $r$ .

Voltamos, agora, nossa atenção para

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

Essa expressão significa que, para cada vizinhança de  $L$ , por menor que seja o seu raio, existe uma vizinhança de  $a$ , de algum raio, tal que as imagens dos pontos dessa vizinhança de  $a$ , porém diferentes do próprio  $a$ , pertencem à vizinhança de  $L$ .

Parece complicado, mas é assim mesmo. Leia o parágrafo anterior novamente e compare com a figura a seguir.

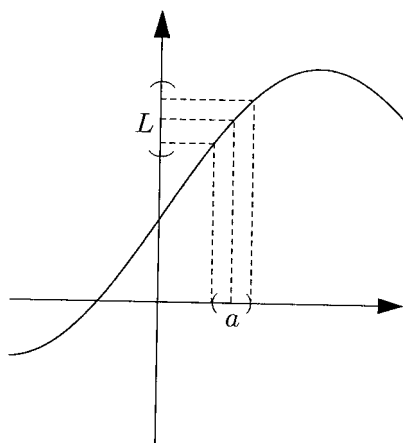


Figura 2.11

Gráfico de função  $f$  tal que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ .

A faixa horizontal indica a vizinhança em torno de  $L$ . A faixa vertical indica a vizinhança em torno de  $a$ . Observe que todos os pontos pertencentes à vizinhança de  $a$  têm imagem por  $f$  na vizinhança de  $L$ . Mais uma vez, essa figura representa uma situação de muita regularidade.

Muito bem! Voltaremos a esse assunto em outras ocasiões. Isso tomou um certo tempo e esforço, mas agora temos mais elementos para discutir algumas das propriedades dos limites de funções.

### Propriedade de unicidade do limite de funções

A primeira propriedade dos limites de funções que estudaremos é a de sua *unicidade*. Veja, se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = M,$$

então,

$$L = M.$$

Para demonstrar essa propriedade, usaremos um argumento bastante típico. Preste atenção, pois ele lhe será útil.

O argumento é o seguinte: se  $|x|$  for tão pequeno quanto se queira, então  $x = 0$ . Em símbolos, temos:

$$\forall r > 0, |x| < r \implies x = 0.$$

Muito bem, vamos demonstrar a propriedade da unicidade do limite. Sabemos que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = M.$$

Da nossa descrição de limite, sabemos que existem valores de  $x$  suficientemente próximos de  $a$ , tais que suas imagens estão arbitrariamente próximas de  $L$  e de  $M$ .

Digamos assim: dado  $r > 0$  qualquer, existe  $x$  suficientemente próximo de  $a$  tal que

$$|f(x) - L| < r/2 \quad \text{e} \quad |f(x) - M| < r/2.$$

Agora, usamos a desigualdade triangular para  $x$ ,  $L$  e  $M$ :

$$\begin{aligned} |L - M| &\leq |L - f(x)| + |f(x) - M| = \\ &= |f(x) - L| + |f(x) - M| < \\ &< r/2 + r/2 = r. \end{aligned}$$

Resumindo, para qualquer  $r > 0$ , conseguimos mostrar que  $|L - M| < r$ . Ora, isso quer dizer que  $L = M$ .

## Exemplos de funções completamente sem limites!

Você acaba de passar por uma espécie de prova de fogo. A argumentação que você acabou de ler é típica de análise matemática. Ela lhe será apresentada novamente, com mais detalhes e, provavelmente, em diferentes versões. Mas, calma, tudo a seu tempo. Agora é hora de colher os frutos desse resultado. Veremos exemplos de funções *malcomportadas*, isto é, veremos algumas situações em que a função  $f$  não admite limite quando  $x$  tende a um determinado ponto.

Como é possível detectar tal coisa?

Veja, sabemos que, se o limite de  $f$ , quando  $x$  tende a  $a$ , é  $L$ , sempre que os valores de  $x$  são tomados arbitrariamente próximos de  $a$ , suas imagens devem estar próximas de  $L$ . O limite é único, como acabamos de mostrar. Portanto, se em alguma situação tivermos pontos arbitrariamente próximos de  $a$ , com imagens arbitrariamente próximas de valores diferentes, digamos  $L_1 \neq L_2$ , saberemos que a função, neste caso, não admite limite.

É comum usar a expressão *não existe limite* de  $f$  quando  $x$  tende a  $a$ , em tais circunstâncias. Confesso uma certa antipatia pela expressão. Daremos preferência à expressão *a função  $f$  não admite limite* quando  $x$  tende a  $a$ .

### Exemplo 2.4

Aqui estão quatro funções que, de um modo ou de outro, não admitem limite em algum ponto. Primeiro, as suas leis de definições e seus domínios. Veja:

$$f(x) = \frac{1-x}{|x-1|}; \quad g(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right);$$

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \\ -1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}; \end{cases} \quad k(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{R} - A, \\ -1 & \text{se } x \in A, \end{cases}$$

onde  $A = \left\{x \in \mathbb{R}; x = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}\right\}$ .

A função  $f$  está definida em todos os  $x \neq 1$  e  $g$  está definida em todo  $x \neq 0$ . As funções  $h$  e  $k$  estão definidas em toda a reta real. Assim,

$$\operatorname{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}; \operatorname{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{0\}; \operatorname{Dom}(h) = \operatorname{Dom}(k) = \mathbb{R}.$$

Agora, seus gráficos:

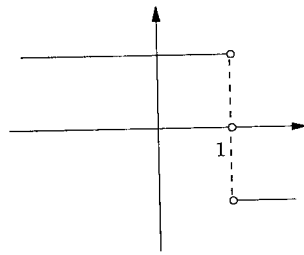


Figura 2.12  
 $\nexists \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

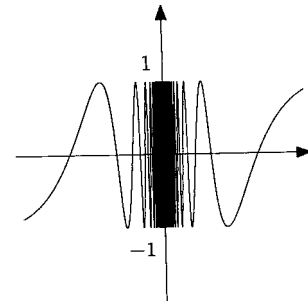


Figura 2.13  
 $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

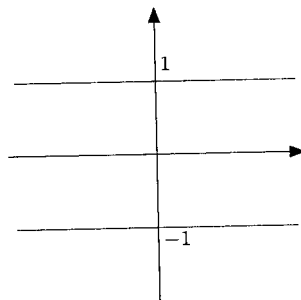


Figura 2.14  
 $\nexists \lim_{x \rightarrow a} h(x), \forall a \in \mathbb{R}$

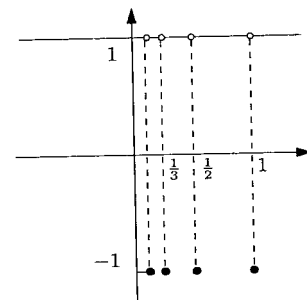


Figura 2.15  
 $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} k(x)$

Vamos, agora, discutir cada um dos quatro casos.

**A função  $f$**

Você pode reescrever a lei de definição de  $f$  como  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 1; \\ -1 & \text{se } x > 1. \end{cases}$

Realmente, se  $x < 1$ ,  $x - 1 < 0$  e  $|x - 1| = -(x - 1) = 1 - x$ . Assim,

$$x < 1 \implies f(x) = \frac{1 - x}{|x - 1|} = \frac{1 - x}{1 - x} = 1.$$

Analogamente,

$$x > 1 \implies f(x) = -1.$$

Para valores próximos de 1, porém maiores do que 1, a função  $f$  assume o valor  $-1$ . Já para valores próximos de 1, porém menores do que 1,  $f$  assume o valor 1. Assim, tão próximo de 1 quanto quisermos, a função  $f$

assume valores diferentes, 1 ou  $-1$ . Ora, isso indica que  $f$  não admite limite quando  $x$  tende a 1, pois caso admitisse, as imagens deveriam estar mais e mais próximas do mesmo ponto: o limite.

### A função $g$

Este exemplo é clássico. Neste caso, à medida que tomamos valores de  $x$  mais e mais próximos de zero, as imagens por  $f$  acumulam-se ao longo de todo o intervalo fechado  $[-1, 1]$ . Note que, enquanto no caso anterior havia dois candidatos a limite, 1 e  $-1$ , neste exemplo há uma exuberância de todo um intervalo de candidatos. Quando esse tipo de situação ocorre (mais do que um candidato a limite), a função não admite limite no ponto em questão, pois sabemos que se há limite, ele deve ser único.

### A função $h$

Parece que há algo de errado com o gráfico desta função, não é? Realmente, duas retas horizontais paralelas não podem ser o gráfico de uma função, pois cada ponto do domínio deve ser associado a um *único* ponto do contradomínio. Bem, o fato é que esse esboço *parece* ter duas retas horizontais. Na verdade, essas retas são como que *porosas*, isto é, na reta superior só aparecem os pontos de primeira coordenada irracional, enquanto a reta inferior é formada pelos pontos de primeira coordenada racional.

Portanto, tão próximo de qualquer ponto quanto quisermos, haverá pontos com valor por  $h$  igual a 1 e pontos com valor por  $h$  igual a  $-1$ . Isso nos diz que essa função não admite limite em *nenhum* dos pontos de seu domínio.

Isso a torna um pouco diferente dos dois casos anteriores, nos quais as funções não admitiam limite em algum determinado ponto da reta real, mas elas admitem limite em todo os outros pontos.

### A função $k$

Nesse caso, o gráfico só está sugerido, pois os pontos cujas primeiras coordenadas são da forma  $\frac{1}{n}$ , para algum número natural  $n$ , pertencem ao gráfico com segunda coordenada  $-1$  (são as bolinhas preenchidas, indicadas embaixo). Ora, tão próximo de zero quanto quisermos, haverá pontos desse tipo, cujas imagens por  $k$  são iguais a  $-1$ , e também haverá pontos que não são dessa forma, e nestes casos, a imagem por  $k$  será 1. Novamente, a função não admite limite em  $x = 0$ .

Esses foram apenas alguns casos de funções que não admitem limites.

# CÁLCULO I

Há uma infinidade de outros exemplos, incluindo casos em que a função não admite limite por outras razões. Veremos mais exemplos nas próximas aulas.

Para terminar esta aula, que já vai um pouco longa, veremos mais uma propriedade dos limites.

## A condição de localidade do limite

Essa propriedade justifica, de alguma forma, a estratégia que temos usado para levantar a indeterminação de alguns limites. Ela realça o fato de que o limite depende apenas do comportamento da função em uma *pequena* vizinhança do ponto em questão.

Sejam  $f$  e  $g$  duas funções tais que, para algum número  $r > 0$ , sempre que  $x \in (a - r, a) \cup (a, a + r)$ , teremos  $f(x) = g(x)$ . Dessa forma, existe  $r > 0$ , tal que

$$0 < |x - a| < r \implies f(x) = g(x).$$

Mais uma vez, as funções  $f$  e  $g$  coincidem em alguma vizinhança do ponto  $a$ , com possível exceção do que ocorre no próprio ponto  $a$ . Então,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

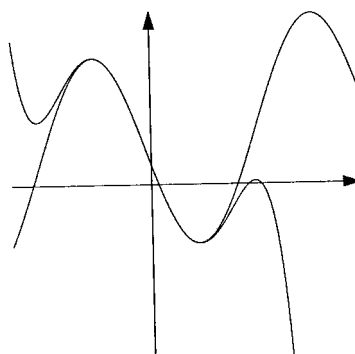


Figura 2.16

Gráficos das funções  $f$  e  $g$ ,  
coincidentes em alguma vizinhança de zero.

Essa propriedade decorre diretamente da definição do limite. Ela permite que substituamos uma função complicada por uma mais simples, no cálculo do limite, contanto que essas funções coincidam em alguma vizinhança do ponto em questão, tal como:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 1}{x - 2} = -2.$$



## Considerações finais

Nesta aula, você explorou ainda mais o conceito de limite de uma função num dado ponto. É importante que você crie o hábito de imaginar a situação gráfica correspondente ao cálculo do limite. Isso fortalecerá a sua visão geométrica do conceito.

Nas próximas aulas, continuaremos a lidar com esse tema. Você aprenderá outras propriedades dos limites, assim como os limites laterais.

Não deixe de fazer os exercícios propostos. Até a próxima aula!

## Exercícios

1. Calcule os seguintes limites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 16} ; \quad (b) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{x^2 - 1} ;$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - 9}{x - 3} ; \quad (d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt[3]{x} - 1} ;$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow -4} \frac{|x| - 4}{x^2 - 16} ; \quad (f) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{3/2} - 1}{x^{1/2} - 1} .$$

Lembre-se:  $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = (a^3 - b^3)$ .

2. Calcule o valor de  $a$ , tal que

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax^2 - 3x - 2ax + 2}{x^2 - 4} = \frac{3}{4}.$$

3. Considere  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por

$$f(x) = |x - 1| - 2.$$

Esboce o gráfico de  $f$  e determine os valores de  $a$ , tais que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -1.$$

4. Usando como modelos as funções apresentadas no exemplo 2.4, desenhe gráficos de funções que não admitem limite quando  $x$  tende a 1.

# CÁLCULO I

5. Considere  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função cujo gráfico está esboçado na figura a seguir. Determine os limites, caso existam, e os valores da função indicados.

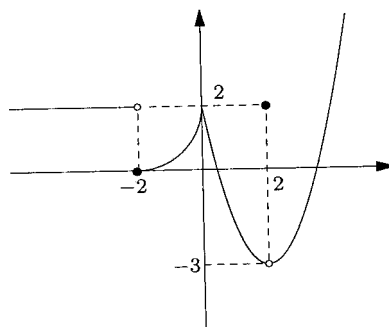


Figura 2.17

Gráfico da função  $g$ .

- (a)  $\lim_{x \rightarrow -2} g(x)$     (b)  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$     (c)  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$   
 (d)  $\lim_{x \rightarrow -3} g(x)$     (e)  $g(-2)$     (f)  $g(2)$

## Aula 3 – Limites laterais e mais algumas propriedades dos limites de funções

### Meta da aula

- Continuar a apresentação de limites de funções.

### Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Calcular limites de funções usando os limites laterais.
- Calcular limites de funções aplicando as propriedades elementares.

Antes de abordar os principais temas desta aula, você aprenderá mais uma estratégia de cálculo de limites, ampliando, assim, o seu já não tão pequeno conjunto de técnicas para levantar indeterminações.

#### Exemplo 3.1

Vamos calcular o limite a seguir.

$$\lim_{t \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2t+1} - 3}{t^2 - 3t - 4}.$$

O limite está indeterminado. Realmente,  $\lim_{t \rightarrow 4} (\sqrt{2t+1} - 3) = 0$  e  $\lim_{t \rightarrow 4} (t^2 - 3t - 4) = 0$ . A técnica que conhecemos para levantar esse tipo de indeterminação é fatorar e simplificar. É claro que o termo que se encontra no denominador se fatora:  $t^2 - 3t - 4 = (t-4)(t+1)$ . No entanto,  $\sqrt{2t+1} - 3$  não é, exatamente, divisível por  $t-4$ . Sendo assim, usaremos uma estratégia diferente. Tentaremos tornar  $\sqrt{2t+1} - 3$  um fator de  $t-4$ .

A chave para resolver o problema está na seguinte identidade algébrica:

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

A idéia é modificar a expressão que define a função, multiplicando o numerador e o denominador pelo *conjugado* do termo  $\sqrt{2t+1} - 3$ , que é  $\sqrt{2t+1} + 3$ . Isso não altera o resultado do limite. Lembra-se da última propriedade de limites de funções, apresentada na aula anterior?

Muito bem, aqui está o cálculo do limite.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2t+1} - 3}{t^2 - 3t - 4} &= \lim_{t \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{2t+1} - 3)(\sqrt{2t+1} + 3)}{(t-4)(t+1)(\sqrt{2t+1} + 3)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 4} \frac{2t+1 - 9}{(t-4)(t+1)(\sqrt{2t+1} + 3)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 4} \frac{2t-8}{(t-4)(t+1)(\sqrt{2t+1} + 3)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 4} \frac{2}{(t+1)(\sqrt{2t+1} + 3)} = \frac{2}{5 \times 6} = \frac{1}{15}. \end{aligned}$$

Veja,  $(\sqrt{2t+1})^2 = 2t+1$ , pois  $2t+1 \geq 0$ , uma vez que o domínio da função é  $[-1/2, +\infty)$ .

Gostou da estratégia? Tente aplicá-la na situação a seguir.

### Atividade 3.1.

Calcule o limite dado a seguir.

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{9-x}}{x^2 - 6x + 5}.$$

Agora, vamos ao primeiro assunto da aula.

## Propriedades elementares dos limites de funções

Uma das coisas que torna o estudo das funções tão interessante é a profusão delas. Há uma quantidade estonteante de funções. Essa abundância se reflete no fato de que, a partir de alguns poucos exemplos, podemos gerar muitos e muitos outros, usando operações que você já conhece do Pré-Cálculo. Vamos listar algumas delas.

Considere as funções  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : B \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , tais que  $A \cap B = C \neq \emptyset$ .

A partir das funções  $f$  e  $g$ , nessas condições, podemos obter as seguintes funções:

(a) (soma)

$$\begin{aligned} (f + g) : C &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) + g(x); \end{aligned}$$

(b) (multiplicação por constante)

$$\begin{aligned} (\alpha f) : A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \alpha \cdot f(x); \end{aligned}$$

(c) (produto)

$$\begin{aligned} (fg) : C &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \cdot g(x); \end{aligned}$$

(d) (inverso multiplicativo)

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{f}\right) : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{f(x)}, \end{aligned}$$

onde  $D = \{x \in A; f(x) \neq 0\}$ .

Veja, usando essas operações de funções, a função identidade  $f(x) = x$  e a função constante  $g(x) = 1$ , podemos obter todas as funções polinomiais, como, por exemplo,  $h(x) = 3x^7 - x^2 - 5x + \sqrt{2}$ .

Como você já deve estar antecipando, o limite de funções funciona muito bem no que diz respeito a essas operações. Veja, se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = M,$$

então

$$(a) \lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x) = L + M;$$

$$(b) \text{ para } \alpha \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow a} (\alpha f)(x) = \lim_{x \rightarrow a} \alpha f(x) = \alpha L;$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = L \cdot M;$$

$$(d) \text{ se, além disso, } L \neq 0, \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{f}\right)(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{L}.$$

As demonstrações dessas propriedades passam da mais simples rotina até o caso de envolver alguma sofisticação. Você terá, ainda nas disciplinas de Cálculo, oportunidade de lidar com elas. No momento, no entanto, nosso principal objetivo é usá-las para calcular limites. Veja, agora, os próximos dois exemplos.

# CÁLCULO I

## Exemplo 3.2

Vamos calcular  $\lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} + \frac{x - 1}{\sqrt[3]{x} - 1} \right]$ . Nesses casos, calculamos separadamente os limites das parcelas.

Primeiro, o cálculo de  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ , que apresenta uma indeterminação. Vamos aplicar, alternativamente, a técnica do conjugado, já utilizada anteriormente no exemplo 3.1.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Note que a segunda parcela também apresenta uma indeterminação:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$ . Neste caso, observe que  $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$ . Assim, podemos fazer, por exemplo:

$$x - 1 = (x^{1/3} - 1)(x^{2/3} + x^{1/3} + 1).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt[3]{x} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^{1/3} - 1)(x^{2/3} + x^{1/3} + 1)}{x^{1/3} - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x^{2/3} + x^{1/3} + 1) = 3. \end{aligned}$$

Como sabemos quais são os limites das parcelas, podemos obter o limite dado inicialmente:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} + \frac{x - 1}{\sqrt[3]{x} - 1} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt[3]{x} - 1} = \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2}.$$

Veja, a seguir, mais um exemplo do uso das propriedades elementares para o cálculo dos limites.

## Exemplo 3.3

Considere  $f$  e  $g$  funções definidas em toda a reta real, tais que

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -2.$$

Então,

$$(a) \lim_{x \rightarrow 2} (2f(x) - g(x)) = \left( 2 \lim_{x \rightarrow 2} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2} g(x) \right) = 2 \cdot 3 - (-2) = 8;$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(f(x))^2 + 1}{g(x)} = \frac{3^2 + 1}{-2} = -5;$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - g(x)}{f(x) + g(x)} = \frac{3 + 2}{3 - 2} = 5.$$

**Atenção:**

Fórmulas como

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \left( \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right)$$

ou

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

só fazem sentido se soubermos, de antemão, que os limites das parcelas (ou fatores, dependendo do caso), são números:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = M.$$

Há uma outra operação com funções, um pouco mais sofisticada do que as que vimos até agora, que permite gerar ainda mais funções – a composição de funções.

O limite também comporta-se muito bem em relação a esta operação. Veja o próximo exemplo.

**Exemplo 3.4**

Sabemos que

$$\lim_{x \rightarrow 2} (2x - 4) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \cos t = 1.$$

Então,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \cos(2x - 4) = 1.$$

Voltaremos a considerar esse assunto em breve, quando estudarmos a noção de continuidade de funções.

Para encerrar essa etapa da aula, sobre as propriedades elementares dos limites, aqui está uma oportunidade para você aplicar o que já aprendeu.

**Atividade 3.2.**

Sabendo que  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -2$  e  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = 4$ , calcule:

$$(a) \lim_{x \rightarrow a} (2g(x) - 3h(x));$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) + (h(x))^2}{2};$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x) - g(x)}{2g(x) - h(x)}.$$

## Limites laterais

Uma das propriedades que caracterizam o conjunto dos números reais é a *boa ordem*. Estamos tão habituados a usá-la que não nos damos conta de sua importância. Ela garante que, dados *dois* números reais  $a$  e  $b$ , temos

$$a > b \quad \text{ou (exclusivo)} \quad a < b.$$

Portanto, dado um número real  $a$ , podemos considerar o conjunto dos números que são maiores do que  $a$  e o conjunto dos números que são menores do que  $a$ .

Esta é uma boa ocasião para estabelecermos uma combinação: tratamos indiferentemente os elementos do conjunto  $\mathbb{R}$  como números reais ou como pontos da reta real, dependendo da situação. Se um apelo geométrico for mais forte, usaremos pontos, caso contrário, usaremos números.

Podemos, portanto, considerar os pontos que estão à direita de  $a$  e os pontos que estão à esquerda de  $a$ .

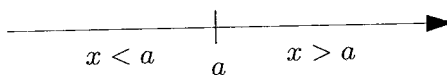


Figura 3.1

Representação dos pontos da reta real em relação ao ponto  $a$ .

A propriedade da *boa ordem* é crucial na definição dos intervalos. Veja, a seguir, um exemplo.

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}.$$

Isso permite uma certa adaptação da definição de limites de funções – os *limites laterais*.

A idéia é a seguinte: queremos estudar o comportamento de uma dada função  $f$  nas vizinhanças de um certo ponto  $a$ , mas queremos considerar, digamos, apenas o caso em que os pontos analisados estão à direita de  $a$ .



Há pelo menos duas situações típicas nas quais tal abordagem pode ser útil:

- (a) a função está definida apenas em um dos lados do ponto em questão;
- (b) a lei de definição da função  $f$  é dada por diferentes expressões, uma para os pontos à direita de  $a$ , outra para os pontos à esquerda.

Exemplo 3.5

As funções  $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$  e  $g(x) = \begin{cases} \text{sen}(2x), & \text{se } x \geq 0, \\ 3x + 5, & \text{se } x < 0, \end{cases}$

ilustram as duas situações. O domínio da função  $f$  é o intervalo fechado  $[-3, 3]$ . Portanto,  $f$  está bem definida à direita de  $-3$ , por exemplo, mas não está definida à sua esquerda.

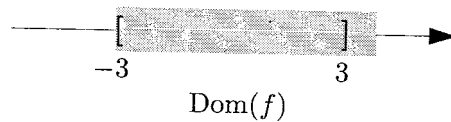


Figura 3.2

Aqui estão os limites laterais.

### Limite lateral à direita de $a$

Considere  $f$  uma função tal que, para algum  $r > 0$ ,  $(a, a + r) \subset \text{Dom}(f)$ . Dizemos que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

Leia: limite de  $f$  quando  $x$  tende a  $a$ , pela direita, é igual a  $L$ .

se, para cada vizinhança de  $L$ , por menor que seja o seu raio, encontramos uma vizinhança de  $a$ , tal que as imagens dos pontos nesta vizinhança, mas que estão à direita de  $a$ , e diferentes de  $a$ , pertencem à vizinhança de  $L$ .

Assim, impomos a condição que  $x$  tende a  $a$ , porém, apenas pelo lado direito.

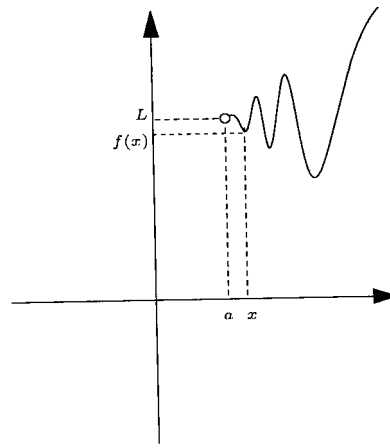


Figura 3.3  
Limite lateral à direita.

### Limite lateral à esquerda de $a$

Analogamente, seja  $g$  uma função tal que, para algum número real positivo  $r > 0$ ,  $(a - r, a) \subset \text{Dom}(g)$ .

Leia: limite de  $g$  quando  $x$  tende a  $a$ , pela esquerda, é igual a  $M$ .

$$\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = M$$

indica o limite de  $g$  quando  $x$  tende a  $a$ , considerando apenas os pontos à esquerda de  $a$ .

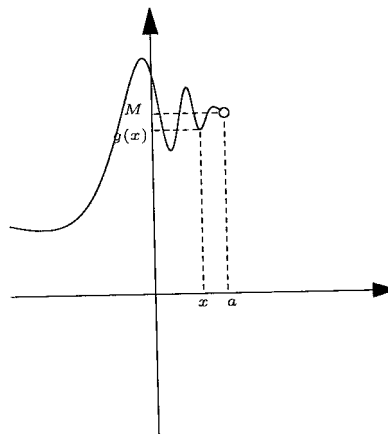


Figura 3.4  
Limite lateral à esquerda.

## O limite e os limites laterais

Decorre da própria construção dos limites laterais que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \\ e \\ \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L. \end{cases}$$

Assim, no caso de  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ , concluímos que  $f$  não admite limite quando  $x$  tende a  $a$ .

### Exemplo 3.6

Considere a função  $f$  dada pela seguinte lei de definição:

$$f(x) = \frac{5\sqrt{3-x}}{x-4}.$$

O domínio de  $f$  é determinado pelas condições

$$3-x \geq 0 \quad e \quad x \neq 4.$$

Ou seja,  $\text{Dom}(f) = (-\infty, 3]$ . Veja,  $f$  não está definida em pontos à direita de 3, mas podemos considerar o comportamento dos valores por  $f$  de pontos próximos a 3, pelo lado esquerdo:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{5\sqrt{3-x}}{x-4} = 0,$$

pois  $\lim_{x \rightarrow 3^-} 5\sqrt{3-x} = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow 3^-} x-4 = -1$ .

Note que as propriedades elementares de limites também valem para os limites laterais.

Veja o esboço do gráfico de  $f$ .

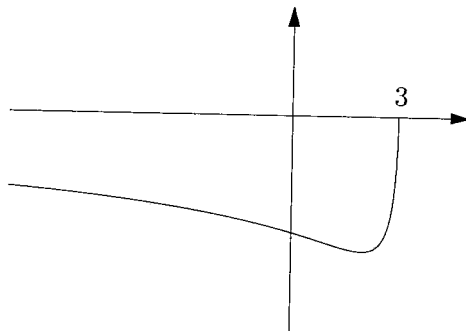


Figura 3.5

Gráfico de  $f$  (tal que  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 0$ ).

# CÁLCULO I

## Exemplo 3.7

Considere, agora, a função  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$g(x) = \begin{cases} \text{sen}(x - 1) + 2, & \text{se } x \geq 1, \\ |x + 1|, & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

Essa função é definida por duas sentenças. Para analisar o comportamento da função  $g$ , nas vizinhanças do ponto 1, usamos os limites laterais.

Vamos considerar, inicialmente, o limite de  $g$  quando  $x$  tende a 1, pela direita.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \text{sen}(x - 1) + 2 = 2.$$

Note:  $x \rightarrow 1^+$  significa que estamos considerando  $x > 1$  e, portanto,  $g(x) = \text{sen}(x - 1) + 2$ .

Agora, o limite quando  $x$  tende a 1, pela esquerda.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} |x + 1| = 2.$$

Veja, agora,  $x \rightarrow 1^-$  significa que  $x < 1$  e, assim,  $g(x) = |x + 1|$ .

Você observou que, apesar das diferentes expressões para  $g$ , à direita e à esquerda de 1,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 2 = \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x).$$

Como os limites laterais são iguais a 2, podemos concluir que  $g$  admite limite quando  $x$  tende a 1:

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2.$$

Veja, a seguir, o gráfico de  $g$ .

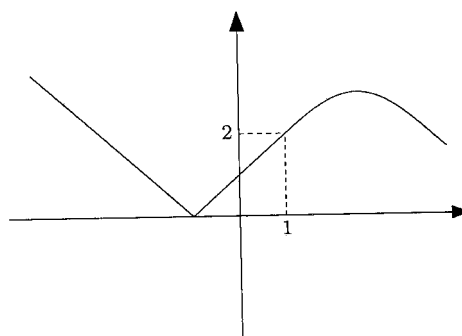


Figura 3.6

Gráfico de  $g$  (tal que  $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = 2 = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$ ).

Veja, agora, um exemplo no qual os limites laterais são diferentes.

### Exemplo 3.8

Considere a função definida por  $h(x) = \frac{|x-1|}{1-x^2}$ , cujo domínio é o conjunto  $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ .

Veja, apesar de a lei de definição da função ser dada por uma única sentença, há duas situações a considerar:  $x > 1$  e  $x < 1$ . Isso se deve à presença do módulo na definição. Novamente, para analisarmos o comportamento da função  $h$  nas vizinhanças de 1, temos de usar os limites laterais.

Primeiro, o limite à esquerda (para variar).

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)}{(1-x)(1+x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x}{(1-x)(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Observe que a condição  $x < 1$ , equivalente a  $x-1 < 0$ , nos diz que  $|x-1| = -(x-1)$ .

Agora, o limite à direita.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x-1|}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)}{(1-x)(1+x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-(1-x)}{(1-x)(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-1}{1+x} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Neste caso, a condição  $x > 1$  garante  $|x-1| = x-1$ .

Veja, a seguir, o gráfico de  $h$  numa vizinhança de 1.

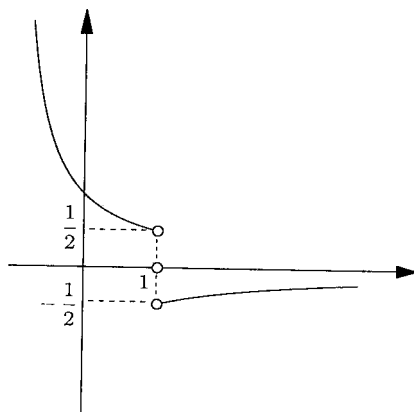


Figura 3.7

Gráfico de  $h$  (tal que  $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x)$ ).

Com essa série de exemplos, terminamos a aula!

## Considerações finais

Nesta aula, você aprendeu mais algumas técnicas para levantar indeterminações, mais algumas propriedades dos limites e conceito de limites laterais.

Não deixe de colocar esses novos conhecimentos em prática, na lista de problemas apresentada a seguir.

## Exercícios

1. Considere  $f$ ,  $g$  e  $h$ , funções definidas nas vizinhanças de 2, tais que  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 2$  e  $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 3$ . Usando essas informações e as propriedades de limites, calcule:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 2} [f(x) + g(x) - h(x)] ; \quad (b) \lim_{x \rightarrow 2} |f(x)g(x) - h(x)| ;$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 2} \left[ \frac{f(x) - g(x)}{h(x)} \right] ; \quad (d) \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{h(x) - f(x)} .$$

2. Diga se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações a seguir, justificando a sua resposta.

a) Se  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = -1$ , então  $\lim_{x \rightarrow 3} [f(x) - g(x)] = 1$ .

b) Se  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5$ , então  $f(3) = 5$ .

c) Se  $f(3) = 5$ , então  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5$ .

d) Se  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -5$ , então  $\lim_{x \rightarrow 3} |f(x)| = 5$ .

3. Calcule os seguintes limites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{4 - x^2} ; \quad (b) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x - 8}{\sqrt[3]{x} - 2} ;$$

$$(c) \lim_{t \rightarrow -3^+} \frac{3 + t}{\sqrt{9 - t^2}} ; \quad (d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x^2} ;$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^{3/2} - 2\sqrt{2}}{x^{1/2} - \sqrt{2}} ; \quad (f) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{2 - \sqrt{x^2 + 3}} .$$

4. Trace o gráfico da função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 5, & \text{se } x \geq 2 \\ x + 1, & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

e calcule, se existirem,  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .

Esboce o gráfico de  $f$ .

5. Considere a função

$$g(x) = \begin{cases} \frac{|x - 2| + 4}{2}, & \text{se } x \geq 2 \\ |x - a|, & \text{se } x < 2, \end{cases}$$

onde  $a$  é uma constante. Sabendo que  $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$ , determine  $a$  e calcule  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ .

Esboce o gráfico de  $g$ .





## Aula 4 – O limite trigonométrico fundamental

### Meta da aula

- Continuar a apresentação de limites de funções.

### Objetivo

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Calcular limites usando o limite trigonométrico fundamental.

### Introdução

Este é um bom momento para fazer um balanço dos conteúdos que você aprendeu nas três aulas anteriores. Em outras palavras, quais conceitos novos você conheceu? Quais limites você é capaz de calcular? Quais serão os próximos passos? Bem, vejamos.

Em primeiro lugar, você deve ter uma clara idéia do significado da frase matemática

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L,$$

inclusive de sua interpretação geométrica.

Isso cobre uma boa parte do conteúdo teórico apresentado, digamos assim. Do ponto de vista prático, você deve saber que a partir das propriedades elementares dos limites de funções, se  $p(x)$  é uma função polinomial, então

$$\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a).$$

Por exemplo,

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} (2x^2 - x - 2) = 2 - \sqrt{2}.$$

## CÁLCULO I

Mais ainda, você já deve dar conta de algumas complicações, tais como calcular

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} \quad \text{ou} \quad \lim_{t \rightarrow 2} \frac{\sqrt{t+2} - 2}{t - 2}.$$

Praticando bem, você deve ter encontrado as respostas 3 e 1/4.

Finalmente, você deve estar fluente na linguagem dos limites laterais.

Você deve ter notado que as funções com que temos lidado até agora são, essencialmente, funções algébricas. Veja, as funções algébricas são aquelas funções cujas leis de definição envolvem um número finito de operações elementares, além das inversas de funções que podem ser assim construídas. Por exemplo, as funções

$$f(x) = \frac{3x - 7}{2x + 1} \quad \text{e} \quad g(x) = (2x + 5)^{2/3}$$

são funções algébricas.

Muito bem, está na hora de incluímos mais algumas funções no nosso repertório de exemplos. As principais candidatas são as funções trigonométricas, que já frequentaram nossas aulas, pelo menos em rápidas aparições nos exemplos. Essas funções, além das funções exponencial e logaritmo, cujas principais propriedades você aprendeu no Pré-Cálculo, formarão a quase totalidade de nossos exemplos.

Para lidarmos com essas funções, chamadas **transcendentes**, precisaremos de novas informações sobre os limites.

Veja, agora, o que queremos estabelecer nesta aula. Vamos mostrar que as funções seno e cosseno são bem comportadas em relação ao limite, isto é, vamos mostrar que, para todo número real  $a \in \mathbb{R}$ ,

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a.$$

Isso parece pouco, mas não é. Nós já usamos essas informações em alguns exemplos, nas aulas anteriores. Tudo o que você aprendeu sobre limites mais o que você já conhece de funções trigonométricas devem levá-lo a crer na veracidade dessas afirmações. Agora temos a oportunidade de prová-las.

Muito bem, uma vez que dispomos dessas informações, passaremos a lidar com problemas tais como calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{x - \pi}.$$

Essas funções, trigonométricas, exponencial e logaritmo, são chamadas transcendentais para diferenciá-las das funções algébricas. Esse nome é usado porque elas *transcendem* o universo das funções algébricas.

Veja, temos duas indeterminações, uma vez que os limites dos numeradores e dos denominadores são iguais a zero. A técnica de que dispomos até o momento para lidar com tais problemas é a fatoração e a simplificação algébrica, que não pode ser usada nesses casos, uma vez que as funções envolvidas são transcendentais.

Como sair dessa situação? A resposta, em muitos casos, está num limite muito especial, chamado limite trigonométrico fundamental. Ele funcionará como uma simplificação, nesses casos. Vamos mostrar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1.$$

Você aprenderá a usar esse limite para levantar várias indeterminações que envolvem funções trigonométricas.

Agora que definimos a agenda da aula, vamos trabalhar.

## Teorema do Confronto

Você está prestes a aprender uma poderosa técnica de cálculo de limites. Ela lhe será útil em muitas situações. Em linhas gerais, o Teorema do Confronto afirma que, se uma função estiver – nas vizinhanças de um dado ponto – *pinçada* por outras duas funções que tenham o mesmo limite nesse tal ponto, então ela terá o mesmo comportamento neste ponto – elas terão o mesmo limite. Veja, novamente, com mais detalhes.

## Teorema do Confronto

Sejam  $f$ ,  $g$  e  $h$  funções tais que, para um certo número  $a$ , existe um número  $r > 0$ , tal que

$$(a - r, a) \cup (a, a + r) \subset \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) \cap \text{Dom}(h)$$

e, para todo  $x \in (a - r, a) \cup (a, a + r)$ ,

$$f(x) \geq g(x) \geq h(x).$$

Nessas condições, se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$ , então

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L.$$

# CÁLCULO I

As funções  $f$  e  $h$  limitam, superior e inferiormente, a função  $g$ . Como ambas têm limite  $L$ , quando  $x$  tende a  $a$ , o mesmo ocorre com  $f$ .

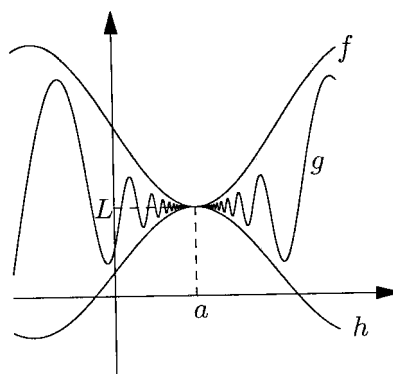


Figura 4.1

Gráficos de funções  $f$ ,  $g$  e  $h$ , tais que  $f(x) \geq g(x) \geq h(x)$ .

Há uma versão gastronômica para o nome desse teorema – Teorema do Sanduíche. Seja lá qual for a sua escolha de nome, você verá que esse teorema é muito útil.

Veja como podemos aplicá-lo, no exemplo a seguir.

### Exemplo 4.1

Seja  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função tal que, se  $|x - 3| < 2$ , então

$$x^2 - 6x + 10 \leq g(x) \leq -\frac{x^2}{3} + 2x - 2.$$

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 1.$$

Realmente, se considerarmos  $f(x) = x^2 - 6x + 10$  e  $h(x) = -\frac{x^2}{3} + 2x - 2$ , um cálculo direto mostra que  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 1$  e  $\lim_{x \rightarrow 3} h(x) = 1$ .

Portanto, o Teorema do Sanduíche garante que  $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 1$ .

Note que podemos adaptar o teorema para o caso dos limites laterais. Por exemplo, se soubermos que, para algum número  $a$ , existe  $r > 0$ , tal que

$$(a - r, a) \subset \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) \cap \text{Dom}(h)$$

e, para todo  $x \in (a - r, a)$ ,

$$f(x) \geq g(x) \geq h(x),$$

com  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} h(x) = L$ , então

$$\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = L.$$

Com as devidas modificações nas hipóteses, obtemos o mesmo resultado para os limites à direita de  $a$ .

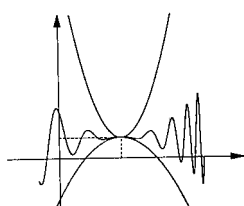


Figura 4.2

Gráficos das funções do Exemplo 4.1.

## Aplicações do Teorema do Confronto

Vamos usar o teorema para calcular alguns limites.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} x = 0.$$

Note que o valor absoluto do seno de um arco é menor ou igual ao valor absoluto do arco. Em outras palavras,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\operatorname{sen} x| \leq |x|.$$

Veja, na figura a seguir, o que ocorre nas proximidades de zero.

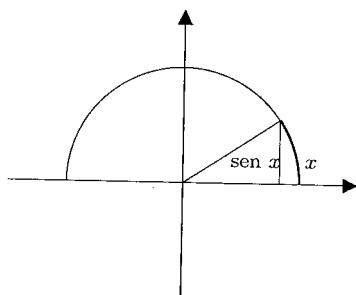


Figura 4.3  
Arco  $x$  com o respectivo seno.

O semicírculo tem raio igual a um (círculo trigonométrico), enquanto  $|\operatorname{sen} x|$  é o comprimento do segmento vertical,  $|x|$  é o comprimento do arco. Dessa forma, se  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$0 \leq |\operatorname{sen} x| \leq |x|.$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$  (limites laterais) e  $\lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$  (limite da função constante igual a zero), obtemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} |\operatorname{sen} x| = 0.$$

Agora, usamos o seguinte:

---

### Lema

Para todo  $a \in \mathbb{R}$ ,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \text{ se, e somente se, } \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0.$$


---

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} x = 0.$$

Acabamos de calcular o primeiro limite de uma função transcendental. Este foi um pequeno grande passo!

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1.$$

Neste caso, usamos o fato de que, para qualquer  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$1 \leq \cos x \leq 1 - |x|.$$

Veja, na figura a seguir, os gráficos das funções  $f(x) = 1$ ,  $g(x) = \cos x$  e  $h(x) = 1 - |x|$ .

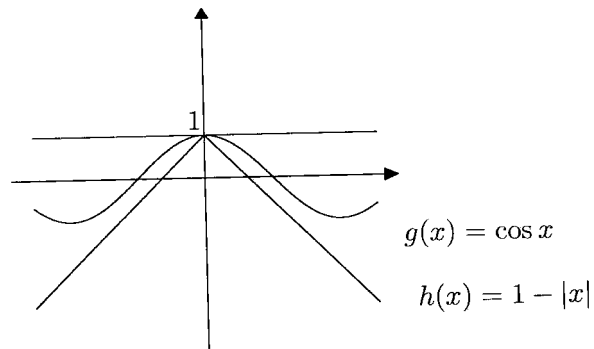


Figura 4.4

Gráficos da função constante 1, cosseno e  $h(x) = 1 - |x|$ .

Como  $\lim_{x \rightarrow 0} 1 - |x| = 1$  e  $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$  (limite da função constante igual a um), obtemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1.$$

#### Atividade 4.1.

Esboce os gráficos das funções  $f(x) = |x|$ ,  $g(x) = \operatorname{sen} x$  e  $h(x) = -|x|$ . Você deverá observar que, para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$-|x| \leq \operatorname{sen} x \leq |x|.$$

Use essa informação para mostrar que  $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} x = 0$ .

## Mudança de coordenada

Um fato que usaremos com alguma frequência é que podemos reescrever certos limites, fazendo uma mudança de coordenadas para facilitar o cálculo.

### Lema

Considere  $a \in \mathbb{R}$  e seja  $x = t + a$ , equivalente a  $t = x - a$ . Então,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ se, e somente se, } \lim_{t \rightarrow 0} f(t + a) = L.$$

A mudança de coordenada corresponde a uma translação da função na direção do eixo  $Ox$ .

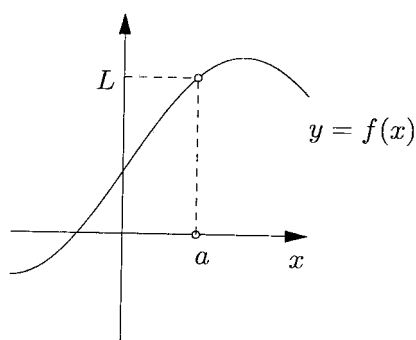


Figura 4.5  
Gráfico da função  $f$ .

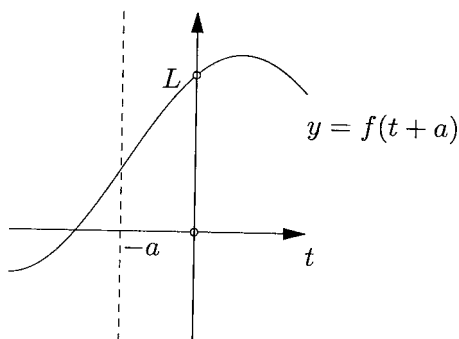


Figura 4.6  
Gráfico da função transladada.

Agora estamos em condições de mostrar que as funções trigonométricas seno e cosseno são *bem comportadas* em relação ao limite. Isso quer dizer que, para todo número real  $a \in \mathbb{R}$ ,

$$\lim_{x \rightarrow a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$$

e

$$\lim_{x \rightarrow a} \operatorname{cos} x = \operatorname{cos} a.$$

Veja, para mostrar que  $\lim_{x \rightarrow a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$ , usamos a identidade trigonométrica  $\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \operatorname{cos} b + \operatorname{cos} a \operatorname{sen} b$ , as propriedades de limites, e os limites  $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} x = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{cos} x = 1$ , que acabamos de calcular, assim como a mudança de coordenadas  $x = t + a$ .

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow a} \operatorname{sen} x &= \lim_{t \rightarrow 0} \operatorname{sen}(t+a) = \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} [\operatorname{sen} a \cos t + \cos a \operatorname{sen} t] = \\
 &= \operatorname{sen} a \left[ \lim_{t \rightarrow 0} \cos t \right] + \cos a \left[ \lim_{t \rightarrow 0} \operatorname{sen} t \right] = \\
 &= \operatorname{sen} a.
 \end{aligned}$$

#### Atividade 4.2.

Use a identidade trigonométrica  $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$  e as propriedades de limites de funções para mostrar, de maneira semelhante ao que acabamos de fazer, que  $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$ .

## O limite trigonométrico fundamental

É hora de lidarmos com novas indeterminações. Como  $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} x = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ , o limite do quociente,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$  é uma indeterminação. Vamos levantar essa indeterminação, mostrando que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Na verdade, vamos mostrar que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1$ .

Aplicaremos, mais uma vez, o Teorema do Confronto. Para começar, observe as figuras a seguir.

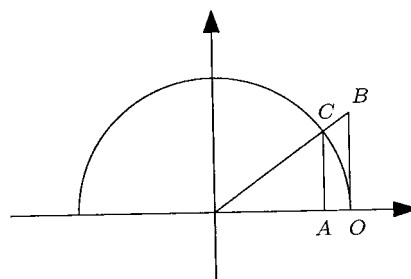


Figura 4.7  
Arco OC positivo.

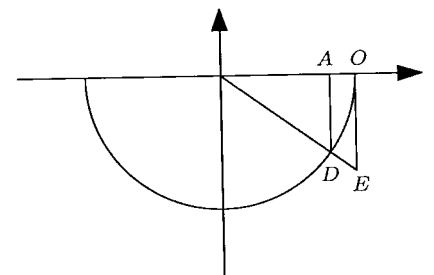


Figura 4.8  
Arco OD negativo.



A Figura 4.7 representa a situação em que o arco  $x$ , que liga  $O$  até  $C$ , é positivo, enquanto a Figura 4.8 representa a situação em que o arco  $x$ , que liga  $O$  até  $D$ , é negativo. Como estamos tomando o limite quando  $x$  tende a zero, basta que consideremos valores de  $x$  suficientemente próximos a zero.

Na situação em que  $x$  é positivo (Figura 4.7), o comprimento do segmento  $OB$  é a tangente do arco  $x$ , enquanto o comprimento do segmento  $AC$  é o seno de  $x$ . Portanto, se  $x$  está suficientemente próximo de zero, com  $x > 0$ , temos

$$\operatorname{sen} x \leq x \leq \operatorname{tg} x.$$

Agora, veja a situação em que  $x$  é negativo (Figura 4.8). O comprimento do segmento  $OE$ , com sinal *negativo*, é a tangente de  $x$  e o comprimento do segmento  $AD$ , com sinal *negativo*, é a tangente de  $x$ . Assim, na situação em que  $x$  está próximo de zero, com  $x < 0$ , temos

$$\operatorname{sen} x \geq x \geq \operatorname{tg} x.$$

Resumindo, se  $x$  é um valor suficientemente próximo de zero,

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen} x \leq x \leq \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \quad \text{se } x > 0; \\ \operatorname{sen} x \geq x \geq \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \quad \text{se } x < 0. \end{array} \right.$$

Multiplicando ambas inequações por  $\frac{1}{\operatorname{sen} x}$  (lembre-se, estamos considerando valores de  $x$  próximos a 0, mas diferentes de 0), obtemos o mesmo resultado,

$$1 \leq \frac{x}{\operatorname{sen} x} \leq \frac{1}{\cos x}.$$

Realmente, no caso  $x < 0$ ,  $\operatorname{sen} x < 0$ , e as desigualdades são invertidas no processo.

Ótimo! Agora, se fizermos  $f(x) = 1$ ,  $g(x) = \frac{x}{\operatorname{sen} x}$  e  $h(x) = \frac{1}{\cos x} = \sec x$ , como  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 1$ , o Teorema do Confronto garante que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1$ . Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{x}{\operatorname{sen} x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Agora que estabelecemos o limite trigonométrico fundamental, vamos apreciá-lo um pouco, do ponto de vista geométrico.

## Interpretação geométrica do limite fundamental

Quando afirmamos que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$ , estamos dizendo que, para valores próximos de zero, a função  $f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$  assume valores mais e mais próximos de 1. Veja o gráfico da função na figura a seguir.

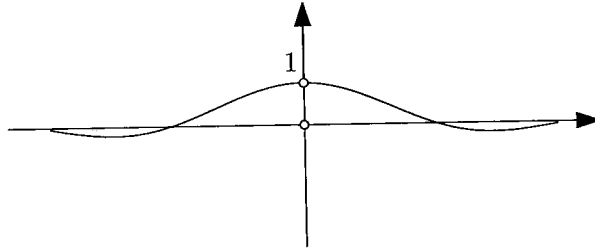


Figura 4.9  
Gráfico da função  $f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$ .

Uma outra interpretação para esse limite é que as funções  $g(x) = \text{sen } x$  e  $h(x) = x$  (função identidade) tornam-se cada vez mais parecidas, à medida que os valores assumidos por  $x$  pertencem a uma pequena vizinhança de zero. Assim, se  $x$  assume valores muito próximos de zero, porém é diferente de zero,  $\text{sen } x \sim x$  e, portanto,  $\frac{\text{sen } x}{x} \sim 1$ . É claro que a maneira adequada de dizer isso é colocar

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1.$$

A informação dada pelo limite é de caráter local, isto é, quanto mais próximos do ponto em questão são tomados os valores de  $x$ , mais precisa será a informação. O limite descreve o comportamento da função em uma pequena proximidade do ponto em questão.

Veja os gráficos de  $g(x) = \text{sen } x$  e de  $h(x) = x$  em duas vizinhanças de zero. Uma de raio bem próximo de zero (Figura 4.11) e outra de raio relativamente maior (Figura 4.10).

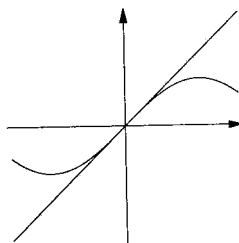


Figura 4.10

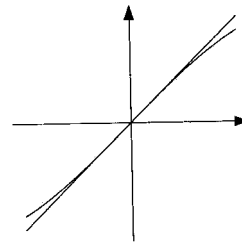


Figura 4.11

Gráficos de  $g$  e de  $h$  numa (grande) vizinhança de zero. Gráfico de  $f$  e de  $g$  numa (pequena) vizinhança de zero.

## Aplicações do limite fundamental trigonométrico no cálculo de outros limites

Do ponto de vista operacional, espera-se que você use o limite trigonométrico fundamental para calcular outros limites trigonométricos. Dessa forma, o limite trigonométrico fundamental faz o papel das fatorações algébricas usadas nas aulas anteriores para calcular os limites.

Para isso, devemos ficar atentos ao argumento da função seno. Veja, se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ , então,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\text{sen}(f(x))}{f(x)} = 1.$$

### Exemplo 4.2

Vamos calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 5x}{x}.$$

Neste caso, o limite do argumento da função seno,  $5x$ , é zero, quando  $x$  tende a 0. O problema é que o denominador difere do argumento por uma constante. Portanto, precisamos fazer um pequeno ajuste. Veja:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 5x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 5 \frac{\text{sen } 5x}{5x} = 5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 5x}{5x} = 5 \cdot 1 = 1.$$

### Exemplo 4.3

Veja o ajuste necessários para calcular o limite a seguir.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\text{sen}(x-1)}{x^2-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\text{sen}(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{\text{sen}(x-1)}{(x-1)} \cdot \frac{1}{(x+1)} \right] = \\ &= 1 \cdot \frac{1}{2} = \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

## CÁLCULO I

## Exemplo 4.4

Nem sempre o limite resulta numa constante não-nula. Aqui está um exemplo dessa situação.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x^2}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x (\cos x^2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x (\operatorname{sen} x^2)}{x^2 (\cos x^2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x^2} \cdot \frac{x}{(\cos x^2)} = \\ &= 1 \cdot \frac{0}{1} = 0.\end{aligned}$$

Neste caso, precisamos multiplicar o numerador e o denominador por  $x$  para que o argumento de seno, a função  $y = x^2$ , *aparecesse* no denominador. Esse tipo de manobra é comum no cálculo do limite.

## Exemplo 4.5

O exemplo que estudaremos agora requer outro tipo de manobra. Vamos calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}.$$

É claro que o limite apresenta uma indeterminação, pois os limites do numerador e do denominador são ambos zero. No entanto, não temos, exatamente, a função seno em vista. Nesse caso, usaremos, também, um truque que você já conhece – o conjugado!

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x(1 + \cos x)} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1 + \cos x)} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{x(\operatorname{sen}^2 x)}{x^2(1 + \cos x)} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{x}{1 + \cos x} \right] = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

## Considerações finais

Chegamos ao fim da aula, mas não ao fim das aplicações do Teorema do Confronto. A demonstração desse teorema, assim como as demonstrações dos dois lemas apresentados nesta aula, decorrem naturalmente da definição de limite. Voltaremos a falar sobre elas. No momento, o importante é aprender

as suas interpretações geométricas, assim como as suas aplicações nos cálculos dos limites.

Veja, nesta aula você aprendeu que as funções trigonométricas são *bem comportadas* em relação ao limite, assim como a usar o limite trigonométrico fundamental para levantar algumas indeterminações que envolvem funções trigonométricas. Não deixe de praticar o que aprendeu, fazendo os exercícios propostos.

## Exercícios

1. Calcule os seguintes limites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{2x} ;$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\operatorname{sen} x} ;$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen}(x^2 - 1)}{x - 1} ;$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{\operatorname{tg} x \operatorname{sen} x} ;$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2} ;$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sec x}{x^2} ;$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 3x}{1 - \cos x} ;$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec 3x - \sec x}{x^2} ;$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3x}{\operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 4x} ;$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x^2 - \operatorname{sen} x} .$$

2. Use as propriedades elementares de limites de funções e os limites calculados na aula para mostrar que, se  $a \neq \frac{(2n+1)\pi}{2}$ , para todo número inteiro  $n$ , então

$$\lim_{x \rightarrow a} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a.$$

O que você pode dizer a respeito das outras funções trigonométricas?

3.

O Teorema do Confronto pode ser usado para mostrar que o resultado a seguir é verdadeiro.

**Teorema**

Considere duas funções  $f$  e  $g$  com as seguintes propriedades:

(a) para um certo  $a \in \mathbb{R}$ , existe um  $r > 0$ , tal que

$$(a - r, a) \cup (a, a + r) \subset (\text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g));$$

(b) existe um  $M > 0$ , tal que, se  $x \in (a - r, a) \cup (a, a + r)$ , então  $|g(x)| \leq M$ ;

(c)

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0.$$

Então,

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = 0.$$

Resumindo, o limite do produto de duas funções, uma delas limitada e a outra com limite igual a zero, também é zero.

A idéia da prova é a seguinte: para  $x \in (a - r, a) \cup (a, a + r)$ ,

$$0 \leq |f(x) \cdot g(x)| \leq |f(x)| M.$$

Como  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ , sabemos que  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| M = 0$ .

Agora, o Teorema do Confronto garante que  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x) \cdot g(x)| = 0$  e, portanto,  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = 0$ .

Use o resultado para calcular os limites a seguir.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \operatorname{sen} \left( \frac{1}{2x} \right) ; \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{sen} x^2) \cos \left( \frac{1}{x^2} \right) ;$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x} - 1) \cos \left( \frac{1}{(x-1)^3} \right) ; \quad (d) \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \operatorname{sen} \left( \frac{1}{x} \right) .$$

4. Sabendo que, para valores de  $x$  próximos a zero,

$$\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} < \frac{1 - \cos x}{x^2} < \frac{1}{2},$$

o que você pode dizer a respeito de  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ ?

5. Construa uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo as seguintes condições:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = 1$ ;

(b)  $f$  não admite limite quando  $x$  tende a 0.

Sugestão: pense em um degrau, por exemplo, e use os limites laterais.





# Aula 5 – Limites envolvendo infinito – primeira parte

Ao infinito ... e além!  
Buzz Lightyear, *Toy Story*

## Meta da aula

- Estender o conceito de limites de funções aos casos que envolvem o símbolo  $\infty$ .

## Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Calcular limites infinitos quando  $x \rightarrow a$ ,  $x \rightarrow a^+$  ou  $x \rightarrow a^-$ .
- Identificar e representar geometricamente as assíntotas verticais dos gráficos de funções.

## Introdução

Nesta primeira aula sobre limites envolvendo infinito, você aprenderá o significado de símbolos tais como

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty,$$

e descobrirá como reconhecer quando isso ocorre. Assim você aprenderá a calcular estes limites. Além disso, também conhecerá a interpretação geométrica desses limites. Antes de mais nada, leia a seguir um pequeno histórico sobre o assunto.

## Breve histórico

Infinito não é uma noção exclusiva dos matemáticos. Nas mais diferentes áreas do conhecimento humano, deparamo-nos com coisas que são muito, muito grandes e, também, coisas extremamente pequenas.

Veja a manchete estampada numa certa página de internet em 23 de setembro de 2004: “Cientistas registram colisão frontal de galáxias”. Uma equipe internacional de cientistas observou a colisão frontal de dois conjuntos de galáxias – uma “tempestade cósmica perfeita”. Segundo um dos cientistas, “viu-se a formação de um dos maiores objetos do universo”.

No outro extremo deste espectro, encontramos, já sem surpresas, coisas como exames de DNA, que revelam as partes mais ínfimas de que somos feitos, ou ainda, lemos reportagens que nos preparam para um novo mundo servido por novidades da **nanotecnologia**.

Nanotecnologia é um conjunto de técnicas que visam a estender a capacidade humana de manipular a matéria até os limites do átomo. O domínio da nanotecnologia permitiria criar novos materiais e produtos usando a capacidade da tecnologia moderna de ver e manipular átomos e moléculas. Ela permitiria entre outras coisas, aumentar exponencialmente a capacidade de armazenar e processar dados dos computadores, criar novos meios de aplicar medicamentos e gerar materiais mais leves e mais resistentes do que os conhecidos.

Só para citar dois pioneiros, Anaximandro (610 - 540 a.C.) inaugurou esse debate posicionando-se favoravelmente ao infinito: o universo contém uma infinidade de mundos, a duração do universo é infinita, e assim por diante. Ele foi citado e rebatido por Aristóteles (384 - 322 a.C.).

Você deve concordar que o conjunto dos números naturais é, pelo menos *potencialmente*, infinito, no sentido que, não importa até quanto contamos, sempre podemos seguir adiante. Sobre isso, Aristóteles poderia dizer que os números não são coisas que existem fora da mente humana e, portanto, não formam algo *realmente* infinito.

Como você pode ver, a questão é, no mínimo, delicada. Mas nós vamos nos refugiar nas águas tranqüilas da Matemática. Nossa tarefa será bem mais simples. Muito bem, vamos a isso!

## Limites infinitos

O símbolo  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$  será usado para indicar situações nas quais os valores de  $f(x)$  tornam-se arbitrariamente grandes, na medida em que calculamos  $f$  em valores de  $x > a$ , mais e mais próximos de  $a$ .

Um exemplo simples dessa situação ocorre nas vizinhanças de zero, no caso da função  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

Exemplo 5.1

Veja, a seguir, uma tabela com alguns valores de  $x$  e de  $f(x)$ , assim como um esboço do seu gráfico.

$x$	$f(x)$
1	1
0.5	2
0.25	4
0.01	100
0.0001	10 000

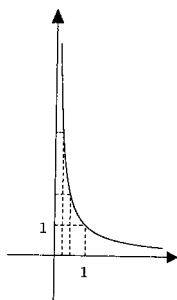


Figura 5.1

Gráfico da função  $f(x) = \frac{1}{x}$ , para  $x > 0$ .

Na verdade, essa tabela sugere o comportamento dos valores de  $f(x)$ , na medida em que tomamos, para  $x$ , valores mais e mais próximos de zero, pela direita. Esse comportamento será expresso por

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Geometricamente, esta situação corresponde ao que chamamos *assíntota vertical* do gráfico da função.

No entanto, precisamos explicitar um pouco mais o que queremos dizer com  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ . É verdade que o exemplo é eloquente, mas a questão é delicada. Parte do problema está no fato de que grande, assim como pequeno, são conceitos relativos. Veja, nos dois próximos exemplos, as dificuldades que podemos encontrar.

Exemplo 5.2

Vamos considerar o  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - 2000x}{1000x^2}$ .

Olhando a tabela a seguir, assim como o gráfico da função  $g(x) = \frac{1 - 2000x}{1000x^2}$ , gerado num computador, sobre o intervalo  $[0.001, 0.1]$ , a qual conclusão você chegaria?

# CÁLCULO I

$x$	$g(x)$
0.1	-19.9
0.01	-190.
0.009	-209.8765432
0.004	-437.5
0.002	-750
0.001	-1 000

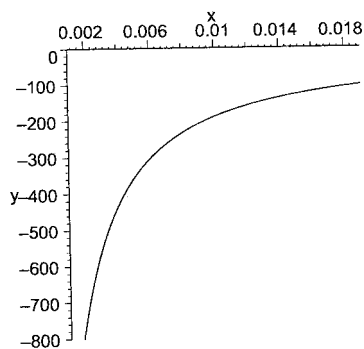


Figura 5.2

Gráfico da função  $g(x) = \frac{1 - 2000x}{1000x^2}$ .

A impressão é que, ao tomarmos valores de  $x$  mais e mais perto de zero, passando de 0.1 para 0.001, os valores de  $f(x)$  se afastam de zero, na direção negativa, passando de aproximadamente  $-20$  para  $-1000$ . Se baseássemos nosso estudo apenas nessas informações, tenderíamos a responder  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$ . No entanto, resta a pergunta: teríamos tomado valores de  $x$  suficientemente próximos de zero para determinar o comportamento da função? A resposta é não! Veja a próxima série de valores assim como o gráfico de  $g$  sobre um intervalo um pouco maior.

$x$	$g(x)$
0.1	-19.9
0.0009	-987.654321
0.0006	-555.555556
0.00051	-76.893503
0.0005	0
0.0002	15 000
0.0001	80 000

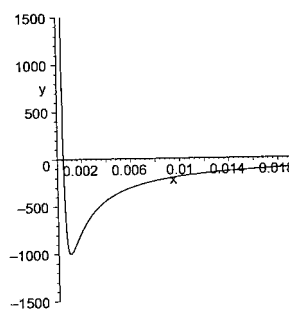


Figura 5.3

Gráfico da função  $g(x) = \frac{1 - 2000x}{1000x^2}$ .

Você deve ter notado que os gráficos estão com a escala de  $x$  diferente da escala de  $y$ . Caso contrário, não poderíamos interpretá-los adequadamente.

Na verdade, o que ocorre é

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - 2000x}{1000x^2} = +\infty.$$

Até o fim da aula você aprenderá a fazer este tipo de cálculo.

O exemplo a seguir nos reserva ainda outro tipo de surpresa.

Exemplo 5.3

Agora, vamos estudar o  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1000 + x}{8x^2 + 0.01}$ .

Veja uma tabela com alguns valores de  $x$  e de  $h(x) = \frac{1000 + x}{8x^2 + 0.01}$ , assim como o seu gráfico, no intervalo  $[0.0009, 1]$ .

$x$	$g(x)$
10	1.262484219
2	31.3027179
1	124.968789
0.2	3030.909091
0.05	33335.0
0.001	99920.16387
0.0009	99935.33190

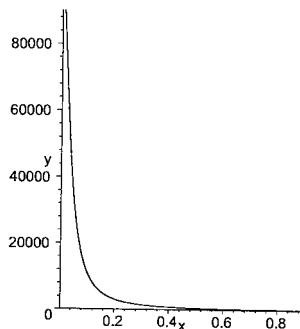


Figura 5.4

Gráfico da função  $h(x) = \frac{1000 + x}{8x^2 + 0.01}$ .

Novamente, uma análise precipitada, que levasse em conta apenas esses dados, nos levaria a crer que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1000 + x}{8x^2 + 0.01} = +\infty$ . Se fizéssemos isso, estaríamos incorrendo em outro erro. Neste caso, a função tem limite (finito) no ponto zero. Veja o seu gráfico numa outra perspectiva.

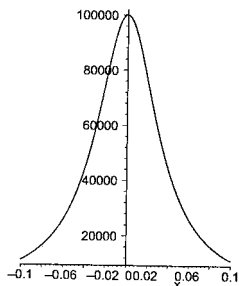


Figura 5.5

Gráfico da função  $h(x)$ .

Um simples cálculo nos mostra  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1000 + x}{8x^2 + 0.01} = 100\,000$ .

Portanto, ao estabelecer o significado do símbolo

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty,$$

# CÁLCULO I

precisamos ter a certeza de que os valores de  $f(x)$  não apresentam comportamentos do tipo daqueles ilustrados nos dois exemplos anteriores. A definição que apresentaremos a seguir nos garantirá a exclusão de tais problemas.

## Definição 1

Considere  $f$  uma função tal que, para um certo  $R > 0$ ,

$$(a, a + R) \subset \text{Dom}(f).$$

Dizemos que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

se, para cada  $M > 0$ , existe um  $r > 0$  ( $R > r > 0$ ) tal que, se  $x \in (a, a + r)$ , então  $f(x) > M$ .

A condição  $(a, a + R) \subset \text{Dom}(f)$ , para um certo  $R > 0$ , garante que a função  $f$  está definida à direita de  $a$  e, portanto, faz sentido considerar  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ .

Assim, quando afirmamos

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty,$$

estamos dizendo que, para cada reta horizontal  $y = M$ , há um (pequeno) intervalo de comprimento  $r > 0$ ,  $(a, a + r)$ , tal que, se  $x \in (a, a + r)$ , então

$$f(x) > M.$$

Isso quer dizer que a restrição do gráfico de  $f$  ao intervalo  $(a, a + r)$  está acima da reta  $y = M$ , conforme a ilustração a seguir.

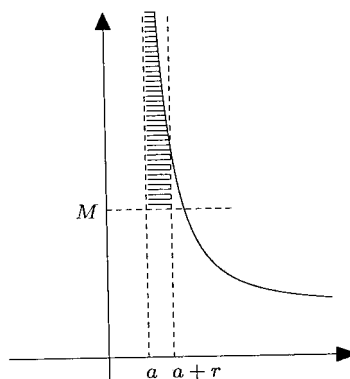


Figura 5.6

Gráfico de função tal que  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ .

Lembre-se do exemplo 5.3. Como o gráfico de  $h(x) = \frac{1000 + x}{8x^2 + 0.01}$  não ultrapassa a reta  $y = 100\,001$ , o limite de  $h(x)$ , quando  $x$  tende a zero, pela direita, não pode ser infinito.

Fazendo as devidas adaptações, obtemos as definições para  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ .

Veja mais um caso.

**Definição 2**

Considere  $f$  uma função tal que, para um certo  $R > 0$ ,

$$(a - R, a) \subset \text{Dom}(f).$$

Dizemos que

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

se, para cada  $M > 0$ , existe um  $r > 0$  ( $R > r > 0$ ) tal que, se  $x \in (a - r, a)$ , então

$$f(x) < -M.$$

Veja a representação gráfica desta situação.

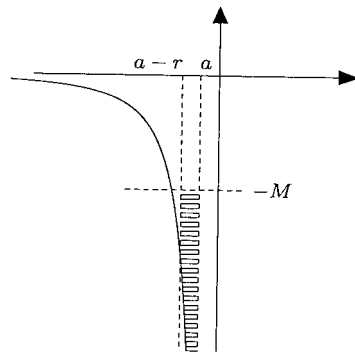


Figura 5.7

Gráfico de função tal que  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ .

Veja alguns exemplos.

**Exemplo 5.4**

Aqui estão alguns exemplos de limites infinitos.

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$  ;                      (b)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2}{\text{sen } x} = +\infty$  ;

(c)  $\lim_{x \rightarrow 9^+} \frac{3}{\sqrt{x} - 3} = +\infty$  ;                      (d)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x^2 + 1}{(x - 1)^2} = +\infty$  .

Além disso, se  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ , dizemos simplesmente que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty.$$

# CÁLCULO I

Da mesma forma, se  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ , dizemos simplesmente que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty.$$

## Atividade 5.1.

Considerando o gráfico da função  $f$  na figura a seguir, determine os limites indicados.

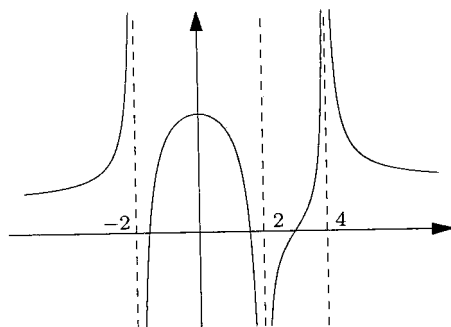


Figura 5.8  
Gráfico da função  $f$ .

- |  |  |                                       |
|--|--|---------------------------------------|
| (a) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$ ; | (b) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$ ; | (c) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ ; |
| (d) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ ;  | (e) $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$ ;  | (f) $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$ ; |
| (g) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ ;   | (h) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ;    | (i) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ .   |

## Assíntotas verticais

Dizemos que a reta  $x = a$  é uma assíntota vertical do gráfico de  $f$  se ocorrer algum dos seguintes limites:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty ;$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty .$$



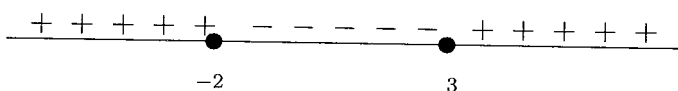
Exemplo 5.5

Vamos determinar as assíntotas verticais da função  $f(x) = \frac{2x - 3}{x^2 - x - 6}$ .

Aqui está a oportunidade de você aprender a calcular os limites infinitos. As situações típicas são de funções cuja lei de definição é dada por um quociente. Para que o limite de  $f(x)$  seja infinito, quando  $x$  tende a  $a$ , é preciso que o limite do denominador, quando  $x$  tende a  $a$ , seja zero, e o limite do numerador seja diferente de zero. Neste caso, todo o trabalho consistirá em fazer uma análise dos sinais para determinar se o limite será  $+\infty$  ou  $-\infty$ .

Começamos calculando o domínio da função, determinando as retas candidatas a assíntotas verticais. Nesse caso, para que  $f$  esteja bem definida, é necessário que  $x^2 - x - 6 \neq 0$ . Portanto,  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2, 3\}$ .

Vamos estudar o comportamento de  $f$  nas vizinhanças dos pontos  $-2$  e  $3$ . Para isso, usaremos os limites laterais. Veja, a seguir, a análise dos sinais da função que está no denominador,  $y = x^2 - x - 6$ .



Muito bem, estamos preparados para calcular os limites.

$$(a) \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x - 3}{x^2 - x - 6} = -\infty.$$

Realmente, quando  $x$  tende a  $-2$ , o numerador  $y = 2x - 3$  tende a  $-6$ . A análise de sinais feita anteriormente mostra que, se  $x$  tende a  $-2$ , pela esquerda, o denominador tende a zero *com sinal positivo*. Assim, o limite de  $f(x) = \frac{2x - 3}{x^2 - x - 6}$ , quando  $x$  tende a  $-2$ , pela direita, será  $-\infty$ .

$$(b) \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2x - 3}{x^2 - x - 6} = +\infty.$$

Neste caso, o numerador continua com o sinal negativo, mas quando  $x$  tende a  $2$ , pela direita, o denominador tende a zero *com sinal negativo*, como pode ser visto na sua análise de sinal. Portanto, o limite de  $f(x) = \frac{2x - 3}{x^2 - x - 6}$ , com  $x$  tendendo a  $-2$  pela direita, será  $+\infty$ .

$$(c) \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x - 3}{x^2 - x - 6} = -\infty.$$

Veja como a situação mudou, uma vez que o limite do numerador, quando  $x$  tende a  $3$ , é positivo. Quando  $x$  tende a  $3$ , pela esquerda, o

# CÁLCULO I

denominador tende a zero *com sinal negativo*. Concluimos que o limite de  $f(x) = \frac{2x - 3}{x^2 - x - 6}$ , com  $x$  tendendo a 3 pela esquerda, será  $-\infty$ .

$$(d) \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x - 3}{x^2 - x - 6} = +\infty.$$

Neste caso, a situação do numerador não se alterou e o denominador tende a zero com sinal positivo. O limite de  $f(x) = \frac{2x - 3}{x^2 - x - 6}$ , com  $x$  tendendo a 3 pela direita,  $+\infty$ .

Assim, o gráfico de  $f$  tem duas assíntotas verticais:  $x = -2$  e  $x = 3$ . Veja um esboço de seu gráfico.

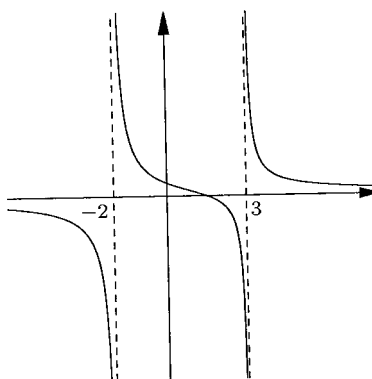


Figura 5.9

Gráfico da função  $f$ .

Aqui está mais um exemplo.

### Exemplo 5.6

Vamos encontrar as assíntotas verticais da função

$$g(x) = \frac{x}{(x - 1)^2(x + 2)},$$

calculando todos os possíveis limites infinitos.

Começamos determinando o domínio da função. Essa parte é fácil: o domínio de  $g$  é o conjunto  $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$ .

Agora, a análise do sinal da função que se encontra no denominador,  $y = (x - 1)^2(x + 2)$ .

+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	$(x - 1)^2$	
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	$(x + 2)$
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	$(x + 2)(x - 1)^2$

Como não há mudança de sinal de  $y = (x - 1)^2(x + 2)$  nas vizinhanças de 1, podemos calcular diretamente o limite da função.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{(x - 1)^2(x + 2)} = +\infty,$$

pois, quando  $x$  tende a 1, o limite do numerador é  $1 > 0$  e o limite do denominador é zero, mas a função  $y = (x - 1)^2(x + 2)$  é positiva em todos os pontos de uma certa vizinhança em torno de 1.

Para  $-2$  usaremos os limites laterais, pois  $y = (x - 1)^2(x + 2)$  é negativa à esquerda de  $-2$  e positiva à direita. Como o limite do numerador, quando  $x$  tende a  $-2$ , é negativo,

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x}{(x - 1)^2(x + 2)} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x}{(x - 1)^2(x + 2)} = -\infty.$$

Veja um esboço do gráfico de  $g$ , na figura a seguir.

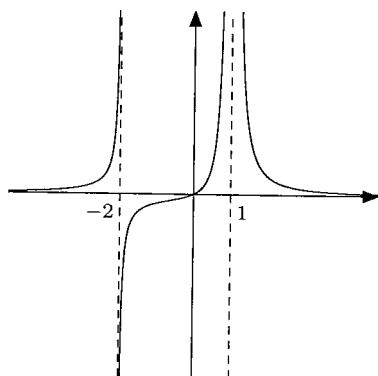


Figura 5.10  
Gráfico da função  $g$ .

O próximo exemplo mostra uma função que tem uma infinidade de assíntotas verticais.

#### Exemplo 5.7

A função tangente é um exemplo de função que, por ser periódica, apresenta uma infinidade de assíntotas. Veja o seu gráfico.

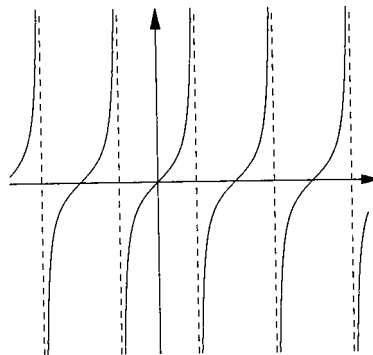


Figura 5.11

Gráfico da função tangente.

Aqui está uma oportunidade de testar as suas habilidades. Você poderá colocar em prática as análises de sinais que aprendeu no Pré-Cálculo.

**Atividade 5.2.**

Seja  $a = \frac{(2k+1)\pi}{2}$ , tal que  $k \in \mathbb{Z}$ . Fazendo a análise de sinais de  $y = \text{sen } x$  e de  $y = \text{cos } x$ , numa pequena vizinhança de  $a$ , mostre que

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \text{tg } x = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} \text{tg } x = -\infty.$$

**Resumo da ópera**

Limites infinitos, com  $x \rightarrow a$ , ocorrem quando há um quociente, com o limite do numerador sendo um número diferente de zero e o limite do denominador igual a zero.

Geometricamente, esses limites correspondem às assíntotas verticais.

Veja também que é possível termos um dos limites laterais sendo infinito e o outro finito. Isso é suficiente para caracterizar uma assíntota vertical.

Do ponto de vista operacional, tudo o que temos de fazer é uma análise de sinal, do tipo que você aprendeu a fazer no Pré-Cálculo.

O limite do numerador é positivo? É negativo? E o limite do denominador vai a zero com sinal positivo? Com sinal negativo?

Os limites laterais desempenham um importante papel. Veja ainda mais um exemplo.

Exemplo 5.8

Calcule  $\lim_{x \rightarrow a^\pm} \frac{2x + 1}{x^2 - 2x - 3}$ , para  $a = -1$  e  $a = 3$ .

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x + 1}{x^2 - 2x - 3} = -\infty,$$

pois  $\lim_{x \rightarrow -1^-} 2x + 1 = -1$  e  $\lim_{x \rightarrow -1^-} x^2 - 2x - 3 = 0^+$ .

As outras respostas são:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x + 1}{x^2 - 2x - 3} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x + 1}{x^2 - 2x - 3} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x + 1}{x^2 - 2x - 3} = +\infty.$$

Veja o gráfico da função.

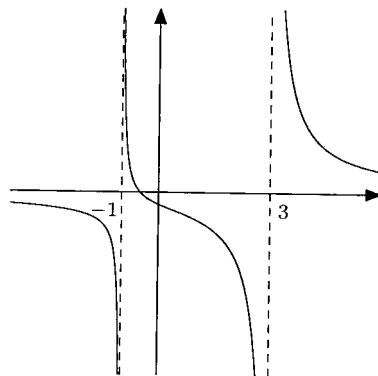


Figura 5.12

Gráfico da função  $f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 - 2x - 3}$ .

É bom saber da existência de coisas menos comportadas. Por exemplo, há casos de funções não limitadas, quando  $x \rightarrow a^\pm$  e o limite não é do tipo  $f(x) \rightarrow \infty$  ou  $f(x) \rightarrow -\infty$ .

Aqui está um tal exemplo:  $\nexists \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}$ . O gráfico de  $f$  oscila de valores positivos para negativos e vice-versa, tomando valores cada vez mais afastados da origem.

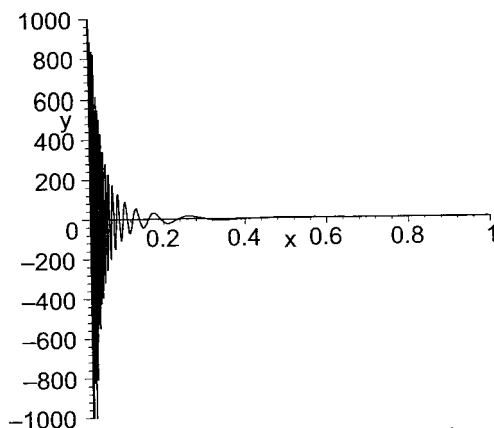


Gráfico da função  $f(x) = \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}$ , para  $x > 0$ .

Você sabia que, em alemão, se diz *unendlich* para infinito? Soa bem poético, não? Muito bem, está na hora de parar, pois você ainda tem a lista de problemas para fazer. Na próxima aula continuaremos a falar sobre limites envolvendo infinito.

### Exercícios

1. Calcule os seguintes limites:

- |  |  |
|--|--|
| (a) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+2}{x-3}$ ;               | (b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-4}{x^2-1}$ ; |
| (c) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x-3}{x^2-1}$ ;            | (d) $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2-1}{x+1}$ ;  |
| (e) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x}-5}{1-\sqrt{x}}$ ; | (f) $\lim_{x \rightarrow 2/3^+} \frac{x}{2-3x}$ ;    |
| (g) $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \sec x$ ;                      | (h) $\lim_{x \rightarrow 2\pi^+} \cotg x$ ;          |
| (i) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x}{1-e^x}$ ;              | (j) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x}{\ln x}$ .    |

2. Determine as assíntotas verticais da função  $f(x) = \frac{8}{4-x^2}$ , calculando todos os seus possíveis limites infinitos.

3. Determine as assíntotas verticais da função  $g(x) = \frac{1-x}{x^3-2x^2-x+2}$ , calculando todos os seus possíveis limites infinitos.

4. Dê um exemplo de uma função definida em  $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$  que tenha  $x = n$  como uma assíntota vertical, para cada  $n \in \mathbb{Z}$ .

5.

Determine o valor de  $a$  tal que

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 3}{x^2 - ax + 1} = -\infty.$$





## Aula 6 – Limites envolvendo infinito – segunda parte

### Meta da aula

- Estender o conceito de limites de funções aos casos que envolvem o símbolo  $\infty$ .

### Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Calcular limites do tipo  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .
- Identificar e representar geometricamente as assíntotas horizontais dos gráficos de funções.

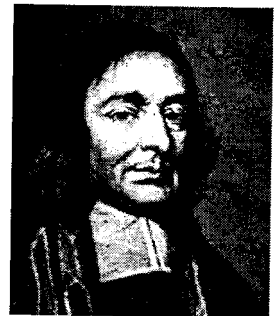
Na aula anterior, você aprendeu a usar o símbolo  $\infty$  para indicar na expressão  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ , por exemplo, que para valores suficientemente próximos a  $a$ , os valores correspondentes  $f(x)$  tornam-se arbitrariamente grandes. Além disso, a expressão  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  deve ser lida assim: limite de  $f(x)$ , quando  $x$  tende a  $a$ , é infinito.

Até 1655, o símbolo  $\infty$  era usado como uma alternativa para  $M$ , representando 1000 em algarismos romanos quando, por sugestão do matemático inglês **John Wallis**, passou a representar infinito. Como você pode ver, a sugestão foi bem aceita pela comunidade matemática.

### Algumas propriedades dos limites infinitos

Com a extensão da definição de limites de funções a casos envolvendo infinito, obtemos uma série nova de propriedades que estabelecem algo assim como uma aritmética com infinito.

Suponha que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$ .  
Então,



**John Wallis** (1642 - 1727) foi um precursor do Cálculo. Sua principal obra é *Arithmetica Infinitorum (Aritmética do Infinito)*, publicada em 1656. Há uma tradução recente desse livro para o inglês, publicada pela Springer-Verlag. Apesar de algumas imprecisões, esse livro desempenhou papel importante ao aprofundar e divulgar as idéias de Descartes e de Cavalieri, sobre a Geometria Analítica e sobre o cálculo de áreas de regiões delimitadas por curvas algébricas.

# CÁLCULO I

$$1. \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = +\infty;$$

$$2. \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = +\infty;$$

$$3. \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + h(x)] = +\infty;$$

$$4. \lim_{x \rightarrow a} [h(x) \cdot f(x)] = \begin{cases} +\infty, & \text{se } L > 0; \\ -\infty, & \text{se } L < 0; \end{cases}$$

$$5. \text{ se } \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0, \lim_{x \rightarrow a} \alpha f(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{se } \alpha > 0; \\ -\infty, & \text{se } \alpha < 0. \end{cases}$$

Além disso, as afirmações continuam verdadeiras se trocarmos  $x \rightarrow a$  por  $x \rightarrow a^+$  ou  $x \rightarrow a^-$ .

### Exemplo 6.1

Já sabemos que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$  e  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$ . Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{\text{sen } x}{x} + \frac{1}{x} \right] = +\infty.$$

### Atenção!

Se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ , o limite da soma das funções,

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)],$$

é uma *indeterminação do tipo*  $\infty - \infty$ , pois o resultado é imprevisível. Veja o exemplo a seguir.

### Exemplo 6.2

Você verá que uma pequena alteração na função pode modificar, de maneira dramática, o resultado do limite.

Vamos calcular

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \left[ \frac{1}{x-3} + \frac{a}{x^2 - 2x - 3} \right],$$

para os seguintes valores de  $a$ :  $-3$ ,  $-4$  e  $-5$ .

É claro que  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty$ .

Para  $a < 0$ , como  $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{a}{x^2 - 2x - 3} = -\infty,$$

pois  $\lim_{x \rightarrow 3^+} x^2 - 2x - 3 = 0$ , mas, se  $x > 3$ ,  $y = x^2 - 2x - 3 > 0$ .

Portanto, se  $a < 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \left[ \frac{1}{x-3} + \frac{a}{x^2 - 2x - 3} \right]$  é uma indeterminação do tipo  $\infty - \infty$ .

No entanto,

$$\frac{1}{x-3} + \frac{a}{(x+1)(x-3)} = \frac{x+1+a}{(x+1)(x-3)}.$$

**Caso  $a = -3$**

Se fizermos  $a$  igual a  $-3$ , o limite será  $+\infty$ . Veja:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-2}{(x+1)(x-3)} = +\infty,$$

pois  $\lim_{x \rightarrow 3^+} (x-2) = 1 > 0$ .

**Caso  $a = -4$**

Neste caso, o resultado é finito.

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-3}{(x+1)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{4}.$$

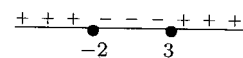
**Caso  $a = -5$**

Finalmente, para  $a = -5$ , o limite será  $-\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-4}{(x+1)(x-3)} = -\infty,$$

pois  $\lim_{x \rightarrow 3^+} (x-4) = -1 < 0$ .

Aqui está a análise do sinal de  $y = x^2 - 2x - 3$ .



**Conclusão:**

Para diferentes valores atribuídos à constante  $a$ , o limite resultou, ora  $+\infty$ , ora um número real, ora  $-\infty$ , ou seja, em situações como essa, não descuide, aja com cuidado!

**Atividade 6.1.**

Determine o valor de  $k$ , tal que

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \left[ \frac{3}{x+2} + \frac{k}{x^2-4} \right]$$

seja finito. Para quais valores de  $k$  o limite anterior será  $-\infty$ ?

## Limites de funções no infinito

Até agora nós temos usado o limite como uma ferramenta para estudar o comportamento dos valores de uma dada função  $f$ , nas vizinhanças de um certo ponto  $a$ .

Nosso próximo passo será usar o limite para estudar o comportamento dos valores de  $f(x)$  quando tomamos para  $x$  (ou para  $-x$ , dependendo do caso) valores arbitrariamente grandes. Isto é, queremos estabelecer sentido para as expressões

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

Devido à similaridade entre as duas situações, vamos nos concentrar no caso  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

Para que a expressão possa ter algum sentido, é necessário que

$$[b, +\infty) \subset \text{Dom}(f),$$

para algum número  $b$ , caso contrário, não poderíamos tomar valores de  $f(x)$ , para valores arbitrariamente grandes de  $x$ .

Há duas situações especiais que queremos distinguir:

- (a) para valores arbitrariamente grandes de  $x$ , os valores de  $f(x)$  também se tornam arbitrariamente grandes (ou então os valores de  $-f(x)$  tornam-se arbitrariamente grandes);
- (b) na medida em que tomamos valores maiores e maiores para  $x$ , os valores correspondentes  $f(x)$  tornam-se arbitrariamente próximos de um certo número  $L$ .

Essas situações serão denotadas por

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ (ou } -\infty\text{)}; \quad (b) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L.$$

### Exemplo 6.3

Considere  $n$  um inteiro não-nulo. Então,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } n \geq 1; \\ 0 & \text{se } n \leq -1. \end{cases}$$

Em particular,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^3 = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\sqrt{2}}{x} = -\infty.$$

## Interpretação geométrica

É muito importante saber interpretar geometricamente o significado desses limites no infinito. Começaremos com o caso  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$  (ou  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = M$ ). Se  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$  (respectivamente,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = M$ ), diremos que a reta  $y = L$  (respectivamente,  $y = M$ ) é uma *assíntota horizontal* do gráfico de  $f$ . Isso quer dizer que, para valores cada vez maiores de  $x$  (respectivamente, de  $-x$ ) o gráfico de  $f$  torna-se mais e mais próximo da reta  $y = L$  ( $y = M$ ). Veja alguns exemplos.

Exemplo 6.4

Veja, nas figuras a seguir, gráficos de funções com assíntotas horizontais.

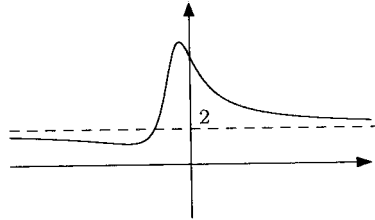


Figura 6.1  
Função  $f$   
Assíntota horizontal  $y = 2$ .

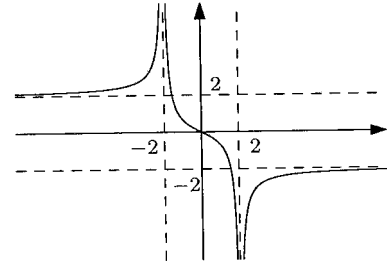


Figura 6.2  
Função  $g$   
Assíntotas horizontais  $y = 2$  e  $y = -2$ .

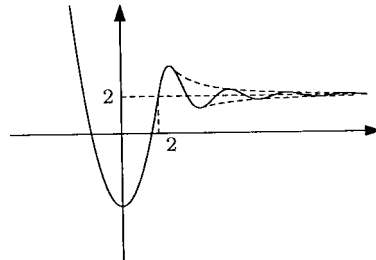


Figura 6.3  
Função  $h$   
Assíntota horizontal  $y = 2$ .

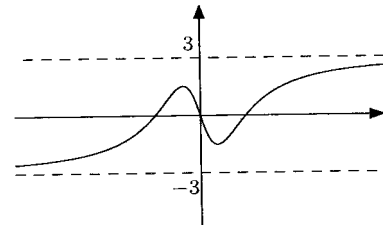


Figura 6.4  
Função  $k$   
Assíntotas horizontais  $y = 3$  e  $y = -3$ .

A função  $f$  (Figura 6.1) tem uma única assíntota horizontal. Neste caso,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ .

A função  $g$  (Figura 6.2) tem quatro assíntotas: duas verticais e duas horizontais. Veja quais são seus limites infinitos e no infinito:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -2, \quad \lim_{x \rightarrow -2} g(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -\infty.$$

Algo interessante ocorre no caso da função  $h$  (Figura 6.3). Esta função certamente não é polinomial (por quê?). A reta  $y = 2$  é a única assíntota do gráfico da função, pois  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 2$ , mas o gráfico de  $h$  oscila em torno da reta, com amplitude cada vez menor, na medida em que tomamos valores cada vez maiores para  $x$ .

Finalmente, no caso da função  $k$ , não há assíntota vertical, mas duas assíntotas horizontais, pois  $\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = -3$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = 3$ .

## Interpretação geométrica de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Aqui está a definição de  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , necessária para podermos interpretá-la geometricamente.

### Definição

Dizemos que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  se, e somente se, para cada  $M > 0$  existe um número  $r > 0$ , tal que, se  $x > r$ , então  $f(x) > M$ .

Isso significa geometricamente que, dada uma altura  $M > 0$  qualquer, existe um número  $r$  suficientemente grande, tal que a parte do gráfico de  $f$  sobre o intervalo  $[r, +\infty)$  fica acima da reta  $y = M$ .

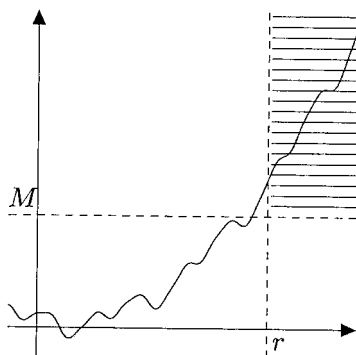


Figura 6.5

Gráfico de função em que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

Na Figura 6.5, você nota que o gráfico de  $f$  sobre o intervalo  $[r, +\infty)$  está contido na região com hachuras, isto é, acima da reta  $y = M$ .

Note que essa situação é dinâmica. Isso deve ocorrer para *todos* os valores de  $M$ . Dessa forma, para valores de  $M$  cada vez maiores, possivelmente teremos de aumentar os valores de  $r$ .

Na figura a seguir, você poderá ver como, para três diferentes valores de  $M$ , precisamos, para o exemplo em questão, de três diferentes valores de  $r$ , indicados pelos correspondentes índices. Assim, se  $x > r_1$ , então  $f(x) > M_1$ . Se  $x > r_2$ , então  $f(x) > M_2$ . Finalmente, para  $x > r_3$ , temos  $f(x) > M_3$ . Essa última afirmação está enfatizada na figura pelo fato de o gráfico de  $f$  estar contido na região com hachuras. E assim, para cada novo  $M$ , maior que o anterior, seguiríamos obtendo um novo  $r$ , tal que, se  $x > r$ ,  $f(x) > M$ .

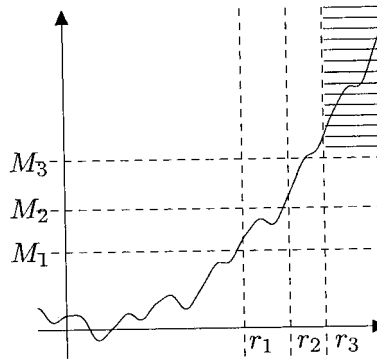


Figura 6.6

Gráfico de função em que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

### Comportamento das funções polinomiais no infinito

É muito importante saber o comportamento no infinito das polinomiais. Além disso, é muito fácil. Tudo depende do *termo de maior grau*. Lembre-se, uma função polinomial é dada por uma equação do tipo

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

na qual  $a_i$  são números reais e estamos supondo que  $a_n \neq 0$  e  $n \geq 1$ .

Dizemos que  $p(x)$  é uma função polinomial de grau  $n$ , e  $a_n x^n$  é o termo de maior grau. Então,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a_n > 0, \\ -\infty & \text{se } a_n < 0 \end{cases}$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \begin{cases} n \text{ é par e } a_n > 0, \\ n \text{ é ímpar e } a_n < 0, \end{cases} \\ -\infty & \text{se } \begin{cases} n \text{ é ímpar e } a_n > 0, \\ n \text{ é par e } a_n < 0, \end{cases} \end{cases}$$

Parece complicado, mas não é. Veja, nas figuras a seguir, quatro exemplos que indicarão todas as possibilidades.



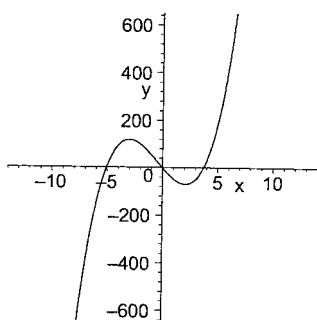


Figura 6.7  
 $n$  ímpar,  $a_n > 0$

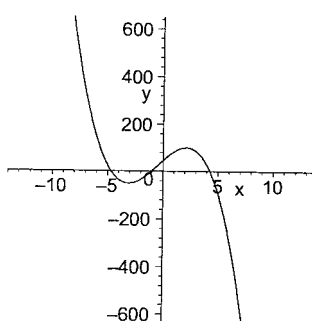


Figura 6.8  
 $n$  ímpar,  $a_n < 0$

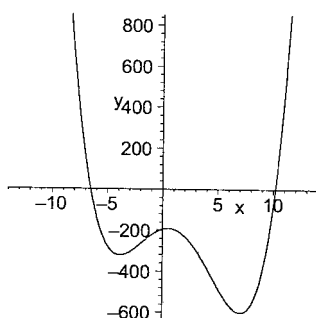


Figura 6.9  
 $n$  par,  $a_n > 0$

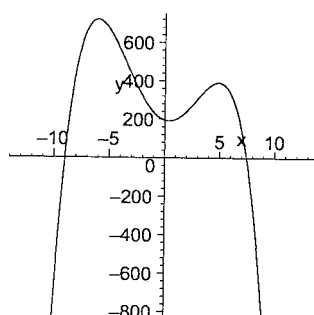


Figura 6.10  
 $n$  par,  $a_n < 0$

## Cálculo dos limites no infinito

Vamos começar com o cálculo dos limites no infinito das funções polinomiais. Assim, você compreenderá como chegamos às conclusões apresentadas na seção anterior e aprenderá uma primeira técnica para levantar essas indeterminações. Desse modo, você perceberá, algebricamente, por que o comportamento das funções polinomiais no infinito é determinado pelo termo de maior grau. Parece estranho, mas, na verdade, se alterarmos a função polinomial, mudando apenas os coeficientes dos termos de graus menores, a função sofre alterações numa região limitada em torno da origem, mas seu comportamento para valores muito grandes de  $|x|$  permanece, essencialmente, o mesmo. Isso é ilustrado pelo próximo exemplo.

### Exemplo 6.5

A função  $f(x) = x^2 - 2x$  tem duas raízes reais (2 e 0), enquanto a função  $g(x) = x^2 - 2x + 2$ , diferente de  $f$  apenas pelo termo constante, não tem

# CÁLCULO I

raízes reais. No entanto,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = +\infty.$$

Veja os gráficos sob duas diferentes perspectivas, nas figuras a seguir.

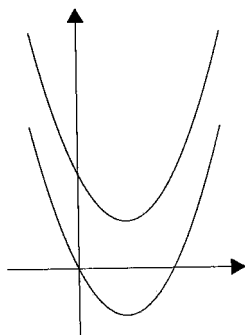


Figura 6.11

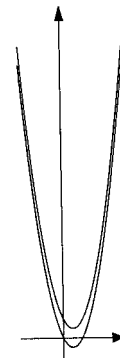


Figura 6.12

Gráficos de  $f$  e  $g$  em torno da origem. Funções  $f$  e  $g$  numa vizinhança maior.

Agora, veja um exemplo de como calculamos o limite de um polinômio quando  $x$  tende a  $+\infty$  ou  $-\infty$ .

Exemplo 6.6

Vamos calcular  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^3 - 5x^2 - 2x - 7)$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^3 - 5x^2 - 2x - 7)$ .

O termo de maior grau é  $3x^3$ , isto é,  $a_n > 0$  e  $n$  ímpar. Portanto, a resposta do cálculo deve ser

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^3 - 5x^2 - 2x - 7) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^3 - 5x^2 - 2x - 7) = -\infty.$$

Note que, como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^3 = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -5x^2 = -\infty$ , o limite  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^3 - 5x^2 - 2x - 7)$  está indeterminado. Mas veja como podemos contornar isso. Como estamos interessados no comportamento de  $3x^3 - 5x^2 - 2x - 7$ , para valores muito grandes de  $x$ , podemos supor  $x > 0$  e colocar  $3x^3$  em *evidência*. Assim,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^3 - 5x^2 - 2x - 7) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^3 \left( 1 - \frac{5}{3x} - \frac{2}{3x^2} - \frac{7}{3x^3} \right).$$

Agora, o limite de cada uma das parcelas,  $-\frac{5}{3x}$ ,  $-\frac{2}{3x^2}$  e  $-\frac{7}{3x^3}$ , quando  $x \rightarrow +\infty$ , é zero. Isto é,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{5}{3x} - \frac{2}{3x^2} - \frac{7}{3x^3} \right) = 1$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^3 - 5x^2 - 2x - 7) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^3 \left(1 - \frac{5}{3x} - \frac{2}{3x^2} - \frac{7}{3x^3}\right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^3 = +\infty.\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^3 - 5x^2 - 2x - 7) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^3 \left(1 - \frac{5}{3x} - \frac{2}{3x^2} - \frac{7}{3x^3}\right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^3 = -\infty.\end{aligned}$$

Vejam se você está pronto para um pouco de ação.

## Atividade 6.2.

Calcule os seguintes limites:

- (a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 5x + 2$  ;                      (b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^5 + 7x^2 - 8$  ;
- (c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 4x^2 - 5x^3$  ;                      (d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 17x - 0.4x^5 + 7x^2$  ;
- (e)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^2 - 3|x|^3$  ;                      (f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^{3/2} + 2x^{1/2} + 4$  .

## Cálculo de limites no infinito de funções racionais

O comportamento no infinito de funções racionais (definidas pelo quociente de dois polinômios) também é definido pelos graus dos polinômios envolvidos. Veja o resumo, a seguir. Considere  $p(x)$  e  $q(x)$  duas funções polinomiais, cujos coeficientes dos termos de maior grau são  $a$  e  $b$ , respectivamente. Então,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \begin{cases} \pm \infty, & \text{se } \text{grau}(p) > \text{grau}(q); \\ \frac{a}{b}, & \text{se } \text{grau}(p) = \text{grau}(q); \\ 0, & \text{se } \text{grau}(p) < \text{grau}(q). \end{cases}$$

O sinal do limite, no caso em que  $\text{grau}(p) > \text{grau}(q)$  é determinado pelos sinais dos coeficientes dos termos de maior grau.

# CÁLCULO I

A maneira de obter esse resultado é semelhante à que usamos no caso dos polinômios. Veja como usar essa estratégia no próximo exemplo.

### Exemplo 6.7

Vamos calcular alguns limites. Começaremos com um exemplo em que o grau do numerador é maior do que o grau do denominador.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - 3x^2 + 2x - 5}{3 - x - 2x^2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left( 3 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{5}{x^3} \right)}{x^2 \left( \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x} - 2 \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left( 3 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{5}{x^3} \right)}{\left( \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x} - 2 \right)} = \\ &= -\frac{3}{2} \cdot \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} x \right) = -\infty, \end{aligned}$$

pois o limite de cada fração do tipo  $\frac{c}{x^m}$ , com  $x \rightarrow \infty$ , é igual a zero.

Veja um caso no qual o numerador e o denominador têm o mesmo grau.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - x + \sqrt{2}}{5 - x^2} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left( 3 - \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{2}}{x^2} \right)}{x^2 \left( \frac{5}{x^2} - 1 \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{2}}{x^2}}{\frac{5}{x^2} - 1} = -3. \end{aligned}$$

Finalmente, um caso em que o limite será infinito.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 3}{3x^2 + x - 4} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left( 2 + \frac{3}{x} \right)}{x^2 \left( 3 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{3}{x}}{x \left( 3 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2} \right)} = \frac{2}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0. \end{aligned}$$

A mesma estratégia pode ser usada para calcular limites no infinito de funções algébricas envolvendo radicais. Mas, neste caso, é necessário atenção com a situação  $x \rightarrow -\infty$ , devido ao sinal negativo dos valores de  $x$ .

**Exemplo 6.8**

Vamos determinar as assíntotas horizontais da função  $f(x) = \frac{10 - 3x}{\sqrt{x^2 + 4}}$ .

Para calcular  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10 - 3x}{\sqrt{x^2 + 4}}$ , lembramos que estamos considerando valores muito grandes de  $x$ . Portanto, podemos supor que  $x > 0$ . Isso permite escrever

$$\sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{4}{x^2}\right)} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} = x \cdot \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}},$$

pois  $x > 0$  e  $\sqrt{x^2} = |x| = x$ . Assim,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10 - 3x}{\sqrt{x^2 + 4}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(\frac{10}{x} - 3\right)}{x \cdot \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{10}{x} - 3}{\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}} = -3.$$

Raciocínio semelhante se aplica para calcular o limite com  $x \rightarrow -\infty$ , porém, neste caso,  $x < 0$ , e, portanto,  $\sqrt{x^2} = |x| = -x$ . Isso significa que o cálculo do limite fica

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10 - 3x}{\sqrt{x^2 + 4}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(\frac{10}{x} - 3\right)}{-x \cdot \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{10}{x} - 3}{\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}} = 3.$$

Parece um pouco estranho, mas veja o gráfico da função.

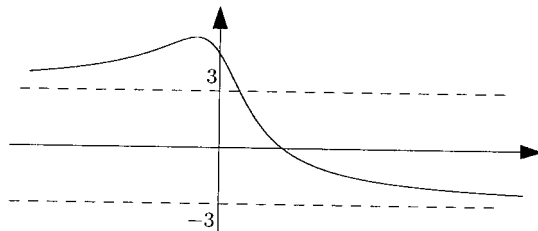


Figura 6.13  
Gráfico da função  $f(x) = \frac{10 - 3x}{\sqrt{x^2 + 4}}$ .

**Considerações finais**

Nesta aula, você aprendeu que o limite serve para descrever o comportamento das funções quando a variável dependente assume valores muito grandes ( $x \rightarrow +\infty$ ) ou quando  $-x$  assume valores muito grandes ( $x \rightarrow -\infty$ ).

# CÁLCULO I

É muito importante saber o comportamento no infinito dos polinômios, assim como das funções racionais.

Voltaremos a esse tema em breve. Agora, não deixe de praticar as idéias que aprendeu nos exercícios propostos a seguir.

## Exercícios

1. Calcule os seguintes limites:

(a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - x^3)$  ;

(b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2 + 3x - 5)$  ;

(c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{5}x^7 + 8)$  ;

(d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - 8x^2)$  ;

(e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - 5}{1 - \sqrt{x}}$  ;

(f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 4}{1 + 3x^2}$  ;

(g)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x - 2}{x^3 + 7x - 8}$  ;

(h)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 5}{5x + 4}$  ;

(i)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 7x^2}{3x - 2x^2 + 8}$  ;

(j)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 \operatorname{sen} x}{x^4 + 5x - 8}$  ;

(l)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2} - \frac{2x - 2}{x^2 + 3}$  ;

(m)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{3 + \frac{4}{x}}$  ;

(n)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{4x^2 + 3}{x - 5} + \cos x^2 \right]$  ;

(o)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{3/2} + 2x^{1/2} + 1}{x + 4}$  .

2. Determine as assíntotas verticais e horizontais, caso estas existam, de cada uma das funções a seguir.

(a)  $f(x) = \frac{1}{x-3}$ ;                      (b)  $g(x) = \frac{3x+2}{x-5}$ ;

(c)  $h(x) = \frac{x^2-1}{x}$ ;                      (d)  $k(x) = \frac{x-2x^2}{x^2-1}$ ;

(e)  $l(x) = \frac{3x+1}{x^2-x-6}$ ;                      (f)  $m(x) = \frac{x^2+2x-8}{\sqrt{5+x^4}}$ ;

(g)  $n(x) = \frac{\sqrt{7}x^3+2x-8}{1-x^2-x^3}$ ;                      (h)  $u(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x-4}$ .

3. Calcule os seguintes limites:

(a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3-3x+2}{x^5/2-4x^2+3}$ ;                      (b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{5}{x^2} - \frac{2}{x^4} \right]$ ;

(c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x^3}{x^2+5}$ ;                      (d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x}{x^2+2x+4}}$ ;

(e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x^2+1}$ ;                      (f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+2}}{1+x}$ .

4. Seja  $a \neq 0$  um número real e  $n$  um número inteiro. Determine condições sobre  $a$  e  $b$ , tais que o limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^n + 3x + 4}{ax^2 + x + 1}$$

seja:

(a)  $+\infty$ ;      (b)  $-\infty$ ;      (c) 2;      (d) -2;      (e) 0.

5. Sabendo que  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x^3} = 2$ , calcule  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ .





## Aula 7 – Continuidade das funções reais

**con.ti.nu.i.da.de** (*lat* *continuitate*)

*sf* 1 Qualidade daquilo que é contínuo. 2 Ligação ininterrupta das partes de um todo.

**con.tí.nuo** (*lat* *continuu*) *adj* 1 Em que não há interrupção; seguido.

### Meta da aula

- Apresentar o conceito continuidade das funções reais.

### Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Determinar se uma função é contínua num certo ponto.
- Identificar funções contínuas através de seus gráficos.

### Funções contínuas – Apresentação intuitiva do conceito

A noção *continuidade* não é exclusiva dos matemáticos. Cada um tem uma boa idéia do que essa palavra quer dizer. Você não terá nenhuma dificuldade em escolher, entre as duas figuras a seguir, aquela que representa uma linha contínua.

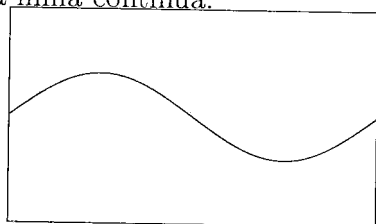


Figura 7.1

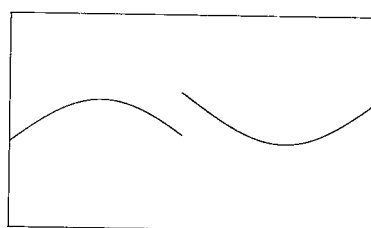


Figura 7.2

Nosso trabalho, nesta aula, será o de transportar essa noção para o universo matemático das funções. Além disso, veremos algumas propriedades das funções que têm essa característica.

Vamos começar analisando alguns exemplos.

## CÁLCULO I

## Exemplo 7.1

Suponha que um fio de um certo metal ocupa o intervalo  $[0, 60]$  da reta real. A cada posição  $x \in [0, 60]$  do fio, dada em centímetros, associamos  $T(x)$ , a sua temperatura, medida em graus Celcius.

Considerando que o metal é um meio que conduz calor com facilidade, como seria o gráfico de uma tal função? Aqui está uma possibilidade.

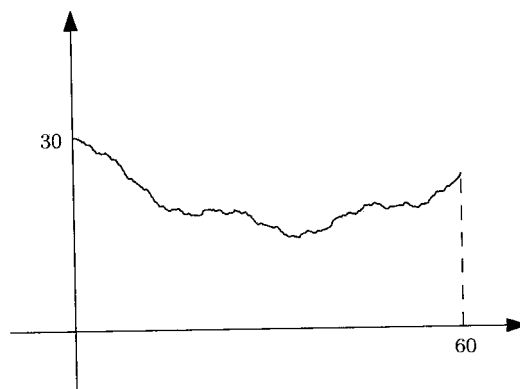


Figura 7.3

Gráfico da função temperatura  $T(x)$ .

O gráfico sugere que uma *pequena* variação na posição corresponderá uma *pequena* variação na temperatura.

Essa é a idéia básica da continuidade de uma função, no caso, a temperatura em termos da posição. A questão que vamos enfrentar é transcrever essa idéia em termos matemáticos. Veja, neste contexto temos uma noção bastante clara do significado de *uma pequena variação*, tanto na posição (dada em centímetros), quanto na temperatura (dada em Celsius).

Note que *pequena variação* é um conceito relativo (o que é pequeno para um observador pode não o ser para outro) e precisamos estabelecer a definição em termos absolutos.

Mas, antes de prosseguirmos, vejamos um exemplo onde a função não é contínua.

Exemplo 7.2

Vamos submeter o fio de metal do exemplo anterior a uma experiência de resistência física. Uma de suas extremidades será presa a um suporte e a outra será submetida a uma tração.

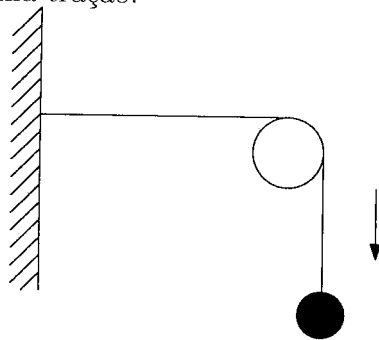


Figura 7.4

Seja  $\tau(p)$  a função que mede a tensão no fio em função do peso aplicado pela tração.

É natural esperar que a tensão aumente na medida em que o peso aumenta. No entanto, devido a resistência do material, chega-se a um ponto em que o fio se quebra. Neste ponto a tensão passa, instantaneamente, a zero. Veja o gráfico.

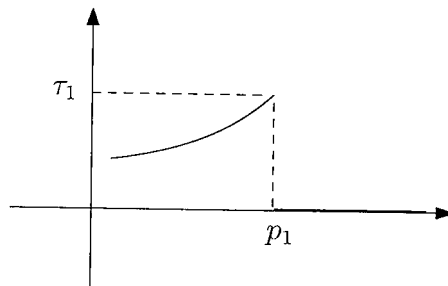


Figura 7.5

Neste exemplo a função não é contínua. Veja, para um peso  $p$  ligeiramente inferior a  $p_1$ , a tensão  $\tau(p)$  correspondente é próxima a  $\tau_1$ . Mas, qualquer peso  $p$  superior a  $p_1$ , corresponderá à tensão nula.

Após esses exemplos, estamos prontos para as definições.

### Continuidade de uma função $f$ num ponto $a$

Apesar de continuidade ser uma característica global das funções, a definição é feita ponto a ponto. Ou seja, definiremos a continuidade de uma função em um dado ponto (de seu domínio).

# CÁLCULO I

Vamos lembrar uma coisa  *muito*  importante: uma função  $f$  consiste de três coisas: dois conjuntos não-vazios, o domínio  $A$  e o contradomínio  $B$ , e a lei de definição,  $y = f(x)$ , satisfazendo o axioma:

para cada  $x \in A$ , existe um único  $y \in B$ , tal que  $y = f(x)$ .

Estamos interessados apenas naquelas funções cujos domínio são uniões de intervalos, sejam eles abertos, fechados ou semi-abertos, tais como

$$(c_1, d_1), [c_2, d_2], (c_3, d_3] \text{ ou } [c_3, d_3).$$

Podemos considerar intervalos não limitados, tais como  $(-\infty, d_4)$ .

### Exemplo 7.3

Aqui estão algumas funções com seus domínios expressos como a união de intervalos.

Função	Domínio
$f(x) = x^2 - 3x$	$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$
$g(x) = \frac{1}{x-2}$	$\mathbb{R} - \{2\} = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$
$h(x) = \sqrt{6+x-x^2}$	$[-2, 3]$
$j(x) = \sqrt{x^2-9}$	$(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$
$k(x) = \cotg x$	$\dots \cup (-2\pi, -\pi) \cup (-\pi, 0) \cup (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi) \cup \dots$

No último caso, a função co-tangente de  $x$  não está definida nos pontos  $n\pi$ , para  $n \in \mathbb{Z}$ , pois  $\cotg x = \frac{\cos x}{\sin x}$  e  $\sin(n\pi) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$ . Assim, o domínio da função co-tangente é uma união infinita de intervalos.

Assim, sempre que afirmarmos: seja  $a$  um elemento do domínio de  $f$ , denotado (geralmente) por  $\text{Dom}(f)$ , sabemos que há um intervalo  $I$ , tal que

$$a \in I \subset \text{Dom}(f).$$

É verdade que tudo isso é bem técnico, mas precisamos de esclarecer bem todos esses pormenores, pois isso evitará dificuldades no futuro.

Essa condição nos diz que uma vizinhança típica de  $a$  no domínio de  $f$  pode ser de três tipos:

- $a$  está no interior de um intervalo aberto contido no domínio de  $f$ :

$$a \in (a - r, a + r) \subset \text{Dom}(f);$$

- $a$  é o extremo inferior de um intervalo fechado contido em  $f$ , sendo que os pontos à esquerda de  $a$  não pertencem ao domínio de  $f$ :

$$[a, a + r) \subset \text{Dom}(f);$$

- $a$  é o extremo superior de um intervalo fechado contido em  $f$ , sendo que os pontos à direita de  $a$  não pertencem ao domínio de  $f$ :

$$(a - r, a] \subset \text{Dom}(f).$$

Vamos a um exemplo.

**Exemplo 7.4**

Seja  $f(x) = 1 + \sqrt{1 - x^2}$ , a função definida no intervalo fechado  $[-1, 1]$ . Note que o domínio de  $f$  é, ele mesmo, um intervalo.

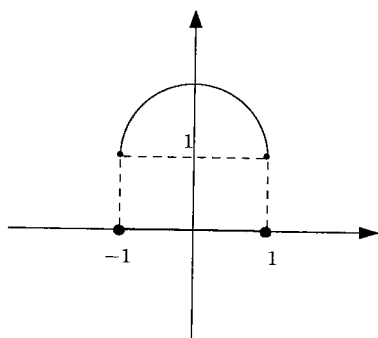


Figura 7.6

Gráfico da função  $f(x) = 1 + \sqrt{1 - x^2}$

O ponto  $0 \in [-1, 1]$  é do tipo interior, uma vez que, por exemplo,  $0 \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \subset [-1, 1]$ .

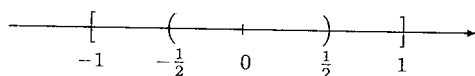


Figura 7.7.a

Domínio de  $f$  com uma vizinhança  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  de 0

O ponto  $-1 \in [-1, -\frac{1}{2}) \subset [-1, 1] = \text{Dom}(f)$  é o extremo inferior de um intervalo contido no domínio da função  $f$ , que não está definida em pontos à sua esquerda.

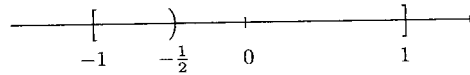


Figura 7.7.b

Domínio de  $f$  com uma vizinhança  $[-1, -\frac{1}{2})$  de  $-1$

O ponto  $1 \in (\frac{1}{2}, 1] \subset [-1, 1] = \text{Dom}(f)$  é o extremo superior de um intervalo contido no domínio da função  $f$ , que não está definida em pontos à sua direita.

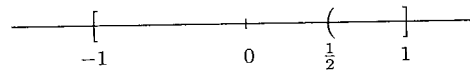


Figura 7.7.c

Domínio de  $f$  com uma vizinhança  $(\frac{1}{2}, 1]$  de  $1$

Aqui está uma oportunidade para você experimentar.

Atividade 7.1.

Considere  $g(x) = 1 + \sqrt{x^2 - 1}$ . Determine o domínio de  $g$ . Quais de seus pontos são do tipo interior? Há algum ponto em alguma das outras categorias?

Agora estamos preparados para enunciar a definição de continuidade de uma função  $f$  num certo ponto  $a$ .

**Definição:** Dizemos que a função  $f$  é *contínua* em  $a \in \text{Dom}(f)$ , se

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ,  
no caso de  $a \in I \subset \text{Dom}(f)$ , onde  $I$  é um intervalo aberto;
- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ ,  
no caso de  $a \in I \subset \text{Dom}(f)$ , com  $I = [a, a + r)$ , para algum  $r > 0$ ,  
sendo que  $f$  não está definida à esquerda de  $a$ ;
- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ ,  
no caso de  $a \in I \subset \text{Dom}(f)$ , com  $I = (a - r, a]$ , para algum  $r > 0$ ,  
sendo que  $f$  não está definida à direita de  $a$ .

Resumindo, dizemos que a função  $f$  é contínua em  $a$  se o seu limite, no ponto em questão, coincide com  $f(a)$ . Ou seja,  $f$  é contínua em  $a$  se não houver surpresas, se o valor da função,  $f(a)$ , corresponde ao esperado, indicado pelo seu comportamento nas vizinhanças de  $a$ .

Note que, pela definição, só faz sentido falar em continuidade de  $f$  em um determinado ponto  $a$  no caso de esse ponto *pertencer ao seu domínio*.

Vamos a um exemplo.

**Exemplo 7.5**

Seja  $p(x) = -\frac{x^2}{2} + 2x + 2$  uma função polinomial cujo gráfico é uma parábola. Muito bem, o domínio de  $f$  é toda a reta real  $\mathbb{R}$ . Vamos escolher um certo ponto do domínio de  $f$ , digamos 3. Note que  $p(3) = -\frac{3^2}{2} + 6 + 2 = \frac{7}{2}$ . Além disso,

$$\lim_{x \rightarrow 3} -\frac{x^2}{2} + 2x + 2 = \frac{7}{2},$$

pois para valores de  $x$  próximos de 3, como 2.999 ou 3.000017, os valores de  $p(x)$  estão próximos de  $\frac{7}{2}$ .

Na verdade, isso ocorre para qualquer  $a \in \mathbb{R}$ :

$$\lim_{x \rightarrow a} -\frac{x^2}{2} + 2x + 2 = -\frac{a^2}{2} + 2a + 2 = p(a).$$

Portanto, a função polinomial  $p(x) = -\frac{x^2}{2} + 2x + 2$  é contínua em todos os elementos de  $\mathbb{R}$ , o seu domínio. Nesse caso, diremos que  $p$  é (simplesmente) contínua. Veja a definição a seguir.

---

**Definição:** A função  $f$  é *contínua* se for contínua em todos os pontos de seu domínio.

---

Teoricamente, é mais difícil provar que uma determinada função é contínua do que o contrário. Realmente, para provar que uma determinada função é contínua, temos que verificar a definição em cada ponto de seu domínio. Por outro lado, para mostrar que uma certa função *não* é contínua, basta descobrir um ponto de seu domínio no qual a definição de continuidade falhe. Veja: *num ponto de seu domínio!* Mas, calma! Voltaremos a isso em pouco tempo. Vejamos mais alguns exemplos.

**Exemplo 7.6**

Na aula 4, como aplicação do Teorema do Confronto, vimos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1.$$

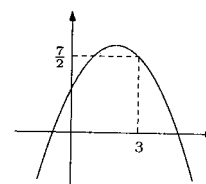


Figura 7.8  
Gráfico de  $p$

# CÁLCULO I

Como  $\sin 0 = 0$  e  $\cos 0 = 1$ , isso mostra que as funções  $f(x) = \sin x$  e  $g(x) = \cos x$ , definidas em toda a reta real, são contínuas no ponto 0.

Na verdade, na aula 4 fizemos mais do que isso. Usando o lema da mudança de coordenadas e os limites anteriores concluímos que, para todo  $a \in \mathbb{R}$ ,

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a.$$

Isso quer dizer que as funções trigonométricas seno e cosseno são funções contínuas. Veja os gráficos dessas funções numa vizinhança do ponto 0:

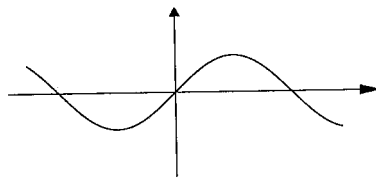


Figura 7.9

Gráfico da função  $y = \sin x$

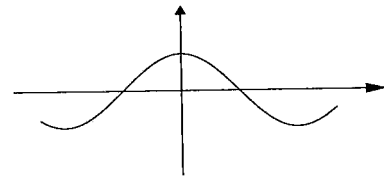


Figura 7.10

Gráfico da função  $y = \cos x$

Veja um exemplo onde o domínio da função não é o conjunto de todos os números reais.

### Exemplo 7.7

A função  $f(x) = 2 + \sqrt{3-x}$  é uma função contínua.

Para começar, vamos calcular o domínio de  $f$ . A condição  $3-x \geq 0$  deve ser satisfeita. Assim,  $x \leq 3$  determina o domínio de  $f$ , o intervalo fechado não limitado  $(-\infty, 3]$ .

Assim, devemos considerar dois tipos de elementos do domínio de  $f$ : aqueles que estão no interior, os que são menores do que 3, e aquele que fica na extremidade do domínio, o número 3.

Veremos que a função  $f$  é contínua em todos os pontos menores do que 3. Assim, seja  $a$  um número menor do que 3. Então,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} 2 + \sqrt{3-x} = 2 + \sqrt{3-a} = f(a).$$

Por exemplo, se  $a = -1$ ,

$$\lim_{x \rightarrow -1} 2 + \sqrt{3-x} = 4.$$

Como  $f(-1) = 4$ ,  $f$  é contínua em  $-1$ .

Isso é, nada de novidades para esses pontos interiores, a função é contínua em cada um deles. Realmente, apesar de estarmos lidando com a letra  $a$  para fazer o caso geral dos pontos interiores, essa parte do exercício é bem fácil. É comum sentir-se um pouco desconfiado e intranquilo ao lidar com letras no lugar de números, mas você precisa se acostumar, pois essa prática é muito conveniente na Matemática.



Para completar o exemplo e concluir que a função é contínua, devemos considerar o elemento  $3 \in \text{Dom}(f)$ . Nesse caso, a função está definida à sua esquerda mas não a direita. Portanto, precisamos fazer uso do limite lateral conveniente.

Aqui está! Como

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} 2 + \sqrt{3-x} = 2 = f(3),$$

a função  $f$  é contínua em 3.

Eis um bom momento para você experimentar o quanto entendeu esse conteúdo.

### Atividade 7.2.

Considere  $g(x) = 1 + \sqrt{x^2 - 1}$  a função cujo domínio você determinou na atividade anterior. Você deve ter notado que esse domínio tem dois pontos extremos, como foi o caso de 3 no exemplo anterior. Mostre que a função  $g$  é contínua. Faça um esboço de seu gráfico.

Nessa atividade você vai usar a um conteúdo de Pré-Cálculo: hipérbolas.

## Exemplo de função não contínua

Após uma seqüência de exemplos de funções *bem comportadas*, ou seja, contínuas, vamos a um exemplo de uma função *não contínua*.

### Exemplo 7.8

Seja  $f(x) = [x] = n$ , na qual  $n \leq x < n+1$ , a função chamada *maior inteiro*. Isto é,  $[x]$  é o maior inteiro que é menor ou igual a  $x$ .

Assim,  $[-0.5] = -1$ ,  $[2.1] = 2$ ,  $[2.99] = 2$ ,  $[3] = 3$ ,  $[\sqrt{2}] = 1$  e  $[\pi] = 3$ .

Você verá que o uso de limites laterais será muito útil no caso de estudar a continuidade de funções.

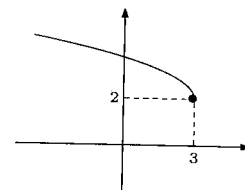


Figura 7.11

Gráfico de  $f$

Veja o gráfico de  $f$ :

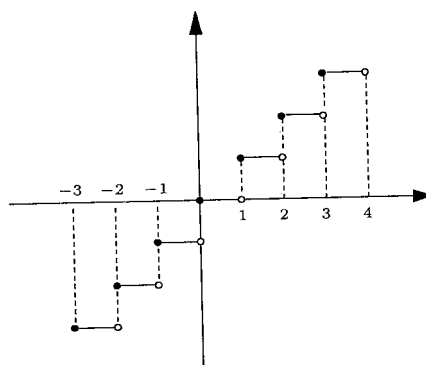


Figura 7.12

Gráfico de  $f(x) = [x]$

Afirmção: a função  $f$  é contínua em cada elemento não inteiro de seu domínio; a função  $f$  não é contínua em cada inteiro de seu domínio.

Conclusão: a função  $f$  não é contínua.

Este é, portanto, um exemplo típico de uma função não contínua. O seu gráfico apresenta uma série de interrupções e lembra uma escada.

Precisamos justificar a afirmação. Primeiro, veja porque  $f$  é contínua em  $a$  sempre que  $a$  não é um número inteiro.

Todo número real  $a$  não inteiro é cercado por um par de inteiros sucessivos, tais que

$$n < a < n + 1.$$

Por exemplo,  $-3 < -2.37 < -2$  ou  $2 < \sqrt{5} < 3$ .

Neste caso,  $f(a) = n$ . Nos exemplos anteriores,  $f(-2.37) = -3$  e  $f(\sqrt{5}) = 2$ . Além disso, há um pequeno intervalo  $(a - r, a + r)$ , em torno de  $a$ , tal que

$$n < a - r < a < a + r < n + 1.$$

Veja a figura:

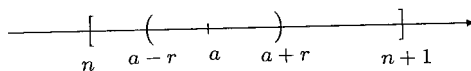


Figura 7.13

$$(a - r, a + r) \subset [n, n + 1]$$

Isto garante que  $f$ , restrita a este intervalo, é constante e igual a  $n$ , portanto,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = n = f(a).$$

Novamente, este é um argumento matemático do tipo geral. Isto é, usamos a letra  $a$  para representar um número real não inteiro qualquer e, portanto, o argumento apresentado vale para todos os números satisfazendo essa condição. Isso é muito conveniente mas, nesse estágio, não se espera que você apresente esse tipo de argumentação.

Para terminar o exemplo, vamos considerar o caso dos números inteiros. Veja, nesse caso, os limites laterais serão diferentes, como o próprio gráfico da função indica.

Seja  $n$  um número inteiro. Então,  $f(n) = [n] = n$ . Além disso, se  $n - 1 < x < n$ , então  $f(x) = [x] = n - 1$ . Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = n - 1.$$

Por outro lado, se  $n \leq x < n + 1$ , então  $f(x) = n$ . Assim,

$$\lim_{x \rightarrow n^+} f(x) = n.$$

Como os limites laterais são diferentes,  $f$  não admite limite no ponto  $n$  e, conseqüentemente, não é contínua nesse ponto.

## Uma palavra sobre a nomenclatura

Você notou que definimos *continuidade* de uma função num ponto e dizemos que uma função é contínua se for contínua em todos os pontos de seu domínio, que é uma união de intervalos.

A negação da afirmação “ $f$  é contínua” é “ $f$  não é contínua” e para que isso ocorra, basta que  $f$  não seja contínua em único ponto de seu domínio.

Vamos a mais um exemplo.

### Exemplo 7.9

Cuidado especial deve ser dado àquelas funções cujas definições usam várias sentenças. Veja a seguir: vamos determinar os valores de  $k$  para os quais

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & \text{se } x \leq 1, \\ k - x, & \text{se } x > 1, \end{cases}$$

# CÁLCULO I

seja contínua em 1. É claro que isso também determinará os valores de  $k$  para os quais a função não é contínua em  $x = 1$ .

Note que a função  $f$  é definida por uma certa lei até 1 e por outra lei a partir de 1.

Lembremos dos itens que devem ser satisfeitos para  $f$  ser contínua em um certo ponto:

(a) A função deve estar definida no ponto. Ou seja, o ponto deve ser elemento do domínio da função. Esse é o caso aqui, uma vez que a função está definida em toda a reta real;

(b) A deve admitir limite no ponto em questão. Em particular, os limites laterais devem, portanto, coincidir;

(c) O valor da função no ponto deve coincidir com esse limite.

Resumindo,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

Como  $f(1) = 1^2 + 2 = 3$ , basta que analisemos os limites laterais, as ferramentas apropriadas para esse caso.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + 2x = 3 = f(1)$$

Agora,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} k - x = k - 1$$

Portanto, para que  $f$  seja contínua em 1, é preciso que 3 seja igual a  $k - 1$ . Ou seja,  $f$  é contínua em 1 se, e somente se,  $k = 4$ .

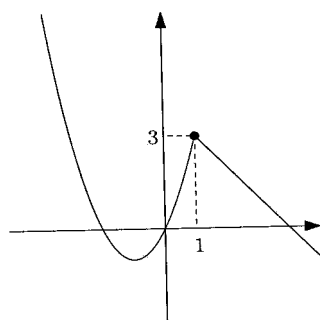


Figura 7.14

Gráfico da função  $f$  com  $k = 4$   
 $f$  é contínua em 1

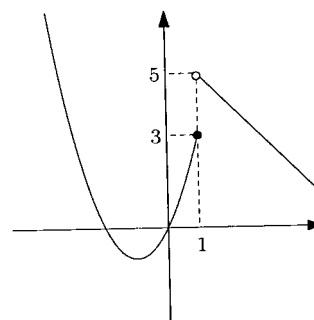


Figura 7.15

Gráfico da função  $f$  com  $k = 6$   
 $f$  não é contínua em 1

Observe que  $k = 4$  é a única possibilidade de  $f$  ser contínua em 1. Neste caso, o segmento de reta que é o gráfico de  $f$  à direita de 1 *continua* o trecho de parábola, gráfico de  $f$  à esquerda de 1. Qualquer outra escolha

para a constante  $k$  implica numa *interrupção* do gráfico de  $f$ . Assim,  $k = 6$  é apenas um exemplo em uma infinidade de possibilidades nas quais  $f$  não será contínua em 1. Em todas elas o gráfico de  $f$  apresentará uma interrupção, marcando este fenômeno.

Isso nos leva uma interpretação geométrica do conceito de continuidade.

## Gráficos de funções contínuas

Os gráfico de uma função contínua  $f$  sobre cada intervalo  $I$  contido em seu domínio  $\text{Dom}(f)$  não apresenta interrupções. É comum dizer “ $f$  é contínua se pudermos esboçar seu gráfico sem levantar o lápis do papel”, ou seja, com traço *contínuo*. Mas, um alerta! Isso só é válido se o domínio de  $f$  for um intervalo, não apresentar, ele mesmo, interrupções.

Em particular, se o domínio de  $f$  for um único intervalo, a função é contínua se, e somente se, o seu gráfico pode ser traçado sem interrupções.

### Exemplo 7.10

O exemplo consiste de uma série de gráficos de funções, algumas contínuas, algumas não contínuas. Em cada caso, o domínio estará em destaque. Veja, também, o comentário relativo a cada caso.

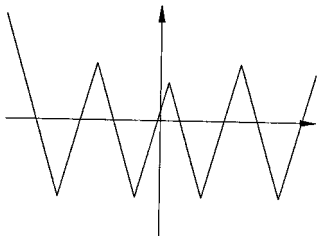


Figura 7.16  
 $f$  contínua,  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

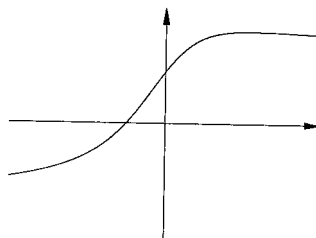


Figura 7.17  
 $g$  contínua,  $\text{Dom}(g) = \mathbb{R}$

Nestes dois primeiros casos, as funções estão definidas em toda a reta real. Apesar dos gráficos serem bastante diferentes, o da função  $f$  apresentando diversos “bicos” enquanto o da função  $g$  é uma curva suave, podemos traçá-los sem levantar o lápis do papel. É isso que os caracteriza como gráficos de funções contínuas. Note, também, que  $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$  e é interpretado como um intervalo.

CÁLCULO I

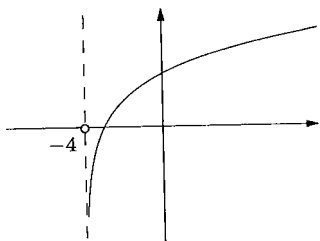


Figura 7.18

$h$  contínua,  $\text{Dom}(h) = (-4, +\infty)$

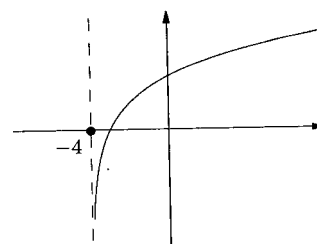


Figura 7.19

$j$  não contínua,  $\text{Dom}(j) = [-4, +\infty)$

Aqui, o detalhe é que faz a diferença. Isso evidencia a sutileza desse conceito, que merece toda a nossa atenção. As funções  $h$  e  $j$  são coincidentes no intervalo aberto  $(-4, \infty)$ , mas a função  $j$  está definida, também, no ponto  $-4$ , o extremo do intervalo. Ou seja, elas diferem pela natureza dos seus domínios:  $\text{Dom}(h)$  é aberto e  $\text{Dom}(j)$  é *fechado*, inclui sua extremidade.

A função  $j$  não é contínua em  $-4$ , uma vez que  $\lim_{x \rightarrow -4^+} j(x) = -\infty$ , excluindo a possibilidade de  $\lim_{x \rightarrow -4^+} j(x)$  ser igual a  $j(-4) = 0$ . No caso da função  $k$ , isso não é problema, uma vez que  $-4 \notin \text{Dom}(h)$ .

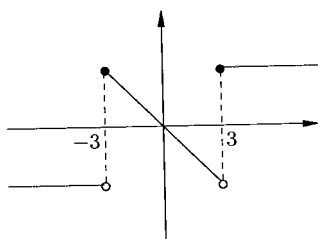


Figura 7.20

$l$  não contínua,  $\text{Dom}(l) = \mathbb{R}$

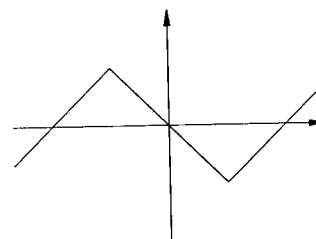


Figura 7.21

$m$  contínua,  $\text{Dom}(m) = \mathbb{R}$

A função  $l$  não é contínua nos pontos  $-3$  e  $3$ , pois nesses pontos os limites laterais são diferentes.

Muito bem, na próxima aula exploraremos outros aspectos da continuidade das funções. Você aprenderá a reconhecer várias funções contínuas e conhecerá algumas de suas propriedades assim como alguns resultados surpreendentes delas decorrentes.

Aqui estão alguns problemas sobre os temas da aula.

## Exercícios

1. Em cada item a seguir, determine se a função dada é contínua no ponto indicado.

$$(a) f(x) = \begin{cases} 2 + \operatorname{sen}(\pi x), & \text{se } x \leq 2, \\ 2x - 2, & \text{se } x > 2, \end{cases} \quad \text{no ponto } 2 ;$$

$$(b) g(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 3x + 1}, & \text{se } x < 1, \\ x^2 - 2x + 3, & \text{se } x \leq 1, \end{cases} \quad \text{no ponto } 1 ;$$

$$(c) h(x) = x[x], \quad \text{no ponto } -3.$$

2. Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3 \cos \pi x & \text{se } x < 0, \\ ax + b & \text{se } 0 \leq x \leq 3, \\ x - 3 & \text{se } x > 3. \end{cases}$$

(a) Calcule os valores de  $a$  e de  $b$ , tais que  $f$  seja uma função contínua.

(b) Faça um esboço do gráfico de  $f$  usando os valores de  $a$  e de  $b$  calculados no item anterior.

3. Em cada caso a seguir, determine se a função cujo gráfico está esboçado é contínua. Atenção no domínio da função.

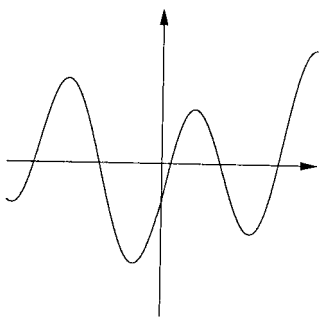


Figura 7.22  
 $\operatorname{Dom}(f) = \mathbb{R}$

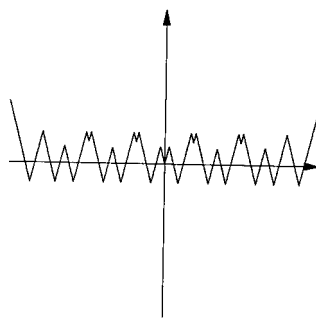


Figura 7.23  
 $\operatorname{Dom}(f) = \mathbb{R}$

CÁLCULO I

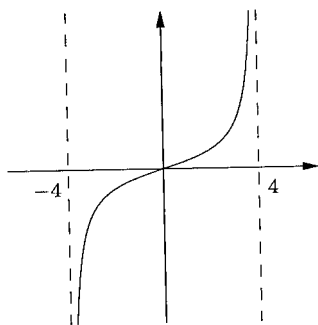


Figura 7.24  
 $\text{Dom}(f) = (-4, 4)$

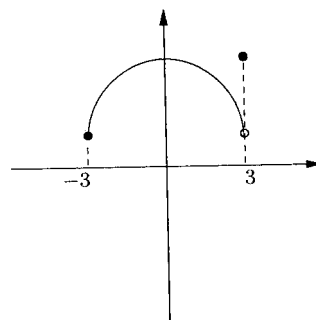


Figura 7.25  
 $\text{Dom}(f) = [-3, 3]$

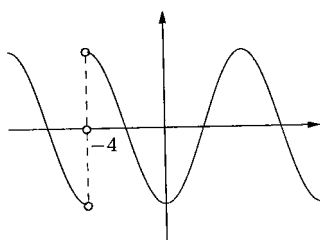


Figura 7.26  
 $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-4\}$

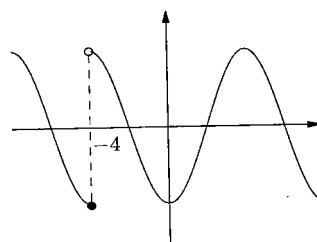


Figura 7.27  
 $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

4. Esboce o gráfico de uma função contínua  $f$ , cujo domínio é o intervalo  $(-2, 2)$  e cuja imagem é toda a reta real;

Tente repetir esse feito, agora, usando o intervalo  $[-2, 2]$  como domínio.

5. Esboce o gráfico de uma função contínua  $g : [1, 5] \rightarrow [-2, 2]$ , tal que  $g(1) = -2$  e  $g(5) = 2$ . Olhando este gráfico, o que você pode dizer sobre a equação

$$g(x) = 0?$$



# Aula 8 – O Teorema do Valor Intermediário

## Meta da aula

- Apresentar um importante resultado da teoria das funções contínuas: o Teorema do Valor Intermediário.

## Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Aplicar o Teorema do Valor Intermediário para verificar a existência de soluções de equações.
- Reconhecer certas propriedades das funções contínuas.

## Um exemplo histórico

O ano de 1225 assistiu a um desafio, lançado por João de Palermo, um matemático da corte de Frederico II, imperador do Sacro Império Romano, contra Fibonacci. Esse tipo de duelo era comum naquela época e servia para estabelecer o melhor matemático do reino.

Uma das questões propostas no desafio era resolver a equação

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20.$$

Esse problema havia sido tirado de um livro escrito por Omar Khayyam (1050-1123).

Como você deve ter previsto, Fibonacci venceu o desafio. Ele escreveu um livro com as soluções de três problemas do desafio que foi enviado para o imperador. Sobre a equação de Omar Khayyam, Fibonacci provou que a solução não é um número inteiro ou um número racional, nem mesmo a raiz quadrada de um número racional. Ele concluiu:

... e como não foi possível resolver esta equação de nenhuma das formas anteriores, reduzi a solução a uma aproximação.



Leonardo de Pisa (1170 - 1250), ou Fibonacci, como é mais conhecido. Viveu na Algéria, Norte da África, onde estudou a Matemática cultivada pelos árabes. Em 1202, publicou o *Liber Abaci*, introduzindo na Europa os algarismos hindu-arábicos.

## CÁLCULO I

E então, sem dar qualquer explicação sobre os métodos que usou para chegar a essa aproximação, Fibonacci a apresenta usando a notação sexagesimal:

$$1.22.7.42.33.4.40.$$

Isto é,

$$1 + \frac{22}{60} + \frac{7}{60^2} + \frac{42}{60^3} + \frac{33}{60^4} + \frac{4}{60^5} + \frac{40}{60^6}.$$

Em notação decimal, 1,3688081075, que é correto até a nona casa decimal. Um feito realmente memorável.

## O problema de Fibonacci pelo ponto de vista do Cálculo

Para colocar o problema de Fibonacci no contexto de Cálculo, vamos considerar a função

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x.$$

Assim, a equação  $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$  pode ser escrita como  $f(x) = 20$  e resolver o problema consiste em encontrar um certo número  $x_0$  tal que

$$f(x_0) = 20.$$

Como você pode observar,  $f(1) = 1 + 2 + 10 = 13$  e  $f(2) = 8 + 8 + 20 = 36$ . Veja novamente:

$$f(1) = 13 < 20 < 36 = f(2).$$

Isto é, 1 não é solução por falta enquanto que 2 não é solução por excesso. Como diz o ditado: *in medius virtus*, a virtude está no meio. Bem, não exatamente, pois  $f(1,5) = 22,875$ . Mas estamos fazendo progressos, não acha?

### Atividade 8.1.

Calcule  $f(1,25)$  e conclua em qual metade do intervalo  $[1, 1,5]$  se encontra a solução.

## A teoria, na prática, é outra ...

Estamos diante de uma bifurcação. Matemática constantemente nos apresenta tais situações. Espere um pouco e você perceberá o que isso quer dizer.

Uma atitude que poderíamos chamar de prática, de pragmática, nos impele a prosseguir com esse processo. Veja a tabela a seguir.

$f(1) = 13$	$f(2) = 36$
$f(1) = 13$	$f(1,5) = 22,875$
$f(1,25) = 17,578125$	$f(1,5) = 22,875$
$f(1,25) = 17,578125$	$f(1,375) = 20,13085938$
$f(1,3125) = 18,83129883$	$f(1,375) = 20,13085938$
$f(1,34375) = 19,47518921$	$f(1,375) = 20,13085938$

Apesar da trabalheira que essas contas deram, queremos dizer que a solução está entre 1,34375 e 1,375.

Mas, há uma segunda atitude, de natureza mais teórica, digamos assim, que estaria nos soprando no outro ouvido a pergunta que não quer calar: que garantias temos de realmente há um número  $x_0$  entre 1,34375 e 1,375 tal que  $f(x_0) = 20$ .

Realmente, é provável que tal dúvida (de caráter existencial, por assim dizer) não tenha ocorrido a Fibonacci. Ele prosseguiu nas computações certo de que tal número lá estaria. Isso porque ele não conhecia as funções que nós conhecemos agora.

Poderíamos colocar essa questão da seguinte forma:

Sob quais *condições* podemos afirmar que, se  $d$  é um número entre  $f(a)$  e  $f(b)$ , então existe um número  $c$ , entre  $a$  e  $b$ , tal que

$$f(c) = d?$$

Veja as ilustrações a seguir.

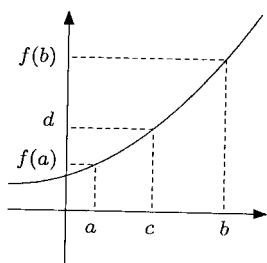


Figura 8.1

$$f(a) < d < f(b)$$

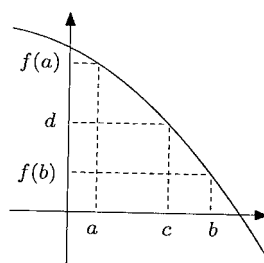


Figura 8.2

$$f(a) < d < f(b)$$

## CÁLCULO I

Nos dois exemplos estampados anteriormente a história tem final feliz. Isto é, existe um número  $c$  tal que  $f(c) = d$ . Nem sempre isso acontece. Veja a próxima ilustração.

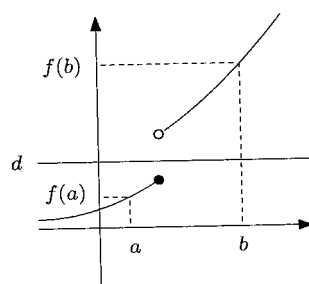


Figura 8.3

Não existe  $c \in [a, b]$ , tal que  $f(c) = d$ .

Você já deve ter desconfiado que a tal *condição* necessária para que exista o ponto  $c$  tal que  $f(c) = d$  é a *continuidade* da função  $f$ .

## Atividade 8.2.

Convença-se de que para unir um ponto  $A$ , no semi-plano inferior do plano cartesiano, com um ponto  $B$ , no semi-plano superior, por um *traço contínuo*, necessariamente deve-se cruzar o eixo  $Ox$ .

Realmente, a continuidade é a condição necessária que o gráfico da função, ao passar do *nível*  $f(a)$  para o *nível*  $f(b)$ , cruze todas as retas horizontais entre eles, passando também pela reta  $y = d$ .

Esse fato, que nossa intuição aceita tão facilmente, é um resultado matemático muito importante cuja demonstração foge do escopo desta disciplina. Nós o enunciaremos com toda a pompa que ele merece em breve, discutiremos as suas aplicações, mas você só verá a sua demonstração no futuro, em outra disciplina, quando outras ferramentas matemáticas estiverem desenvolvidas.

Antes de prosseguirmos, precisamos dar um ponto final na história da teoria e da prática, que começamos anteriormente.

## Na teoria, a prática é outra ...

Você já notou que, na praia, para entrar no mar, algumas pessoas passam um bom tempo colocando primeiro um dos pés, recuando, colocando

novamente, se encolhendo, enquanto algumas outras num único salto, simplesmente mergulham no mar?

E você, quando compra um aparelho novo, assim como uma câmara fotográfica ou um sistema de som, vai ligando tudo, apertando todas as teclas *para ver como funciona*, ou senta-se com o manual de instruções e só liga os cabos ou coloca as baterias quando já tem uma boa idéia de como as coisas devem funcionar?

Assim são as pessoas. Uma maneira de ser não é, necessariamente, melhor do que a outra. São apenas maneiras diferentes. No computo final, talvez, uma mistura de ambas atitudes fica mais próximo do ideal.

Estamos mencionando essas coisas a propósito do que foi dito no início da aula, sobre a teoria e a prática.

Frente a uma equação, uma atitude prática consistiria em buscar uma solução ou, pelo menos, uma aproximação dessa solução. Já uma atitude de natureza mais teórica, digamos assim, seria a de certificar-se da existência de alguma solução.

É claro que há situações e situações e que uma atitude não precisa (talvez não deva) excluir a outra. Perceber que um certo problema não tem solução (pelo menos não do tipo que estamos procurando) pode nos salvar de muita dor-de-cabeça e trabalho. Por outro lado, se uma razoável aproximação é o que precisamos, nada de grandes teorizações, é hora de arregañar as mangas e trabalhar.

### Atividade 8.3.

Convença-se de que a equação polinomial  $x^3 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$  tem uma raiz no intervalo  $[0, 1]$ . Encontre uma aproximação com duas casas decimais desta raiz.

### Atividade 8.4.

Para quais valores de  $a$  a equação polinomial  $x^2 - 3x + a = 0$  tem duas raízes distintas.

## O Teorema do Valor Intermediário

O enunciado de um teorema é uma coisa fundamental. Você deverá ser capaz de lembrar-se das hipóteses, saber qual é a conclusão assim como alguns bons exemplos nos quais o teorema se aplica. No caso do teorema que

estamos para enunciar, os ingredientes são:

- (a) uma função (que será contínua);
- (b) um intervalo fechado;
- (c) um número entre os valores da tal função nos extremos do intervalo.

A conclusão do teorema diz que o número do item (c) está na imagem da função. Veja:

---

**Teorema do Valor Intermediário:**

Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e seja  $d$  um número entre  $f(a)$  e  $f(b)$ . Então existe um número  $c \in (a, b)$  tal que

$$f(c) = d.$$

---

A afirmação “ $d$  um número entre  $f(a)$  e  $f(b)$ ” inclui duas possibilidades:

$$f(a) < d < f(b) \quad \text{ou} \quad f(b) < d < f(a),$$

como os exemplos ilustrados nas figuras 8.1 e 8.2 ilustram.

Além disso, o exemplo ilustrado na figura 8.3 evidencia a importância da hipótese “ $f$  é uma função contínua”.

Vamos a mais um exemplo.

**Exemplo 8.1**

8.1.

Ao falarmos em equações é provável que pensemos em equações envolvendo polinomiais, mas equações podem transcender esse universo algébrico. Vamos considerar uma dessas possibilidades.

Vamos mostrar que a equação  $\sin x = 2x - 3$  tem solução. Para tanto, usaremos o Teorema do Valor Intermediário.

Veja, precisamos de reescrever o problema, pois o teorema requer uma função, um intervalo e um valor.

Primeiro, a função, que deve ser contínua. Um bom truque consiste em reescrever a equação na forma “alguma coisa” = 0, e obtemos, de quebra, o valor, o número zero. Assim, fazemos

$$\sin x - 2x + 3 = 0$$

e escolhamos  $f(x) = \sin x - 2x + 3$ , uma função contínua, pois é a soma da função contínua seno de  $x$  com uma função afim.

Agora, está faltando o intervalo. Como o valor  $d$  é igual a zero, devemos escolher um intervalo cujos valores nos extremos tenham sinais diferentes: um positivo e o outro negativo.

Zero é sempre um bom candidato:  $f(0) = \sin 0 + 3 = 3 > 0$ .

Pronto, o outro extremo precisa ser negativo. Como estamos lidando com uma função trigonométrica, é conveniente usar múltiplos de  $\frac{\pi}{2}$ . Além disso, todo mundo sabe que  $\pi$  é um pouco maior do que 3...

Sem muita dificuldade, observamos que  $f(\pi) = \sin \pi - 2\pi + 3 = -2\pi + 3 < -3 < 0$ .

Agora que terminamos nosso rascunho, por assim dizer, precisamos dar a resposta à questão.

Considere a função contínua  $f(x) = \sin x - 2x + 3$  no intervalo  $[0, \pi]$ . Como  $f(0) = 3 > 0 > -3 > f(\pi)$ , existe um número  $c \in [0, \pi]$ , tal que

$$f(c) = \sin c - 2c + 3 = 0.$$

Na seção que você lerá a seguir apresentamos um resultado que é consequência do Teorema do Valor Médio.

## Um teorema surpreendente

Há na Matemática uma família de teoremas chamados de Teoremas do Ponto Fixo. Esses teoremas são muito importantes e podem ser aplicados em diferentes situações. Por exemplo, são usados na teoria das equações diferenciais para provar a existência de soluções de certas equações assim como a existência de situações de equilíbrio na teoria dos jogos.

De qualquer forma você pode estar pensando: o que é um *ponto fixo*? Muito bem, eis aqui a definição:

### Ponto Fixo:

Um ponto  $x_0 \in A$  é um ponto fixo da função  $f : A \rightarrow A$  se  $f(x_0) = x_0$ . Isto é, a função  $f$  fixa o ponto  $x_0$ .

Uma função  $f$  admite um ponto fixo se, e somente se, a equação  $f(x) = x$  tem solução.

A teoria dos jogos é uma área da Matemática que trata de conflito e colaboração. Isto é, estuda situações nas quais se pode favorecer ou contrariar uma das partes que se opõem ou mesmo a ambas.

Essa parte da Matemática desenvolveu-se muito a partir do século passado e tem uma forte interface com a Economia, com a Sociologia, assim como outras áreas das Ciências Humanas.

## CÁLCULO I

Veja a situação a seguir. Coloque uma colher dentro de um copo com leite e mexa, mexa, bastante. Enquanto isso, imagine como todas essas partículas dentro do copo vão girando, girando, correndo num rodopio.

Você se surpreenderia com a afirmação de que após todo esse processo, assim que o leite parar de mexer-se, pelo um ponto do copo estará exatamente na posição inicial, antes do leite ser mexido? Isto é, ao final do processo haverá um ponto do copo de leite que estará fixo apesar da mudança de todos os outros. Note que, *durante* o processo, o tal ponto pode ter *passado* por todo o copo, mas voltará a sua posição inicial quando o leite parar de mexer.

Mais ainda, suponha que você decida mover este ponto e, enfiando a colher no copo novamente, volte a mexer o leite. Novamente, após o leite voltar a ficar parado, se o ponto da situação anterior estiver em alguma outra posição, certamente um segundo ponto passará a ocupar a posição que estava antes de todo o processo ter começado.


Realmente, concordo que a questão deixa margem a dúvida. Parece pouco provável, não é, uma vez que a colher dança de lá para cá, procurando remexer todos os pontos.

Vamos, portanto, a uma experiência um pouco mais “controlável”.

Tome duas folhas de papel quadriculado, daquelas que se usa nas aulas de Aritmética. Com um pouco de paciência, enumere os quadradinhos de cada uma delas de forma que quando as sobreposos os números correspondentes sejam iguais. Algo assim como o que está sugerido na figura 8.4 a seguir.



1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30
31	32	33	34	35
36	37	38	39	40
41	42	43	44	45



1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30
31	32	33	34	35
36	37	38	39	40
41	42	43	44	45

Figura 8.4

Agora, tome a folha que estava por cima, amasse-a como se fosse jogá-la fora e a deixe cair sobre a folha que havia ficado sobre a mesa, de maneira que nenhum pedacinho fique de fora. Veja a figura 8.5 a seguir.

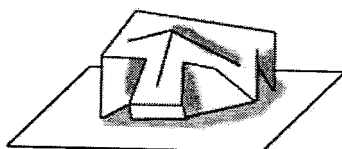


Figura 8.5

Por mais difícil de acreditar que pareça, há pelo menos um quadradinho da folha amassada que recai sobre a folha lisa sobre a mesa, de forma que seus números correspondentes sejam iguais. Ou seja, há um ponto fixo!

Essas duas situações são modelos de teoremas “de ponto fixo”. Isto é, teoremas que sob certas condições garantem a existência de um ponto fixo.

### Exemplo 8.2

8.2. Vamos mostrar que a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = x^2 - x - 3$  admite ponto fixo.

Para isso, devemos resolver a equação  $f(x) = x$ , que resulta em

$$\begin{aligned}x^2 - x - 3 &= x \\x^2 - 2x - 3 &= 0 \\(x + 1)(x - 3) &= 0,\end{aligned}$$

cujas raízes são  $-1$  e  $3$ . Portanto,  $f(-1) = 1 + 1 - 3 = -1$  e  $f(3) = 9 - 3 - 3 = 3$ .

Se  $f$  é uma função real, de uma variável real, podemos *ver* os seus pontos fixos, caso eles existam. Eles correspondem às interseções do gráfico da função  $f$  com o gráfico da função identidade, a bissetriz dos primeiro e terceiro quadrantes. Veja a figura correspondente ao exemplo.

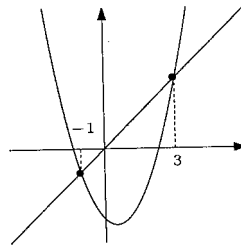


Figura 8.4

Gráfico de uma função com dois pontos fixos.

#### Atividade 8.5.

Mostre que a função  $g(x) = x^2 - x + 2$  não admite pontos fixos.

Como você pode deduzir do exemplo 8.2 e da atividade 8.5, há funções que admitem pontos fixos e há funções que não admitem pontos fixos. O teorema que apresentaremos a seguir

---

#### Teorema do Ponto Fixo:

*Seja  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  uma função contínua. Então existe um ponto  $x_0 \in [0, 1]$  tal que  $f(x_0) = x_0$ .*

---

Isto é, toda função contínua do intervalo  $[0, 1]$  nele mesmo admite um ponto fixo.

Este teorema é um corolário do Teorema do Valor Intermediário. Veja os argumentos a seguir.

---

*Demonstração do Teorema do Ponto Fixo:*

Se  $f(0) = 0$ , a tese do teorema está satisfeita. Portanto, podemos supor que  $f(0) > 0$ .

Analogamente, se  $f(1) = 1$ , o teorema se cumpre. Assim, vamos supor, também, que  $f(1) < 1$ .

Agora, como  $f(x) \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$ , podemos considerar  $g(x) = f(x) - x$ , uma função contínua definida no intervalo  $[0, 1]$ .

Das considerações anteriores, podemos ver que:

(a)  $g(0) = f(0) - 0 = f(0) > 0$ ;

(b)  $g(1) = f(1) - 1 < 0$ , pois  $f(1) < 1$ .

Resumindo,

$$g(0) > 0 > g(1).$$

Podemos, portanto, aplicar a função  $g$  o Teorema do Valor Intermediário. Isto é, existe  $x_0 \in [0, 1]$  tal que  $0 = g(x_0) = f(x_0) - x_0$  e, portanto,

$$f(x_0) = x_0.$$

### Atividade 8.6.

No plano cartesiano da figura 8.5, a seguir, esboce o gráfico de uma função do intervalo  $[0, 1]$  nele mesmo que não tenha pontos fixos.

Na figura 8.6, a seguir, esboce o gráfico de uma função contínua.

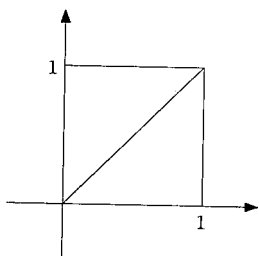


Figura 8.5

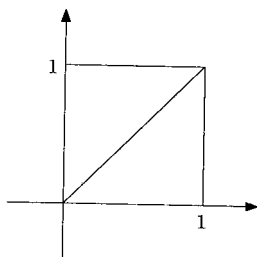


Figura 8.6

Você deve ter concluído que a função da esquerda não é contínua e que a função da direita tem pelo menos um ponto fixo.

Você seria capaz de desenhar o gráfico de uma função contínua do intervalo  $[0, 1]$  nele mesmo que tenha 5 pontos fixos?

O Teorema do Ponto Fixo é um resultado que depende da continuidade da função em *todo o seu domínio* que deve ser um intervalo fechado.

## CÁLCULO I

Aqui cada detalhe é importante. Por exemplo, se trocássemos o intervalo  $[1, 0]$  por  $(1, 0)$  no enunciado do Teorema do Ponto Fixo, continuaríamos a ter um teorema?

A propriedade das funções contínuas que estudaremos agora é de natureza ligeiramente diferente. Na verdade, ela depende apenas da continuidade de  $f$  num ponto específico. Aqui está a última etapa desta aula.

### A propriedade da continuidade do sinal

Quando você quer estudar os sinais de uma função quadrática, por exemplo, basta descobrir as raízes e seguir o esquema que aprendeu no Pré-Cálculo, por exemplo. Isso é, entre as raízes, sinal contrário de  $a$ , fora das raízes, mesmo sinal de  $a$ .

A regra vale e é muito prática. Ela diz que, se a função assume o sinal positivo, por exemplo, num certo ponto, esse sinal *permanece* o mesmo *em torno* do ponto em questão. Note que há um certo tom vago na afirmação *em torno de*.

Essa propriedade (da permanência do sinal) não é exclusiva das funções quadráticas. Ela é uma propriedade das funções contínuas. Vamos enunciá-la propriamente.

---

#### Propriedade da permanência do sinal das funções contínuas:

*Se  $f$  é contínua em  $a$  e  $f(a) > 0$ , então existe um número  $r > 0$  tal que, se  $x \in (a - r, a + r)$ ,  $f(x) > 0$ .*

---

Isso é, se  $f(a)$  tem sinal positivo, os pontos próximos a  $a$  também assumem valores positivos por  $f$ .

---

## Atividade 8.7.

Veja o gráfico da função seno em torno do ponto  $\frac{\pi}{2}$  e observe como ela, uma função contínua, satisfaz a propriedade da permanência do sinal.

## Comentários Finais

Nessa aula você conheceu dois teoremas importantes: o Teorema do Valor Intermediário e o Teorema do Ponto Fixo. O Teorema do Valor Intermediário voltará a ser mencionado nessa disciplina.

Não deixe de pensar um pouco nas discussões sobre os aspectos práticos e teóricos da Matemática e lembre-se de que a virtude está no meio, seja lá onde o meio estiver...

Finalmente, você quer saber qual é a raiz exata da equação estudada por Fibonacci? Foi preciso esperar mais do que três séculos para que os matemáticos descobrissem como resolver equações de grau três por radicais. No caso da equação  $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ , a resposta é

$$x = \frac{\sqrt[3]{352 + 6\sqrt{3930}} + \sqrt[3]{352 - 6\sqrt{3930}} - 2}{3}.$$

Realmente, a resposta dada por Fibonacci,  $x \approx 1.368808108$ , não é má, não é mesmo?

## Respostas de algumas Atividades

## Atividade 8.3.

Convença-se de que a equação polinomial  $x^3 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$  tem uma raiz no intervalo  $[0, 1]$ . Encontre uma aproximação com duas casas decimais desta raiz.

**Solução:**

Considere  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ . Note que  $f(0) = -1$  e  $f(1) = 1 - 3 + 4 - 1 = 1$ .

Como os valores da polinomial “passam” de  $-1$  para  $1$ , na medida que  $x$  “vai” de  $0$  para  $1$ , podemos esperar que em algum número entre  $0$  e  $1$  a polinomial assumirá o valor  $0$ .

Vamos usar a técnica de dividir ao meio o intervalo para “localizar” a raiz.

## CÁLCULO I

$f(0,5) = 0,375$ , portanto a raiz está entre 0 e 0,5.

$f(0,25) = -1,71875$ , portanto a raiz está entre 0,25 e 0,5.

$f(0,35) = 0,130859375$ , e a raiz está entre 0,25 e 0,35.

Prosseguindo assim mais alguns passos, concluímos que a raiz está entre 0,3125 e 0,31875, o que nos dá uma aproximação de duas casas decimais.

## Atividade 8.4.

Para quais valores de  $a$  a equação polinomial  $x^2 - 3x + a = 0$  tem duas raízes distintas.

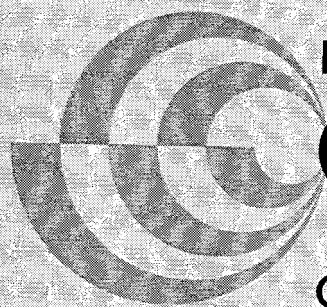
## Solução:

A condição para que a equação tenha duas raízes (reais) distintas é  $9 - 4a > 0$ . Ou seja,  $a < \frac{9}{4}$ .

Note a diferença entre as soluções dessas duas atividades. Uma mais prática, outra mais teórica, digamos assim.

## Exercícios

- Determine se é possível usar o Teorema do Valor Intermediário para saber se a equação  $f(x) = x^2 - 3x - 5$  tem solução em cada um dos intervalos a seguir:
  - $[-3, -2]$ ;      b)  $[-2, 2]$ ;      c)  $[2, 4]$ ;      d)  $[4, 6]$ ;      e)  $[-2, 5]$ ;
- Mostre que a equação  $x^2 - x^5 = 1$  admite solução.
- Para cada uma das funções polinomiais a seguir, determine um inteiro  $n$  tal que  $f(x) = 0$  para algum  $x$  entre  $n$  e  $n + 1$ .
  - $f(x) = x^3 - x + 3$ ;      c)  $f(x) = x^5 + 5x^4 + 2x + 1$ ;
  - $f(x) = x^5 + x + 1$ ;      d)  $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$ .
- Sabendo que  $\ln(3 + \frac{\pi}{2}) < 1,6$ , mostre que a equação  $2 \sin x = \ln(x+3)$  tem solução.
- Suponha que  $f$  é uma função contínua definida no intervalo  $[0, 1]$ . Sabendo que  $f(x)$  é um número racional, para qualquer  $x \in [0, 1]$ , o que podemos dizer a respeito de  $f$ ?
- Seja  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua tal que  $f(0) > 0$  e  $f(1) < 1$ . Mostre que existe um número  $c \in [0, 1]$ , tal que  $f(c) = \sqrt{c}$ .
- Seja  $f$  uma função inversível. Mostre que, se  $f$  admite um ponto fixo, a sua função inversa também admite ponto fixo.



Fundação

**CECIERJ**

Consórcio **cederj**

Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

## Cálculo I

Volume 1- Módulo 1  
3ª edição

Dinamérico Pereira Pombo Jr.  
Paulo Henrique C. Gusmão



SECRETARIA DE ESTADO  
DE CIÊNCIA, TECNOLOGIA E  
INOVAÇÃO DO RIO DE JANEIRO



Ministério  
da Educação



Apoio:

Faperj - Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro





## Aula 9 – Funções deriváveis.

### Objetivos

Compreender a noção de função derivável.

Estudar a derivada de certas funções.

Referências: Aulas 15 e 16, de Pré-Cálculo, e aulas 2, 3, 4 e 5.

A noção de função derivável é uma das noções fundamentais da Matemática sendo, no contexto do nosso curso, a mais importante. Como você verá no módulo 2, ela se constitui em ferramenta indispensável para o estudo do comportamento de funções e do conseqüente esboço de seus gráficos, bem como para o estudo de máximos e mínimos de funções. Além disso, ela representa a velocidade de um movimento, como tornaremos claro na aula 14. Finalmente, a noção de função derivável está intimamente ligada àquela de função integrável, que será estudada na última parte do curso.

Antes de introduzir a noção de função derivável, façamos algumas considerações de caráter geométrico.

Fixemos um elemento  $x$  do domínio de uma função  $f$  e vamos discutir a seguinte pergunta: como achar a equação da reta  $r$  tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(x, f(x))$  (ver a Figura 9.1).

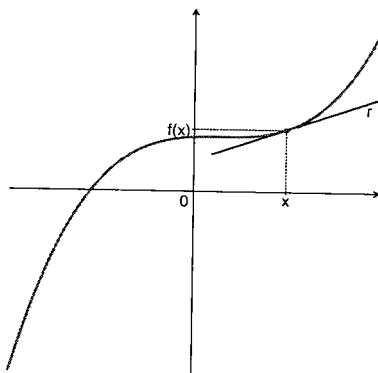


Figura 9.1

Para determinar esta equação, bastaria sabermos a inclinação de  $r$ , pois  $(x, f(x))$  pertence a  $r$ . Como então poderíamos fazê-lo?

Para responder a esta nova pergunta, a cada elemento  $t$  do domínio de  $f$ , com  $t \neq x$ , associemos a reta  $s_t$  secante ao gráfico de  $f$  passando pelos pontos  $(x, f(x))$  e  $(t, f(t))$  (ver a Figura 9.2), cuja inclinação é  $\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$ .

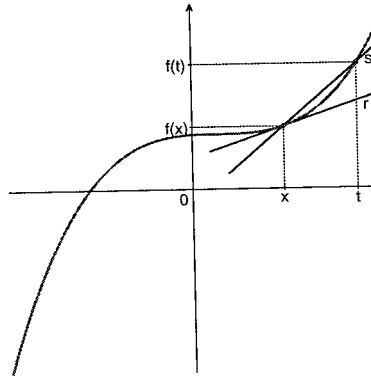


Figura 9.2

Notemos que, quando  $t$  se aproxima de  $x$ , as retas secantes  $s_t$  se aproximam da reta tangente  $r$ , cuja inclinação gostaríamos de encontrar. Como a inclinação de cada reta secante  $s_t$  é  $\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$ , é natural se esperar que a inclinação de  $r$  seja  $\lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}$ .

As considerações acima motivam as definições a seguir.

**Definição 9.1** Sejam  $I$  um intervalo não trivial e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  contínua em  $x \in I$ . A *reta tangente ao gráfico de  $f$  em  $(x, f(x))$*  é:

- (a) a reta que passa por  $(x, f(x))$  cuja inclinação é  $\lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}$ , caso este limite exista (lembrar a Definição 2.1),

ou

- (b) a reta vertical  $t = x$  ( $t$  variando em  $\mathbb{R}$ ), caso  $\lim_{t \rightarrow x} \left| \frac{f(t)-f(x)}{t-x} \right| = +\infty$ .

Se nem (a) nem (b) forem válidos, diz-se que *não existe reta tangente ao gráfico de  $f$  em  $(x, f(x))$* .

**Definição 9.2** Sejam  $I$  um intervalo não trivial,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x \in I$ . Diz-se que  $f$  é *derivável em  $x$*  se

$$\lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

existe. Neste caso, escrevemos

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

e dizemos que  $f'(x)$  é a *derivada de  $f$  em  $x$* .

Notemos que, como

$$\lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(pois podemos escrever  $t = x + h$  ( $h \neq 0$ ), e  $t$  tender a  $x$  equivale a  $h$  tender a zero), então

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Notemos ainda que, se  $x$  é o extremo inferior de  $I$ ,  $f'(x) = \lim_{t \rightarrow x^+} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$ .

Por outro lado, se  $x$  é o extremo superior de  $I$ ,  $f'(x) = \lim_{t \rightarrow x^-} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$ .

Finalmente, diz-se que  $f$  é derivável em  $I$  se  $f$  é derivável em todo  $x \in I$ .

Em vista das Definições 9.1 e 9.2 segue que, se  $f$  é derivável em  $x \in I$ , então a equação da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(x, f(x))$  é

$$y = f(x) + f'(x)(t - x).$$

Dada uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , seja  $J = \{x \in I; f'(x) \text{ existe}\}$ . Fica então determinada uma função definida em  $J$ , dita a *derivada de  $f$*  e denotada por  $f'$ , que a cada  $x \in J$  associa a derivada de  $f$  em  $x$ ,  $f'(x)$ .

Dedicaremos o restante desta aula a discutir a derivabilidade de certas funções.

### Exemplo 9.1

Sejam  $c \in \mathbb{R}$  e  $f(x) = c$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  (isto é,  $f$  é a função constante e igual a  $c$ ) e estudemos a derivabilidade de  $f$ .

Seja  $x \in \mathbb{R}$  arbitrário. Para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,  $t \neq x$ , temos

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} = 0.$$

Logo,  $f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = 0$ . Acabamos de mostrar que  $f$  é derivável em  $\mathbb{R}$  e  $f'(x) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

### Exemplo 9.2

Seja  $f(x) = x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  e estudemos a derivabilidade de  $f$ .

Seja  $x \in \mathbb{R}$  arbitrário. Para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,  $t \neq x$ , temos

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \frac{t - x}{t - x} = 1.$$

## CÁLCULO I

Logo,  $f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = 1$ . Acabamos de mostrar que  $f$  é derivável em  $\mathbb{R}$  e  $f'(x) = 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

## Exemplo 9.3

Seja  $f(x) = x^2$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  e estudemos a derivabilidade de  $f$ .

Seja  $x \in \mathbb{R}$  arbitrário. Para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,  $t \neq x$ , temos

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \frac{t^2 - x^2}{t - x} = \frac{(t + x)(t - x)}{t - x} = t + x.$$

Logo,  $f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \lim_{t \rightarrow x} (t + x) = 2x$ . Acabamos de mostrar que  $f$  é derivável em  $\mathbb{R}$  e  $f'(x) = 2x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Os Exemplos 9.2 e 9.3 são casos particulares do próximo exemplo.

## Exemplo 9.4

Seja  $k$  um inteiro positivo e consideremos a função  $f(x) = x^k$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Vamos estudar a derivabilidade de  $f$ .

Seja  $x \in \mathbb{R}$  arbitrário. Para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,  $t \neq x$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} &= \frac{t^k - x^k}{t - x} = \frac{(t - x)(t^{k-1} + t^{k-2}x + \dots + tx^{k-2} + x^{k-1})}{t - x} = \\ &= \underbrace{t^{k-1} + t^{k-2}x + \dots + tx^{k-2} + x^{k-1}}_{k \text{ parcelas}}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \\ &= \lim_{t \rightarrow x} (t^{k-1} + t^{k-2}x + \dots + tx^{k-2} + x^{k-1}) = \\ &= (\lim_{t \rightarrow x} t^{k-1}) + x(\lim_{t \rightarrow x} t^{k-2}) + \dots + x^{k-2}(\lim_{t \rightarrow x} t) + x^{k-1} = \\ &= x^{k-1} + x.x^{k-2} + \dots + x^{k-2}.x + x^{k-1} = \\ &= \underbrace{x^{k-1} + x^{k-1} + \dots + x^{k-1} + x^{k-1}}_{k \text{ parcelas}} = kx^{k-1}. \end{aligned}$$

Acabamos de mostrar que  $f$  é derivável em  $\mathbb{R}$  e  $f'(x) = kx^{k-1}$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Em particular, a equação da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(x, f(x)) = (x, x^k)$  é

$$y = x^k + (kx^{k-1})(t - x).$$

### Exemplo 9.5

Seja  $f(x) = |x|$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  e estudemos a derivabilidade de  $f$ .

Para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq 0$ , temos

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0, \\ 1 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1.$$

Conseqüentemente,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$  não existe, ou seja,  $f$  não é derivável em 0. Notemos, ainda, que não há reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(0, f(0)) = (0, 0)$  (observe que o gráfico de  $f$  faz um “bico” no ponto  $(0, 0)$ ; ver a Figura 9.3).

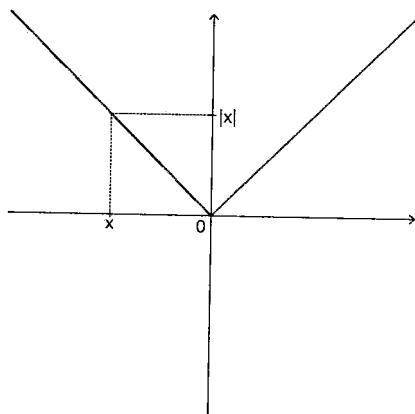


Figura 9.3

Por outro lado, como  $f(x) = -x$  para todo  $x < 0$ , temos  $f'(x) = -1$  para todo  $x < 0$ ; e, como  $f(x) = x$  para todo  $x > 0$ , temos  $f'(x) = 1$  para todo  $x > 0$ .

Em particular, a equação da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(x, f(x)) = (x, |x|)$  é

$$y = -x - (t - x) \quad \text{se } x < 0$$

e

$$y = x + (t - x) \quad \text{se } x > 0.$$

## CÁLCULO I

## Exemplo 9.6

Seja  $f(x) = \sqrt{x}$  para todo  $x \geq 0$  e estudemos a derivabilidade de  $f$ .

Para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x > 0$ , temos

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Conseqüentemente,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty,$$

mostrando que  $f$  não é derivável em 0. Entretanto, há reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(0, f(0)) = (0, 0)$ , a saber, a reta vertical  $x = 0$  (ver a Figura 9.4).

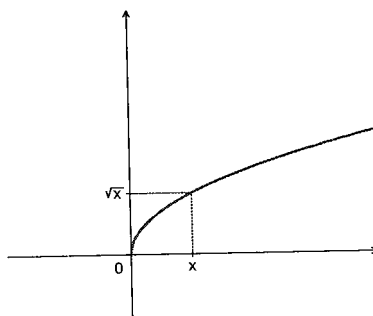


Figura 9.4

Isto mostra que, em geral, a existência de reta tangente ao gráfico de uma função  $f$  no ponto  $(x, f(x))$  não implica que  $f$  seja derivável em  $x$ .

Vejam, agora, que  $f$  é derivável em todo  $x > 0$ . De fato, fixemos  $x > 0$ . Para todo  $t \geq 0$ ,  $t \neq x$ , temos

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \frac{\sqrt{t} - \sqrt{x}}{(\sqrt{t} - \sqrt{x})(\sqrt{t} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{t} + \sqrt{x}}.$$

Logo,

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \lim_{t \rightarrow x} \left( \frac{1}{\sqrt{t} + \sqrt{x}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Em particular, se  $x > 0$ , a equação da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(x, f(x)) = (x, \sqrt{x})$  é

$$y = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}(t - x).$$

## Exemplo 9.7

Seja  $f(x) = \text{sen } x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  e estudemos a derivabilidade de  $f$ .

Seja  $x \in \mathbb{R}$  arbitrário. Para todo  $h \in \mathbb{R}$ ,  $h \neq 0$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen } x}{h} = \\ &= \frac{(\text{sen } h)(\cos x) + (\cos h)(\text{sen } x) - \text{sen } x}{h} = \\ &= \cos x \left( \frac{\text{sen } h}{h} \right) + \text{sen } x \left( \frac{\cos h - 1}{h} \right). \end{aligned}$$

Mas, como  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen } h}{h} = 1$  (Teorema 4.1) e  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$  (Exemplo 4.5), concluímos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \\ &= \cos x \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen } h}{h} \right) + \text{sen } x \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} \right) = \\ &= \cos x. \end{aligned}$$

Acabamos de mostrar que  $f$  é derivável em  $\mathbb{R}$  e  $f'(x) = \cos x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Em particular, a equação da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(x, f(x)) = (x, \text{sen } x)$  é

$$y = \text{sen } x + (\cos x)(t - x).$$

## Exemplo 9.8

Seja  $f(x) = \cos x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  e estudemos a derivabilidade de  $f$ .

Seja  $x \in \mathbb{R}$  arbitrário. Para todo  $h \in \mathbb{R}$ ,  $h \neq 0$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \\ &= \frac{(\cos h)(\cos x) - (\text{sen } h)(\text{sen } x) - \cos x}{h} = \\ &= \cos \left( \frac{\cos h - 1}{h} \right) - \text{sen } x \left( \frac{\text{sen } h}{h} \right). \end{aligned}$$

Raciocinando como no exemplo anterior, obtemos

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -\text{sen } x.$$

Acabamos de mostrar que  $f$  é derivável em  $\mathbb{R}$  e  $f'(x) = -\text{sen } x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Em particular, a equação da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(x, f(x)) = (x, \cos x)$  é

$$y = \cos x - (\text{sen } x)(t - x).$$

## Resumo

Nesta aula você foi apresentado à noção fundamental de função derivável e estudou a derivabilidade de certas funções.

## Exercícios

1. Ache a equação da reta tangente ao gráfico de  $f$  em  $P$  para:
  - a)  $f(x) = x^5$  e  $P = (2, f(2))$ ;
  - b)  $f(x) = \text{sen } x$  e  $P = (\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2}))$ ;
  - c)  $f(x) = \cos x$  e  $P = (\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2}))$ ;
  - d)  $f(x) = \sqrt{x}$  e  $P = (8, f(8))$ .
2. Seja  $f(x) = x^3 - 7$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Use a definição de derivada para mostrar que  $f$  é derivável em  $\mathbb{R}$ .
3. Seja  $f(x) = 3 + 2 \cos x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Use a definição de derivada para mostrar que  $f$  é derivável em  $\mathbb{R}$ .
4. Seja  $f(x) = x^2 + \text{sen } x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Use a definição de derivada para mostrar que  $f$  é derivável em  $\mathbb{R}$ .

Sugestão: Fixe  $x \in \mathbb{R}$ . Para  $t \in \mathbb{R}$ ,  $t \neq x$ , tem-se

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \frac{t^2 - x^2}{t - x} + \frac{\text{sen } t - \text{sen } x}{t - x}.$$

5. Seja  $f(x) = \sqrt{x} + \cos x$  para todo  $x \geq 0$ . Use a definição para mostrar que  $f'(x)$  existe para todo  $x > 0$ .
6. Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^2 \cos(\frac{1}{x})$  se  $x \neq 0$  e  $f(0) = 0$ . Mostre que  $f$  é derivável em 0 e  $f'(0) = 0$ .

Sugestão: Para  $t \neq 0$ , tem-se

$$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \frac{t^2 \cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t} = t \cos\left(\frac{1}{t}\right).$$



7. Seja  $a$  um número real arbitrário. Construa uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que seja derivável em todo  $x \in \mathbb{R}$ , exceto em  $x = a$ , mas que seja contínua em  $a$ .

Sugestão: Inspire-se no Exemplo 9.5.

8. Seja  $f(x) = \text{sen}(5x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Mostre que  $f$  é derivável em  $\mathbb{R}$  e  $f'(x) = 5 \cos(5x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Sugestão: Fixe  $x \in \mathbb{R}$ . Para  $t \in \mathbb{R}$ ,  $t \neq x$ , tem-se

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \frac{\text{sen}(5t) - \text{sen}(5x)}{t - x} = 5 \frac{\text{sen}(5t) - \text{sen}(5x)}{5t - 5x}.$$

9. Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x + 1$  se  $x < 1$  e  $f(x) = -2x + 4$  se  $x \geq 1$ . Mostre que  $f$  não é derivável em 1, apesar de ser contínua em 1.
10. Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^2 + 2$  se  $x < 1$  e  $f(x) = 2x + 1$  se  $x \geq 1$ . Mostre que  $f$  é derivável em  $\mathbb{R}$ .

## Auto-avaliação

Nos exercícios desta aula você percebeu se entendeu a noção de derivada. Só prossiga após fazer todos os exercícios propostos, já que praticamente tudo que veremos a seguir depende do conceito introduzido nesta aula.



## Aula 10 – Propriedades de funções deriváveis.

### Objetivos

Compreender porque toda função derivável é contínua.

Estudar certas propriedades de funções deriváveis, tais como: soma, produto e quociente.

Referências: Aulas 2, 3, 6 e 9.

Nesta aula prosseguiremos o estudo de funções deriváveis, iniciado na aula anterior, provando algumas propriedades destas funções. Primeiramente, provaremos que derivabilidade implica continuidade. Mais precisamente, temos a seguinte

### Proposição 10.1

Sejam  $I$  um intervalo não trivial e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função derivável em  $x \in I$ . Então  $f$  é contínua em  $x$ .

Demonstração: Para todo  $t \in I$ ,  $t \neq x$ , podemos escrever

$$f(t) - f(x) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}(t - x).$$

Como  $\lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = f'(x)$  e  $\lim_{t \rightarrow x} (t - x) = 0$ , segue da Proposição 3.2 que

$$\lim_{t \rightarrow x} (f(t) - f(x)) = f'(x) \times 0 = 0.$$

Isto equivale a dizer que  $\lim_{t \rightarrow x} f(t) = f(x)$  mostrando que  $f$  é contínua em  $x$ .

Vimos, no Exemplo 9.5, que a função  $f(x) = |x|$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) não é derivável em 0, apesar de ser contínua em 0. Isto mostra que a recíproca da Proposição 10.1 não é verdadeira em geral.

Passemos, agora, ao estudo de certas propriedades elementares de funções deriváveis.

### Proposição 10.2

Sejam  $I$  um intervalo não trivial e  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções deriváveis em  $x \in I$ . Então  $f + g$  é derivável em  $x$  e

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Demonstração: Para todo  $t \in I$ ,  $t \neq x$ , temos:

$$\begin{aligned} \frac{(f+g)(t) - (f+g)(x)}{t-x} &= \frac{f(t) + g(t) - f(x) - g(x)}{t-x} = \\ &= \frac{(f(t) - f(x)) + (g(t) - g(x))}{t-x} = \\ &= \frac{f(t) - f(x)}{t-x} + \frac{g(t) - g(x)}{t-x}. \end{aligned}$$

Como  $\lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t-x} = f'(x)$  e  $\lim_{t \rightarrow x} \frac{g(t) - g(x)}{t-x} = g'(x)$ , segue da Proposição 3.1 que

$$\lim_{t \rightarrow x} \frac{(f+g)(t) - (f+g)(x)}{t-x} = f'(x) + g'(x).$$

Isto mostra que  $f+g$  é derivável em  $x$  e  $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ , como havíamos afirmado.

### Exemplo 10.1

Se  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é derivável em  $I$  e  $c \in \mathbb{R}$ , então a função  $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $h(x) = f(x) + c$  para todo  $x \in I$ , é derivável em  $I$  e  $h'(x) = f'(x)$  para todo  $x \in I$ .

De fato, definamos  $g(x) = c$  para todo  $x \in I$ . É claro que  $h = f + g$ . Além disso, pelo Exemplo 9.1,  $g$  é derivável em  $I$  e  $g'(x) = 0$  para todo  $x \in I$ . Portanto, a nossa afirmação é consequência imediata da Proposição 10.2.

### Exemplo 10.2

Seja  $k$  um inteiro positivo. Então a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = x^k + \sin x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , é derivável em  $\mathbb{R}$  e  $f'(x) = kx^{k-1} + \cos x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

De fato, definamos  $f_1(x) = x^k$  e  $f_2(x) = \sin x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ ; então  $f = f_1 + f_2$ . Pelo Exemplo 9.4,  $f_1$  é derivável em  $\mathbb{R}$  e  $f_1'(x) = kx^{k-1}$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  e pelo Exemplo 9.7,  $f_2$  é derivável em  $\mathbb{R}$  e  $f_2'(x) = \cos x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Logo, pela Proposição 10.2,  $f = f_1 + f_2$  é derivável em  $\mathbb{R}$  e  $f'(x) = (f_1 + f_2)'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) = kx^{k-1} + \cos x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

### Exemplo 10.3

A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = \sin x + \cos x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , é derivável em  $\mathbb{R}$  e  $f'(x) = \cos x - \sin x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Realmente, basta argumentar como no exemplo anterior, tendo em vista os Exemplos 9.7 e 9.8 e a Proposição 10.2.

## Proposição 10.3

Sejam  $I$  um intervalo não trivial e  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções deriváveis em  $x \in I$ . Então  $fg$  é derivável em  $x$  e

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Demonstração: Para todo  $t \in I, t \neq x$ , podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{(fg)(t) - (fg)(x)}{t - x} &= \frac{f(t)g(t) - f(x)g(x)}{t - x} = \\ &= \frac{f(t)g(t) - f(x)g(t) + f(x)g(t) - f(x)g(x)}{t - x} = \\ &= g(t) \left( \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \right) + f(x) \left( \frac{g(t) - g(x)}{t - x} \right). \end{aligned}$$

Como  $\lim_{t \rightarrow x} g(t) = g(x)$  pela Proposição 10.1,  $\lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = f'(x)$  e  $\lim_{t \rightarrow x} \frac{g(t) - g(x)}{t - x} = g'(x)$ , segue das Proposições 3.1 e 3.2 que

$$\lim_{t \rightarrow x} \frac{(fg)(t) - (fg)(x)}{t - x} = g(x)f'(x) + f(x)g'(x).$$

Isto mostra que  $fg$  é derivável em  $x$  e  $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ , como havíamos afirmado.

## Exemplo 10.4

Se  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é derivável em  $I$  e  $c \in \mathbb{R}$ , então a função  $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $h(x) = cf(x)$  para todo  $x \in I$ , é derivável em  $I$  e  $h'(x) = cf'(x)$  para todo  $x \in I$ .

De fato, definamos  $g(x) = c$  para todo  $x \in I$ . É claro que  $h = fg$ . Pelo Exemplo 9.1 e pela Proposição 10.3,  $h$  é derivável em  $I$  e

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = cf'(x)$$

para todo  $x \in I$ .

Como consequência do Exemplo 9.4, resulta que se  $f(x) = cx^k$  (onde  $k$  é um inteiro positivo), então  $f'(x) = ckx^{k-1}$ .

## Exemplo 10.5

Seja  $p(x) = a_mx^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_1x + a_0$  um polinômio. Pela Proposição 10.2 (e indução) e pelo que acabamos de ver,  $p$  é uma função derivável em  $\mathbb{R}$  e

$$p'(x) = ma_mx^{m-1} + (m-1)a_{m-1}x^{m-2} + \dots + a_1$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Em particular, se  $p(x) = 7x^5 - 3x^4 + 9x^2 - 10x + 5$ , então  $p'(x) = 35x^4 - 12x^3 + 18x - 10$ .

### Exemplo 10.6

Seja  $k$  um inteiro positivo. Então a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = x^k \text{sen } x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , é derivável em  $\mathbb{R}$  e  $f'(x) = kx^{k-1} \text{sen } x + x^k \cos x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

De fato, sejam  $f_1(x) = x^k$  e  $f_2(x) = \text{sen } x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ ; então  $f = f_1 f_2$ . Pelos Exemplos 9.4 e 9.7 e pela Proposição 10.3, podemos afirmar que  $f$  é derivável em  $\mathbb{R}$  e

$$f'(x) = f_1'(x)f_2(x) + f_1(x)f_2'(x) = kx^{k-1} \text{sen } x + x^k \cos x$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

### Exemplo 10.7

A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = (\text{sen } x)(\cos x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , é derivável em  $\mathbb{R}$  e  $f'(x) = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

De fato, sejam  $g_1(x) = \text{sen } x$  e  $g_2(x) = \cos x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ ; então  $f = g_1 g_2$ . Pelos Exemplos 9.7 e 9.8 e pela Proposição 10.3, podemos afirmar que  $f$  é derivável em  $\mathbb{R}$  e

$$\begin{aligned} f'(x) &= g_1'(x)g_2(x) + g_1(x)g_2'(x) = \\ &= (\cos x)(\cos x) - (\text{sen } x)(\text{sen } x) = \\ &= \cos^2 x - \text{sen}^2 x \end{aligned}$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

### Exemplo 10.8

Sejam  $k$  um inteiro positivo,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  derivável em  $I$  e definamos  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  por  $g(x) = (f(x))^k$  para todo  $x \in I$ . Então  $g$  é derivável em  $I$  e  $g'(x) = k(f(x))^{k-1} f'(x)$  para todo  $x \in I$ .

Verificaremos a afirmação para  $k = 2$  e  $k = 3$ . A validade da afirmação para todo inteiro positivo  $k$  decorre da Proposição 10.3 e do princípio de indução finita.

Se  $k = 2$ ,  $g(x) = (f(x))^2 = f(x)f(x)$  para todo  $x \in I$ . Pela Proposição 10.3,  $g$  é derivável em  $I$  e

$$g'(x) = f'(x)f(x) + f(x)f'(x) = 2f(x)f'(x)$$

para todo  $x \in I$ .

Se  $k = 3$ ,  $g(x) = (f(x))^3 = (f(x))^2f(x)$ . Pelo que acabamos de ver e pela Proposição 10.3,  $g$  é derivável em  $I$  e

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2f(x)f'(x)f(x) + (f(x))^2f'(x) = \\ &= 2(f(x))^2f'(x) + (f(x))^2f'(x) = \\ &= 3(f(x))^2f'(x) \end{aligned}$$

para todo  $x \in I$ .

Como consequência do Exemplo 10.8, obtemos:

#### Exemplo 10.9

Para todo inteiro positivo  $k$ , as funções  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definidas por  $f(x) = (\sin x)^k$  e  $g(x) = (\cos x)^k$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , são deriváveis em  $\mathbb{R}$  e

$$f'(x) = k(\sin x)^{k-1}(\cos x) \quad \text{e} \quad g'(x) = k(\cos x)^{k-1}(-\sin x)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

#### Proposição 10.4

Sejam  $I$  um intervalo não trivial e  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções deriváveis em  $x \in I$  e suponhamos que  $g(x) \neq 0$ . Então a função  $\frac{f}{g}$ , definida para  $t \in I$  próximo de  $x$ , é derivável em  $x$  e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

**Demonstração:** Inicialmente, do fato de  $g$  ser contínua em  $x$  (Proposição 10.1) e não se anular em  $x$ , resulta que existe um intervalo não trivial  $J \subset I$  tal que  $x \in J$  e  $g(t) \neq 0$  para todo  $t \in J$ . Assim sendo, faz sentido considerar a função  $\frac{f}{g}$  definida em  $J$ .

Para todo  $t \in J$ ,  $t \neq x$ , temos:

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(t) - \left(\frac{f}{g}\right)(x)}{t-x} &= \frac{\frac{f(t)}{g(t)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{t-x} = \\ &= \frac{1}{g(t)g(x)} \frac{f(t)g(x) - g(t)f(x)}{t-x} = \\ &= \frac{1}{g(t)g(x)} \frac{f(t)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - g(t)f(x)}{t-x} = \\ &= \frac{1}{g(t)g(x)} \left[ g(x) \left( \frac{f(t) - f(x)}{t-x} \right) - f(x) \left( \frac{g(t) - g(x)}{t-x} \right) \right]. \end{aligned}$$

Como  $\lim_{t \rightarrow x} g(t) = g(x)$  (Proposição 10.1),

$$\lim_{t \rightarrow x} g(t)g(x) = g(x)g(x) = (g(x))^2.$$

Pelas Proposições 3.1, 3.2 e 3.3, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow x} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(t) - \left(\frac{f}{g}\right)(x)}{t-x} &= \\ &= \frac{1}{\lim_{t \rightarrow x} g(t)g(x)} \left[ g(x) \left( \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t-x} \right) - f(x) \left( \lim_{t \rightarrow x} \frac{g(t) - g(x)}{t-x} \right) \right] = \\ &= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}. \end{aligned}$$

Isto mostra que  $\frac{f}{g}$  é derivável em  $x$  e  $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$ , como havíamos afirmado.

No caso particular em que  $f$  é a função constante e igual a 1, a Proposição 10.4 fornece

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}.$$

#### Exemplo 10.10

Seja  $f(x) = \frac{1}{x^4+2}$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  e calculemos  $f'(x)$ .

Com efeito, como  $x^4 + 2 \geq 2 > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , segue do Exemplo 10.5 e da Proposição 10.4 que  $f$  é derivável em  $\mathbb{R}$  e

$$f'(x) = -\frac{4x^3}{(x^4+2)^2}$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ .



## Exemplo 10.11

Seja  $f(x) = \frac{\cos^3 x}{x^2+1}$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  e calculemos  $f'(x)$ .

Com efeito, como  $x^2 + 1 \geq 1 > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , segue dos Exemplos 10.5 e 10.9 e da Proposição 10.4 que  $f$  é derivável em  $\mathbb{R}$  e

$$f'(x) = \frac{3(\cos^2 x)(-\operatorname{sen} x)(x^2 + 1) - (\cos^3 x)(2x)}{(x^2 + 1)^2}$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

## Exemplo 10.12

Seja  $f(x) = \frac{x^7 - 9x^4}{x^2 - 1}$  para todo  $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$  e calculemos  $f'(x)$ .

Realmente, raciocinando como nos dois exemplos anteriores concluímos que  $f$  é derivável em  $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$  e

$$f'(x) = \frac{(7x^6 - 36x^3)(x^2 - 1) - 2x(x^7 - 9x^4)}{(x^2 - 1)^2}$$

para todo  $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ .

## Exemplo 10.13

Seja  $f(x) = \operatorname{tg} x$ , definida para  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ , onde  $k \in \mathbb{Z}$ . Calculemos  $f'(x)$ .

Como  $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ , podemos raciocinar como nos exemplos acima para garantir que  $f'(x)$  existe para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) e

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\cos x)(\cos x) - (\operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} = \\ &= \sec^2 x \end{aligned}$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

Acabamos de mostrar que a função tangente é derivável, tendo por derivada o quadrado da função secante.

Para concluir esta aula, observemos que os domínios das funções dos Exemplos 10.12 e 10.13 não são intervalos, mas uniões de intervalos. Entretanto, como a derivabilidade de uma função em um ponto é uma propriedade local, para cada elemento do domínio destas funções podemos nos restringir ao intervalo que o contém. Assim sendo, as afirmações feitas nos Exemplos 10.12 e 10.13 são justificáveis a partir do que foi visto nesta aula.

## Resumo

Nesta aula você aprendeu que toda função derivável é contínua, bem como algumas propriedades elementares de funções deriváveis.

## Exercícios

1. Ache as derivadas das funções *cotangente*, *secante* e *cossecante*.
2. Assuma que, se  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  é derivável em  $x \in I$  e  $g(x) \neq 0$ , então  $\frac{1}{g}$  é derivável em  $x$  e  $(\frac{1}{g})'(x) = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}$ , para obter a Proposição 10.4.  
Sugestão: Use a Proposição 10.3.

3. Para cada inteiro negativo  $k$ , mostre que a função  $f(x) = x^k$  é derivável em  $\mathbb{R} - \{0\}$  e  $f'(x) = kx^{k-1}$  para todo  $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ .

4. Para cada uma das funções abaixo, encontre os pontos  $x$  para os quais  $f'(x)$  existe e forneça  $f'(x)$ .

(a)  $f(x) = x^2 + x + 1 + \sqrt{x}$  ;

(b)  $f(x) = -7x^9 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}$  ;

(c)  $f(x) = \sqrt{x} - \frac{7}{x^4}$  ;

(d)  $f(x) = (1 - x^6)\sqrt{x}$  ;

(e)  $f(x) = (x^{-3} - 2x^{-2} + 7)\operatorname{tg}^2 x$  ;

(f)  $f(x) = (\sqrt{x})^3 \operatorname{sen}^4 x$  ;

(g)  $f(x) = \frac{x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x + 1}$  ;

(h)  $f(x) = \frac{x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x - 1}$  ;

(i)  $f(x) = \frac{\operatorname{cotg} x}{x^2 + 1}$  ;

(j)  $f(x) = \frac{(x^6 - 7x^2)\operatorname{sen}^2 x}{x^3 - 1}$  ;

(l)  $f(x) = 10\sqrt{x}\operatorname{sen}(2x) - \frac{(3x^5 + 9x)\cos^3 x}{x^4 + 2}$  ;

(m)  $f(x) = \frac{8\sqrt{x}}{x \cos x}$  ;

(n)  $f(x) = \operatorname{sen} x - 6\operatorname{cosec} x$  ;

(o)  $f(x) = \frac{x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$  ;

(p)  $f(x) = \frac{(x^2 + x + 1)\operatorname{sen}^2 x + \sqrt{x}\cos^3 x}{x^5 - 2}$ .

5. A reta tangente ao gráfico de  $f(x) = (x^3 + 2x + 11)\sqrt{x}$  no ponto  $(1, 14)$  é paralela à reta  $y - 12x - 1 = 0$ ? Justifique a sua resposta.

6. Determine os valores de  $\alpha$  e  $\beta$  para que os gráficos das funções  $f(x) = \frac{\alpha}{x} + \beta \operatorname{sen}^2 x$  e  $g(x) = \frac{5\pi x}{x + \cos x}$  tenham a mesma reta tangente no ponto  $P = (\frac{\pi}{2}, 5\pi)$ .

7. Sejam  $f_1, f_2, f_3 : I \rightarrow \mathbb{R}$  três funções deriváveis em  $x \in I$ . Mostre que  $f_1 + f_2 + f_3$  e  $f_1 f_2 f_3$  são deriváveis em  $x$  e forneça  $(f_1 + f_2 + f_3)'(x)$  e  $(f_1 f_2 f_3)'(x)$ .
8. (a) Mostre que a função  $f(x) = |x| \operatorname{sen} x$  é derivável em zero (note que a Proposição 10.3 não pode ser usada, pois a função módulo não é derivável em zero).
- (b) Mostre que (a) permanece verdadeiro para qualquer função  $f$  definida em um intervalo aberto  $I$  contendo 0 por  $f(x) = |x| g(x)$  para todo  $x \in I$ , onde  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua em 0 e  $g(0) = 0$ .

## Auto-avaliação

Nos exercícios desta aula você usou propriedades de funções deriváveis para testar sua habilidade no cálculo de derivadas. Caso tenha sentido dificuldades, releia a aula com atenção e depois volte aos exercícios. Se persistirem as dúvidas, não hesite em consultar os tutores.



## Aula 11 – Exercícios resolvidos.

### Objetivo

Amadurecer os conceitos e resultados vistos até a aula 10 por meio de exercícios resolvidos.

Referências: Aulas 1 a 10.

**Exercício 1** (Exercício 5, da aula 1): Mostre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} \right) = 0.$$

**Solução:** Primeiramente, notemos que

$$\frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} \leq \underbrace{\frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^2}}_{n \text{ parcelas}} = \frac{n}{(n+1)^2} < \frac{1}{n}$$

para todo  $n \geq 1$ .

Seja  $r > 0$  arbitrário. Pela propriedade arquimediana, existe um inteiro  $m \geq 1$  tal que  $\frac{1}{m} < r$ . Portanto, para todo inteiro  $n \geq m$ , temos

$$-r < 0 < \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{m} < r.$$

Isto mostra que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} \right) = 0.$$

**Exercício 2:** (a) Seja  $(x_n)$  uma seqüência tal que  $x_n \geq 0$  para todo  $n$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . Mostre que  $x \geq 0$ .

(b) Sejam  $(x_n)$  e  $(y_n)$  duas seqüências tais que  $x_n \geq y_n$  para todo  $n$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ . Mostre que  $x \geq y$ .

(c) Sejam  $a \in \mathbb{R}$ ,  $r > 0$ ,  $f, g : D = (a-r, a) \cup (a, a+r) \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $f(x) \geq g(x)$  para todo  $x \in D$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l_1$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l_2$ . Mostre que  $l_1 \geq l_2$ .

**Solução:** (a) Suponhamos  $x < 0$ , e tomemos um intervalo aberto  $I$  contendo  $x$  tal que  $I \subset \{t \in \mathbb{R}; t < 0\}$  (por exemplo,  $I = (x - \frac{|x|}{2}, x + \frac{|x|}{2}) = (\frac{3x}{2}, \frac{x}{2})$  serviria). Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ , existe um inteiro  $m \geq 1$  tal que  $x_n \in I$  para

todo  $n \geq m$ . Daí resulta que  $x_n < 0$  para todo  $n \geq m$ , o que é absurdo. Portanto,  $x \geq 0$ .

(b) Como  $x_n - y_n \geq 0$  para todo  $n$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = x - y$ , segue de (a) que  $x - y \geq 0$ , ou seja,  $x \geq y$ .

(c) Seja  $(x_n)$  uma seqüência de elementos de  $D$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . Como  $f(x_n) \geq g(x_n)$  para todo  $n$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l_1$  (pois  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l_1$ ) e  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = l_2$  (pois  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l_2$ ), segue de (b) que  $l_1 \geq l_2$ .

**Exercício 3:** (Desafio, da aula 2): Sejam  $(x_n)$  e  $(y_n)$  duas seqüências tais que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  e existe  $M > 0$  tal que  $|y_n| \leq M$  para todo  $n$ . Mostre que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$ .

**Solução:** Com efeito, seja  $r > 0$  arbitrário. Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  existe um inteiro  $m \geq 1$  tal que  $|x_n| < \frac{r}{M}$  para todo  $n \geq m$ . Logo,

$$|x_n y_n| = |x_n| |y_n| < \frac{r}{M} \cdot M = r$$

para todo  $n \geq m$ . Isto prova que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$ .

**Exercício 4:** Mostre que não existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  para o qual  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  exista, sendo  $f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^2 - 7x + 5\alpha^2$  se  $x < 0$  e  $f(x) = \alpha^3|x| + (\alpha - 1)(\text{sen } x) - 1$  se  $x > 0$ .

**Solução:** Para que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  exista, é necessário e suficiente que  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  existam e sejam iguais. Ora,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - 7x + 5\alpha^2) = \\ &= \left( \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 \right) - 7 \left( \lim_{x \rightarrow 0^-} x \right) + \left( \lim_{x \rightarrow 0^-} 5\alpha^2 \right) = \\ &= 5\alpha^2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (\alpha^3|x| + (\alpha - 1)(\text{sen } x) - 1) = \\ &= \alpha^3 \left( \lim_{x \rightarrow 0^+} |x| \right) + (\alpha - 1) \left( \lim_{x \rightarrow 0^+} \text{sen } x \right) + \left( \lim_{x \rightarrow 0^+} -1 \right) = -1. \end{aligned}$$

Logo,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  existem. Entretanto, como  $\alpha^2 \geq 0$  para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ , segue que  $5\alpha^2 \neq -1$  para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Ou, em outras palavras, para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x).$$

Isto prova o desejado.

**Exercício 5:** Mostre que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \operatorname{sen} x}}{x^3} = \frac{1}{4}$ .

**Solução:** Para todo  $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $x \neq 0$ , temos:

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \operatorname{sen} x}}{x^3} = \\ &= \frac{(\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \operatorname{sen} x})(\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} + \sqrt{1 + \operatorname{sen} x})}{x^3(\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} + \sqrt{1 + \operatorname{sen} x})} = \\ &= \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x^3(\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} + \sqrt{1 + \operatorname{sen} x})} = \\ &= \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - \operatorname{sen} x}{x^3(\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} + \sqrt{1 + \operatorname{sen} x})} = \\ &= \frac{(\operatorname{sen} x)(1 - \cos x)}{x^3(\cos x)(\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} + \sqrt{1 + \operatorname{sen} x})} = \\ &= \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} + \sqrt{1 + \operatorname{sen} x}}. \end{aligned}$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$  e

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} + \sqrt{1 + \operatorname{sen} x}} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} + \sqrt{1 + \operatorname{sen} x})} = \frac{1}{2},$$

segue que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \operatorname{sen} x}}{x^3} = 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

**Exercício 6:** Mostre que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \cos \left( \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \right) \left( \operatorname{sen} \left( \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x}} \right) \right) = 0.$$

**Solução:** Para todo  $x > 0$ , temos:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x}} &= \frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x+1}+1)} = \\ &= \frac{x}{\sqrt{x}(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+1}.\end{aligned}$$

Como  $|\cos(\frac{1}{\sqrt{x}})| \leq 1$  para todo  $x > 0$  e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sen} \left( \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sen} \left( \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+1} \right) = \operatorname{sen} 0 = 0,$$

segue que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \cos \left( \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \right) \left( \operatorname{sen} \left( \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x}} \right) \right) = 0.$$

**Exercício 7:** Sejam  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e defina  $f(x) = \frac{\alpha x^2 + \alpha x - \beta x - x + 4}{x}$  para  $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ .

(a) Determine  $\alpha$  e  $\beta$  para que a reta  $y = 3$  seja uma assíntota horizontal ao gráfico de  $f$ .

(b) Com os valores de  $\alpha$  e  $\beta$  encontrados em (a), existe assíntota vertical ao gráfico de  $f$ ? Justifique a sua resposta.

**Solução:** (a) Para que a reta  $y = 3$  seja uma assíntota horizontal ao gráfico de  $f$  devemos ter

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3.$$

Mas, para que isto ocorra,  $\alpha$  só pode ser zero.

Realmente, se  $\alpha > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  e, se  $\alpha < 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .

Logo, basta encontrar  $\beta$  para que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-\beta-1)x+4}{x} = 3 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(-\beta-1)x+4}{x} = 3.$$

Mas, como  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(-\beta-1)x+4}{x} = -\beta-1$ , devemos ter  $-\beta-1 = 3$ , isto é,  $\beta = -4$ .

Em resumo, se  $\alpha = 0$  e  $\beta = -4$ , a reta  $y = 3$  é uma assíntota horizontal ao gráfico de  $f$ .

(b) Fazendo  $\alpha = 0$  e  $\beta = -4$ , obtemos  $f(x) = \frac{3x+4}{x}$ .



Portanto, para que uma reta vertical  $x = a$  seja uma assíntota vertical ao gráfico de  $f$ , devemos ter

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

ou

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty.$$

Ora, se  $a \neq 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{3x+4}{x} = \frac{3a+4}{a}$ . Resta então decidir se a reta  $x = 0$  é uma assíntota vertical ao gráfico de  $f$ . Mas, como

$$f(x) = \frac{3x+4}{x} = \frac{3x+4}{x} = 3 + \frac{4}{x}$$

para todo  $x \neq 0$ , temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(3 + \frac{4}{x}\right) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(3 + \frac{4}{x}\right) = +\infty.$$

Conseqüentemente, a reta  $x = 0$  é uma assíntota vertical ao gráfico de  $f$ .

**Exercício 8:** Sejam  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e defina  $f : [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}$  por  $f(-3) = \alpha$ ,  $f(x) = \frac{9-x^2}{4-\sqrt{x^2+7}}$  se  $-3 < x < 3$  e  $f(3) = \beta$ . Determine  $\alpha$  e  $\beta$  para que  $f$  seja contínua em  $[-3, 3]$ .

**Solução:** Primeiramente, notemos que  $4 - \sqrt{x^2+7} > 0$  para todo  $-3 < x < 3$ . Realmente, se  $-3 < x < 3$ ,  $0 \leq x^2 < 9$ ; logo,  $7 \leq x^2 + 7 < 9 + 7 = 16$ , o que implica  $\sqrt{x^2+7} < \sqrt{16} = 4$ . Como as funções  $g_1(x) = 9 - x^2$  e  $g_2(x) = 4 - \sqrt{x^2+7}$  são contínuas em  $(-3, 3)$  e  $g_2(x) > 0$  para todo  $x \in (-3, 3)$ , então  $f$  é contínua em  $(-3, 3)$ .

Para que  $f$  seja contínua em  $-3$  devemos ter  $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = f(-3) = \alpha$ . Mas, como  $f$  está definida em  $[-3, 3]$ , isto equivale a dizer que  $\lim_{x \rightarrow (-3)^+} f(x) = \alpha$ .

Como

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-3)^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{9-x^2}{4-\sqrt{x^2+7}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{(9-x^2)(4+\sqrt{x^2+7})}{(4-\sqrt{x^2+7})(4+\sqrt{x^2+7})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{(9-x^2)(4+\sqrt{x^2+7})}{9-x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow (-3)^+} (4+\sqrt{x^2+7}) = 8, \end{aligned}$$

concluimos que  $\alpha = 8$ .

## CÁLCULO I

Analogamente, para que  $f$  seja contínua em 3 devemos ter  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = f(3) = \beta$ . Raciocinando como acima concluímos que  $\beta = 8$ .

**Exercício 9:** Seja  $f(x) = x|x - 1|$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Determine o conjunto dos pontos onde  $f$  é derivável e forneça o valor de  $f'(x)$  para  $x$  neste conjunto.

**Solução:** Para todo  $x \in (-\infty, 1)$ ,  $|x - 1| = 1 - x$ , pois  $x - 1 < 0$ . Logo,  $f(x) = x(1 - x) = x - x^2$  para todo  $x \in (-\infty, 1)$ . Portanto,  $f$  é derivável em  $(-\infty, 1)$  e  $f'(x) = 1 - 2x$  para todo  $x \in (-\infty, 1)$ . Por outro lado, para todo  $x \in (1, +\infty)$ ,  $|x - 1| = x - 1$ , pois  $x - 1 > 0$ . Logo,  $f(x) = x(x - 1) = x^2 - x$  para todo  $x \in (1, +\infty)$ . Portanto,  $f$  é derivável em  $(1, +\infty)$  e  $f'(x) = 2x - 1$  para todo  $x \in (1, +\infty)$ .

Resta-nos agora estudar a derivabilidade de  $f$  em 1. Para isto, devemos decidir se  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$  existe.

Ora,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - x^2}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x) = -1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - x}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1. \end{aligned}$$

Daí resulta que  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$  não existe, mostrando que  $f$  não é derivável em 0.

Em resumo,  $f$  é derivável em  $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ , sendo  $f'(x) = 1 - 2x$  se  $x \in (-\infty, 1)$  e  $f'(x) = 2x - 1$  se  $x \in (1, +\infty)$ .

**Exercício 10:** Sejam  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e defina  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por  $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2$  se  $x \in (-\infty, 2]$  e  $f(x) = \sqrt{x + 2}$  se  $x \in (2, +\infty)$ . Determine  $\alpha$  e  $\beta$  para que  $f$  seja derivável em 2.

**Solução:** Primeiramente, como a derivabilidade de  $f$  em 2 implica a continuidade de  $f$  em 2, devemos ter  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 8\alpha + 4\beta$ . Como  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x + 2} = \sqrt{4} = 2$ , a igualdade  $f(2) = 8\alpha + 4\beta = 2$  precisa ser verdadeira.

Para que  $f'(2)$  exista, os limites laterais

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

devem existir e ser iguais.

Ora,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(\alpha x^3 + \beta x^2) - (8\alpha + 4\beta)}{x - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \alpha \left( \frac{x^3 - 8}{x - 2} \right) + \lim_{x \rightarrow 2^-} \beta \left( \frac{x^2 - 4}{x - 2} \right) = \\ &= \alpha \left( \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3 - 8}{x - 2} \right) + \beta \left( \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \right) = \\ &= 12\alpha + 4\beta \end{aligned}$$

(justifique a última igualdade a partir do que você já sabe sobre derivada) e

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(\sqrt{x+2} + 2)(\sqrt{x+2} - 2)}{(\sqrt{x+2} + 2)(x - 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 2}{(\sqrt{x+2} + 2)(x - 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{\sqrt{x+2} + 2} = \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Portanto, a igualdade  $12\alpha + 4\beta = \frac{1}{4}$  precisa ser verdadeira.

Em resumo, as igualdades  $8\alpha + 4\beta = 2$  e  $12\alpha + 4\beta = \frac{1}{4}$  devem ser satisfeitas. Mas, para que isto ocorra, só podemos ter  $\alpha = -\frac{7}{16}$  e  $\beta = \frac{11}{8}$  (justifique esta afirmação).

## Resumo

Nesta aula você viu como resolver determinados exercícios usando o que aprendeu até agora. Esperamos que ela possa incentivá-lo a retornar aos

exercícios que, porventura, ainda não tenha resolvido.

## Aula 12 – A regra da cadeia.

### Objetivo

Compreender como calcular a derivada da composta de funções deriváveis.

Referências: Aulas 9 e 10.

Vimos, na aula 6, que a composta de funções contínuas é uma função contínua. Nesta aula estudaremos um resultado análogo para funções deriváveis, a regra da cadeia. Antes, vejamos três exemplos.

### Exemplo 12.1

Seja  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Então  $f$  é derivável em  $\mathbb{R} - \{0\}$  e  $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$  para todo  $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ .

Para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq 0$ , temos

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x} = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}},$$

sendo  $x^{\frac{2}{3}} = (x^{\frac{1}{3}})^2 > 0$ . Como  $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{2}{3}} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = +\infty$ . Assim,  $f$  não é derivável em 0.

Suponhamos, agora,  $x \neq 0$ . Para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,  $t \neq x$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} &= \frac{\sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{x}}{t - x} = \\ &= \frac{\sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{x}}{(\sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{t^2} + \sqrt[3]{t}\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})} = \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{t^2} + \sqrt[3]{t}\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}}. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow x} (\sqrt[3]{t^2} + \sqrt[3]{t}\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}) &= \left( \lim_{t \rightarrow x} \sqrt[3]{t^2} \right) + \left( \lim_{t \rightarrow x} \sqrt[3]{t}\sqrt[3]{x} \right) + \left( \lim_{t \rightarrow x} \sqrt[3]{x^2} \right) = \\ &= \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} \left( \lim_{t \rightarrow x} \sqrt[3]{t} \right) + \sqrt[3]{x^2} = \\ &= \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2} = \\ &= 3\sqrt[3]{x^2} = 3x^{\frac{2}{3}} \neq 0, \end{aligned}$$

segue que

$$\lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}.$$

Acabamos de mostrar que  $f$  é derivável em  $x$  e  $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}$ .

Raciocinando como acima, obtemos:

### Exemplo 12.2

Seja  $k$  um inteiro positivo par e definamos  $f(x) = \sqrt[k]{x}$  para todo  $x \geq 0$ . Então  $f$  é derivável em  $(0, +\infty)$  e  $f'(x) = \frac{1}{k}x^{\frac{1}{k}-1}$  para todo  $x \in (0, +\infty)$ .

Em particular, se  $f(x) = \sqrt[4]{x}$ , então  $f'(x) = \frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1} = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$  para todo  $x \in (0, +\infty)$ .

### Exemplo 12.3

Seja  $k$  um inteiro positivo ímpar,  $k > 1$ , e definamos  $f(x) = \sqrt[k]{x}$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Então  $f$  é derivável em  $\mathbb{R} - \{0\}$  e  $f'(x) = \frac{1}{k}x^{\frac{1}{k}-1}$  para todo  $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ .

Em particular, se  $f(x) = \sqrt[5]{x}$ , então  $f'(x) = \frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1} = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}$  para todo  $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ .

### Proposição 12.1 (regra da cadeia)

Sejam  $I$  e  $J$  dois intervalos não triviais,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  derivável em  $x \in I$  e  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(t) \in J$  para todo  $t \in I$  e  $g$  é derivável em  $f(x)$ . Então a função composta  $g \circ f$  é derivável em  $x$  e

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) f'(x).$$

Como a demonstração da proposição é delicada, não a apresentamos aqui. Faremos a demonstração supondo a seguinte condição adicional satisfeita (o que nem sempre ocorre):

Existe um intervalo não trivial  $I' \subset I$  tal que  $x \in I'$  e  $f(t) \neq f(x)$  para todo  $t \in I', t \neq x$ .

Para todo  $t \in I', t \neq x$ , podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{(g \circ f)(t) - (g \circ f)(x)}{t - x} &= \frac{g(f(t)) - g(f(x))}{t - x} = \\ &= \frac{g(f(t)) - g(f(x))}{f(t) - f(x)} \cdot \frac{f(t) - f(x)}{t - x}, \end{aligned}$$

A demonstração da regra da cadeia será vista na disciplina de Análise.

pois estamos admitindo  $f(t) - f(x) \neq 0$  se  $t \in I'$  e  $t \neq x$ . Por outro lado, como  $f$  é contínua em  $x$  (Proposição 10.1),  $\lim_{t \rightarrow x} f(t) = f(x)$ . Logo,

$$\lim_{t \rightarrow x} \frac{g(f(t)) - g(f(x))}{f(t) - f(x)} = g'(f(x)),$$

pois  $g$  é derivável em  $f(x)$ . Como

$$\lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = f'(x),$$

pois  $f$  é derivável em  $x$ , segue da Proposição 3.2 que

$$\lim_{t \rightarrow x} \frac{(g \circ f)(t) - (g \circ f)(x)}{t - x} = g'(f(x))f'(x).$$

Isto mostra que  $g \circ f$  é derivável em  $x$  e  $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$ .

#### Exemplo 12.4

Seja  $p$  um polinômio arbitrário e consideremos a função  $f(x) = \text{sen}(p(x))$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Então  $f$  é derivável em  $\mathbb{R}$  e

$$f'(x) = p'(x) \cos(p(x))$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Com efeito, já sabemos que  $p$  é derivável em  $\mathbb{R}$  e que a função  $f_1(x) = \text{sen } x$  é derivável em  $\mathbb{R}$  e  $f_1'(x) = \cos x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Como  $f = f_1 \circ p$ , segue da regra da cadeia que  $f$  é derivável em  $\mathbb{R}$  e

$$f'(x) = (f_1 \circ p)'(x) = f_1'(p(x))p'(x) = p'(x) \cos(p(x))$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Em particular, se  $f(x) = \text{sen}(5x^6 - 4x + 2)$ , então

$$f'(x) = (30x^5 - 4) \cos(5x^6 - 4x + 2).$$

Analogamente, temos :

#### Exemplo 12.5

Seja  $p$  um polinômio arbitrário e consideremos a função  $f(x) = \cos(p(x))$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Então  $f$  é derivável em  $\mathbb{R}$  e  $f'(x) = -p'(x)\text{sen}(p(x))$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  (faça os detalhes).

Em particular, se  $f(x) = \cos(9x^4 + 2x^3 + 6x^2)$ , então

$$f'(x) = -(36x^3 + 6x^2 + 12x) \text{sen}(9x^4 + 2x^3 + 6x^2).$$

## Exemplo 12.6

Seja  $f(x) = \text{sen}(\cos x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Então  $f$  é derivável em  $\mathbb{R}$  e  $f'(x) = (-\text{sen } x) \cos(\cos x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Com efeito, sejam  $f_1(x) = \cos x$  e  $f_2(x) = \text{sen } x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ ; então  $f = f_2 \circ f_1$ . Pela regra da cadeia,  $f$  é derivável em  $\mathbb{R}$  e

$$\begin{aligned} f'(x) &= (f_2 \circ f_1)'(x) = \\ &= f_2'(f_1(x))f_1'(x) = \\ &= (f_2'(\cos x))(-\text{sen } x) = \\ &= (-\text{sen } x) \cos(\cos x) \end{aligned}$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Em particular,  $f'(\frac{\pi}{2}) = (-\text{sen } \frac{\pi}{2}) \cos(\cos \frac{\pi}{2}) = -\cos 0 = -1$ .

Analogamente, temos :

## Exemplo 12.7

Seja  $f(x) = \cos(\text{sen } x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Então  $f$  é derivável em  $\mathbb{R}$  e  $f'(x) = -(\cos x)\text{sen}(\text{sen } x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  (faça os detalhes).

Em particular,  $f'(\frac{\pi}{2}) = -(\cos \frac{\pi}{2}) \text{sen}(\text{sen } \frac{\pi}{2}) = 0$ .

## Exemplo 12.8

Seja  $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Então  $f$  é derivável em  $\mathbb{R} - \{0\}$  e  $f'(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}$  para todo  $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ .

Com efeito, sejam  $f_1(x) = x^2$  e  $f_2(x) = x^{\frac{1}{3}}$ . Então  $f = f_2 \circ f_1$ , pois  $(f_2 \circ f_1)(x) = f_2(f_1(x)) = f_2(x^2) = (x^2)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{2}{3}} = f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Já sabemos que  $f_1$  é derivável em  $\mathbb{R}$  e  $f_1'(x) = 2x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  e que  $f_2$  é derivável em  $\mathbb{R} - \{0\}$  e  $f_2'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$  para todo  $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ . Pela regra da cadeia,  $f$  é derivável em  $\mathbb{R} - \{0\}$  (note que  $f_1(x) = 0$  se, e somente se,  $x = 0$ ) e

$$\begin{aligned} f'(x) &= f_2'(f_1(x))f_1'(x) = \\ &= \frac{1}{3}(x^2)^{-\frac{2}{3}}(2x) = \\ &= \frac{2}{3}x^{-\frac{4}{3}} \cdot x = \frac{2}{3}x^{-\frac{4}{3}+1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} \end{aligned}$$



para todo  $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ .

### Exemplo 12.9

Seja  $f(x) = x^{-\frac{4}{5}}$  para todo  $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ . Então  $f$  é derivável em  $\mathbb{R} - \{0\}$  e  $f'(x) = -\frac{4}{5}x^{-\frac{4}{5}-1}$  para todo  $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ .

Com efeito, sejam  $f_1(x) = x^{-4}$  para todo  $x \in \mathbb{R} - \{0\}$  e  $f_2(x) = x^{\frac{1}{5}}$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ ; então  $f = f_2 \circ f_1$ . Já sabemos que  $f_1$  é derivável em  $\mathbb{R} - \{0\}$  e  $f_1'(x) = -4x^{-4-1} = -4x^{-5}$  para todo  $x \in \mathbb{R} - \{0\}$  (Exercício 3, da aula 10) e que  $f_2$  é derivável em  $\mathbb{R} - \{0\}$  e  $f_2'(x) = \frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1} = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}$  para todo  $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ . Pela regra da cadeia,  $f$  é derivável em  $\mathbb{R} - \{0\}$  e

$$\begin{aligned} f'(x) &= f_2'(f_1(x))f_1'(x) = \\ &= \frac{1}{5}(x^{-4})^{-\frac{4}{5}}(-4x^{-5}) = \\ &= -\frac{4}{5}x^{\frac{16}{5}} \cdot x^{-5} = \\ &= -\frac{4}{5}x^{\frac{16}{5}-\frac{25}{5}} = \\ &= -\frac{4}{5}x^{-\frac{9}{5}} = \\ &= -\frac{4}{5}x^{-\frac{4}{5}-1} \end{aligned}$$

para todo  $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ .

Em geral, se considerarmos a função  $f(x) = x^{\frac{p}{q}}$  (onde  $p$  e  $q$  são inteiros não nulos), podemos garantir que  $f$  é derivável em  $\mathbb{R} - \{0\}$  e

$$f'(x) = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}$$

para todo  $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ . Além disso, para certos valores de  $p$  e  $q$ , podemos até mesmo garantir que  $f$  é derivável em  $\mathbb{R}$  e

$$f'(x) = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

### Exemplo 12.10

Seja  $f(x) = \cos\left(\frac{\text{sen } x}{x^2+1}\right)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Então  $f$  é derivável em  $\mathbb{R}$  e

$$f'(x) = -\left(\text{sen}\left(\frac{\text{sen } x}{x^2+1}\right)\right)\left(\frac{(\cos x)(x^2+1) - (\text{sen } x)(2x)}{(x^2+1)^2}\right)$$

## CÁLCULO I

para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Com efeito, sejam  $f_1(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x^2+1}$  e  $f_2(x) = \cos x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ ; então  $f = f_2 \circ f_1$ . Já sabemos que  $f_2$  é derivável em  $\mathbb{R}$  e  $f_2'(x) = -\operatorname{sen} x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . E, pela Proposição 10.4,  $f_1$  é derivável em  $\mathbb{R}$  e

$$f_1'(x) = \frac{(\cos x)(x^2 + 1) - (\operatorname{sen} x)(2x)}{(x^2 + 1)^2}$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Pela regra da cadeia,  $f$  é derivável em  $\mathbb{R}$  e

$$\begin{aligned} f'(x) &= (f_2 \circ f_1)'(x) = \\ &= f_2'(f_1(x))f_1'(x) = \\ &= f_2' \left( \frac{\operatorname{sen} x}{x^2 + 1} \right) \left( \frac{(\cos x)(x^2 + 1) - (\operatorname{sen} x)(2x)}{(x^2 + 1)^2} \right) = \\ &= - \left( \operatorname{sen} \left( \frac{\operatorname{sen} x}{x^2 + 1} \right) \right) \left( \frac{(\cos x)(x^2 + 1) - (\operatorname{sen} x)(2x)}{(x^2 + 1)^2} \right) \end{aligned}$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

## Exemplo 12.11

Seja  $f(x) = (x^6 - 2x^5)^2 \operatorname{tg} \left( \frac{x^2}{x^2+1} \right)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Então  $f$  é derivável em  $\mathbb{R}$  e

$$f'(x) = 2(x^6 - 2x^5)(6x^5 - 10x^4) \operatorname{tg} \left( \frac{x^2}{x^2 + 1} \right) + 2x \left( \frac{x^6 - 2x^5}{x^2 + 1} \right)^2 \sec^2 \left( \frac{x^2}{x^2 + 1} \right)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Primeiramente, como  $0 \leq \frac{x^2}{x^2+1} < 1 < \frac{\pi}{2}$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , então a função  $f_2(x) = \operatorname{tg} \left( \frac{x^2}{x^2+1} \right)$  está definida para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Além disso,  $f_2$  é derivável (como composta de duas funções deriváveis) e

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= \sec^2 \left( \frac{x^2}{x^2 + 1} \right) \left( \frac{2x(x^2 + 1) - x^2(2x)}{(x^2 + 1)^2} \right) = \\ &= \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} \sec^2 \left( \frac{x^2}{x^2 + 1} \right) \end{aligned}$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Por outro lado, a função  $f_1(x) = (x^6 - 2x^5)^2$  é derivável e  $f_1'(x) = 2(x^6 - 2x^5)(6x^5 - 10x^4)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  (justifique esta afirmação).

Portanto, como  $f = f_1 f_2$ , segue da Proposição 10.3 que  $f$  é derivável em  $\mathbb{R}$  e

$$\begin{aligned} f'(x) &= f_1'(x)f_2(x) + f_1(x)f_2'(x) = \\ &= 2(x^6 - 2x^5)(6x^5 - 10x^4)\operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{x^2 + 1}\right) + 2x\left(\frac{x^6 - 2x^5}{x^2 + 1}\right)^2 \sec^2\left(\frac{x^2}{x^2 + 1}\right) \end{aligned}$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

### Exemplo 12.12

Seja  $f(x) = \cos^3(7x^4 - 13x + 6)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Então  $f$  é derivável em  $\mathbb{R}$  e

$$f'(x) = 3(\cos^2(7x^4 - 13x + 6))(-\operatorname{sen}(7x^4 - 13x + 6))(28x^3 - 13)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Em particular,  $f'(0) = 39(\cos^2 6)(\operatorname{sen} 6)$ .

Com efeito, sejam  $f_1(x) = 7x^4 - 13x + 6$ ,  $f_2(x) = \cos x$  e  $f_3(x) = x^3$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Então  $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$ , pois  $(f_3 \circ f_2 \circ f_1)(x) = (f_3 \circ f_2)(f_1(x)) = (f_3 \circ f_2)(7x^4 - 13x + 6) = f_3(f_2(7x^4 - 13x + 6)) = f_3(\cos(7x^4 - 13x + 6)) = \cos^3(7x^4 - 13x + 6) = f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Já sabemos que  $f_1$ ,  $f_2$  e  $f_3$  são deriváveis em  $\mathbb{R}$ , sendo  $f_1'(x) = 28x^3 - 13$ ,  $f_2'(x) = -\operatorname{sen} x$  e  $f_3'(x) = 3x^2$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Como

$$f = f_3 \circ f_2 \circ f_1 = f_3 \circ (f_2 \circ f_1),$$

a regra da cadeia (aplicada duas vezes) garante que  $f$  é derivável em  $\mathbb{R}$  e

$$\begin{aligned} f'(x) &= (f_3 \circ (f_2 \circ f_1))'(x) = \\ &= f_3'((f_2 \circ f_1)(x))(f_2 \circ f_1)'(x) = \\ &= f_3'(f_2(f_1(x)))f_2'(f_1(x))f_1'(x) = \\ &= f_3'(f_2(7x^4 - 13x + 6))(f_2'(7x^4 - 13x + 6))(28x^3 - 13) = \\ &= f_3'(\cos(7x^4 - 13x + 6))(-\operatorname{sen}(7x^4 - 13x + 6))(28x^3 - 13) = \\ &= 3(\cos^2(7x^4 - 13x + 6))(-\operatorname{sen}(7x^4 - 13x + 6))(28x^3 - 13) \end{aligned}$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

## Resumo

Nesta aula você aprendeu como derivar a composta de funções deriváveis.

## Exercícios

1. Derive as seguintes funções:

$$(a) f(x) = \operatorname{sen}^2 x;$$

$$(b) f(x) = \operatorname{sen}(x^2);$$

$$(c) f(x) = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}(x^2)};$$

$$(d) f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{\operatorname{sen}^2 x};$$

$$(e) f(x) = \sqrt[3]{x^2 + x + 1};$$

$$(f) f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt{x};$$

$$(g) f(x) = \frac{\operatorname{sen}(\cos^2 x)}{\sqrt{x}};$$

$$(h) f(x) = \frac{\operatorname{sen}(\cos(x^2))}{x^4 + 2};$$

$$(i) f(x) = \sqrt[4]{\cos(x^2) + 7x^8 + 1};$$

$$(j) f(x) = \frac{x^2 \operatorname{sec}(x^3 - 1)}{x^2 + 1};$$

$$(l) f(x) = \operatorname{tg}(x^3) + \operatorname{cosec}(x^3);$$

$$(m) f(x) = \frac{\sqrt[5]{x} \cos^5 x}{1 - x^2};$$

$$(n) f(x) = \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{cosec}^3 x;$$

$$(o) f(x) = \frac{\operatorname{cotg}(1 + x^3)}{x^4 - 1};$$

$$(p) f(x) = x^{-\frac{7}{8}} \operatorname{sen}(x^3 - 9x + 8);$$

$$(q) f(x) = \sqrt[3]{\frac{\operatorname{sen}(2x)}{1 + \sqrt{x}}};$$

$$(r) f(x) = \operatorname{tg}(x^3) \operatorname{sen}^2(\cos(x^2));$$

$$(s) f(x) = \operatorname{sen}^2(\cos(x^2));$$

$$(t) f(x) = (\sqrt{x} + x^7 - 5x^2 + \operatorname{sen}^3(x^3 - 4x))^9.$$

2. Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função derivável em 0 tal que  $f(0) = 0$  e  $f'(0) = 2$  e defina  $g(x) = \operatorname{sen}(f(x))$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

(a) Mostre que  $g$  é derivável em 0 e  $g'(0) = 2$ .

(b) Ache a equação da reta tangente ao gráfico de  $g$  no ponto  $(0, g(0))$ .

Sugestão para (a): Use a regra da cadeia.

3. Seja  $g(x) = f(x^2 + 3x)$ . Calcule  $g'(1)$ , sabendo que  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é derivável em 4 e  $f'(4) = \frac{1}{5}$ .

4. Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivável em  $\mathbb{R}$ . Mostre que:

(a)  $f'$  é par se  $f$  é ímpar;

(b)  $f'$  é ímpar se  $f$  é par.

Sugestão: Use a regra da cadeia, lembrando que  $f$  é par (respectivamente ímpar) se  $f(-x) = f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  (respectivamente  $f(-x) = -f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ ).

5. Seja  $f(x) = \operatorname{tg} \left( \sqrt[3]{\frac{2}{x^2+1}} \right)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

(a) Mostre que  $f$  é derivável em  $\mathbb{R}$ .

(b) Forneça  $f'(x)$ .

(c) Ache a equação da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(0, f(0))$ .

## Auto-avaliação

Na aula 10 e nesta aula foram estudadas as regras básicas de derivação: soma, produto, quociente e composição. Só há uma maneira de assimilá-las: exercitando à exaustão. Por esta razão, só passe para a próxima aula se tiver feito todos os exercícios de ambas as aulas. Se houver alguma dúvida, releia ambas as aulas e/ou consulte os tutores.



## Aula 13 – Derivação implícita.

### Objetivo

Compreender como se deriva implicitamente uma função que satisfaça uma determinada equação.

Referências: Aulas 9, 10 e 12.

Antes de entrar no assunto desta aula, vamos introduzir a notação de Leibniz para a derivada. Se para uma dada função  $f$  escrevermos  $y = f(x)$ ,  $\frac{dy}{dx}$  representará  $f'(x)$ . A notação  $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=a}$  será usada para indicar a derivada de  $y = f(x)$  em  $a$ , ou seja,  $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=a}$  indicará  $f'(a)$ . Vejamos alguns exemplos.

### Exemplo 13.1

Se  $y = x^6 - 2x^4 + 7x^3 - 2$ , então

$$\frac{dy}{dx} = 6x^5 - 8x^3 + 21x^2 \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dx}\Big|_{x=-1} = 23.$$

### Exemplo 13.2

Se  $y = \sin x$ , então

$$\frac{dy}{dx} = \cos x \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dx}\Big|_{x=\pi} = \cos \pi = -1.$$

### Exemplo 13.3

Se  $s = \frac{t^2+1}{t^4+5}$ , então

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2t(t^4+5) - (t^2+1)t^4}{(t^4+5)^2} = \frac{-t^6 + 2t^5 - t^4 + 10t}{(t^4+5)^2} \quad \text{e} \quad \frac{ds}{dt}\Big|_{t=0} = 0.$$

Sob as hipóteses da Proposição 10.2, escrevamos  $y = f(x)$ ,  $z = g(x)$  e  $w = y + z = f(x) + g(x) = (f + g)(x)$ . Então

$$\frac{dw}{dx} = (f + g)'(x) = f'(x) + g'(x) = \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx}.$$

Sob as hipóteses da Proposição 10.3, escrevamos  $y = f(x)$ ,  $z = g(x)$  e  $w = yz = f(x)g(x) = (fg)(x)$ . Então

$$\frac{dw}{dx} = (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = \frac{dy}{dx}z + y\frac{dz}{dx}.$$

## CÁLCULO I

Analogamente, sob as hipóteses da Proposição 10.4, escrevamos  $y = f(x)$ ,  $z = g(x)$  e  $w = \frac{y}{z} = \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ . Então

$$\frac{dw}{dx} = \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} = \frac{\frac{dy}{dx}z - y\frac{dz}{dx}}{z^2}.$$

Finalmente, sob as hipóteses da Proposição 12.1, escrevamos  $u = f(x)$  e  $y = g(u) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$ . Então

$$\frac{dy}{dx} = (g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x) = g'(u)\frac{du}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

## Exemplo 13.4

Seja  $y = \cos(\sqrt{x})$  e calculemos  $\frac{dy}{dx}$  para todo  $x > 0$ .

De fato, escrevamos  $u = \sqrt{x}$ ; então  $y = \cos(u)$ . Como  $\frac{dy}{du} = -\operatorname{sen} u$  e  $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ , segue que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -(\operatorname{sen} u)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = -\frac{\operatorname{sen}(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}.$$

## Exemplo 13.5

Seja  $y = \sqrt[3]{\operatorname{sen} x}$  e calculemos  $\frac{dy}{dx}$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $\operatorname{sen} x \neq 0$ .

De fato, escrevamos  $u = \operatorname{sen} x$ ; então  $y = \sqrt[3]{u} = u^{\frac{1}{3}}$ . Como  $\frac{dy}{du} = \frac{1}{3}u^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3u^{\frac{2}{3}}}$  e  $\frac{du}{dx} = \cos x$ , segue que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{\cos x}{3u^{\frac{2}{3}}} = \frac{\cos x}{3(\operatorname{sen} x)^{\frac{2}{3}}}.$$

$$\text{Logo, } \frac{dy}{dx}\Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{\cos \frac{\pi}{2}}{3(\operatorname{sen} \frac{\pi}{2})^{\frac{2}{3}}} = \frac{0}{3} = 0.$$

No próximo exemplo vamos preparar o terreno para entrar no assunto desta aula.

## Exemplo 13.6

Consideremos a equação  $x^2 + y^2 = 1$  que, como sabemos, representa o círculo de centro  $(0,0)$  e raio 1. Queremos saber para que valores de  $x$  podemos escrever  $y$  como uma função (derivável) de  $x$ . Mais precisamente, queremos encontrar uma função derivável  $y = f(x)$  que satisfaça a equação. No caso em questão, devemos ter

$$y^2 = 1 - x^2.$$



Há então duas possibilidades para  $y$ :

$$y = f_1(x) = \sqrt{1-x^2} \quad \text{ou} \quad y = f_2(x) = -\sqrt{1-x^2}.$$

Evidentemente, em ambos os casos,  $x$  ficará restrito ao intervalo  $(-1, 1)$ . Além disso, para todo  $x \in (-1, 1)$ , temos

$$f_1'(x) = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{f_1(x)}$$

e

$$f_2'(x) = -\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = \frac{-x}{(-\sqrt{1-x^2})} = -\frac{x}{f_2(x)}.$$

Portanto,  $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$  em ambos os casos.

Observemos que, admitindo apenas a existência de  $y = f(x)$  satisfazendo a equação  $x^2 + y^2 = 1$ , com  $f$  derivável, seríamos capazes de achar  $\frac{dy}{dx}$  em termos de  $x$  e  $y$ , mesmo que não tivéssemos  $y = f(x)$  explicitamente.

Com efeito, derivando ambos os lados da equação  $x^2 + y^2 = 1$  em relação a  $x$ , obtemos  $2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$ , isto é,  $x + y\frac{dy}{dx} = 0$ .

Assim,  $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ .

No caso, por exemplo, da equação  $xy^2 + x + y = 1$ , é complicado escrever  $y$  explicitamente como função de  $x$ . Entretanto, admitindo que  $y = f(x)$  seja uma função derivável satisfazendo esta equação, é bem mais simples encontrar uma expressão para  $\frac{dy}{dx}$  em termos de  $x$  e  $y$ , como podemos constatar no próximo exemplo.

Em geral, dada uma equação em  $x$  e  $y$ , pode ser difícil ou até mesmo impossível explicitar  $y$  como função de  $x$ . No entanto, admitindo que  $y$  seja uma função derivável da variável  $x$  satisfazendo a equação dada, podemos derivar a equação em relação a  $x$  para obter  $\frac{dy}{dx}$ . Neste caso, diremos que a função está dada (ou definida) implicitamente pela equação e que estamos obtendo  $\frac{dy}{dx}$  por derivação implícita da equação dada.

### Exemplo 13.7

Seja  $y = f(x)$  uma função derivável dada implicitamente pela equação  $xy^2 + x + y = 1$ . Mostremos que  $\frac{dy}{dx} = \frac{-y^2-1}{2xy+1}$  se  $2xy + 1 \neq 0$ .

De fato, como  $xy^2 + x + y = 1$ , derivando implicitamente obtemos

$$y^2 + x2y\frac{dy}{dx} + 1 + \frac{dy}{dx} = 0,$$

Quando dizemos que uma função derivável, da variável  $x$ , está definida implicitamente por uma equação, estamos admitindo a existência de uma tal função sem, necessariamente, termos uma maneira explícita de expressá-la como função de  $x$ .

isto é,

$$y^2 + 2xy \frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = -1,$$

isto é,

$$(1 + 2xy) \frac{dy}{dx} = -y^2 - 1.$$

Assim, supondo  $2xy + 1 \neq 0$ , segue que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y^2 - 1}{2xy + 1}.$$

### Exemplo 13.8

Sejam  $a > 0$  e  $y = f(x)$ , com  $y > 0$ , a função dada implicitamente pela equação  $x^2 + y^2 = a^2$ . Vamos encontrar a função  $f$ , a sua derivada, mostrar que  $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$  e achar a equação da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(0, f(0))$ .

Primeiramente, como  $x^2 + y^2 = a^2$ , temos  $y = \sqrt{a^2 - x^2}$  ou  $y = -\sqrt{a^2 - x^2}$ . Como  $y > 0$ , segue que  $y = f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$  para  $x$  no intervalo  $(-a, a)$ .

Pela regra da cadeia, vista na aula 12,

$$f'(x) = \frac{1}{2}(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}-1}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x}{f(x)}$$

para todo  $x \in (-a, a)$ . Ou, na notação de Leibniz,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Poderíamos também obter a igualdade acima derivando implicitamente. Realmente, como  $x^2 + y^2 = a^2$ , obtemos

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0, \text{ isto é, } \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Finalmente, como  $f(0) = \sqrt{a^2} = a$ , então  $f'(0) = \frac{dy}{dx}|_{x=0} = -\frac{0}{a} = 0$ . Portanto, a equação da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(0, f(0)) = (0, a)$  é

$$y = f(0) + f'(0)(x - 0) = a.$$

### Exemplo 13.9

A função derivável  $y = f(x)$  é dada implicitamente pela equação  $3x^3y - y^4 + 5x^2 = -5$ . Vamos determinar a equação da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(1, 2)$ .

Com efeito, como  $3x^3y - y^4 + 5x^2 = -5$ , derivando implicitamente obtemos

$$9x^2y + 3x^3 \frac{dy}{dx} - 4y^3 \frac{dy}{dx} + 10x = 0.$$

Assim,

$$(3x^3 - 4y^3) \frac{dy}{dx} = -(10x + 9x^2y).$$

Logo, se  $3x^3 - 4y^3 \neq 0$ , tem-se

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{10x + 9x^2y}{3x^3 - 4y^3}.$$

Finalmente, substituindo  $x = 1$  e  $y = 2$  na igualdade acima, segue que

$$f'(1) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} = -\frac{10 + 9 \times 2}{3 - 4(2)^3} = -\frac{28}{-29} = \frac{28}{29}.$$

Portanto, a equação da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(1, 2)$  é

$$y = 2 + \frac{28}{29}(x - 1).$$

#### Exemplo 13.10

Sejam  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e seja  $y = f(x)$  uma função derivável definida implicitamente pela equação  $x - \beta y = \alpha\sqrt{x+y}$ . Vamos achar  $\alpha$  e  $\beta$  para que a inclinação da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(6, 3)$  seja 1.

Primeiramente, como  $f(6) = 3$ , segue que  $6 - 3\beta = \alpha\sqrt{6+3} = 3\alpha$ , isto é,  $\alpha + \beta = 2$ . Por outro lado, a inclinação da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(6, 3)$  é  $f'(6) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=6}$ . Como  $x - \beta y - \alpha\sqrt{x+y} = 0$ , derivando implicitamente obtemos

$$1 - \beta \frac{dy}{dx} - \frac{\alpha}{2} \frac{1 + \frac{dy}{dx}}{\sqrt{x+y}} = 0.$$

Como estamos supondo  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=6} = 1$ , segue da equação acima que

$$1 - \beta - \frac{\alpha}{2} \frac{2}{\sqrt{6+3}} = 0, \quad \text{isto é, } \frac{\alpha}{3} + \beta = 1.$$

Finalmente, das igualdades  $\alpha + \beta = 2$  e  $\frac{\alpha}{3} + \beta = 1$ , vem  $\alpha = \frac{3}{2}$  e  $\beta = \frac{1}{2}$ .

#### Exemplo 13.11

Seja  $y = f(x)$  uma função derivável definida implicitamente pela equação  $\frac{x^2}{2} + y^2 + xy = 9$ . Vamos achar os pontos  $(x, f(x))$  para os quais a reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(x, f(x))$  seja horizontal.

Com efeito, como  $\frac{x^2}{2} + y^2 + xy = 9$ , derivando implicitamente obtemos

$$\frac{2x}{2} + 2y \frac{dy}{dx} + y + x \frac{dy}{dx} = 0,$$

isto é,

$$(x + 2y) \frac{dy}{dx} = -(x + y).$$

Para que a reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(x, f(x)) = (x, y)$  seja horizontal devemos ter  $\frac{dy}{dx} = f'(x) = 0$ . Em vista da igualdade acima, isto só pode ocorrer se  $x + y = 0$ , ou seja, se  $y = -x$ . Mas, como  $\frac{x^2}{2} + y^2 + xy = 9$ , fazendo  $y = -x$  vem  $\frac{x^2}{2} + x^2 - x^2 = 9$ ; logo,  $x^2 = 18$ , isto é,  $x = 3\sqrt{2}$  ou  $x = -3\sqrt{2}$ . Podemos então concluir que os pontos procurados são  $(3\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$  e  $(-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$ .

## Resumo

Nesta aula você aprendeu como utilizar as regras básicas de derivação para derivar implicitamente uma função definida por uma equação.

## Exercícios

1. Expresse  $\frac{dy}{dx}$  em termos de  $x$  e  $y$ , onde  $y = f(x)$  é uma função derivável definida implicitamente por cada uma das seguintes equações:

(a)  $xy^2 + 3y = 5$  ;                      (b)  $y^3 + x^2y = 2x + 7$  ;

(c)  $y^7 + y = x$  ;                              (d)  $11y + \cos x = 4xy$  ;

(e)  $x^2 - y^2 = 9$  ;                              (f)  $xy^2 + x + y = 10$  ;

(g)  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$  ;                              (h)  $y^2 + 2x^2y + x = 0$  ;

(i)  $x^2y^2 - x^2 - y^2 = 0$  ;                      (j)  $x^3 - xy + y^3 = 1$ .

2. Sendo  $y = f(x)$  uma função derivável dada implicitamente por cada uma das equações abaixo, ache a equação da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $P$  indicado:

(a)  $(y - x)^2 = 2x + 4$  ,                       $P = (6, 2)$  ;

(b)  $x^2 + xy - y^2 = 1$  ,                       $P = (2, 3)$  ;

(c)  $xy + 5 = 7x$  ,                               $P = (1, 2)$  .

3. A função derivável  $y = f(x)$ ,  $y > 0$ , é dada implicitamente pela equação  $x^2 + 36y^2 = 10$ . Ache  $f(1)$  e a equação da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(1, f(1))$ .
4. Considere a elipse  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ . Sendo  $(u, v)$  um ponto sobre a elipse tal que  $v \neq 0$ , ache a equação da reta tangente à mesma no ponto  $(u, v)$ .  
Sugestão: Considere  $y = f(x)$ ,  $f$  derivável e tal que  $f(u) = v$ , dada implicitamente pela equação  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ . Determine a equação da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(u, v)$ .
5. Considere o ramo da hipérbole  $xy = 1$  onde  $x > 0$ . Sendo  $(u, v)$  um ponto qualquer da hipérbole, com  $u > 0$ , mostre que a equação da reta tangente à mesma no ponto  $(u, v)$  é  $vx + uy = 2$ .

## Auto-avaliação

Nos exercícios desta aula você teve a oportunidade de utilizar as regras básicas de derivação, estudadas nas aulas 10 e 12, para derivar implicitamente determinadas funções. Mais uma vez, a importância de tais regras fica evidenciada.



## Aula 14 – Velocidade e aceleração. Taxa de variação.

### Objetivo

*Estudar o significado da noção de derivada no contexto da Física.*

Referências: Aulas 9 e 13.

Nesta aula abordaremos o significado da noção de derivada no contexto da Física como, aliás, já havíamos prometido na aula 9. Mas antes, lembremos um fato bem conhecido dos aficionados pelo esporte.

Aqueles que acompanham o atletismo sabem que Carl Lewis foi um dos maiores atletas de todos os tempos, tendo obtido o tempo de 9,92 segundos para os 100 metros rasos.

Poderíamos, inicialmente, perguntar quantos metros ele percorreu em cada segundo. Ora, se no instante  $t = 0$  da partida ele estava na posição inicial e após 9,92 segundos ele havia percorrido 100 metros, então em média ele percorreu  $\frac{100-0}{9,92-0}$  metros por segundo, o que é aproximadamente igual a 10,08 metros por segundo. Esta foi a velocidade média por ele percorrida entre os instantes  $t = 0$  e  $t = 9,92$ .

Agora, se perguntássemos sua velocidade  $v(t)$  em cada instante  $t$ , a resposta seria mais delicada. Realmente, suponhamos que descobríssemos uma função que em cada instante  $t$  fornecesse a posição  $x(t)$  de Carl Lewis na pista. Assim, para cada  $t$  e para cada  $h \neq 0$ ,  $x(t+h) - x(t)$  seria o deslocamento do corredor entre os instantes  $t$  e  $t+h$  e  $\frac{x(t+h)-x(t)}{h}$  seria a sua velocidade média entre os instantes  $t$  e  $t+h$  (por exemplo, sua velocidade média entre  $t = 0$  e  $t = 9,92$  foi de aproximadamente 10,08 metros por segundo). Observemos ainda que, à medida que  $h \neq 0$  se aproxima de zero, as velocidades médias  $\frac{x(t+h)-x(t)}{h}$  se aproximam da velocidade  $v(t)$  procurada. Assim, seria natural admitir que  $v(t)$  coincidissem com  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h)-x(t)}{h}$ .

As considerações acima motivam a seguinte

**Definição 14.1** Suponhamos que uma partícula se desloque sobre o eixo  $x$  das abscissas de tal modo que  $x = x(t)$  represente a posição da partícula no instante  $t$  (portanto,  $x$  é uma função que fornece a posição da partícula em cada instante). Para cada  $t$  e para cada  $h \neq 0$ ,  $x(t+h) - x(t)$  é o *deslocamento da partícula* entre os instantes  $t$  e  $t+h$  e  $\frac{x(t+h)-x(t)}{h}$  é a *velocidade média* da partícula entre os instantes  $t$  e  $t+h$ .

A *velocidade* da partícula no instante  $t$ , denotada por  $v(t)$ , é definida como sendo  $x'(t)$ , caso  $x'(t)$  exista. Como

$$v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h},$$

$v(t)$  é também chamada a *taxa de variação* de  $x$  em relação ao tempo no instante  $t$ .

Suponhamos que, para um certo instante  $t$ ,  $v(s)$  exista para  $s$  em um intervalo aberto contendo  $t$ . A *aceleração* da partícula no instante  $t$ , denotada por  $a(t)$ , é definida como sendo  $v'(t)$ , caso  $v'(t)$  exista. Como

$$a(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(t+h) - v(t)}{h},$$

$a(t)$  é também chamada a taxa de variação de  $v$  em relação ao tempo no instante  $t$ .

#### Exemplo 14.1

Consideremos uma partícula que cai sob influência exclusiva da gravidade. Dados experimentais mostram que a posição da partícula no instante  $t$  é dada por  $x = x(t) = \frac{Gt^2}{2}$ , onde  $G$  é a constante gravitacional. Vamos encontrar a velocidade da partícula no instante  $t$  e a aceleração da partícula no instante  $t$ .

De fato, como  $x(t) = \frac{Gt^2}{2}$ , a velocidade da partícula no instante  $t$  é  $v(t) = x'(t) = Gt$  e a aceleração da partícula no instante  $t$  é  $a(t) = v'(t) = G$ .

#### Exemplo 14.2

Uma partícula se move sobre o eixo  $x$  das abscissas de modo que a posição  $x$  da mesma no instante  $t$  seja dada por  $x = x(t) = 1 + t^3$ , sendo  $x$  medida em metros e  $t$  em segundos. Vamos determinar:

- (a) a posição da partícula nos instantes  $t = 0$ ,  $t = 1$  e  $t = 2$ ;
  - (b) a velocidade da partícula no instante  $t$ ;
  - (c) a aceleração da partícula no instante  $t$ .
- (a) Como  $x(0) = 1$ ,  $x(1) = 2$  e  $x(2) = 9$ , a partícula estará 1 metro à direita da origem no instante  $t = 0$ , 2 metros à direita da origem no instante  $t = 1$  e 9 metros à direita da origem no instante  $t = 2$  (ver a Figura 14.1).



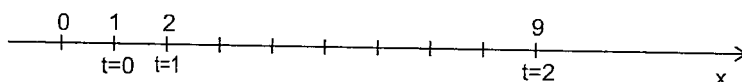


Figura 14.1

- (b) Como  $x(t) = 1 + t^3$ , então  $v(t) = x'(t) = 3t^2$ . Assim, a velocidade da partícula no instante  $t$  é de  $3t^2$  m/s.
- (c) Como  $v(t) = 3t^2$ , então  $a(t) = v'(t) = 6t$ . Assim, a aceleração da partícula no instante  $t$  é de  $6t$  m/s<sup>2</sup>.

#### Exemplo 14.3

Um objeto se move em linha reta, a partir de um ponto  $P$ , de modo que a sua posição (medida em metros) é dada por  $x(t) = 2t$  se  $0 \leq t \leq 2$ ,  $x(t) = 4$  se  $2 \leq t \leq 3$  e  $x(t) = -2t + 10$  se  $3 \leq t \leq 5$ . Determinemos a velocidade do objeto.

É fácil ver que  $x$  é derivável em  $[0, 5] - \{2, 3\}$ , sendo  $x'(t) = 2$  se  $0 \leq t < 2$ ,  $x'(t) = 0$  se  $2 < t < 3$  e  $x'(t) = -2$  se  $3 < t \leq 5$ . Portanto,  $v(t) = 2$  se  $0 \leq t < 2$ ,  $v(t) = 0$  se  $2 < t < 3$  e  $v(t) = -2$  se  $3 < t \leq 5$ , sendo a velocidade medida em metros por segundo. Observemos que o objeto se afasta do ponto  $P$  nos primeiros 2 segundos, depois fica parado por 1 segundo e nos últimos 2 segundos retorna ao ponto  $P$ .

#### Exemplo 14.4

Um quadrado se expande de tal maneira que seu lado varia à razão de 5 cm/s. Determinemos a taxa de variação de sua área no instante em que o lado do quadrado possua 6 cm de comprimento.

Representemos por  $x = x(t)$  o comprimento do lado do quadrado no instante  $t$ . Logo,  $A(x) = x^2$  representa a área do quadrado em função do lado  $x$  do quadrado.

Para todo  $t$  temos

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dx} \frac{dx}{dt}$$

Mas, como  $\frac{dA}{dx} = 2x$  e como nos é dado que  $\frac{dx}{dt} = 5$  para todo  $t$ , concluímos que  $\frac{dA}{dt} = 10x(t)$  para todo  $t$ . Em particular, quando  $x(t) = 6$ , vem  $\frac{dA}{dt} = 60$ .

Assim, a taxa de variação procurada é de 60 cm<sup>2</sup>/s.

## Exemplo 14.5

Um ponto se move ao longo do gráfico de  $y = x^5$  em direção à origem, de modo que sua abscissa  $x$  varia à razão de 2 unidades por segundo. Determinemos a taxa de variação da ordenada  $y$  do ponto, quando  $x = 4$ .

Temos que  $x = x(t)$  e nos é dado que  $\frac{dx}{dt} = -2$  para todo  $t$ . Sabemos ainda que  $y = y(x) = x^5$ . Portanto,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}$$

para todo  $t$ . Como  $\frac{dy}{dx} = 5x^4$ , concluímos que  $\frac{dy}{dt} = -10(x(t))^4$  para todo  $t$ . Em particular, quando  $x(t) = 4$ , vem  $\frac{dy}{dt} = -10 \cdot 4^4 = -2560$ .

Assim, a ordenada  $y$  do ponto decresce à taxa de 2560 unidades por segundo quando  $x = 4$  unidades.

## Exemplo 14.6

Um cilindro é comprimido lateralmente e se alonga de tal modo que o raio da base decresce a uma taxa de 2 cm/s e a altura cresce a uma taxa de 5 cm/s. Vamos achar a taxa de variação segundo a qual o volume do cilindro varia quando o raio da base mede 6 cm e a altura 8 cm.

Com efeito, representemos por  $r = r(t)$  o raio da base do cilindro e por  $h = h(t)$  a altura do cilindro (ver a Figura 14.2). São fornecidas as seguintes informações:  $\frac{dr}{dt} = -2$  e  $\frac{dh}{dt} = 5$  para todo  $t$ .

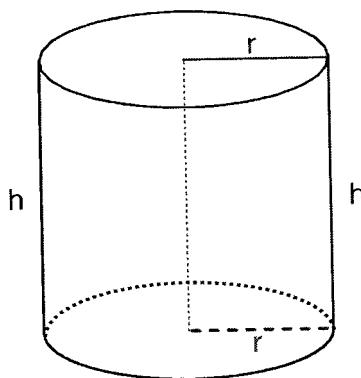


Figura 14.2

Como o volume  $V = V(t)$  do cilindro é  $V = \pi r^2 h$ , temos

$$\frac{dV}{dt} = \pi \left( 2r \frac{dr}{dt} h + r^2 \frac{dh}{dt} \right) = \pi (5(r(t))^2 - 4r(t)h(t))$$

para todo  $t$ .

Em particular, quando  $r(t) = 6$  e  $h(t) = 8$ , vem

$$\frac{dV}{dt} = \pi(5 \times 6^2 - 4 \times 6 \times 8) = \pi(180 - 192) = -12\pi.$$

Assim, o volume do cilindro decresce à taxa de  $12\pi \text{ cm}^3/\text{s}$  quando o raio da base mede 6 cm e a altura mede 8 cm.

#### Exemplo 14.7

Dois trens saem de uma mesma estação com 3 horas de diferença. O primeiro trem se desloca para o norte a uma velocidade de 100 km/h e o segundo para o leste a uma velocidade de 60 km/h, sendo que o segundo saiu 3 horas depois do primeiro. Determinemos a taxa de variação da distância entre os dois trens 2 horas depois do segundo haver partido.

Representemos por  $x = x(t)$  a posição do segundo trem a sair, por  $y = y(t)$  a posição do primeiro trem a sair e por  $z = z(t)$  a distância entre os dois trens (ver a Figura 14.3); então  $z^2 = x^2 + y^2$ .

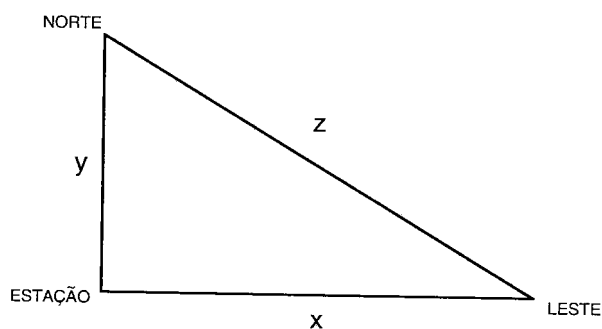


Figura 14.3

São fornecidas as seguintes informações:  $\frac{dy}{dt} = 100$  para todo  $t \geq 0$  e  $\frac{dx}{dt} = 60$  para todo  $t \geq 3$ , sendo  $y(0) = 0$  e  $x(3) = 0$  (lembrar que o segundo trem partiu 3 horas depois do primeiro).

Como  $z^2 = x^2 + y^2$ , segue que

$$2z \frac{dz}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 120x + 200y,$$

ou seja,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{60x(t) + 100y(t)}{z(t)}$$

para todo  $t \geq 3$ .

## CÁLCULO I

Notemos que, 2 horas após o segundo trem ter saído, ele estará a  $60 \times 2 = 120$  km da estação. Por outro lado, o primeiro já terá saído há 5 horas, estando portanto a  $100 \times 5 = 500$  km da estação. Logo,  $x(5) = 120$  e  $y(5) = 500$ . Assim, a distância entre os dois trens é  $z(5) = \sqrt{120^2 + 500^2}$ .

Conseqüentemente,

$$\left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=5} = \frac{60x(5) + 100y(5)}{z(5)} = \frac{(60 \times 120) + (100 \times 500)}{\sqrt{120^2 + 500^2}} \text{ km/h}$$

é a taxa de variação procurada.

## Resumo

Nesta aula você aprendeu o significado da noção de derivada no contexto da Física.

## Exercícios

- O comprimento do lado de um quadrado está crescendo à razão de 7,5 cm/s. Ache a taxa de crescimento da área do quadrado no instante em que o lado mede 37,5 cm.
- Um ponto se move ao longo do gráfico de  $y = \frac{1}{x^2+4}$  de modo que sua abscissa  $x$  varia à razão de 3 unidades por segundo. Determine a taxa de variação de sua ordenada  $y$  quando  $x = 2$ .
- Dois lados paralelos de um retângulo aumentam à razão de 2 cm/s, mas os outros dois lados diminuem de tal modo que a figura permaneça um retângulo de área constante e igual a 50 cm<sup>2</sup>. Ache a velocidade com que o perímetro varia quando o lado que aumenta mede 5 cm.
- Uma escada com 13 m de comprimento está apoiada em uma parede vertical alta. No instante  $t_0$ , a extremidade inferior, que se encontra a 5m da parede, está escorregando e se afastando da parede a uma velocidade de 2 m/s.
  - A que velocidade o topo da escada está escorregando no instante  $t_0$ ?
  - Um homem está sobre a escada, a 8 m do solo, no instante  $t_0$ . Com que velocidade ele se aproxima do solo?

5. Uma fonte luminosa se aproxima perpendicularmente de uma parede com velocidade constante de 2 m/s, projetando uma imagem circular sobre esta. Sabendo que a abertura do fecho de luz é de  $\frac{\pi}{2}$  rd, calcule a velocidade com que a área iluminada na parede está diminuindo quando a fonte está a 1 m da parede.
6. Um triângulo  $ABC$ , no plano  $xy$ , tem o vértice  $A$  fixo no ponto  $(0, 0)$ , ângulo reto no vértice  $B$  e o vértice  $C$  sobre o gráfico de  $y = \frac{1}{x^2+1}$ . O vértice  $B$  se move para a direita no eixo  $x$  das abscissas a partir do ponto  $(1, 0)$ . Sabendo que em um instante  $t_0$  a velocidade do vértice  $B$  é de 1 m/s e a sua posição é de 2 m, calcule a taxa de variação da área do triângulo no instante  $t_0$ .
7. Um homem de 1,80 m de altura corre, em linha reta, em direção a um muro à razão de 4 m/s. Diretamente atrás dele, a 40 metros do muro, está um refletor, 3 metros acima do chão. Calcule a velocidade com que o comprimento da sombra do homem está variando no muro quando ele estiver no meio do caminho entre o refletor e o muro. A sombra está aumentando ou diminuindo?
8. Um cone está inscrito em uma esfera de raio  $R$ . Se o raio da esfera está aumentando à razão de 0,9 cm/s e a altura do cone está aumentando à razão de 0,8 cm/s, determine a razão com que o volume do cone está aumentando quando a altura do cone mede  $\frac{4}{3}$  cm e o raio da esfera mede 1 cm.

## Auto-avaliação

Após ter feito os exercícios desta aula, você certamente assimilou melhor o conteúdo da mesma. Caso tenha havido alguma dúvida, releia os exemplos e depois volte aos exercícios.



## Aula 15 – Exercícios resolvidos.

### Objetivo

Amadurecer os conceitos e resultados vistos até agora, dando ênfase ao conteúdo sobre derivação.

Referências: Aulas 1 a 10 e 12, 13 e 14.

**Exercício 1:** Mostre que  $\lim_{x \rightarrow 0} \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$  não existe.

**Solução:** Se  $\lim_{x \rightarrow 0} \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$  existisse, haveria um único número real  $l$  com a seguinte propriedade: para toda seqüência  $(x_n)$  de números diferentes de zero convergindo para zero, a seqüência  $(\text{sen}\left(\frac{1}{x_n}\right))$  convergiria para  $l$ . Vejamos que isto não ocorre. Realmente, consideremos as seqüências  $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) e  $z_n = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2n\pi}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Então  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ . Por outro lado, como  $\text{sen}\left(\frac{1}{y_n}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1$  e  $\text{sen}\left(\frac{1}{z_n}\right) = \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right) = -1$  para  $n = 0, 1, 2, \dots$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{sen}\left(\frac{1}{y_n}\right) = 1$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{sen}\left(\frac{1}{z_n}\right) = -1$ . Conseqüentemente,  $\lim_{x \rightarrow 0} \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$  não existe.

**Exercício 2:** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$  se  $x \neq 0$  e  $f(0) = 0$ . Mostre que  $f$  é derivável em  $\mathbb{R}$  e forneça a derivada  $f'$  de  $f$ .

**Solução:** Inicialmente, vejamos que  $f$  é derivável em 0. Realmente,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

como já sabemos. Isto mostra que  $f$  é derivável em 0 e  $f'(0) = 0$ .

Vejamos, agora, que  $f$  é derivável em  $\mathbb{R} - \{0\}$ . Realmente, consideremos  $f_1(x) = \frac{1}{x}$  para todo  $x \in \mathbb{R} - \{0\}$  e  $f_2(x) = \cos x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  (é claro que  $(f_2 \circ f_1)(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$  se  $x \neq 0$ );  $f_1$  é derivável em  $\mathbb{R} - \{0\}$  e  $f_1'(x) = -\frac{1}{x^2}$  para todo  $x \in \mathbb{R} - \{0\}$  e  $f_2$  é derivável em  $\mathbb{R}$  e  $f_2'(x) = -\text{sen } x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Pela regra da cadeia,  $f_2 \circ f_1$  é derivável em  $\mathbb{R} - \{0\}$  e

$$(f_2 \circ f_1)'(x) = f_2'(f_1(x))f_1'(x) = \frac{1}{x^2} \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$$

para todo  $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ . Mas, como

$$f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 (f_2 \circ f_1)(x)$$

para todo  $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ , concluímos que  $f$  é derivável em  $\mathbb{R} - \{0\}$  (como produto de duas funções deriváveis em  $\mathbb{R} - \{0\}$ ) e

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x(f_2 \circ f_1)(x) + x^2(f_2 \circ f_1)'(x) = \\ &= 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \left(\frac{1}{x^2} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \\ &= 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

para todo  $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ .

Em resumo,  $f$  é derivável em  $\mathbb{R}$ , sendo sua derivada  $f'$  dada por  $f'(x) = 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$  se  $x \neq 0$  e  $f'(0) = 0$ .

**Exercício 3:** Sendo  $f$  como no Exercício 2, mostre que a função  $f'$  não é contínua em 0.

Este exercício mostra que, em geral, a derivabilidade de uma função não implica a continuidade de sua derivada.

**Solução:** Afirmamos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$$

não existe. Realmente, se este limite existisse, da igualdade

$$f'(x) - 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \neq 0)$$

e do fato de  $\lim_{x \rightarrow 0} 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$  existir, resultaria que  $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$  existiria. Mas isto não ocorre, como vimos no Exercício 1.

Portanto,  $f'$  não é contínua em 0.

**Exercício 4:** Ache um número inteiro  $n$  tal que o polinômio  $p(x) = x^3 - x + 3$  possua uma raiz no intervalo  $(n, n + 1)$ .

**Solução:** Com efeito, notemos que  $p(-2) = (-2)^3 - (-2) + 3 = -3 < 0$  e  $p(-1) = (-1)^3 - (-1) + 3 = 3 > 0$ . Como  $p$  é uma função contínua em  $[-2, -1]$  e  $p(-2) < 0 < p(-1)$ , segue do teorema do valor intermediário que existe  $x \in (-2, -1)$  tal que  $p(x) = 0$ . Basta então tomar  $n = -2$  para concluir.

**Exercício 5:** Sejam  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções contínuas tais que  $f(a) < g(a)$  e  $f(b) > g(b)$ . Mostre que existe  $x \in (a, b)$  tal que  $f(x) = g(x)$ .



**Solução:** De fato, consideremos a função  $f-g$  que, como já vimos, é contínua em  $[a, b]$  (lembramos que  $(f-g)(t) = f(t) - g(t)$  para todo  $t \in [a, b]$ ). Como

$$(f-g)(a) = f(a) - g(a) < 0 < f(b) - g(b) = (f-g)(b),$$

segue do teorema do valor intermediário que existe  $x \in (a, b)$  tal que  $(f-g)(x) = 0$ . Finalmente, como  $(f-g)(x) = 0$  equivale a  $f(x) = g(x)$ , a nossa afirmação está demonstrada.

**Exercício 6:** Considere a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^2$  se  $x \leq 0$  e  $f(x) = x$  se  $x > 0$ , cujo gráfico esboçamos na Figura 15.1. Mostre que  $f$  não é derivável em 0 e que não existe reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(0, f(0)) = (0, 0)$ .

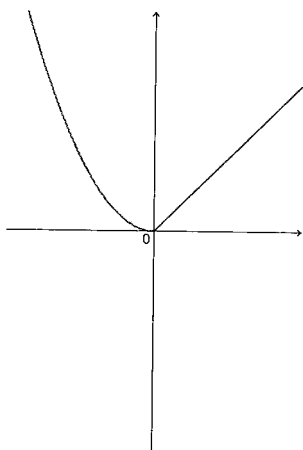


Figura 15.1

**Solução:** De fato, como

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1,$$

então  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$  não existe. Logo,  $f$  não é derivável em 0. Além disso, como os limites laterais

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

existem mas são diferentes, não existe reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(0, 0)$ .

## CÁLCULO I

**Exercício 7:** Sendo  $f(x) = \operatorname{sen}^3\left(\frac{\cos(x^2)}{1+x^4}\right)$ , calcule  $f'(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  e forneça  $f'(1)$ .

**Solução:** Definamos  $f_1(x) = \frac{\cos(x^2)}{1+x^4}$ ,  $f_2(x) = \operatorname{sen} x$  e  $f_3(x) = x^3$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Então  $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$ . Realmente, para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} (f_3 \circ f_2 \circ f_1)(x) &= (f_3 \circ f_2)(f_1(x)) = \\ &= (f_3 \circ f_2)\left(\frac{\cos(x^2)}{1+x^4}\right) = \\ &= f_3\left(f_2\left(\frac{\cos(x^2)}{1+x^4}\right)\right) = \\ &= f_3\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\cos(x^2)}{1+x^4}\right)\right) = \\ &= \operatorname{sen}^3\left(\frac{\cos(x^2)}{1+x^4}\right) = f(x). \end{aligned}$$

Como  $f_1$ ,  $f_2$  e  $f_3$  são deriváveis em  $\mathbb{R}$  (justifique porque  $f_1$  é derivável em  $\mathbb{R}$ ), a regra da cadeia garante que  $f$  é derivável em  $\mathbb{R}$  e

$$f'(x) = (f_3 \circ f_2 \circ f_1)'(x) = (f_3 \circ f_2)'(f_1(x))f_1'(x) = (f_3 \circ f_2)'\left(\frac{\cos(x^2)}{1+x^4}\right)f_1'(x)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Por outro lado,

$$f_1'(x) = \frac{-2x \operatorname{sen}(x^2) - 4x^3 \cos(x^2)}{(1+x^4)^2} = -\frac{2x \operatorname{sen}(x^2) + 4x^3 \cos(x^2)}{(1+x^4)^2}$$

e

$$(f_3 \circ f_2)'(x) = f_3'(f_2(x))f_2'(x) = 3(f_2(x))^2(\cos x) = 3(\operatorname{sen}^2 x)(\cos x)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Portanto,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (f_3 \circ f_2)'\left(\frac{\cos(x^2)}{1+x^4}\right)f_1'(x) = \\ &= -3 \frac{2x \operatorname{sen}(x^2) + 4x^3 \cos(x^2)}{(1+x^4)^2} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\cos(x^2)}{1+x^4}\right) \left(\cos\left(\frac{\cos(x^2)}{1+x^4}\right)\right) \end{aligned}$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Em particular, fazendo  $x = 1$ , obtemos

$$\begin{aligned} f'(1) &= -\frac{3}{4}(2\operatorname{sen} 1 + 4 \cos 1)\operatorname{sen}^2\left(\frac{\cos 1}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\cos 1}{2}\right)\right) = \\ &= -3\left(\frac{\operatorname{sen} 1}{2} + \cos 1\right)\operatorname{sen}^2\left(\frac{\cos 1}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\cos 1}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

**Exercício 8** (Exercício 4, da aula 13): Considere a elipse  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ . Sendo  $(u, v)$  um ponto sobre a elipse tal que  $v \neq 0$ , ache a equação da reta tangente à mesma no ponto  $(u, v)$ .

**Solução:** Seja  $y = f(x)$  uma função derivável dada implicitamente pela equação  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$  tal que  $f(u) = v$ . Derivando implicitamente, obtemos

$$\frac{2x}{4} + \frac{2y}{9} \frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{isto é,} \quad \frac{y}{9} \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{4}.$$

Logo, se  $y \neq 0$ ,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{9}{4} \frac{x}{y}.$$

Portanto, a equação da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(u, f(u)) = (u, v)$ , que coincide com a equação da reta tangente à elipse  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$  no ponto  $(u, v)$ , é

$$y = v + \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=u} (x - u).$$

Mas  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=u} = -\frac{9}{4} \frac{u}{v}$ . Assim, a equação da reta em questão é

$$y = v - \frac{9u}{4v}(x - u),$$

isto é,

$$9ux + 4vy = 9u^2 + 4v^2 = 36,$$

isto é,

$$\frac{ux}{4} + \frac{vy}{9} = 1.$$

**Exercício 9:** Um triângulo  $ABC$  está inscrito em um semi-círculo de diâmetro  $AC = 10$  cm, como mostra a Figura 15.2. Sabendo que o vértice  $B$  varia sobre o semi-círculo e que o lado  $AB$  aumenta à razão de  $\frac{3}{2}$  cm/s, determine a taxa de variação da área do triângulo no instante em que o lado  $AB$  mede 8 cm.

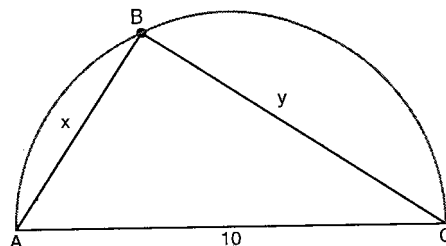


Figura 15.2

**Solução:** Sejam  $x = x(t)$  e  $y = y(t)$  os comprimentos dos catetos  $AB$  e  $BC$  da triângulo retângulo  $ABC$ . Como  $x^2 + y^2 = 100$ , temos

$$2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0,$$

isto é,

$$x(t) \frac{dx}{dt} + y(t) \frac{dy}{dt} = 0$$

para todo  $t$ . Como  $\frac{dx}{dt} = \frac{3}{2}$  para todo  $t$ , temos

$$\frac{3}{2}x(t) + y(t) \frac{dy}{dt} = 0$$

para todo  $t$ . Além disso, quando  $x(t) = 8$ ,  $y(t) = \sqrt{100 - 8^2} = \sqrt{36} = 6$ ; logo,  $6 \frac{dy}{dt} = -\frac{3}{2} \times 8 = -12$ , isto é,  $\frac{dy}{dt} = -2$ .

Seja  $S = S(t)$  a área do triângulo  $ABC$ . Como  $S = \frac{xy}{2}$ , então

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} \left[ \frac{dx}{dt} y + x \frac{dy}{dt} \right],$$

isto é,

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} \left[ \frac{dx}{dt} y(t) + x(t) \frac{dy}{dt} \right],$$

para todo  $t$ . Portanto, quando  $x(t) = 8$ , podemos finalmente afirmar que

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} \left[ \frac{3}{2} \times 6 + 8 \times (-2) \right] = -\frac{7}{2}.$$

Assim, a área do triângulo  $ABC$  decresce a uma taxa de  $\frac{7}{2}$  cm<sup>2</sup>/s quando o lado  $AB$  mede 8 cm.

**Exercício 10:** Um cone circular reto é obtido girando-se um triângulo retângulo de hipotenusa constante e igual a 6 cm em torno de um de seus catetos. Determine a taxa de variação do volume do cone no instante em que a altura do cone seja de  $2\sqrt{5}$  cm e esteja aumentando à razão de 2cm/s.

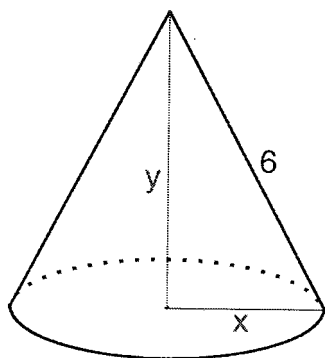


Figura 15.3

**Solução:** Sejam  $x = x(t)$  e  $y = y(t)$  os catetos do triângulo mencionado no enunciado do exercício, como indicado na Figura 15.3.

Como  $x^2 + y^2 = 36$ , temos

$$2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0,$$

isto é,

$$x(t) \frac{dx}{dt} + y(t) \frac{dy}{dt} = 0$$

para todo  $t$ . Como  $\frac{dy}{dt} = 2$  para todo  $t$ , temos

$$\frac{dx}{dt} x(t) + 2y(t) = 0$$

para todo  $t$ . Além disso, quando  $y(t) = 2\sqrt{5}$ ,  $x(t) = \sqrt{36 - (2\sqrt{5})^2} = \sqrt{16} = 4$ ; logo,  $4 \frac{dx}{dt} + 4\sqrt{5} = 0$ , isto é,  $\frac{dx}{dt} = -\sqrt{5}$ .

Seja  $V = V(t)$  o volume do cone em questão. Então  $V = \frac{1}{3}\pi x^2 y$ . Logo,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{3} \left[ 2x \frac{dx}{dt} y + x^2 \frac{dy}{dt} \right],$$

isto é,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{3} \left[ 2x(t) \frac{dx}{dt} y(t) + (x(t))^2 \frac{dy}{dt} \right]$$

para todo  $t$ . Portanto, quando  $y(t) = 2\sqrt{5}$ , obtemos

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{3} \left[ 2 \times 4 \times (-\sqrt{5}) \times (2\sqrt{5}) + 4^2 \times 2 \right] = -16\pi.$$

Assim, o volume do cone decresce a uma taxa de  $16\pi \text{ cm}^3/\text{s}$  quando sua altura é de  $2\sqrt{5} \text{ cm}$ .

## Resumo

Esta aula certamente contribuiu para solidificar a sua compreensão do conceito de derivada, criando condições para que você volte aos exercícios que ainda não tenha feito e habilitando-o a prosseguir o curso com segurança.