

Volume | 2

Módulos 2 e 3

Mário Olivero da Silva
Nancy Cardim

Volume | 2
2ª edição

ISBN 85-7648-046-8



Cálculo II

Cálculo II

cederj



UENF
Universidade Estadual
do Norte Fluminense



SECRETARIA DE
CIÊNCIA E TECNOLOGIA



Ministério
da Educação





Fundação

CECIERJ

Consórcio **cederj**

Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

Cálculo II

Volume 2 – Módulos 2 e 3
2ª edição

Mário Olivero da Silva

Nancy Cardim



SECRETARIA DE
CIÊNCIA E TECNOLOGIA



Ministério
da Educação



Apoio:



Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Rua Visconde de Niterói, 1364 – Mangueira – Rio de Janeiro, RJ – CEP 20943-001
Tel.: (21) 2334-1569 Fax: (21) 2568-0725

Presidente

Masako Oya Masuda

Vice-presidente

Mirian Crapez

Coordenação do Curso de Matemática

UFF - Celso José da Costa
UNIRIO - Luiz Pedro San Gil Jutuca

Material Didático

ELABORAÇÃO DE CONTEÚDO

Mário Olivero da Silva
Nancy Cardim

COORDENAÇÃO DE DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL

Cristine Costa Barreto

DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL E REVISÃO

Carmen Irene Correia de Oliveira
Nilce P. Rangél Del Rio

COORDENAÇÃO DE LINGUAGEM

Maria Angélica Alves

Departamento de Produção

EDITORA

Tereza Queiroz

COORDENAÇÃO EDITORIAL

Jane Castellani

REVISÃO TIPOGRÁFICA

Equipe CEDERJ

COORDENAÇÃO DE PRODUÇÃO

Jorge Moura

PROGRAMAÇÃO VISUAL

Marcelo Freitas

ILUSTRAÇÃO

Equipe CEDERJ

CAPA

André Freitas de Oliveira
Eduardo de Oliveira Bordoni

PRODUÇÃO GRÁFICA

Andréa Dias Fiães
Fábio Rapello Alencar

Copyright © 2005, Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Nenhuma parte deste material poderá ser reproduzida, transmitida e gravada, por qualquer meio eletrônico, mecânico, por fotocópia e outros, sem a prévia autorização, por escrito, da Fundação.

S586c

Silva, Mário Olivero da
Cálculo II. v.2. / Mário Olivero da Silva. – 2.ed. – Rio de Janeiro :
Fundação CECIERJ, 2009.
234 p.; 21 x 29,7 cm.

ISBN: 85-7648-046-8

1. Funções vetoriais. 2. Integração. 3. Técnicas de integração. I.
Cardim, Nancy. II. Título.

CDD: 515.43

Governo do Estado do Rio de Janeiro

Governador
Sérgio Cabral Filho

Secretário de Estado de Ciência e Tecnologia
Alexandre Cardoso

Universidades Consorciadas

**UENF - UNIVERSIDADE ESTADUAL DO
NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO**
Reitor: Almy Junior Cordeiro de Carvalho

**UERJ - UNIVERSIDADE DO ESTADO DO
RIO DE JANEIRO**
Reitor: Ricardo Vieiralves

UFF - UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
Reitor: Roberto de Souza Salles

**UFRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL DO
RIO DE JANEIRO**
Reitor: Aloísio Teixeira

**UFRRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL
DO RIO DE JANEIRO**
Reitor: Ricardo Motta Miranda

**UNIRIO - UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO
DO RIO DE JANEIRO**
Reitora: Malvina Tania Tuttman

SUMÁRIO

Módulo 2: Prefácio da Segunda Edição	7
Aula 16 - Apresentação da disciplina Cálculo II	9
Aula 17 - Técnicas de integração - substituição simples	17
Aula 18 - Técnicas de integração - substituição simples - continuação	25
Aula 19 - Técnicas de integração - integração por partes	33
Aula 20 - Técnicas de integração - integração de potências e produtos de funções trigonométricas	43
Aula 21 - Técnicas de integração - integração de potências e produtos de funções trigonométricas	53
Aula 22 - Técnicas de integração - substituição trigonométrica	63
Aula 23 - Técnicas de integração - frações parciais - primeira parte	75
Aula 24 - Técnicas de integração - frações parciais - segunda parte	91
Aula 25 - Técnicas de integração - aulas de exercícios	101
Aula 26 - Integrais impróprias - primeira parte	109
Aula 27 - Integrais impróprias - segunda parte - critérios de convergência	121
Aula 28 - Aplicação de integrais - volumes	131
Aula 29 - Aplicação de integrais - áreas e comprimentos	143
Aula 30 - Técnicas de integração - miscelânea	153
Módulo 3	
Aula 31 - Funções vetoriais de uma variável real	163
Aula 32 - Curvas em coordenadas polares	175
Aula 33 - Limite e continuidade	185
Aula 34 - Derivadas de funções vetoriais	199
Aula 35 - Funções vetoriais - integrais	211
Respostas dos exercícios e algumas soluções	225

Prefácio da Segunda Edição

A preparação desta segunda edição deu-nos a oportunidade de corrigir alguns pequenos erros e de acrescentar algum material às aulas 8 e 9, sobre a técnica de integração por frações parciais.

Além disso, pudemos refletir um pouco mais sobre a experiência de escrever *mais um texto* sobre esses conteúdos. A nossa principal motivação é o desafio de apresentar esse conteúdo clássico usando uma linguagem que o aproxime do leitor. Tentamos estabelecer com você uma certa cumplicidade, ou melhor ainda, uma certa camaradagem. A tarefa não é fácil, mas tem sido cumprida com entusiasmo e, principalmente, muito prazer.

Para ter sucesso nessa atividade, um dos segredos é ser breve, *ma non tanto!* A escolha dos exemplos também é muito importante e, acreditem, limitada.

Fazendo um paralelo com a música, essa é a nossa encenação da ópera “Cálculo”. É verdade que algumas páginas, especialmente as demonstrações mais longas e técnicas, correspondem a árias barrocas.

Melhor ainda, estas notas são como uma suíte de danças. Sua “audição” não impede que os leitores sigam em busca de outras grandes sinfonias. Mais ainda, esperamos que isso os encoraje a tanto. Por grandes sinfonias, queremos dizer os textos clássicos...

Finalmente, esse é o momento oportuno de fazer alguns agradecimentos. O convívio com os colegas professores de Cálculo nas universidades onde atuamos deve ser mencionado. De alguma forma, nossa prática do ensino de cálculo foi moldada com a ajuda desse convívio.

Em particular, gostaríamos de agradecer à professora Maria Lucia Menezes, pelas sugestões que foram incorporadas nesta nova edição, e ao professor Pierre Petin, pela sua leitura crítica do texto e, principalmente, pelo seu encorajamento. Valeu, Lucinha! *Merci*, Pierre!

Não poderíamos deixar de agradecer as observações perspicazes que nos foram enviadas pela tutora coordenadora de Paracambi, Aline Caetano da Silva. Obrigado, Aline!

Agradecemos, também, a equipe de revisores do CEDERJ, em especial à Ana Tereza e ao Alexandre.

Mário Olivero e Nancy Cardim

Piratininga, maio de 2004

Aula 16 – Apresentação da Disciplina Cálculo II

Enquanto a Álgebra e a Geometria estiveram separadas,
seus progressos foram lentos e suas aplicações limitadas;
mas quando estas duas ciências se uniram,
elas deram uma à outra poder e força
e caminharam juntas em direção à perfeição.

Lagrange

Objetivos

Nesta aula você conhecerá um pouco da História do surgimento do Cálculo;

Verá também uma descrição das principais idéias matemáticas que você aprenderá ao longo desta disciplina.

Newton e Leibniz – dois gênios e uma idéia!

Anni mirabiles

Os anos de 1666 e 1667 foram particularmente difíceis para os ingleses. Uma terrível peste, a peste bubônica, abateu-se sobre a Inglaterra, forçando, inclusive, o fechamento temporário das universidades de Oxford e Cambridge.

Esse período de recolhimento foi, no entanto, propício para as ciências. Um estudante de Cambridge retornou para a casa de seus avós, que ficava na zona rural de Woolsthorpe, Licolnshire. Esse jovem de 24 anos produziu então uma série de resultados científicos que mudariam, de maneira dramática e definitiva, o panorama das ciências.

O nome desse jovem era Isaac Newton e entre suas descobertas estava o que nós chamamos de Cálculo. Esta é a ferramenta que você aprendeu a manipular durante seu estudo de Cálculo I e que estenderá e aprofundará ao longo do Cálculo II.



Isaac Newton (1642 - 1727). Outras descobertas feitas por Newton neste período, que ficou conhecido como *anni mirabiles*, foram uma generalização do Teorema Binomial, a Teoria da Gravitação e a análise da natureza da luz.

Você deve saber que a descoberta de Newton ocorreu num contexto científico favorável. Gerações e gerações de matemáticos haviam preparado o terreno e a comunidade científica estava madura o suficiente para acolher o surgimento da teoria.

Matemáticos de uma geração anterior à de Newton, como Blaise Pascal (1623-1662) – aquele, do Triângulo de Pascal –, Pierre de Fermat (1601-1665) – que todos conhecem pelo seu Teorema de Fermat –, e René Descartes (1596-1650) – que nos legou a Geometria Analítica, bem como a frase “Penso, logo existo!” – chegaram muito próximos da descoberta. O Cálculo estava, por assim dizer, no ar! Isto não diminui em nada o mérito de Newton, decididamente um dos maiores gênios da humanidade. Newton chamou sua teoria de Método das Fluxões.

Leibniz entra em cena



Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) nasceu em Leipzig, Alemanha. Além do Cálculo, Leibniz deu grandes contribuições no campo da lógica.

Para saber mais sobre este tema, você pode ler o capítulo “Newton e Leibniz – Um Choque de Titãs”, do livro *Grandes Debates da Ciência*, de Hal Hellman, Editora Unesp, 1998.

Alguns anos depois, entre 1673 e 1676, um outro gênio produziu a sua versão do Cálculo. Este foi Gottfried Wilhelm Leibniz, que começara sua carreira como diplomata. Ele fora atraído para a Matemática graças à influência de Cristian Huygens, a quem conhecera em Paris enquanto estava em uma de suas missões diplomáticas.

Newton e Leibniz, bem como os seus seguidores, se envolveram em uma polêmica sobre a originalidade da descoberta do Cálculo. Isto causou grande desgaste pessoal a cada um deles. A verdade é que as suas abordagens foram diferentes, levados por motivações outras. Newton apresenta o seu Método das Fluxões como uma ferramenta que lhe permite aprofundar seus conhecimentos dos fenômenos físicos. Isto é, uma visão cinemática do Cálculo: a derivada vista como uma taxa de variação. Ele considerava x e y variando, fluindo, em função do tempo. Leibniz, por sua vez, considerava x e y variando sobre uma seqüência de valores infinitamente próximos. Ele introduziu dx e dy como sendo as diferenças entre os valores nesta seqüência.

O cálculo diferencial e integral

Newton via a integração como um problema de encontrar os x e y de uma determinada fluxão. Isto é, encontrar o deslocamento de uma dada velocidade. Portanto, para ele, a integração era, naturalmente, o processo reverso da diferenciação. Leibniz via a integração como uma soma, no estilo que fizeram, antes dele, Arquimedes, Cavalieri e Roberval. Leibniz foi feliz em

utilizar os ‘infinitésimos’ dx e dy onde Newton usou x' e y' , ou seja, velocidades. Leibniz usava a palavra ‘mônada’ para indicar algo tão simples que não tem partes. Nenhum deles considerava o que nós chamamos de funções, pois este conceito só foi introduzido muitos séculos depois. No entanto, ambos, definitivamente, pensavam em termos de gráficos. De qualquer forma, eles estavam travando uma luta com o infinito, no caso, o infinitamente pequeno.

Apesar de Newton ter desenvolvido sua teoria primeiro, coube a Leibniz o mérito de ter publicado a sua versão, em 1684, introduzindo o termo *calculus summatorius*, e divulgando assim suas idéias. Leibniz dava muita importância à notação, no que estava absolutamente certo.

Leibniz foi quem introduziu os símbolos matemáticos d e \int , estabelecendo, por volta de 1675, a notação

$$\int x dx = \frac{x^2}{2},$$

exatamente como nós o fazemos até hoje.

E então o Cálculo ganhou o mundo...

A comunidade matemática do continente europeu acatou e aprofundou rapidamente suas descobertas. Os irmãos Jacob e Johann Bernoulli, membros de uma grande família de matemáticos, passaram a dar as suas próprias contribuições a partir de 1687. O termo cálculo integral foi introduzido por sugestão de Jacob Bernoulli, em 1690.

O primeiro livro de Cálculo surgiu em 1696, chamado *Analyse des infinitement petit pour l'intelligence des lignes courbes* e foi escrito por Guillaume François Antoine Marquis de l'Hôpital (1661 - 1704), sob influência de Johann Bernoulli, que era seu professor.

O advento do Cálculo muniu os matemáticos de uma ferramenta poderosa e versátil. O seu completo desenvolvimento envolveu diversas gerações de matemáticos. O Cálculo resolve com relativa facilidade problemas inacessíveis para quem o desconhece. Basta pensar nos vários problemas de otimização, que você agora sabe resolver, usando basicamente o princípio geral de ‘derivar e igualar a zero’.

O Cálculo II, quais serão as novidades?

A disciplina que você começa a cursar agora, o Cálculo II, dará continuidade a essa maravilhosa jornada de descobertas iniciada no Cálculo I.

Você agora já sabe derivar funções de uma variável real, usando a ‘Regra da Cadeia’, sabe usar estes conhecimentos para interpretar se uma dada função é crescente sobre um certo intervalo, se tem uma determinada concavidade em outro. Você também aprendeu o significado do símbolo

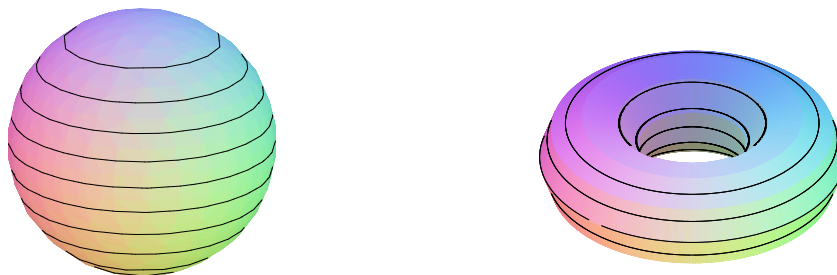
$$\int_a^b f(x) dx,$$

que pode ser interpretado como uma ‘área’.

A teoria de integração que você aprendeu culminou em um teorema muito importante. Essa importância está estampada em seu próprio nome: o Teorema Fundamental do Cálculo.

O programa de nossa disciplina começa neste ponto, introduzindo as técnicas de integração. Você aprenderá a calcular as primitivas de vários tipos de funções. Este conteúdo é clássico e de caráter bem aplicado. Ele lhe permitirá resolver vários problemas interessantes, aumentando assim seu poder computacional.

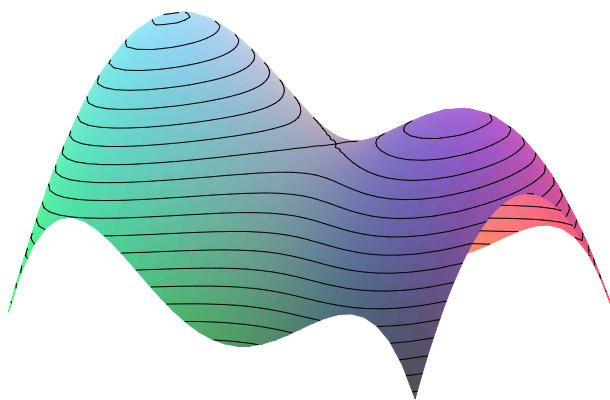
Por exemplo, você poderá calcular o volume de vários sólidos de revolução, bem como a área das superfícies que os recobre. A esfera e o toro são exemplos de objetos desse tipo.



Depois você aprenderá a teoria das funções de duas ou mais variáveis. Isto é, você verá conceitos como limites, continuidade e diferenciabilidade, que você já conhece para as funções de uma variável, aplicados a estas funções, de mais do que uma variável.

O que você já sabe lhe ajudará a fazer rápidos progressos. No entanto, verá que a nova situação nos reserva algumas surpresas. Por exemplo,

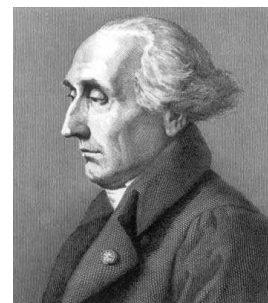
enquanto o gráfico de uma função de uma variável é uma curva no plano, o gráfico de uma função de duas variáveis é uma superfície no espaço tridimensional. Em particular, as curvas de nível desta superfície lhe darão boas informações sobre a função. Veja neste exemplo como isto parece uma paisagem familiar:



Essa parte do conteúdo da nossa disciplina tem um forte apelo geométrico. Será um bom momento para você aprofundar seus conhecimentos de geometria espacial e apreciar a beleza e a importância destes conceitos.

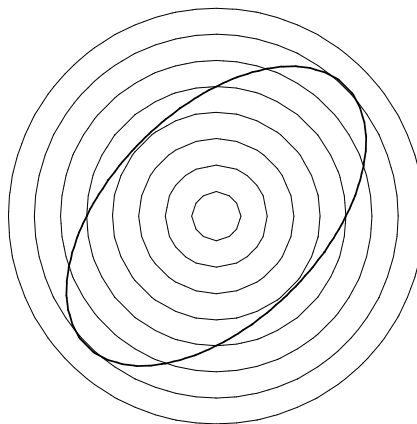
Você aprenderá a calcular o gradiente de funções de várias variáveis e descobrirá a sua relação com a derivada direcional. Sim, agora você tem mais do que duas direções. Estas ferramentas matemáticas são muito interessantes. Por exemplo, suponha que você esteja sobre uma chapa metálica e num ponto onde a temperatura esteja muito alta. Você quer sair dali e dirigir-se para um ponto onde a temperatura esteja mais amena. Você saca de seu ‘calculador de derivadas direcionais’ e o aplica à função temperatura. Ele lhe indicará a taxa de variação da temperatura em cada direção para que você o aponte. Daí é só escolher aquela direção onde esta taxa é a menor. Caso você esteja realmente com pressa, basta seguir a direção oposta do gradiente, pois este aponta para a direção de crescimento máximo da função.

A última etapa de nossa jornada será o estudo de uma teoria muito bonita, chamada Multiplicadores de Lagrange. Considere a seguinte situação: você saiu de sua nave espacial para testar sua nova roupa de astronauta e percebeu que está gravitando dentro da órbita elíptica de um planeta muito aprazível. Como você já está no espaço faz muitos meses, a idéia de um mergulho numa praia daquele planetinha azul é simplesmente irresistível. Você, que agora está cheio de pressa, quer descobrir qual é o ponto da órbita do planeta que está mais próximo de onde você está. Num piscar de olhos



Joseph-Louis Lagrange (1736 - 1813), matemático nascido em Turim, passou parte de sua vida em Berlim, na Academia de Ciências desta cidade. Lagrange dedicou-se à Astronomia, à mecânica, à dinâmica, à mecânica dos fluidos, à probabilidade e aos fundamentos do Cálculo. Ele dedicou-se também à Teoria de Números e foi quem mostrou o seguinte e belíssimo teorema: *Todo número inteiro positivo é a soma de quatro quadrados.* Por exemplo, $7 = 4 + 1 + 1 + 1$. Em 1787, ele mudou-se para Paris, onde passou o resto de sua vida, sempre se dedicando à pesquisa científica.

você emite ondas de luz circulares usando seu canhão de laser e prepara-se para a observação. É claro que o ponto da órbita que for iluminado primeiro será o ponto mais próximo. Caso dois pontos sejam iluminados simultaneamente, em que tipo de ponto você estaria?



Bem, como você pode ver, há muito o que descobrir e aprender. Com dedicação e paciência você aumentará seus conhecimentos e ampliará seus horizontes.

Boa jornada!

Exercícios

Faça uma revisão da teoria de integração que você aprendeu no Cálculo I. Reveja especialmente o Teorema Fundamental do Cálculo. Este teorema deve sua importância a duas coisas: ao mesmo tempo que desempenha um papel crucial na teoria das funções, ele se dá a muitas aplicações.

A vertente teórica do Teorema Fundamental do Cálculo é a seguinte: ele indica condições suficientes para que uma dada função seja a função derivada de uma outra. Isto é, ele diz que toda função contínua f , definida em um intervalo I , admite uma primitiva. Ou seja, se $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, então existe uma função diferenciável $F : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$F'(x) = f(x), \forall x \in I.$$

Sob este ponto de vista, ele é um teorema existencial. Garante a existência de alguma coisa.

Mas, na verdade, podemos dizer mais. Podemos dizer que se f e F são tais como o teorema afirma, e o intervalo $[a, b] \subset I$, então

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Esta será a nossa grande motivação para a primeira etapa de nossa disciplina. Encontrar F permite calcular, com facilidade, a integral definida. Mas, voltaremos a falar neste tema na próxima aula.

1. Use o Teorema Fundamental do Cálculo para mostrar que a função $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$ admite uma primitiva, digamos $F(x)$, tal que $F(0) = 0$. Por que podemos afirmar que a função $F(x)$ é crescente em todo seu domínio?
2. Use o Teorema Fundamental do Cálculo para calcular as seguintes integrais definidas:

a) $\int_{-2}^1 (x^2 - 3) dx.$ b) $\int_0^\pi \cos x dx.$ c) $\int_{-\pi}^\pi \operatorname{sen} x dx.$

d) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx.$ e) $\int_0^1 e^x dx.$ f) $\int_1^{e^2} \frac{1}{x} dx.$

3. Use o Teorema Fundamental do Cálculo para garantir a existência de uma função $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(1) = 0$ e $\forall x \in (0, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{x}.$$

Note que neste caso não podemos usar a fórmula

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{(n+1)} + C.$$

Você reconhece esta função?

4. Calcule a derivada das seguintes funções:

a) $f(x) = \int_0^{x^2} \cos(e^t) dt.$ b) $g(x) = \int_{2x}^1 e^{t^2} dt.$

Aula 17 – Técnicas de Integração – Substituição Simples.

Objetivo

Mostrar como usar a técnica de integração chamada ‘substituição simples’.

Pré-requisitos:

- Você usará a ‘Regra da Cadeia’, que serve para derivar funções compostas.
- Integrais de funções simples.
- Propriedades básicas das integrais.
- Diferencial de uma função.

Motivação - O Teorema Fundamental, mais uma vez...

Vamos começar com uma pergunta que pode parecer uma simples ‘pegadinha’.

Qual é a diferença entre estes dois objetos matemáticos:

$$\int \operatorname{sen} x \, dx \quad \text{e} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x \, dx ?$$

Uma resposta simples e direta seria: a diferença está nos limites de integração, 0 e $\pi/2$.

Muito bem, mas podemos dizer mais. O símbolo da esquerda representa uma família de funções, enquanto o símbolo da direita representa um número. Mais precisamente,

$$\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + C \quad \text{e} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x \, dx = 1.$$

Para cada $C \in \mathbb{R}$, a função definida por $F(x) = -\cos x + C$ é uma primitiva de $f(x) = \operatorname{sen} x$. Realmente, $\frac{dF}{dx}(x) = (-\cos x + C)' = \operatorname{sen} x = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

O número $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x \, dx = 1$ pode ser interpretado como a área da região limitada pelo gráfico da função $f(x) = \operatorname{sen} x$, pelo eixo Ox e sobre o intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$.

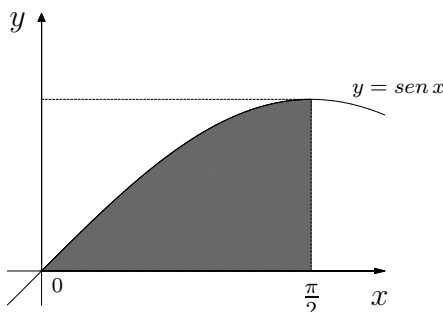


Figura 17.1

O termo ‘antiderivada’ também é usado como sinônimo de primitiva.

Compreender estas duas diferentes abordagens da integral consiste em ter uma visão geral da teoria de integração. O Teorema Fundamental do Cálculo é a ponte que faz a conexão entre estas duas perspectivas, e nisso consiste, em grande parte, a sua importância.

Como já observamos, no fim da aula anterior, o Teorema Fundamental nos permite usar a integral indefinida, $\int f(x) dx$, para calcular a integral definida, $\int_a^b f(x) dx$. Isto é, se soubermos que $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, então temos

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

No exemplo que estamos usando,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen } x dx = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\cos(0)\right) = 1.$$

Eis aqui mais um exemplo:

Exemplo 17.1

Sabemos que $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$. Portanto, $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$. Isso significa que o trecho da parábola $y = x^2$, inscrito no quadrado de vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ e $(1, 0)$, divide-o em duas partes. A parte de baixo tem área $\frac{1}{3}$ e a outra parte tem área $\frac{2}{3}$.

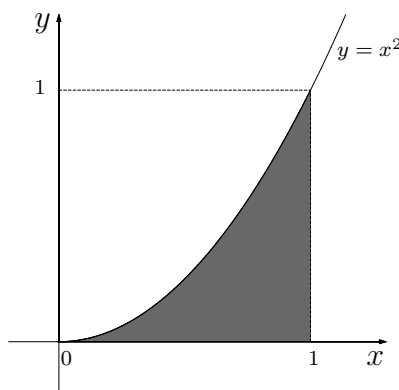


Figura 17.2

Agora que você está motivado para conhecer as técnicas de integração, vamos conhecer a primeira delas: a substituição simples.

Arquimedes obteve esse resultado há aproximadamente 2200 anos usando uma abordagem um pouco diferente.

Onde começamos?

Dominar as técnicas de integração demanda atenção e muita prática. Além disso, certos ‘princípios gerais’ certamente ajudam. O da aula de hoje é:

Integrar, no sentido de encontrar a família de primitivas de uma função, é o processo inverso da derivação.

A Regra da Cadeia e a Antiderivação

Exemplo 17.2

Vamos começar com a pergunta: $\int \sin 3x \, dx$? Isto é, quais são as funções $F(x)$ tais que $F'(x) = \sin 3x$?

Que tal olharmos antes para o seguinte exemplo:

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C.$$

Com esse exemplo mais simples em mente, vamos experimentar o ingrediente $G(x) = -\cos 3x$ para obter uma primitiva de $f(x) = \sin 3x$.

Estamos próximos da resposta, mas ainda falta alguma coisa. Observe que, quando derivamos a função $G(x)$, usamos a Regra da Cadeia e obtemos

$$G'(x) = 3 \sin 3x.$$

Isto não é a esperada $f(x) = \sin 3x$. A diferença, no entanto, é apenas o produto por uma constante, o número 3. Nossa resposta necessita de um pequeno ajuste que pode ser feito devido à seguinte propriedade das integrais:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \int \lambda f(x) \, dx = \lambda \int f(x) \, dx.$$

Ótimo! Vamos usar $F(x) = \frac{G(x)}{3}$ e temos, então, nossa resposta:

$$\int \sin 3x \, dx = -\frac{\cos 3x}{3} + C.$$

Vamos fazer o ‘teste da derivada’:

Se $F(x) = -\frac{\cos 3x}{3} + c$, então $F'(x) = -\frac{1}{3} \cdot (-\sin 3x) \cdot 3 = \sin 3x$.

Excelente!

A Regra da Cadeia nos diz como derivar uma função composta por outras duas funções:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Nesse exemplo está a idéia básica da técnica de substituição simples. Usamos a propriedade de integrais para reescrever o integrando de maneira adequada a fim de podermos integrar. Usamos o fato de que a integral indefinida é o processo inverso da derivação e usamos a Regra da Cadeia. Resumido, o nosso exemplo fica:

$$\begin{aligned}\int \sin 3x \, dx &= \frac{1}{3} \cdot 3 \int \sin 3x \, dx = \\ &= \frac{1}{3} \int 3 \cdot \sin 3x \, dx = \\ &= \frac{1}{3} \int \sin 3x \, 3 \, dx = \\ &= -\frac{1}{3} \cos 3x + C.\end{aligned}$$

Para ter certeza de que você entendeu este exemplo, pegue lápis e papel e tente repetir o que fizemos na seguinte situação.

Exercício 1.

Usando $\int e^u \, du = e^u + C$, calcule $\int e^{5x} \, dx$. A resposta você encontrará no fim da aula.

Vamos considerar um novo exemplo:

Exemplo 17.3

Calcularemos $\int_0^{\sqrt{\pi}} x \cos x^2 \, dx$. Primeiro calculamos a integral indefinida e, depois, usaremos uma das primitivas para calcular a integral definida, aplicando o Teorema Fundamental.

Muito bem, começamos com a pergunta básica: “Qual é a integral mais simples que se ‘parece’ com aquela que eu quero integrar?”

Bem, a mais simples é: $\int \cos u \, du = \sin u + C$.

Precisamos levar em conta a Regra da Cadeia. Note que se fizermos

$$u(x) = x^2,$$

temos $u'(x) = 2x$. Prosseguindo assim, fazemos $G(x) = \sin(u(x)) = \sin x^2$. Agora,

$$G'(x) = \left(\cos(u(x)) \right) (u'(x)) = (\cos x^2)(2x) = 2x \cos x^2.$$

Novamente fazemos o ajuste da constante:

$$\begin{aligned}\int x \cos x^2 dx &= \frac{1}{2} \int 2x \cos x^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int \cos x^2 2x dx \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{sen} x^2 + C.\end{aligned}$$

Vamos comprovar a resposta:

$$\text{Se } F(x) = \frac{1}{2} \operatorname{sen} x^2 + C, \text{ então } F'(x) = \frac{1}{2} \cos x^2 \cdot 2x = \cos x^2.$$

Ótimo!

Podemos, agora, calcular a integral definida:

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \operatorname{sen} x^2 \Big|_0^{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(\pi) - \operatorname{sen}(0) = 0.$$

Uma outra maneira de abordar este cálculo é utilizar a noção de diferencial. A diferencial de $u = x^2$ é $du = 2x dx$. Assim, temos:

A diferencial da função diferenciável $y = f(x)$ é $dy = f'(x) dx$.

$$\begin{aligned}\int x \cos x^2 dx &= \frac{1}{2} \int \cos x^2 2x dx \\ &= \frac{1}{2} \int \cos u du \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{sen} u + C \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{sen} x^2 + C.\end{aligned}$$

Usando a noção de diferencial, podemos entender o nome que foi dado a essa técnica de integração: substituímos x^2 por u , levando em conta a diferencial du . Para isso, fazemos os ajustes necessários nas constantes, usando a propriedade das integrais.

Vamos a mais um exemplo:

Exemplo 17.4

Calcule a integral indefinida $\int x^3 \sqrt{x^4 + 1} dx$.

Para isso, você deve lembrar que $\int \sqrt{u} du = \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C$.

Vamos observar o nosso integrando:

$$x^3 \sqrt{x^4 + 1}.$$

CÁLCULO II

Se fizermos $u = x^4 + 1$, a diferencial será $du = 4x^3 dx$. Portanto, para fazer a substituição falta apenas o ajuste da constante no integrando. Aqui está:

$$\begin{aligned} \int x^3 \sqrt{x^4 + 1} dx &= \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot \int \sqrt{x^4 + 1} x^3 dx \\ &= \frac{1}{4} \int (x^4 + 1)^{\frac{1}{2}} 4x^3 dx \\ &= \frac{1}{4} \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{1}{6} (x^4 + 1)^{\frac{3}{2}} + C. \end{aligned}$$

Antes de prosseguirmos, que tal você experimentar um exemplo? Aqui está.

Exercício 2.

Calcule $\int (x^3 + 1)^4 x^2 dx$. Tente fazer $u = x^3 + 1$. Lembre-se: calcule a diferencial du , faça o ajuste da constante no integrando e boa sorte!

A Fórmula da Substituição Simples

Podemos resumir a nossa técnica no seguinte teorema.

Teorema 17.1

Se $u = g(x)$ é uma função diferenciável, f é uma função contínua e $\text{Im}(g) \subset \text{Dom}(f)$, então

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(u) du = F(u) + C = F(g(x)) + C,$$

onde F é uma primitiva de f .

Demonstração: A prova deste teorema é simples. Vamos usar o Teorema Fundamental do Cálculo e a Regra da Cadeia:

O cálculo

$$\frac{d}{dx}(F(g(x))) = F'(g(x)) g'(x) = f(g(x)) g'(x)$$

mostra que $F(g(x))$ é uma primitiva da função $f(g(x)) g'(x)$.

Vamos agora a uma série de exercícios para você praticar.

Exercícios

Primeiro, vamos à resolução dos dois exercícios sugeridos ao longo da aula.

Exercício 1.

Para calcular $\int e^{5x} dx$, fazemos $u = 5x$. Então, $du = 5dx$ e a nossa integral fica:

$$\begin{aligned}\int e^{5x} dx &= \frac{1}{5} \int e^{5x} 5dx \\ &= \frac{1}{5} \int e^u du \\ &= \frac{1}{5} e^u + C \\ &= \frac{1}{5} e^{5x} + C.\end{aligned}$$

Exercício 2.

No caso de $\int (x^3 + 1)^4 x^2 dx$, fazemos $u = x^3 + 1$, donde temos $du = 3x^2 dx$. Assim,

$$\begin{aligned}\int (x^3 + 1)^4 x^2 dx &= \frac{1}{3} \int (x^3 + 1)^4 3x^2 dx \\ &= \frac{1}{3} \int u^4 du \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} u^5 + C \\ &= \frac{1}{15} (x^3 + 1)^5 + C\end{aligned}$$

Agora é sua vez.

3. Calcule as seguintes integrais:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int \cos 5x dx. & \text{b) } \int x^2 \sen x^3 dx. & \text{c) } \int_{-1}^1 x e^{x^2} dx. \\ \text{d) } \int (1 + \sen x)^2 \cos x dx. & \text{e) } \int x^2 (1 - x^3)^5 dx. & \text{f) } \int_0^1 t \sqrt{1 + 3t^2} dt.\end{array}$$

Aqui estão alguns exercícios sobre o Teorema Fundamental do Cálculo. Caso você tenha dificuldades em resolvê-los, não se preocupe. Isso não atrapalhará seu desempenho no conteúdo que está sendo apresentado agora. Além disso, nós voltaremos a este tema. Até o fim deste semestre você saberá resolver cada um deles.

4. Aparentemente, se usarmos o Teorema Fundamental do Cálculo, obteremos a seguinte igualdade:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^1 = -2.$$

Como a função $f(x) = \frac{1}{x^2}$ é sempre positiva, isto é uma contradição. Você saberia dizer o que está errado?

5. Mostre que as funções $f(x) = \sin^2 x$ e $g(x) = -\cos^2 x$ são primitivas de uma mesma função. Como isto é possível?
6. Seja $f(t) = |t|$ e $F(x) = \int_{-1}^x f(t)dt$. Calcule $F(0)$, $F(1)$ e $F(-2)$. Mostre que F é uma função estritamente crescente. F é inversível? Sobre qual domínio?

Comentários Finais

Nesta aula, você aprendeu os rudimentos da técnica de integração chamada ‘substituição simples’. Deve ter notado como o que já aprendeu no seu primeiro curso de cálculo é importante, especialmente a ‘Regra da Cadeia’. Caso tenha compreendido tudo, ótimo. Mas, não desanime se você sentiu um pouco de dificuldade, afinal de contas, integrar é um pouco mais ‘difícil’ do que derivar. Com um pouco mais de tempo e prática você vai dominar, também, este conteúdo. De qualquer forma, insista e releia os exemplos. Para terminar, aqui está uma série de lembretes para fazer bom uso da substituição:

- encontre uma integral ‘simples’ que fará o papel de $\int f(u) du$;
- faça os eventuais ajustes das constantes para substituir $g'(x) dx$ por du ;
- após integrar, não esqueça de desfazer a substituição, dando a resposta em termos da variável original.

Na próxima aula voltaremos a este tema.

Aula 18 – Técnicas de Integração – Substituição Simples - Continuação

Objetivos

Nesta aula você aprenderá a usar a substituição simples em alguns casos especiais;

Aprenderá a fazer mudança de variáveis em integrais definidas.

Na aula anterior, você aprendeu a usar a substituição simples para encontrar primitivas de certas funções. A idéia era substituir uma parte do integrando por uma ‘nova variável’, geralmente denotada por u , transformando a integral dada em uma integral conhecida. Aqui está mais um exemplo.

Exemplo 18.1

Para integrar $\int \frac{2x}{1+x^2} dx$ fazemos $\begin{cases} u = 1+x^2 \\ du = 2x dx. \end{cases}$

Esta substituição nos leva à integral simples

$$\int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C.$$

Completando o exemplo, devemos escrever a resposta em termos da variável original:

$$\int \frac{2x}{1+x^2} dx = \ln(1+x^2) + C.$$

No entanto, em certas situações, é preciso um pouco de esforço para descobrir qual parte do integrando devemos escolher para substituir. Nem sempre a substituição estará tão evidente. Nestas ocasiões você precisará experimentar e contar com uma bagagem de exemplos. Precisarás lembrar-se das derivadas e das integrais das principais funções. Quanto maior for seu ‘repertório’ de integrais simples, maior será sua facilidade em lidar com as substituições. Para que você perceba melhor o que isso quer dizer, vamos ao próximo exemplo.

Note que, como $\forall x \in \mathbb{R}$, $1+x^2 > 0$, podemos escrever $\ln(1+x^2)$ no lugar de $\ln|1+x^2|$.

Exemplo 18.2

Calcule $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x \, dx$.

Vamos calcular uma primitiva da função $\operatorname{tg} x$ e, depois, calcular a integral definida.

Num primeiro exame, não sabemos o que substituir. O integrando é formado por um único pedaço: $\operatorname{tg} x$. Nada de desistir! A definição da tangente pode ajudar. Lembre-se,

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x}.$$

Nosso problema transformou-se. Isto é,

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} \, dx.$$

Agora estamos em condições de fazer a substituição $\begin{cases} u = \operatorname{cos} x \\ du = -\operatorname{sen} x \, dx. \end{cases}$

Ótimo! Aqui vamos nós:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg} x \, dx &= \int \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} \, dx = \\ &= - \int \frac{-\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} \, dx = \\ &= - \int \frac{du}{u} = \\ &= -\ln |u| + C = \end{aligned}$$

$$= -\ln |\operatorname{cos} x| + C = \ln |\sec x| + C.$$

Aqui vale a pena fazer o ‘teste da derivada’:

$$(\ln |\sec x|)' = \frac{1}{\sec x} \cdot (\sec x)' = \frac{1}{\sec x} \cdot (\sec x \cdot \operatorname{tg} x) = \operatorname{tg} x.$$

Isso mostra que encontramos a resposta correta.

Muito bem! Podemos, agora, calcular a derivada definida:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x \, dx &= \ln |\sec x| \Big|_0^{\pi/4} = \ln |\sec(\pi/4)| - \ln |\sec(0)| = \\ &= \ln \sqrt{2} - \ln 1 = \ln \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Está na hora de você experimentar. Aqui está uma boa oportunidade:

Aqui estamos usando a seguinte propriedade da função logaritmo: $-\ln x = \ln x^{-1} = \ln \frac{1}{x}$ e o fato de que $\sec x = \frac{1}{\operatorname{cos} x}$.

Exemplo 18.3

Calcule $\int_0^{\ln \sqrt{3}} \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx$. Você já sabe, a solução estará disponível no fim da aula, mas você vai tentar, não vai? Aqui está uma dica. Faça $u = e^x$.

Substituição e as Integrais Definidas

No exemplo 18.2, queríamos calcular uma integral definida. Primeiro calculamos a integral indefinida, usando a substituição adequada, e, depois, usamos uma das primitivas para, com o Teorema Fundamental do Cálculo, calcular a integral definida. Há uma outra maneira, mais direta, de efetuar este cálculo. A idéia é a seguinte: ao fazermos a substituição, estamos fazendo uma mudança de variável. Basta fazer o correspondente ajuste nos limites de integração. O próximo teorema indica como isso deve ser feito.

Teorema 18.1

Seja g uma função de classe C^1 e f uma função contínua. Suponhamos que $[a, b] \subset \text{Dom}(g)$ e $g([a, b]) \subset \text{Dom}(f)$. Então temos

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du.$$

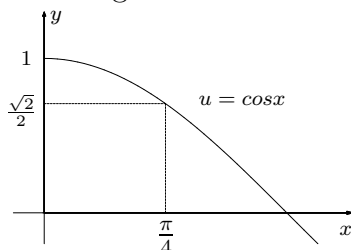
A prova deste teorema não é difícil. Antes de apresentá-la, vamos ver como usar o teorema, aplicando-o num exemplo específico.

Exemplo 18.4

(Revisitado) Queremos calcular a integral definida

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{tg } x dx = - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-\text{sen } x}{\cos x} dx.$$

Vamos fazer a substituição $\begin{cases} u = \cos x \\ du = -\text{sen } x dx \end{cases}$. Precisamos considerar os limites de integração. Se $u = \cos x$, enquanto x varia de 0 até $\frac{\pi}{4}$, u varia de 1 até $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Veja no gráfico a seguir.



Lembre-se de que uma função g é de classe C^1 quando é diferenciável e, além disso, a sua função derivada g' é uma função contínua.

Para usar a fórmula dada pelo teorema, fazemos

$$\cos(0) = 1 \quad \text{e} \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

e temos

$$\begin{aligned} -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} x \, dx &= -\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{u} \, du \\ &= -\left(\ln \frac{\sqrt{2}}{2} - \ln 1\right) \\ &= \ln \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Você verá como a demonstração do teorema 18.1 é fácil.

Demonstração: Como a função f é contínua, o Teorema Fundamental do Cálculo nos diz que ela admite uma primitiva. Seja F esta primitiva. Isto é, $\forall x \in \operatorname{Dom}(f)$, $F'(x) = f(x)$.

O Teorema Fundamental nos diz ainda que

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u) \, du = F(g(b)) - F(g(a)). \quad (18.1.1)$$

Por outro lado, a Regra da Cadeia nos dá

$$(F(g(x)))' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x).$$

Observe que a função g é de classe C^1 . Isto quer dizer que a função g' é uma função contínua. Assim, a função $y(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$ é uma função contínua e, portanto, satisfaz a hipótese do Teorema Fundamental. Temos assim a seguinte igualdade:

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) \, dx = F(g(b)) - F(g(a)). \quad (18.1.2)$$

Segue de (18.1.1) e (18.1.2) que

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) \, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) \, du.$$

Vejamos mais um exemplo.

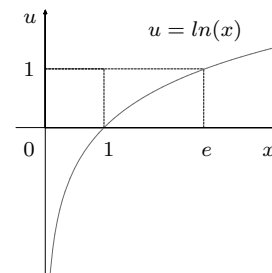
Exemplo 18.5

Calcule $\int_1^e \frac{\ln x}{x} \, dx$. Esta integral parece difícil, mas não é. Pelo menos, não muito. Vejamos. O primeiro passo é descobrir qual substituição podemos

fazer. Bom, nosso integrando é composto, digamos assim, de dois pedaços: $\ln x$ e $\frac{1}{x}$. Ora, como a derivada do primeiro pedaço é o segundo, já temos uma escolha $\begin{cases} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x} dx \end{cases}$.

Consideremos agora a mudança de limites de integração: Enquanto x varia de 1 até e , u varia de $\ln 1 = 0$ até $\ln e = 1$.

$$\begin{cases} a = 1 \implies g(a) = \ln 1 = 0 \\ b = e \implies g(b) = \ln e = 1 \end{cases}$$



Assim, podemos efetuar nosso cálculo:

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_0^1 u du = \frac{u^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Um caso especial ...

E, para terminarmos com esta técnica, veremos um caso especial.

Exemplo 18.6

Calcule $\int t \sqrt{1+t} dt$.

Se seguirmos o padrão do exemplo 17.4, com radical, colocaremos $u = 1 + t$. Neste caso, $du = dt$. Assim, temos:

$$\sqrt{1+t} = (1+t)^{\frac{1}{2}} = u^{\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad dt = du.$$

Observamos que há um ‘pedaço’ do integrando sobrando: t . Não podemos escrever

$$\int t u^{\frac{1}{2}} du,$$

pois, ou escrevemos todo o integrando com a variável t , ou escrevemos todo o integrando com a variável u . Para escrevermos o integrando todo em termos da variável u , observamos que, se $u = 1 + t$, então $t = u - 1$.

Assim, esta substituição nos dá:

$$\begin{aligned}
 \int t \sqrt{1+t} dt &= \int t(1+t)^{\frac{1}{2}} dt = \\
 &= \int (u-1) u^{\frac{1}{2}} du = \\
 &= \int (u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}}) du = \\
 &= \int u^{\frac{3}{2}} du - \int u^{\frac{1}{2}} du = \\
 &= \frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C = \\
 &= \frac{2}{5} (1+t)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} (1+t)^{\frac{3}{2}} + C.
 \end{aligned}$$

Fazendo o ‘teste da derivada’, temos:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} \left(\frac{2}{5} (1+t)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} (1+t)^{\frac{3}{2}} \right) &= (1+t)^{\frac{5}{2}-1} - (1+t)^{\frac{3}{2}-1} = \\
 &= (1+t)^{\frac{3}{2}} - (1+t)^{\frac{1}{2}} = \\
 &= (1+t)(1+t)^{\frac{1}{2}} - (1+t)^{\frac{1}{2}} = \\
 &= [1+t-1](1+t)^{\frac{1}{2}} = \\
 &= t\sqrt{1+t}.
 \end{aligned}$$

Isso comprova que $F(t) = \frac{2}{5}(1+t)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}$ é uma primitiva da função $f(t) = t\sqrt{1+t}$.

Assim, terminamos a aula, sugerindo que você pratique bastante para assimilar bem essa técnica. A próxima aula será dedicada a uma outra técnica de integração, chamada ‘integração por partes’. Até lá!

Exercícios

1. Calcule $\int_0^{\ln \sqrt{3}} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$.

Solução: Aqui você deve lembrar-se de que $e^{2x} = (e^x)^2$ e que a derivada da função $y = \arctg x$ é $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$.

Com isso em vista, você pode fazer $\begin{cases} u = e^x \\ du = e^x dx. \end{cases}$ e obter

$$\int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx = \int \frac{1}{1 + u^2} du.$$

Além disso, temos a seguinte mudança de limites de integração:

$$\begin{cases} a = 0 & \implies g(a) = e^1 = 1 \\ b = \ln \sqrt{3} & \implies g(b) = e^{\ln \sqrt{3}} = \sqrt{3}. \end{cases}$$

Assim,

$$\int_0^{\ln \sqrt{3}} \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1 + u^2} du = \operatorname{arctg} u \Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}.$$

2. Calcule as seguintes integrais indefinidas:

a) $\int \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx.$ b) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx.$ c) $\int \frac{x + 1}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx.$

d) $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx.$ e) $\int \sin^5 x \cos x dx.$ f) $\int x^2 \sqrt{2 + x} dx.$

g) $\int t(1 - t)^{3/2} dt.$ h) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1 + x)} dx.$ i) $\int \frac{x \cos \sqrt{1 + x^2}}{\sqrt{1 + x^2}} dx.$

3. Calcule as seguintes integrais definidas:

a) $\int_0^{\sqrt{\pi/2}} t \cos t^2 dt.$ b) $\int_0^6 x \sqrt{36 - x^2} dx.$

c) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \cotg \theta d\theta.$ d) $\int_0^4 \frac{x}{(9 + x^2)^{3/2}} dx.$

e) $\int_1^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^3 - 1}} dx.$

4. Use as seguintes fórmulas dadas para calcular as integrais a seguir.

- $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$
- $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} + C, |x| < a.$
- $\int \frac{1}{x \sqrt{x^2 - a^2}} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \left| \frac{x}{a} \right| + C, |x| > a.$

CÁLCULO II

a) $\int \frac{1}{1+4x^2} dx.$

b) $\int_0^2 \frac{1}{x^2+4} dx.$

c) $\int \frac{x^2}{1+x^6} dx.$

d) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx.$

e) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{4-\sin^2 x}} dx.$

f) $\int \frac{1}{e^x \sqrt{1-e^{-2x}}} dx.$

g) $\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}} dx.$

h) $\int_{\frac{4\sqrt{3}}{3}}^4 \frac{1}{x \sqrt{x^2-4}} dx.$

Aula 19 – Técnicas de Integração – Integração por Partes

Dividir para conquistar!

Júlio César

Objetivo

Aprender a técnica de integração por partes.

Nas duas últimas aulas, você aprendeu a técnica de integração chamada substituição simples. Agora você aprenderá uma técnica que lhe permitirá integrar muitas outras funções. Veja como ela difere da técnica anterior.

Vamos considerar as seguintes integrais:

$$I_1 = \int x e^{x^2} dx \quad \text{e} \quad I_2 = \int x e^x dx.$$

Você já sabe resolver a primeira delas. A substituição $\begin{cases} u = x^2 \\ du = 2x dx \end{cases}$ leva à resposta

$$I_1 = \int x e^{x^2} dx = \frac{e^{x^2}}{2} + C.$$

Apesar de muito parecida com I_1 , a integral I_2 não será resolvida facilmente se você tentar algum tipo de substituição. Essa integral demanda um outro tipo de técnica para resolvê-la, chamada de *integração por partes*.

Você deve estar lembrado que derivamos a substituição simples aplicando o processo de antiderivação na regra da cadeia. Dessa vez faremos o mesmo com a fórmula da derivada do produto de duas funções para obter a integração por partes. A fórmula da derivada do produto foi descoberta por Leibniz.

Se f e g são funções diferenciáveis, então $\forall x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$,

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Ela nos diz, por exemplo, que se $y = x e^x$, então

$$\frac{dy}{dx} = e^x + x e^x.$$

CÁLCULO II

Num manuscrito de Leibniz, datado de 11 de julho de 1677 encontra-se a fórmula

$$d(xy) = xdy + ydx.$$

Ele escreveu o seguinte:

$d(xy) = (x + dx)(y + dy) - xy = xdy + ydx + dxdy$ e observou que “a omissão da quantidade $dxdy$, que é infinitamente pequena em comparação com o resto, pois estamos supondo que dx e dy são infinitamente pequenos, nos dará $xdy + ydx$ ”.

Além disso, podemos usá-la para expressar a diferencial de um produto de funções.

Suponhamos que $u = f(x)$ e $v = g(x)$ sejam duas funções de classe C^1 e seja $z = uv$. Então

$$\begin{cases} du = f'(x) dx \\ dv = g'(x) dx \end{cases} \text{ e}$$

$$\begin{aligned} dz &= (f(x) \cdot g(x))' dx = \\ &= (f'(x)g(x) + f(x)g'(x)) dx = \\ &= vdu + udv. \end{aligned}$$

Como $\int dz = uv + C$, podemos reescrever a fórmula $dz = vdu + udv$ da seguinte maneira: $udv = dz - vdu$, e integrá-la, obtendo a fórmula de integração por partes:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Isto é, podemos escrever as primitivas de udv em termos de uv e em termos das primitivas de vdu .

Vamos a um exemplo.

Exemplo 19.1

Vamos integrar $I_2 = \int x e^x dx$. Você já sabe que se $\begin{cases} u = x \\ v = e^x, \end{cases}$ então $z = uv = x e^x$ e

$$dz = e^x dx + x e^x dx.$$

Isso nos dá $x e^x dx = dz - e^x dx$ e

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx.$$

Como sabemos que $\int e^x dx = e^x + C_1$, concluímos que

$$I_2 = \int x e^x dx = x e^x - e^x + C = e^x(x - 1) + C.$$

Realmente, se $F(x) = e^x(x - 1)$, então

$$F'(x) = e^x(x - 1) + e^x = x e^x,$$

como esperávamos.

Aqui estamos trocando $-C_1$ por C .

Quando e como usar a integração por partes?

Ao aprender uma nova técnica, pode acontecer de você ser tentado a usá-la de maneira indiscriminada. A questão é: dada uma integral, como descobrir qual é a técnica mais adequada para resolvê-la?

Aqui estão alguns lembretes que podem ajudá-lo a fazer bom uso da integração por partes. Veja novamente a fórmula a ser usada:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

- Para aplicar a fórmula, você deverá dividir o integrando em duas partes

$$\begin{cases} u = ? \\ dv = ? \end{cases}$$
- Você precisará integrar $\int dv$ para obter uma função que fará o papel de v .
- A nova integral, $\int v du$, deve ser mais ou tão simples quanto a integral original, $\int u dv$.

Veja como essas sugestões funcionam no próximo exemplo.

Exemplo 19.2

Calcule $\int x^2 \cos x dx$.

Vamos analisar a escolha $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = \cos x dx \end{cases}$.

Note que a integral $\int dv = \int \cos x dx$ é uma integral direta. Essa escolha de u e de dv determina $\begin{cases} du = 2x dx \\ v = \sin x \end{cases}$ e a fórmula de integração por partes nos dá

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos x dx &= x^2 \sin x - \int (\sin x) 2x dx = \\ &= x^2 \sin x - \int 2x \sin x dx. \end{aligned} \quad (19.2.1)$$

A nova integral, $\int x \operatorname{sen} x \, dx$, é tecnicamente mais fácil do que a integral original, pois o grau do fator x^2 diminuiu. Aplicamos a mesma técnica nessa nova integral. Ou seja, escolhemos $\begin{cases} u = x \\ dv = \operatorname{sen} x \, dx \end{cases}$. Essa escolha nos dá $\begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$. Aplicando a fórmula de integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned} \int x \operatorname{sen} x \, dx &= -x \cos x - \int (-\cos x) \, dx = \\ &= -x \cos x + \operatorname{sen} x + C_1. \end{aligned} \quad (19.2.2)$$

Aqui fizemos $C = -2C_1$.

Reunindo (19.2.1) e (19.2.2), temos

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos x \, dx &= x^2 \operatorname{sen} x - 2[-x \cos x + \operatorname{sen} x + C_1] = \\ &= x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2 \operatorname{sen} x + C. \end{aligned}$$

Realmente, se $F(x) = (x^2 - 2) \operatorname{sen} x + 2x \cos x$, então

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2x \operatorname{sen} x + (x^2 - 2) \cos x + 2 \cos x - 2x \operatorname{sen} x = \\ &= x^2 \cos x, \end{aligned}$$

como esperávamos.

No entanto, há situações onde a integral $\int v \, du$ tem o mesmo grau de dificuldade que a integral original e, ainda assim, a técnica pode render frutos. Veja como isso acontece no próximo exemplo.

Exemplo 19.3

Calcule $\int e^x \cos x \, dx$.

Vamos escolher $\begin{cases} u = \cos x \\ dv = e^x \, dx \end{cases}$ e, portanto, $\begin{cases} du = -\operatorname{sen} x \, dx \\ v = e^x \end{cases}$.

Assim,

$$\begin{aligned} I = \int e^x \cos x \, dx &= e^x \cos x - \int e^x (-\operatorname{sen} x) \, dx = \\ &= e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x \, dx. \end{aligned} \quad (19.3.1)$$

Note que as integrais $\int e^x \cos x \, dx$ e $\int e^x \sin x \, dx$ têm o mesmo nível de dificuldade. Isto é, aparentemente, a técnica não nos deu nada de novo. Apesar disso, aplicamos novamente a técnica na nova integral.

$$\begin{cases} u = \sin x \\ dv = e^x \, dx \end{cases} \implies \begin{cases} du = \cos x \, dx \\ v = e^x. \end{cases}$$

Portanto, (19.3.1) nos dá

$$I = \int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx.$$

Note que o integrando original reapareceu no lado esquerdo da igualdade. Assim, podemos somar o integrando I aos dois lados da igualdade, obtendo:

$$2I = e^x (\cos x + \sin x) + C_1.$$

Finalmente, trocando C_1 por $2C$, obtemos a resposta esperada.

$$I = \int e^x \cos x \, dx = \frac{e^x}{2} (\cos x + \sin x) + C.$$

Você pode derivar $F(x) = \frac{e^x}{2} (\cos x + \sin x)$ para comprovar que estamos com a resposta correta.

Essa foi uma boa saída, não foi? Tente usá-la para resolver o seguinte exercício.

Exercício 1. Calcule $\int e^{2x} \sin x \, dx$.

Muito bem! Confira a sua resposta no fim da aula.

Vamos, agora, considerar mais uma situação que merece atenção, onde a integração por partes será útil. Nada como um exemplo para ilustrá-la.

Exemplo 19.4

Calcule $\int \arctg x \, dx$.

Qual é a dificuldade inicial? Você quer integrar uma função que você sabe, apenas, derivar. Ótimo, isso é um começo e, você já sabe, na maioria das vezes começar é o mais difícil.

Para usarmos a integração por partes só temos uma escolha:

$$\begin{cases} u = \arctg x \\ dv = dx \end{cases} \implies \begin{cases} du = \frac{1}{1+x^2} \, dx \\ v = x. \end{cases}$$

E, assim, temos

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx. \quad (19.4.1)$$

Aqui entra em ação a nossa conhecida substituição simples. Veja o exemplo 18.1.

$$\int \frac{x}{1+x^2} \, dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C_1. \quad (19.4.2)$$

Reunindo as duas igualdades, (19.4.1) e (19.4.2), temos

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

Não deixe de fazer o teste da derivada!

Aqui está uma oportunidade para você experimentar, antes de prosseguir para a parte final da aula.

Exercício 2. Calcule $\int \ln x \, dx$.

A solução estará mais adiante para você conferir.

Integração por partes com limites de integração

Até agora, nossos exemplos e exercícios têm sido integrais indefinidas. A integração por partes, no entanto, também se aplica, diretamente, a integrais definidas. Veja como isso funciona.

Exemplo 19.5

Calcule $\int_1^e x \ln x \, dx$.

Nesse caso, faremos a seguinte escolha de u e de dv :

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x \, dx \end{cases} \implies \begin{cases} du = \frac{1}{x} \, dx \\ v = \frac{x^2}{2}. \end{cases}$$

Essa escolha resulta no seguinte:

$$\begin{aligned} \int_1^e x \ln x \, dx &= \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x^2 \frac{1}{x} \, dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x \, dx = \\ &= \frac{e^2}{2} \ln e - \frac{1}{2} \ln 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^e = \\ &= \frac{e^2}{2} - \left[\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} \right] = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Resumindo, podemos aplicar a fórmula seguinte:

$$\int_a^b u(x)v'(x) \, dx = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x) \, dx.$$

Estamos fazendo a seguinte simplificação: $x^2 \cdot \frac{1}{x} = x$. Esta simplificação é legítima, uma vez que está implícita a condição $x > 0$. Você sabe por quê? Bem, isto é devido ao fato de estarmos lidando com a função $y = \ln x$.

Resumo

Você aprendeu a usar a integração por partes. Ela é especialmente útil nas seguintes situações:

- a) $\int [\text{polinômio em } x] \cdot \begin{cases} e^{ax} \\ \cos bx \\ \text{sen } cx \end{cases} dx;$
- b) $\int (\text{função que não sei integrar mas sei derivar}) \, dx.$

Ao escolher u e dv , lembre-se, você precisará integrar dv , antes de mais nada, para obter v e aplicar a fórmula. Além disso, a integral $\int v \, du$ não deve ser mais difícil do que $\int u \, dv$.

Muito bem, agora você domina as idéias fundamentais da integração por partes. Para aprofundá-las, é preciso praticar. Aqui estão alguns exercícios que o ajudarão a fazer isso.

Exercícios

Vejamos, inicialmente, as soluções dos exercícios sugeridos ao longo da aula.

Exercício 1. Calcule $\int e^{2x} \text{sen } x \, dx$.

Solução: Neste caso, faremos a seguinte escolha de u e de dv :

$$\begin{cases} u = e^{2x} \\ dv = \operatorname{sen} x \, dx \end{cases} \implies \begin{cases} du = 2e^{2x} \, dx \\ v = -\cos x. \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned} I &= \int e^{2x} \operatorname{sen} x \, dx = -e^{2x} \cos x - \int (-\cos x) 2e^{2x} \, dx = \\ &= -e^{2x} \cos x + 2 \int e^{2x} \cos x \, dx. \end{aligned}$$

Aplicando novamente a integração por partes, na nova integral

$$\begin{cases} u = e^{2x} \\ dv = \cos x \, dx \end{cases} \implies \begin{cases} du = 2e^{2x} \, dx \\ v = \operatorname{sen} x, \end{cases}$$

temos

$$\begin{aligned} I &= -e^{2x} \cos x + 2 \left(e^{2x} \operatorname{sen} x - 2 \int e^{2x} \operatorname{sen} x \, dx \right) \\ I &= -e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \operatorname{sen} x - 4I \\ 5I &= e^{2x} (2 \operatorname{sen} x - \cos x) + C_1. \end{aligned}$$

Portanto,

$$I = \int e^{2x} \operatorname{sen} x \, dx = \frac{e^{2x}}{5} (2 \operatorname{sen} x - \cos x) + C.$$

Exercício 2. Calcule $\int \ln x \, dx$.

Solução: A escolha de u e de dv é clara:

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \implies \begin{cases} du = \frac{1}{x} \, dx \\ v = x. \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned} \int \ln x \, dx &= x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = \\ &= x \ln x - \int dx = \\ &= x \ln x - x + C, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int \ln x \, dx = x (\ln x - 1) + C.$$

3. Calcule as seguintes integrais:

a) $\int (x + 1) \operatorname{sen} x \, dx.$

b) $\int x^2 e^{-x} \, dx.$

c) $\int e^{2x} \cos x \, dx.$

d) $\int_0^{1/2} \operatorname{arcsen} x \, dx.$

4. Calcule $\int_0^{\pi^2} \cos \sqrt{x} \, dx.$

Sugestão: faça uma substituição algébrica antes de aplicar a integração por partes:

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{x} \\ du &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx. \end{aligned}$$

Agora, o toque mais sutil:

$$dx = 2u \, du.$$

Auto-avaliação

Todos os exercícios desta aula podem ser resolvidos usando a integração por partes. É claro que alguns são mais difíceis. Caso você tenha dificuldades com alguns deles, não se preocupe, isso é natural. Releia os exemplos e você deverá encontrar uma saída.

Até a próxima aula!

Aula 20 – Técnicas de Integração – Integração de Potências e Produtos de Funções Trigonométricas

Objetivo

Aprender a integrar potências e produtos de funções trigonométricas.

Introdução

Apesar de função ser um conceito relativamente novo, as funções trigonométricas são conhecidas desde a antigüidade, na forma de tabelas.

Para resolver problemas de trigonometria elementar, aprendemos bem cedo os valores de seno e de cosseno de alguns ângulos especiais.

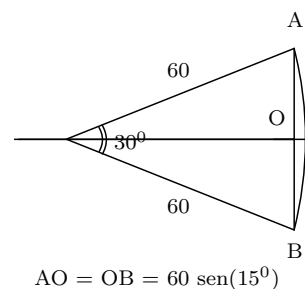
θ	$\text{sen } \theta$	$\text{cos } \theta$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

Hiparcos de Nicaea (180 - 125 a.C.) foi quem construiu as primeiras tabelas trigonométricas. Isso lhe rendeu o epíteto de “pai da trigonometria”. Hiparcos era um astrônomo, e foi ele quem organizou o conhecimento de astronomia obtido empiricamente pelos povos que viveram na Mesopotâmia, entre eles os babilônios.

A tabela trigonométrica que ele construiu associa a cada ângulo inteiro o comprimento da corda que este ângulo determina em um círculo de raio igual a 60. Por exemplo, sua tabela indicaria que

$$\text{corda}(30^\circ) = AB = 2 \times 60 \times \text{sen}(15^\circ) \approx 31,058.$$

Nesta aula, estaremos lidando, principalmente, com funções trigonométricas. É um bom momento para você fazer uma revisão desse conteúdo clássico tão importante. Rever as definições, as principais propriedades e,



principalmente, as chamadas identidades trigonométricas. Você já tem muito material sobre esses temas. Reveja-o.

Por exemplo, você deve saber que $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x}$ e $\operatorname{sec} x = \frac{1}{\operatorname{cos} x}$ são definidas para todo $x \in \mathbb{R} - \{(2k + 1)\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\}$ além disso, a identidade trigonométrica

$$\boxed{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cos}^2 x = 1} \quad (1)$$

gera

$$\boxed{\operatorname{sec}^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x.} \quad (2)$$

A integral $\int \operatorname{cos}^2 x \, dx$.

Vamos começar vendo a parte de integrais com dois exemplos típicos.

Exemplo 20.1

Calcule $I_1 = \int \operatorname{sen} x \operatorname{cos} x \, dx$ e $I_2 = \int \operatorname{cos}^2 x \, dx$.

No caso de I_1 , a substituição simples resolve o problema.

$$I_1 = \int \operatorname{sen} x \operatorname{cos} x \, dx = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + C.$$

Para integrar I_2 , podemos usar a integração por partes, como foi sugerido na aula anterior.

Fazendo $\begin{cases} u = \operatorname{cos} x \\ xdv = \operatorname{cos} x \, dx \end{cases}$ temos $\begin{cases} du = -\operatorname{sen} x \, dx \\ v = \operatorname{sen} x \end{cases}$ e obtemos

$$I_2 = \int \operatorname{cos}^2 x \, dx = \operatorname{cos} x \operatorname{sen} x + \int \operatorname{sen}^2 x \, dx.$$

Se você tentar prosseguir aplicando a integração por partes, voltará à estaca zero. Aqui é necessária uma outra coisa, a identidade trigonométrica fundamental, na forma $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \operatorname{cos}^2 x$. Assim,

$$I_2 = \int \operatorname{cos}^2 x \, dx = \operatorname{cos} x \operatorname{sen} x + \int (1 - \operatorname{cos}^2 x) \, dx$$

$$I_2 = \operatorname{cos} x \operatorname{sen} x + \int dx - I_2$$

$$2I_2 = \operatorname{cos} x \operatorname{sen} x + x + C_1$$

$$I_2 = \int \operatorname{cos}^2 x \, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{cos} x \operatorname{sen} x + C.$$

Algumas identidades trigonométricas

Você observou como foi providencial o uso da identidade trigonométrica. Realmente, elas são muito úteis. Veremos o cálculo dessa última integral feito de outra maneira. Antes, porém, precisaremos de outras identidades trigonométricas. As fórmulas

$$\boxed{\operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen} a \cos b \pm \cos a \operatorname{sen} b} \quad (3)$$

$$\boxed{\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b} \quad (4)$$

são particularmente conhecidas. Fazendo $a = b = x$ em (4), obtemos

$$\boxed{\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x.} \quad (5)$$

Usando a identidade trigonométrica fundamental (1), derivamos as seguintes fórmulas.

$$\begin{aligned} \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x &= \cos 2x \\ \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) &= \cos 2x \\ 2 \cos^2 x &= 1 + \cos 2x \end{aligned}$$

$$\boxed{\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x} \quad (6)$$

e, similarmente,

$$\boxed{\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x} \quad (7)$$

que são válidas para todo $x \in \mathbb{R}$.

Podemos usá-las para fazer as seguintes integrais:

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x \, dx &= \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx \\ &= \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + C \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^2 x \, dx &= \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x\right) dx \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + C.\end{aligned}$$

Vamos comparar as duas respostas obtidas para $\int \cos^2 x \, dx$:

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x \, dx &= \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cos x \operatorname{sen} x + C. \\ \int \cos^2 x \, dx &= \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + C.\end{aligned}$$

Qual delas é a correta? Bem, na verdade, ambas as respostas estão certas. Veja, fazendo $a = b = x$ na fórmula (3), obtemos

$$\boxed{\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x.} \quad (8)$$

Integrais do tipo $\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x \, dx$.

Vamos lidar com integrais de funções definidas pelo produto de potências das funções $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$. Na verdade, mostraremos, através de exemplos, como as técnicas que desenvolvemos até agora podem ser propriamente usadas.

Há duas situações que devemos diferenciar.

1. Pelo menos uma das duas potências é um inteiro ímpar.

$$I_1 = \int \operatorname{sen}^2 x \cos x \, dx; \quad I_2 = \int \cos^3 x \, dx.$$

2. Todas as potências são números pares.

$$I_3 = \int \cos^4 x \, dx; \quad I_4 = \int \cos^2 x \operatorname{sen}^2 x \, dx.$$

Como veremos, cada caso demanda uma estratégia diferente. As do tipo 1 são menos trabalhosas. Elas podem ser resolvidas por substituição simples. Veja como.

Exemplo 20.2

Cálculo de $I_1 = \int \sin^2 x \cos x \, dx$ e de $I_2 = \int \cos^3 x \, dx$.

Para resolver I_1 , fazemos a substituição $u = \sin x$, $du = \cos x \, dx$ e obtemos

$$I_1 = \int \sin^2 x \cos x \, dx = \int u^2 \, du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

No caso I_2 , usamos a identidade trigonométrica (1) na forma $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ para reescrever

$$\cos^3 x = (\cos^2 x)(\cos x) = (1 - \sin^2 x)(\cos x) = \cos x - \sin^2 x \cos x.$$

Assim,

$$\begin{aligned} I_2 = \int \cos^3 x \, dx &= \int (\cos x - \sin^2 x \cos x) \, dx = \\ &= \int \cos x \, dx - \int \sin^2 x \cos x \, dx = \\ &= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C. \end{aligned}$$

Assim, podemos sempre “reservar” uma cópia de $\sin x$ ou de $\cos x$ para compor o du e a identidade (1) para rearranjar a função e fazer a substituição simples.

No caso de todas as potências serem pares, essa tática não se aplica. Aqui teremos de usar as chamadas *fórmulas de redução*, que são obtidas usando a integração por partes. Antes de olharmos para fórmulas gerais, vejamos como a idéia funciona em dois casos mais simples.

Exemplo 20.3

Cálculo de $I_3 = \int \cos^4 x \, dx$ e de $I_4 = \int \cos^2 x \sin^2 x \, dx$.

Para calcular I_3 , vamos usar a integração por partes.

$$\begin{cases} u = \cos^3 x \\ dv = \cos x \, dx \end{cases} \implies \begin{cases} du = -3 \cos^2 x \sin x \, dx \\ v = \sin x. \end{cases}$$

$$\text{Assim, } \int \cos^4 x \, dx = \cos^3 x \sin x + 3 \int \cos^2 x \sin^2 x \, dx.$$

Agora, aquele truque que já usamos antes: como $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$,

temos

$$\begin{aligned}\int \cos^4 x \, dx &= \cos^3 x \operatorname{sen} x + 3 \int (\cos^2 x - \cos^4 x) \, dx \\ \int \cos^4 x \, dx &= \cos^3 x \operatorname{sen} x + 3 \int \cos^2 x \, dx - 3 \int \cos^4 x \, dx \\ 4 \int \cos^4 x \, dx &= \cos^3 x \operatorname{sen} x + 3 \int \cos^2 x \, dx \\ \int \cos^4 x \, dx &= \frac{1}{4} \cos^3 x \operatorname{sen} x + \frac{3}{4} \int \cos^2 x \, dx.\end{aligned}$$

Como já calculamos a integral $\int \cos^2 x \, dx$ anteriormente, podemos concluir:

$$\begin{aligned}\int \cos^4 x \, dx &= \frac{1}{4} \cos^3 x \operatorname{sen} x + \frac{3}{4} \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cos x \operatorname{sen} x \right) + C \\ \int \cos^4 x \, dx &= \frac{1}{4} \cos^3 x \operatorname{sen} x + \frac{3x}{8} + \frac{3}{8} \cos x \operatorname{sen} x + C.\end{aligned}$$

Você pode usar o “teste da derivada” para certificar-se de que os cálculos estão corretos.

Para calcular I_4 , basta usar a identidade trigonométrica fundamental para obter

$$I_4 = \int \cos^2 x (1 - \cos^2 x) \, dx = \int \cos^2 x \, dx - \int \cos^4 x \, dx.$$

Agora, usando os cálculos que acabamos de fazer, temos

$$I_4 = \int \cos^2 x \operatorname{sen}^2 x \, dx = \frac{x}{8} + \frac{1}{8} \cos x \operatorname{sen} x - \frac{1}{4} \cos^3 x \operatorname{sen} x + C.$$

Fórmula de redução para $\int \cos^n x \, dx$ e $\int \operatorname{sen}^n x \, dx$

Assim como usamos a integração por partes e o truque com a identidade trigonométrica fundamental para calcular $\int \cos^4 x \, dx$, podemos obter a seguinte fórmula, chamada de *fórmula de redução*:

$$\boxed{\int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + \frac{(n-1)}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx.} \quad (9)$$

Exercício 1. Use a fórmula de redução para calcular $\int \cos^3 x \, dx$.

De maneira análoga obtemos a fórmula de redução para senos:

$$\int \operatorname{sen}^n x \, dx = -\frac{1}{n} \operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + \frac{(n-1)}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} x \, dx. \quad (10)$$

Exercício 2. Use a fórmula de redução para calcular $\int \operatorname{sen}^4 x \, dx$.

Argumentos diferentes

As fórmulas (3) e (4) podem ser usadas para derivar as seguintes identidades trigonométricas:

$$\operatorname{sen} ax \cos bx = \frac{1}{2} \left(\operatorname{sen}(a-b)x + \operatorname{sen}(a+b)x \right) \quad (11)$$

$$\operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx = \frac{1}{2} \left(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x \right) \quad (12)$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2} \left(\cos(a-b)x + \cos(a+b)x \right) \quad (13)$$

Veja, por exemplo, como podemos obter a primeira delas. De (3) concluímos que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(a-b)x &= \operatorname{sen}(ax - bx) = \\ &= \operatorname{sen} ax \cos bx - \cos ax \operatorname{sen} bx \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(a+b)x &= \operatorname{sen}(ax + bx) = \\ &= \operatorname{sen} ax \cos bx + \cos ax \operatorname{sen} bx. \end{aligned}$$

Somando as duas igualdades, obtemos

$$\operatorname{sen}(a-b)x + \operatorname{sen}(a+b)x = 2 \operatorname{sen} ax \cos bx.$$

Essas fórmulas são úteis para abordar integrais que envolvam funções trigonométricas com diferentes argumentos, reduzindo-as a integrais do tipo das que estudamos. Veja o exemplo seguinte.

Exemplo 20.4

Cálculo de $\int \sen x \sen 2x \, dx$.

Usando a fórmula (12), temos

$$\begin{aligned} \int \sen x \sen 2x \, dx &= \int \frac{1}{2} \left(\cos(1-2)x - \cos(1+2)x \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \cos x \, dx - \frac{1}{2} \int \cos 3x \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \sen x - \frac{1}{6} \sen 3x + C. \end{aligned}$$

Como a função $f(x) = \cos x$ é uma função par ($f(x) = f(-x), \forall x \in \mathbb{R}$), podemos trocar $\cos(-x)$ por $\cos(x)$.

Comentários gerais

As técnicas usadas são substituição simples ou integração por partes, bem como as fórmulas de redução. O problema é saber identificar qual técnica deve ser usada em cada caso. Para ajudá-lo nessa tarefa, apresentaremos um resumo com as principais estratégias.

Considere a seguinte integral:

$$\int \sen^n x \cos^m x \, dx$$

	Sugestão	Fórmulas úteis
m ímpar	Substituição $u = \sen x$ $du = \cos x \, dx$	$\sen^2 x = 1 - \cos^2 x$
n ímpar	Substituição $u = \cos x$ $du = -\sen x \, dx$	$\cos^2 x = 1 - \sen^2 x$
m e n pares	Fórmulas de redução (9) ou (10)	$\sen^2 x + \cos^2 x = 1$

Caso você esteja lidando com um integrando que tenha argumentos diferentes, use as fórmulas (11), (12) ou (13) para reduzir toda a expressão a um único argumento. Veja o exemplo:

$$\sen 5x \sen x = \frac{1}{2} (\cos 4x - \cos 6x).$$

Exercícios

Começamos com as soluções dos exercícios sugeridos ao longo da aula.

Exercício 1.

Use a fórmula de redução para calcular $\int \cos^3 x \, dx$.

Solução:

$$\begin{aligned} \int \cos^3 x \, dx &= \frac{1}{3} \cos^2 x \sin x + \frac{2}{3} \int \cos x \, dx = \\ &= \frac{1}{3} \cos^2 x \sin x + \frac{2}{3} \sin x + C. \end{aligned}$$

Exercício 2.

Use a fórmula de redução para calcular $\int \sin^4 x \, dx$.

Solução: Vamos usar a fórmula (10) com $n = 4$.

$$\int \sin^4 x \, dx = -\frac{1}{4} \sin^3 x \cos x + \frac{3}{4} \int \sin^2 x \, dx.$$

Agora, podemos usar a integral de $\sin^2 x$ para completar o exercício:

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x \, dx &= -\frac{1}{4} \sin^3 x \cos x + \frac{3}{4} \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin x \cos x \right) + C \\ &= -\frac{1}{4} \sin^3 x \cos x + \frac{3x}{8} - \frac{3}{8} \sin x \cos x + C. \end{aligned}$$

Exercício 3.

Calcule $\int \cos^{1/2} x \sin^3 x \, dx$.

Solução: Como o expoente de $\sin x$ é 3, um número ímpar, vamos re-escrever $\sin^3 x$ como $(\sin^2 x)(\sin x)$, usar um dos fatores para compor o $du = -\sin x \, dx$ e fazer a substituição $u = \cos x$. Além disso, usaremos a identidade trigonométrica fundamental para escrever $\sin^2 x$ em termos de $\cos x$. Observe que esta técnica funciona mesmo quando o expoente de $y = \cos x$ não é um número inteiro. Assim,

$$\begin{aligned} \int \cos^{1/2} x \sin^3 x \, dx &= \int \cos^{1/2} x (\sin^2 x) \sin x \, dx = \\ &= \int \cos^{1/2} x (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx = \\ &= \int \cos^{1/2} x \sin x \, dx - \int \cos^{5/2} x \sin x \, dx = \\ &= -\frac{2}{3} \cos^{3/2} x + \frac{2}{7} \cos^{7/2} x + C. \end{aligned}$$

4. Calcule as seguintes integrais:

a) $\int \cos^5 x \operatorname{sen} x \, dx.$

b) $\int_0^{\pi/6} \cos^2 x \, dx.$

c) $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x \, dx.$

d) $\int \operatorname{sen}^2 2\theta \cos 2\theta \, d\theta.$

e) $\int_0^{\pi/3} \cos^3 x \, dx.$

f) $\int \cos^6 2x \, dx.$

g) $\int \operatorname{sen}^2 x \cos 2x \, dx.$

h) $\int (\cos t - \cos 2t)^2 \, dt.$

i) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \, dx.$

j) $\int \operatorname{sen}^{-3} x \cos^3 x \, dx.$

5. Calcule as seguintes integrais:

a) $\int \operatorname{sen} \frac{x}{2} \operatorname{sen} x \, dx.$

b) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} 2x \cos 3x \, dx.$

c) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2x \cos^2 x \, dx.$

d) $\int \cos 7x \cos 3x \, dx.$

Auto-avaliação

Uma palavra final a respeito deste conteúdo. Os exercícios não são difíceis, mas trabalhosos. Você precisará de várias fórmulas e nem sempre nos lembramos de cada uma delas. No entanto, há a necessidade de você saber identificar os casos mais simples e saber usar as fórmulas de recorrência apresentadas.

Aula 21 – Técnicas de Integração – Integração de Potências e Produtos de Funções Trigonométricas

Objetivo

Aprender a integrar potências e produtos de funções trigonométricas.

Na aula anterior, você aprendeu a integrar funções cujos integrandos eram produtos de senos e cossenos. Nesta aula, começaremos considerando produtos de tangentes e secantes.

Integrais envolvendo produtos de tangentes e secantes

O cálculo de integrais do tipo $\int \operatorname{tg}^n x \sec^m x dx$ é relativamente fácil. É preciso levar em conta se n ou m é par ou ímpar. Em qualquer um dos casos usaremos as seguintes informações:

1. $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$;
2. $(\operatorname{tg} x)' = \sec^2 x$;
3. $(\sec x)' = \sec x \operatorname{tg} x$.

Vamos exemplificar as diferentes possibilidades:

O caso m par.

Neste caso, usaremos a identidade $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ e o fato de que a derivada da tangente é a secante ao quadrado.

Exemplo 21.1

Cálculo de $\int \operatorname{tg}^3 x \sec^4 x dx$.

Neste caso, usamos a substituição simples $u = \operatorname{tg} x$.

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^3 x \sec^4 x \, dx &= \int \operatorname{tg}^3 x \sec^2 x \sec^2 x \, dx = \\ &= \int \operatorname{tg}^3 x (1 + \operatorname{tg}^2 x) \sec^2 x \, dx = \\ &= \int (\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^5 x) \sec^2 x \, dx = \\ &= \int \operatorname{tg}^3 x \sec^2 x \, dx + \int \operatorname{tg}^5 x \sec^2 x \, dx = \\ &= \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x + \frac{1}{6} \operatorname{tg}^6 x + C. \end{aligned}$$

O caso n ímpar.

Agora faremos algo semelhante, trocando os papéis entre a tangente e a secante.

Exemplo 21.2

Cálculo de $\int \operatorname{tg}^3 x \sec^3 x \, dx$.

Neste caso não podemos fazer a substituição feita no exemplo anterior, pois o expoente de $\sec x$ é 3. No entanto, levando em conta que $(\sec x)' = \operatorname{tg} x \sec x$ e que o expoente de $\operatorname{tg} x$ é ímpar, podemos fazer o seguinte:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^3 x \sec^3 x \, dx &= \int \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x (\sec x \operatorname{tg} x) \, dx = \\ &= \int (\sec^2 x - 1) \sec^2 x (\sec x \operatorname{tg} x) \, dx = \\ &= \int (\sec^4 x - \sec^2 x) (\sec x \operatorname{tg} x) \, dx = \\ &= \int (u^4 - u^2) \, du = \\ &= \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + C = \\ &= \frac{1}{5} \sec^5 x - \frac{1}{3} \sec^3 x + C. \end{aligned}$$

Exercício 1. Calcule a integral $\int \operatorname{tg}^3 x \sec^2 x \, dx$.

O caso $\int \sec^n x dx$

Para fazer este tipo de cálculo, vamos considerar dois casos: n ímpar ou n par. Vamos começar com o caso simples. Isto é, quando n é par. Como $(\operatorname{tg} x)' = \sec^2 x$, podemos usar a identidade $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ e aplicar a substituição simples. Veja o exemplo a seguir.

Exemplo 21.3

Calcule $\int \sec^4 x dx$.

$$\begin{aligned} \int \sec^4 x dx &= \int \sec^2 x \sec^2 x dx = \\ &= \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) \sec^2 x dx = \\ &= \int \sec^2 x dx + \int \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x dx = \\ &= \operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + C. \end{aligned}$$

Vamos, agora, considerar o caso em que n é ímpar. Observe que

$$\begin{aligned} \int \sec x dx &= \int \sec x \frac{\sec x + \operatorname{tg} x}{\sec x + \operatorname{tg} x} dx = \\ &= \int \frac{\sec x \operatorname{tg} x + \sec^2 x}{\sec x + \operatorname{tg} x} dx = \\ &= \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + C. \end{aligned}$$

Essa fórmula merece um destaque, pois o truque usado para calculá-la é, realmente, fora do comum.

$$\boxed{\int \sec x dx = \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + C} \quad (1)$$

Para valores de n maiores do que 1, pode-se usar a integração por partes

$$\int \sec^n x dx = \int \underbrace{\sec^{n-2} x}_u \underbrace{\sec^2 x dx}_{dv}$$

ou a fórmula de recorrência

$$\boxed{\int \sec^n x dx = \frac{\sec^{n-2} x \operatorname{tg} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x dx,} \quad (2)$$

válida para $n > 1$.

Na verdade, a prova de que a fórmula é verdadeira usa a integração por partes, como foi sugerido anteriormente. Veja como isso funciona:

Exemplo 21.4

Cálculo de $\int \sec^3 x dx$.

Vamos usar a integração por partes.

$$\begin{cases} u = \sec x \\ dv = \sec^2 x dx \end{cases} \implies \begin{cases} du = \sec x \operatorname{tg} x dx \\ v = \operatorname{tg} x. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int \sec^3 x dx &= \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec x \operatorname{tg}^2 x dx = \\ &= \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec x (\sec^2 x - 1) dx = \\ &= \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec^3 x dx + \int \sec x dx. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} 2 \int \sec^3 x dx &= \sec x \operatorname{tg} x + \int \sec x dx \\ \int \sec^3 x dx &= \frac{1}{2} \sec x \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \int \sec x dx. \end{aligned}$$

Esta última linha é o que obteríamos ao substituir n por 3 na fórmula de redução para secantes (2).

Portanto, podemos concluir:

$$\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2} \sec x \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + C.$$

Exercício 2. Use a fórmula de redução para calcular $\int \sec^5 x dx$.

Observação 21.1

Ainda não consideramos a situação $\int \operatorname{tg}^n x \sec^m x dx$, onde n é par e m é ímpar. Veja o seguinte exemplo.

Exemplo 21.5

Calcule $\int \operatorname{tg}^2 x \sec x dx$.

Neste caso, o integrando pode ser reescrito em termos apenas de secantes, usando a fórmula $\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$.

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^2 x \sec x \, dx &= \int (\sec^2 x - 1) \sec x \, dx = \\ &= \int \sec^3 x \, dx - \int \sec x \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \sec x \operatorname{tg} x - \frac{1}{2} \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + C.\end{aligned}$$

O caso $\int \operatorname{tg}^n x \, dx$.

Vejamos agora como obter uma fórmula de redução para o cálculo de integrais como $\int \operatorname{tg}^5 x \, dx$. Para isso obteremos uma fórmula de redução. Vamos supor que $n \geq 2$.

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^n x \, dx &= \int \operatorname{tg}^{n-2} x \operatorname{tg}^2 x \, dx = \\ &= \int \operatorname{tg}^{n-2} x (\sec^2 x - 1) \, dx = \\ &= \int \operatorname{tg}^{n-2} x \sec^2 x \, dx - \int \operatorname{tg}^{n-2} x \, dx = \\ &= \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x \, dx.\end{aligned}$$

Isto é,

$$\boxed{\int \operatorname{tg}^n x \, dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x \, dx,} \quad (3)$$

válida para $n > 1$.

Exemplo 21.6

Vamos calcular $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^5 x \, dx$.

Usaremos a fórmula de redução duas vezes.

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^5 x \, dx &= \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \int \operatorname{tg}^3 x \, dx = \\ &= \frac{\operatorname{tg}^3 x}{4} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \int \operatorname{tg} x \, dx = \\ &= \frac{\operatorname{tg}^3 x}{4} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln |\sec x| + C.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^5 x \, dx &= \frac{\operatorname{tg}^3 x}{4} \Big|_0^{\pi/4} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} \Big|_0^{\pi/4} + \ln |\sec x| \Big|_0^{\pi/4} = \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \ln \sqrt{2} - \ln 1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

Você acha que esse número é positivo ou negativo? Ganha um doce quem acertar sem usar a calculadora... A resposta está no fim da aula, na seção de exercícios.

Cossecantes e cotangentes.

Até agora abordamos integrais de funções cujas leis de definição envolvem as funções seno, cosseno, tangente e secante. Os casos envolvendo cotangente e cossecante admitem soluções similares aos que envolvem secante e tangente. Por exemplo, podemos usar as seguintes fórmulas para potências de cossecantes e cotangentes:

$$\int \csc x \, dx = \ln |\csc x - \cotg x| + C \quad (4)$$

$$\int \csc^n x \, dx = -\frac{\csc^{n-2} x \cotg x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2} x \, dx, \quad (5)$$

válida para $n > 1$,

$$\int \cotg^n x \, dx = -\frac{\cotg^{n-1} x}{n-1} - \int \cotg^{n-2} x \, dx, \quad (6)$$

válida para $n > 1$.

Exercício 3. Calcule $\int \csc^3 2x \, dx$.

Outras integrais trigonométricas

Há casos onde o integrando não é da forma que abordamos até agora: produtos de senos e cossenos ou de tangentes e secantes... Nesses casos podemos usar as fórmulas trigonométricas para reduzir a um dos casos já apresentados. Ilustraremos essa idéia com os próximos exemplos.

Exemplo 21.7

Cálculo de $\int \csc^2 x \operatorname{tg} x \, dx$.

Note que esta integral envolve as funções cossecante e tangente. Podemos usar a identidade

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{cotg} x}$$

para reescrevê-la da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \int \csc^2 x \operatorname{tg} x \, dx &= \int \frac{\csc^2 x}{\operatorname{cotg} x} \, dx \\ &= - \int \frac{du}{u} = \ln \left| \frac{1}{u} \right| + C \\ &= \ln \left| \frac{1}{\operatorname{cotg} x} \right| + C = \ln |\operatorname{tg} x| + C. \end{aligned}$$

Exemplo 21.8

Cálculo de $\int \sec^3 x \operatorname{sen} x \, dx$.

Neste caso, a substituição $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ transformará a integral dada em uma integral mais simples de calcular. Tente fazer isso. A resposta é

$$\int \sec^3 x \operatorname{sen} x \, dx = \frac{1}{2} \sec^2 x + C.$$

Resumo

Esta aula também contém bastante informação, assim como a aula anterior. Aliás, essa será a tônica das aulas sobre técnicas de integração.

Vamos, então, montar um mapa com algumas das informações mais usadas entre as que foram apresentadas nesta aula.

Caso $\int \operatorname{tg}^n x \sec^m x dx$.

	Sugestão	Fórmulas
m par	Substituição $u = \operatorname{tg} x$ $du = \sec^2 x dx$ Veja exemplo 21.1.	$\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
n ímpar	Substituição $u = \sec x$ $du = \sec x \operatorname{tg} x dx$ Veja exemplo 21.2.	$\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$
n par e m ímpar	Transforme o integrando em secantes e use (2). Veja exemplo 21.5.	$\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$

Exercícios

Exercício 1. Calcule $\int \operatorname{tg}^3 x \sec^2 x dx$.

Solução 1: Vamos usar $u = \operatorname{tg} x$. Assim, $du = \sec^2 x dx$. Portanto,

$$\int \operatorname{tg}^3 x \sec^2 x dx = \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x + C.$$

Solução 2: A identidade $\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$ nos dá

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^3 x \sec^2 x dx &= \int (\sec^2 x - 1) \operatorname{tg} x \sec^2 x dx = \\ &= \int \sec^3 x \operatorname{tg} x \sec x dx - \int \sec x \operatorname{tg} x \sec x dx = \\ &= \frac{1}{4} \sec^4 x - \frac{1}{2} \sec^2 x + C_1. \end{aligned}$$

Qual das duas respostas obtidas é a correta? Bem, como não eramos na conta, ambas devem estar corretas. Realmente, lembre-se que estamos obtendo uma família de funções. Resumindo, $f(x) = \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x$ e $g(x) = \frac{1}{4} \sec^4 x + \frac{1}{2} \sec^2 x$ são primitivas da função $y = \operatorname{tg}^3 x \sec^2 x$ e, portanto, diferem por uma constante. Veja:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sec^4 x - \frac{1}{2} \sec^2 x + C_1 &= \frac{1}{4} (\sec^4 x - 2 \sec^2 x + 1) + C_1 - \frac{1}{4} = \\ &= \frac{1}{4} (\sec^2 x - 1)^2 + C_1 - \frac{1}{4} = \\ &= \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x + \left(C_1 - \frac{1}{4} \right). \end{aligned}$$

Execício 2. Use a fórmula de redução para calcular $\int \sec^5 x \, dx$.

Solução: Vamos usar a fórmula (2) com $n = 5$.

$$\int \sec^5 x \, dx = \frac{\sec^3 x \operatorname{tg} x}{4} + \frac{3}{4} \int \sec^3 x \, dx.$$

Agora, usando o cálculo já efetuado no exemplo 21.4, temos a resposta:

$$\int \sec^5 x \, dx = \frac{\sec^3 x \operatorname{tg} x}{4} + \frac{3}{8} \sec x \operatorname{tg} x + \frac{3}{4} \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + C.$$

Exercício 3. Calcule $\int \csc^3 2x \, dx$.

Solução: Vamos usar a fórmula de redução (5), observando que o argumento é $2x$.

$$\begin{aligned} \int \csc^3 2x \, dx &= \frac{1}{2} \int \csc^3 2x \, 2dx = \\ &= -\frac{\csc 2x \operatorname{cotg} 2x}{4} + \frac{1}{4} \int \csc 2x \, dx = \\ &= -\frac{\csc 2x \operatorname{cotg} 2x}{4} + \frac{1}{8} \int \csc 2x \, 2dx = \\ &= -\frac{\csc 2x \operatorname{cotg} 2x}{4} + \frac{1}{8} \ln |\csc 2x - \operatorname{cotg} 2x| + C. \end{aligned}$$

4. Calcule as seguintes integrais:

a) $\int \operatorname{tg}^2 2x \sec^4 2x \, dx$. b) $\int \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \sec \frac{x}{2} \, dx$.

c) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \sec^3 x \operatorname{tg} x \, dx$. d) $\int \sec^4 3x \, dx$.

CÁLCULO II

e) $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \operatorname{tg}^5 x \, dx.$

f) $\int \operatorname{tg} x \sec^4 x \, dx.$

g) $\int \operatorname{cotg}^3 x \csc^2 x \, dx.$

h) $\int \frac{\sec^4 x}{\operatorname{tg}^3 x} \, dx.$

i) $\int \sec^4 5t \, dt.$

j) $\int \operatorname{tg}^3 \theta \sec^{3/2} \theta \, d\theta.$

l) $\int (\sec^3 2x + \operatorname{tg}^3 x) \, dx.$

m) $\int \csc^4 x \, dx.$

n) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \sec^3 \sqrt{x} \, dx.$

o) $\int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^5 x} \, dx.$

p) $\int \frac{1}{\operatorname{sen}^4 2\theta} \, d\theta.$

q) $\int \frac{\operatorname{cotg}^3 x}{\operatorname{sen}^2 x} \, dx.$

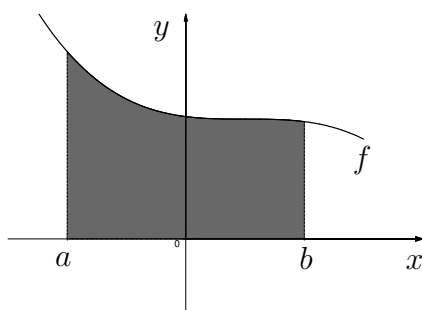
Aula 22 – Técnicas de Integração – Substituição Trigonométrica

Objetivo

Conhecer a técnica de integração chamada substituição trigonométrica.

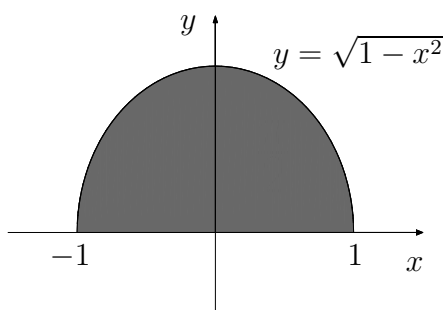
Introdução

Você aprendeu, no Cálculo I, que a integral de uma função não-negativa, sobre um certo intervalo, é a área da região limitada pelo gráfico da função e pelo eixo Ox .



$$\int_a^b f(x) dx = A.$$

Vamos considerar um exemplo específico. O gráfico da função $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, definida no intervalo $[-1, 1]$, é o semicírculo centrado na origem. Além disso, a área do círculo de raio r é πr^2 . Portanto, podemos concluir que



$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Muito bem! Agora, a questão é: como efetuar este cálculo, confirmando a igualdade acima?

Este problema será resolvido usando a técnica de integração chamada de *substituição trigonométrica*. Esse nome se deve a usarmos identidades trigonométricas, como $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$, para colocar $\sin \theta$ no lugar da variável x , tornando o radical $\sqrt{1-x^2}$ em $\cos \theta$:

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 \theta} = \cos \theta.$$

A idéia é substituir uma expressão complicada por uma simples. Vamos a um exemplo.

Exemplo 22.1

Calcule $\int \sqrt{1-x^2} dx$.

Fazendo $x = \sin \theta$, temos $\sqrt{1-x^2} = \cos \theta$ e $dx = \cos \theta d\theta$. Assim,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx &= \int \cos \theta \cdot \cos \theta d\theta = \int \cos^2 \theta d\theta = \\ &= \frac{1}{2} \theta + \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta + C. \end{aligned}$$

No entanto, a resposta deve ser dada em termos da variável original x . Lembramos que, se $x = \sin \theta$, então $\theta = \arcsen x$. Assim,

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \arcsen x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + C.$$

Exercício 1. Calcule a derivada da função

$$F(x) = \frac{1}{2} \arcsen x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2},$$

confirmando que ela é uma primitiva da função $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

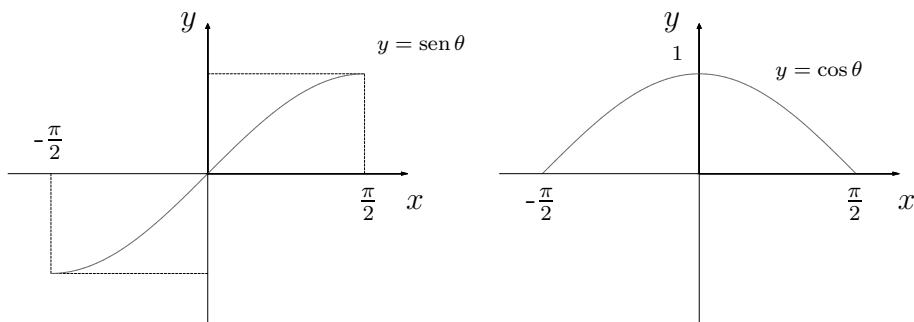
Ótimo! Você viu como a técnica funciona e como a função $y = \arcsen x$ foi útil. No entanto, há duas coisas no exemplo 22.1 que precisamos esclarecer.

1. Para substituímos $\sqrt{1-\sin^2 \theta} = \sqrt{\cos^2 \theta}$ por $\cos \theta$, precisamos estar certos de que $\cos \theta$ não assume valores negativos.
2. A resposta final deve ser dada em termos da variável original x .

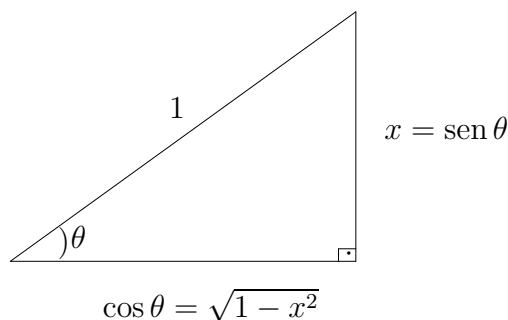
Quanto ao primeiro item, devido aos domínios das funções usadas, $\cos \theta \geq 0$. Realmente, o domínio da função $y = \sqrt{1-x^2}$ é o intervalo $[-1, 1]$. Assim, a escolha $x = \sin \theta$ é perfeitamente adequada se tomarmos $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Nesse caso, $\cos \theta \geq 0$. Veja os gráficos nas figuras a seguir.

Lembre-se de que a função $f: [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$, definida por $f(x) = \arcsen x$, é a função inversa de $g: [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1]$, definida por $g(x) = \sin x$. Esta função é diferenciável no intervalo $(-1, 1)$ e $(\arcsen x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Lembre-se de que $\sqrt{a^2} = |a|$ e $|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0. \end{cases}$



Quando a escrever a resposta em termos da variável original, usamos a função inversa de $x = \text{sen } \theta$, $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e $x \in [-1, 1]$, dada por $\theta = \text{arcsen } x$, além do seguinte diagrama, que torna mais fácil escrever as outras expressões usadas.



Como a hipotenusa do triângulo retângulo é igual a 1, o cateto oposto ao ângulo θ é $x = \text{sen } \theta$ e o cateto adjacente é $\text{cos } \theta = \sqrt{1 - x^2}$.

A igualdade $\int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{\pi}{2}$

Vamos agora confirmar a igualdade $\int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{\pi}{2}$, observada na introdução da aula. Realmente, se $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, a função $y = \text{sen } \theta$ é estritamente crescente, portanto, bijetora sobre o intervalo $[-1, 1]$. Logo, podemos usar a mudança de variável com os seguintes limites de integração:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = \\ &= \left(\frac{1}{2} \theta - \frac{1}{2} \text{sen } \theta \text{ cos } \theta \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

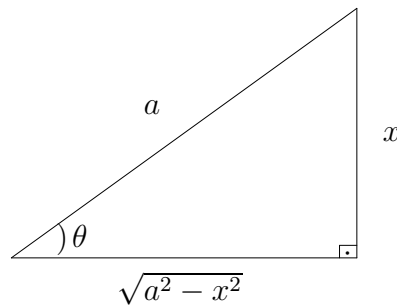
Os três casos típicos

Agora que você tem uma idéia geral da técnica, apresentaremos os casos mais comuns, exemplificando cada um deles.

Caso $\sqrt{a^2 - x^2}$

Caso o integrando tenha o radical $\sqrt{a^2 - x^2}$, com $a > 0$, e a substituição simples $u = a^2 - x^2$ não resolver, podemos usar a substituição

$$\begin{cases} x = a \operatorname{sen} \theta \\ dx = a \cos \theta d\theta \end{cases}, \text{ onde } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ e } x \in [-a, a]. \text{ Nessas condições,}$$



$$\theta = \operatorname{arcsen} \frac{x}{a}$$

$$x = a \operatorname{sen} \theta,$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos \theta.$$

Exemplo 22.2

Calcule $\int \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} dx$.

Nesse caso, fazemos $x = 2 \operatorname{sen} \theta$, $dx = 2 \cos \theta d\theta$ e $\sqrt{4 - x^2} = 2 \cos \theta$.

Assim,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} dx &= \int \frac{(2 \operatorname{sen} \theta)^2 2 \cos \theta}{2 \cos \theta} d\theta = \\ &= 4 \int \operatorname{sen}^2 \theta d\theta = 4 \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) d\theta = \\ &= 2\theta - \operatorname{sen} 2\theta + C = 2\theta - 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta + C \\ &= 2 \operatorname{arcsen} \left(\frac{x}{2} \right) - \frac{x \sqrt{4 - x^2}}{2} + C. \end{aligned}$$

Observe que precisamos reescrever a função $y = \operatorname{sen} 2\theta$ como $y = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$ para dar a resposta em termos de x , uma vez que $x = 2 \operatorname{sen} \theta$ e $\sqrt{4 - x^2} = 2 \cos \theta$.

Exercício 2. Calcule a integral definida $\int_0^{3/2} (9 - x^2)^{3/2} dx$.

Caso $\sqrt{a^2 + x^2}$

Caso o integrando tenha o radical $\sqrt{a^2 + x^2}$, com $a > 0$, e a substituição simples $u = a^2 + x^2$ não resolver, você pode fazer a seguinte substituição trigonométrica:

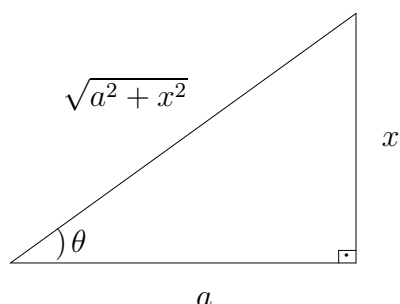
$$\begin{cases} x &= a \operatorname{tg} \theta \\ dx &= a \sec^2 \theta d\theta \end{cases}, \text{ onde } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ e } x \in \mathbb{R}.$$

Observe que agora usamos a identidade trigonométrica $\sec^2 \theta = 1 + \operatorname{tg}^2 \theta$ para obter $a \sec \theta$ no lugar do radical $\sqrt{a^2 + x^2}$. Realmente,

$$\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + (a \operatorname{tg} \theta)^2} = a \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta} = a \sec \theta.$$

Note também que o domínio da função $y = \sqrt{a^2 + x^2}$ é todo o conjunto dos números reais, e a função $x = \operatorname{tg} \theta$, restrita ao intervalo aberto $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, é uma função bijetora sobre todo o conjunto dos números reais. Sua função inversa, a função $\theta = \operatorname{arctg} x$, está definida para todo real x .

Nessa condições,



$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$$

$$x = a \operatorname{tg} \theta,$$

$$\sqrt{a^2 + x^2} = a \sec \theta.$$

Exemplo 22.3

Calcule $\int_0^2 \sqrt{x^2 + 16} dx$.

Primeiro calcularemos a integral indefinida $\int \sqrt{x^2 + 16} dx$.

Fazendo a substituição trigonométrica $x = 4 \operatorname{tg} \theta$, $dx = 4 \sec^2 \theta d\theta$ e $\sqrt{x^2 + 16} = 4 \sec \theta$, temos:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 + 16} dx &= \int (4 \sec \theta)(4 \sec^2 \theta) d\theta = 16 \int \sec^3 \theta d\theta = \\ &= 8 \sec \theta \operatorname{tg} \theta + 8 \ln |\sec \theta + \operatorname{tg} \theta| + C \\ &= \frac{8}{4} x \frac{\sqrt{x^2 + 16}}{4} + 8 \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + 16}}{4} + \frac{x}{4} \right| + C = \\ &= \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + 16} + 8 \ln |\sqrt{x^2 + 16} + x| + C_1. \end{aligned}$$

Lembre-se que para quaisquer a e b positivos, $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$. Essa

propriedade da função logaritmo permite escrever

$$\ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + 16}}{4} + \frac{x}{4} \right| = \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + 16} + x}{4} \right| = \ln |\sqrt{x^2 + 16} + x| - \ln 4$$

e, portanto, $C_1 = C + \ln 4$.

Podemos, agora, calcular a integral definida:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \sqrt{x^2 + 16} dx &= \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + 16} + 8 \ln |\sqrt{x^2 + 16} + x| \Big|_0^2 = \\ &= \sqrt{20} + 8 \ln(\sqrt{20} + 2) - 8 \ln 4 = \\ &= 2\sqrt{5} + 8 \ln \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right). \end{aligned}$$

Tente usar esta técnica no seguinte exercício.

Exercício 3. Calcule $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 + 9}} dx$.

Caso $\sqrt{x^2 - a^2}$

Agora cuidaremos do último caso. Se o integrando tiver o radical $\sqrt{x^2 - a^2}$, com $a > 0$, e a substituição simples $u = x^2 - a^2$ não puder ser usada, podemos utilizar, novamente, a identidade trigonométrica $\sec^2 \theta = 1 + \operatorname{tg}^2 \theta$, usada no caso anterior, para transformar o integrando em algo mais simples

No entanto, aqui precisaremos ter um cuidado especial, pois o domínio da função $y = \sqrt{x^2 - a^2}$, determinado pela condição $x^2 - a^2 \geq 0$, é a união disjunta de duas semi-retas disjuntas:

$$(-\infty, -a] \cup [a, \infty).$$

Assim, se colocarmos $x = a \sec \theta$,

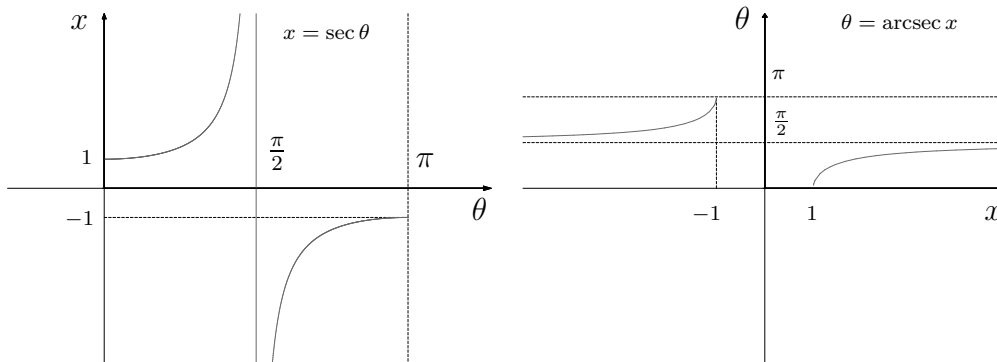
$$x^2 - a^2 = a^2 \sec^2 \theta - a^2 = a^2 (\sec^2 \theta - 1) = a^2 \operatorname{tg}^2 \theta.$$

Veja bem, a função $y = \operatorname{tg} \theta$ assume valores negativos, por exemplo, se $\frac{\pi}{2} < \theta \leq 0$.

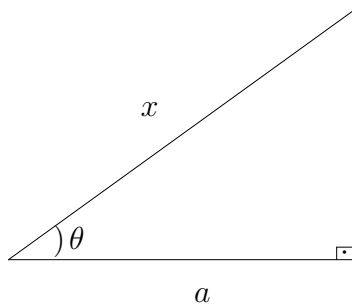
Vamos considerar, então, $x \geq a$. Assim, podemos colocar $x = a \sec \theta$, $dx = a \sec \theta \operatorname{tg} \theta$ e obter

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \sec^2 \theta - a^2} = a \operatorname{tg} \theta.$$

Para expressar a resposta em termos da variável x , em algumas situações poderá ser necessário usar a função inversa da função $y = \sec \theta$. Lembre-se de que a função $\theta = \operatorname{arcsec} x$ está definida para $x \in (-\infty, 1] \cup [1, \infty)$, tendo como imagem a união disjunta $[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$. Aqui estão os gráficos das funções $x = \sec \theta$, restrita ao domínio $[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$, e sua inversa:



Veja, também, o resumo das informações necessárias para este tipo de substituição:



$$\theta = \operatorname{arcsec} \frac{x}{a}$$

$$x = a \sec \theta,$$

$$\sqrt{x^2 - a^2} = a \operatorname{tg} \theta.$$

Vamos usar essas informações para resolver o exemplo seguinte.

Exemplo 22.4

Calcule $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 16}} dx$, onde $x > 4$.

Faremos a substituição $x = 4 \sec \theta$, que acarreta em $\sqrt{x^2 - 16} = 4 \operatorname{tg} \theta$ e $dx = 4 \sec \theta \operatorname{tg} \theta d\theta$. Portanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 16}} dx &= \int \frac{16 \sec^2 \theta}{4 \operatorname{tg} \theta} \cdot 4 \sec \theta \operatorname{tg} \theta d\theta = 16 \int \sec^3 \theta d\theta = \\ &= 16 \left(\frac{1}{2} \sec \theta \operatorname{tg} \theta + \frac{1}{2} \ln |\sec \theta + \operatorname{tg} \theta| \right) + C. \end{aligned}$$

Agora, precisamos escrever a resposta usando a variável x . Veja que $16 \sec \theta \operatorname{tg} \theta = 4 \sec \theta 4 \operatorname{tg} \theta = x \sqrt{x^2 - 16}$. Para o restante da resposta,

usamos o seguinte: reescrevendo C como $8 \ln 4 + C_1$, podemos fazer:

$$\begin{aligned} 8 \ln |\sec \theta + \operatorname{tg} \theta| + C &= 8 \ln |\sec \theta + \operatorname{tg} \theta| + 8 \ln 4 + C_1 = \\ &= 8 \ln |4 \sec \theta + 4 \operatorname{tg} \theta| + C_1. \end{aligned}$$

Com isso, fica mais fácil escrever a resposta final:

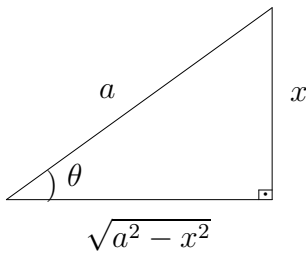
$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 16}} dx &= \frac{1}{2} (4 \sec \theta + 4 \operatorname{tg} \theta) + 8 \ln |\sec \theta + \operatorname{tg} \theta| + C = \\ &= \frac{1}{2} (4 \sec \theta + 4 \operatorname{tg} \theta) + 8 \ln |4 \sec \theta + 4 \operatorname{tg} \theta| + C_1 = \\ &= \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - 16} + 8 \ln(x + \sqrt{x^2 - 16}) + C_1. \end{aligned}$$

Você deve ter notado que a substituição trigonométrica resultou numa integral do tipo “secante ao cubo”, que demanda uma fórmula de redução, aprendida na aula anterior. Isso significa que, após a substituição trigonométrica, nos livramos dos eventuais radicais, mas ganhamos, no lugar deles, integrais que envolvem funções trigonométricas. Uma técnica a serviço da outra.

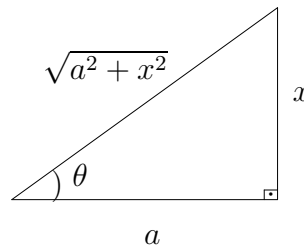
Resumo

Mais uma vez, muitas fórmulas são necessárias. Aqui está um resumo das informações necessárias para aplicar a técnica de substituição trigonométrica. Você poderá usá-la para resolver os exercícios que serão apresentados posteriormente.

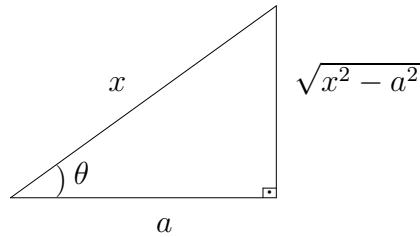
	Substituição	Radical	Domínio
(a)	$x = a \operatorname{sen} \theta$ $dx = a \cos \theta d\theta$	$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos \theta$	$-a \leq x \leq a$ $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$
(b)	$x = a \operatorname{tg} \theta$ $dx = a \sec^2 \theta d\theta$	$\sqrt{a^2 + x^2} = a \sec \theta$	$x \in \mathbb{R}$ $-\pi/2 < \theta < \pi/2$
(c)	$x = a \sec \theta$ $dx = a \cos \theta d\theta$	$\sqrt{x^2 - a^2} = a \operatorname{tg} \theta$	$x \geq a$ $0 \leq \theta < \pi/2$



$$(a) \quad x = a \operatorname{sen} \theta$$



$$(b) \quad x = a \operatorname{tg} \theta$$



$$(c) \quad x = a \operatorname{sec} \theta$$

Exercícios

Vamos começar apresentando as soluções dos exercícios deixados ao longo da aula.

Exercício 1. Calcule a derivada da função

$$F(x) = \frac{1}{2} \operatorname{arcsen} x + \frac{1}{2} x \sqrt{1 - x^2},$$

confirmando que ela é uma primitiva da função $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Solução: Lembre-se de que $(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$. Assim,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot (-2x) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} + \sqrt{1 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1 + (1 - x^2) - x^2}{\sqrt{1 - x^2}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}} \right) = \\ &= \sqrt{1 - x^2}. \end{aligned}$$

Exercício 2. Calcule a integral definida $\int_0^{\frac{3}{2}} (9 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx$.

CÁLCULO II

Solução: Note que $(9 - x^2)^{\frac{3}{2}} = (9 - x^2) \sqrt{9 - x^2}$. Vamos, portanto, fazer a substituição $x = 3 \sin \theta$, que acarreta $\sqrt{9 - x^2} = 3 \cos \theta$, $9 - x^2 = 9 \cos^2 \theta$ e $dx = 3 \cos \theta d\theta$. Além disso, como $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$,

$$0 \leq x \leq 3/2 \quad \iff \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}.$$

Portanto,

$$\int_0^{\frac{3}{2}} (9 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 27 \cos^3 \theta \cdot 3 \cos \theta d\theta = 81 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^4 \theta d\theta$$

Para calcular esta última integral, vamos usar a identidade trigonométrica

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta.$$

Então,

$$\begin{aligned} \cos^4 \theta &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{4} \cos^2 2\theta = \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 4\theta\right) = \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cos 4\theta = \\ &= \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{8} \cos 4\theta. \end{aligned}$$

Podemos, agora, prosseguir com a integração:

$$\begin{aligned} 81 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^4 \theta d\theta &= 81 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left[\frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{8} \cos 4\theta \right] d\theta = \\ &= 81 \left[\frac{3}{8} \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta + \frac{1}{32} \sin 4\theta \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \\ &= \frac{243}{8} \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{81}{4} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{81}{32} \frac{\sqrt{3}}{2} = \\ &= \frac{81}{16} \pi + \frac{729}{64} \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Exercício 3. Calcule $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 + 9}} dx$.

Solução: Nesse caso, fazemos $x = 3 \operatorname{tg} \theta$, que implica $dx = 3 \sec^2 \theta d\theta$ e $\sqrt{x^2 + 9} = 3 \sec \theta$. Assim,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 + 9}} dx &= \int \frac{3 \sec^2 \theta}{9 \operatorname{tg}^2 \theta \cdot 3 \sec \theta} d\theta = \frac{1}{9} \int \frac{\sec \theta}{\operatorname{tg}^2 \theta} d\theta = \\ &= \frac{1}{9} \int \frac{\cos^2 \theta}{\cos \theta \operatorname{sen}^2 \theta} d\theta = \frac{1}{9} \int \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta} d\theta = \\ &= -\frac{1}{9} \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} + C. \end{aligned}$$

Agora, precisamos escrever a resposta em termos de tangentes e secantes e, assim, escrever a resposta em termos da variável x . Para isso, usaremos a seguinte estratégia:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{9} \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} + C &= -\frac{1}{9} \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta \cdot \cos \theta} + C = \\ &= -\frac{1 \sec \theta}{9 \operatorname{tg} \theta} + C = \\ &= -\frac{1}{9} \frac{3 \sec \theta}{3 \operatorname{tg} \theta} + C. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 + 9}} dx = -\frac{1}{9} \sqrt{9 - x^2} x + C.$$

Agora, você pode colocar em prática o que aprendeu.

Calcule as seguintes integrais:

4. $\int_0^1 \sqrt{4 - x^2} dx.$

5. $\int_0^5 \sqrt{x^2 + 25} dx.$

6. $\int_2^4 \sqrt{x^2 - 4} dx.$

7. $\int \frac{x^2}{\sqrt{9 - 4x^2}} dx.$

8. $\int \frac{1}{t^4 \sqrt{1 - t^2}} dt.$

9. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 2}} dx.$

10. $\int \frac{x^3}{(x^2 + 16)^{3/2}} dx.$ 11. $\int \frac{x^2}{(9 - x^2)^{3/2}} dx.$

12. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 4}} dx.$ 13. $\int \frac{\sqrt{25 - x^2}}{x^2} dx.$

14. $\int_0^4 t^2 \sqrt{t^2 + 9} dt.$ 15. $\int_0^4 \frac{1}{(9t^2 + 4)^{3/2}} dt.$

16. $\int \frac{1}{x^4 \sqrt{x^2 - 1}} dx.$

Auto-avaliação

Use os exercícios resolvidos, bem como os exemplos da aula, como modelos para fazer os exercícios deixados ao seu encargo. Lembre-se de que expressar a resposta em termos da variável original pode exigir um certo “malabarismo” com as funções trigonométricas. Isso lhe dará um treinamento extra sobre esse tema. Finalmente, quanto ao exercício 7, faça $2x = 3 \operatorname{sen} \theta$ e lembre-se de que, portanto, $dx = \frac{3}{2} \cos \theta d\theta$.

Até a próxima aula!

Aula 23 – Técnicas de integração – frações parciais – primeira parte

Objetivo

Aprender a técnica de integração conhecida como frações parciais.

Introdução

A técnica que você aprenderá agora lhe permitirá integrar as chamadas funções racionais, isto é, as funções cujas leis de definição são quocientes de dois polinômios. Aqui estão alguns exemplos:

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{x^4 - x^3 + 3}{x - 1}; \\g(x) &= \frac{2x - 7}{x^2 + 3}; \\h(x) &= \frac{2}{x^3 - 2x + 1}.\end{aligned}$$

Você já sabe integrar algumas funções racionais. Veja o próximo exemplo:

Exemplo 23.1

1. $\int \frac{1}{x-1} dx = \ln|x-1| + C;$
2. $\int \frac{1}{4+x^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C;$
3. $\int \frac{x+1}{x^2+2x+2} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+2) + C.$

Muito bem, você deve estar se perguntando: quais casos eu ainda não sei? Bem, a seguir apresentamos alguns exemplos que você, provavelmente, ainda não sabe integrar.

Exemplo 23.2

1. $\int \frac{1}{x^2 - x - 6} dx;$

Lembre-se de que a solução do exemplo 23.1.3 deve-se à substituição simples $u = x^2 + 2x + 2$.

$$2. \int \frac{2x^2 + 8x - 14}{x^3 - 7x + 6} dx;$$

$$3. \int \frac{3x^2 + 5x + 6}{x^3 + 3x^2 + 7x + 5} dx.$$

A técnica usada para integrar casos como esses consiste em reduzi-los a somas de casos mais simples, como aqueles do exemplo 23.1. Em outras palavras, reduziremos uma fração complicada em uma soma de frações mais simples, as chamadas *frações parciais*. Veja o próximo exemplo.

Exemplo 23.3

Podemos reescrever a expressão algébrica $\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-2}$ usando o menor múltiplo comum, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-2} &= \frac{2(x-2) + 3(x+1)}{(x-1)(x-2)} = \\ &= \frac{2x - 4 + 3x + 3}{x^2 - 2x + x - 2} = \\ &= \frac{5x - 1}{x^2 - x - 2}. \end{aligned}$$

A igualdade anterior é a chave para o funcionamento da técnica chamada frações parciais. Isto é, a expressão algébrica $\frac{5x-1}{x^2-x-2}$ pode ser escrita como a soma de suas frações parciais: $\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-2}$. Do ponto de vista do cálculo, a integral $\int \frac{5x-1}{x^2-x-2} dx$, que não sabíamos calcular, agora pode ser calculada:

$$\begin{aligned} \int \frac{5x-1}{x^2-x-2} dx &= \int \left[\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-2} \right] dx = \\ &= \int \frac{2}{x+1} dx + \int \frac{3}{x-2} dx = \\ &= 2 \ln|x+1| + 3 \ln|x-2| + C. \end{aligned}$$

Você deve ter percebido que, para aplicar a técnica, devemos aprender a fazer o percurso algébrico inverso daquele apresentado no exemplo. Como escrever uma expressão algébrica $\frac{p(x)}{q(x)}$ como a soma de suas frações parciais? É o que você aprenderá agora. Para isso, precisaremos lembrar alguns fatos da teoria de polinômios.

Grau de um polinômio

O grau de um polinômio $p(x)$ é o seu maior expoente. Aqui estão alguns polinômios e seus respectivos graus:

	Polinômio	grau do polinômio
1)	$\pi x - 7$	1
2)	$x^2 - \sqrt{2}x - 3$	2
3)	$x - x^3 + x^7$	7
4)	31	0

Para efeito de técnica de integração, basta saber integrar as frações $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, cujo grau do numerador é menor do que o grau do denominador. Estas frações são chamadas *frações próprias*. Caso contrário, poderemos efetuar a divisão de polinômios e recair numa soma de um polinômio com uma fração própria. O numerador da fração própria será o resto da divisão polinomial. Veja um exemplo a seguir.

Exemplo 23.4

Considere $f(x) = \frac{x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1}{x^2 - x + 2}$. O grau do numerador é 4 e o grau do denominador é 2. Efetuando a divisão de polinômios, temos:

$$\begin{array}{r}
 x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1 \quad \left| \begin{array}{l} x^2 - x + 2 \\ x^2 + 2x - 1 \end{array} \right. \\
 -x^4 + x^3 - 2x^2 \\
 \hline
 2x^3 - 3x^2 + 2x - 1 \\
 -2x^3 + 2x^2 - 4x \\
 \hline
 -x^2 - 2x - 1 \\
 x^2 - x + 2 \\
 \hline
 \text{resto:} \quad -3x + 1
 \end{array}$$

O resto da divisão é o polinômio $-3x + 1$, que tem grau menor do que o grau do denominador. Podemos escrever:

$$\int \frac{x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1}{x^2 - x + 2} dx = \int (x^2 + 2x - 1) dx + \int \frac{-3x + 1}{x^2 - x + 2} dx.$$

Como é fácil integrar polinômios, basta nos concentrarmos na integração de frações próprias.

Lembre-se: a variável é o x .
Note que, no exemplo 23.1, o coeficiente do termo de grau 1 é o número real π .

Um pouco de álgebra de polinômios...

O Teorema Fundamental da Aritmética afirma que todo inteiro é o produto de fatores primos e essa decomposição é única, a menos da ordem dos fatores ou de sinais. Assim, 516 se decompõe, de maneira única, como $2^2 \times 3 \times 43$. Ou ainda, $2034 = 2 \times 3^2 \times 113$. Note que encontrar os fatores primos de um dado número pode não ser uma tarefa fácil. Por exemplo, tente calcular os fatores primos de 2334762. Mas isso é outra história.

O que nos interessa agora é que os números inteiros podem ser decompostos, sob o ponto de vista da multiplicação, em “blocos básicos”, os números primos, que são, por sua vez, indecomponíveis. Muito bem, algo semelhante ocorre com os polinômios. Isto é, todo polinômio $p(x)$, com coeficientes nos números reais, pode ser decomposto em polinômios indecomponíveis, que fazem o papel dos números primos, na decomposição dos números. Esses polinômios são chamados *irredutíveis*. Veja dois exemplos:

Considere $x^2 - 5x + 6$. Você já deve conhecer o velho truque: quais são os dois números que, somados dão -5 e multiplicados dão 6 ? A resposta: -2 e -3 . Ótimo! Portanto,

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3).$$

Além disso, essa decomposição não pode ser levada mais longe. Isso significa que os binômios $x - 2$ e $x - 3$ são irredutíveis.

Veja agora esse outro caso: $x^2 + 2x + 2$. O truque usado no caso anterior não funciona. A razão é simples: esse polinômio não tem raízes reais. Na verdade,

$$x^2 + 2x + 2 = x^2 + 2x + 1 + 1 = (x + 1)^2 + 1 \geq 1 > 0.$$

Uma outra maneira de verificar é usando o discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \times 2 = -4 < 0.$$

Logo, o polinômio $x^2 + 2x + 2$ é indecomponível ou irredutível sobre os números reais.

Bem, podemos terminar nossa pequena digressão sobre álgebra de polinômios com a seguinte conclusão: todo polinômio $p(x)$, com coeficientes reais, se decompõe como o produto de polinômios da forma $x - a$, um para cada uma de suas raízes reais, ou de polinômios de grau dois, que não admitem raízes reais. Aqui estão alguns exemplos.

Exemplo 23.5

$$\begin{aligned}
 x^2 + 2x - 3 &= (x + 3)(x - 1); \\
 x^2 - x &= x(x - 2); \\
 x^3 - 2x^2 - 4x + 8 &= (x - 2)^2(x + 2); \\
 2x^3 - 11x^2 + 17x - 6 &= (x - 3)(x - 2)(2x - 1); \\
 -x^4 + 11x^3 - 52x^2 + 60x &= (x^2 - 4x + 20)(3 - 2x)x.
 \end{aligned}$$

A fatoração é única, a menos de produtos por constantes não-nulas. Veja que, por exemplo, o polinômio x é indecomponível. Além disso, o mesmo polinômio indecomponível pode ser usado mais do que uma vez para compor o polinômio maior, como o fator $x - 2$, no terceiro polinômio de lista anterior. O número de vezes que ele aparece é chamado multiplicidade.

Exercício 1.

Encontre a decomposição em fatores irredutíveis dos seguintes polinômios:

1. $x^2 + 2x - 3$;
2. $x^2 + 4x - 21$;
3. $2x^2 - 5x + 3$;
4. $x^3 - 2x^2 - x + 2$;
5. $x^3 + 9x^2 + 16x - 26$.

Sugestão: encontre pelo menos uma raiz.

Muito bem, dada uma função racional $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, para decompô-la em frações parciais, devemos achar a decomposição do denominador $q(x)$ em fatores irredutíveis. Lembre-se do exemplo 23.3, em que $p(x) = 5x - 1$ e $q(x) = x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$.

Vamos começar com os casos mais simples. Além disso, para tornar toda a discussão um pouco menos carregada, vamos considerar apenas os casos em que o coeficiente do termo de maior grau do denominador é 1. Note que, caso isso não ocorra, podemos reduzir o problema a este caso, colocando este coeficiente em evidência. Por exemplo,

$$\int \frac{7x - 5}{2x^2 - 5x + 2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{7x - 5}{x^2 - 5/2x + 1} dx.$$

O caso em que os fatores são binômios

Queremos decompor a expressão $\frac{p(x)}{q(x)}$ como uma soma de frações parciais, no caso em que $q(x)$ é o produto de binômios. Aqui está um exemplo em que o grau de $q(x)$ é 3:

$$\frac{p(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)}.$$

Nestes casos, a decomposição será como soma de frações do tipo $\frac{A}{x-a}$, com uma parcela para cada binômio do denominador. Com um pouco de manuseio algébrico e usando a igualdade de polinômios, podemos determinar as constantes que aparecem nos numeradores, encontrando, assim, a decomposição. Parece complicado, mas um exemplo ajudará.

Exemplo 23.6

Calcule $\int \frac{5-x}{x^2-x-2} dx$.

Note que o denominador tem grau 2 e o numerador tem grau 1. Além disso, o denominador pode ser decomposto como $x^2-x-2 = (x+1)(x-2)$. Lembre-se: quais são os dois números cuja soma é -1 e o produto é -2 ? A resposta é 1 e -2 . Portanto, $(x+1)(x-2) = x^2-x-2$ e

$$\frac{5-x}{x^2-x-2} = \frac{5-x}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}.$$

Calculando o mínimo múltiplo comum, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{5-x}{(x+1)(x-2)} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} = \\ &= \frac{A(x-2) + B(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \\ &= \frac{(A+B)x - 2A + B}{(x+1)(x-2)}. \end{aligned}$$

Ora, a igualdade de polinômios nos dá o seguinte sistema de duas equações lineares e duas incógnitas:

$$\begin{cases} A+B = -1 \\ -2A+B = 5. \end{cases}$$

A primeira equação provém da igualdade dos coeficientes do termo de grau 1, do numerador, e a segunda, do termo constante.

Resolvendo esse sistema, obtemos a solução $A = -2$, $B = 1$. Isso determina

$$\frac{5-x}{(x+1)(x-2)} = \frac{-2}{x+1} + \frac{1}{x-2},$$

portanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{5-x}{x^2-x-2} dx &= \int \frac{-2}{x+1} dx + \int \frac{1}{x-2} dx = \\ &= -2 \ln|x+1| + \ln|x-2| + C. \end{aligned}$$

Que tal você experimentar um exercício semelhante? Aqui está.

Exercício 2.

$$\text{Calcule } \int \frac{-8x}{(x^2-1)(x-3)} dx.$$

Contando multiplicidades

Note que o mesmo binômio pode aparecer como um fator múltiplo do denominador. Nesse caso, devemos considerar todas as possíveis multiplicidades como eventuais frações parciais. Isto é, se $(x-a)^r$ é um fator do denominador, devemos contar com

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \frac{A_3}{(x-a)^3} + \cdots + \frac{A_r}{(x-a)^r}$$

entre as possíveis frações parciais. Veja como isso funciona no próximo exemplo.

Exemplo 23.7

$$\text{Calcule } \int \frac{4x^3 - 9x^2 + 7x - 3}{x(x-1)^3} dx.$$

O fator $(x-1)$ tem multiplicidade 3. Portanto, a soma de frações parciais ficará

$$\frac{4x^3 - 9x^2 + 7x - 3}{(x-1)^3 x} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x-1)^3} + \frac{B}{x}.$$

Multiplicando a expressão acima por $x(x-1)^3$, obtemos:

$$\begin{aligned} 4x^3 - 9x^2 + 7x - 3 &= A_1(x-1)^2 x + A_2(x-1)x + A_3 x + B(x-1)^3 = \\ &= A_1(x^3 - 2x^2 + x) + A_2(x^2 - x) + A_3 x + B(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = \\ &= (A_1 + B)x^3 + (-2A_1 + A_2 - 3B)x^2 + (A_1 - A_2 + A_3 + 3B)x - B. \end{aligned}$$

Assim, da igualdade de polinômios, temos:

do termo constante,

$$-B = -3 \implies B = 3;$$

do termo de grau 3,

$$A_1 + B = 4 \implies A_1 = 4 - 3 = 1;$$

do termo de grau 2,

$$-2A_1 + A_2 - 3B = -9 \implies A_2 = -9 + 2 + 9 = 2;$$

finalmente, do termo de grau 1,

$$A_1 - A_2 + A_3 + 3B = 7 \implies A_3 = 7 - 1 + 2 - 9 = -1.$$

Ou seja,

$$\frac{4x^3 - 9x^2 + 7x - 3}{(x-1)^3(x+2)} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{3}{x}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int \frac{4x^3 - 9x^2 + 7x - 3}{(x-1)^3(x+2)} dx &= \\ &= \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{2}{(x-1)^2} dx - \int \frac{1}{(x-1)^3} dx + \int \frac{3}{x} dx = \\ &= \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{2(x-1)^2} + 3 \ln|x| + C. \end{aligned}$$

Exercício 3.

Escreva a expansão em frações parciais de $\frac{2x^2 - 6x + 1}{(x-2)^2(x+1)}$, deixando as constantes apenas indicadas, sem calculá-las.

Uso de limites para calcular as constantes

O cálculo das constantes que determinam as frações parciais demanda um esforço considerável: há a manipulação algébrica e o sistema de equações lineares para ser resolvido. No entanto, há uma maneira mais simples de determinar essas constantes usando, de maneira apropriada, o limite de funções.

Veja, no exemplo a seguir, como isso funciona.

Exemplo 23.8

Considere a função

$$f(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

definida no conjunto $\mathbb{R} - \{-1, 2, 3\}$.

Vamos, antes de mais nada, calcular alguns limites:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow -1} (x+1) f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{(x+1)A}{x+1} + \frac{(x+1)B}{x-2} + \frac{(x+1)C}{x-3} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \left[A + \frac{(x+1)B}{x-2} + \frac{(x+1)C}{x-3} \right] = A, \end{aligned}$$

$$\text{pois } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)B}{x-2} = 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)C}{x-3} = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} (x-2) f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{(x-2)A}{x+1} + \frac{(x-2)B}{x-2} + \frac{(x-2)C}{x-3} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{(x-2)A}{x+1} + B + \frac{(x-2)C}{x-3} \right] = B; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{x \rightarrow 3} (x-3) f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} \left[\frac{(x-3)A}{x+1} + \frac{(x-3)B}{x-2} + \frac{(x-3)C}{x-3} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \left[\frac{(x-3)A}{x+1} + \frac{(x-3)B}{x-2} + C \right] = C. \end{aligned}$$

Resumindo:

Se $f(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$, então

$$\begin{cases} A = \lim_{x \rightarrow -1} (x+1) f(x); \\ B = \lim_{x \rightarrow 2} (x-2) f(x); \\ C = \lim_{x \rightarrow 3} (x-3) f(x); \end{cases}$$

Veja, usando o limite fomos capazes de detectar, separadamente, cada uma das três constantes: A , B e C .

CÁLCULO II

Vamos, agora, considerar o problema a seguir.

Calcular

$$\int \frac{x - 11}{x^3 - 4x^2 + x + 6} dx.$$

A primeira dificuldade: fatorar o denominador. Uma rápida inspeção nos diz que -1 é uma raiz. Assim, $x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x + 1)(x^2 - 5x + 6)$. Com isso, achamos as duas outras raízes: 2 e 3 . Portanto,

$$\int \frac{x - 11}{x^3 - 4x^2 + x + 6} dx = \int \frac{x - 11}{(x + 1)(x - 2)(x - 3)} dx.$$

Como vimos no início da aula, existem A , B e C , tais que

$$\frac{x - 11}{x^3 - 4x^2 + x + 6} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x - 3}.$$

Ótimo! Vamos usar o limite para calcular as constantes. Isto é, se fizermos $f(x) = \frac{x - 11}{x^3 - 4x^2 + x + 6}$, temos:

$$\begin{cases} A = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x - 11}{(x - 2)(x - 3)} = \frac{-12}{12} = -1; \\ B = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 11}{(x + 1)(x - 3)} = \frac{-9}{-3} = 3; \\ C = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 11}{(x + 1)(x - 2)} = \frac{-8}{4} = -2. \end{cases}$$

Agora, é só integrar:

$$\begin{aligned} \int \frac{x - 11}{x^3 - 4x^2 + x + 6} dx &= \int \frac{-1}{x + 1} dx + \int \frac{3}{x - 2} dx + \int \frac{-2}{x - 3} dx = \\ &= 3 \ln |x - 2| - \ln |x + 1| - 2 \ln |x - 3| + K. \end{aligned}$$

É fácil! Você precisa experimentar. Aqui está a sua chance.

Exercício 4.

Use o limite para determinar as constantes da expansão em frações parciais e calcule $\int \frac{2 - x}{(x + 2)(x - 4)} dx$.

Você deve fazer

$$\frac{2 - x}{(x + 2)(x - 4)} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x - 4}.$$

Então,

$$A = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2-x}{x-4} =$$

$$B = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2-x}{x+2} =$$

Uma vez calculados os limites, basta fazer a integração.

Como lidar com multiplicidade

Quando uma das raízes do denominador tem multiplicidade 2, ou maior, a técnica do limite permite calcular a constante da parcela de maior grau. Veja, no exemplo, como fazer.

Exemplo 23.9

Vamos calcular $\int \frac{5x^2 + 13x + 9}{(x-1)(x+2)^2} dx$.

Aqui está a expansão do quociente em soma de frações parciais:

$$\frac{5x^2 + 13x + 9}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}. \quad (*)$$

Podemos usar limite para determinar os valores de A e de C :

$$A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 + 13x + 9}{(x+2)^2} = \frac{5 + 13 + 9}{3^2} = \frac{27}{9} = 3;$$

$$C = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{5x^2 + 13x + 9}{x-1} = \frac{20 - 26 + 9}{-3} = \frac{3}{-3} = -1.$$

Isto é, para descobrir o valor de A , tomamos o limite de $(x-1)f(x)$, quando x tende a 1, e para C , tomamos o limite de $(x+2)^2 f(x)$, quando x tende a -2 .

Agora, usamos na igualdade (*) a informação $A = 3$ e $C = -1$:

$$\begin{aligned} \frac{5x^2 + 13x + 9}{(x-1)(x+2)^2} &= \frac{3}{x-1} + \frac{B}{x+2} - \frac{1}{(x+2)^2} = \\ &= \frac{3(x+2)^2 + B(x+2)(x-1) - (x-1)}{(x-1)(x+2)^2}. \end{aligned}$$

Para determinar o valor de B , basta considerar o coeficiente do termo de maior grau do numerador: $5 = 3 + B$. Assim, $B = 2$ e

$$\begin{aligned} \int \frac{5x^2 + 13x + 9}{(x-1)(x+2)^2} dx &= \int \frac{3}{x-1} dx + \int \frac{2}{x+2} dx + \int \frac{-1}{(x+2)^2} dx = \\ &= 3 \ln |x-1| + 2 \ln |x+2| + \frac{1}{x+2} + K. \end{aligned}$$

Principais pontos da aula

Você deve ter observado que para integrar funções racionais devemos nos preocupar apenas com as frações próprias. Caso contrário, a divisão de polinômios transformará a função racional numa soma de um polinômio com uma fração própria cujo numerador é o resto dessa divisão.

Além disso, quando o denominador de uma fração própria se decompõe como o produto de binômios, essa fração se decomporá como a soma de frações parciais do tipo $\frac{A}{x-a}$, caso o fator tenha multiplicidade 1, ou $\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_r}{(x-a)^r}$, caso o fator tenha multiplicidade r .

Um polinômio tem apenas binômios entre seus fatores se, e somente se, todas as suas raízes são reais, contadas com suas respectivas multiplicidades.

Os casos em que o denominador tem fatores irredutíveis de ordem 2 serão vistos na próxima aula.

Uma palavra sobre uma dificuldade técnica. De um modo geral, dado um polinômio de grau maior ou igual a três, decompô-lo em fatores irredutíveis demanda encontrar suas raízes (reais ou complexas). Isso pode não ser uma tarefa fácil. Apesar disso, a técnica de integração por frações parciais só pode ser aplicada caso conheçamos os fatores irredutíveis do denominador.

Exercícios

Vamos começar apresentando as soluções dos exercícios deixados ao longo da aula.

Exercício 1.

Encontre a decomposição em fatores irredutíveis dos seguintes polinômios:

1. $x^2 + 2x - 3$;
2. $x^2 + 4x - 21$;
3. $2x^2 - 5x + 3$;
4. $x^3 - 2x^2 - x + 2$;
5. $x^3 + 9x^2 + 16x - 26$.

Solução:

1. $x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$;
2. $x^2 + 4x - 21 = (x + 7)(x - 3)$;
3. $2x^2 - 5x + 3 = (x - 1)(2x - 3)$;
4. $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x - 1)(x - 2)(x + 1)$;
5. $x^3 + 9x^2 + 16x - 26 = (x - 1)(x^2 + 10x + 26)$.

Exercício 2.

Calcule a integral $\int \frac{-8x}{(x^2 - 1)(x - 3)} dx$.

Solução: primeiro devemos escrever a fração própria como soma de frações parciais.

$$\frac{-8x}{(x - 1)(x + 1)(x - 3)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{x - 3}.$$

Multiplicando a igualdade por $(x - 1)(x + 1)(x - 3)$, temos:

$$\begin{aligned} -8x &= A(x + 1)(x - 3) + B(x - 1)(x - 3) + C(x - 1)(x + 1) = \\ &= A(x^2 - 2x - 3) + B(x^2 - 4x + 3) + C(x^2 - 1) = \\ &= (A + B + C)x^2 + (-2A - 4B)x + (-3A + 3B - C). \end{aligned}$$

Esta igualdade de polinômios nos dá o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ -2A - 4B = -8 \\ -3A + 3B - C = 0. \end{cases}$$

Este sistema tem como solução $A = 2$, $B = 1$ e $C = -3$. Assim,

$$\begin{aligned} \int \frac{-8x}{(x - 1)(x + 1)(x - 3)} dx &= \int \frac{2}{x - 1} dx + \frac{1}{x + 1} dx - \frac{3}{x - 3} dx = \\ &= 2 \ln |x - 1| + \ln |x + 1| - 3 \ln |x - 3| + C. \end{aligned}$$

CÁLCULO II

Exercício 3.

Escreva a expansão em frações parciais de $\frac{2x^2 - 6x + 1}{(x - 1)^2(x + 1)}$, deixando as constantes apenas indicadas, sem calculá-las.

Solução: levando em conta a multiplicidade de $(x - 2)$ e o fato de a fração ser própria, a expansão em frações parciais deve ser da seguinte forma:

$$\frac{2x^2 - 6x + 1}{(x - 1)^2(x + 1)} = \frac{A_1}{x - 1} + \frac{A_2}{(x - 1)^2} + \frac{B}{x + 1}.$$

Podemos usar o limite para calculá-las.

$$\begin{aligned} A_2 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 6x + 1}{x + 1} = \frac{2 - 6 + 1}{2} = -\frac{3}{2} \\ B &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 6x + 1}{(x - 1)^2} = \frac{2 + 6 + 1}{4} = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

Substituindo os valores obtidos na igualdade anterior, obtemos o valor de A_1 . A resposta é $-\frac{1}{4}$.

Exercício 4.

Use o limite para determinar as constantes da expansão em frações parciais e calcule $\int \frac{2 - x}{(x + 2)(x - 4)} dx$.

Solução: escrevendo a fração como uma soma de frações parciais:

$$\frac{2 - x}{(x + 2)(x - 4)} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x - 4}.$$

Então,

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2 - x}{x - 4} = \frac{4}{-6} = -\frac{2}{3} \\ B &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - x}{x + 2} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{2 - x}{(x + 2)(x - 4)} dx &= -\frac{2}{3} \int \frac{1}{x + 2} dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{x - 4} dx = \\ &= -\frac{2}{3} \ln |x + 2| - \frac{1}{3} \ln |x - 4| + K. \end{aligned}$$

Calcule as seguintes integrais:

5. $\int \frac{3x - 1}{x^2 - x} dx.$

6. $\int \frac{1 - 2x}{x^2 + 3x + 2} dx.$

7. $\int \frac{8x - 5}{(2x - 1)(x - 1)} dx.$

8. $\int \frac{5x - 7}{x^2 - 2x - 3} dx.$

9. $\int \frac{3x^2 - 16 + 4x}{(x - 1)(x^2 - 4)} dx.$

10. $\int \frac{3x^2 - 10x + 11}{(x - 3)(x^2 - 1)} dx.$

11. $\int \frac{9x^2 + 2x - 2}{x(x - 1)(x + 2)} dx.$

12. $\int \frac{x^2 - 3x + 4}{x(x - 2)^2} dx.$

13. $\int \frac{3x^2 - x^3 - 2x + 1}{x^2(x - 1)^2} dx.$

14. $\int \frac{2x^3 - 11x^2 + 20x - 1}{x^2 - 5x + 6} dx.$

Exercício 15.

Expanda $\frac{x^2 - x}{(x - 1)^2(x - 3)^3(x + 1)}$ em soma de frações parciais, deixando as constantes indicadas, sem calculá-las.

Aula 24 – Técnicas de integração – frações parciais – segunda parte

Objetivo

Aprender a técnica de integração conhecida como frações parciais.

Como lidar com fatores irredutíveis de grau 2

Agora queremos integrar uma fração própria cujo denominador tem $ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, como um de seus fatores irredutíveis. Isto é, $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Vamos inicialmente tratar do caso em que este fator tem multiplicidade 1. Bem, nesse caso, devemos contar com $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ entre suas possíveis frações parciais. Veja o exemplo:

Exemplo 24.1

Calcule $\int \frac{3x^2 + 1}{(x^2 + 1)(x - 1)} dx$.

Os fatores irredutíveis do denominador são: $x^2 + 1$ e $x - 1$, ambos de multiplicidade 1. A expansão em soma de frações parciais deve ser:

$$\frac{3x^2 + 1}{(x^2 + 1)(x - 1)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{C}{x - 1}.$$

O próximo passo consiste em calcular as constantes A , B e C . Procedemos da mesma maneira como fizemos na aula anterior, ou seja, multiplicamos a igualdade anterior por $(x^2 + 1)(x - 1)$, obtendo:

$$\begin{aligned} 3x^2 + 1 &= (Ax + B)(x - 1) + C(x^2 + 1) = \\ &= Ax^2 - Ax + Bx - B + Cx^2 + C = \\ &= (A + C)x^2 + (-A + B)x + (-B + C). \end{aligned}$$

A igualdade de polinômios implica o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} A + C = 3 \\ -A + B = 0 \\ -B + C = 1. \end{cases}$$

Você pode resolver este sistema de equações da maneira que você preferir. É verdade que cada caso pode ser abordado dessa ou daquela maneira,

CÁLCULO II

dependendo do tamanho ou da dificuldade aparente do sistema. Aproveitamos aqui para lembrar o método chamado escalonamento de matrizes.

O método consiste em escrever a chamada matriz aumentada do sistema e, fazendo as operações sobre linhas, reduzir a parte dos coeficientes à matriz identidade. Veja como fazemos nesse exemplo.

A matriz aumentada, considerando as incógnitas A , B e C , nessa ordem, é a primeira das matrizes a seguir. As letras indicam as operações efetuadas em cada passagem.

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right] \rightsquigarrow L_2 + L_1 \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right] \rightsquigarrow L_2 + L_3 \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array} \right] \rightsquigarrow \\ & \rightsquigarrow \begin{array}{ccc} L_1 \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] & L_1 - L_3 \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] & \begin{array}{l} A = 1 \\ B = 1 \\ C = 2. \end{array} \end{array} \end{aligned}$$

Alternativamente, podemos usar o limite para determinar a constante do termo $\frac{C}{x-1}$. Veja:

$$C = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 1}{x^2 + 1} = \frac{4}{2} = 2.$$

Agora,

$$\begin{aligned} \frac{3x^2 + 1}{(x^2 + 1)(x - 1)} &= \frac{(Ax + B)(x - 1) + 2(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)(x - 1)} = \\ &= \frac{Ax^2 - Ax + Bx - B + 2x^2 + 2}{(x^2 + 1)(x - 1)} = \\ &= \frac{(A + 2)x^2 + (-A + B)x + (-B + 2)}{(x^2 + 1)(x - 1)}. \end{aligned}$$

As contas foram reduzidas de maneira drástica:

$$A + 2 = 3 \quad \text{e} \quad -B + 2 = 1.$$

Portanto, $A = B = 1$. Veja, não usamos a informação $-A + B = 0$.

Assim,

$$\int \frac{3x^2 + 1}{(x^2 + 1)(x - 1)} dx = \int \frac{x + 1}{x^2 + 1} dx + \int \frac{2}{x - 1} dx.$$

Vamos olhar, separadamente, a integral $\int \frac{x+1}{x^2+1} dx$. Essa integral é típica quando um dos fatores irredutíveis tem grau 2. Note que, se fizermos $u = x^2 + 1$, teremos $du = 2x dx$. Assim, a integral em questão será dividida em duas:

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{x^2+1} dx &= \int \frac{x}{x^2+1} dx + \int \frac{1}{x^2+1} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx + \int \frac{1}{x^2+1} dx = \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x + K_1. \end{aligned}$$

Portanto, podemos terminar a integração proposta inicialmente:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2+1}{(x^2+1)(x-1)} dx &= \int \frac{x+1}{x^2+1} dx + \int \frac{2}{x-1} dx = \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x + 2 \ln|x-1| + K \end{aligned}$$

Exercício 1. Calcule $\int \frac{2x^3 + 7x^2 + 12x + 20}{(x^2 + 4x + 5)(x^2 + 2)} dx$.

Veja mais um exemplo.

Exemplo 24.2

Faça a expansão em frações parciais da fração própria

$$\frac{5x^4 + 8x^3 + 4x^2 - 2}{x^2(x-1)(x^2+2x+2)},$$

deixando as constantes apenas indicadas.

Os fatores irredutíveis são: x , $x-1$ e x^2+2x+2 . Levando em conta a multiplicidade do fator x e que x^2+2x+2 é um fator irredutível de grau 2, a expansão em soma de frações parciais ficará da seguinte forma:

$$\frac{5x^4 + 8x^3 + 4x^2 - 2}{x^2(x-1)(x^2+2x+2)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2}.$$

Note que para encontrar os valores das constantes A_1 , A_2 , B , C e D , deveríamos resolver um sistema linear de 5 equações e com 5 incógnitas.

Caso em que a multiplicidade do termo de grau 2 é maior do que 1

Finalmente, vamos tratar do caso em que a multiplicidade dos fatores irredutíveis de grau 2 seja maior que 1. A maneira de tratar esse caso é semelhante àquela dada no caso de multiplicidade maior do que 1 dos fatores irredutíveis de grau 1. Isto é, se $ax^2 + bx + c$ é um fator do denominador, de multiplicidade r , devemos considerar entre as eventuais frações parciais as seguintes:

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_rx + B_r}{(ax^2 + bx + c)^r}.$$

Veja os seguintes exemplos.

Exemplo 24.3

Aqui estão duas frações próprias com suas respectivas decomposições em somas de frações parciais.

$$\begin{aligned} 1) \quad \frac{p(x)}{x(x^2 + 4x + 5)^2} &= \frac{A_1x + B_1}{x^2 + 4x + 5} + \frac{A_2x + B_2}{(x^2 + 4x + 5)^2} + \frac{C}{x}. \\ 2) \quad \frac{p(x)}{(x^2 + 1)^2(x^2 + x + 1)^2} &= \frac{A_1x + B_1}{x^2 + 1} + \frac{A_2x + B_2}{(x^2 + 1)^2} + \\ &+ \frac{C_1x + D_1}{x^2 + x + 1} + \frac{C_2x + D_2}{(x^2 + x + 1)^2}. \end{aligned}$$

Aqui vamos contar com duas dificuldades técnicas. A primeira é a de calcular os valores das constantes. Você já deve ter notado que, quanto maior é o grau do denominador, maior é o número de incógnitas a calcular.

A segunda dificuldade, que você ainda não experimentou, surgirá quando formos integrar uma fração do tipo

$$\frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^r},$$

com $ax^2 + bx + c$ irredutível e $r > 1$.

Quanto à primeira dificuldade, não há muito o que fazer, a menos que você disponha de uma máquina de resolver sistemas. Note que sistemas de tamanho 3×3 ou 4×4 são relativamente acessíveis pelo método de escalonamento de matrizes. A segunda dificuldade será assunto desta última etapa da aula.

Muito bem, avante!

Vamos considerar o caso em que o termo irredutível é da forma $x^2 + bx + c$. Assim, suponhamos que a seja igual a 1. Isso facilitará nossa abordagem e não significa nenhum impedimento, pois, do ponto de vista da integração, a multiplicação por uma constante não-nula é um recurso muito usado. Veja o exemplo a seguir.

Exemplo 24.4

$$\int \frac{2x^2 + 3}{(2x^2 + 2x + 4)^2} dx = \frac{1}{4} \int \frac{2x^2 + 3}{(x^2 + x + 2)^2} dx.$$

Agora, se $x^2 + bx + c$ é um polinômio irredutível, usando a técnica de recomposição do quadrado, podemos reescrevê-lo na forma $(x + \beta)^2 + \alpha^2$, e após a mudança de variável $u = x + \beta$, passa a ser da forma $u^2 + \alpha^2$. Veja no exemplo a seguir.

Exemplo 24.5

Considere o polinômio $x^2 - 4x + 5$. Como $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 20 = -4 < 0$, ele é um polinômio irredutível. Agora,

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 5 &= x^2 - 2 \times 2x + 4 + 1 = \\ &= (x^2 - 4x + 4) + 1 = \\ &= (x - 2)^2 + 1. \end{aligned}$$

Nesse caso, $\beta = -2$ e $\alpha = 1$.

Exercício 2. Reescreva o polinômio $x^2 + x + 1$ na forma $(x + \beta)^2 + \alpha^2$.

Nosso problema é integrar frações parciais do tipo $\int \frac{Au + B}{(u^2 + \alpha^2)^r} du$, com $r > 1$. Bem, essa integral pode ser escrita como soma de duas outras integrais:

$$\int \frac{Au + B}{(u^2 + \alpha^2)^r} du = \frac{A}{2} \int \frac{2u}{(u^2 + \alpha^2)^r} du + B \int \frac{1}{(u^2 + \alpha^2)^r} du.$$

A primeira parcela é uma integral que pode ser resolvida por substituição simples:

$$\int \frac{2u}{(u^2 + \alpha^2)^r} du = \frac{1}{(1-r)} \frac{1}{(u^2 + \alpha^2)^{r-1}} + K.$$

A segunda parcela é um pouco mais difícil. Para ela, usamos a seguinte fórmula de recorrência:

$$\int \frac{1}{(u^2 + \alpha^2)^{n+1}} du = \frac{u}{2n\alpha^2(u^2 + \alpha^2)^n} + \frac{2n-1}{2n\alpha^2} \int \frac{1}{(u^2 + \alpha^2)^n} du.$$

Observe que, por conveniência, trocamos r por $n + 1$.

O momento pede um exemplo. Realmente, a fórmula parece saída de uma cartola! Mas tenha um pouco de paciência. Estamos bem próximos do fim.

Exemplo 24.6

Calcule $\int \frac{1}{(u^2 + 4)^2} du$.

Vamos aplicar a fórmula de redução com $\alpha = 2$ e $n + 1 = 2$. Portanto, $n = 1$. Assim,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(u^2 + 4)^2} du &= \frac{u}{2 \cdot 4(u^2 + 4)} + \frac{1}{2 \cdot 4} \int \frac{1}{u^2 + 4} du = \\ &= \frac{u}{8u^2 + 32} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{u}{2} + C = \\ &= \frac{u}{8u^2 + 32} + \frac{1}{16} \operatorname{arctg} \frac{u}{2} + C. \end{aligned}$$

Na prática, não foi tão difícil assim, foi? Bem, na verdade, a fórmula pode ser obtida aplicando integração por partes à integral $\int \frac{1}{(u^2 + \alpha^2)^n} du$.

Vamos ver mais um exemplo.

Exemplo 24.7

Calcule $\int \frac{(x+1)}{(x^2+9)^2} dx$.

A solução consiste em escrever a integral original como soma de duas outras:

$$\int \frac{(x+1)}{(x^2+9)^2} dx = \int \frac{x}{(x^2+9)^2} dx + \int \frac{1}{(x^2+9)^2} dx.$$

A primeira parcela pode ser integrada usando substituição simples:

$$\int \frac{x}{(x^2+9)^2} dx = -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2+9} + K_1.$$

Agora, a segunda parcela: $\int \frac{1}{(x^2+9)^2} dx$.

Vamos considerar uma outra integral: $\int \frac{1}{x^2 + 9} dx$. Podemos aplicar, nessa nova integral, a técnica de integração por partes, fazendo $u = \frac{1}{x^2+9}$ e $dv = dx$. Assim, $du = \frac{-2x}{(x^2+9)^2} dx$ e $v = x$. Portanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 + 9} dx &= \frac{x}{x^2 + 9} - \int \frac{-2x^2}{(x^2 + 9)^2} dx = \\ &= \frac{x}{x^2 + 9} + 2 \int \frac{x^2}{(x^2 + 9)^2} dx = \\ &= \frac{x}{x^2 + 9} + 2 \int \frac{x^2 + 9 - 9}{(x^2 + 9)^2} dx = \\ &= \frac{x}{x^2 + 9} + 2 \int \frac{x^2 + 9}{(x^2 + 9)^2} dx + 2 \int \frac{-9}{(x^2 + 9)^2} dx = \\ &= \frac{x}{x^2 + 9} + 2 \int \frac{1}{x^2 + 9} dx - 18 \int \frac{1}{(x^2 + 9)^2} dx. \end{aligned}$$

Agora, arrumamos essa igualdade de maneira conveniente:

$$\int \frac{1}{x^2 + 9} dx - 2 \int \frac{1}{x^2 + 9} dx = \frac{x}{x^2 + 9} - 18 \int \frac{1}{(x^2 + 9)^2} dx.$$

Portanto,

$$18 \int \frac{1}{(x^2 + 9)^2} dx = \frac{x}{x^2 + 9} + \int \frac{1}{x^2 + 9} dx$$

e, finalmente,

$$\int \frac{1}{(x^2 + 9)^2} dx = \frac{x}{18(x^2 + 9)} + \frac{1}{54} \arctg \frac{x}{3} + C.$$

Principais pontos da aula

Para lidar com fatores irredutíveis de grau 2, devemos acrescentar as frações parciais do tipo $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ às somas de frações parciais.

A integral $\int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx$ se divide em uma soma de duas integrais: um logaritmo e uma arco-tangente.

Os fatores irredutíveis de grau 2 com multiplicidade maior que 1 são tratados de maneira semelhante aos seus similares de grau 1, mas as integrais correspondentes às suas frações parciais são bastante trabalhosas, demandando o uso de uma fórmula de redução.

Exercícios

Vamos começar apresentando as soluções dos exercícios deixados ao longo da aula.

Exercício 1.

$$\text{Calcule } \int \frac{2x^3 + 7x^2 + 12x + 20}{(x^2 + 4x + 5)(x^2 + 2)} dx.$$

Solução: começamos com as frações parciais:

$$\frac{2x^3 + 7x^2 + 12x + 20}{(x^2 + 4x + 5)(x^2 + 2)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 4x + 5} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2}.$$

Multiplicando a igualdade anterior por $(x^2 + 4x + 5)(x^2 + 2)$, temos:

$$\begin{aligned} 2x^3 + 7x^2 + 12x + 20 &= \\ &= (Ax + B)(x^2 + 2) + (Cx + D)(x^2 + 4x + 5) = \\ &= Ax^3 + 2Ax + Bx^2 + 2B + Cx^3 + 4Cx^2 + 5Cx + Dx^2 + 4Dx + 5D \\ &= (A + C)x^3 + (B + 4C + D)x^2 + (2A + 5C + 4D)x + 2B + 5D. \end{aligned}$$

A igualdade de polinômios nos dá o seguinte sistema de quatro equações lineares:

$$\begin{cases} A + C = 2 \\ B + 4C + D = 7 \\ 2A + 5C + 4D = 12 \\ 2B + 5D = 20. \end{cases}$$

A solução desse sistema é: $A = 2$, $B = 5$, $C = 0$ e $D = 2$.

Portanto,

$$\begin{aligned} &\int \frac{2x^3 + 7x^2 + 12x + 20}{(x^2 + 4x + 5)(x^2 + 2)} dx = \\ &= \int \frac{2x + 5}{x^2 + 4x + 5} dx + \int \frac{2}{x^2 + 2} dx = \\ &= \int \frac{2x + 4 + 1}{x^2 + 4x + 5} dx + \int \frac{2}{x^2 + 2} dx = \\ &= \int \frac{2x + 4}{x^2 + 4x + 5} dx + \int \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx + \int \frac{2}{x^2 + 2} dx = \\ &= \int \frac{2x + 4}{x^2 + 4x + 5} dx + \int \frac{1}{(x + 2)^2 + 1} dx + \int \frac{2}{x^2 + 2} dx = \\ &= \ln(x^2 + 4x + 5) + \operatorname{arctg}(x + 2) + \sqrt{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}x}{2}\right) + C. \end{aligned}$$

Exercício 2.

Reescreva o polinômio $x^2 + x + 1$ na forma $(x + \beta)^2 + \alpha^2$.

Solução:

$$\begin{aligned}x^2 + x + 1 &= x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x + 1 = \\&= x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \\&= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

3. Calcule as seguintes integrais:

a) $\int \frac{3x^2 - 3x + 2}{(x - 2)(x^2 + 4)} dx.$

b) $\int \frac{x^3 - 4x + 5}{x^2(x^2 - 4x + 5)} dx.$

c) $\int \frac{2x^3 + x^2 + 2x - 1}{(x^4 - 1)} dx.$

d) $\int \frac{3x^3 + 8x^2 + 11x + 4}{x(x^2 + 2x + 2)^2} dx.$

e) $\int \frac{1}{(2x^2 + 4)^2} dx.$

f) $\int \frac{x - 2}{(x^2 + 9)^3} dx.$

4. Expanda $\frac{x^2 - x}{(x - 1)^2(x^2 + 5x + 7)^3(x^2 + 1)}$ em sua soma de frações parciais, deixando as constantes indicadas, sem calculá-las.

Aula 25 – Técnicas de integração – Aula de exercícios

Objetivo

Conhecer uma nova série de exemplos nos quais diferentes técnicas de integração são utilizadas.

Nesta aula, você verá uma série de exemplos de resoluções de integrais nos quais as diversas técnicas de integração, que você tem aprendido ao longo das aulas anteriores, são utilizadas.

Aqui está o primeiro exemplo.

Exemplo 25.1

Calcule $\int x (\ln x)^2 dx$.

Note que uma substituição simples, como $u = \ln x$, não parece muito promissora, uma vez que temos x multiplicando $(\ln x)^2$. Isso seria o caso se o fator multiplicando $(\ln x)^2$ fosse $\frac{1}{x}$.

Vamos abordar o problema usando a integração por partes. Fazendo $dv = dx$, teremos, necessariamente, $u = x (\ln x)^2$. Assim,

$$\begin{aligned} du &= \left[(\ln x)^2 + 2x (\ln x) \frac{1}{x} \right] dx = \\ &= [(\ln x)^2 + 2 \ln x] dx. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \int x (\ln x)^2 dx &= x^2 (\ln x)^2 - \int x [(\ln x)^2 + 2 \ln x] dx = \\ &= x^2 (\ln x)^2 - \int x (\ln x)^2 dx + \int 2x \ln x dx. \end{aligned}$$

Agora, reunindo os termos iguais, temos:

$$2 \int x (\ln x)^2 dx = x^2 (\ln x)^2 - \int 2x \ln x dx.$$

Veja como o problema tornou-se mais simples. Vamos resolver a integral $\int 2x \ln x dx$ também usando a integração por partes. Nesse caso, faremos $u = \ln x$ e $dv = 2x dx$. Portanto, $du = \frac{1}{x} dx$ e $v = x^2$. Isso nos dá:

$$\begin{aligned} \int 2x \ln x dx &= x^2 \ln x - \int x dx = \\ &= x^2 \ln x - \frac{x^2}{2} + C_1. \end{aligned}$$

Finalmente, podemos concluir nosso cálculo original:

$$\begin{aligned}\int x (\ln x)^2 dx &= \frac{1}{2} \left[x^2 (\ln x)^2 - \int 2x \ln x dx \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[x^2 (\ln x)^2 - x^2 \ln x + \frac{x^2}{2} - C_1 \right] = \\ &= \frac{1}{2} x^2 (\ln x)^2 - \frac{1}{2} x^2 \ln x + \frac{x^2}{4} + C.\end{aligned}$$

Esse exemplo ilustrou como o recurso de reunir o mesmo integrando numa equação, após a aplicação da integração por partes, pode ser útil e como uma mesma técnica pode ser usada duas vezes na resolução do mesmo problema.

Vamos ao próximo exemplo.

Exemplo 25.2

Calcule $\int \frac{1}{x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{2}}} dx$.

Essa integral apresenta a seguinte dificuldade técnica: a variável x aparece com diferentes expoentes fracionários. Em casos como esses, a melhor estratégia é fazer uma substituição simples que eliminará os expoentes fracionários. Veja, se fizermos $u = x^{1/6}$, teremos $x^{1/3} = u^2$ e $x^{1/2} = u^3$. Note que a escolha do expoente $1/6$ não foi casual. Isso cuida de parte do problema. Agora devemos lidar com o dx . Como $u = x^{1/6}$, podemos fazer

$$du = \frac{1}{6} x^{-5/6} dx = \frac{1}{6 (x^{1/6})^5} dx \implies dx = 6 u^5 du.$$

Ótimo! Agora podemos resolver o problema.

$$\int \frac{1}{x^{1/3} + x^{1/2}} dx = \int \frac{6 u^5}{u^2 + u^3} du = \int \frac{6 u^3}{1 + u} du.$$

Efetando a divisão de polinômios:

$$\begin{array}{r|l} u^3 & u + 1 \\ -u^3 - u^2 & \\ \hline -u^2 & \\ +u^2 + u & \\ \hline +u & \\ -u - 1 & \\ \hline \text{resto: } & -1 \end{array}$$

temos

$$\begin{aligned} \int \frac{6u^3}{1+u} du &= 6 \left[\int (u^2 - u + 1) du - \int \frac{1}{1+u} du \right] = \\ &= 6 \left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^2}{2} + u - \ln|1+u| \right) + C. \end{aligned}$$

Finalmente, substituindo $x^{\frac{1}{6}}$ no lugar de u , temos a resposta do exemplo:

$$\int \frac{1}{x^{1/3} + x^{1/2}} dx = 2x^{1/2} - 3x^{1/3} + 6x^{1/6} - 6 \ln(1 + x^{1/6}) + C.$$

Nesse exemplo você viu como uma substituição algébrica simples pode transformar um problema difícil em um novo problema mais acessível.

Nosso próximo exemplo ilustrará como, às vezes, é preciso uma pequena arrumação algébrica, antes de aplicarmos uma determinada técnica. Aqui está:

Exemplo 25.3

Calcule $\int \frac{x^2}{\sqrt{4x - x^2}} dx$.

Esse problema será resolvido por substituição trigonométrica. Mas, antes de aplicarmos essa técnica, devemos fazer um pequeno ajuste algébrico:

$$\begin{aligned} 4x - x^2 &= -(x^2 - 4x) = -(x^2 - 4x + 4 - 4) = \\ &= 4 - (x^2 - 4x + 4) = 4 - (x - 2)^2. \end{aligned}$$

Este artifício é também conhecido como a *reconstrução do quadrado*. Isso nos dá

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4x - x^2}} dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{4 - (x - 2)^2}}.$$

Agora vamos fazer a seguinte substituição trigonométrica:

$$(x - 2) = 2 \operatorname{sen} \theta \implies \sqrt{4 - (x - 2)^2} = 2 \operatorname{cos} \theta$$

e, portanto, $dx = 2 \cos \theta d\theta$. Mas, veja que $x = 2 + 2 \operatorname{sen} \theta$. Assim,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{4x-x^2}} dx &= \int \frac{(2+2\operatorname{sen} \theta)^2 2 \cos \theta}{2 \cos \theta} d\theta = \\ &= 4 \int (1+2\operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) d\theta = \\ &= 4 \left[\theta - 2 \cos \theta + \frac{1}{2} \theta - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \theta \cos \theta \right] + C = \\ &= 4 \left[\theta - 2 \cos \theta + \frac{1}{2} \theta - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \theta \cos \theta \right] + C = \\ &= 4 \left[\frac{3\theta}{2} - 2 \cos \theta - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \theta \cos \theta \right] + C = \\ &= 6\theta - 8 \cos \theta + 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta + C = \\ &= 6\theta - 6 \cos \theta - 2 \cos \theta - 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta + C = \\ &= 6\theta - 6 \cos \theta - 2 \cos \theta (1 + \operatorname{sen} \theta) + C = \end{aligned}$$

Essa última passagem tem um objetivo bem específico. Lembre-se de que a resposta deve ser dada em termos da variável x e, se $2 \cos \theta = \sqrt{4x-x^2}$, $x = 2(1 + \operatorname{sen} \theta)$. Além disso, como $\operatorname{sen} \theta = \frac{x}{2} - 1$, temos $\theta = \arcsen\left(\frac{x}{2} - 1\right)$. Assim, podemos completar os cálculos:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{4x-x^2}} dx &= \\ &= 6 \arcsen\left(\frac{x}{2} - 1\right) - 3\sqrt{4x-x^2} - \frac{x}{2}\sqrt{4x-x^2} + C. \end{aligned}$$

Você viu como precisamos ser cuidadosos para escrever a resposta em termos da variável original.

O próximo exemplo continuará explorando o tema do pequeno ajuste algébrico antes da aplicação da técnica indicada. Além disso, você verá como um pequeno problema pode gerar um grande problema. Aqui está!

Exemplo 25.4

Calcule $\int x\sqrt{x^2-2x} dx$.

Esse problema é quase uma substituição simples. Gostaríamos de fazer $u = x^2 - 2x$. Isso nos dá $du = (2x - 2) dx = 2(x - 1) dx$. Mas o integrando tem um fator x e não $(x - 1)$. Assim, fazemos um pequeno ajuste algébrico, subtraindo e somando 1 nesse fator. Isso desdobrará o problema original em

dois:

$$\begin{aligned} \int x \sqrt{x^2 - 2x} dx &= \int (x - 1 + 1) \sqrt{x^2 - 2x} dx = \\ &= \int ((x - 1) \sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{x^2 - 2x}) dx = \\ &= \int (x - 1) \sqrt{x^2 - 2x} dx + \int \sqrt{x^2 - 2x} dx. \end{aligned}$$

A primeira parcela pode ser resolvida usando substituição simples:

$$\begin{aligned} \int (x - 1) \sqrt{x^2 - 2x} dx &= \frac{1}{2} \int \sqrt{x^2 - 2x} (2x - 2) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int u^{1/2} du = \frac{u^{3/2}}{3} + C = \\ &= \frac{(x^2 - 2x)^{3/2}}{3} + C_1. \end{aligned}$$

A segunda parcela, $\int \sqrt{x^2 - 2x} dx$, demanda uma substituição trigonométrica. Mas, antes, precisamos de fazer um pequeno ajuste algébrico, nos moldes do que foi feito no exemplo anterior.

Como $x^2 - 2x = x^2 - 2x + 1 - 1 = (x - 1)^2 - 1$, faremos a seguinte substituição: $x - 1 = \sec \theta$. Isso acarreta $dx = \sec \theta \operatorname{tg} \theta d\theta$ e $\sqrt{x^2 - 2x} = \operatorname{tg} \theta$. Assim,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 - 2x} dx &= \int \operatorname{tg} \theta \sec \theta \operatorname{tg} \theta d\theta = \sec \theta \operatorname{tg}^2 \theta d\theta = \\ &= \int \sec \theta (\sec^2 \theta - 1) d\theta = \\ &= \int \sec^3 \theta d\theta - \int \sec \theta d\theta. \end{aligned}$$

Você deve lembrar-se de que as integrais de potências ímpares de secante são um pouco trabalhosas. Em qualquer caso, aqui estão:

- $\int \sec \theta d\theta = \ln |\sec \theta + \operatorname{tg} \theta| + C.$
- $\int \sec^3 \theta d\theta = \frac{1}{2} \sec \theta \operatorname{tg} \theta + \frac{1}{2} \ln |\sec \theta + \operatorname{tg} \theta| + C.$

Portanto,

$$\int \sec^3 \theta d\theta - \int \sec \theta d\theta = \frac{1}{2} \sec \theta \operatorname{tg} \theta - \frac{1}{2} \ln |\sec \theta + \operatorname{tg} \theta| + C_2.$$

Assim, escrevendo a resposta em termos da variável original, x , temos:

$$\int \sqrt{x^2 - 2x} dx = \frac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2 - 2x} - \frac{1}{2} \ln|\sqrt{x^2 - 2x} + x - 1| + C_2.$$

Veja que o exemplo ainda não terminou. Esta é a resposta da segunda parcela. Veja, então, o cálculo final:

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x^2 - 2x} dx &= \frac{(x^2 - 2x)^{3/2}}{3} + \frac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2 - 2x} \\ &\quad - \frac{1}{2} \ln|\sqrt{x^2 - 2x} + x - 1| + C. \end{aligned}$$

Esse exemplo mostrou como um pequeno problema pode demandar um bocado de esforço. Vamos terminar com um exemplo que demanda a técnica de frações parciais. Nesse exemplo será ilustrado como é possível lidar com coeficientes diferentes de 1 nos termos de maior grau.

Exemplo 25.5

Calcule $\int \frac{14x^2 + 7x + 2}{(2x^2 + 2x + 5)(3x - 1)} dx$.

A expansão em frações parciais tem a seguinte forma:

$$\frac{14x^2 + 7x + 2}{(2x^2 + 2x + 5)(3x - 1)} = \frac{Ax + B}{2x^2 + 2x + 5} + \frac{C}{3x - 1}.$$

Multiplicando a igualdade por $(2x^2 + 2x + 5)(3x - 1)$, temos:

$$\begin{aligned} 14x^2 + 7x + 2 &= (Ax + B)(3x - 1) + C(2x^2 + 2x + 5) = \\ &= 3Ax^2 - Ax + 3Bx - B + 2Cx^2 + 2Cx + 5C = \\ &= (3A + 2C)x^2 + (-A + 3B + 2C)x - B + 5C. \end{aligned}$$

Isso nos dá o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 3A + 2C &= 14 \\ -A + 3B + 2C &= 7 \\ -2B + 5C &= 2. \end{cases}$$

A solução desse sistema é: $A = 4$, $B = 3$ e $C = 1$. Portanto,

$$\int \frac{14x^2 + 7x + 2}{(2x^2 + 2x + 5)(3x - 1)} dx = \int \frac{4x + 3}{2x^2 + 2x + 5} dx + \int \frac{1}{3x - 1} dx.$$

A primeira parcela se decompõe como a soma de duas integrais: um logaritmo e um arcotangente.

$$\begin{aligned} \int \frac{4x + 3}{2x^2 + 2x + 5} dx &= \int \frac{4x + 2}{2x^2 + 2x + 5} dx + \int \frac{1}{2x^2 + 2x + 5} dx = \\ &= \ln(2x^2 + 2x + 5) + \frac{1}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\right) + C_1. \end{aligned}$$

Realmente, note que $2x^2 + 2x + 5 = 2(x^2 + x + \frac{5}{2}) = 2(x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{9}{4}) = 2((x + \frac{1}{2})^2 + \frac{9}{4})$.

Portanto, podemos responder:

$$\begin{aligned} \int \frac{14x^2 + 7x + 2}{(2x^2 + 2x + 5)(3x - 1)} dx &= \ln(2x^2 + 2x + 5) + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \right) + \\ &= +\frac{1}{3} \ln|3x - 1| + C. \end{aligned}$$

Após todos esses exemplos, você poderá trabalhar na lista de problemas a seguir. Bom trabalho!

Exercícios

Calcule as seguintes integrais:

1. $\int_0^{\sqrt{2}} t\sqrt{1+4t^2} dt.$

2. $\int x \sec^2 x dx.$

3. $\int x\sqrt{2x-x^2} dx.$

4. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{(x+1)^3} dx.$

5. $\int e^x \sqrt{4+e^{2x}} dx.$

6. $\int \frac{1}{x+x^{1/3}} dx.$

7. $\int x^2\sqrt{5+2x-x^2} dx.$

8. $\int \frac{2x+4}{(4x^2+12x+13)^2} dx.$

9. $\int e^x \operatorname{sen} e^x dx.$

10. $\int \frac{3x+2}{1+x^2} dx.$

11. $\int \ln(2+\sqrt{x}) dx.$

12. $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^3} dx.$

13. $\int \frac{x}{\sqrt{2x-x^2}} dx.$

14. $\int \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$

15. $\int \frac{x}{\sqrt{5+12x-9x^2}} dx.$

16. $\int \frac{1}{1+x^3} dx.$

17. $\int \frac{1}{(3x-7)^7} dx.$

18. $\int x e^{-x^2} dx.$

19. $\int x \operatorname{tg}^2 x dx.$

20. $\int \frac{x+1}{(x^2+x+1)} dx.$

21. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+3 \operatorname{sen}^2 x} dx.$

22. $\int x(2+3x)^{1/3} dx.$

23. $\int \frac{1}{x^2+4x+8} dx.$

24. $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} dx.$

CÁLCULO II

25. $\int x^3 \cos x^2 dx.$

26. $\int \sqrt{3 + 2x - x^2} dx.$

27. $\int \frac{x^3}{1 + x^8} dx.$

28. $\int \frac{1}{x^2 - 2x + 2} dx.$

29. $\int x \sqrt{9 - x^4} dx.$

30. $\int \frac{1}{1 + x^4} dx.$

31. $\int \sqrt{1 + e^x} dx.$

Sugestão: $u^2 = 1 + e^x$ ou $t^2 = e^x$.

Aula 26 – Integrais impróprias – Primeira parte

Objetivo

Conhecer as integrais impróprias.

Introdução

Uma das aplicações da integral definida é atribuir área a figuras de formas diversas. Mas, para tudo funcionar bem, apelamos para a garantia dada pelo Teorema Fundamental de Cálculo. Isto é, a região deve ser limitada por funções contínuas, definidas sobre intervalos fechados e limitados.

Nesta aula, você aprenderá que é possível estender essas noções a algumas regiões não-limitadas ou a certos intervalos abertos (sobre os quais funções contínuas podem não ter máximo ou mínimo). O conceito matemático adequado para lidar com essas situações é chamado de *integral imprópria*. Você verá que a noção de limite desempenha um papel fundamental nessa teoria. Começaremos com dois exemplos típicos.

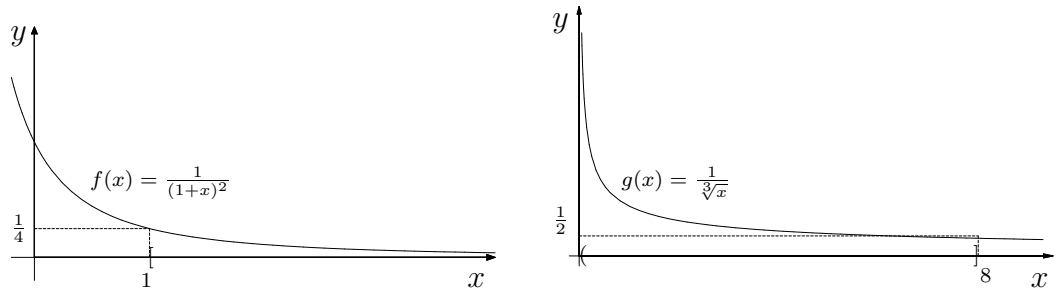
Exemplo 26.1

Considere as seguintes “integrais”:

$$(a) \int_1^{\infty} \frac{1}{(1+x)^2} dx \quad (b) \int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx.$$

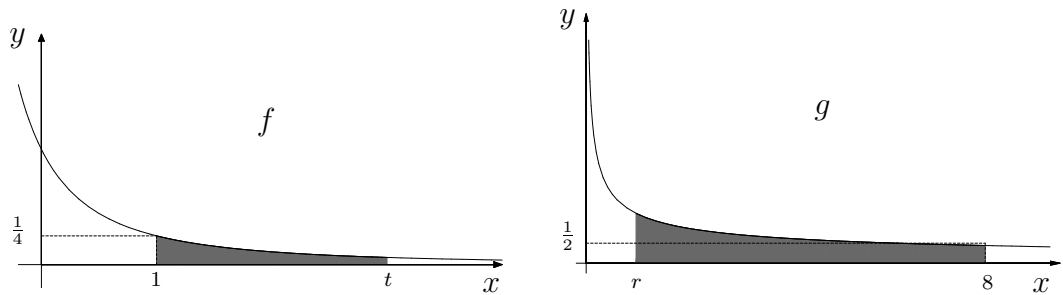
Ambas são exemplos de integrais impróprias. Veja que a integral (a) não está definida num intervalo fechado e limitado. Isso fica evidente pelo uso do símbolo ∞ como seu segundo limite de integração. Ou seja, queremos integrar a função $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ sobre toda a semi-reta $[1, \infty)$.

Quanto à integral do caso (b), apesar de o intervalo de integração ser limitado, a função $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ não está definida no extremo esquerdo do intervalo. Veja os gráficos de f e de g sobre os intervalos de integração.



Em ambos os casos estamos lidando com situações não-limitadas. No caso (a), a não-limitação ocorre na direção do eixo Ox , enquanto no caso (b) a não-limitação ocorre na direção do eixo Oy .

Para podermos dar sentido aos símbolos $\int_1^\infty \frac{1}{(1+x)^2} dx$ e $\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$, recorreremos ao seguinte estratagema: em ambos os casos consideraremos situações limitadas mas que estão cada vez mais próximas da situação desejada. Ou seja, calcularemos $\int_1^t \frac{1}{(1+x)^2} dx$ e $\int_r^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$, onde $t > 1$ e $0 < r < 8$, que são áreas bem definidas. Veja as figuras abaixo.



Em seguida, estudaremos o comportamento dessas integrais definidas para valores muito grandes de t e para valores positivos de r cada vez mais próximos de zero. A maneira adequada de fazer isso é usando o conceito de limite. Primeiro o cálculo das áreas:

$$\int_1^t \frac{1}{(1+x)^2} dx = -\frac{1}{1+x} \Big|_1^t = -\frac{1}{1+t} + \frac{1}{2}$$

e

$$\int_r^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \frac{3}{2} x^{2/3} \Big|_r^8 = 6 - \frac{3}{2} r^{2/3}.$$

Agora, quando t cresce indefinidamente, $-\frac{1}{1+t}$ aproxima-se de 0, e quando r se aproxima de zero, pela direita, $-\frac{3}{2} r^{2/3}$ também fica próximo

de zero. Formalmente,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{1}{1+t} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \lim_{r \rightarrow 0^+} 6 - \frac{3}{2} r^{2/3} = 6.$$

Podemos, então, dizer que

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{(1+x)^2} dx = \frac{1}{2}$$

e

$$\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = 6.$$

Vamos formalizar esses conceitos.

Integrais impróprias

Seja $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Considere $F : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$F(t) = \int_a^t f(x) dx.$$

Assim, para cada valor $t \geq a$, $F(t)$ é a integral de $f(x)$ sobre o intervalo $[a, t]$.

Se $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx \in \mathbb{R}$, diremos que a integral imprópria $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge e colocamos

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx.$$

Analogamente, seja $g : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Considere $G : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$G(t) = \int_t^b g(x) dx.$$

Logo, para cada valor $a < t \leq b$, $G(t)$ é a integral de $g(x)$ sobre o intervalo $[t, b]$.

Se $\lim_{t \rightarrow a^+} G(t) = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b g(x) dx \in \mathbb{R}$, diremos que a integral imprópria $\int_a^b g(x) dx$ converge e colocamos

$$\int_a^b g(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} G(t) = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx.$$

Veja mais alguns exemplos.

Exemplo 26.2

Analise a convergência da integral imprópria $\int_0^{\infty} e^{-x} \cos x \, dx$.

Vamos, primeiro, calcular a integral indefinida $\int e^{-x} \cos x \, dx$. Para isso, usamos a técnica de integração por partes, e obtemos

$$\int e^{-x} \cos x \, dx = \frac{e^{-x}}{2}(\sin x - \cos x) + C.$$

Agora podemos fazer:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t e^{-x} \cos x \, dx &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^{-x}}{2}(\sin x - \cos x) \right] \Bigg|_0^t = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^{-t}}{2}(\sin t - \cos t) + \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Como o limite é finito, dizemos que a integral imprópria converge e colocamos

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \cos x \, dx = \frac{1}{2}.$$

Uma condição necessária para a convergência

A convergência da integral imprópria

$$\int_a^{\infty} f(x) \, dx$$

impõe sobre a função f uma condição muito especial. Este fato pode ser útil, uma vez que, se uma dada função g não satisfaz tal condição, então podemos concluir que a integral imprópria

$$\int_a^{\infty} g(x) \, dx$$

diverge. Ou seja, tal condição sobre f é *necessária* para a convergência da integral imprópria.

Aposto que você ficou curioso: que condição é esta? Pois bem, sem mais delongas, aqui está ela:

Teorema 26.1

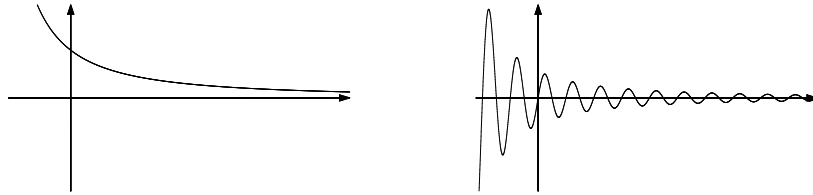
Seja f uma função contínua, tal que $[a, \infty) \subset \text{Dom}(f)$. Se $\int_a^{\infty} f(x) \, dx$ convergir, então

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

Exatamente! Para a integral imprópria $\int_a^\infty f(x) dx$ convergir é necessário que a parte positiva do eixo Ox seja uma assíntota horizontal da função f . Veja alguns exemplos de funções que satisfazem esta condição:

$$f(x) = \frac{1}{x}; \quad g(x) = \frac{1}{1+x^2}; \quad h(x) = \frac{1}{1+x \ln x}.$$

Veja, também, dois gráficos de funções com essa característica.



Demonstração do teorema

Usando a linguagem do Teorema Fundamental do Cálculo, podemos definir $F : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ colocando

$$F(t) := \int_a^t f(x) dx, \quad \forall t \in [a, \infty).$$

Assim, a convergência da integral imprópria nos dá o seguinte:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx = \int_a^\infty f(x) dx = c,$$

para alguma constante $c \in \mathbb{R}$.

Veja o que conseguimos até agora: a parte positiva da reta horizontal $y = c$ é uma assíntota do gráfico de F .

Note que $f(x) = F'(x)$, $\forall x \in [a, \infty)$, pois F é uma primitiva de f .

Talvez seja necessário um pouco de confiança de sua parte neste ponto, mas é fato que essas duas últimas observações garantem que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

Ou seja, a derivada de uma função que tem uma assíntota horizontal (quando $x \rightarrow \infty$) tem o eixo Ox como assíntota horizontal (quando $x \rightarrow \infty$).

Uma maneira de ver isto é a seguinte: na medida em que os valores de x tornam-se muito grandes, o gráfico de F fica mais e mais parecido com a reta horizontal $y = c$ e, portanto, sua derivada tende a zero. \square

Atenção! A condição $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ é necessária para a convergência da integral imprópria $\int_a^{\infty} f(x) dx$, mas não é suficiente. Por exemplo, $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$ diverge apesar de $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$.

Veja como usar o teorema no próximo exemplo.

Exemplo 26.3

Determine se a integral $\int_1^{\infty} \frac{x^2}{1 + x \ln(x)} dx$ é convergente.

Solução:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1 + x \ln(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{1 + \ln(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{1/x} = \infty$$

Logo, essa integral diverge.

Uma ferramenta para calcular limites

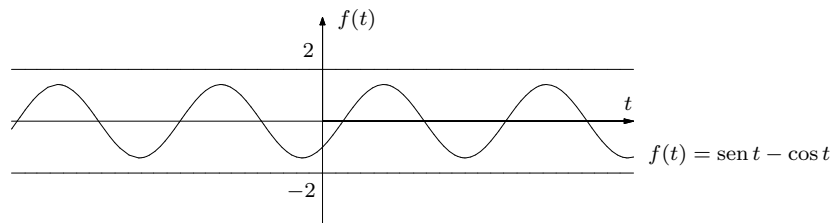
Para calcular o $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-t}}{2} (\sin t - \cos t) = 0$, usamos o seguinte fato:

Se $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função limitada e se $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 0$, então

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)g(t) = 0.$$

Dizer que f é uma função limitada em $[a, +\infty)$ significa dizer que existe uma constante $M > 0$, tal que $\forall t \in [a, +\infty)$, $|f(t)| < M$.

Isso ocorre no exemplo mencionado, uma vez que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-t}}{2} = 0$ e $\forall t \in \mathbb{R}$, $|\sin t - \cos t| < 2$. Aqui está o gráfico de $f(t) = \sin t - \cos t$.



Vamos ao próximo exemplo.

Exemplo 26.4

Analise a convergência da integral imprópria $\int_0^1 \frac{1}{1-x} dx$.

Nesse caso, a função $g(x) = \frac{1}{1-x}$ não está definida no extremo direito do intervalo. Assim, devemos adaptar a definição de integral imprópria a essa situação.

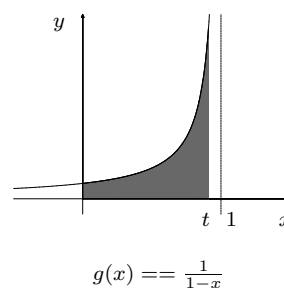
Devemos, então, estudar o limite

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{1}{1-x} dx &= \lim_{t \rightarrow 1^-} [-\ln |1-x|] \Big|_0^t = \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \left(\ln \frac{1}{1-t} \right). \end{aligned}$$

Mas, quando $t \rightarrow 1^-$, $1-t$ tende a zero, com sinal positivo. Ou seja, $\frac{1}{1-t} \rightarrow +\infty$. Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, temos:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{1-x} dx &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{1}{1-x} dx = \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \left(\ln \frac{1}{1-t} \right) = +\infty. \end{aligned}$$

Portanto, a integral imprópria $\int_0^1 \frac{1}{1-x} dx$ diverge.

**Problemas em muitos lugares**

Há situações nas quais a integral é imprópria por apresentar problemas em mais do que uma parte de seu domínio de integração. Quando isso ocorrer, usamos as propriedades aditivas das integrais para dividir a integral em somas de integrais impróprias do tipo simples, tais como as que estudamos até agora. A integral imprópria original convergirá apenas se cada uma de suas parcelas convergir. Vamos a um exemplo.

Exemplo 26.5

Analise a convergência da integral imprópria $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4+x^2} dx$.

Note que, nesse exemplo, devemos dividir a integral em dois casos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4+x^2} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{4+x^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{4+x^2} dx.$$

Note que a escolha do número 0 para dividir o intervalo de integração foi conveniente mas puramente casual. Na verdade, poderíamos ter escolhido qualquer outro número.

Lembre-se de que $\int \frac{1}{4+x^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C$.

Vamos, então, considerar $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{4+x^2} dx$. Para isso, devemos fazer:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 \frac{1}{4+x^2} dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Assim, $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{4+x^2} dx = \frac{\pi}{4}$.

Agora, vamos considerar $\int_0^{+\infty} \frac{1}{4+x^2} dx$. Nesse caso, fazemos:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{1}{4+x^2} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Novamente, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{4+x^2} dx = \frac{\pi}{4}$.

Podemos concluir que a integral imprópria $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4+x^2} dx$ converge e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4+x^2} dx = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Note que, devido à simetria da função $f(x) = \frac{1}{4+x^2}$, em relação à origem, o resultado $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{4+x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{4+x^2} dx$ não chega a surpreender. No entanto, especialmente nos casos de simetria, é preciso cuidado.

O próximo exemplo ilustrará uma diferença de comportamento interessante.

Exemplo 26.6

Analise a convergência da integral imprópria $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \ln x dx$.

Como o domínio de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \ln x$ é a semi-reta aberta $(0, +\infty)$, a integral apresenta problemas nos dois extremos do domínio de integração. Devemos, portanto, dividi-la em dois casos:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \ln x dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \ln x dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \ln x dx.$$

Novamente, a escolha do número 1 para dividir o intervalo em dois subintervalos foi por conveniência.

Para calcular $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \ln x \, dx$ usamos a integração por partes, fazendo $u = \ln x$ e $dv = \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx$. Assim,

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} \ln x \, dx = 2\sqrt{x} \ln x - 4\sqrt{x} + C.$$

Para a primeira parte, temos:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \ln x \, dx &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \ln x \, dx = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} (-4 - 2\sqrt{t} \ln t - 4\sqrt{t}) = \\ &= -4. \end{aligned}$$

Portanto, $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \ln x \, dx = -4$ converge.

Agora, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \ln x \, dx$. Veja como as coisas podem mudar:

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \ln x \, dx &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{1}{\sqrt{x}} \ln x \, dx = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} (2\sqrt{t}(\ln t - 2) + 4) = \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

Como essa segunda integral imprópria diverge, dizemos que a integral imprópria $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \ln x \, dx$ também diverge.

Agora, o último exemplo da aula.

Exemplo 26.7

Sabendo que $\int_0^{\infty} e^{-x^2} \, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, calcule $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} \, dx$.

Para resolver o problema devemos estabelecer uma relação entre as duas integrais. Dessa forma, usaremos a integração por partes na integral $\int e^{-x^2} \, dx$, colocando $u = e^{-x^2}$ e $dv = dx$. Assim, $du = -2x e^{-x^2} \, dx$ e $v = x$. Portanto,

$$\int e^{-x^2} \, dx = x e^{-x^2} + 2 \int x^2 e^{-x^2} \, dx.$$

Assim,

$$\int_0^t e^{-x^2} \, dx = t e^{-t^2} + 2 \int_0^t x^2 e^{-x^2} \, dx.$$

Agora, tomamos o limite:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} t e^{-t^2} + 2 \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t x^2 e^{-x^2} dx.$$

Como o limite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t e^{-t^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^{t^2}} = 0,$$

segue que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t x^2 e^{-x^2} dx = +\frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-x^2} dx.$$

Logo, temos o resultado esperado:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t x^2 e^{-x^2} dx = \\ &= +\frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-x^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}. \end{aligned}$$

Resumo

Você aprendeu que o conceito de integrais definidas pode ser ampliado de modo a incluir situações extremas. As integrais impróprias são o resultado da aplicação da teoria de limites à teoria de integrais.

Portanto, os exercícios que envolvem integrais impróprias requerem habilidades na integração e no cálculo de limites. Há duas ferramentas poderosas para o cálculo de limites. Uma delas foi explicada ao longo da aula. A outra é a chamada Regra de L'Hospital, que você aprendeu no Cálculo I. Essa técnica é usada para calcular, por exemplo, $\lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{t} \ln t = 0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^{t^2}} = 0$.

Exercícios

Analise as seguintes integrais impróprias, indicando quando elas divergem e calculando-as, caso contrário:

1. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx.$

2. $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2 - 1} dx.$

3. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{9 + x^2} dx.$

4. $\int_1^2 \frac{1}{1 - x} dx.$

5. $\int_1^4 \frac{1}{(x - 2)^{2/3}} dx.$

6. $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$

7. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3 + 4x} dx.$

8. $\int_0^1 \ln x dx.$

9. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$

10. $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x + 4)} dx.$

11. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx.$

12. $\int_1^{\infty} \frac{e^{1/x}}{x^2} dx.$

13. $\int_0^{\infty} e^{-ax} dx, \quad a > 0.$

14. $\int_0^{\infty} x e^{-ax} dx, \quad a > 0.$

15. $\int_{-\infty}^0 e^x \operatorname{sen} 2x dx.$

16. $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}} \ln \frac{x}{2} dx.$

17. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x}} dx.$

18. $\int_0^2 \frac{1}{(x - 1)^2} dx.$

19. Sabendo que $\int_0^{\infty} \operatorname{sen} x^2 dx = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}$, calcule $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} dx.$

20. Determine se a integral $\int_1^{\infty} \frac{x^3 + e^{-x}}{x^3 + x^2 + 1} dx$ é convergente. (Sugestão: estude o limite do integrando, quando $x \rightarrow \infty$.)

Aula 27 – Integrais impróprias – segunda parte – Critérios de convergência

Objetivo

Conhecer dois critérios de convergência de integrais impróprias: critério da comparação e critério do limite do quociente.

Introdução

Ao lidarmos com uma integral imprópria, a questão fundamental é a da convergência, ou não. Em muitas ocasiões, é suficiente determinar se uma dada integral imprópria converge.

Nesta aula, você aprenderá duas maneiras para, pelo menos em alguns casos, responder à questão da convergência sem, efetivamente, calcular o valor da integral imprópria.

Antes de prosseguirmos, no entanto, vamos considerar alguns exemplos nos quais as integrais impróprias não convergem.

Exemplo 27.1

Análise a convergência das seguintes integrais impróprias:

$$(a) \int_4^{\infty} \frac{1}{x-3} dx \quad (b) \int_2^4 \frac{1}{(x-2)^2} dx$$

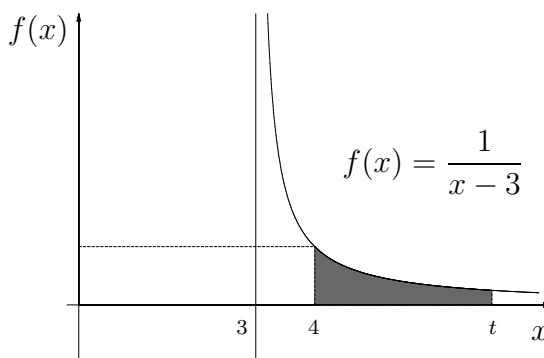
$$(c) \int_0^{\infty} \sin x dx \quad (d) \int_{-\infty}^{+\infty} \cos x dx.$$

Vejam os.

a)

$$\int_4^{\infty} \frac{1}{x-3} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_4^t \frac{1}{x-3} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln |t-3| = +\infty.$$

Podemos interpretar essa resposta da seguinte maneira: se $x \geq 4$, então $\frac{1}{x-3} > 0$. Assim, $\int_4^t \frac{1}{x-3} dx = \ln |t-3|$ é a área sob a curva $y = \frac{1}{x-3}$ entre $x = 4$ e $x = t$.



Dizer que $\int_4^{\infty} \frac{1}{x-3} dx = \infty$ significa que, para cada número $M > 0$, existe um valor de t suficientemente grande tal que $\int_4^t \frac{1}{x-3} dx = \ln |t-3|$ é maior do que M .

Em outras palavras, existe um valor de t cuja área sob a curva correspondente supera o valor de M . Veja que isso ocorre para todos os valores $M > 0$. Por exemplo, se $M = 1000$,

$$\int_4^{10^{500}} \frac{1}{x-3} dx = \ln |10^{500} - 3| \approx 1151,292 > 1000.$$

É verdade que os valores de t precisam ser muito grandes, relativos aos valores de M , mas isso não é nenhum problema.

b)

$$\int_2^4 \frac{1}{(x-2)^2} dx = \lim_{t \rightarrow 2^+} \int_t^4 \frac{1}{(x-2)^2} dx = \lim_{t \rightarrow 2^+} -\frac{1}{2} + \frac{1}{t-2}.$$

Quando $t \rightarrow 2^+$, $t-2 \rightarrow 0^+$ e, portanto, $\lim_{t \rightarrow 2^+} \frac{1}{t-2} - \frac{1}{2} = +\infty$.

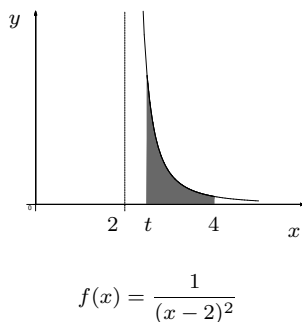
A interpretação, nesse item, é semelhante à do item anterior. A diferença é que as áreas $\int_t^4 \frac{1}{(x-2)^2} dx = -\frac{1}{2} + \frac{1}{t-2}$, com $2 < t < 4$, aumentam indefinidamente na medida em que tomamos valores para t mais e mais próximos de 2, pelo lado direito.

Os próximos itens diferem bastante dos anteriores.

c)

$$\int_0^{\infty} \text{sen } x dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \text{sen } x dx = \lim_{t \rightarrow \infty} [1 - \cos t].$$

Nesse caso, não existe o limite. Isto é, a função $f(t) = 1 - \cos t$, na medida em que os valores de t crescem, fica oscilando entre 0 e 2.



d)

Nesse caso, devemos escrever a integral como a soma de duas:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos x \, dx = \int_0^{+\infty} \cos x \, dx + \int_{-\infty}^0 \cos x \, dx = 0.$$

Novamente, como no item anterior, a integral não converge, uma vez que, por exemplo

$$\int_0^{\infty} \cos x \, dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \cos x \, dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \sin t$$

e $\lim_{t \rightarrow \infty} \sin t$ não existe, pois $g(t) = \cos t$ fica oscilando entre -1 e 1 , quando $t \rightarrow \infty$.

Você pode observar como os exemplos diferem. É conveniente reservar o termo *divergente* para situações nas quais o limite é infinito ($+\infty$ ou $-\infty$), como nos casos (a) e (b). Nos casos como (c) e (d), diremos que a integral imprópria é indefinida. Assim, $\int_4^{\infty} \frac{1}{x-3} \, dx$ diverge para $+\infty$ e $\int_0^{\infty} \sin x \, dx$ é indefinida.

Exemplos referenciais

Antes de apresentarmos os critérios de convergência, vamos considerar a convergência de algumas funções, que serão úteis como parâmetros de comparação.

Exemplo 27.2

Nas seguintes afirmações, a é um número real maior do que zero.

- Se $r > 1$, então $\int_a^{\infty} \frac{1}{x^r} \, dx$ é convergente.
- Se $r \leq 1$, então $\int_a^{\infty} \frac{1}{x^r} \, dx$ é divergente.
- Se $r > 0$, então $\int_b^{\infty} e^{-rx} \, dx$ é convergente.

Realmente, se $r \neq 1$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t \frac{1}{x^r} \, dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{1-r} \left(\frac{1}{t^{r-1}} - \frac{1}{a^{r-1}} \right)$.

Se $r > 1$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^{r-1}} = 0$ e a integral imprópria converge: $\int_a^{\infty} \frac{1}{x^r} \, dx = \frac{1}{(r-1)a^{r-1}}$.

Se $r < 1$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^{r-1}} = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{1-r} = +\infty$ e a integral imprópria diverge.

Você pode constatar que $\int_a^\infty \frac{1}{x} dx$ diverge e que $\int_b^\infty e^{-rx} dx = \frac{e^{-rb}}{r}$.

Vamos ao primeiro critério de convergência.

Critério da comparação

Este critério é assim chamado por se basear na comparação de duas funções.

Sejam f e g duas funções contínuas, definidas em $[a, \infty)$, tais que

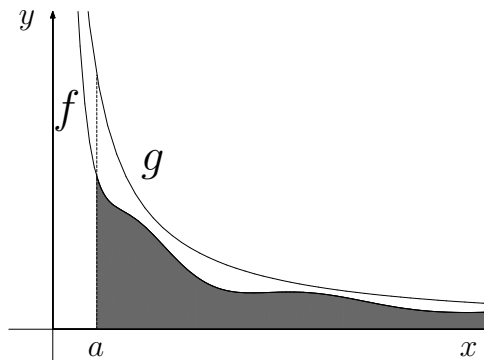
$$a \leq f(x) \leq g(x).$$

Nessas condições,

- se $\int_a^\infty g(x) dx$ converge, então $\int_a^\infty f(x) dx$ também converge;
- se $\int_a^\infty f(x) dx$ diverge, então $\int_a^\infty g(x) dx$ também diverge.

Resumindo, se a maior converge, a menor também converge. Se a menor diverge, a maior também diverge. Atenção! O critério de comparação pode ser usado apenas quando ambas as funções são positivas.

Veja, na figura a seguir, uma ilustração dos gráficos de f e g .



O critério da comparação afirma que, se a área sob o gráfico da função g é finita, o mesmo ocorre com a área menor, sob o gráfico de f . Em contrapartida, se a área sob o gráfico da função f diverge, o mesmo ocorre com a área 'maior', sob o gráfico de g .

Veja como o critério da comparação funciona, nos seguintes exemplos.

Exemplo 27.3

Analise a convergência da integral imprópria $\int_4^{\infty} \frac{\text{sen}^2 x}{(x-2)^2} dx$.

Um passo importante para usar corretamente o critério é determinar qual função será usada como parâmetro para a comparação. Em outras palavras, quem fará os papéis de f e g ? É claro que isso implica numa expectativa da convergência ou da divergência da integral imprópria em questão e, nisso, reside todo o problema.

No caso do exemplo em questão, notamos que há um quociente, que a função do numerador é limitada ($y = \text{sen}^2 x$) e que o denominador é uma função polinomial de grau 2.

Vamos, portanto, tentar mostrar que a integral converge, usando para comparação a integral imprópria $\int_4^{\infty} \frac{1}{(x-2)^2} dx$. A garantia da convergência dessa integral imprópria é o grau do denominador, uma vez que estamos integrando sobre a semi-reta $[4, \infty)$. Realmente,

$$\int_4^{\infty} \frac{1}{(x-2)^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_4^t \frac{1}{(x-2)^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{t-4}{2t-4} \right] = \frac{1}{2}.$$

Esse resultado não é surpreendente se levarmos em conta os parâmetros dados no exemplo 27.2.

Agora, devemos nos certificar de que as hipóteses do critério da comparação são satisfeitas. Aqui está:

$\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq \text{sen}^2 x \leq 1$ e, portanto, se $x \geq 4$,

$$0 \leq \frac{\text{sen}^2 x}{(x-2)^2} \leq \frac{1}{(x-2)^2}.$$

Podemos concluir dizendo: como $\int_4^{\infty} \frac{1}{(x-2)^2} dx$ converge, pelo critério da comparação, $\int_4^{\infty} \frac{\text{sen}^2 x}{(x-2)^2} dx$ também converge.

Aqui está uma oportunidade para você tentar:

Exercício 1. Use um parâmetro do exemplo 27.2 para mostrar que $\int_5^{\infty} \frac{\cos^2 x}{x^3} dx$ converge.

Vamos a mais um exemplo.

CÁLCULO II

Exemplo 27.4

Calcule $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx$ e mostre que $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x} \operatorname{arctg} x dx$ converge.

Para calcular a integral $\int x^2 e^{-x} dx$, usamos a integração por partes.

Primeiro o cálculo de $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx$.

Como $\int x^2 e^{-x} dx = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + C$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t x^2 e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} [2 - e^{-t}(t^2 + 2t + 2)] = 2.$$

Lembre-se de que o $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2 + 2t + 2}{e^t} = 0$ pode ser calculado usando a Regra de L'Hospital.

Agora devemos considerar a comparação. Note que, se $x \geq 0$,

$$0 \leq \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}.$$

Essa é uma interessante propriedade da função arco-tangente. Portanto,

$$0 \leq x^2 e^{-x} \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2} x^2 e^{-x}.$$

Já sabemos que $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx = 2$. Isso nos dá $\int_0^{\infty} \frac{\pi}{2} x^2 e^{-x} dx = \pi$ e, pelo critério da comparação, $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x} \operatorname{arctg} x dx$ converge.

Antes do próximo exemplo, algumas palavras sobre o porquê da validade do critério.

A hipótese de que as funções consideradas são positivas é importante.

Queremos informações sobre o $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx$. Note que

$$F(t) = \int_a^t f(x) dx$$

é a área sob o gráfico da função (positiva) f de a até t . Portanto, se $t_2 \geq t_1$, $F(t_2) > F(t_1)$ (maior o intervalo, maior a área). Então estamos considerando o limite de uma função crescente quando $t \rightarrow \infty$. Esse limite só pode ser um número ou ∞ . Se uma função crescente é limitada, seu limite é finito, quando $t \rightarrow \infty$. Se, por outro lado, ela segue majorando todos números positivos, dizemos que seu limite é infinito. Para demonstrar a afirmação anterior, usamos uma propriedade dos números reais, que afirma que todos os seus subconjuntos não vazios limitados superiormente têm um elemento supremo.

A Regra de L'Hospital serve para calcular certos limites. Esse conteúdo foi ensinado no Cálculo I.

Análise Real é uma disciplina mais avançada do curso de Matemática.

Este conceito será melhor esclarecido em Análise. A segunda afirmação é o que caracteriza o limite ser infinito. Assim, a integral imprópria converge, se é limitada, ou diverge, caso seus valores sigam ultrapassando todos os números reais positivos.

O critério da comparação também se aplica nos casos em que a integral imprópria tenha seu domínio de integração limitado. A formulação fica assim:

Sejam f e g funções contínuas no intervalo $(a, b]$. Se $0 \leq f(x) \leq g(x)$, para todo $a < x \leq b$, se $\int_a^b g(x) dx$ converge, então $\int_a^b f(x) dx$ converge.

Se $\int_a^b f(x) dx$ diverge, então $\int_a^b g(x) dx$ também diverge.

Veja como isso funciona no seguinte exemplo.

Exemplo 27.5

Analise a convergência da integral imprópria $\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2+1}}{(x-2)^2} dx$.

Esse exemplo mostra como precisamos ter cuidado no trato das integrais impróprias. A integral $\int_2^4 \frac{1}{(x-2)^2} dx$ diverge. O expoente maior do que 1 no denominador garante a convergência no caso de o limite de integração ser infinito. No exemplo em questão, o domínio de integração é $[2, 4]$.

Agora, como $\sqrt{x^2+1} \geq 1$ e, portanto, se $2 < x \leq 4$,

$$\frac{\sqrt{x^2+1}}{(x-2)^2} \geq \frac{1}{(x-2)^2}.$$

Como $\int_2^4 \frac{1}{(x-2)^2} dx = \infty$, a integral imprópria $\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2+1}}{(x-2)^2} dx$ diverge.

O próximo exemplo nos dá uma pequena extensão do critério da comparação.

Exemplo 27.6

Seja $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $\int_a^\infty |f(x)| dx$ converge, então $\int_a^\infty f(x) dx$ também converge.

Veja como isso funciona. Sabemos que $\int_\pi^\infty e^{-x} dx$ converge e queremos mostrar que $\int_\pi^\infty e^{-x} \sin x dx$ também converge. No entanto, não podemos aplicar o critério da comparação, uma vez que a função $f(x) = e^{-x} \sin x$ assume, também, valores negativos.

Mas, $0 \leq |\operatorname{sen} x| \leq 1$ e, portanto, $0 \leq |e^{-x} \operatorname{sen} x| = e^{-x} |\operatorname{sen} x| \leq e^{-x}$. Assim, o critério da comparação garante que $\int_{\pi}^{\infty} |e^{-x} \operatorname{sen} x| dx$ converge, e logo, $\int_{\pi}^{\infty} e^{-x} \operatorname{sen} x dx$ também converge.

Para confirmar essa afirmação basta considerar, separadamente, os casos $r \geq 0$ e $r < 0$.

Veja como isso é possível. Primeiro, para qualquer número real r ,

$$0 \leq |r| + r \leq 2|r|.$$

Estamos supondo que $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$ converge. Então $\int_a^{\infty} 2|f(x)| dx$ também converge, e como $0 \leq |f(x)| + f(x) \leq 2|f(x)|$, podemos aplicar o critério da comparação para concluir que $\int_a^{\infty} (|f(x)| + f(x)) dx$ é convergente.

Mas,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t (|f(x)| + f(x)) dx - \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t |f(x)| dx.$$

Os dois limites da direita são finitos. Assim, a integral imprópria $\int_a^{\infty} f(x) dx$ é convergente.

Exercício 2. Mostre que a integral imprópria $\int_5^{\infty} \frac{\cos 5x}{x^3} dx$ é convergente.

Agora, o segundo critério de convergência.

Critério do limite do quociente

Sejam f e g duas funções contínuas em $[a, \infty)$, tais que $f(x) \geq 0$ e $g(x) > 0$ e

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

com $L \in (0, \infty)$. Isto é, o limite do quociente é um número positivo. Então as integrais impróprias $\int_a^{\infty} f(x) dx$ e $\int_a^{\infty} g(x) dx$ comportam-se da mesma maneira. Ou seja, ambas convergem ou ambas divergem.

Esse critério de convergência é particularmente apropriado para analisar a convergência de integrais impróprias cujo integrando é o quociente de polinômios. Veja como isso funciona no exemplo seguinte.

Exemplo 27.7

Analise a convergência das seguintes integrais impróprias:

$$1. \int_5^{\infty} \frac{x}{2x^3 + 3x + 1} dx.$$

$$2. \int_{10}^{\infty} \frac{\sqrt{9x+1}}{x+8} dx.$$

Como antes, precisamos decidir se tentaremos mostrar a convergência ou a divergência da integral e, depois, qual será a integral imprópria usada como parâmetro.

No caso 1, o maior expoente do numerador é 1 e o do denominador é 3. A diferença é 2. Como $\int_5^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ é convergente, vamos mostrar que a integral é convergente. Note que, para valores suficientemente grandes de x , $f(x) = \frac{x}{2x^3+3x+1} \geq 0$ e $g(x) = \frac{1}{x^2} > 0$. Temos de calcular o limite:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{2x^3 + 3x + 1}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{2x^3 + 3x + 1} = \frac{1}{2}.$$

Como $L = \frac{1}{2}$, podemos aplicar o critério e concluir que a integral imprópria $\int_5^{\infty} \frac{x}{2x^3 + 3x + 1} dx$ converge.

No caso 2, consideramos o limite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{9x+1}}{x+8}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^2+x}}{x+8} = 3.$$

Como $\int_{10}^{\infty} \frac{1}{x^{1/2}} dx$ diverge, o mesmo ocorre com $\int_{10}^{\infty} \frac{\sqrt{9x+1}}{x+8} dx$.

Para terminar a aula, uma palavra sobre a razão do funcionamento desse critério. Como o $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$, sabemos que $f(x) \cong Lg(x)$, para valores suficientemente grandes de x . Isso indica que o comportamento das integrais impróprias serão do mesmo tipo.

Exercícios

Começamos apresentando as soluções dos exercícios deixados ao longo da aula.

Exercício 1. Use um parâmetro do exemplo 27.2 para mostrar que $\int_5^{\infty} \frac{\cos^2 x}{x^3} dx$ converge.

Solução: Sabemos que $\int_5^{\infty} \frac{1}{x^3} dx$ converge.

Como $0 \leq \cos^2 x \leq 1$, vale $0 \leq \frac{\cos^2 x}{x^3} \leq \frac{1}{x^3}$, quando $x \geq 5$. Assim, pelo critério da comparação, a integral $\int_5^{\infty} \frac{\cos^2 x}{x^3} dx$ converge.

Exercício 2. Mostre que a integral imprópria $\int_5^{\infty} \frac{\cos 5x}{x^3} dx$ é convergente.

Solução: Esse caso é parecido com o anterior, mas não podemos aplicar diretamente o critério da comparação, pois a função $y = \frac{\cos 5x}{x^3}$ não é positiva no domínio de integração. Contudo, podemos aplicar o critério da comparação ao caso $\int_5^{\infty} \left| \frac{\cos 5x}{x^3} \right| dx$, e, devido ao fato apresentado no exemplo 27.6, a integral converge.

Nos próximos exercícios, determine a convergência ou divergência das integrais impróprias usando um dos dois critérios apresentados na aula.

- | | |
|--|---|
| 3. $\int_0^{\infty} e^{-x} \sin^4 x dx.$ | 4. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^4 + 2x + 1} dx.$ |
| 5. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 \ln x} dx.$ | 6. $\int_1^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x^2} dx.$ |
| 7. $\int_1^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^3 + 2x + 1} dx.$ | 8. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$ |
| 9. $\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 + 2x + 1} dx.$ | 10. $\int_1^{\infty} \frac{1}{(1 + \sqrt{x})(1 + x)} dx.$ |
| 11. $\int_2^{\infty} \frac{x + 2}{x^{3/2} + x^{1/2} + 1} dx.$ | 12. $\int_0^{\infty} \frac{1}{1 + e^x} dx.$ |
| 13. $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1 + e^x} dx.$ | 14. $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^4 - 1}} dx.$ |
| 15. $\int_4^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x - 4}} dx.$ | 16. $\int_1^{\infty} \frac{\sin^3 x}{\sqrt{4 + x^3}} dx.$ |
| 17. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x} + e^{-2x}} dx.$ | 18. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^x}{x^3} dx.$ |
| 19. $\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx.$ | 20. $\int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x} \ln x} dx.$ |

Aqui estão duas sugestões para ajudar você a encontrar a solução de dois exercícios propostos.

No exercício 5, note que, se $x > e$, então $\ln x > 1$.

Quanto ao exercício 14, observe que

$$\sqrt{x^4 - 1} = \sqrt{x^2 - 1} \sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{x - 1} \sqrt{x + 1} \sqrt{x^2 + 1}.$$

Agora, se x assume valores próximos de 1, $\sqrt{x + 1} \sqrt{x^2 + 1}$ está próximo de $\sqrt{2} \sqrt{2} = 2$. Usando isso, mostre que $\frac{1}{\sqrt{x^4 - 1}} < \frac{1}{2\sqrt{x - 1}}$.

Aula 28 – Aplicações de integrais – Volumes

Objetivo

Conhecer as aplicações de integrais no cálculo de diversos tipos de volumes de sólidos, especificamente os chamados método das seções transversais e o método das cascas cilíndricas.

Introdução

A aplicação mais imediata da integral definida é a noção de área de regiões planas. Na verdade, a integral é a maneira adequada de estabelecer e calcular as áreas de regiões não triangularizáveis. Basta lembrar do exemplo da área do círculo de raio r

$$A = 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cos^2 \theta d\theta = \pi r^2.$$

A razão desse sucesso consiste em usar somas de Riemann, que determinam áreas de regiões que aproximam a região em questão. Nesse caso, as somas de Riemann são as somas de áreas de retângulos alinhados lado a lado.

Nesta aula, você verá como essas idéias podem ser usadas para atribuir volume a certos sólidos.

Sólidos de revolução

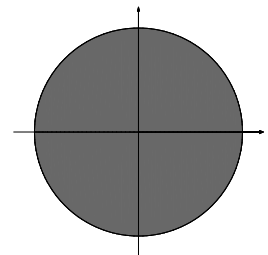
Os sólidos de revolução são aqueles obtidos girando uma região plana R em torno de um eixo, chamado eixo de rotação.

Exemplo 28.1

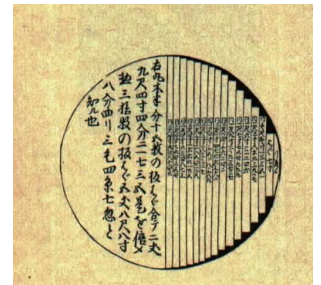
Seja R o semicírculo limitado por $y = \sqrt{1 - x^2}$ e pelo eixo Ox .

Se usarmos o eixo Ox como eixo de rotação, obteremos a esfera sólida como um objeto de revolução. Se, em contrapartida, usarmos a reta $x = -1$ como o eixo de rotação, obteremos um sólido de revolução diferente. Veja as figuras seguintes.

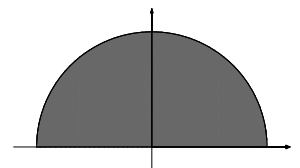
Exercício 1. Faça um esboço do sólido de revolução obtido pela revolução do semicírculo do exemplo anterior em torno dos seguintes eixos: (a) $x = 2$; (b) $y = -1$.

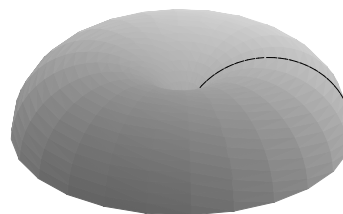
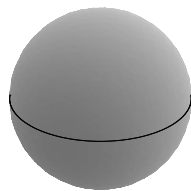


$$\text{Área} = \pi r^2$$



Esta gravura é atribuída ao matemático japonês Seki Kowa, do século XVII. A idéia de aproximação por objetos mais simples é muito poderosa e aparece em várias situações, na Matemática.

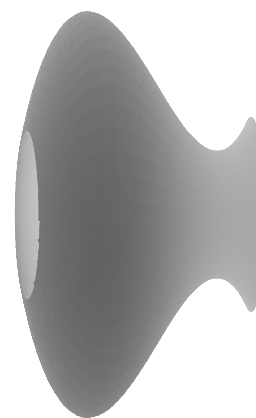
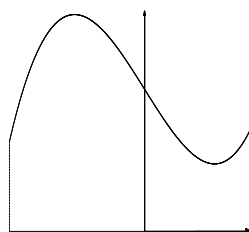




Nesta aula, usaremos as integrais definidas para estabelecer e calcular volumes de sólidos de revolução.

Volumes de sólidos de revolução

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$. Consideraremos o sólido de revolução obtido pela rotação da região limitada pelo eixo Ox e pelo gráfico de f , em torno do eixo Ox .



Considere $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, uma partição P do intervalo $[a, b]$ e, para cada subintervalo da partição escolha um ponto $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. O volume do cilindro de raio $f(\xi_i)$ e altura $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ é

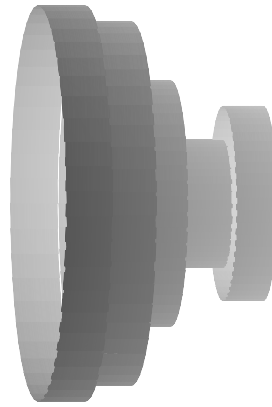
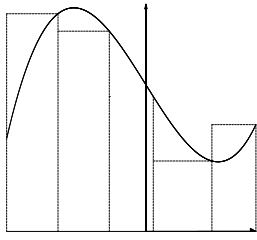
$$\Delta V_i = \pi [f(\xi_i)]^2 \Delta x_i.$$

A soma desses volumes,

$$\sum_{i=1}^n \Delta V_i = \sum_{i=1}^n \pi [f(\xi_i)]^2 \Delta x_i,$$

é uma soma de Riemann e, na medida em que tomamos partições mais e mais finas, os cilindros empilhados formam um sólido que se parece cada vez mais com o sólido de revolução original.

Como a função f é contínua, a função $g(x) = \pi [f(x)]^2$ também é contínua. Isso nos leva à seguinte definição.



Definição 28.1 O volume V do sólido obtido pela revolução da região sob o gráfico da função contínua, positiva, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ em torno do eixo Ox é

$$V = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \pi [f(\xi_i)]^2 \Delta x_i = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx,$$

onde $|P| = \min\{\Delta x_i, x_i \in P\}$.

Exemplo 28.2

O volume da esfera.

Para obter o volume da esfera, basta considerar $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \geq 0$, definida no intervalo $[-r, r]$.

Nesse caso,

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^r \pi (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx \\ &= \pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-r}^r = \pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} + r^3 - \frac{r^3}{3} \right) = \frac{4\pi r^3}{3}. \end{aligned}$$

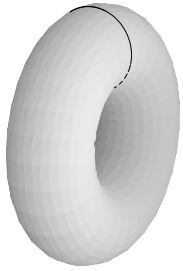
Exercício 2. Seja R a região limitada pela curva $y = \sqrt{x}$, pelo eixo Ox , com $x \in [0, 4]$. Faça um esboço do sólido obtido pela revolução de R em torno do eixo Ox e calcule o seu volume.

Exemplo 28.3

Você agora verá como calcular o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo Ox do conjunto

$$R = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \mid x^2 + (y - 2)^2 \leq 1 \}.$$

CÁLCULO II



Antes, um esboço do sólido.

Ao girarmos esse disco de raio 1 e centro em $(0, 2)$ em torno do eixo Ox obteremos um sólido cuja superfície é chamada de *toro* e que lembra uma câmara de ar de um pneu.

Para calcularmos o volume desse sólido usaremos a seguinte abordagem. Primeiro, dividiremos a curva $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ em duas funções, ambas sobre o mesmo intervalo, $[-1, 1]$. A função $f_1(x) = 2 + \sqrt{1 - x^2}$ tem por gráfico o semicírculo superior, enquanto a função $f_2(x) = 2 - \sqrt{1 - x^2}$ tem por gráfico o semicírculo inferior.

A integral

$$V_1 = \int_{-1}^1 \pi [f_1(x)]^2 dx$$

determina o volume do toro cheio com o buraco incluído.

A integral

$$V_2 = \int_{-1}^1 \pi [f_2(x)]^2 dx$$

determina, precisamente, o volume do buraco. Portanto, o volume que queremos calcular é dado pela diferença $V_1 - V_2$:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^1 (2 + \sqrt{1 - x^2})^2 dx - \pi \int_{-1}^1 (2 - \sqrt{1 - x^2})^2 dx = \\ &= 8\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx = 8\pi \frac{\pi}{2} = 4\pi^2. \end{aligned}$$

Método das seções transversais

Ao observar a fórmula $V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$, você não pode deixar de notar que o integrando $\pi [f(x)]^2$ é, precisamente, a área do disco de raio $f(x)$, que é a seção transversal obtida do corte do sólido de revolução dado pelo plano perpendicular ao eixo na altura x .

Isso nos leva a estender nossa definição de volume a outros sólidos, não necessariamente sólidos de revolução.

Suponha que B seja um sólido limitado por dois planos perpendiculares ao eixo Ox , em $x = a$ e $x = b$, e que para cada $x \in [a, b]$, a área da seção transversal do sólido com o plano perpendicular ao eixo seja dada por $A(x)$.

Se $A(x)$ for uma função contínua, usamos as somas de Riemann, de maneira análoga à que foi usada no caso de sólidos de revolução, para chegarmos à definição a seguir.

Nas condições que acabamos de descrever, o volume do sólido B é

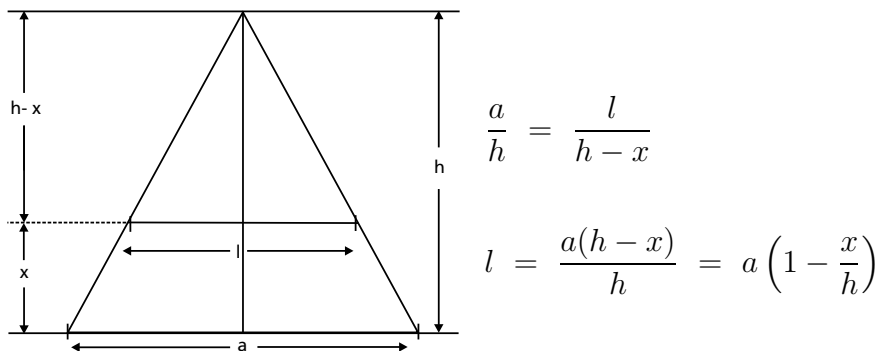
$$V = \int_a^b A(x) dx.$$

Exemplo 28.4

Você verá como podemos calcular o volume de uma pirâmide de base quadrada, de lado a e de altura h .

Para fazer isso precisamos achar a área da seção transversal obtida pelo corte dado pelo plano que é perpendicular ao eixo de simetria da pirâmide, na altura x , para todo $x \in [0, h]$.

Esta seção é um quadrado paralelo à base da pirâmide, de lado proporcionalmente menor. Podemos calcular esse lado usando semelhança de triângulos.



Assim, $A(x) = l^2 = a^2 \left(1 - \frac{x}{h}\right)^2$, e

$$V = \int_0^h a^2 \left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 dx = \frac{1}{3} a^2 h.$$

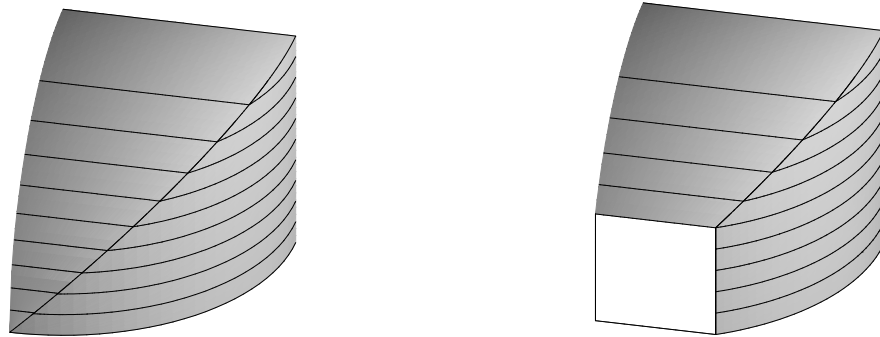
Isso é, o volume da pirâmide é um terço da área da base vezes a altura.

Vamos a mais um exemplo.

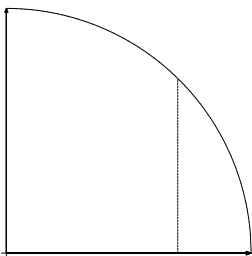
Exemplo 28.5

Neste exemplo, vamos calcular o volume da interseção de dois cilindros de mesmo raio a , cujos eixos de simetria são perpendiculares.

Vamos supor que um dos cilindros tem Ox como seu eixo de simetria, e o outro cilindro, o eixo Oz . Devido à simetria, este volume é 8 vezes o volume da parte que se encontra no primeiro octante, representada na figura a seguir, à esquerda. A figura da direita mostra o sólido com um corte perpendicular ao eixo Ox .



Essa seção, na altura x , é um quadrado de lado $\sqrt{a^2 - x^2}$. Assim, a área desse quadrado é $A(x) = (a^2 - x^2)$. O volume do oitavo do sólido, representado na figura, é



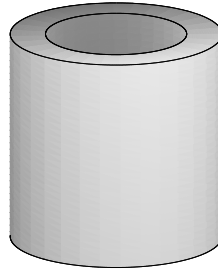
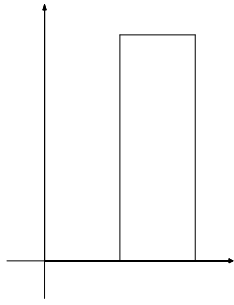
$$\int_0^a (a^2 - x^2) dx = a^2x - \frac{x^3}{3} \Big|_0^a = a^3 - \frac{a^3}{3} = \frac{2a^3}{3}.$$

Portanto, a interseção dos dois cilindros é $\frac{16a^3}{3}$.

Método das cascas cilíndricas

Este método é apropriado para calcular volumes de sólidos de revolução cujo eixo de simetria é o eixo Oy .

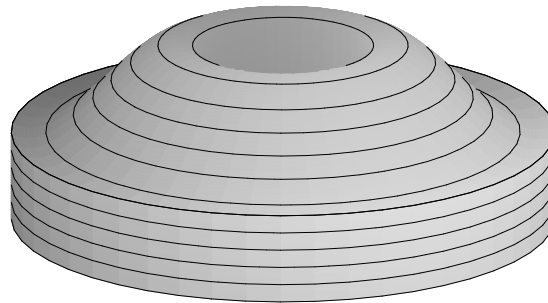
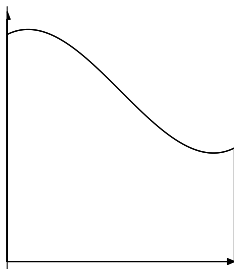
Vamos considerar um retângulo de altura h , sobre o intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, com $0 < x_{i-1} < x_i$, como mostra a figura a seguir. Vamos calcular o volume da casca cilíndrica obtida pela rotação desse retângulo em torno do eixo Oy .



Ora, isso é o volume do cilindro maior menos o volume do cilindro menor:

$$\begin{aligned} V_i &= \pi x_i^2 h - \pi x_{i-1}^2 h = \pi h (x_i^2 - x_{i-1}^2) = \\ &= \pi h (x_i + x_{i-1})(x_i - x_{i-1}). \end{aligned}$$

Agora, seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, positiva, com $a \geq 0$ e seja R a região sob o gráfico de f . Queremos calcular o volume do sólido de revolução da região R em torno do eixo Oy .



O método que permite fazer isso é chamado de método das cascas cilíndricas, pois usamos aproximações do sólido por cascas cilíndricas obtidas da revolução em torno do eixo Oy de retângulos que aproximam a área R , num processo similar ao que usamos para obter a fórmula de volume de sólidos de revolução em torno do eixo Ox .

Veja como funciona: seja $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ uma partição do intervalo $[a, b]$ e, como antes, para cada intervalo da partição, escolhamos um ponto $\xi \in [x_{i-1}, x_i]$.

O volume da casca cilíndrica obtida da revolução em torno do eixo Oy do retângulo de base $[x_{i-1}, x_i]$ e altura $f(\xi_i)$ é

$$V_i = \pi f(\xi_i) (x_i + x_{i-1}) \Delta x_i.$$

A soma dos volumes das cascas cilíndricas é uma soma de Riemann:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n V_i &= \sum_{i=1}^n \pi f(\xi_i) (x_i + x_{i-1}) \Delta x_i = \\ &\approx 2\pi \sum_{i=1}^n f(\xi_i) x_i \Delta x_i.\end{aligned}$$

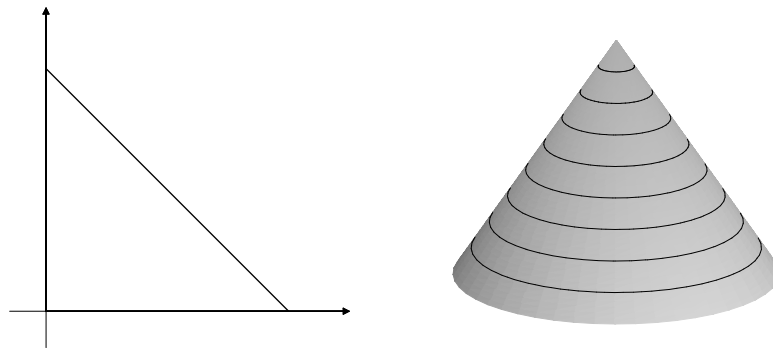
O limite dessas somas de Riemann resulta na fórmula com a qual definimos o volume do sólido:

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

Veja como ela funciona no próximo exemplo.

Exemplo 28.6

Vamos calcular o volume do cone de altura h , com o raio da base r . Para isso, vamos considerá-lo como o sólido de revolução do triângulo de vértices $(0, 0)$, $(r, 0)$ e $(0, h)$, em torno do eixo Oy .



Primeiro, devemos achar a equação da reta que contém os pontos $(r, 0)$ e $(0, h)$. Isso é fácil: $y = h\left(1 - \frac{x}{r}\right)$. Agora, usaremos a fórmula do método das cascas cilíndricas, com $f(x) = h\left(1 - \frac{x}{r}\right)$, definida no intervalo $[0, r]$:

$$\begin{aligned}V &= 2\pi \int_0^r x h \left(1 - \frac{x}{r}\right) dx = 2\pi \int_0^r \left(hx - \frac{hx^2}{r}\right) dx = \\ &= 2\pi \left(\frac{hx^2}{2} - \frac{hx^3}{3r}\right) \Big|_0^r = 2\pi \left(\frac{hr^2}{2} - \frac{hr^2}{3}\right) = \frac{\pi hr^2}{3}.\end{aligned}$$

Ou seja, o volume do cone de altura h e raio da base r é um terço da área da base vezes a altura.

Resumo das fórmulas

Seja R a região sob o gráfico da função contínua e positiva f definida em $[a, b]$.

O volume do sólido obtido da revolução de R em torno do eixo Ox é dado por:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Se $a > 0$, volume do sólido obtido da revolução de R em torno do eixo Oy é dado por:

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

Se $A : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e positiva que descreve as áreas das seções transversais perpendiculares ao eixo Ox de um dado sólido, então seu volume é dado por:

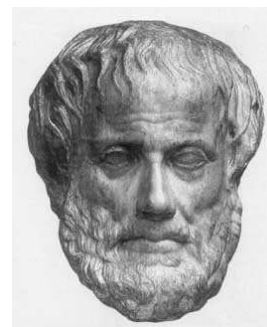
$$V = \int_a^b A(x) dx.$$

Ao chegarmos ao fim desta aula, vamos lembrar de um dos maiores matemáticos de todos os tempos: Arquimedes. O ápice de sua obra foi escrito em dois volumes, chamado *Da Esfera e do Cilindro*, em que desenvolve uma teoria que lhe permite calcular o volume de vários sólidos, tal como você fez agora. A diferença é que ele não dispunha de um aparato tão completo como o nosso. É uma pena que os matemáticos que vieram imediatamente após Arquimedes não tenham conseguido dar continuidade à sua obra. Ele tinha, definitivamente, uma mente muito à frente de seu tempo.

Exercícios

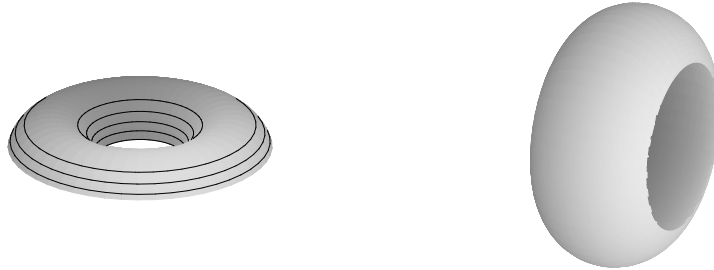
Agora, aos exercícios, começando com os que foram sugeridos ao longo da aula.

Exercício 1. Faça um esboço do sólido de revolução obtido pela revolução do semicírculo do exemplo anterior em torno dos seguintes eixos: (a) $x = 2$; (b) $y = -1$.



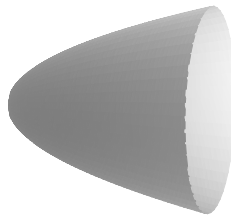
Arquimedes nasceu em Siracusa, em 287 a.C., estudou em Alexandria e tornou-se o maior matemático de seu tempo. Passou quase toda sua vida em Siracusa, servindo ao rei Hierão. Morreu em 212 a.C., durante o cerco de Siracusa pelos romanos. Manteve grande correspondência com os matemáticos de seu tempo, que conhecera durante sua estadia em Alexandria, como Eratóstenes, Apolônio e outros.

Solução: Nesse caso, devemos fazer dois desenhos. Lembre-se de que o desenho pode ajudar, mas, em muitos casos, não chega a ser essencial. O importante é que você tenha uma boa idéia dos sólidos em questão.



Exercício 2. Seja R a região limitada pela curva $y = \sqrt{x}$, pelo eixo Ox , com $x \in [0, 4]$. Faça um esboço do sólido obtido pela revolução de R em torno do eixo Ox e calcule o seu volume.

Solução: Aqui está o esboço do sólido de revolução:



Para calcular o volume usaremos a fórmula $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$, onde $f(x) = \sqrt{x}$, sobre o intervalo $[0, 4]$. Assim,

$$V = \pi \int_0^4 x dx = \pi \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 = 8\pi.$$

Agora é sua vez de praticar.

3. Calcule o volume do sólido de revolução da região R em torno do eixo indicado:

- (a) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x/2\}$; Ox .
- (b) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \cos x/2\}$; Oy .
- (c) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid 1 \leq y \leq x^2 - 4x + 4\}$; Ox .
- (d) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq e^x\}$; Ox .
- (e) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2, 1/x \leq y \leq e^x\}$; Ox .

4. Esboce o gráfico da região R sob o gráfico da função $y = 2 + 2 \cos x$ sobre o intervalo $[0, \pi]$. Calcule o volume do sólido de revolução de R em torno do eixo Oy e faça um esboço desse sólido.
5. Calcule o volume do sólido de revolução em torno do eixo Ox da região sob o gráfico da função $f(x) = x \sqrt{\cos x}$, no intervalo $[0, \pi/2]$.
6. Calcule o volume do sólido de revolução em torno do eixo Ox da região sob o gráfico da função $f(x) = \sec x$, no intervalo $[\pi/4, \pi/3]$.
7. Em uma esfera de raio 1 foi cavado um buraco cilíndrico, cujo eixo de simetria é um diâmetro máximo da esfera. Calcule o volume obtido da esfera menos o cilindro, sabendo que o raio do cilindro é $1/2$.
8. Calcule o volume do sólido cuja base é o disco $x^2 + y^2 \leq 4$ tal que cada uma de suas seções transversais perpendiculares ao eixo Ox é um quadrado.
9. Um sólido é construído sobre o triângulo de vértices $(0, -2)$, $(0, 2)$ e $(4, 0)$, de tal forma que cada seção perpendicular ao eixo Ox é um semicírculo.
10. Uma cunha é cortada do cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$ pelos planos $z = 0$ e $z = y$. Calcule o seu volume.

Aula 29 – Aplicações de integrais – Áreas e comprimentos

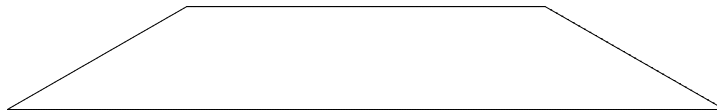
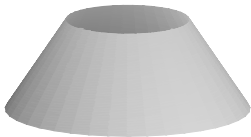
Objetivo

Conhecer as aplicações de integrais no cálculo da área de uma superfície de revolução e do comprimento de uma curva.

Área de uma superfície de revolução

Na aula anterior, você aprendeu a calcular o volume do sólido obtido da revolução de uma dada região R em torno do eixo Ox . Em particular, você viu como calcular o volume de uma esfera de raio r . Agora você verá como obter as áreas das superfícies que recobrem tais sólidos. Na aula anterior, usamos os volumes dos cilindros como ponto de partida no processo de aproximação que culminou na integral. Aqui, esse papel será desempenhado pela área de um tronco de cone. A área de um tronco de cone reto, de geratriz g , com raio da base maior R e raio da base menor r é igual à área de um trapézio de altura g , com base maior $2\pi R$ e base menor $2\pi r$. Isso é

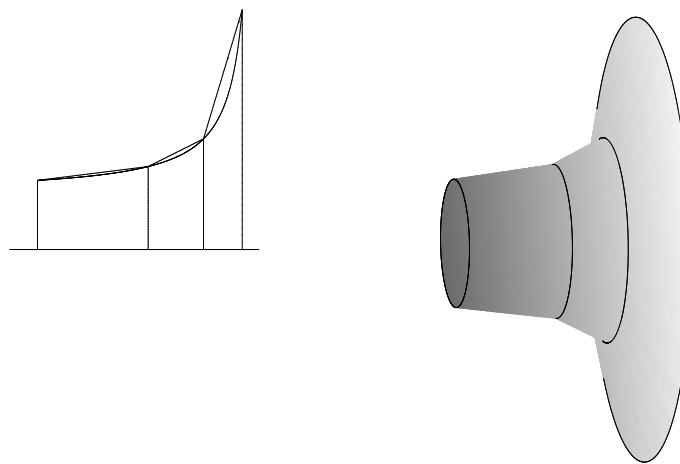
$$A = \pi(R + r)g.$$



Seja S a superfície obtida da rotação do gráfico da função contínua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ cuja restrição ao intervalo aberto (a, b) é de classe C^1 (dizemos que uma função é de classe C^1 quando, além de ser diferenciável, a função derivada f' é contínua). Queremos atribuir uma área à S . Usaremos o seguinte processo de aproximação: para cada partição $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ do intervalo $[a, b]$, consideraremos os troncos de cone obtidos pela revolução dos segmentos de reta que unem os pontos sucessivos $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ e $(x_i, f(x_i))$. Veja na figura a seguir.

A união desses troncos de cone aproximam a superfície de revolução, na medida em que tomamos partições mais finas.

Lembre-se: a área de um trapézio é o produto de sua altura pela média aritmética de suas bases.



A área da superfície obtida pela união dos cones é a soma das áreas dos cones:

$$\sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n \pi (f(x_{i-1}) + f(x_i)) l_i,$$

onde $l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$, o comprimento do segmento de reta unindo os pontos $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ e $(x_i, f(x_i))$ é a geratriz do tronco que tem como raios das bases $f(x_{i-1})$ e $f(x_i)$.

Usaremos agora o fato de f ser uma função diferenciável. Pelo Teorema do Valor Médio, existe um número $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que

$$f'(\xi_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}},$$

para cada $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Assim, podemos trocar $f(x_i) - f(x_{i-1})$ por $f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ na fórmula que determina l_i , obtendo:

$$\begin{aligned} l_i &= \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}))^2} = \\ &= \sqrt{\Delta x_i^2 + (f'(\xi_i))^2 \Delta x_i^2} = \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta x_i. \end{aligned}$$

Isso decorre do Teorema do Valor Intermediário. Veja o Teorema 7.2, da aula 7 de Cálculo I.

Além disso, como f é contínua, sabemos que o intervalo limitado pelos números $f(x_{i-1})$ e $f(x_i)$ está contido na imagem de f . Isto é, a equação $f(x) = M$ tem solução no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, para todos os valores de M entre os números $f(x_{i-1})$ e $f(x_i)$.

Em particular, existe $\zeta_i \in [x_{i-1}, x_i]$, tal que

$$f(\zeta_i) = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2},$$

para cada $i = 1, 2, \dots, n$. Isso significa que ζ_i é a solução da equação $f(x) = M$, onde M é o ponto médio entre $f(x_{i-1})$ e $f(x_i)$. Ou seja, $2f(\zeta_i) = f(x_{i-1}) + f(x_i)$.

Com mais essa alteração, nossa fórmula para $\sum_{i=1}^n A_i$ ficou assim:

$$\sum_{i=1}^n A_i = 2\pi \sum_{i=1}^n f(\zeta_i) \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta x_i.$$

Tomando o limite dessas somas de Riemann, chegamos à definição a seguir.

Definição 29.1 Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e positiva, cuja restrição ao intervalo (a, b) é de classe C^1 . A área da superfície gerada pela rotação do gráfico de f em torno do eixo Ox é definida pela integral

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Note que usamos o fato de f ser de classe C^1 . Assim, usamos o fato de f' ser uma função contínua, pois então a função $y = f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}$ é contínua, garantindo que as somas de Riemann convergem e a integral da definição está bem definida.

Exemplo 29.1

Área da esfera de raio r .

A esfera de raio r pode ser gerada pela revolução do gráfico da função $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ em torno do eixo Ox . Para aplicarmos a fórmula da área, precisamos da derivada de f :

$$f'(x) = \frac{1}{2} (r^2 - x^2)^{-1/2} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + (f'(x))^2} &= \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}} = \\ &= \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\int f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = r \int dx.$$

Portanto, a área da esfera de raio r é

$$A = 2\pi r \int_{-r}^r dx = 2\pi r x \Big|_{-r}^r = 4\pi r^2.$$

Exercício 1. Calcule a área do cone de raio da base r e de altura h .

Exemplo 29.2

A trombeta do anjo Gabriel.

O exemplo que você verá a seguir é bem conhecido devido ao seu resultado surpreendente.

Considere a superfície obtida pela rotação do gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$, com $x \in [1, \infty)$, em torno do eixo Ox . O objeto lembra uma trombeta, porém de comprimento infinito. Por isso é chamada de trombeta do anjo Gabriel.



Vamos calcular o volume da região limitada pela trombeta. Para isso, usaremos a fórmula do volume, mas com a integral imprópria, para incluir toda a trombeta:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^{\infty} (f(x))^2 dx = \pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \\ &= \pi \lim_{r \rightarrow \infty} \int_1^r \frac{1}{x^2} dx = \pi \lim_{r \rightarrow \infty} -\frac{1}{x} \Big|_1^r = \\ &= \pi \lim_{r \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{r} = \pi. \end{aligned}$$

Ótimo! Como a integral imprópria converge, dizemos que a trombeta, apesar de comprimento infinito, tem π unidades cúbicas de volume.

Agora, usando a mesma abordagem, vamos calcular a área da superfície que a recobre.

$$A = 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \sqrt{1 + \left(\frac{-1}{x^2}\right)^2} dx = 2\pi \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^3} dx.$$

Mas,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^3}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^6 + x^2}}{x^3} = 1.$$

Como $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$ diverge, pelo teste do limite do quociente, sabemos que a integral imprópria $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^3} dx$ diverge.

Ou seja, a área que recobre a trombeta é infinita. Aqui reside toda a incongruência do exemplo: o anjo pode encher a trombeta com um pouco mais do que 3 unidades cúbicas de tinta, mas, mesmo que use toda a tinta do universo, não poderia pintá-la.

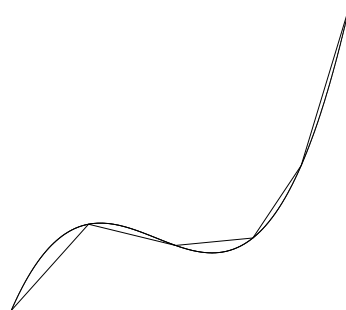
Bem, quando lidamos com trombetas de comprimento infinito, devemos esperar coisas surpreendentes.

Comprimento de curva

Vamos aproveitar os argumentos desenvolvidos na dedução da fórmula da área para definir o comprimento de uma curva que é o gráfico de uma função f , de classe C^1 .

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e positiva, diferenciável em (a, b) , cuja derivada é uma função contínua. Como antes, seja $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ uma partição do intervalo $[a, b]$.

Associada a essa partição, temos uma linha poligonal formada pela união dos segmentos de reta que unem os pontos $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ e $(x_i, f(x_i))$, sucessivamente. Essa linha é uma aproximação para o gráfico da função f .



O comprimento dessa linha poligonal é

$$\sum_{i=1}^n l_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

Como antes, temos $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, tal que

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i) \Delta x_i$$

e, portanto,

$$\sum_{i=1}^n l_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta x_i.$$

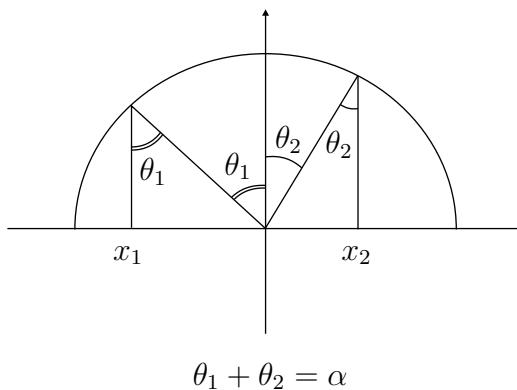
Assim podemos definir o comprimento do gráfico da função f , sobre o intervalo $[a, b]$, pelo limite dessas somas de Riemann:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Exemplo 29.3

Cálculo do comprimento de um arco de setor de circunferência.

Vamos calcular o comprimento de um arco de circunferência de raio r , correspondente a um ângulo $\alpha < \pi$. Vamos posicionar tal setor de tal forma que ele esteja na parte superior de $x^2 + y^2 = r^2$, e sejam x_1 e x_2 os pontos correspondentes à projeção do setor no eixo Ox .



Então, o comprimento desse arco é

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx.$$

Para resolver essa integral, fazemos a substituição trigonométrica $x = r \operatorname{sen} \theta$, onde θ_1 e θ_2 são os ângulos que correspondem aos valores x_1 e x_2 , respectivamente: $x_1 = r \operatorname{sen} \theta_1$ e $x_2 = r \operatorname{sen} \theta_2$. Temos $dx = r \cos \theta d\theta$ e $\sqrt{r^2 - x^2} = r \cos \theta$.

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{r^2 \cos \theta}{r \cos \theta} d\theta = \\ &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} r d\theta = r(\theta_2 - \theta_1) = r\alpha. \end{aligned}$$

Exercício 2. Calcule o comprimento do segmento de parábola $y = f(x) = x^2$ sobre o intervalo $[0, a]$.

Uma nota sobre os métodos numéricos

As integrais da fórmula da área de uma superfície de rotação e do comprimento do gráfico de uma função envolvem o radical $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$. Esse tipo de fórmula costuma gerar integrais que, do ponto de vista teórico, são integráveis, pois estamos lidando com funções contínuas e o Teorema Fundamental do Cálculo nos garante a existência das primitivas mas, na prática, são difíceis de se lidar. Isto é, apesar de já termos sob nosso domínio um razoável arsenal de técnicas de integração, as primitivas das funções com que estamos lidando não se expressam como combinações de funções familiares, como polinomiais, trigonométricas, exponenciais e logaritmos. Só para citarmos um exemplo, para calcularmos o comprimento da curva $y = \frac{1}{x}$, digamos de $x = 1$ até $x = 2$, teríamos de lidar com a integral $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^2} dx$, que não é, exatamente, muito amigável. Para lidar, na prática, com tais situações, podemos lançar mão dos chamados métodos numéricos de integração ou, se dispusermos de um computador com algum programa matemático, que fará a tarefa de avaliar o resultado. Por exemplo,

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^2} dx \approx 1,132090394.$$

Aqui está um pequeno resumo dos principais métodos numéricos de integração. O objetivo é de informar as alternativas no caso de cairmos numa integral para a qual não conhecemos uma técnica de integração adequada.

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Vamos subdividir o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de mesmo comprimento ($h = \frac{b-a}{n}$). Assim, $x_0 = a$, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_1 + h$, e assim por diante, até $x_n = b$. Vamos denotar $y_i = f(x_i)$.

1. Regra Retangular

$$\int_a^b f(x) dx \cong h(y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1})$$

ou

$$\int_a^b f(x) dx \cong h(y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_n).$$

Usamos, então, uma partição homogênea e uma das somas de Riemann para aproximar o valor da integral.

2. Regra do Trapézio

$$\int_a^b f(x) dx \cong \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n).$$

A idéia motriz desse método é aproximar a curva $y = f(x)$ por segmentos de retas.

3. Regra de Simpson

$$\int_a^b f(x) dx \cong \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n).$$

Essa fórmula funciona para n par. A idéia que faz o método funcionar é a de que estamos aproximando a curva $y = f(x)$ por uma união de segmentos de parábolas.

Esse não é o lugar adequado para nos aprofundarmos nesse assunto, mas é importante que você saiba da existência de tais métodos. Caso você tenha tempo e paciência, uma máquina de calcular científica aliada a essas fórmulas pode lhe dar uma maneira de, por exemplo, calcular uma aproximação para o número e ou o número π .

Para terminarmos, vamos fazer um resumo com as duas principais fórmulas da aula. Fórmula da área da superfície de revolução do gráfico da função de classe C^1 sobre o intervalo $[a, b]$:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Fórmula do comprimento do gráfico de f :

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Exercícios

Agora, aos exercícios, começando com os que foram sugeridos ao longo da aula.

Exercício 1. Calcule a área do cone de raio da base r e de altura h .

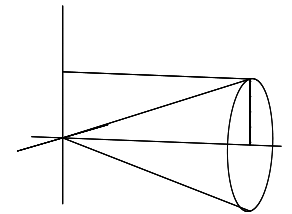
Solução:

Queremos a área da superfície que recobre o cone, sem contar a área da base. Para isso, vamos usar o gráfico da função linear que contém os pontos $(0,0)$ e (h,r) sobre o intervalo $[0, h]$. O cone será obtido girando tal gráfico em torno do eixo Ox .

Esta função é definida por $f(x) = \frac{r}{h}x$. Então, $f'(x) = \frac{r}{h}$ e

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^h \frac{r}{h}x \sqrt{1 + \frac{r^2}{h^2}} dx = 2\pi \frac{r}{h^2} \sqrt{r^2 + h^2} \frac{x^2}{2} \Big|_0^h = \\ &= \pi r \sqrt{r^2 + h^2} = \pi r g, \end{aligned}$$

onde $g = \sqrt{r^2 + h^2}$ é a geratriz do cone.



Exercício 2. Calcule o comprimento do segmento de parábola $y = f(x) = x^2$ sobre o intervalo $[0, a]$.

Solução:

Usamos $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$ e obtemos:

$$L = \int_0^a \sqrt{1 + 4x^2} dx.$$

Para calcularmos essa integral, faremos a substituição trigonométrica $x = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \theta$. Assim,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 + 4x^2} dx &= \frac{1}{2} \int \sec^3 \theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{tg} \theta \sec \theta + \frac{1}{2} \ln |\sec \theta + \operatorname{tg} \theta| + C. \end{aligned}$$

Portanto,

$$L = \int_0^a \sqrt{1 + 4x^2} dx = \frac{1}{2}a \sqrt{1 + 4a^2} + \frac{1}{4} \ln(2a + \sqrt{1 + 4a^2}).$$

Por exemplo, se $a = 1$, $L \cong 1,478942857$.

CÁLCULO II

Essa é uma maneira divertida de criar números para senhas...

Agora, alguns exercícios para você praticar.

Exercício 3.

Em cada um dos casos a seguir, calcule a área da superfície obtida pela revolução do gráfico da função dada, sobre o intervalo indicado.

(a) $f(x) = \frac{x^2}{2}$, $[0, 2]$;

(b) $f(x) = e^x$, $[0, 1]$;

(c) $f(x) = 2\sqrt{x}$, $[1, 4]$;

(d) $f(x) = \text{sen } x$, $[0, \pi/2]$.

Exercício 4.

Ao girarmos a circunferência $x^2 + (y - 2)^2 = 1$ em torno do eixo Ox , obtemos uma superfície que chamamos de toro. Calcule a área dessa superfície. Veja o exemplo 28.3.

Exercício 5.

Determine o comprimento da curva $f(x) = 2x^{3/2}$ sobre o intervalo $[0, 7]$.

Exercício 6.

Determine o comprimento do gráfico de $f(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$ sobre o intervalo $[2, 4]$.

Exercício 7.

Calcule o volume limitado pela superfície gerada pela revolução do gráfico da função $f(x) = x^{-2/3}$ em torno do eixo x , para $x \geq 1$, e a área que a recobre, se possível.

Aula 30 – Técnicas de integração – Miscelânea

Esta é a última aula do segundo módulo da disciplina Cálculo II. Isso significa que você está completando boa parte desta jornada. Você já enfrentou algumas dificuldades e, com certeza, já aprendeu muitas coisas novas.

A partir do terceiro módulo, a paisagem do curso mudará, primeiro um pouco e, depois, radicalmente. Isso deverá lhe dar mais motivação ainda para seguir em frente.

Os temas que foram abordados até agora foram tratados de maneira cuidadosa e a expectativa é que, com a bagagem de exemplos apresentados, e com a resolução dos exercícios propostos, você tenha ganho uma visão geral das técnicas de integração. No entanto, alguns aspectos tiveram de ser deixados de lado. Isso é natural. A Matemática é vasta, e o nosso tempo, limitado. O principal objetivo desta aula é apresentar, pelo menos rapidamente, alguns temas que não foram incluídos nas aulas anteriores e devem indicar como você pode completar sua formação, na medida em que for necessário ou de seu interesse.

O primeiro tema é um tipo de substituição alternativa para o método da substituição trigonométrica.

Substituição trigonométrica hiperbólica

Antes de falarmos nessa técnica, vamos lembrar, rapidamente, as motivações e algumas propriedades das chamadas funções trigonométricas hiperbólicas.

Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto simétrico em relação à origem. Isto é, se $x \in A$, então $-x \in A$.

Aqui estão alguns exemplos de conjuntos simétricos: \mathbb{R} , \mathbb{Z} , $(-a, a)$, $\mathbb{R} - \{k\pi \in \mathbb{R} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

E agora, alguns exemplos de conjuntos que não são simétricos: $(0, \infty)$, \mathbb{N} , $[a, b]$, onde $a \neq b$, $\mathbb{R} - \{3\}$.

CÁLCULO II

Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida num conjunto simétrico. Dizemos que f é uma função *par* se, para todo $x \in A$,

$$f(x) = f(-x).$$

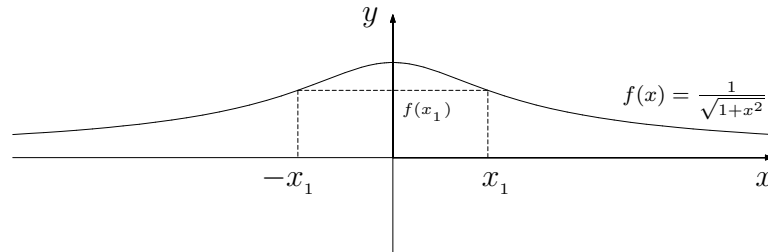
Exemplos de funções pares; $f(x) = x^{2n}$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Em contrapartida, dizemos que a função f é *ímpar* se, para todo $x \in A$,

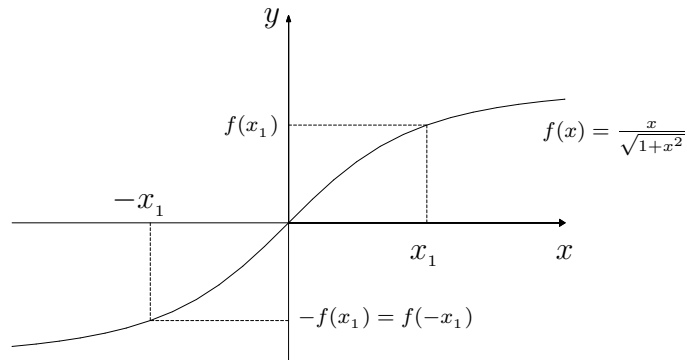
$$f(x) = -f(-x).$$

Exemplos de funções ímpares: $f(x) = x^{2n+1}$, $f(x) = \operatorname{sen} x$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Geometricamente, reconhecemos uma função par por ter seu gráfico simétrico em relação ao eixo Oy .



As funções ímpares são caracterizadas por terem seus gráficos simétricos em relação à origem. Isto é, os pontos $(x, f(x))$ e $(-x, f(-x)) = (-x, -f(x))$ são opostos um ao outro em relação à origem.



Exercício 1. Mostre que, se f é par e ímpar, então $f(x) \equiv 0$.

É claro que nem toda função definida sobre um conjunto simétrico é par ou ímpar. Veja que a condição de simetria nos gráficos é muito restritiva. Por exemplo, $f(x) = x^2 - x$ não é par nem ímpar.

No entanto, toda função f definida sobre um conjunto simétrico pode ser escrita, de maneira única, como a soma de duas funções, uma par e a outra ímpar. Por exemplo, $f(x) = x^2 - x = g(x) + h(x)$, onde $g(x) = x^2$ é par e, $h(x) = -x$, é ímpar.

A prova de que f é a soma de uma função par com uma função ímpar é fácil. Basta definir $f_p : A \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f_p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

e $f_i : A \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f_i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Claramente $f(x) = f_p(x) + f_i(x)$.

A unicidade afirmada anteriormente é a seguinte: se $f(x) = g(x) + h(x)$ para duas funções, uma par, digamos g , e a outra ímpar, digamos h , então $g = f_p$ e $h = f_i$. A prova dessa unicidade é fácil de ser realizada no contexto de Álgebra Linear e será vista, provavelmente, no decorrer dessa disciplina.

Exercício 2. Mostre que f_p é uma função par e f_i é uma função ímpar.

Agora, se aplicarmos a mesma construção à função $f(x) = e^x$, que não é par e não é ímpar, obtemos duas funções que são conhecidas como trigonométricas hiperbólicas:

$$f_p(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

chamada função cosseno hiperbólico e

$$f_i(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

chamada de seno hiperbólico.

Usando as fórmulas similares, obtemos todas as outras funções trigonométricas hiperbólicas, como $f(x) = \operatorname{tgh} x$, $g(x) = \operatorname{sech} x$ e $h(x) = \operatorname{arcsenh} x$. A razão de usarmos *trigonométricas* no nome dessas funções se deve às muitas familiaridades com as funções trigonométricas tradicionais. No entanto, é preciso estar atento às dissimilaridades.

Por exemplo,

$$f_p'(x) = (\cosh x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x.$$

$$f_i'(x) = (\sinh x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$$

Além disso, essas funções satisfazem à seguinte identidade fundamental:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$



Karl Weierstrass (1815-1897)

foi um matemático nascido em Berlim que desempenhou um papel fundamental na Matemática. Foi Weierstrass que, junto com

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), estabeleceu as bases da Análise

Matemática. Essa é a disciplina que dá todo o suporte às ferramentas que tanto usamos no Cálculo: os limites, a continuidade etc.

Além disso, Weierstrass foi um dos mais bem-sucedidos professores de todos os

tempos. Pode-se dizer isso devido ao grande número de alunos seus que se tornaram grandes matemáticos. Entre eles podemos citar Georg

Cantor, Felix Klein, Hermann Schwarz e, especialmente, Sofia

Kovalevskaya. Isso porque, naquela época, mulheres não tinham permissão para freqüentar as universidades.

Weierstrass foi professor particular de Sofia por quatro anos e, devido aos seus esforços com as autoridades, ela recebeu seu doutorado pela Universidade de Göttingen.

Aqui temos uma fórmula similar à identidade trigonométrica fundamental, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, com um sinal de menos no lugar do sinal de mais.

Essa é a razão para usarmos o termo hiperbólico adicionado ao nome dessas funções. Lembre-se de que $x^2 - y^2 = 1$ é a equação de uma hipérbole.

Essa identidade permite uma substituição trigonométrica hiperbólica para resolver algumas integrais, de maneira similar à que fizemos com as substituições trigonométricas usuais.

Exemplo 30.1

Calcule $\int \sqrt{1+x^2} dx$, usando a substituição trigonométrica hiperbólica.

Fazemos $x = \sinh t$. Então $dx = \cosh t dt$, $1 + \sinh^2 t = \cosh^2 t$. Assim,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1+x^2} dx &= \int \cosh t \cdot \cosh t dt = \int \cosh^2 t dt = \\ &= \int \frac{(e^t + e^{-t})^2}{4} dt = \frac{1}{4} \int (e^{2t} + 2 + e^{-2t}) dt = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{e^{2t}}{2} + 2t - \frac{e^{-2t}}{2} \right) + C = \\ &= \frac{1}{4} \sinh 2t + \frac{t}{2} + C = \\ &= \frac{1}{4} (2 \sinh t \cosh t) + \frac{t}{2} + C = \\ &= \frac{1}{2} x \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arcsinh} x + C. \end{aligned}$$

Para verificar que a função $F(x) = \frac{x}{2} \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arcsinh} x$ é uma primitiva da função $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, você pode derivá-la usando o fato

$$\frac{d}{dx} (\operatorname{arcsinh} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

A substituição de Weierstrass

O próximo tema é um tipo de substituição muito especial que foi descoberto por Karl Weierstrass. Ela é especialmente adequada para lidar com quocientes de somas de funções trigonométricas.

Exemplo 30.2

Calcule $\int \frac{1}{\cos t + \operatorname{sen} t} dt$.

A equação que inicia todo o processo é $u = \operatorname{tg} \left(\frac{t}{2} \right)$. Assim, $dt = \frac{2}{1+u^2} du$ e

$$\operatorname{sen} \frac{t}{2} = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \quad , \quad \cos \frac{t}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}.$$

Usando as fórmulas $\operatorname{sen} t = 2 \operatorname{sen} \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}$ e $\cos t = \cos^2 \frac{t}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2}$, concluímos que

$$\operatorname{sen} t = \frac{2u}{1+u^2}$$

e

$$\cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos t + \operatorname{sen} t} dt &= \int \frac{1}{\frac{1-u^2}{1+u^2} + \frac{2u}{1+u^2}} \cdot \frac{2}{1+u^2} du = \\ &= \int \frac{2}{-u^2 + 2u + 1} du = \\ &= \int \frac{2}{2 - (u+1)^2} du = \\ &= \sqrt{2} \operatorname{arctgh} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(u+1) \right) + C = \\ &= \sqrt{2} \operatorname{arctgh} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\operatorname{tg} \left(\frac{t}{2} \right) + 1 \right) \right) + C. \end{aligned}$$

Aqui usamos o fato
 $\int \frac{1}{1-x^2} dx =$
 $= \operatorname{arctgh} x + C.$

Impressionante, não?

Solução alternativa para calcular $\int \frac{1}{(1+x^2)^3} dx$

Entre todas as fórmulas com que você lidou até agora, sem dúvida, a mais assustadora é a fórmula de recorrência para calcular potências do inverso de polinômios irredutíveis de grau dois, como $\int \frac{1}{(1+x^2)^3} dx$.

Uma maneira alternativa, que evita aquela fórmula, é fazer a substituição $x = \operatorname{tg} \theta$. Assim, $x^2 + 1 = \sec^2 \theta$ e $dx = \sec^2 \theta d\theta$. Portanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2 + 1)^3} dx &= \int \frac{\sec^2 \theta}{\sec^6 \theta} d\theta = \\ &= \int \cos^4 \theta d\theta = \\ &= \frac{3}{8} \theta + \frac{3}{8} \cos \theta \operatorname{sen} \theta + \frac{1}{4} \cos^3 \theta \operatorname{sen} \theta + C = \\ &= \frac{3}{8} \theta + \frac{3}{8} \frac{\operatorname{tg} \theta}{\sec^2 \theta} + \frac{1}{4} \frac{\operatorname{tg} \theta}{\sec^4 \theta} + C = \\ &= \frac{3}{8} \operatorname{arctg} x + \frac{3}{8} \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{1}{4} \frac{x}{(x^2 + 1)^2} + C. \end{aligned}$$

Como você pode ver, evitamos a fórmula de recorrência. Como era de se esperar, a primitiva envolve arcotangente de x e quocientes de potências menores de $1 + x^2$. A parte delicada dessa maneira de abordar o problema é que, para expressar a resposta em termos da variável x , é preciso fazer uso das identidades trigonométricas para que, na resposta com θ , as funções trigonométricas envolvidas sejam tangente e secante.

Agora, o último tema da aula.

Dois exemplos de integrais impróprias

Na segunda aula sobre integrais impróprias, no exemplo 27.6, vimos que se $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e se $\int_a^\infty |f(x)| dx$ converge, então $\int_a^\infty f(x) dx$ também converge. Por exemplo, como $\int_\pi^\infty \left| \frac{\operatorname{sen} x}{e^x} \right| dx$ converge, então $\int_\pi^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{e^x} dx$ também converge.

Esse fato é um teorema do tipo $p \Rightarrow q$. Quando temos um tal teorema, é sempre importante saber o que ocorre com a recíproca. Se a recíproca $q \Rightarrow p$ for verdadeira, dizemos que o teorema é do tipo ‘se, e somente se’, como, por exemplo, o Teorema de Pitágoras. No entanto, quando a recíproca não é verdadeira, é sempre bom sabermos um exemplo que mostra isso. Chamamos tal exemplo de ‘contra-exemplo’. Aqui está um contra-exemplo.

Exemplo 30.3

A integral imprópria $\int_\pi^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$ é convergente, mas a integral imprópria $\int_\pi^\infty \left| \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right| dx$ é divergente.

Primeiro, veremos a convergência. Note que, devido à integração por partes,

$$\begin{aligned}\int_{\pi}^t \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx &= \frac{1}{x} (-\cos x) \Big|_{\pi}^t - \int_{\pi}^t \frac{\cos x}{x^2} dx = \\ &= -\frac{\cos t}{t} - 1 + \int_{\pi}^t \frac{\cos x}{x^2} dx.\end{aligned}$$

Ao tomarmos o limite dessa igualdade, quando $t \rightarrow \infty$, obtemos a convergência da integral imprópria, pois $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-\cos t}{t} = 0$, uma vez que $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-1}{t} = 0$ e $f(x) = -\cos x$ é uma função limitada e a integral imprópria $\int_{\pi}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ converge, pois $\int_{\pi}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge.

Na verdade, $\int_{\pi}^t \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx \approx -0,281140725$.

Agora, a divergência da integral imprópria $\int_{\pi}^{\infty} \left| \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right| dx$.

Sabemos que $|\operatorname{sen} x| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Portanto,

$$\operatorname{sen}^2 x \leq |\operatorname{sen} x|.$$

Isso vale, pois, como $|\operatorname{sen} x| \geq 0$, podemos multiplicar a primeira desigualdade por $|\operatorname{sen} x|$, sem inverter o sinal. Além disso, $|\operatorname{sen}^2 x| = \operatorname{sen}^2 x$.

Agora, como $x \geq \pi > 0$, temos

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x} \leq \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}.$$

Muito bem, basta mostrar que a integral imprópria $\int_{\pi}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x} dx$ diverge para, devido à desigualdade acima, concluir que $\int_{\pi}^{\infty} \left| \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right| dx$ diverge.

Novamente, usamos a integração por partes. Aqui fazemos

$$dv = \operatorname{sen}^2 x dx = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) dx, \quad \text{e } u = \frac{1}{x}.$$

Assim, $du = -\frac{1}{x^2} dx$ e $v = \left(\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4}\right)$. Portanto,

$$\begin{aligned}\int_{\pi}^t \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x} dx &= -\left(\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4x}\right) \Big|_{\pi}^t + \int_{\pi}^t \left(\frac{1}{2x} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4x^2}\right) dx = \\ &= -\frac{\operatorname{sen} 2t}{4t} + \frac{1}{2} \int_{\pi}^t \frac{1}{x} dx - \int_{\pi}^t \frac{\operatorname{sen} 2x}{4x^2} dx.\end{aligned}$$

Agora, a integral $\int_{\pi}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 2x}{4x^2} dx$ converge e $\lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{\operatorname{sen} 2t}{4t} = 0$. Como $\int_{\pi}^{\infty} \frac{1}{x} dx$ diverge, concluímos que $\int_{\pi}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x} dx$ diverge.

Muito bem, chegamos ao fim da aula. Agora vamos aos exercícios.

Exercícios

Primeiro aqueles que foram propostos ao longo da aula.

Exercício 1. Mostre que, se f é par e ímpar, então $f(x) \equiv 0$.

Solução: Como f é par, $f(x) = f(-x)$. Agora, como f é ímpar, $f(x) = -f(-x)$. Reunindo as duas informações, concluímos que $f(x) = -f(x)$. Assim, $2f(x) = 0$ e, portanto, para todo x no domínio simétrico de f , $f(x) = 0$.

Exercício 2. Mostre que f_p é uma função par e f_i é uma função ímpar.

Solução: Aqui, basta usar a fórmula. Por exemplo,

$$f_p(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = f_p(x).$$

Agora, você pode fazer o equivalente para a função f_i para concluir que ela é uma função ímpar.

Agora, alguns exercícios para você praticar.

3. Seja $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ uma função polinomial. Determine $f_p(x)$ e $f_i(x)$.

4. Mostre que $\operatorname{arcsenh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Sugestão: mostre que ambas as funções têm a mesma derivada e que coincidem em um ponto. Explique por que isso implica na veracidade da afirmação.

5. Calcule $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$ usando a substituição trigonométrica hiperbólica.

6. Calcule $\int \frac{1}{(4x^2 + 1)^2} dx$ usando a substituição trigonométrica.

7. Calcule $\int \frac{1}{1 + \cos t} dt$ usando a substituição de Weierstrass.

Aula 31 – Funções vetoriais de uma variável real

Objetivos

- Conhecer as definições básicas de funções vetoriais de uma variável real.
- Aprender a parametrizar curvas simples.

Introdução

Até agora você estudou as funções reais de uma variável real. As equações envolviam apenas duas variáveis, uma dependendo da outra, geralmente denotadas por x e y .

Você aprendeu a esboçar gráficos de funções tais como $f(x) = x e^x$ ou $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$, a derivar implicitamente y como uma função de x determinada por equações tais como $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

Tudo isso está prestes a mudar, a partir desta aula. Vamos decolar para dimensões mais altas. Mas, tudo a seu tempo.

Começaremos estudando as funções vetoriais de uma variável real. Essas funções são assim chamadas porque o resultado da função não é mais um número, mas um vetor. Neste curso, esses vetores serão sempre vetores do plano ou do espaço tridimensional. Isto é, nossas funções terão \mathbb{R}^n , com $n = 2$ ou 3 , como contradomínio. No entanto, as idéias e conceitos aqui apresentados podem ser generalizados, de maneira muito natural, para outros espaços vetoriais, com dimensões mais altas, porém finitas.

Denotaremos essas funções por letras gregas minúsculas. Elas também podem ser denotadas por letras maiúsculas, como F , ou ainda, com uma setazinha sobre a letra, para indicar a sua natureza vetorial, como \vec{F} .

Exemplo 31.1

Seja $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ a função vetorial definida por

$$\alpha(t) = (2t + 1, 1 - t).$$

A variável independente é denotada por t e, para cada valor de $t \in \mathbb{R}$, $\alpha(t)$ é um vetor de \mathbb{R}^2 . Por exemplo, $\alpha(0) = (1, 1)$, $\alpha(-1) = (-1, 2)$ etc.

Dada uma função vetorial $\alpha(t)$, que toma valores em \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 , podemos considerar suas *funções coordenadas*. Isto é, as funções que determinam as coordenadas do vetor $\alpha(t)$. Usaremos a notação

$$\alpha(t) = (x(t), y(t))$$

ou

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

dependendo do caso. Assim, $x(t)$, $y(t)$ ou $z(t)$ são as funções coordenadas.

Exemplo 31.2

Dadas $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$ e $\beta(t) = (t, t^2, 1 - t^2)$, suas funções coordenadas

$$\text{são: } \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \\ z(t) = 1 - t^2 \end{cases}, \text{ respectivamente.}$$

A notação $\alpha_1(t) = \cos t$ e $\alpha_2(t) = \sin t$ também é muito usada.

Podemos resumir assim: chamamos funções vetoriais de uma variável real as funções da forma

$$\alpha : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n, n = 2 \text{ ou } 3,$$

onde A é uma união de intervalos. Se $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$ é uma função vetorial, chamamos as funções reais α_1 , α_2 e α_3 de funções coordenadas.

Além disso, chamamos a imagem de α

$$\alpha(A) = \{ \alpha(t) \in \mathbb{R}^n; t \in A \},$$

de *traço da função*.

Exemplo 31.3 (Revisitado)

No caso de $\alpha(t) = (2t + 1, 1 - t)$, o vetor $(3, 0) \in \alpha(\mathbb{R})$, pois $\alpha(1) = (3, 0)$. Observe que $(2, 1) \notin \alpha(\mathbb{R})$.

Realmente, para que isso ocorresse, seria necessário encontrar um número t_0 tal que

$$\begin{cases} 2t_0 + 1 = 2 \\ 1 - t_0 = 1 \end{cases}$$

simultaneamente. Isso não é possível.

Vamos esboçar o traço dessa função. Note que as equações que definem a função são bem simples. Temos

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 1 - t. \end{cases}$$

Isolando t na equação $y = 1 - t$, temos $t = 1 - y$. Agora, substituindo essa informação na primeira equação, temos

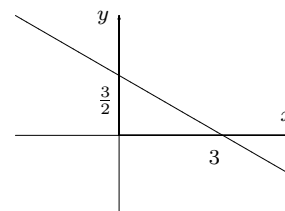
$$x = 2(1 - y) + 1 = 3 - 2y.$$

Assim,

$$x + 2y = 3,$$

que é a equação de uma reta.

Esse exemplo se generaliza da seguinte maneira:



Funções vetoriais cujas funções coordenadas são funções afins

Essas funções vetoriais são as mais simples de todas. Ou seja, as funções coordenadas são do tipo $\alpha_i(t) = a_i t + b_i$, onde a_i e b_i são números reais.

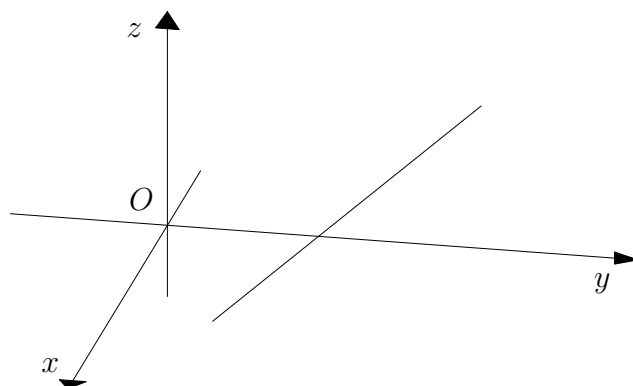
Se existe pelo menos um i , tal que $a_i \neq 0$, o traço da função será uma reta.

Exemplo 31.4

Esboce o traço da função $\alpha(t) = (2 - t, 2t + 1, 3t)$.

Basta marcar dois pontos na imagem da função e ligá-los por uma reta. Por exemplo, $\alpha(0) = (2, 1, 0)$ e $\alpha(1) = (0, 3, 3)$.

Lembre-se: é comum representarmos o espaço \mathbb{R}^3 com os eixos coordenados Oy e Oz dispostos em verdadeira grandeza no plano em que desenhemos, tendo o eixo Ox perpendicular ao mesmo, apontando em nossa direção.



Equações paramétricas de retas

A equação

$$\alpha(t) = (1 - t)A + tB,$$

onde A e B são dois vetores dados tem por traço a reta determinada por esses vetores, caso $A \neq B$.

Além disso, $\alpha(0) = A$ e $\alpha(1) = B$.

Note que os produtos $(1 - t)A$ e tB são produtos de escalares (números) por vetores e o sinal $+$ indica a soma vetorial.

Mais ainda, se restringirmos o domínio ao intervalo $[0, 1]$, a imagem $\alpha([0, 1])$ é, precisamente, o segmento de reta que une A e B .

Além disso, podemos reescrever a equação de $\alpha(t)$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= (1 - t)A + tB = A - tA + tB = \\ &= A + t(B - A).\end{aligned}$$

Se colocarmos $\vec{v} = B - A$, a equação ganha a forma

$$\alpha(t) = t\vec{v} + A.$$

A interpretação geométrica é a seguinte: $\alpha(t)$ é uma parametrização da reta que contém o ponto A e é paralela ao vetor não nulo \vec{v} .

Exemplo 31.5

Expresse as equações que definem as funções vetoriais do tipo $\alpha(t) = (1 - t)A + tB$ e esboce a imagem de $\alpha([0, 1])$ nos seguintes casos:

- (a) $A = (0, 1)$ $B = (1, 3)$;
- (b) $A = (1, 1)$ $B = (1, 3)$;
- (c) $A = (1, 0, 2)$ $B = (2, 2, 3)$.

Primeiro, as fórmulas. Vamos usar letras gregas diferentes para cada caso.

(a)

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= (1 - t)(0, 1) + t(1, 3) = \\ &= (0, 1 - t) + (t, 3t) = \\ &= (t, 1 + 2t).\end{aligned}$$

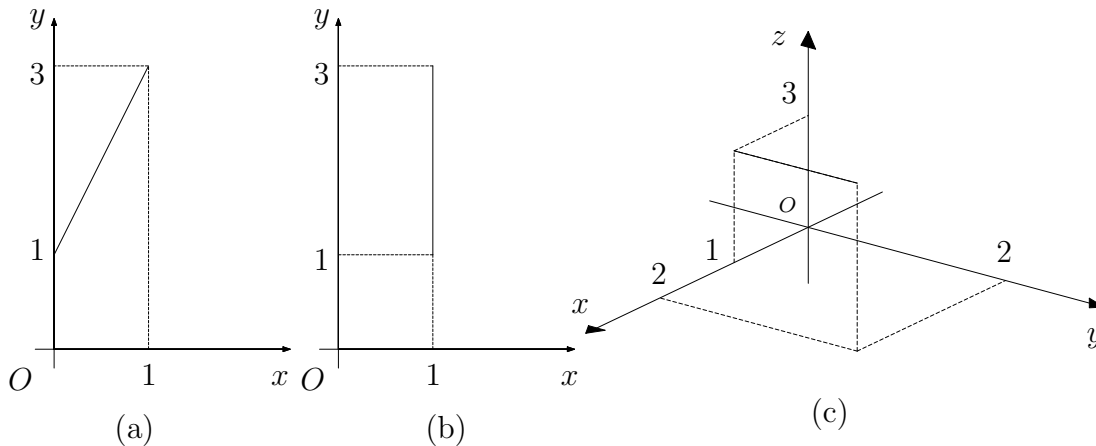
(b)

$$\begin{aligned}\beta(t) &= (1-t)(1, 1) + t(1, 3) = \\ &= (1-t, 1-t) + (t, 3t) = \\ &= (1, 1+2t).\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= (1-t)(1, 0, 2) + t(2, 2, 3) = \\ &= (1-t, 0, 2-2t) + (2t, 2t, 3t) = \\ &= (1+t, 2t, 2+t).\end{aligned}$$

Agora, os segmentos que conectam os pontos que definiram as funções:



Note que o segmento de reta que une $\beta(0)$ a $\beta(1)$ é paralelo ao eixo Oy . Algebricamente isso é indicado pelo fato de a primeira função coordenada da função β ser constante.

Exercício 1

Determine a equação da função vetorial α tal que $\alpha(0) = (1, -1)$ e $\alpha(1) = (2, 3)$, cujas coordenadas são funções afins.

De um modo geral, não é fácil traçar a imagem de uma dada função vetorial. Assim como você aprendeu a esboçar gráficos de funções reais de uma variável real, usando limites e derivadas, também há técnicas para traçar imagens de funções vetoriais de uma variável real. Isso é conhecido como traçado de curvas. No entanto, essas técnicas fogem um pouco do escopo do nosso curso e nos limitaremos a alguns exemplos. Além disso, com o uso de programas de computadores com interface gráfica de excelente qualidade, é possível traçar as curvas com alguma facilidade.

Exemplo 31.6

Seja $\alpha(t) = (2 \cos t, 2 \sin t)$ uma função vetorial definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Vamos descrever a imagem de α .

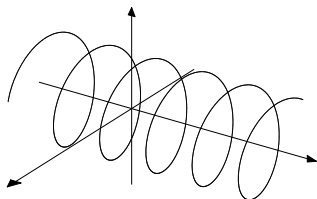
Devido à identidade trigonométrica fundamental

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1,$$

sabemos que a imagem de α está contida no círculo definido pela equação

$$x^2 + y^2 = 4.$$

Note que para cada valor de t , $\alpha(t)$ é um dos pontos da circunferência do círculo e que para cada ponto da circunferência do círculo há um t correspondente. Isso decorre da continuidade das funções coordenadas. Além disso, na medida em que t varia positivamente, $\alpha(t)$ ‘percorre’ o círculo no sentido anti-horário.



Exercício 2

Descreva a imagem da função $\beta(t) = (2 \sin t, 3 \cos t)$.

Interpretação geométrica

As funções vetoriais de uma variável real têm uma interpretação geométrica muito natural. Elas descrevem movimentos de um ponto num dado espaço vetorial, em função da variável independente.

Sob essa perspectiva, a variável independente é chamada de *parâmetro*. Por isso a notação t para a variável independente é tão conveniente, deixando os nomes de variáveis x , y e z para as funções coordenadas que dependem do parâmetro t . Além disso, tradicionalmente, t indica, na Física, o parâmetro tempo.

Os traços dessas funções são o que chamamos genericamente de *curvas*. É por isso que, em muitos casos, chamamos as funções vetoriais de uma variável real de curvas. É um abuso de linguagem, pois a curva é, na verdade, a imagem da função. No entanto, o nome é conveniente e passaremos a usá-lo daqui por diante.

Parametrizações

Usa-se dizer que a função vetorial $\alpha(t)$ é uma *parametrização* da curva que é a imagem da função.

Veja que a mesma curva pode ser parametrizada de muitas maneiras. Ou seja, há muitas funções vetoriais que têm a mesma curva imagem.

Exemplo 31.7

Todas as funções vetoriais a seguir são parametrizações da circunferência do círculo de raio 1 com centro na origem:

$$\alpha_1(t) = (\cos t, \text{sen } t);$$

$$\alpha_2(t) = (\cos 2\pi t, \text{sen } 2\pi t);$$

$$\alpha_3(t) = (\cos (at + b), \text{sen } (at + b)), a \neq 0;$$

$$\alpha_4(t) = (\text{sen } t, \cos t).$$

Exercício 3

Mostre que as funções $\alpha(t) = (4 - 4t, 2t)$ e $\beta(t) = (2 + 4t, 1 - 2t)$ são parametrizações diferentes da mesma curva.

Translações

A característica geométrica das curvas que é simples de ser detectada na parametrização é quando ela é uma translação de outra curva. Veja o exemplo a seguir.

Exemplo 31.8

Esboce a curva dada pela parametrização

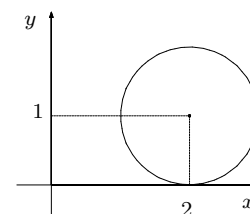
$$\alpha(t) = (2 + \cos t, 1 + \text{sen } t).$$

Note que podemos reescrever a parametrização da seguinte maneira:

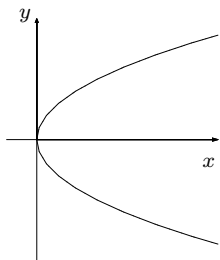
$$\alpha(t) = (2, 1) + (\cos t, \text{sen } t).$$

Portanto, se $A = (2, 1)$, a curva é a circunferência de um círculo de raio 1, caracterizada pela parte $(\cos t, \text{sen } t)$ da fórmula, com centro em A . A curva α é uma translação da curva $\beta(t) = (\cos t, \text{sen } t)$.

A seguir, você verá uma série de curvas. Isso lhe permitirá ampliar seu repertório de exemplos.



CÁLCULO II



Exemplo 31.9

A curva $\gamma(t) = (t^2, t)$ está definida para todos os números reais e seu traço é uma parábola.

Realmente, as suas funções coordenadas são $x(t) = t^2$ e $y(t) = t$. Nesse caso, podemos facilmente eliminar o parâmetro t obtendo uma equação apenas em termos das variáveis cartesianas

$$x = y^2,$$

que corresponde a uma parábola.

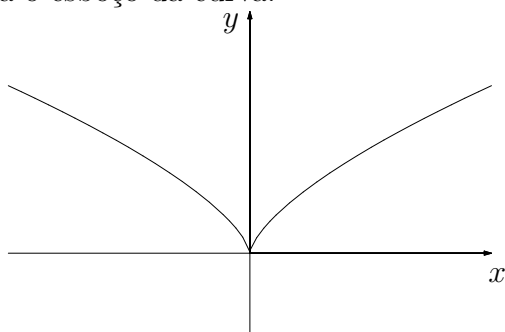
Exemplo 31.10

A curva dada pela equação $\alpha(t) = (t^3, t^2)$, definida para todos os números reais, tem por funções coordenadas funções polinomiais. Curvas desse tipo são chamadas curvas algébricas. O estudo de tais curvas ocupa uma parte da Matemática chamada Geometria Algébrica.

Para determinar seu traço, podemos usar o mesmo expediente que foi usado no exemplo anterior: eliminar o parâmetro. No entanto, a equação agora obtida não é mais tão simples:

$$y = x^{2/3}.$$

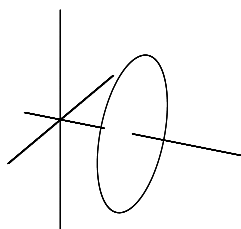
Aqui está o esboço da curva:



Veja que, apesar de estarmos lidando apenas com funções polinomiais, a curva tem uma 'dobra' na origem. Esta curva é conhecida por *cúspide*.

Exemplo 31.11

A curva $\alpha(t) = (\cos t, 1, \sin t)$ toma valores no espaço tridimensional, mas é uma curva plana. Isso porque ela satisfaz a equação $y = 1$. A projeção dessa curva no plano $y = 0$ corresponde à curva $\beta(t) = (\cos t, \sin t)$. Sua imagem é a circunferência de um círculo.



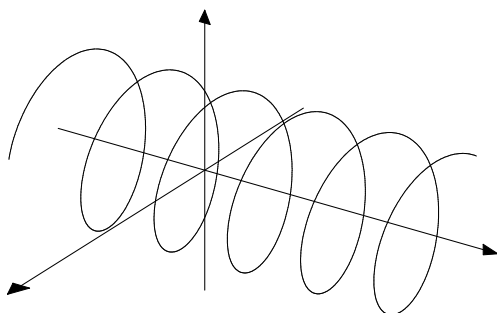
Exemplo 31.12

A curva

$$\gamma(t) = (\cos 2\pi t, t, \sin 2\pi t),$$

definida para todos os valores reais de t , quando projetada no plano $y = 0$, corresponde à circunferência do círculo de raio 1 e centro na origem, parametrizada por $\alpha(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$. A função coordenada $y(t) = t$, da função γ , garante que, na medida em que t varia, o ponto $\gamma(t)$ se afasta do plano $y = 0$.

Essa curva está contida no cilindro $x^2 + z^2 = 1$ e é chamada de *helicóide*, pois descreve o movimento de um ponto de uma hélice que se desloca sobre o eixo Oy .



Exemplo 31.13

Como um último exemplo da aula, vamos dar uma parametrização da hipérbole definida pela equação cartesiana

$$x^2 - y^2 = 1.$$

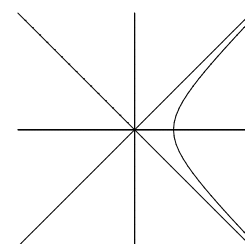
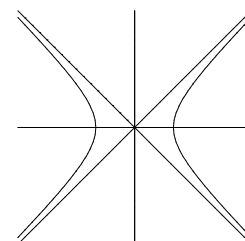
Lembre-se de que as funções trigonométricas hiperbólicas satisfazem a seguinte identidade hiperbólica:

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1.$$

Portanto, a imagem da curva $\alpha(t) = (\cosh t, \sinh t)$ certamente está contida na hipérbole. Agora, como a função contínua

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \geq 1,$$

α parametriza apenas o ramo da direita da hipérbole. Note também que a função $f(t) = \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ é bijetora e, assim, $\alpha(t)$ recobre toda a extensão desse ramo de hipérbole.



Para parametrizar o outro ramo, basta considerar

$$\beta(t) = (-\cosh t, \sinh t).$$

Agora, os exercícios.

Exercícios

Primeiro, aqueles que foram propostos ao longo da aula.

Exercício 1

Determine a equação da função vetorial α tal que $\alpha(0) = (1, -1)$ e $\alpha(1) = (2, 3)$, cujas coordenadas são funções afins.

Solução:

Basta usar a fórmula $\alpha(t) = (1 - t)A + tB$, com $A = (1, -1)$ e $B = (2, 3)$.

Assim,

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= (1 - t)(1, -1) + t(2, 3) = \\ &= (1 - t, t - 1) + (2t, 3t) = \\ &= (1 + t, 4t - 1).\end{aligned}$$

Exercício 2

Descreva a imagem da função $\beta(t) = (2 \sin t, 3 \cos t)$.

Solução:

A equação que define a função satisfaz a

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1,$$

que é a equação de uma elipse centrada na origem, com eixos paralelos aos eixos Ox e Oy .

Exercício 3

Mostre que as funções $\alpha(t) = (4 - 4t, 2t)$ e $\beta(t) = (2 + 4t, 1 - 2t)$ são parametrizações diferentes da mesma curva.

Solução:

As funções coordenadas de α são $x = 4 - 4t$ e $y = 2t$. Eliminando o parâmetro t , ganhamos a equação cartesiana $x = 4 - 2y$.

As equações correspondentes à função β são $x = 2 + 4t$ e $y = 1 - 2t$. Da segunda equação, obtemos $t = \frac{1-y}{2}$. Substituindo na primeira equação, obtemos

$$\begin{aligned}x &= 2 + 4\left(\frac{1-y}{2}\right) = \\&= 2 + 2(1-y) = \\&= 2 + 2 - 2y = \\&= 4 - 2y.\end{aligned}$$

Como as duas equações cartesianas são idênticas (bastava que fossem uma múltipla da outra), as duas funções têm a mesma reta como imagem.

Agora é hora de praticar o que você aprendeu.

Exercício 4

Encontre uma parametrização para a reta que contém os pontos $(1, -1)$ e $(-3, 4)$.

Exercício 5

Encontre uma parametrização para a reta que é paralela ao vetor $\vec{v} = (-2, 5)$ e que contém o ponto $(2, 1)$.

Exercício 6

Ache uma parametrização para a reta que é a interseção dos planos $x - y + z = -3$ e $2x + y - 2z = 6$.

Exercício 7

Encontre a parametrização $\alpha(t)$ da reta r , tal que $\alpha(1) = (-3, 2, 1)$ e $\alpha(0) = (0, 0, -2)$.

Exercício 8

Faça um esboço das seguintes curvas:

- (a) $\alpha(t) = (2t, 3t + 1), \quad t \in [0, 1];$
- (b) $\beta(t) = (1 - t, 3 - 2t, t), \quad t \in [0, 1];$
- (c) $\gamma(t) = (5 \cos 2t, -2 \sin 2t) \quad t \in [0, \pi];$
- (d) $\delta(t) = (t^2 - 1, t^3 + 1), \quad t \in [-2, 2].$

Exercício 9

Trace a curva $\alpha(t) = (t, 2 \cos 2\pi t, 2 \sin 2\pi t)$.

Exercício 10

Dê uma parametrização para cada uma das seguintes cônicas:

(a) $x - 3 = (y + 1)^2$;

(b) $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$;

(c) $y^2 - 4x^2 = 1$ (ramo superior);

(d) $9(x - 1)^2 + 4(y + 2)^2 = 36$.

Aula 32 – Curvas em coordenadas polares

Objetivo

- Aprender a usar as coordenadas polares para representar curvas planas.

As coordenadas polares nos dão uma maneira alternativa de localizar pontos no plano e são especialmente adequadas para expressar certas situações, como veremos a seguir.

Vamos começar com um exemplo que servirá como motivação.

Exemplo 32.1

A curva parametrizada pela equação

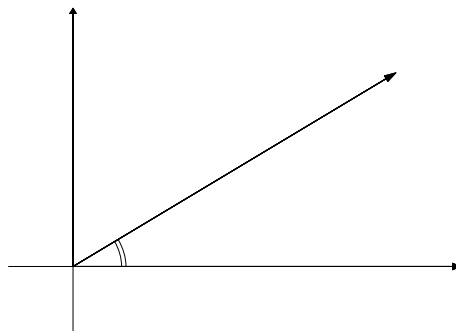
$$\alpha(t) = t(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t), \quad t \geq 0$$

é um exemplo de uma espiral. Ela é chamada de espiral de Arquimedes.

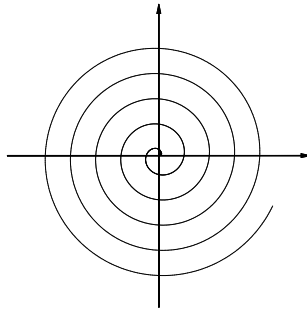
A distância de $\alpha(t)$ até a origem é

$$\|\alpha(t)\| = \sqrt{t^2 \cos^2 2\pi t + t^2 \sin^2 2\pi t} = t.$$

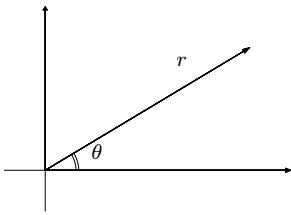
Ou seja, na medida em que t aumenta, o ponto $\alpha(t)$ afasta-se da origem. Em contrapartida, ao marcarmos o ponto $\alpha(t) = (t \cos 2\pi t, t \sin 2\pi t)$ no plano, percebemos que, para $t > 0$, $2\pi t$ é o ângulo que $\alpha(t)$, visto como um vetor, faz com a parte positiva do eixo Ox .



Assim podemos compreender a dinâmica da curva: o vetor $\alpha(t)$ gira em torno da origem, com sentido anti-horário, dando uma volta em torno dela sempre que t varia sobre um intervalo de comprimento 1, enquanto o mesmo alonga-se, fazendo sua outra extremidade afastar-se da origem. O traço obtido é o seguinte:



Coordenadas Polares



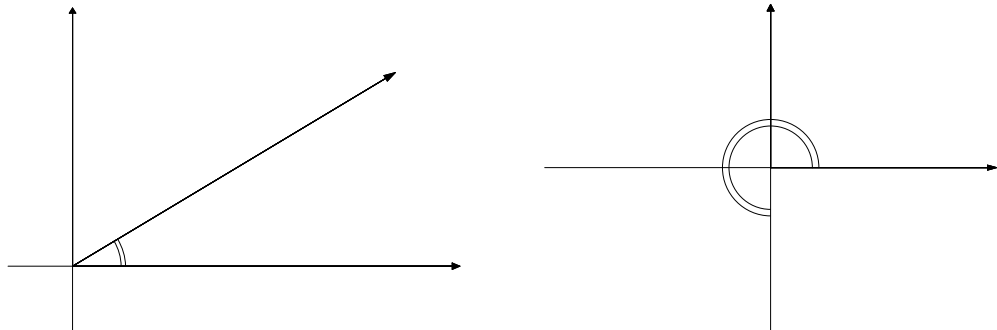
Como você pode ver no exemplo anterior, para determinar um ponto no plano, é necessário ter duas informações. No caso das coordenadas cartesianas, essas informações são as distâncias ‘orientadas’ do ponto até os eixos coordenados Ox e Oy . No caso das coordenadas polares, essas duas informações serão uma distância e um ângulo. A primeira, usualmente representada por r , é a distância entre o ponto e origem, que será o pólo do sistema, daí o nome *coordenadas polares*. Quando a distância r é não nula, o segmento que une a origem ao ponto, ou o ponto visto como um vetor, faz um certo ângulo com o semi-eixo positivo Ox . Este ângulo, usualmente denotado por θ , é a segunda informação.

Vamos usar a seguinte convenção para representar as coordenadas polares:

$$(r, \theta)_{\text{polar}}$$

Exemplo 32.2

As coordenadas cartesianas do ponto $(2\sqrt{2}, \pi/4)_{\text{polar}}$ são $(2, 2)$ e as coordenadas polares do ponto $(0, -2)$ são $(2, 3\pi/2)_{\text{polar}}$.



Para marcar o ângulo, iniciamos no semi-eixo Ox positivo e giramos no sentido *anti-horário* até esgotar o ângulo dado.

Usando essa convenção, podemos marcar também ângulos maiores do que 2π assim como ângulos ‘negativos’, da mesma forma como lidamos com os argumentos das funções trigonométricas. Lembre-se de que estamos interpretando esses ângulos como coordenadas. Muito bem, para os ângulos maiores do que 2π , seguimos medindo, dando tantas voltas quantas necessárias, até esgotar o valor dado. Por exemplo, $(2, \pi/4)_{\text{polar}} = (2, 9\pi/4)_{\text{polar}} = (2, 17\pi/4)_{\text{polar}}$. Para marcar os ângulos negativos, fazemos a mesma coisa, porém girando no sentido horário. Dessa forma, $(2, -\pi/4)_{\text{polar}} = (2, 7\pi/4)_{\text{polar}}$.

A relação entre as coordenadas cartesianas e as coordenadas polares é dada pelas fórmulas

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

e, portanto,

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Podemos usar as coordenadas polares para expressar curvas, assim como o fazemos com as coordenadas cartesianas. Geralmente, expressamos r em função de θ . Você verá que certas curvas são mais facilmente expressas em termos de coordenadas polares.

Exemplo 32.3

As equações $x^2 + y^2 = 4$ e $x = 3$ representam, em coordenadas cartesianas, a circunferência do círculo de raio 2, com centro na origem, e a reta paralela ao eixo Oy e que contém o ponto $(3, 0)$.

Em coordenadas polares, a equação da circunferência é, simplesmente,

$$r = 2.$$

Ou seja, $r = 2$ determina o conjunto de todos os pontos do plano cuja distância até a origem é 2.

No entanto, a equação cartesiana $x = 3$ ganha a seguinte forma polar

$$r \cos \theta = 3.$$

Para expressarmos r em função de θ , temos de nos preocupar com a variação de θ . Assim, se $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$, podemos colocar

$$r = 3 \sec \theta.$$

Note que, na medida em que $\theta \rightarrow \pi/2^+$, a distância r do ponto até a origem cresce para o infinito, pois

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi/2^+} \sec \theta = +\infty.$$

Exercício 1

Encontre a equação polar da reta $y = -2$.

Exemplo 32.4

Vamos encontrar a equação polar da circunferência determinada por

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1.$$

Para isso, reescrevemos essa equação da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} (x - 1)^2 + y^2 &= 1 \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 &= 1 \\ x^2 + y^2 &= 2x. \end{aligned}$$

Agora usamos as equações $x^2 + y^2 = r^2$ e $x = r \cos \theta$ para obter

$$r^2 = 2r \cos \theta.$$

Assim, a equação polar fica

$$r = 2 \cos \theta.$$

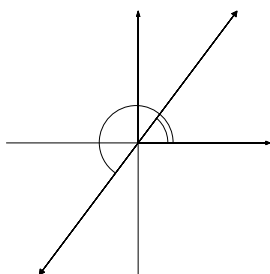
Um pouco de cuidado, agora, com a variação de θ . Para percorrer toda a circunferência, uma vez, basta fazer $\theta \in (-\pi/2, \pi/2]$. Veja que devemos incluir o ângulo $\pi/2$ para obter $r = 0$.

Note que a origem não tem a coordenada θ bem definida. Além disso, estamos sempre considerando r um número positivo. No entanto, quando lidamos com equações tais como a do exemplo anterior, $r = 2 \cos \theta$, percebemos a conveniência de estabelecer a seguinte convenção:

$$(-r, \theta)_{\text{polar}} = (r, \theta + \pi)_{\text{polar}}.$$

Assim, o ponto de coordenadas cartesianas $(1, \sqrt{3})$ pode ser representado em coordenadas polares como:

$$(2, \pi/3)_{\text{polar}} = (2, -5\pi/3)_{\text{polar}} = (-2, 4\pi/3)_{\text{polar}} = (-2, -2\pi/3)_{\text{polar}}.$$



A equação $r = 2 \cos \theta$, então, também faz sentido quando $\cos \theta$ assume valores negativos. Veja que, se $\theta \in [\pi/2, 3\pi/2)$, a equação representa a mesma circunferência: $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.

Exercício 2

Determine a equação polar da circunferência determinada por

$$x^2 + (y + 2)^2 = 4.$$

Exemplo 32.5 (Revisitado)

Vamos encontrar uma equação polar para a curva determinada pela parametrização

$$\alpha(t) = (t \cos 2\pi t, t \sin 2\pi t).$$

Essa equação paramétrica é dada em termos de coordenadas cartesianas. Isto é, $x(t) = t \cos 2\pi t$ e $y(t) = t \sin 2\pi t$.

Primeiro, vamos considerar uma equação paramétrica dada em termos das coordenadas polares:

$$\begin{cases} r = t \\ \theta = 2\pi t. \end{cases}$$

Assim, a equação da curva, em termos de coordenadas polares, pode ser obtida das equações anteriores, eliminando o parâmetro t :

$$r = \frac{\theta}{2\pi}, \quad \theta \geq 0.$$

Exercício 3

Faça um esboço das seguintes curvas, dadas por equações escritas em termos de coordenadas polares:

- (a) $\theta = \frac{\pi}{3}, \quad r \geq 0;$
- (b) $r = \frac{\theta}{\pi}, \quad \theta \leq 0;$
- (c) $r = 3 \csc \theta, \quad \pi/4 < \theta < 3\pi/4;$
- (d) $\begin{cases} r = \sqrt{t} \\ \theta = t. \end{cases}$

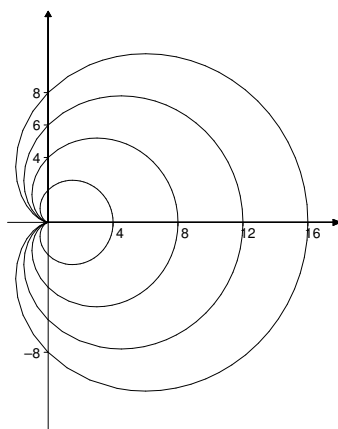
Há várias técnicas que permitem esboçar curvas dadas em termos de coordenadas polares. Tais técnicas levam em conta simetrias e outras características geométricas que podem ser detectadas nas equações. O estudo de tais técnicas, porém, foge ao escopo deste curso, no qual queremos apresentar uma introdução a esse tema. A seguir, apresentaremos uma série de curvas com suas equações e nomes, para que você tenha uma idéia das possibilidades.

Exemplo 32.6

As curvas dadas por equações do tipo

$$r = 2a(1 + \cos \theta)$$

são chamadas de *cardióides*. Na figura a seguir, estão representadas quatro cardióides, onde os valores de a são 1, 2, 3 e 4.



Observe que as curvas são simétricas em relação ao eixo Ox . Isso pode ser percebido nas equações da seguinte forma:

$$r(\theta) = 2a(1 + \cos \theta) = r(-\theta),$$

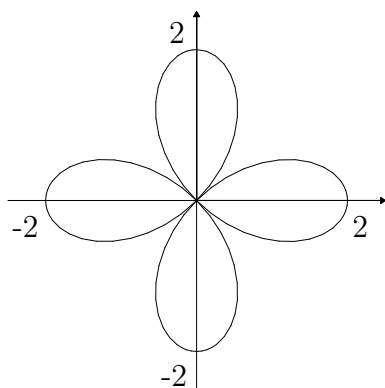
pois $\cos \theta = \cos(-\theta)$.

Exemplo 32.7

A equação

$$r = 2 \cos 2\theta, \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

determina uma curva chamada *rosácea de quatro folhas*. Veja que seu gráfico apresenta simetrias em relação aos dois eixos cartesianos.



Exemplo 32.8

As curvas correspondentes a equações da forma

$$r = a \pm b \cos \theta$$

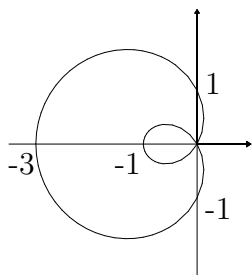
ou

$$r = a \pm b \operatorname{sen} \theta$$

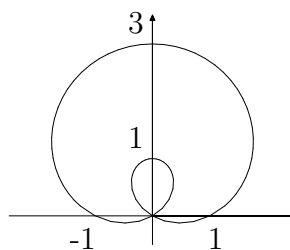
são conhecidas como *limaçons*. As cardióides, apresentadas no exemplo 32.5, são casos particulares de limaçons, quando $a = b$. Há dois tipos principais de curvas, dependendo de quem é maior, $|a|$ ou $|b|$.

A palavra *limaçon* quer dizer, em francês, caracol.

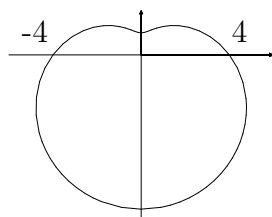
Aqui estão quatro exemplos, com suas respectivas equações.



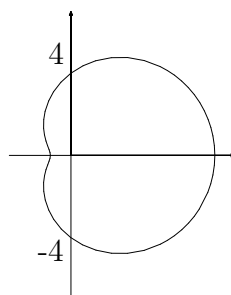
$$r = 1 - 2 \cos \theta$$



$$r = 1 + 2 \operatorname{sen} \theta$$



$$r = 4 - 3 \operatorname{sen} \theta$$



$$r = 4 + 3 \cos \theta$$

Chegamos ao fim da aula. E agora vamos aos exercícios, começando com os que foram propostos ao longo da aula.

Exercícios

Exercício 1

Encontre a equação polar da reta $y = -2$.

Solução:

Devemos usar a fórmula que relaciona y com as variáveis de coordenadas polares:

$$y = r \operatorname{sen} \theta.$$

Assim, obtemos:

$$r \operatorname{sen} \theta = -2$$

$$r = \frac{-2}{\operatorname{sen} \theta}$$

$$r = -2 \operatorname{csc} \theta.$$

Para terminar, devemos apresentar a variação de θ . Não queremos que $\operatorname{sen} \theta$ seja igual a zero. Para cobrirmos toda a reta $y = -2$, devemos fazer $\theta \in (-\pi, \pi)$.

Exercício 2

Determine a equação polar da circunferência determinada por

$$x^2 + (y + 2)^2 = 4.$$

Solução:

Vamos começar reescrevendo a equação dada de maneira diferente.

$$x^2 + (y + 2)^2 = 4$$

$$x^2 + y^2 + 4y + 4 = 4$$

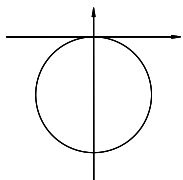
$$x^2 + y^2 = -4y.$$

Agora usamos as equações $x^2 + y^2 = r^2$ e $y = r \operatorname{sen} \theta$, para obter:

$$r^2 = -4r \operatorname{sen} \theta$$

$$r = -4 \operatorname{sen} \theta.$$

Agora que temos a equação, devemos apresentar o domínio de variação de θ .



$$x^2 + (y + 2)^2 = 4$$

$$r = -4 \operatorname{sen} \theta$$

A circunferência em questão tem centro no ponto $(0, -2)$ e raio 2. Ela, portanto, se encontra na região $y \leq 0$ do plano. Ou seja, abaixo do eixo Ox . A variação de θ será no intervalo $[0, \pi)$. Veja que $r(0) = 0$, representando a origem. Na medida em que θ varia de 0 até π , $\sin \theta$ varia de 0 até 1 e depois de volta até 0, sempre na região positiva. No entanto, a equação $r = -2 \sin \theta$ determina valores negativos para r . Isso está perfeito, pois esses pontos devem ser rebatidos para serem marcados, segundo nossa convenção, e, dessa forma, a circunferência obtida é, precisamente, a que corresponde à equação $x^2 + (y + 2)^2 = 4$.

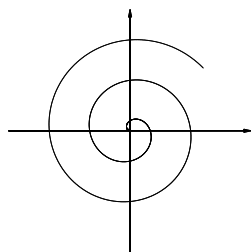
Exercício 3

Faça um esboço das seguintes curvas, dadas por equações escritas em termos de coordenadas polares:

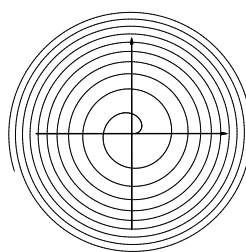
- (a) $\theta = \frac{\pi}{3}, \quad r \geq 0;$
 (b) $r = \frac{\theta}{\pi}, \quad \theta \leq 0;$
 (c) $r = 3 \csc \theta, \quad \pi/4 < \theta < 3\pi/4;$
 (d) $\begin{cases} r = \sqrt{t} \\ \theta = t. \end{cases}$

Solução:

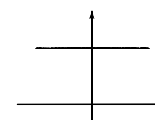
- (a) Aqui temos a afirmação que θ é uma constante e r assume valores positivos. Isso corresponde a um raio partindo da origem, que faz ângulo $\pi/3$ com o eixo Ox .
- (b) Essa equação corresponde a uma espiral.
- (c) A equação corresponde a uma reta paralela ao eixo Ox . Para fazer o esboço correto devemos estar atento à variação de θ . Aqui está: quando θ varia de $\pi/4$ até $3\pi/4$, percorremos o segmento de reta que liga os pontos $(3, 3)$ até o ponto $(-3, 3)$.
- (d) Esta equação paramétrica determina a equação polar $r = \sqrt{\theta}$, que também é uma espiral. Veja que temos de tomar $\theta \geq 0$.



$$r = \theta/\pi$$



$$r = \sqrt{\theta}$$



$$y = 3$$

$$r = 3 \csc \theta$$

Agora é com você!

Exercício 4

Encontre uma equação polar para as curvas dadas pelas seguintes equações cartesianas:

(a) $x^2 + y^2 = 2$; (b) $x^2 + (y - 4)^2 = 16$;

(c) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$; (d) $x = -3$;

(e) $x + y = 1$.

Exercício 5

Faça um esboço das curvas dadas pelas seguintes equações polares:

(a) $r = 2, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi$;

(b) $r = 3 \operatorname{sen} \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$;

(c) $r = \operatorname{sec} \theta, \quad \pi/3 \leq \theta \leq \pi/3$;

(d) $r = \frac{3}{\cos \theta + 2 \operatorname{sen} \theta}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2$;

(e) $r = 3 - 3 \operatorname{sen} \theta, \quad \theta \in [0, 2\pi]$ (cardióide);

(f) $r = 3 \operatorname{sen} 3\theta, \quad \theta \in [0, 2\pi]$ (rosácea de três pétalas);

(g) $r = 5 - 4 \operatorname{sen} \theta, \quad \theta \in [0, 2\pi]$ (limaçon);

(h) $r = 4 + 7 \cos \theta, \quad \theta \in [0, 2\pi]$ (limaçon).

Aula 33 – Limite e continuidade

Objetivo

- Aprender a definição de limite de uma função real, de uma variável real, na versão com *épsilon* e *delta*, e estendê-la para uma função vetorial de uma variável real.
- Conhecer a noção de continuidade de funções vetoriais.

Introdução

No curso de Cálculo I você aprendeu uma definição de limite de uma função real de uma variável real em termos de sequências de números. Agora você aprenderá uma outra definição desse conceito, que é equivalente à que você conhece, e que chamaremos de *definição com épsilon e delta*.

Essa definição evita a introdução da noção de sequência e, além do mais, ela será generalizada para o caso das funções vetoriais, objeto de nosso estudo atual, e das funções de várias variáveis, que passaremos a estudar em breve.

A definição de limite com épsilon e delta foi estabelecida por Karl Weierstrass e é uma pérola da Matemática.

Veja, o nosso objetivo é estabelecer, rigorosamente, o que queremos dizer quando escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

Você poderia responder: isso significa que, quando a variável x assume valores bem próximos de a , a variável dependente $y = f(x)$ assume valores bem próximos de L . Muito bem! É isso mesmo. A questão está no rigor. Ou seja, qual é o significado de ‘ x assume valores bem próximos de a ’? Essa frase tem valor pois nos ajuda a entender, a dar um sentido para a nossa fórmula. No entanto, do ponto de vista matemático, falta-lhe, exatamente, o rigor. E como você já sabe, o rigor é fundamental na Matemática. Para provar teoremas, chegar a conclusões definitivas, precisamos mais do que a frase oferece.

Vamos adotar um procedimento direto: primeiro apresentamos a definição e depois faremos uma discussão de seus termos, até aproximá-la da noção intuitiva de limite de você já tem.

Épsilon e delta são os nomes de duas letras gregas, ε e δ , respectivamente.

Veja a nota sobre Weierstrass na Aula 28.

Definição de limite

Vamos supor que $A \subset \mathbb{R}$ é uma união de intervalos quaisquer e que $a \in A$ ou a é um dos extremos de algum desses intervalos.

Por exemplo, $A = (-2, 0) \cup (0, 3)$ e $a = 0$; $A = (-1, 1)$ e $a = 1$; $A = (-1, 3]$ e $a = 2$.

Definição 33.1:

Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

se, e somente se, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $x \in A$ e $0 < |x - a| < \delta$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Usando a simbologia matemática, temos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$$

tal que

$$x \in A \text{ e } 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Essa é, provavelmente, a definição mais difícil de apresentar aos alunos dos cursos de Cálculo. Repare bem: quando escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} = 3,$$

na verdade, estamos dizendo

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } 0 < |x + 1| < \delta \implies \left| \frac{x^3 + 1}{x + 1} - 3 \right| < \varepsilon.$$

Vamos agora mostrar que essa simbologia toda nos diz que, para valores de x próximos de -1 , os valores $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x + 1}$ estão próximos de 3 .

Para desvendarmos esse segredo devemos avançar passo a passo. O primeiro deles consiste em entender como a noção ‘próximo de’, ‘tende a’ está estabelecida na definição. A chave para isso é a noção de distância, dada pela função módulo ou valor absoluto.

A distância entre x e a é igual a $|x - a|$. Assim, quando dizemos $|x - a| < \delta$, queremos dizer que a distância entre x e a é menor do que δ , um certo valor positivo.

Por exemplo, a inequação

$$|x - 3| < 2$$

determina os pontos da reta que estão a uma distância menor do que duas unidades do ponto 3 . Esses pontos formam o intervalo aberto $(1, 5)$.

Em geral, a inequação $|x - a| < \delta$ caracteriza o intervalo aberto

$$(a - \delta, a + \delta).$$

Usaremos a expressão x está δ -próximo de a para dizer que x pertence a esse intervalo.

Analogamente, $|f(x) - L| < \varepsilon$ significa que $f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ e diremos que $f(x)$ está ε -próximo de L .

Note que na definição usamos a frase

$$0 < |x - a| < \delta.$$

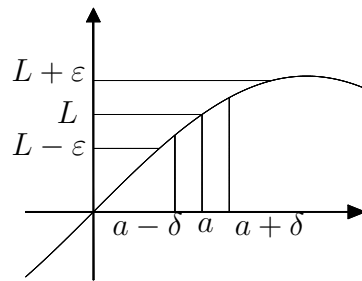
A condição $0 < |x - a|$ nos garante que $x \neq a$ pois, $x = a$ se, e somente se, $|x - a| = 0$. Isso é muito conveniente, uma vez que assim excluimos o ponto a da análise. Logo, a pode pertencer ou não ao domínio A da função.

Portanto, a frase

$$0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$

pode ser lida da seguinte maneira: se x está δ -próximo de a e é diferente de a , então $f(x)$ está ε -próximo de L .

Veja como isso fica numa figura:



Agora você deve ter notado como a definição tem o sentido que esperamos. Ela trata de distâncias. Mas ainda falta, algo muito importante. A frase completa começa com ‘ $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que ...’ Isto é, ‘para cada $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ (que depende de ε) tal que ...’

Aqui usamos dois quantificadores: o quantificador universal, usado no épsilon e o quantificador existencial, usado nos delta. Esses quantificadores animam a definição. Isto é, para cada $\varepsilon > 0$ devemos arranjar um $\delta > 0$ tal que, para todos os valores de x que estão δ -próximos de a , porém diferentes de a , os valores correspondentes $f(x)$ estão ε -próximos de L .

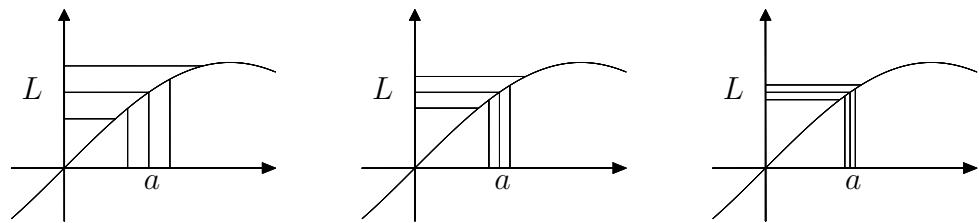
Veja, não é suficiente arranjar um valor para δ , digamos $\delta = 0,0001$, que torne a frase ' $0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$ ' verdadeira para um certo valor de ε , digamos $\varepsilon = 0,0003$. Precisamos seguir determinando valores de δ correspondentes a valores de ε ainda menores. Pelo menos aqui temos uma boa notícia. Apesar do quantificador universal que usamos com ε , na verdade, basta que nos preocupemos com os valores pequenos de ε . Isso por que, se encontramos um valor de δ que funcione para um certo valor de ε , digamos $\varepsilon = 1$, esse mesmo valor de δ também serve para todos os valores de ε maiores do que 1.

Em termos mais simples, para que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ seja L , não basta que a frase

$$0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$

seja verdadeira para alguns valores de ε . Ela deve ser verdadeira para *todos* os valores de ε , especialmente os bem pequenos.

Em termos gráficos, o desenho apresentado na figura anterior deve ser como um quadro de uma animação. Essa animação deveria prosseguir com o mesmo aspecto se a faixa $L - \varepsilon < y < L + \varepsilon$ se tornasse tão estreita quanto quisermos.



Veja como isso funciona num exemplo.

Exemplo 33.1

Vamos usar a definição de limites que acabamos de apresentar para mostrar que a afirmação

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} = 4$$

é verdadeira.

A grande dificuldade que, geralmente, os alunos têm ao lidar inicialmente com a definição que apresentamos é a seguinte: como descobrir os valores de δ , em função dos valores de ε que tornem a frase verdadeira? Bem, o segredo é o seguinte: em geral, fazemos certas contas de antemão, num rascunho, para depois apresentar o resultado, que então surge como

que tirado de uma cartola. Mas hoje é o seu dia de sorte! Você não precisará preocupar-se com esse tipo de coisa, ainda. Isso é assunto do curso de Análise. Tudo a seu tempo.

Vamos começar com o nosso exemplo observando que o domínio da função $f(x) = \frac{2x^2-2}{x-1}$ é o conjunto $A = \mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

Vamos lá! Lembre-se: para cada $\varepsilon > 0$ devemos arranjar um δ tal que

$$0 < |x - 1| < \delta \implies |f(x) - 4| < \varepsilon$$

Surpresa! Para cada $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

Veja, se $x \neq 1$, então

$$\begin{aligned} |f(x) - 4| &= \left| \frac{2x^2 - 2}{x - 1} - 4 \right| = \left| \frac{2(x - 1)(x + 1)}{x - 1} - 4 \right| = \\ &= |2x + 2 - 4| = |2x - 2| = 2|x - 1|. \end{aligned}$$

Isto é, se $0 < |x - 1|$, então $|f(x) - 4| = 2|x - 1|$.

Portanto, se $0 < |x - 1| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$, então

$$|f(x) - 4| = 2|x - 1| < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Logo, para cada $\varepsilon > 0$, se $0 < |x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$ então $|f(x) - 4| < \varepsilon$. Isso é, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4$.

Exemplo 33.2

Vamos usar ε e δ para mostrar que $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$.

Queremos mostrar que se x toma valores próximos de 2 então x^2 toma valores próximos de 4. Isso é claro, do ponto de vista do senso comum mas, em Matemática, precisamos de provas. Muito bem, queremos mostrar que se $0 < |x - 2|$ é um valor próximo de zero, então $|x^2 - 4|$ também está próximo de zero. Observe que

$$|x^2 - 4| = |x - 2||x + 2|.$$

Nosso problema está em ‘controlar’ o fator $|x + 2|$.

Observe: se os valores que escolhermos para δ não forem maiores do que 1, teremos a garantia que $0 < |x - 2| < 1$. Isto é, $x \neq 2$ e $-1 < x - 2 < 1$. Essa desigualdade é equivalente a $1 < x < 3$, que por sua vez é equivalente a

$$3 < x + 2 < 5.$$

Resumindo, se escolhermos valores para δ menores ou iguais a 1, teremos $|x + 2| < 5$.

Ótimo!

Estamos prontos para mostrar, com epsilon e delta, que $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$.

Para cada $\varepsilon > 0$ tome $\delta = \min\{1, \varepsilon/5\}$. Isto é, δ é o menor entre os números 1 e $\varepsilon/5$. Dessa forma garantimos que δ é menor ou igual a 1 e, com isso, garantimos que $|x + 2| \leq 5$.

Então, se $0 < |x - 2| < \delta$, temos

$$|f(x) - 4| = |x^2 - 4| = |x - 2| |x + 2| < \delta \cdot 5 \leq \frac{\varepsilon}{5} \cdot 5 = \varepsilon.$$

Vamos agora analisar um exemplo onde não há limite. Na verdade, usaremos a definição para constatar que um ‘bom candidato a limite’ não satisfaz a definição.

Exemplo 33.3

Vamos mostrar que se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é a função dada por

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \geq 1, \\ x & \text{se } x < 1, \end{cases}$$

então, apesar de $f(1) = 2$, o limite de $f(x)$ quando x tende a 1 não é 2.

Antes de mais nada, veja o que devemos fazer. Para provar que o limite de $f(x)$ quando x tende a 1 não é 2, devemos *negar* a definição de limite:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, tal que

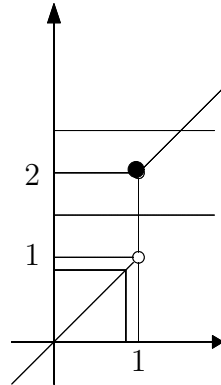
$$0 < |x - 1| < \delta \implies |f(x) - 2| < \varepsilon.$$

Lembre-se das aulas de lógica: a negação inverte os quantificadores. Portanto, devemos mostrar que

$\exists \varepsilon > 0$, tal que $\forall \delta > 0$ existe algum valor de x com

$$0 < |x - 1| < \delta \text{ e } |f(x) - 2| \geq \varepsilon.$$

O gráfico de f numa vizinhança de 1 nos ajudará nessa tarefa. Aqui está:



Veja que podemos tomar valores para x tão próximos de 1 o quanto quisermos, mas cujas imagens estarão a uma distância maior do que 1 do candidato a limite 2. Para isso basta tomar valores de x à esquerda de 1.

Logo, o nosso candidato ao valor de ε que não satisfará a definição é 1.

Realmente, para $\varepsilon = \frac{1}{2}$ e um $\delta > 0$ qualquer, escolha um x_0 tal que $1 - \delta < x_0 < 1$ e $1/2 < x_0 < 1$.

A primeira condição garante que

$$0 < |x_0 - 1| < \delta$$

e, como $x_0 \in (1/2, 1)$, $f(x_0) = x_0$.

Ora, se x_0 se encontra à esquerda de 1, sua distância até 2 é maior do que 1:

$$|f(x_0) - 2| = |x_0 - 2| \geq \frac{1}{2}.$$

Realmente, provar que um certo limite é um dado número ou que um certo valor não é o limite, usando diretamente a definição é trabalhoso. Na verdade, nós só fazemos isso em ocasiões especiais. A prática é a seguinte: usamos a definição para provar as muitas propriedades dos limites e usamos as propriedades de limites para calculá-los.

Para dar uma idéia de como a definição funciona na prova das propriedades de limites, vamos provar o seguinte teorema.

Teorema 33.1:

Sejam f e g funções definidas numa vizinhança V de a , mas não necessariamente em a , tais que

(a) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$

(b) $\exists M > 0$ tal que $|g(x)| < M$, para todo $x \in V$, $x \neq a$.

Você pode considerar V como um intervalo aberto (x_0, x_1) contendo a .

Então,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = 0.$$

Isto é, se o limite da função f é zero e a função g é limitada, o limite do produto das duas funções também é zero.

Prova:

Como $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, sabemos que para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $x \in V$ e

$$0 < |x - a| < \delta, \text{ então } |f(x)| < \varepsilon. \quad (\text{I})$$

Queremos mostrar que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = 0$. Isto é, para cada $\varepsilon' > 0$, existe $\delta' > 0$ tal que, se $x \in V$ e

$$0 < |x - a| < \delta', \text{ então } |f(x) \cdot g(x)| < \varepsilon'.$$

Muito bem, dado $\varepsilon' > 0$, fazemos $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{M}$ e escolhemos para δ' o mesmo δ que corresponde ao ε e torna a afirmação (I) verdadeira: $\delta' = \delta$. Assim, se $x \in V$ e $0 < |x - a| < \delta' = \delta$, então

$$|f(x) \cdot g(x)| \leq |f(x) \cdot M| < \varepsilon M = \frac{\varepsilon'}{M} \cdot M = \varepsilon'.$$

Ou seja, para cada ε' arranjamos um δ' tal que

$$0 < |x - a| < \delta' \implies |f(x) \cdot g(x)| < \varepsilon'.$$

Portanto, provamos que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = 0$.

□

Esse teorema é uma poderosa ferramenta de cálculo de limites. Veja, no próximo exemplo, como ela funciona.

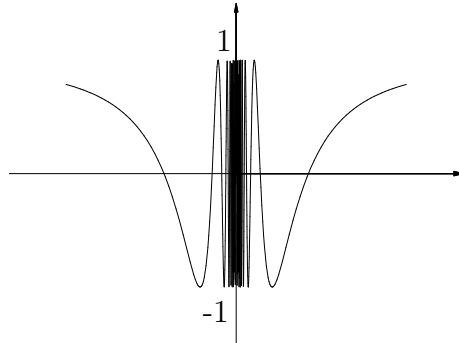
Veja, estamos usando ε' e δ' para enfatizar que esses valores dizem respeito à função $f(x)g(x)$, enquanto que ε e δ dizem respeito à função $f(x)$. Isso é um detalhe importante.

Exemplo 33.4

Vamos calcular o

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{x}.$$

Note que a função $f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$ não está definida no ponto $x = 0$. Além disso, o limite de $h(x) = \cos \frac{1}{x}$, quando x tende a zero, não está definido. Veja o seu gráfico na figura a seguir.

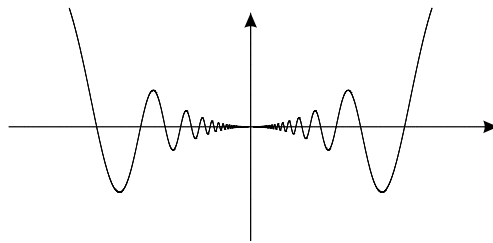


Este limite não existe pois a função se ‘acumula’ em todo o intervalo $[-1, 1]$ do eixo Oy .

No entanto, $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$, e portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{x} = 0.$$

Veja o gráfico da função $f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$, numa pequena vizinhança da origem:



Continuidade

O conceito mais diretamente ligado ao limite é a continuidade. Veja como a definição de limites que acabamos de apresentar se reflete na definição de continuidade.

Seja $A \subset \mathbb{R}$ uma união de intervalos e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Você aprendeu, no curso de Cálculo I, que a função f é contínua em $a \in A$ se, e somente se,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Muito bem, com a definição de limites que você acabou de ver, isso significa o seguinte.

A função f é contínua em $a \in A$ se, e somente se, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $x \in A$ e

$$0 < |x - a| < \delta \text{ então } |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Isto é, f é contínua em $x = a$ se para valores de x próximos de a , os valores correspondentes $f(x)$ estão próximos de $f(a)$. Essa é a nossa noção geral de continuidade: pequenos acréscimos na variável independente correspondem a pequenos acréscimos na variável dependente. A definição com épsilon e delta dá rigor a essa idéia geral.

Agora estamos prontos para enunciar os correspondentes conceitos de limite e continuidade de funções vetoriais de uma variável real.

Limites de funções vetoriais de uma variável real

A diferença entre uma função vetorial e uma função real está no contradomínio. Em vez de números obtemos vetores, elementos de \mathbb{R}^n .

Para estabelecermos a definição de limites no caso dessas funções, basta que tenhamos uma noção de distância em \mathbb{R}^n . Ou seja, precisamos dizer qual é a distância entre dois vetores, digamos v_1 e v_2 .

Essa noção é dada pela norma da diferença, denotada por $\|v_2 - v_1\|$.

Se $v \in \mathbb{R}^n$ é dado por $v = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, então

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

A norma faz em \mathbb{R}^n o papel que o valor absoluto faz em \mathbb{R} , para estabelecer a distância. Veja, se $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$, em \mathbb{R}^2 , por exemplo, a distância entre v_1 e v_2 é dada por

$$\|v_1 - v_2\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Isto é, a distância em \mathbb{R}^n , estabelecida pela norma, corresponde à nossa tradicional noção de distância.

Estamos prontos, finalmente, para enunciar a definição de limites de funções vetoriais.

O símbolo \langle, \rangle representa o *produto interno* ou *produto escalar*. Por exemplo, se $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$, o produto interno de v_1 por v_2 é denotado por $\langle v_1, v_2 \rangle \in \mathbb{R}$ e definido por

$$\langle v_1, v_2 \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

Produtos internos são estudados em Álgebra Linear e são muito usados na Matemática. Nós voltaremos a falar neles nesse curso.

Vamos supor que $A \subset \mathbb{R}$ é uma união de intervalos quaisquer e que $a \in A$ ou a é um dos extremos de algum desses intervalos.

Definição 33.2:

Seja $\alpha : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função vetorial e $L \in \mathbb{R}^n$ um vetor. Dizemos que

$$\lim_{t \rightarrow a} \alpha(t) = L$$

se, e somente se, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $t \in A$ e $0 < |t - a| < \delta$, então $\|\alpha(t) - L\| < \varepsilon$.

Se você comparar esta definição com a definição de limites, com ε e δ das funções reais, verá que as diferenças são muito pequenas. O termo $|f(x) - L| < \varepsilon$ foi substituído por $\|\alpha(t) - L\| < \varepsilon$ e, enquanto o primeiro L é um número, o segundo é um vetor.

Do ponto de vista prático, o limite de funções vetoriais é simples. Veja o próximo teorema.

Teorema 33.2:

Seja $\alpha : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função vetorial, onde A é uma união de intervalos. Seja $a \in A$ ou a é um dos extremos dos intervalos que formam A . Então

$$\lim_{t \rightarrow a} \alpha(t) = L \iff \lim_{t \rightarrow a} \alpha_i(t) = L_i$$

para cada uma das funções coordenadas α_i , onde L_i é a i -ésima coordenada do vetor $L = (L_1, L_2, \dots, L_n)$.

Este teorema nos diz que, para estudar o limite das funções vetoriais, basta estudar, uma a uma, os limites das funções coordenadas.

Exemplo 33.5

Vamos calcular $\lim_{t \rightarrow 1} \alpha(t)$, onde

$$\alpha(t) = \left(\frac{t^3 - 1}{t^2 - 1}, \frac{\text{sen}(t - 1)}{t - 1}, \ln t \right).$$

Note que o domínio de α é a interseção dos domínios das funções coordenadas:

$$\begin{aligned} A &= ((-\infty, 1) \cup (1, \infty)) \cap (0, \infty) = \\ &= (0, 1) \cup (1, \infty). \end{aligned}$$

Neste exemplo, A é uma união de dois intervalos e $a = 1 \notin A$ é extremo de ambos.

Basta calcularmos os limites das funções coordenadas:

$$(a) \quad \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^3 - 1}{t^2 - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{3t^2}{2t} = \frac{3}{2};$$

$$(b) \quad \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\text{sen}(t - 1)}{t - 1} = 1;$$

$$(c) \quad \lim_{t \rightarrow 1} \ln t = 0.$$

Assim,

$$\lim_{t \rightarrow 1} \alpha(t) = (3/2, 1, 0).$$

Esse teorema também nos garante que, a função $\alpha : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua em $a \in A$ se, e somente se, cada função coordenada $\alpha_i : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ for contínua em a .

Apresentamos aqui a prova do teorema 2, por razões de completicidade. No entanto, você já experienciou uma boa dose de ε e δ e é recomendável que você a estude agora apenas no caso de ter uma boa folga na sua agenda. Caso contrário, você pode usar o teorema para resolver os problemas e poderá retomar a demonstração no devido tempo. No entanto, não deixe de estudá-la, pelo menos em algum momento.

Prova do Teorema 33.2:

Por simplicidade, vamos demonstrar o teorema para o caso $n = 2$. Isto é, vamos supor que a função α tenha apenas duas funções coordenadas (α_1, α_2) . Então, $L = (L_1, L_2)$.

Queremos mostrar que

$$\lim_{t \rightarrow a} \alpha(t) \iff \begin{cases} \lim_{t \rightarrow a} \alpha_1(t) = L_1 \\ e \\ \lim_{t \rightarrow a} \alpha_2(t) = L_2 \end{cases}$$

Primeiro, vamos mostrar que se a função vetorial tem limite L , então cada uma das funções coordenadas tem limite L_i , a correspondente coordenada do vetor limite L .

Sabemos que, para cada $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que, se $t \in A$ e

$$0 < |t - a| < \delta \implies \|\alpha(t) - L\| < \varepsilon. \quad (I)$$

Como $|\alpha_1(t) - L_1| \leq \sqrt{(\alpha_1(t) - L_1)^2 + (\alpha_2(t) - L_2)^2} = \|\alpha(t) - L\|$, podemos usar o mesmo δ para ambas funções coordenadas. Ou seja, dado $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta > 0$ tal que (I) seja verdadeiro e, portanto, se $0 < |t - a| < \delta$ e $t \in A$, então

$$|\alpha_i(t) - L_i| \leq \|\alpha(t) - L\| < \varepsilon,$$

para ambos $i = 1$ e $i = 2$.

Agora devemos mostrar que, se cada uma das funções coordenadas tem limite, então a função vetorial também tem limite.

Ou seja, sabemos que, se t é um valor próximo de a , cada uma das coordenadas $\alpha_i(t)$ estará ε -próximo de L_i . Isto é, temos controle sobre os catetos e queremos controlar a hipotenusa. Muito bem, aqui está o que está faltando. Seja M a maior entre as distâncias $|\alpha_1(t) - L_1|$ ou $|\alpha_2(t) - L_2|$. Então,

$$\|\alpha(t) - L\| = \sqrt{(\alpha_1(t) - L_1)^2 + (\alpha_2(t) - L_2)^2} \leq \sqrt{2M^2} = \sqrt{2}M.$$

Sabemos então que, dado $\varepsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que, se $0 < |t - a| < \delta_i$ e $t \in A$, então $|\alpha_i(t) - L_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$, para $i = 1$ e $i = 2$. Muito bem, agora estamos prontos para terminar a demonstração:

Dado $\varepsilon > 0$, escolha δ como o menor entre δ_1 e $\delta_2 > 0$. Então, se $0 < |t - a| < \delta$ e $t \in A$, então $|\alpha_i(t) - L_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$, $i = 1$ ou $i = 2$. Assim, $M < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$. Portanto, $\|\alpha(t) - L\| \leq \sqrt{2}M < \sqrt{2} \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} = \varepsilon$.

Comentário finais

Essa foi uma aula bastante atípica. Você foi apresentado a um conteúdo de Cálculo I e a quantidade de informação teórica é muito grande. No entanto, este conteúdo é muito importante para os matemáticos e essa não deverá ser a única oportunidade em que você lidará com essas idéias. Portanto, você não deve esperar um completo domínio do conteúdo numa primeira leitura. A apresentação buscou ser a mais amigável possível, sem deixar de encarar as dificuldades. Não se espera que você seja capaz de desenvolver argumentos como os que foram apresentados nos exemplos 33.1, 33.2 e 33.3. Nem por isso deixe de lê-los atentamente. Eles o ajudarão a entender as idéias expostas anteriormente.

Do ponto de vista prático, você relembrou o teorema 1, que é uma boa ferramenta de cálculo de limites, como você pode ver no exemplo 33.4, e aprendeu a lidar com os limites e a continuidade de funções vetoriais de uma variável real. Basta considerar a situação coordenada a coordenada, segundo o enunciado do teorema 33.2 e exemplificado em 33.5.

Aqui estão alguns exemplos para você experimentar os seus progressos:

Exercícios

Exercício 1

Use a noção de distância para resolver as seguintes equações e inequações.

- (a) $|x - 3| = 5$; (b) $|x - 1| \leq 1/2$;
 (c) $0 < |x - 2| < 4$; (d) $|x + 3| > 2$;
 (e) $1 < |x + 1| < 2$; (f) $\|(x, y)\| = \sqrt{2}$;
 (g) $0 < \|(x, y) - (1, 0)\| \leq 2$; (h) $\|(x, y) - (2, 2)\| > 4$;
 (i) $1 < \|(x, y) - (2, 0)\| < 2$; (k) $\|(x, y, z) - (1, 0, 0)\| < 1$.

Exercício 2

Calcule os seguintes limites.

- (a) $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{t^2 - 2}{t + 1}, \frac{\sin t}{t} \right)$; (b) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t}{t^2 + 1}, \frac{2t - 3}{\sqrt{t^2 + 4}} \right)$;
 (c) $\lim_{t \rightarrow \sqrt{2}} \left(\frac{t^2 - 2}{t - \sqrt{2}}, \frac{e^{\sqrt{2}} - e^t}{t^3 - 2\sqrt{2}} \right)$; (d) $\lim_{t \rightarrow 1} \left(\frac{t^3 - 1}{t^2 - 1}, \frac{t - 1}{\sqrt[3]{t} - 1}, \frac{\operatorname{tg} \pi(t - 1)}{t - 1} \right)$.

Exercício 3

Calcule os valores de a e b tais que a função

$$\alpha(t) = \begin{cases} (at + b, 4t - 3), & \text{se } t \geq 1 \\ (2t + 3, 2at^2 - b), & \text{se } t < 1 \end{cases}$$

seja contínua.

Exercício 4

Sejam $I, J \subset \mathbb{R}$ dois intervalos, $f : I \rightarrow J$ uma função contínua em $a \in I$, com $f(a) = b \in J$. Seja $\alpha : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma função vetorial contínua em $b \in J$. Mostre que a função vetorial $\alpha \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é contínua em $a \in I$.

Note que $\alpha \circ f(t) = (\alpha_1 \circ f(t), \alpha_2 \circ f(t), \alpha_3 \circ f(t))$.

Aula 34 – Derivadas de funções vetoriais

Objetivo

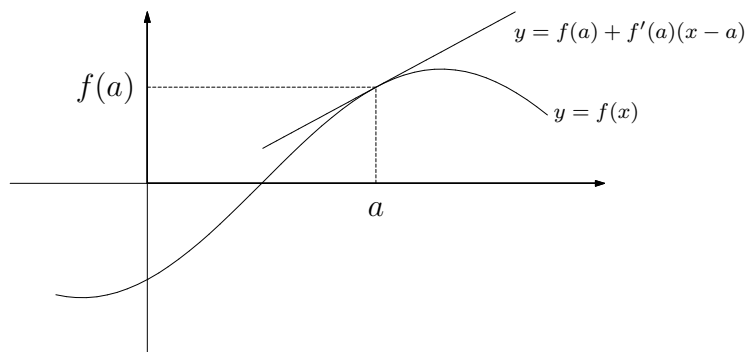
- Aprender o conceito de derivada de uma função vetorial, de uma variável real, assim como a sua interpretação geométrica.

Introdução

A derivada de uma função $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, em um ponto $x = a \in I$ é o limite do quociente de Newton

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

e a sua interpretação geométrica é a seguinte: o número $f'(a)$ é a inclinação, o coeficiente angular, da reta tangente ao gráfico de f , no ponto $(a, f(a))$.



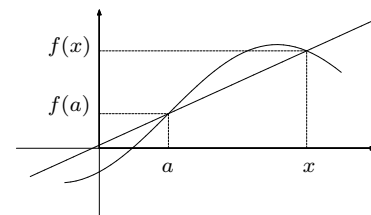
Em particular, se a função $s = s(t)$ descreve a posição de uma partícula em movimento sobre uma trajetória retilínea, a derivada de s em t_0 ,

$$s'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0},$$

é o limite, quando t tende a t_0 , das velocidades médias

$$v_m = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

Portanto, podemos dizer que $s'(t_0)$ é a velocidade da partícula no preciso instante t_0 . Essa é, basicamente, a interpretação da derivada como uma taxa de variação. Muito bem, queremos agora estender este conceito para as funções vetoriais, de uma variável real.



O termo $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ é conhecido como o quociente de Newton. Ele está definido sempre que $x \neq a$ e é a inclinação da reta determinada pelos pontos $(a, f(a))$ e $(x, f(x))$. Esta reta é 'secante' ao gráfico de f .

Derivada

Seja $A \subset \mathbb{R}$ uma união de intervalos abertos, $\alpha : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, uma função vetorial, e seja $a \in A$.

Definição 34.1:

Dizemos que α tem derivada em $t = a$ se o limite

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{\alpha(t) - \alpha(a)}{t - a}$$

existe. Neste caso, ele será denotado por $\alpha'(a) \in \mathbb{R}^n$.

Lembre-se de que o limite anterior é um limite vetorial. Na verdade, ele poderia ser escrito na forma

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{1}{t - a} (\alpha(t) - \alpha(a))$$

pois, o termo $t - a$ é um número e $\alpha(t) - \alpha(a)$ é um vetor.

A notação

$$\frac{d\alpha}{dt}(a) = \lim_{t \rightarrow a} \frac{\alpha(t) - \alpha(a)}{t - a}$$

também é usada.

Se α tem derivada em $t = a$, dizemos que α é *diferenciável* em a . Se α tem derivada em todos os pontos de seu domínio, dizemos que α é diferenciável em A ou, simplesmente, que α é diferenciável.

Quando isso ocorre, podemos definir $\alpha' : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ a *função derivada de α* .

Em termos práticos, é muito fácil calcular a derivada dessas funções. Veja por que:

Teorema 34.1:

Seja $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$ uma função vetorial definida em $A \subset \mathbb{R}$. A função α é diferenciável em $a \in A$ se, e somente se, cada uma de suas funções coordenadas $\alpha_i(t)$ for diferenciável em $t = a$. Além disso,

$$\alpha'(t) = (\alpha'_1(t), \alpha'_2(t), \dots, \alpha'_n(t)).$$

Prova do Teorema: A prova desse teorema é quase imediata, se lembrarmos do teorema que descreve o limite das funções vetoriais, apresentado na aula anterior.

Realmente, a prova para $n = 2$ é a seguinte:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow a} \frac{\alpha(t) - \alpha(a)}{t - a} &= \lim_{t \rightarrow a} \left(\frac{\alpha_1(t) - \alpha_1(a)}{t - a}, \frac{\alpha_2(t) - \alpha_2(a)}{t - a} \right) = \\ &= \left(\lim_{t \rightarrow a} \frac{\alpha_1(t) - \alpha_1(a)}{t - a}, \lim_{t \rightarrow a} \frac{\alpha_2(t) - \alpha_2(a)}{t - a} \right). \end{aligned}$$

Resumindo, derivamos coordenada a coordenada.

Exemplo 34.1

Vamos calcular a função derivada e a derivada em $t = 1$ da função

$$\alpha(t) = (\cos 2\pi t, e^{2t}, t^2 + 2t - 1).$$

Primeiro, calculamos a função derivada, usando as regras de derivação aprendidas no Cálculo I.

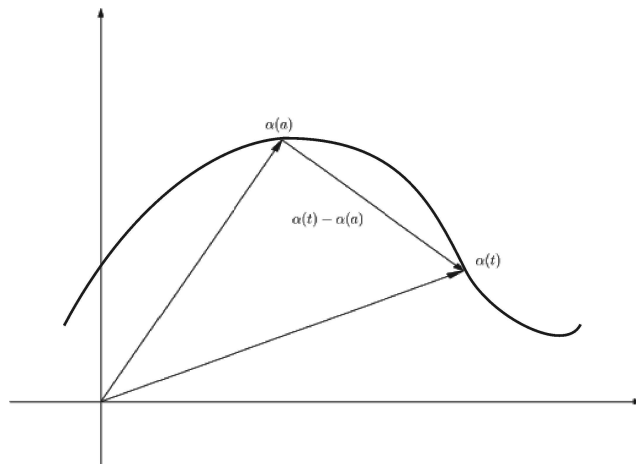
$$\alpha'(t) = (-2\pi \operatorname{sen} 2\pi t, 2e^{2t}, 2t + 2).$$

Agora, usando a função derivada, calculamos a derivada em $t = 1$:

$$\alpha'(1) = (0, 2e^2, 4).$$

Interpretação geométrica

Lembre-se que associamos a cada curva $\alpha(t)$, o seu traço, contido em \mathbb{R}^n . Muito bem, o vetor $\frac{\alpha(t) - \alpha(a)}{t - a} = \frac{1}{t - a} (\alpha(t) - \alpha(a))$, é um múltiplo de $(\alpha(t) - \alpha(a))$. Portanto, eles são paralelos. Veja a figura a seguir.

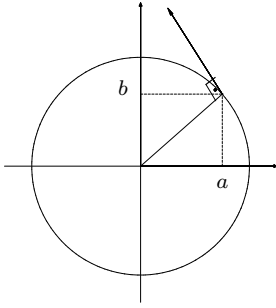


CÁLCULO II

Quando a função α é diferenciável em $t = a$,

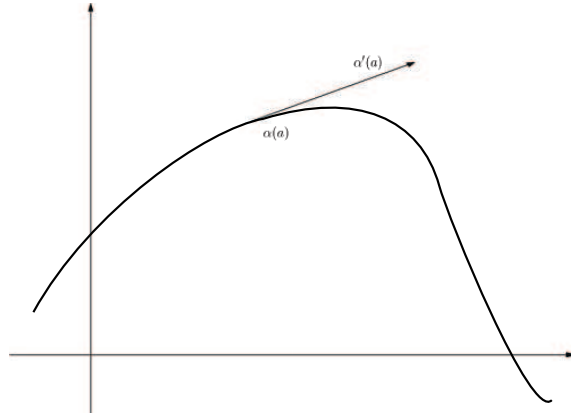
$$\alpha'(a) = \lim_{t \rightarrow a} \frac{\alpha(t) - \alpha(a)}{t - a}$$

pode ser interpretado como o um vetor tangente ao traço de α no ponto $\alpha(a)$.



Do ponto de vista da Álgebra Linear, isto é fácil de ver pois, os vetores (a, b) e $(-b, a)$ são ortogonais. Isso pois, o produto interno deles é nulo:

$$\begin{aligned} \langle (a, b), (-b, a) \rangle &= \\ &= -ab + ba = 0. \end{aligned}$$



Exemplo 34.2

Vamos mostrar que o vetor $(-b, a)$ é tangente à circunferência do círculo de raio 1, centrado na origem, no ponto P , de coordenadas (a, b) .

Seja $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$ uma parametrização da circunferência do tal círculo e seja t_0 um número tal que $\alpha(t_0) = (a, b)$.

Isto é, t_0 é tal que

$$\begin{cases} a = \cos t_0 \\ b = \sin t_0. \end{cases}$$

Mas então, $\alpha'(t) = (\sin t, \cos t)$ e $\alpha'(t_0) = (\sin t_0, \cos t_0) = (-b, a)$, que é tangente a curva.

Exemplo 34.3

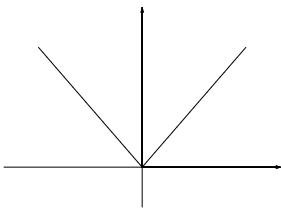
Mesmo quando a função α é diferenciável, o seu traço pode apresentar ‘quinas’ ou ‘dobras’. Isso parece estranho, se levarmos em conta nossa experiência com gráficos de funções reais, de uma variável real, estudadas no Cálculo I.

Vamos analisar o exemplo da cúspide

$$\alpha(t) = (t^3, t^2),$$

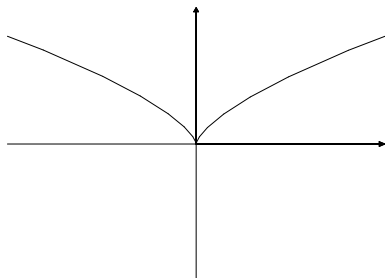
que é diferenciável em toda a reta real \mathbb{R} e cuja derivada é

$$\alpha'(t) = (3t^2, 2t).$$



Lembre-se: se o gráfico de uma função apresenta tal característica, ela não será diferenciável. A função $f(x) = |x|$ é um exemplo. Ela é contínua mas não é diferenciável em $x = 0$.

Veja a figura de seu traço.



Apesar de estranho, não há nada errado aqui. Devemos lembrar de que a figura é o traço de uma curva e não é o seu gráfico. Portanto, traços de curvas diferenciáveis podem apresentar, eventualmente, dobras ou quinas.

Esta na hora da famosa pergunta: o que ocorre com a interpretação geométrica da derivada num caso como esse?

Lembre-se do que dissemos anteriormente: a derivada $\alpha'(t_0)$ é o vetor tangente ao traço da curva no ponto $\alpha(t_0)$. Como podemos achar um vetor tangente à curva $\alpha(t) = (t^3, t^2)$, no ponto $(0, 0)$? Isso é possível se o vetor for o vetor nulo. E isso realmente ocorre: como $\alpha'(t) = (3t^2, 2t)$, $\alpha'(0) = (0, 0)$.

Note que,

$$\alpha'(t) = (0, 0) \iff \begin{cases} 3t^2 = 0 \\ 2t = 0 \end{cases} \iff t = 0.$$

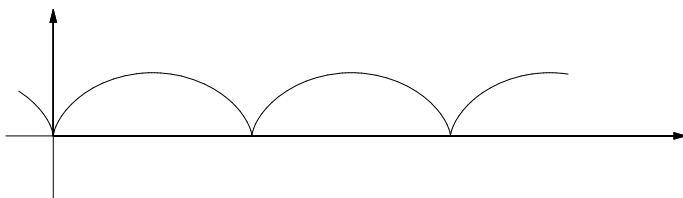
Ou seja, $(0, 0)$ é o único ponto do traço no qual o vetor ‘tangente’ é o vetor nulo.

Vamos estudar mais um exemplo onde esse fenômeno ocorre.

Exemplo 34.4

Seja $\alpha(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ uma cicloide.

Aqui está o traço dessa cicloide.



Vamos descobrir em quais pontos da curva ela toca o eixo Ox . Isto é, vamos calcular os valores de t para os quais $\alpha'(t) = \vec{0}$.

Cicloide é uma curva descrita por um ponto na circunferência de um círculo que gira sobre uma reta. Você deve ter estudado este tipo de curva, em detalhes, no curso de Geometria Analítica. Estas curvas foram estudadas por, entre outros, Galileu Galilei, que teve sua atenção despertada para elas quando viu passar uma carruagem com um lenço amarrado em uma de suas rodas.

CÁLCULO II

Primeiro, o cálculo da função derivada:

$$\alpha'(t) = (1 - \cos t, \operatorname{sen} t).$$

Para que $\alpha'(t)$ seja igual ao vetor nulo, as funções coordenadas de $\alpha'(t)$ devem ser, simultaneamente, iguais a zero. Isso nos dá um sistema de equações:

$$\begin{cases} 1 - \cos t = 0 \\ \operatorname{sen} t = 0. \end{cases}$$

Este sistema não é difícil de ser resolvido pois $\cos t = 1$ e $\operatorname{sen} t = 0$ se, e somente se, t é um múltiplo de 2π .

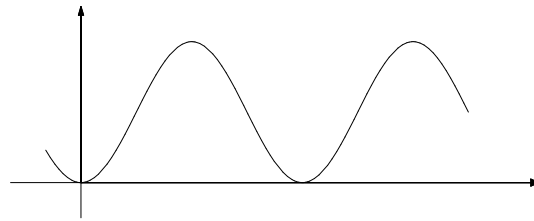
Isto é, $\alpha'(t) = \vec{0}$ se, e somente se, $t = 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$.

Assim, os pontos $\alpha(2k\pi) = (2k\pi, 0)$ são aqueles onde a derivada é igual ao vetor nulo. Estes são os pontos onde o traço da função toca o eixo Ox , de maneira análoga à cúspide, quando esta toca o eixo Ox , a origem.

Vamos agora, considerar a função

$$f(t) = \|\alpha'(t)\|^2 = 2 - 2 \cos t.$$

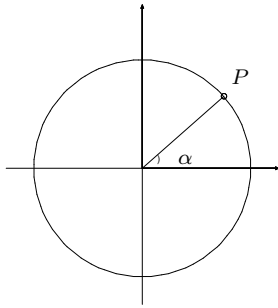
Veja o gráfico de f , uma função de período 2π :



Essa função assume seu valor mínimo 0 nos pontos onde $t = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, que são, exatamente, os pontos onde a derivada de α é o vetor nulo.

Em contrapartida, f assume o seu valor máximo 4 nos pontos onde $t = (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}$, os múltiplos ímpares de π .

Estes pontos são aqueles onde a derivada $\alpha'(t)$ atinge seu comprimento máximo. Se considerarmos que α esteja descrevendo o movimento de uma partícula, percorrendo a curva, tendo a sua posição determinada por $\alpha(t)$, no instante t , a derivada $\alpha'(t)$ é a velocidade (vetorial) dessa partícula, nesse mesmo instante. Nossos cálculos indicam que nos instante $t = 2k\pi$ a partícula teria velocidade nula. Essa seria a única forma da partícula passar, diferencialmente, por cada uma dessas dobras. Isso é, fazendo nesses pontos uma completa parada. Além disso, nos instantes $t = (2k + 1)\pi$, essa velocidade assume o seu comprimento máximo. Esses pontos ocorrem no ponto mais alto de cada arco da cicloide, onde a velocidade é um vetor paralelo ao eixo Ox .



A cada ponto $P = (a, b)$ da circunferência do círculo de raio 1, centrado na origem, corresponde uma família de ângulos na forma $\theta + 2\pi k$,

$k \in \mathbb{Z}$, tais que

$$\cos(\theta + 2\pi k) = a \text{ e}$$

$$\operatorname{sen}(\theta + 2\pi k) = b.$$

$$\begin{aligned} \|\alpha'(t)\|^2 &= \alpha_1'(t)^2 + \alpha_2'(t)^2 = \\ &= (1 - \cos t)^2 + \operatorname{sen}^2 t = \\ &= 1 - 2 \cos t + \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = \\ &= 2 - 2 \cos t. \end{aligned}$$

Ao considerarmos a interpretação física, onde $\alpha(t)$ descreve o movimento de uma partícula ao longo do traço da curva, então $\alpha'(t)$ é a velocidade da partícula, que é tangente à essa trajetória.

Retas tangentes

Na aula 31 você aprendeu a determinar uma equação paramétrica da reta r que contém o ponto A e é paralela ao vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$. Ela é dada por

$$r(t) = t\vec{v} + A.$$

Vamos usar essa fórmula para determinar equações paramétricas de retas tangentes aos traços de curvas.

Seja $\alpha : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função diferenciável em $t = a$ e tal que $\alpha'(a) \neq \vec{0}$.

Uma equação paramétrica da reta tangente a α , no ponto $\alpha(a)$ é

$$r(t) = t\alpha'(a) + \alpha(a).$$

Veja como isso funciona.

Exemplo 34.5

Vamos calcular uma equação paramétrica da reta tangente à helicóide

$$\alpha(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, t),$$

no ponto $\alpha(1/4)$.

Primeiro calculamos a função derivada de α :

$$\alpha'(t) = (-2\pi \sin 2\pi t, 2\pi \cos 2\pi t, 1).$$

Agora, vamos calcular os vetores $\alpha(1/4)$ e $\alpha'(1/4)$.

$$\alpha\left(\frac{1}{4}\right) = \left(0, 1, \frac{1}{4}\right)$$

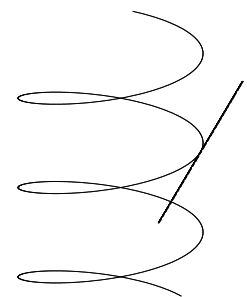
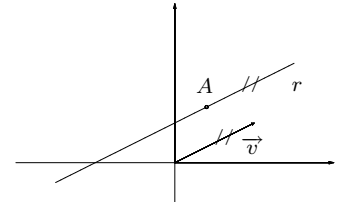
$$\alpha'\left(\frac{1}{4}\right) = (-2\pi, 0, 1).$$

A equação paramétrica correspondentes a esses vetores fica

$$r(t) = \alpha\left(\frac{1}{4}\right) + t\alpha'\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$r(t) = \left(0, 1, \frac{1}{4}\right) + t(-2\pi, 0, 1)$$

$$r(t) = \left(-2\pi t, 1, t + \frac{1}{4}\right)$$



Exemplo 34.6

Vamos calcular as equações para as retas tangentes ao traço da curva

$$\alpha(t) = (t^3 - t, t^2)$$

nos pontos de interseção com os eixos.

A primeira etapa do trabalho consiste em determinar esses pontos. Isso ocorre quando alguma das coordenadas de $\alpha(t)$ é igual a zero.

Se $x = 0$, temos a interseção com o eixo Oy .

$$x = 0 \iff t^3 - t = t(t^2 - 1) = 0.$$

Portanto, a curva intersepta o eixo Oy nos pontos $(0, 0)$ e $(0, 1)$, quando $t = 0, 1$ e -1 . Em particular, observamos que $\alpha(1) = \alpha(-1)$.

Se $y = 0$, temos a interseção com o eixo Ox .

$$y = 0 \iff t^2 = 0$$

e, portanto, a curva intersepta o eixo Ox na origem.

Nosso problema consiste em calcular equações de retas tangentes à curva em $\alpha(1) = \alpha(-1)$ e $\alpha(0)$, quando $t = -1, 0$ e 1 .

A derivada de α é $\alpha'(t) = (3t^2 - 1, 2t)$. Conseqüentemente, $\alpha'(-1) = (2, -2)$, $\alpha'(0) = (-1, 0)$ e $\alpha'(1) = (2, 2)$.

As equações das retas serão dadas pela fórmula

$$r(t) = (x(t), y(t)) = \alpha(a) + t\alpha'(a).$$

$$a = -1 \quad r(t) = (0, 1) + t(2, -2) = (2t, 1 - 2t);$$

$$a = 0 \quad r(t) = (0, 0) + t(-1, 0) = (-t, 0);$$

$$a = 1 \quad r(t) = (0, 1) + t(2, 2) = (2t, 1 + 2t).$$

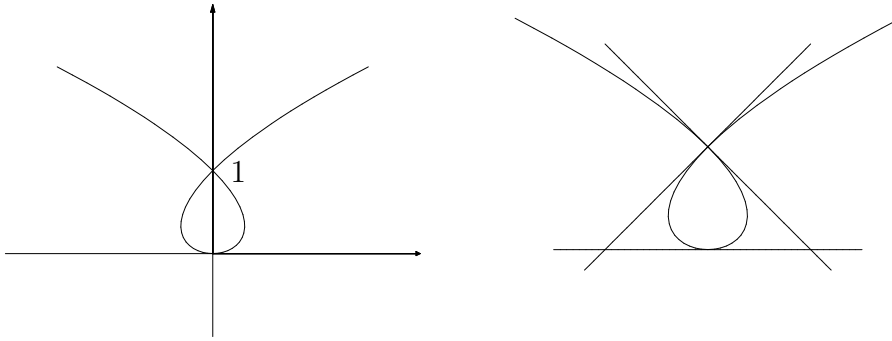
Lembre-se de que quando $n = 2$, podemos achar equações cartesianas para a reta, eliminando o parâmetro t . Veja:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - 2t \end{cases} \implies y = 1 - x;$$

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 0 \end{cases} \implies y = 0 \text{ (eixo } Ox);$$

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + 2t \end{cases} \implies y = 1 + x.$$

Aqui está o desenho da curva e de suas tangentes:



Retas tangentes a curvas dadas em coordenadas polares

Considere o seguinte problema: uma certa curva é dada em coordenadas polares, pela equação

$$r = f(\theta)$$

onde $f(\theta)$ é uma função diferenciável. Como calcular uma equação da reta tangente à curva no ponto determinado por $\theta = a$?

Veja como podemos resolver o problema. Podemos obter uma parametrização da curva, em termos das coordenadas cartesianas, fazendo

$$\begin{cases} x(\theta) = r(\theta) \cos \theta \\ y(\theta) = r(\theta) \sin \theta \end{cases}$$

Portanto, tudo o que precisamos fazer é calcular a equação da reta tangente à curva

$$\alpha(\theta) = (r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin(\theta)).$$

Exemplo 34.7

Vamos calcular a equação da reta tangente à limaçon $r = 1 + 2 \cos(\theta)$, no ponto onde $\alpha(\pi/3)$.

Para isso, consideramos

$$\alpha(t) = ((1 + 2 \cos \theta) \cos \theta, (1 + 2 \cos \theta) \sin \theta)$$

e calculamos $\alpha(\pi/3)$ e $\alpha'(\pi/3)$.

$$\alpha(\theta) = ((1 + 2 \cos \theta) \cos \theta, (1 + 2 \cos \theta) \sin \theta)$$

$$\alpha\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\left(1 + 2 \frac{1}{2}\right) \frac{1}{2}, \left(1 + 2 \frac{1}{2}\right) \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = (1, \sqrt{3}).$$

CÁLCULO II

$$\alpha'(\theta) = (-2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta - (1+2 \cos \theta) \operatorname{sen} \theta, -2 \operatorname{sen}^2 \theta + (1+2 \cos \theta) \cos \theta)$$

$$\begin{aligned} \alpha'\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \left(-2 \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{2} - \left(1+2 \frac{1}{2}\right) \frac{\sqrt{3}}{2}, -2 \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(1+2 \frac{1}{2}\right) \frac{1}{2}\right) = \\ &= \left(-3 \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Ou seja, a reta que queremos contém o ponto $(1, \sqrt{3})$ e é paralela ao vetor $\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

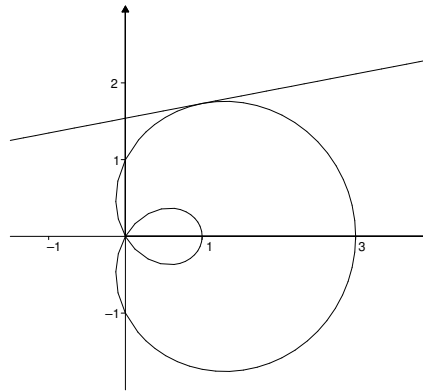
Uma equação paramétrica é dada por

$$\begin{cases} x(t) = 1 - \frac{3\sqrt{3}}{2}t \\ y(t) = \sqrt{3} - \frac{t}{2}. \end{cases}$$

Podemos achar uma equação cartesiana dessa reta, eliminando t . Por exemplo, podemos reescrever a segunda equação como $t = 2(\sqrt{3} - y)$ e substituí-la na primeira, obtendo

$$y = \frac{\sqrt{3}}{9}(x + 8).$$

Veja a figura da curva e da reta tangente.



Comentários finais

Nesta aula você aprendeu a calcular a derivada de funções vetoriais e como usá-la para determinar retas tangentes à curvas. Do ponto de vista prático, os exercícios não são muito difíceis pois, essencialmente derivamos coordenada a coordenada. A parte mais complicada é, realmente, traçar as curvas à partir das equações. Mas essa parte foge do escopo de nosso curso. Além disso, você já deve ter acumulado alguma experiência com as aulas sobre curvas que já vimos, bem como aquelas vistas, ou a serem vistas, na Geometria Analítica.

Agora é hora de você praticar o que aprendeu.

Exercícios

Exercício 1

Calcule as funções derivadas das seguintes funções.

(a) $\alpha(t) = (t^2 + 2, t^3 - 3t)$;

(b) $\beta(t) = (t \cos 2t, 6 \sin 3t)$;

(c) $\gamma(t) = (\sinh t, \cosh t, t^2)$.

Exercício 2

Determine os pontos onde a derivada da curva dada é igual ao vetor nulo.

(a) $\alpha(t) = (2x^3 + 3x^2 - 12x, x^3 - 3x)$;

(b) $\beta(t) = (3 \cos t + \cos 3t, 3 \sin 3t - \sin 3t)$;

(c) $\gamma(t) = (t \ln t^2 - 2t, 2t^3 - 9t^2 + 12t)$.

Dica: você pode resolver uma equação transcendental, como $\cos t = \cos 3t$, esboçando os gráficos $y = \cos t$ e $y = \cos 3t$ sobrepostos, descobrindo assim os pontos onde eles coincidem. Além disso, como as funções são periódicas, basta considerar um intervalo de periodicidade para determinar completamente as soluções.

Exercício 3

Determine o(s) ponto(s) onde a curva dada é tangente à reta indicada.

(a) $\alpha(t) = (t^3 + 3t, t^2 + 4t)$, $r(t) = (3t + 3, t - 4)$;

(b) $\beta(t) = (\cos \pi t, \sin \pi t)$, $r(t) = (2 + t, t - 1)$.

(a) **Solução :**

Para que a reta tangente à curva $\alpha(t)$ seja paralela à reta $(6t + 3, 2t - 4)$, é preciso que a derivada de $\alpha(t)$ seja um múltiplo não nulo do vetor diretriz $(3, 1)$ da reta r . Isto é, basta que exista um número λ tal que

$$\alpha'(t) = \lambda(3, 1).$$

Como $\alpha'(t) = (3t^2 + 3, 2t + 4)$, isso significa que queremos resolver o sistema

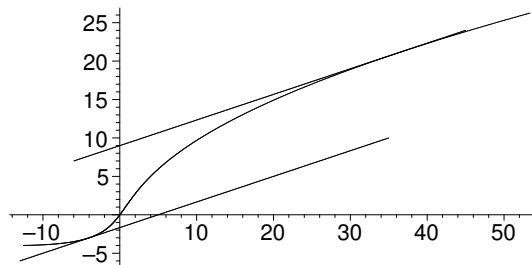
$$\begin{cases} 3t^2 + 3 = \lambda 3 \\ 2t + 4 = \lambda \end{cases}.$$

Podemos fazer isso eliminando λ , substituindo $\lambda = 2t + 4$ na primeira equação:

$$3t^2 + 3 = 3(2t + 4) \implies t^2 - 2t - 3 = 0.$$

Essa equação admite as soluções $t = -1$ e $t = 3$. Portanto, os pontos pedidos no exercício são $\alpha(-1) = (-4, -3)$ e $\alpha(3) = (36, 21)$.

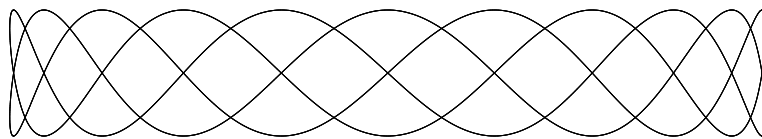
A figura não é, exatamente, interessante. No entanto, aqui está.



Exercício 4

Calcule uma equação paramétrica da reta tangente às curvas nos pontos indicados. No caso das curvas planas, encontre também uma equação cartesiana da reta.

- (a) $\alpha(t) = (t^2, 3t + 1)$, $t = 1$;
- (b) $\beta(t) = \left(\frac{1}{t}, t, t^2\right)$, $t = -1$;
- (c) $\gamma(t) = (t, \cos t, \sin t)$ $t = \pi/6$;
- (d) $\mu(t) = (\sin 3t, \sin 2t)$, $t = \pi/2$.



Aula 35 – Funções vetoriais – Integrais

Objetivo

- Conhecer a integral de funções vetoriais;
- Aprender a calcular comprimentos de curvas parametrizadas;
- Aprender a calcular áreas de regiões delimitadas por curvas planas dadas em coordenadas polares, assim como o comprimento de tais curvas.

Integrais de funções vetoriais

Agora que você sabe derivar as funções vetoriais, deve estar fazendo a seguinte pergunta: o que pode ser dito a respeito de suas integrais? Muito bem, veja o próximo exemplo.

Exemplo 35.1

Sabendo que uma partícula se move ao longo de uma curva no espaço, com velocidade $\vec{v} = (2t, -4t, 1)$ e que a sua posição no instante $t = 0$ era $(1, 1, 0)$, o que podemos dizer sobre a sua posição num instante $t > 0$?

Bem, sabemos que $\vec{v}(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}(t)$ e, portanto, gostaríamos de dizer que

$$s(t) = \int \vec{v}(t) dt$$

com a extra informação que $s(0) = (1, 1, 0)$.

Isto é, queremos calcular uma *primitiva vetorial*. Para isso, basta integrar $\vec{v}(t)$ coordenada a coordenada:

$$\begin{aligned} s(t) &= \int (2t, -4t, 1) dt = \left(\int 2t dt, \int -4t dt, \int dt \right) = \\ &= (t^2 + C_1, -2t^2 + C_2, t + C_3). \end{aligned}$$

Para que $s(t)$ satisfaça a condição inicial $s(0) = (1, 1, 0)$ temos que fazer $C_1 = 1$, $C_2 = 1$ e $C_3 = 0$. Assim, a resposta à pergunta inicial é

$$s(t) = (t^2 + 1, 1 - 2t^2, t).$$

A notação $\vec{v}(t) = 2t\vec{i} - 4t\vec{j} + \vec{k}$, onde $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ e $\vec{k} = (0, 0, 1)$, é conveniente e muito usada.

Nossos cálculos, com essa nova notação, fica

$$\begin{aligned} s(t) &= \int \vec{v}(t) dt = \int 2t dt \vec{i} - \int 4t dt \vec{j} + \int dt \vec{k} = \\ &= (t^2 + C_1)\vec{i} + (C_2 - 2t^2)\vec{j} + (t + C_3)\vec{k}. \end{aligned}$$

Como $s(t) = \vec{i} + \vec{j}$, temos $C_1 = 1$, $C_2 = 1$ e $C_3 = 0$. Portanto,

$$s(t) = (t^2 + 1)\vec{i} + (1 - 2t^2)\vec{j} + t\vec{k}.$$

Ao longo desta aula estaremos sempre considerando funções que sejam, pelo menos, contínuas.

Realmente, se quisermos calcular a integral de uma função vetorial $\alpha(t)$, que será denotada por $\int \alpha(t) dt$, basta que integremos coordenada a coordenada. Em particular, se $\alpha(t) = \alpha_1(t)\vec{i} + \alpha_2(t)\vec{j} + \alpha_3(t)\vec{k}$, então

$$\int_a^b \alpha(t) dt = \left(\int_a^b \alpha_1(t) dt \right) \vec{i} + \left(\int_a^b \alpha_2(t) dt \right) \vec{j} + \left(\int_a^b \alpha_3(t) dt \right) \vec{k}. \quad (\text{I})$$

Observação:

Na verdade, a integral da função vetorial $\alpha(t)$, sobre um intervalo $[a, b]$, é definida em termos de somas de Riemann, nos mesmos moldes que se faz no caso das funções reais, de uma variável real, tomando limite de somas sobre as partições do intervalo. A única diferença é que lá fazemos somas de números enquanto que aqui temos somas vetoriais.

Uma vez isto estabelecido, pode-se provar que a igualdade (I), que usamos para calcular as integrais vetoriais, é verdadeira.

Antes de prosseguir, que tal você fazer uma tentativa? Aqui está:

Exercício 1

A aceleração de uma partícula em movimento, no instante $t \geq 0$ é dada por

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}(t) = 12 \cos 2t \vec{i} - 8 \sin 2t \vec{j} + 12t \vec{k}.$$

Sabendo que $\vec{v}(0) = \vec{0}$ e que $s(0) = \vec{0}$, determine a velocidade e a posição da partícula.

O fato que você verá a seguir se deve às propriedades de limite e do fato

$$|\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \cdots + \vec{v}_n| \leq |\vec{v}_1| + |\vec{v}_2| + \cdots + |\vec{v}_n|.$$

Ele afirma que, para qualquer função contínua $\alpha(t)$, sobre um intervalo $[a, b]$,

$$\left| \int_a^b \alpha(t) dt \right| \leq \int_a^b |\alpha(t)| dt. \quad (\text{II})$$

Você encontrará este tipo de desigualdade diversas vezes em sua carreira de matemático. Por agora, basta observar o seguinte exemplo, que ilustra a situação onde a desigualdade é estrita.

Exemplo 35.2

Vamos mostrar que a desigualdade (II) é estrita no caso em que $\alpha(t) = (1, t)$, com $t \in [0, 1]$.

Primeiro, calculamos $\int_0^1 \alpha(t) dt$.

$$\int_0^1 \alpha(t) dt = \int_0^1 dt \vec{i} + \int_0^1 t dt \vec{j} = \vec{i} + \frac{1}{2} \vec{j}.$$

Portanto,

$$\left| \int_0^1 \alpha(t) dt \right| = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Agora, vamos calcular o outro termo da inequação. Ora, como $|\alpha(t)| = \sqrt{1 + t^2}$, temos

Para resolver esta integral usamos a substituição trigonométrica $t = \text{tg } \theta$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 |\alpha(t)| dt &= \int_0^1 \sqrt{1 + t^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \left(t \sqrt{1 + t^2} + \ln |t + \sqrt{1 + t^2}| \right) \Big|_0^1 = \\ &= \frac{1}{2} (\sqrt{2} + \ln (1 + \sqrt{2})). \end{aligned}$$

A desigualdade estrita se verifica pois,

$$\left| \int_0^1 \alpha(t) dt \right| = \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1,1180 < \int_0^1 |\alpha(t)| dt = \frac{1}{2} (\sqrt{2} + \ln (1 + \sqrt{2})) \approx 1,1478.$$

Interpretação física da integral – Impulso

Seja $\vec{F}(t)$ uma força que atua sobre uma partícula. Chama-se o *impulso* de \vec{F} no intervalo $[t_1, t_2]$ o vetor

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt.$$

Suponha que a partícula tenha uma massa m e que se move devido a ação da força \vec{F} . O impulso de \vec{F} é igual a $m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$, onde \vec{v}_1 e \vec{v}_2 são as velocidades da partícula nos respectivos instantes t_1 e t_2 .

Realmente, a Lei de Newton nos diz que $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$. Portanto,

$$\begin{aligned} I &= \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} m \vec{a}(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} m \frac{d\vec{v}}{dt}(t) dt = \\ &= m \vec{v}(t) \Big|_{t_1}^{t_2} = m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1). \end{aligned}$$

Comprimento de uma curva $\alpha(t)$

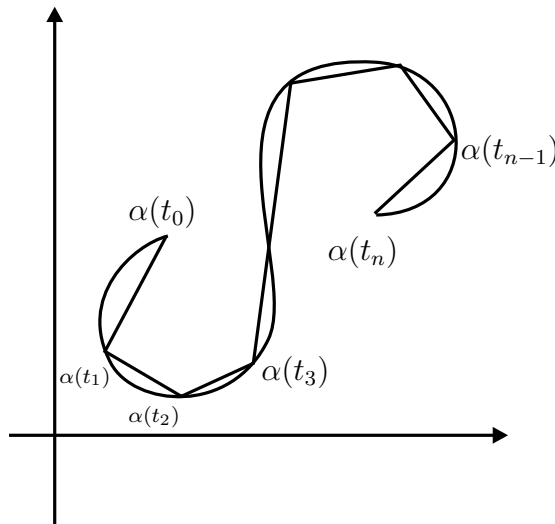
Na aula 29 você aprendeu a calcular o comprimento do gráfico de uma função contínua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. A fórmula que define este comprimento é

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Agora, queremos estender esta definição para o caso de traços de curvas. Isto é, dada uma função vetorial $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, de classe C^1 , queremos estabelecer uma fórmula que defina o comprimento de seu traço e que seja uma extensão natural da fórmula que já conhecemos.

A motivação é a mesma que foi usada anteriormente. Vamos considerar, por simplicidade, o caso que $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Vamos aproximar a curva por uma seqüência de segmentos de retas, que chamamos de uma linha poligonal.

Seja $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ uma partição \mathcal{P} do intervalo $[a, b]$. Agora, consideramos os segmentos de reta que conectam os pontos $\alpha(t_{i-1})$ até $\alpha(t_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Veja a figura.



O comprimento desta poligonal é

$$L(\mathcal{P}) = |\alpha(t_1) - \alpha(t_0)| + |\alpha(t_2) - \alpha(t_1)| + \cdots + |\alpha(t_n) - \alpha(t_{n-1})|.$$

Veja uma dessas parcelas:

$$|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})| = \sqrt{(\alpha_1(t_i) - \alpha_1(t_{i-1}))^2 + (\alpha_2(t_i) - \alpha_2(t_{i-1}))^2}.$$

Como fizemos na aula 29, podemos usar o Teorema do valor médio para garantir a existência de números ξ_i e $\zeta_i \in [t_{i-1}, t_i]$, tais que

$$\begin{aligned} \alpha_1(t_i) - \alpha_1(t_{i-1}) &= \alpha'_1(\xi_i) (t_i - t_{i-1}) \\ \alpha_2(t_i) - \alpha_2(t_{i-1}) &= \alpha'_2(\zeta_i) (t_i - t_{i-1}) \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})| &= \sqrt{(\alpha'_1(\xi_i) (t_i - t_{i-1}))^2 + (\alpha'_2(\zeta_i) (t_i - t_{i-1}))^2} = \\ &= \sqrt{(\alpha'_1(\xi_i))^2 + (\alpha'_2(\zeta_i))^2} |t_i - t_{i-1}| = \\ &= \sqrt{(\alpha'_1(\xi_i))^2 + (\alpha'_2(\zeta_i))^2} \Delta t_i. \end{aligned}$$

Portanto, o comprimento da linha poligonal pode ser escrita como

$$L(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n \sqrt{(\alpha'_1(\xi_i))^2 + (\alpha'_2(\zeta_i))^2} \Delta t_i. \quad (\text{III})$$

Como $|\alpha'(t)| = \sqrt{(\alpha'_1(t))^2 + (\alpha'_2(t))^2}$, a equação (III) nos motiva a usar a seguinte definição para o comprimento do traço da curva α , sobre o intervalo $[a, b]$:

$$L(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)| dt.$$

A primeira observação é que esta definição é a extensão da definição dada na aula 29, pois a curva $\alpha(t) = (t, f(t))$ é uma parametrização do gráfico de f , no intervalo $[a, b]$. Neste caso, $\alpha'_1(t) = 1$ e $\alpha'_2(t) = f'(t)$.

Veja como ela funciona num exemplo.

Exemplo 35.3

Vamos calcular o comprimento da circunferência do círculo de raio r .

Primeiro, consideramos a parametrização $\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t)$, com $t \in [0, 2\pi]$.

Agora, calculamos $\alpha'(t) = (-r \sin t, r \cos t)$, para poder calcular

$$\begin{aligned} |\alpha'(t)| &= \sqrt{(\alpha'_1(t))^2 + (\alpha'_2(t))^2} = \\ &= \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} = r. \end{aligned}$$

Portanto, o comprimento do traço de α é

$$\int_0^{2\pi} |\alpha'(t)| dt = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r,$$

como sabemos.

Exercício 2

Calcule o comprimento da curva $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$, com $t \in [0, 2k\pi]$.

Curvas em coordenadas polares

Veja como fica a fórmula do comprimento da curva quando ela é dada em coordenadas polares.

Seja $r = r(\theta)$ uma curva dada em coordenadas polares, com $a < \theta < b$. Para calcularmos seu comprimento, usamos a parametrização

$$\begin{cases} x(\theta) = r(\theta) \cos \theta \\ y(\theta) = r(\theta) \sin \theta. \end{cases}$$

Derivando estas equações em relação a θ , obtemos

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta} \cos \theta - r \sin \theta \\ \frac{dy}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta} \sin \theta + r \cos \theta. \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{dx^2}{d\theta} + \frac{dy^2}{d\theta} &= \frac{dr^2}{d\theta} \cos^2 \theta - 2r \frac{dr}{d\theta} \cos \theta \sin \theta + r^2 \sin^2 \theta + \\ &+ \frac{dr^2}{d\theta} \sin^2 \theta + 2r \frac{dr}{d\theta} \sin \theta \cos \theta + r^2 \cos^2 \theta = \\ &= \frac{dr^2}{d\theta} \cos^2 \theta + \frac{dr^2}{d\theta} \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = \\ &= \frac{dr^2}{d\theta} + r^2. \end{aligned}$$

Portanto, a fórmula do comprimento de uma curva dada, em coordenadas polares, pela equação $r = r(\theta)$, onde $\theta \in [a, b]$, é

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2} d\theta.$$

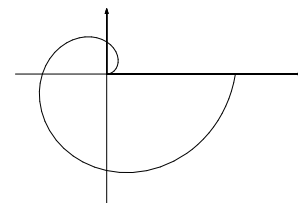
Veja no próximo exemplo como ela funciona.

Exemplo 35.4

Vamos calcular o comprimento da espiral de Arquimedes, dada pela equação $r = \frac{\theta}{2\pi}$, quando $\theta \in [0, 2\pi]$.

Veja que $\frac{dr}{d\theta} = \frac{1}{2\pi}$. Portanto,

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1}{4\pi^2} + \frac{\theta^2}{4\pi^2}} d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \theta^2} d\theta = \\ &= \frac{\sqrt{1 + 4\pi^2}}{2} + \frac{\ln(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2})}{4\pi} \approx 3,383044285. \end{aligned}$$



Observe que para integrar $\int \sqrt{1 + \theta^2} d\theta$, usamos uma substituição trigonométrica. De um modo geral, o cálculo do comprimento de curvas acaba dando em integrais que demandam muito trabalho. No entanto, o próximo exercício não demandará muito esforço.

Exercício 3

Use a fórmula do comprimento de curvas dadas em coordenadas polares para calcular o comprimento da circunferência do círculo de raio R .

Áreas de regiões limitadas por curvas em coordenadas polares

Este tema foge um pouco dos assuntos que estamos cobrindo mas é tão bonito que vale a pena incluí-lo. Além disso, à partir da próxima aula, nossos temas mudarão completamente, de modo que, lá vai.

Queremos uma fórmula que nos permita calcular a área de uma região limitada por uma curva dada em coordenadas polares, definida por

$$0 \leq r \leq r(\theta) \quad a < \theta < b.$$

onde $r = r(\theta)$ é uma função contínua.

A idéia é a de sempre: arranjar uma aproximação em termos de somas de Riemann e definir a área como uma integral.

Observe que a área do setor circular de raio r , correspondente a uma variação $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ é

$$\frac{r^2 \Delta\theta}{2},$$

devido à proporcionalidade com πr^2 , a área total do círculo.

Procedemos como antes, em casos semelhantes, tomando uma partição \mathcal{P} de $[a, b]$: $a = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n = b$. Se $\Delta\theta_i = \theta_i - \theta_{i-1}$ é suficientemente pequeno, e $\xi_i \in [\theta_{i-1}, \theta_i]$, a área do setor limitado por $0 \leq r \leq r(\theta)$, $\theta \in [\theta_{i-1}, \theta_i]$ é aproximada por

$$A_i = \frac{1}{2} r(\xi_i)^2 \Delta\theta_i.$$

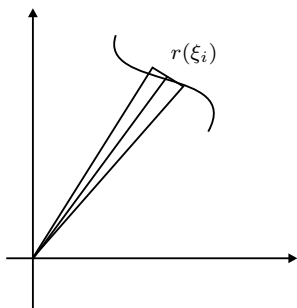
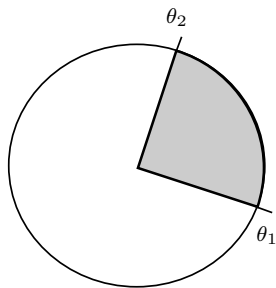
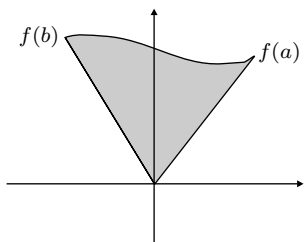
Portanto, uma aproximação para a área que queremos é dada por

$$A \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n r(\xi_i)^2 \Delta\theta_i.$$

Assim, definimos a área do setor definido por $0 \leq r \leq r(\theta)$, com $\theta \in [a, b]$, por

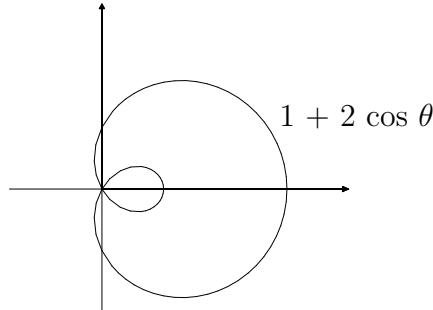
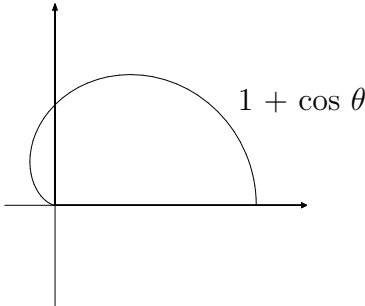
$$A = \frac{1}{2} \int_a^b r(\theta)^2 d\theta.$$

Veja dois exemplos:



Exemplo 35.5

- (a) A região limitada pela curva $r = 1 + \cos \theta$, com $\theta \in [0, \pi]$, que a metade de uma cardióide.
 (b) A região limitada pela alça menor da limaçon $r = 1 + 2 \cos \theta$.



No caso (a), sabemos a variação de θ pela descrição do problema. Portanto, para calcular a área, basta usar a fórmula:

$$A = \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 + \cos \theta)^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 + 2\cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta = \frac{3}{4}\pi.$$

O caso (b) demanda um pouco mais de trabalho pois, precisamos encontrar o intervalo de variação de θ . A saída é a seguinte: a alça menor da limaçon inicia o momento em que a curva cruza a origem. Isto é, precisamos resolver a equação $r(\theta) = 0$. Isto é,

$$1 + 2 \cos \theta = 0 \quad \iff \quad \cos \theta = -\frac{1}{2}.$$

Portanto, podemos percorrer a pequena alça fazendo $\theta \in [\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$. (Isto é, entre os ângulos 120° e 240° .)

Com isso, o problema tem a seguinte solução:

$$A = \frac{1}{2} \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} (1 + 2 \cos \theta)^2 d\theta = \pi - \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 0,543516442.$$

Terminamos essa aula com um resumo das fórmulas que você aprendeu:

Resumo das fórmulas

(a) Se $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por $\alpha(t) = \alpha_1(t)\vec{i} + \alpha_2(t)\vec{j} + \alpha_3(t)\vec{k}$, é contínua, então

$$\int_a^b \alpha(t) dt = \left(\int_a^b \alpha_1(t) dt \right) \vec{i} + \left(\int_a^b \alpha_2(t) dt \right) \vec{j} + \left(\int_a^b \alpha_3(t) dt \right) \vec{k}$$

e

$$\left| \int_a^b \alpha(t) dt \right| \leq \int_a^b |\alpha(t)| dt$$

(b) Se, além disso, α é uma função de classe C^1 , o comprimento do traço de α é

$$L(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)| dt.$$

(c) Se uma curva é dada em coordenadas polares pela função contínua $r = r(\theta)$, $\theta \in [a, b]$, a área da região delimitada por $0 \leq r \leq r(\theta)$ é dada pela fórmula

$$A = \frac{1}{2} \int_a^b r(\theta)^2 d\theta$$

e, se além disso, $r(\theta)$ é uma função de classe C^1 , o comprimento da curva é

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2} d\theta.$$

Você pode usá-las para resolver a lista de exercícios a seguir, que começa com as soluções dos exercícios propostos ao longo da aula.

Exercícios

Exercício 1

A aceleração de uma partícula em movimento, no instante $t \geq 0$, é dada por

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}(t) = 12 \cos 2t \vec{i} - 8 \sin 2t \vec{j} + 12t \vec{k}.$$

Sabendo que $\vec{v}(0) = \vec{0}$ e que $s(0) = \vec{0}$, determine a velocidade e a posição da partícula.

Solução:

$$\text{Veja, } \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}(t) = \frac{d^2s}{dt^2}(t).$$

Portanto, obtemos $\vec{v}(t)$ integrando $\vec{a}(t)$:

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \int 12 \cos 2t \, dt \vec{i} - \int 8 \sin 2t \, dt \vec{j} + \int 12t \, dt \vec{k} = \\ &= (6 \sin 2t + C_1) \vec{i} + (4 \cos 2t + C_2) \vec{j} + (6t^2 + C_3) \vec{k}. \end{aligned}$$

Como $\vec{v}(0) = \vec{0}$, $C_1 = 0$, $C_2 = -4$ e $C_3 = 0$. Assim,

$$\vec{v}(t) = 6 \sin 2t \vec{i} + 4(\cos 2t - 1) \vec{j} + 6t^2 \vec{k}.$$

Agora, calculamos $s(t)$:

$$\begin{aligned} s(t) &= \int 6 \sin 2t \, dt \vec{i} + \int (4 \cos 2t - 4) \, dt \vec{j} + \int 6t^2 \, dt \vec{k} = \\ &= (-3 \cos 2t + D_1) \vec{i} + (2 \sin 2t + D_2) \vec{j} + (2t^3 + D_3) \vec{k}. \end{aligned}$$

Usando a condição inicial $s(0) = \vec{0}$, obtemos $D_1 = 3$, $D_2 = 0$ e $D_3 = 0$.

Logo,

$$\vec{s}(t) = (3 - 3 \cos 2t) \vec{i} + (2 \sin 2t - 4t) \vec{j} + 2t^3 \vec{k}.$$

Exercício 2

Calcule o comprimento da curva $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$, com $t \in [0, 2k\pi]$.

Solução:

Esta curva é uma helicóide que, quando t percorre o intervalo $[0, 2k\pi]$, gira k voltas sobre seu eixo de rotação.

Para calcular o comprimento desta curva, calculamos inicialmente a norma de sua derivada:

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Agora, usamos diretamente a fórmula do comprimento para obter

$$L = \int_0^{2k\pi} \sqrt{2} \, dt = 2k\sqrt{2}\pi.$$

Exercício 3

Use a fórmula do comprimento de curvas dadas em coordenadas polares para calcular o comprimento da circunferência do círculo de raio R .

Solução:

A equação do círculo de raio R em coordenadas polares é $r = R$ (isto é, o raio é uma constante). Para completar a circunferência temos que fazer $\theta \in [0, 2\pi]$.

Portanto, $\frac{dr}{d\theta} = 0$ e o comprimento fica

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{0^2 + R^2} d\theta = R \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi R.$$

Os próximos exercícios ficam ao seu encargo. Divirta-se!

Exercício 4

Calcule a integral das seguintes funções vetoriais sobre os correspondentes intervalos.

- (a) $\alpha(t) = (t\sqrt{1+t}, \sqrt{1+t}), \quad t \in [0, 1];$
- (b) $\beta(t) = (te^t, te^{t^2}), \quad t \in [-1, 1];$
- (c) $\gamma(t) = (\cos 2\pi t, \text{sen } 2\pi t, t), \quad t \in [0, 1/2];$

Exercício 5

Uma partícula de massa m descreve um movimento circular uniforme sobre o círculo de raio 1 e centro na origem. A equação da aceleração do movimento é

$$\vec{a}(t) = 4\pi^2 (-\cos 2\pi t, -\text{sen } 2\pi t).$$

Sabendo que $\vec{v}(0) = (0, 2\pi)$ e que $s(0) = (1, 0)$, mostre que a velocidade é ortogonal à posição e que a aceleração tem a mesma direção que a posição mas aponta no sentido contrário que esta.

Calcule o impulso da força centrípeta $\vec{F} = m\vec{a}$, atuando na partícula nos intervalos de tempo $[0, 1/2]$, $[0, 1]$ e $[0, 2]$.

Exercício 6

Uma partícula de massa 1 unidades de peso desloca-se num plano devido a ação de uma força $\vec{F}(t) = 3t^2 \vec{i} + t \cos \pi t \vec{j}$. Sabendo que velocidade e a posição da partícula no instante $t = 0$, são iguais a $\vec{0}$, calcule a velocidade no instante t . Calcule o impulso da força \vec{F} no intervalo de tempo $[0, 1]$.

Sugestão: Use a fórmula $F = ma$.

Exercício 7

Calcule o comprimento das curvas a seguir, nos correspondentes intervalos.

- (a) $\alpha(t) = (4t, 3t), \quad t \in [a, b];$
 (b) $\beta(t) = (\text{sen } \pi t, \cos \pi t, e^t), \quad t \in [0, 2]$
 (c) $\gamma(t) = (1, t, \ln t), \quad t \in [1, e]$
 (d) $\delta(t) = (t - \text{sen } t, 1 - \cos t), \quad t \in [0, 2\pi];$
 (e) $\mu(t) = \left(t, \frac{e^t + e^{-t}}{2}\right), \quad t \in [-1, 1].$

Sugestão para o item (d): use a identidade $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos x)$.

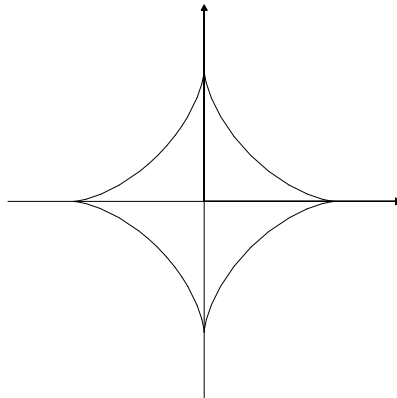
Exercício 8

Calcule o comprimento das curvas a seguir, dadas em coordenadas polares, nos correspondentes intervalos.

- (a) $r(\theta) = \text{sen } \theta, \quad \theta \in [0, \pi];$
 (b) $r(\theta) = 1 + \cos \theta, \quad \theta \in [0, \pi/2]$
 (c) $r(\theta) = e^{-\theta}, \quad \theta \in [0, k\pi]$
 (d) $r(\theta) = e^{-\theta}, \quad \theta \in [0, \infty).$

Exercício 9

A curva definida pela equação $\alpha(t) = (\cos^3 t, \text{sen}^3 t)$ é chamada de hipociclóide. Seu traço pode ser visto na figura. Calcule o seu comprimento.



Exercício 10

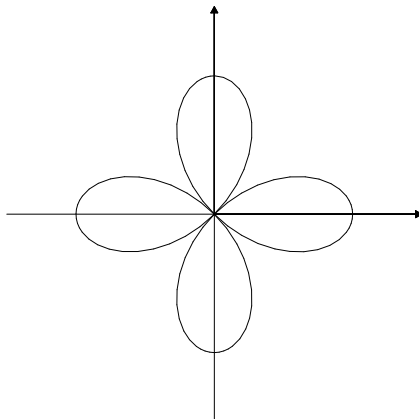
Esboce a região definida em coordenadas polares pela inequação

$$1 \leq r \leq 2 \cos \theta.$$

Calcule a sua área.

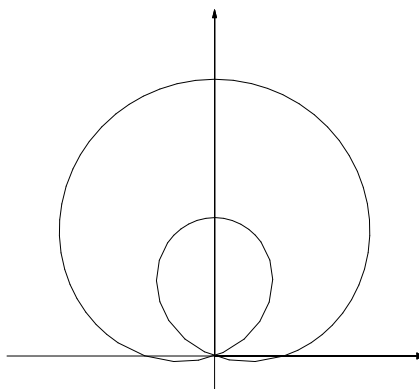
Exercício 11

A equação $r = \cos 2\theta$ define uma rosácea de quatro pétalas. Veja a figura. Calcule a área de uma de suas pétalas.



Exercício 12

A equação $r = 1 + 3 \sin \theta$ define uma limaçon. Veja a figura. Calcule a área entre a alça maior e a alça menor desta limaçon.



Respostas dos exercícios e algumas soluções

Aula 16

Exercício 1.

A função $f(x) = e^{\text{sen } x}$ é contínua, pois é a composição de duas funções contínuas: $y = \text{sen } x$ e $y = e^x$. Logo, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, ela admite uma primitiva $F(x)$ tal que $F(0) = 0$. Basta fazer

$$F(x) = \int_0^x e^{\text{sen } t} dt.$$

Podemos afirmar que $F(x)$ é crescente em todo o seu domínio, pois

$$F'(x) = f(x) = e^{\text{sen } x} > 0,$$

uma vez que $e^a > 0, \forall a \in \mathbb{R}$. Ou seja, a derivada de $F(x)$ é estritamente positiva.

Exercício 2.

- a) -6 . b) 0 . c) 0 .
 d) $\frac{\pi}{3}$. e) $e - 1$. f) 2 .

Exercício 3.

A função é o logaritmo natural de x : $f(x) = \ln x$.

Exercício 4.

a) Observe que, devido ao Teorema Fundamental do Cálculo, existe uma função F , definida em todo o conjunto dos números reais, tal que $F'(x) = \cos(e^x)$ e

$$f(x) = \int_0^{x^2} \cos(e^t) dt = F(x^2) - F(0).$$

Vamos derivar a igualdade $f(x) = F(x^2) - F(0)$ em relação a x , usando a regra da cadeia:

$$f'(x) = F'(x^2) \cdot 2x.$$

$$\text{Assim, } f'(x) = \cos(e^{x^2}) \cdot 2x = 2x \cos(e^{x^2}).$$

- b) $g'(x) = -2e^{x^2}$.

CÁLCULO II

Aula 17

Exercício 3.

$$\text{a) } \frac{1}{5} \operatorname{sen} 5x + C. \quad \text{b) } -\frac{1}{3} \cos x^3 + C. \quad \text{c) } 0.$$

$$\text{d) } \frac{1}{3} (1 + \operatorname{sen} x)^3 + C. \quad \text{e) } -\frac{1}{18} (1 - x^3)^6 + C. \quad \text{f) } \frac{7}{9}.$$

Exercício 4.

O Teorema Fundamental do Cálculo não se aplica a essa situação, pois a função $f(x) = \frac{1}{x^2}$ não está definida em $0 \in [-1, 1]$. Portanto, a igualdade é falsa. Esse tipo de integral é chamado de *integral imprópria* e será estudado posteriormente.

Exercício 5.

Realmente, $f'(x) = 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x$ e $g'(x) = -2 \cos x \cdot (-\operatorname{sen} x) = 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x$. Isso é possível, pois ambas as funções diferem por uma constante:

$$f(x) = \operatorname{sen}^x = 1 - \cos^2 x = 1 + g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exercício 6.

$$F(x) = \frac{x|x|}{2} + \frac{1}{2}$$

Aula 18

Exercício 2.

$$\text{a) } \ln |1 + \operatorname{sen} x| + C.$$

$$\text{b) } 2e^{\sqrt{x}} + C.$$

$$\text{c) } \frac{1}{3} (\ln x)^3 + C.$$

$$\text{d) } \frac{-1}{2(x^2 + 2x + 2)} + C.$$

$$\text{e) } \frac{1}{6} \operatorname{sen}^6 x + C.$$

$$\text{f) } \operatorname{sen} \sqrt{1 + x^2} + C.$$

$$\text{g) } \frac{2}{7} (1 - t)^{7/2} - \frac{2}{5} (1 - t)^{5/2} + C.$$

$$\text{h) } 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C.$$

$$\text{i) } \frac{2}{7} (2 + x)^{7/2} - \frac{8}{5} (2 + x)^{5/2} + \frac{8}{3} (2 + x)^{3/2} + C.$$

Exercício 3.

a) $\frac{\sqrt{2}}{4}$. b) 72. c) $\ln \sqrt{3}$.

d) $\frac{2}{15}$. e) $\frac{2\sqrt{26}}{3}$.

Exercício 4.

a) $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2x + C$. b) $\frac{\pi}{8}$. c) $\frac{1}{3} \operatorname{arctg} x^3 + C$.

d) $\operatorname{arcsen} e^x + C$. e) $\operatorname{arcsen} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{2} \right) + C$. f) $-\operatorname{arcsen} (e^{-x}) + C$.

g) $\operatorname{arcsec} e^x + C$. h) $\frac{\pi}{12}$.

Aula 19

Exercício 3.

a) $\operatorname{sen} x - (x+1) \cos x + C$. b) $-e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + C$.

c) $\frac{e^{2x}}{5}(2 \cos x + \operatorname{sen} x) + C$. d) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5\pi}{12}$.

e) $\frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}$.

Exercício 4.

Fazemos $u = \sqrt{x}$, que acarreta $du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$. Assim, $dx = 2u du$.

Uma outra maneira: colocando $x = u^2$ implica $dx = 2u du$, como antes.

Portanto,

$$\begin{aligned} \int \cos \sqrt{x} dx &= \int 2u \cos u du = \\ &= 2u \operatorname{sen} u + 2 \cos u + C = \\ &= 2\sqrt{x} \operatorname{sen} \sqrt{x} + 2 \cos \sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

Portanto, $\int_0^{\pi^2} \cos \sqrt{x} dx = -4$.

CÁLCULO II

Aula 20

Exercício 4.

a) $\frac{1}{6} \cos^6 x + C.$ b) $\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{12}.$

c) $\frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C.$ d) $\frac{1}{6} \sin^3 2t + C.$

e) $\frac{3\sqrt{3}}{8}.$

f) $\frac{1}{4} \cos 2x \sin 2x \left(\frac{1}{3} \cos^4 2x + \frac{5}{12} \cos^2 2x + \frac{5}{8} \right) + \frac{5x}{16} + C.$

g) $-\frac{x}{4} + \frac{1}{4} \sin x \cos x + \frac{1}{2} \sin^3 x \cos x + C.$

h) $t + \frac{1}{2} \cos t \sin t - 2 \sin t + \frac{4}{3} \sin^3 t + \frac{1}{4} \cos 2t \sin 2t + C.$

i) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ j) $\frac{-1}{2 \sin^2 x} - \ln |\sin x| + C.$

Exercício 5.

a) $\frac{4}{3} \sin^3 \frac{x}{2} + C.$ b) $-\frac{2}{5}.$

c) $\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}.$ d) $\frac{1}{8} \sin 4x + \frac{1}{20} \sin 10x + C.$

Aula 21

Exercício 4.

a) $\frac{1}{6} \operatorname{tg}^3 2x + \frac{1}{10} \operatorname{tg}^5 2x + C.$

b) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} \sec \frac{x}{2} - \ln \left| \sec \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$

c) $\frac{8}{3} - \frac{8\sqrt{3}}{27}.$ d) $\frac{1}{9} \operatorname{tg} 3x \sec^2 3x + \frac{2}{9} \operatorname{tg} 3x + C.$

e) $\frac{1}{9} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2}{3} \right).$ f) $\frac{1}{4} \sec^4 x + C.$

g) $-\frac{1}{4} \operatorname{cotg}^4 x + C.$ h) $\ln |\operatorname{tg} x| - \frac{1}{2 \operatorname{tg}^2 x} + C.$

- i) $\frac{1}{15} \operatorname{tg} 5t \sec^2 5t + \frac{2}{15} \operatorname{tg} 5t + C.$
- j) $\frac{2}{7} \sec^{7/2} x - \frac{2}{3} \sec^{3/2} x + C.$
- l) $\frac{1}{4} \operatorname{tg} 2x \sec 2x + \frac{1}{4} \ln |\sec 2x + \operatorname{tg} 2x| + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x - \frac{1}{2} \ln |\sec x| + C.$
- m) $-\frac{1}{3} \operatorname{cotg} x \csc^2 x - \frac{2}{3} \operatorname{cotg} x + C.$
- n) $\operatorname{tg} \sqrt{x} \sec \sqrt{x} + \ln |\sec \sqrt{x} + \operatorname{tg} \sqrt{x}| + C$
- o) $\frac{1}{\cos x} + C.$
- p) $-\frac{1}{6} \operatorname{cotg} 2t \csc^2 2t - \frac{1}{3} \operatorname{cotg} 2t + C.$
- q) $-\frac{1}{4} \operatorname{cotg}^4 x + C.$

Aula 22

4. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$
5. $\frac{25\sqrt{2}}{2} - \frac{25}{2} \ln(\sqrt{2} - 1).$
6. $4\sqrt{3} - 2 \ln(2 + \sqrt{3}).$
7. $-\frac{1}{8} x \sqrt{9 - 4x^2} + \frac{9}{16} \operatorname{arcsen} \frac{2x}{3} + C.$
8. $-\frac{1}{3} \frac{\sqrt{1-t^2}}{t^3} - \frac{2}{3} \frac{\sqrt{1-t^2}}{t} + C.$
9. $\frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - 2} + \ln |x + \sqrt{x^2 - 2}| + C.$
10. $\frac{x^2 + 32}{\sqrt{x^2 + 16}} + C.$
11. $\frac{x}{\sqrt{9 - x^2}} - \operatorname{arcsen} \frac{x}{3} + C.$
12. $\frac{\sqrt{x^2 - 4}}{3} (x^2 + 8) + C.$
13. $-\frac{\sqrt{25 - x^2}}{x} - \operatorname{arcsen} \frac{x}{5} + C.$
14. $\frac{205}{2} - \frac{81}{8} \ln 3.$

CÁLCULO II

15. $\frac{\sqrt{37}}{74}$.
16. $\frac{(x^2 - 1)^{3/2}}{3x^2} + C$.

Aula 23

5. $\ln |x| + 2 \ln |x - 1| + C$.
6. $-5 \ln |x + 2| + 3 \ln |x + 1| + C$.
7. $\ln |2x - 1| + 3 \ln |x - 1| + C$.
8. $2 \ln |x - 3| + 3 \ln |x + 1| + C$.
9. $3 \ln |x - 1| + \ln |x - 2| - \ln |x + 2| + C$.
10. $\ln |x - 3| - \ln |x - 1| + 3 \ln |x + 1| + C$.
11. $\ln |x| + 3 \ln |x - 1| + 5 \ln |x + 2| + C$.
12. $\ln |x| - \frac{1}{x - 2} + C$.
13. $-\frac{1}{x - 1} - \ln |x - 1| - \frac{1}{x} + C$.
14. $x^2 - x - \ln |x - 2| + 2 \ln |x - 3| + C$.

Aula 24

3. $\ln |x - 2| + \ln (x^2 + 4) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C$.
4. $-\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln (x^2 - 4x + 5) + \operatorname{arctg} (x - 2) + C$.
5. $\ln |x - 1| + \ln |x + 1| + \operatorname{arctg} x + C$.
6. $\ln |x| - \frac{1}{2} \ln (x^2 + 2x + 2) + \frac{5}{2} \operatorname{arctg} (x + 1) + \frac{1}{4} \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 2} + C$.
7. $\frac{1}{16} \frac{x}{x^2 + 2} + \frac{\sqrt{2}}{32} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} x \right) + C$.
8. $-\frac{1}{36} \frac{2x + 9}{(x^2 + 9)^2} - \frac{1}{108} \frac{x}{x^2 + 9} - \frac{1}{324} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{3} \right) + C$.
9. $\frac{A_1}{(x - 1)^2} + \frac{A_2}{x - 1} + \frac{B_1 x + C_1}{(x^2 + 5x + 7)^3} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2 + 5x + 7)^2} + \frac{B_3 x + C_3}{x^2 + 5x + 7} + \frac{Dx + E}{x^2 + 1}$.

Aula 25

1. $\int t \sqrt{1+4t^2} dt = \frac{1}{12} (1+4t^2)^{3/2} + C$
 $\int_0^{\sqrt{2}} t \sqrt{1+4t^2} dt = \frac{13}{6}.$
2. $x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x| + C.$
3. $-\frac{1}{3}(2x-x^2)^{3/2} - \frac{1}{2}(1-x)\sqrt{2x-x^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arcsen}(x-1) + C.$
4. $-\frac{1}{2} \frac{\operatorname{arctg} x}{(x+1)^2} - \frac{1}{4(x+1)} + \frac{1}{4} \ln |x+1| - \frac{1}{8} \ln(x^2+1) + C.$
5. $\frac{e^x}{2} \sqrt{4+e^{2x}} + 2 \ln(e^x + \sqrt{4+e^{2x}}) + C.$
6. $\frac{3}{2} \ln |x^{2/3} + 1| + C.$
7. $-\frac{\sqrt{5+2x-x^2}}{4} \left[(x+5/3)(5+2x-x^2) + 5 - 5x \right] +$
 $+\frac{15}{2} \operatorname{arcsen} \left[\frac{\sqrt{6}}{6}(x-1) \right] + C.$
8. $\frac{1}{16} \frac{2x-1}{4x^2+12x+13} + \frac{1}{32} \operatorname{arctg} \left(x + \frac{3}{2} \right) + C.$
9. $-\cos e^x + C.$
10. $\frac{3}{2} \ln(x^2+1) + 2 \operatorname{arctg} x + C.$
11. $(-4+x) \ln(2+\sqrt{x}) + 2\sqrt{x} - \frac{x}{2} + C.$
12. $\frac{-1}{(1+\sqrt{x})^2} + C.$
13. $-\sqrt{2x-x^2} + \operatorname{arcsen}(x-1) + C.$
14. $2\sqrt{x}(\ln \sqrt{x} - 1) + C.$
15. $-\frac{1}{9} \sqrt{5+12x-x^2} + \frac{2}{9} \operatorname{arcsen} \left(x - \frac{2}{3} \right) + C.$
16. $\frac{1}{3} \ln |x+1| - \frac{1}{6} \ln |x^2-x+1| + \frac{\sqrt{x}}{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x-1) \right) + C.$
17. $-\frac{1}{18} \frac{1}{(3x-7)^6} + C.$
18. $-\frac{e^{-x^2}}{2} + C.$
19. $x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x| - \frac{x^2}{2} + C.$
20. $\frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x+1) \right) + C.$
21. $\frac{1}{3} \ln(-4+\cos^2 x) + C.$

CÁLCULO II

22. $\frac{(2+3x)^{1/3}}{3} \left[\frac{(2+3x)^2}{7} - \frac{2+3x}{2} \right] + C.$

23. $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{2} + 1 \right) + C.$

24. $-\frac{\sqrt{1-4x^2}}{4} + C.$

25. $\frac{1}{2} \cos x^2 + \frac{x^2}{2} \operatorname{sen} x^2 + C.$

26. $\frac{(x-1)}{2} \sqrt{3+2x-x^2} + 2 \operatorname{arcsen} \left(\frac{x-1}{2} \right) + C.$

27. $\frac{1}{4} \operatorname{arctg} x^4 + C.$

28. $\operatorname{arctg} (x-1) + C.$

29. $\frac{x^2}{4} \sqrt{9-x^4} + \frac{9}{4} \operatorname{arcsen} \frac{x^2}{3} + C.$

30. Note que $x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1).$

$$\frac{\sqrt{2}}{4} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{(x^2 + \sqrt{2}x + 1)}{(x^2 - \sqrt{2}x + 1)} \right) + \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x + 1) + \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x - 1) \right] + C.$$

31. $2\sqrt{1+e^x} + \ln \left| \frac{\sqrt{1+e^x} - 1}{\sqrt{1+e^x} + 1} \right| + C.$

Aula 26

1. 1. 2. $\frac{\ln 3}{2}.$ 3. $\frac{\pi}{3}.$

4. Diverge para $-\infty.$ 5. $3(1 + \sqrt[3]{2}).$ 6. Diverge para $+\infty.$

7. $\frac{\ln 5}{8}.$ 8. $-1.$ 9. $\frac{\pi}{2}.$

10. $\frac{\pi}{2}.$ 11. $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 2.$ 12. $e - 1.$

13. $\frac{1}{a}.$ 14. $\frac{1}{a^2}.$ 15. $-\frac{2}{5}.$

16. $-4\sqrt{2}.$ 17. 2. 18. Diverge para $+\infty.$

19. $\frac{\sqrt{2\pi}}{2}.$

20. Como $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + e^{-x}}{x^3 + x^2 + 1} = 1,$ a integral diverge.

Aula 27

- | | | |
|---------------|---------------|---------------|
| 3. Converge. | 4. Converge. | 5. Converge. |
| 6. Converge. | 7. Diverge. | 8. Converge. |
| 9. Converge. | 10. Converge. | 11. Diverge. |
| 12. Converge. | 13. Diverge. | 14. Converge. |
| 15. Converge. | 16. Converge. | 17. Converge. |
| 18. Converge. | 19. Diverge. | 20. Diverge. |

Aula 28

3(a). $2\pi/3$.

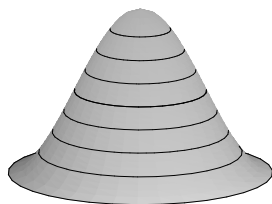
3(b). $2\pi(\pi - 2) = 7,17283819$.

3(c). $V = \pi \int_1^3 [1^2 - (x-2)^4] dx = \frac{8\pi}{5}$.

3(d). $\frac{\pi}{2}(e^4 - 1)$.

3(e). $V = \pi \int_1^2 \left(e^{2x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \frac{\pi}{2}(e^4 - e^2 - 1)$.

4.



$$V = 2\pi(\pi^2 - 4) \approx 36,87981215.$$

5. $\frac{\pi^2}{4} - 2 \approx 0,467401101$.

6. $\pi(\sqrt{3} - 1) \approx 0,732050808$.

7. $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$.

8. $A(x) = (2\sqrt{4-x^2})^2 = 4(4-x^2)$ $V = 422/3$.

9. $A(x) = \frac{\pi \left(\frac{4-x}{2} \right)^2}{2} = \frac{\pi(4-x)^2}{8}$ $V = \frac{8\pi}{3}$.

10. $A(x) = \frac{(\sqrt{1-x^2})^2}{2} = \frac{1-x^2}{2}$ $V = 2/3$.

Aula 29

3(a). $\frac{\pi}{4} \left(9\sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln(\sqrt{5} - 2) \right).$

3(b). $\pi [e\sqrt{1+e^2} + \ln(e + \sqrt{1+e^2}) - \sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2})].$

3(c). $\frac{4\pi}{3} [10\sqrt{5} - 4\sqrt{2}].$

3(d). $\pi\sqrt{2} + \pi \ln(1 + \sqrt{2}).$

4. Dividimos a superfície em duas:

$$f_1(x) = 2 + \sqrt{1-x^2} \quad \text{e} \quad f_2(x) = 2 - \sqrt{1-x^2}$$

$$S = 8\pi^2.$$

5. $\frac{1022}{27}.$

6. $\frac{227}{24}.$

7. $V = 3\pi \quad S \text{ diverge.}$

Aula 30

3. Suponha que n é par.

$$f_p(x) = a_n x^n + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_0$$

$$f_i(x) = a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-3} x^{n-3} + \dots + a_3 x^3 + a_1 x.$$

4. As duas funções têm as mesmas derivadas e estão definidas em todo o conjunto dos números reais. Isso significa que elas diferem por uma constante. Como coincidem em $x = 0$, por exemplo, elas são idênticas.

5. $\sqrt{1+x^2} + C.$

6. $\frac{1}{2} \left(\frac{x}{4x^2+1} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2x) \right) + C.$

7. $\operatorname{tg} \left(\frac{t}{2} \right) + C.$

Serviço gráfico realizado em parceria com a Fundação Santa Cabrini por intermédio do gerenciamento laborativo e educacional da mão-de-obra de apenados do sistema prisional do Estado do Rio de Janeiro.



Maiores informações: www.santacabrini.rj.gov.br

ISBN 85-7648-046-8



UENF
Universidade Estadual
do Norte Fluminense



Universidade Federal Fluminense

uff



UNIRIO



**FUNDAÇÃO
SANTA CABRINI**
Provedora de acesso à Cidadania



FAPERJ
Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo
à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro



**GOVERNO DO
Rio de Janeiro**

SECRETARIA DE
CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Ministério
da Educação

