Módulo 1

Dinamérico Pereira Pombo Jr.
Paulo Henrique C. Gusmão

Volume 1
3ª edição

Cálculo II

Fundação CECIERJ
Consórcio cederj

Volume 1

Cálculo II

cederj

ISBN 85-7648-045-X
9788576480457

UENF Universidade Estadual do Norte Fluminense
UERJ
Universidade Federal Fluminense uff
UNIRIO
FAPERJ Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro
GOVERNO DO Rio de Janeiro
SECRETARIA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
UAB UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL
Ministério da Educação
BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

Fundação
CECIERJ
Consórcio cederj

Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

Cálculo II

Volume 1 - Módulo 1
3ª edição

Dinamérico Pereira Pombo Jr.
Paulo Henrique C. Gusmão

GOVERNO DO
Rio de Janeiro

SECRETARIA DE
CIÊNCIA E TECNOLOGIA

UAB
UNIVERSIDADE
ABERTA DO BRASIL

Ministério
da Educação

BRASIL
UM PAÍS DE TODOS
GOVERNO FEDERAL

Apoio:

FAPERJ
Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo
à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Rua Visconde de Niterói, 1364 – Mangueira – Rio de Janeiro, RJ – CEP 20943-001
Tel.: (21) 2334-1569 Fax: (21) 2568-0725

Material Didático

ELABORAÇÃO DE CONTEÚDO
Dinamérico Pereira Pombo Jr.
Paulo Henrique C. Gusmão

COORDENAÇÃO DE DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL
Cristine Costa Barreto

DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL E REVISÃO
Anna Maria Osborne
Ana Tereza de Andrade
Jane Castellani
Leonardo Villela
Nilce P. Rangel Del Rio

COORDENAÇÃO DE LINGUAGEM
Maria Angélica Alves

Departamento de Produção

EDITORA
Tereza Queiroz

COORDENAÇÃO EDITORIAL
Jane Castellani

REVISÃO TIPOGRÁFICA
Equipe Cederj

COORDENAÇÃO DE PRODUÇÃO
Jorge Moura

PROGRAMAÇÃO VISUAL
Marcelo Freitas

ILUSTRAÇÃO
Equipe Cederj

CAPA
Eduardo Bordoni
Fábio Muniz

PRODUÇÃO GRÁFICA
Fábio Rapello Alencar

P784c

Pombo Júnior, Dinamérico P.
Cálculo II. v.1 / Dinamérico P. Pombo Júnior -- 3.ed.-- Rio de Janeiro : Fundação CECIERJ, 2009.
128p.; 21 x 29,7 cm.

ISBN: 85-7648-045-X

1. Cálculo. 2. Técnicas de integração. 3. Cálculo integral. I. Gusmão, Paulo Henrique C. II. Título.

CDD: 515.43

2009/2

Referências Bibliográficas e catalogação na fonte, de acordo com as normas da ABNT.

Governo do Estado do Rio de Janeiro

Governador
Sérgio Cabral Filho

Secretário de Estado de Ciência e Tecnologia
Alexandre Cardoso

Universidades Consorciadas

UENF - UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO
Reitor: Almy Junior Cordeiro de Carvalho

UERJ - UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Ricardo Vieiralves

UFF - UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
Reitor: Roberto de Souza Salles

UFRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Aloísio Teixeira

UFRRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Ricardo Motta Miranda

UNIRIO - UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
Reitora: Malvina Tania Tuttman

Cálculo II | Volume 1

SUMÁRIO

Módulo 1

A Integral Definida

O principal objetivo deste módulo é o estudo da integral definida de funções reais definidas em intervalos fechados e limitados, com ênfase no caso em que as funções consideradas são contínuas. O resultado central aqui apresentado é o Teorema Fundamental do Cálculo para funções contínuas, o qual permite a obtenção da integral definida de certas funções de maneira automática. Enfatizamos também como a integral definida é uma ferramenta importante para o cálculo de áreas de regiões planas.

Usamos a integral definida para introduzir, de maneira rigorosa, a função logarítmica, cujas propriedades básicas são discutidas detalhadamente. Finalmente, definimos a função exponencial como a inversa da função logarítmica e discutimos detalhadamente as suas propriedades básicas.

Aula 1 – A integral definida. Motivação.

Referências: Aulas 1 e 2 de Cálculo I.

Objetivos

Compreender um argumento, de caráter geométrico, que permitirá calcular a área de certas regiões planas.

Consideremos uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$ e tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Vamos discutir a seguinte pergunta:

Como calcular a área da região R compreendida entre o gráfico de f, o eixo das abscissas e as retas $x = a$ e $x = b$? (Ver a Figura 1.1).

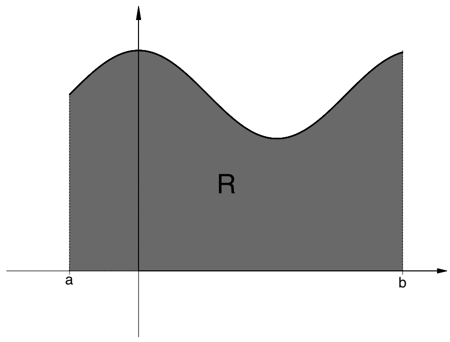

Figura 1.1

Por exemplo, se $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ é definida por $f(x) = 1$ para todo $x \in [0, 2]$, então os nossos conhecimentos de Geometria Plana nos dizem que a área da região compreendida entre o gráfico de f, o eixo das abscissas e as retas $x = 0$ e $x = 2$ é 2 (ver a Figura 1.2).

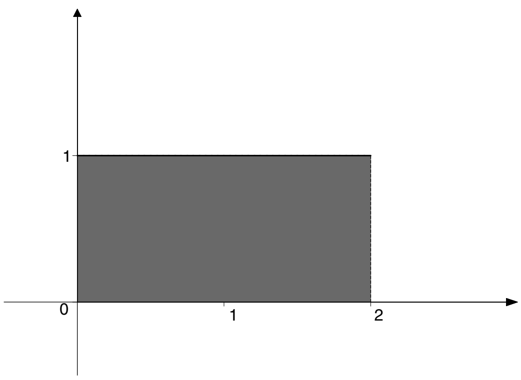

Figura 1.2

Os nossos conhecimentos de Geometria Plana também nos garantem que se $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ é definida por $f(x) = |x|$ para todo $x \in [-1, 1]$, então a área da região compreendida entre o gráfico de f, o eixo das abscissas e as retas $x = -1$ e $x = 1$ é 1 (ver a Figura 1.3).

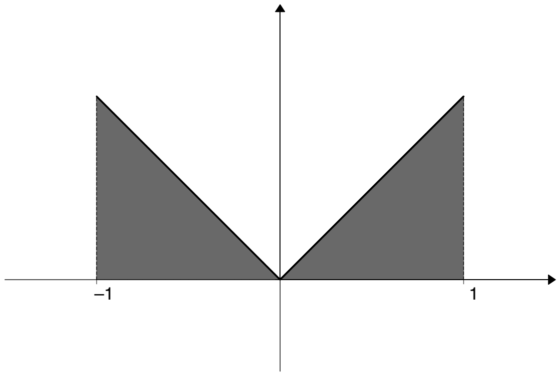

Figura 1.3

No entanto, a Geometria Plana é insuficiente para responder a nossa pergunta no caso geral. Por exemplo, seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ para todo $x \in [0,1]$ e consideremos a região compreendida entre o gráfico de f, o eixo das abscissas e a reta $x = 1$ (ver a Figura 1.4).

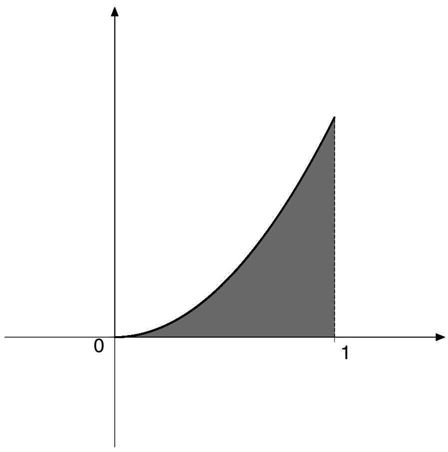

Figura 1.4

Não há, na Geometria Plana, ferramenta que nos permita calcular a área da região indicada. Para tentar atacar o problema, vamos usar o procedimento que passaremos a descrever a partir de agora.

Para cada inteiro $n \geq 1$, dividamos o intervalo $[0,1]$ em n subintervalos iguais, obtendo assim os intervalos $\left[0, \frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \ldots, \left[\frac{n-2}{n}, \frac{n-1}{n}\right]$ e $\left[\frac{n-1}{n}, 1\right]$, cada um deles possuindo comprimento $\frac{1}{n}$. Observemos que se $n = 2$ teríamos os intervalos $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ e $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, se $n = 3$ teríamos os intervalos $\left[0, \frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ e $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$, se $n = 4$ teríamos os intervalos $\left[0, \frac{1}{4}\right]$, $\left[\frac{1}{4}, \frac{2}{4}\right]$, $\left[\frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right]$ e $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$, e assim por diante.

Para cada inteiro $n \geq 1$, vamos definir três números, T_n, U_n e V_n, da seguinte forma:

$$T_n = \frac{f(0)}{n} + \frac{f\left(\frac{1}{n}\right)}{n} + \cdots + \frac{f\left(\frac{n-1}{n}\right)}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{f\left(\frac{k-1}{n}\right)}{n},$$

$$U_n = \frac{f\left(\frac{1}{n}\right)}{n} + \frac{f\left(\frac{2}{n}\right)}{n} + \cdots + \frac{f(1)}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{f\left(\frac{k}{n}\right)}{n}$$

e

$$V_n = \frac{f(t_1)}{n} + \frac{f(t_2)}{n} + \cdots + \frac{f(t_{n-1})}{n} + \frac{f(t_n)}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(t_k)}{n},$$

onde $t_1 \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$, $t_2 \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$, $\ldots$, $t_{n-1} \in \left[\frac{n-2}{n}, \frac{n-1}{n}\right]$ e $t_n \in \left[\frac{n-1}{n}, 1\right]$ são tomados de maneira arbitrária.

Antes de prosseguir, observemos que os números T_n, U_n e V_n têm um significado geométrico bastante simples. De fato, para cada $k = 1, \ldots, n$, o número $\dfrac{f\left(\frac{k-1}{n}\right)}{n}$ representa a área do retângulo de base $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ e altura $f\left(\frac{k-1}{n}\right)$, o número $\dfrac{f\left(\frac{k}{n}\right)}{n}$ representa a área do retângulo de base $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ e altura $f\left(\frac{k}{n}\right)$ e o número $\dfrac{f(t_k)}{n}$ representa a área do retângulo de base $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ e altura $f(t_k)$. Assim, cada um dos números T_n, U_n e V_n representa a soma das áreas dos retângulos que acabamos de mencionar. Por exemplo, os números T_4, U_4 e V_4 representam as áreas das regiões hachuradas nas Figuras 1.5a, 1.5b e 1.5c, respectivamente, enquanto os números T_8, U_8 e V_8 representam as áreas das regiões hachuradas nas Figuras 1.6a, 1.6b e 1.6c, respectivamente. É fácil observar que T_8, U_8 e V_8 são uma melhor aproximação para o valor da área procurada do que T_4, U_4 e V_4. Veremos, a seguir, que esta afirmação é menos ingênua do que possa parecer.

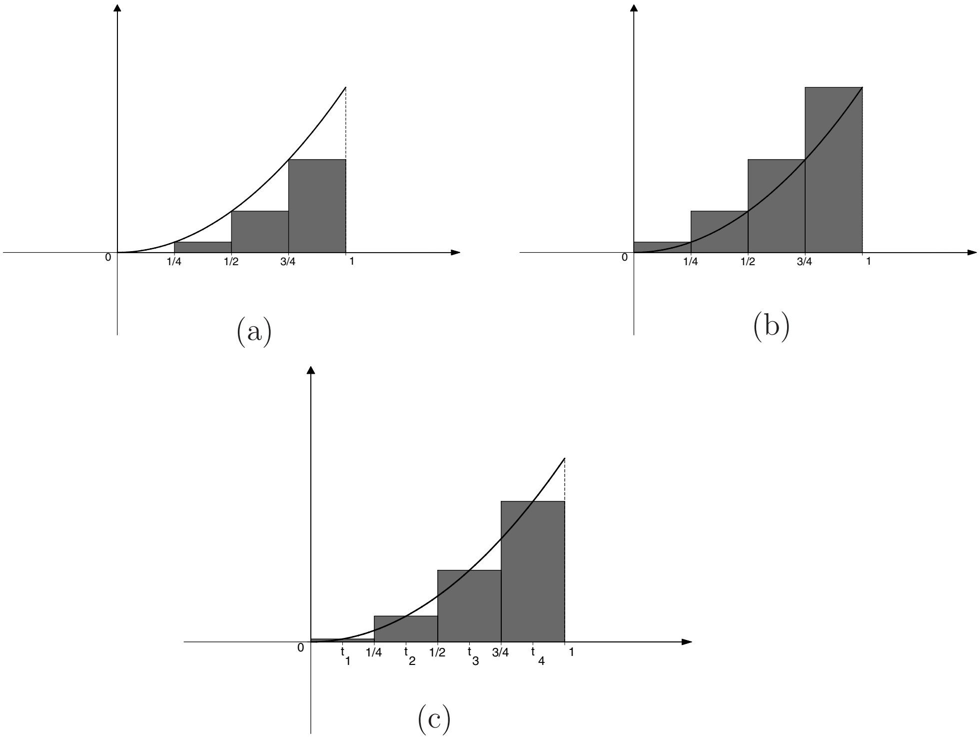

Figura 1.5

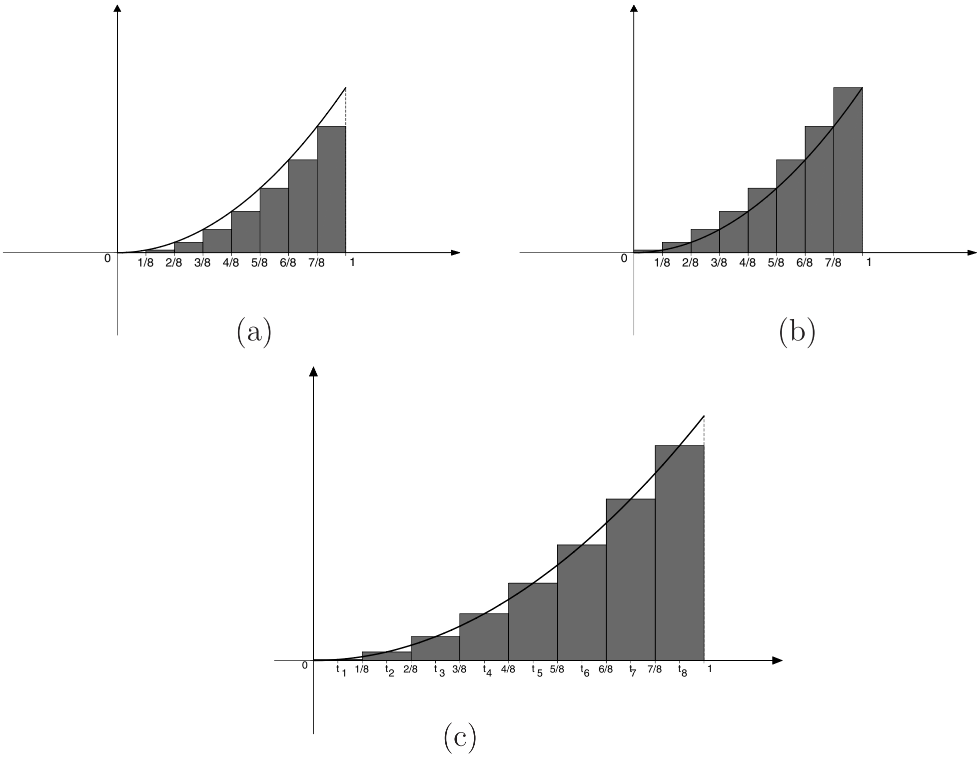

Figura 1.6

Notemos que, como $t_k \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ para $k = 1, \ldots, n$ e como f é crescente, então

$$f\left(\frac{k-1}{n}\right) \leq f(t_k) \leq f\left(\frac{k}{n}\right)$$

para $k = 1, \ldots, n$. Conseqüentemente,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{f\left(\frac{k-1}{n}\right)}{n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{f(t_k)}{n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{f\left(\frac{k}{n}\right)}{n},$$

isto é,

$$T_n \leq V_n \leq U_n.$$

Notemos ainda que, para cada inteiro $n \geq 1$,

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{f\left(\frac{k-1}{n}\right)}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)^2}{n^3} = \frac{1}{n^3}\left(\sum_{k=1}^{n} (k-1)^2\right)$$

e

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{f\left(\frac{k}{n}\right)}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3} = \frac{1}{n^3}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right).$$

Façamos agora um parênteses para provar que

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

para todo inteiro $n \geq 1$.

Para isto, vamos usar o princípio de indução finita. É claro que a afirmação acima é válida para $n = 1$. Seja m um inteiro positivo e admitamos a afirmação verdadeira para m, ou seja, suponhamos que

$$1^2 + 2^2 + \cdots + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$

Então

$$
\begin{aligned}
1^2+2^2+\cdots+m^2+(m+1)^2 &= \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}+(m+1)^2 = \\
&= (m+1)\left(\frac{m(2m+1)}{6}+(m+1)\right) = \\
&= (m+1)\left(\frac{2m^2+m+6m+6}{6}\right) = \\
&= (m+1)\left(\frac{2m^2+7m+6}{6}\right) = \\
&= (m+1)\left(\frac{(m+2)(2m+3)}{6}\right) = \\
&= \frac{(m+1)\left((m+1)+1\right)\left(2(m+1)+1\right)}{6}.
\end{aligned}
$$

Isto mostra que a afirmação é válida para $m+1$. Pelo princípio de indução finita a nossa afirmação é válida para todo inteiro $n \geq 1$.

Em vista do que acabamos de provar, segue que

$$
\begin{aligned}
T_n = \frac{1}{n^3}\left(\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2\right) &= \frac{1}{n^3}\left(1^2+\cdots+(n-1)^2\right) = \\
&= \frac{(n-1)((n-1)+1)(2(n-1)+1)}{6n^3} = \\
&= \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3} = \\
&= \frac{2n^3-3n^2+n}{6n^3}
\end{aligned}
$$

e

$$U_n = \frac{1}{n^3}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}$$

para todo inteiro $n \geq 1$. Logo,

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^3-3n^2+n}{6n^3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

E, como $T_n \leq V_n \leq U_n$ para todo $n \geq 1$, podemos também afirmar que

$$\lim_{n\to\infty} V_n = \frac{1}{3}.$$

Em resumo, acabamos de mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} V_n = \frac{1}{3}.$$

Isto significa que, para n suficientemente grande, os números T_n, U_n e V_n estão bem próximos de $\frac{1}{3}$. Ou, em outras palavras, se dividirmos o intervalo $[0,1]$ em subintervalos de comprimento $\frac{1}{n}$ bem pequeno, as somas das áreas dos retângulos obtidos das três maneiras mencionadas anteriormente, que são precisamente os números T_n, U_n e V_n, estarão bem próximas de $\frac{1}{3}$. Seria natural admitir que a área procurada valesse $\frac{1}{3}$. Na próxima aula veremos que é este precisamente o caso e que, a bem da verdade, o argumento utilizado se aplica a qualquer função contínua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$.

Finalmente, cabe mencionar que nesta aula também tivemos a oportunidade de preparar o terreno para introduzir a noção de integral definida, a ser estudada a partir da próxima aula.

Resumo

Nesta aula você foi apresentado a um argumento que permitirá calcular a área de certas regiões planas.

Exercícios

1. Mostre, por indução, que

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}$$

para todo inteiro $n \geq 1$.

2. Seja $f(x) = x^3$ para todo $x \in [0,1]$ e considere as seqüências (T_n), (U_n) e (V_n), onde

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{f\left(\frac{k-1}{n}\right)}{n}\ , \quad U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{f\left(\frac{k}{n}\right)}{n} \ \text{ e } \ V_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(t_k)}{n}$$

$\left(t_1 \in \left[0, \frac{1}{n}\right], t_2 \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \ldots, t_{n-1} \in \left[\frac{n-2}{n}, \frac{n-1}{n}\right] \text{ e } t_n \in \left[\frac{n-1}{n}, 1\right]\right)$.

Mostre que

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} V_n = \frac{1}{4}.$$

Sugestão: Raciocine como fizemos para a função $f(x) = x^2$.

Auto-avaliação

Nesta aula discutimos a idéia na qual repousa a noção de integral definida. Como esta noção desempenha um papel central em tudo o que veremos a seguir, só passe para a próxima aula após fazer o segundo exercício proposto.

Aula 2 – A integral definida.

Referências: Aulas 2 de Cálculo I e 1 de Cálculo II.

Objetivos

- *Compreender a noção de integral definida.*
- *Estudar algumas propriedades da integral definida.*

Nesta aula, apoiados no germe lançado na aula passada, vamos introduzir a noção de integral definida de uma função real cujo domínio é um intervalo fechado e limitado e cuja imagem é um conjunto limitado.

Inicialmente, lembremos que um subconjunto não vazio $T \subset \mathbb{R}$ é *limitado* quando existem $m, M \in \mathbb{R}$ (não necessariamente em T) tais que $m \leq t \leq M$ para todo $t \in T$.

O teorema de Weierstrass, visto na aula 7 de Cálculo I, nos garante que se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a,b]$, então sua imagem $f([a,b]) = \{f(x);\ x \in [a,b]\}$ é um conjunto limitado.

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), notável matemático alemão, professor em Göttingen, foi uma das figuras centrais da Matemática no século XIX. Riemann foi um dos fundadores da Teoria das Funções Analíticas, mas também fez importantes contribuições à Geometria, à Teoria dos Números e à Física Matemática. Ele formulou a *hipótese de Riemann*, conjectura a respeito da função zeta que continua em aberto até hoje e que, se provada, daria informações importantes sobre a distribuição dos números primos.

Definição 2.1 Suponhamos $a < b$ e seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $f([a,b])$ é um conjunto limitado. Para cada inteiro $n \geq 1$, consideremos os pontos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-2} < x_{n-1} < x_n = b$ tais que $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$ para $k = 1, \ldots, n$ e tomemos arbitrariamente pontos $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ e t_n tais que $t_1 \in [x_0, x_1]$, $t_2 \in [x_1, x_2]$, $\ldots$, $t_{n-1} \in [x_{n-2}, x_{n-1}]$ e $t_n \in [x_{n-1}, x_n]$. Consideremos então a soma

$$\begin{aligned} S_n &= f(t_1)(x_1 - x_0) + f(t_2)(x_2 - x_1) + \cdots + \\ &+ \cdots + f(t_{n-1})(x_{n-1} - x_{n-2}) + f(t_n)(x_n - x_{n-1}) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\right), \end{aligned}$$

usualmente conhecida como uma *soma de Riemann* de f em $[a,b]$.

Notemos que, se $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$, então S_n representa a soma das áreas de n retângulos (o primeiro de base $[x_0, x_1]$ e altura $f(t_1)$, o segundo de base $[x_1, x_2]$ e altura $f(t_2)$, $\ldots$, o penúltimo de base $[x_{n-2}, x_{n-1}]$ e altura $f(t_{n-1})$ e o último de base $[x_{n-1}, x_n]$ e altura $f(t_n)$), como indicamos na Figura 2.1.

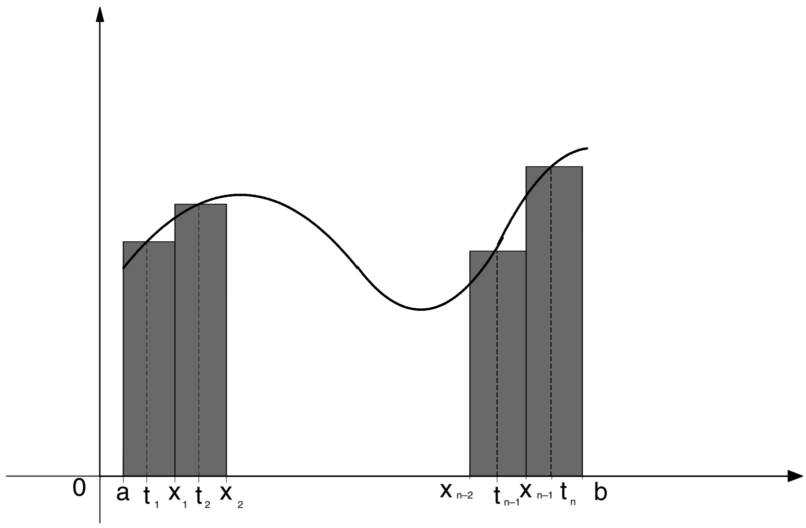

Figura 2.1

Se existir um número real S tal que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, *para toda seqüência* (S_n) *assim construída*, diremos que a função f *é integrável em* $[a, b]$ e escrevemos

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Pode-se provar que S, caso exista, é único.

O número $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ é dito a *integral* (ou a *integral definida)* de f em $[a, b]$. Ele também é conhecido como a *integral de Riemann* de f em $[a, b]$.

As notações $\int_a^b f(t)dt$, $\int_a^b f(s)ds$, $\int_a^b f(u)du$, ... são também usadas para representar a integral de f em $[a, b]$.

Se $a > b$, definimos $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$. Definimos, ainda, $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$.

Na aula anterior consideramos as somas

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{f\left(\frac{k-1}{n}\right)}{n} \quad , \quad U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{f\left(\frac{k}{n}\right)}{n}$$

e $\displaystyle V_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(t_k)}{n}$ as quais, como é fácil notar, são somas de Riemann da função $f(x) = x^2$ no intervalo $[0, 1]$. Admitindo, por um instante, a integrabilidade de f em $[0, 1]$ (ver o teorema a seguir), teríamos

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} V_n,$$

em vista da Definição 2.1. Por outro lado, vimos na referida aula que os números T_n, U_n e V_n se aproximam da área compreendida entre o gráfico de f, o eixo das abscissas e a reta $x = 1$ à medida que n cresce. Isto motiva a definição a seguir.

Definição 2.2 Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável em $[a,b]$ tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Definimos a *área* da região compreendida entre o gráfico de f, o eixo das abscissas e as retas $x = a$ e $x = b$ como sendo o número $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Por outro lado, se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função integrável em $[a,b]$ e $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a,b]$, definimos a *área* da região compreendida entre o gráfico de f, o eixo das abscissas e as retas $x = a$ e $x = b$ como sendo o número $-\left(\displaystyle\int_a^b f(x)dx\right)$.

Um resultado muito importante, cuja demonstração será vista na disciplina de Análise, é o seguinte

Teorema 2.1
Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a,b]$, então f é integrável em $[a,b]$.

Mais geralmente, é possível provar que se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ possui imagem $f([a,b])$ limitada e é contínua, exceto em um número finito de pontos de $[a,b]$, então f é integrável em $[a,b]$.

Exemplo 2.1

Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ para todo $x \in [0,1]$. Como f é contínua em $[0,1]$, o Teorema 2.1 nos garante que f é integrável em $[0,1]$. Logo, pela Definição 2.1,

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n\to\infty} S_n,$$

para qualquer seqüência (S_n) de somas de Riemann de f em $[0,1]$. Em particular, como $\lim\limits_{n\to\infty} V_n = \frac{1}{3}$, segue que

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

Portanto, a área da região compreendida entre o gráfico de f, o eixo das abscissas e a reta $x = 1$ é $\frac{1}{3}$, respondendo assim à pergunta formulada na aula anterior.

Exemplo 2.2

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = c$ para todo $x \in [a,b]$. Então $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = c(b-a)$.

Notemos que a integrabilidade de f segue imediatamente do Teorema 2.1. Mas, neste caso, ela pode ser provada facilmente, como veremos a seguir.

De fato, para cada inteiro $n \geq 1$, sejam $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-2} < x_{n-1} < x_n = b$ como na Definição 2.1 e $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ para $k = 1, \ldots, n$. Então

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} c\,(x_k - x_{k-1}) = c\left(\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})\right) = \\ &= c\left((x_1 - a) + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_{n-1} - x_{n-2}) + (b - x_{n-1})\right) = \\ &= c(b-a). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = c(b-a).$$

Isto mostra que f é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b c\,dx = c(b-a).$$

No caso em que $c > 0$, $c(b-a)$ é precisamente a área do retângulo de lado $[a, b]$ e altura c, que coincide com a área da região compreendida entre o gráfico de f, o eixo das abscissas e as retas $x = a$ e $x = b$ (ver a Figura 2.2).

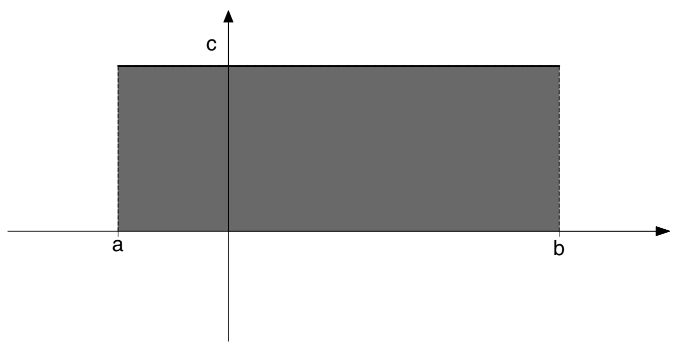

Figura 2.2

Vejamos, agora, um exemplo de uma função que não é integrável.

Exemplo 2.3

Seja $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0$ se $x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ e $f(x) = 1$ se $x \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap [0,1]$. Mostremos que f não é integrável em $[0,1]$.

Com efeito, para cada inteiro $n \geq 1$, sejam $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-2} < x_{n-1} < x_n = 1$ tais que $x_k - x_{k-1} = \frac{1}{n}$ para $k = 1, \ldots, n$ e tomemos pontos $t_k, t_k{}' \in [x_{k-1}, x_k]$ tais que $t_k \in \mathbb{Q} \cap [x_{k-1}, x_k]$ e $t_k{}' \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap [x_{k-1}, x_k]$ para $k = 1, \ldots, n$ (aqui estamos usando o fato importante segundo o qual entre dois números reais há sempre um número racional e um número irracional). Como $f(t_k) = 0$ e $f(t_k{}') = 1$ para $k = 1, \ldots, n$, obtemos

$$S_n = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\right) = 0$$

e

$$S_n' = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} f(t_k')\right) = 1.$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} S_n{}' = 1.$$

Assim, f não é integrável em $[0,1]$.

Na proposição a seguir veremos algumas propriedades elementares da integral definida.

Proposição 2.1

Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ duas funções integráveis em $[a,b]$ e α um número real. Valem as seguintes propriedades:

(a) se $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$, então $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0$;

(b) a função αf é integrável em $[a,b]$ e

$$\int_a^b (\alpha f)(x)dx = \int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx;$$

c) a função $f + g$ é integrável em $[a,b]$ e

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Demonstração: Provaremos (a) e (b).

Inicialmente, provemos (a). Com efeito, para cada inteiro $n \geq 1$, sejam $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-2} < x_{n-1} < x_n = b$ como na Definição 2.1 e $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ para $k = 1, \ldots, n$. Então

$$S_n = \frac{b-a}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\right) \geq 0,$$

pois $f(t_k) \geq 0$ para $k = 1, \ldots, n$. Portanto, pelo Exercício 2(a), da aula 11 de Cálculo I, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} S_n \geq 0, \quad \text{ou seja,} \quad \int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Agora, provemos (b). Com efeito, para cada inteiro $n \geq 1$, sejam $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-2} < x_{n-1} < x_n = b$ como na Definição 2.1 e $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ para $k = 1, \ldots, n$. Definamos

$$S_n{}' = \frac{b-a}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} (\alpha f)(t_k)\right).$$

Então

$$S_n{}' = \frac{b-a}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha f(t_k)\right) = \alpha\left(\frac{b-a}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\right)\right) = \alpha S_n,$$

onde $S_n = \dfrac{b-a}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\right)$. Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} S_n{}' = \alpha\left(\lim_{n\to\infty} S_n\right) = \alpha \int_a^b f(x)dx.$$

Isto mostra que αf é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b (\alpha f)(x)dx = \int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx.$$

Façamos, agora, um comentário a respeito da noção de área. Para uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrável e tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, definimos a área da região compreendida entre o gráfico de f, o eixo das abscissas e as retas $x = a$ e $x = b$ como sendo o número $\int_a^b f(x)dx$. Acabamos de ver, na Proposição 2.1(a), que, sob as condições mencionadas, $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Assim, a referida área é um número maior ou igual a zero, como seria de se esperar.

Por outro lado, para uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrável e tal que $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b]$, definimos a área da região compreendida entre o gráfico de f, o eixo das abscissas e as retas $x = a$ e $x = b$ como sendo $-\left(\int_a^b f(x)dx\right)$. Mas, pela Proposição 2.1(b), $-f$ é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b (-f)(x)dx = -\left(\int_a^b f(x)dx\right).$$

Como $(-f)(x) = -f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, a Proposição 2.1(a) nos garante que

$$\int_a^b (-f)(x)dx \geq 0.$$

Assim, a referida área é um número maior ou igual a zero, como seria de se esperar. Como conseqüência imediata do Exemplo 2.2 e da Proposição 2.1(c), obtemos:

Exemplo 2.4

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável em $[a, b]$ e $c \in \mathbb{R}$, então a função $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(x) + c$ para todo $x \in [a, b]$, é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) + c)dx = \int_a^b f(x)dx + c(b - a).$$

Exemplo 2.5

Se $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ são integráveis em $[a, b]$ e $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

De fato, pela Proposição 2.1(b),(c), $f - g = f + (-g)$ é integrável em $[a, b]$. E, como $(f - g)(x) = f(x) - g(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, segue da Proposição 2.1(a) que

$$\int_a^b (f - g)(x)dx \geq 0.$$

Mas,

$$0 \leq \int_a^b (f - g)(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx.$$

Portanto,

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

Na próxima proposição enunciaremos um resultado que não será demonstrado neste curso.

Proposição 2.2

Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável em $[a,b]$ e $a < u < b$. Então $f|_{[a,u]}$ (a restrição de f a $[a,u]$) é integrável em $[a,u]$, $f|_{[u,b]}$ (a restrição de f a $[u,b]$) é integrável em $[u,b]$ e

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^u f(x)dx + \int_u^b f(x)dx.$$

Exemplo 2.6

Definamos $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ por $f(x) = x^2 + 1$ se $x \in [0,1]$ e $f(x) = 2$ se $x \in [1,2]$ (o gráfico de f é esboçado na Figura 2.3). Calculemos $\int_0^2 f(x)dx$.

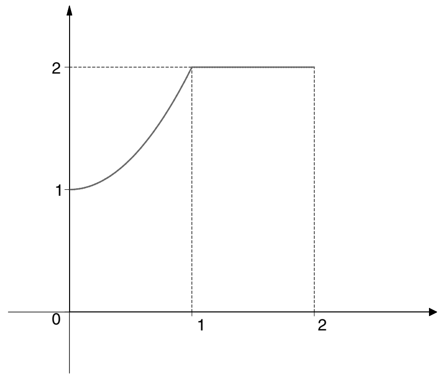

Figura 2.3

De fato, como f é contínua em $[0,2]$, então f é integrável em $[0,2]$. Além disso, pela Proposição 2.2,

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx.$$

Mas, pelo que vimos nesta aula,

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (x^2+1)dx = \int_0^1 x^2dx + 1(1-0) = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

e

$$\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 2\,dx = 2(2-1) = 2.$$

Portanto,

$$\int_0^2 f(x)dx = \frac{4}{3} + 2 = \frac{10}{3}.$$

Resumo

Nesta aula você foi apresentado à noção de integral definida e viu algumas propriedades elementares da integral definida. O fato importante segundo o qual toda função contínua de $[a,b]$ em $\mathbb{R}$ é integrável em $[a,b]$ foi também mencionado.

Exercícios

1. Calcule $\displaystyle\int_{-1}^{1} |x| dx$.

2. Seja $f(x) = -x^2$ para todo $x \in [0,1]$. Calcule a área da região compreendida entre o gráfico de f, o eixo das abscissas e a reta $x = 1$.

3. (a) Mostre, por indução, que $1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ para todo inteiro $n \geq 1$.

   (b) Mostre que $\displaystyle\int_a^b x dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$.

   Sugestão: Você já sabe que a função $f(x) = x$ é integrável em $[a,b]$, pois ela é contínua em $[a,b]$. Para cada inteiro $n \geq 1$, considere a soma de Riemann $S_n = \dfrac{b-a}{n}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)\right)$

   e mostre que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$.

4. Raciocine, como na aula 1, para mostrar que

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}.$$

5. Calcule $\displaystyle\int_a^b (x^2 + x + 1)dx$.

6. Seja $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -x^2$ se $x \in [-1,0]$ e $f(x) = x^2$ se $x \in [0,1]$. Mostre que $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$.

7. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável tal que $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a,b]$. Mostre que

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Auto-avaliação

Nos exercícios desta aula você teve a oportunidade de fixar a noção de integral definida e algumas de suas propriedades. Caso não tenha conseguido fazer todos os exercícios, releia a aula e depois tente novamente. Caso persista alguma dúvida, consulte o tutor no pólo.

Aula 3 – O Teorema Fundamental do Cálculo.

Referências: Aulas 6, 7, 9, 10, 12 de Cálculo I, e 2 de Cálculo II.

Objetivo

Iniciar o estudo do Teorema Fundamental do Cálculo, que fornece uma maneira simples de se calcular a integral definida de funções contínuas definidas em intervalos fechados e limitados.

Na aula anterior você aprendeu que toda função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável. Entretanto, tendo em vista a complexidade da definição, calcular o número $\int_a^b f(x)dx$ pode não ser simples, como já ficou claro nas duas aulas anteriores. Nesta aula iniciaremos o estudo de um teorema importante que, em certos casos, nos levará ao número $\int_a^b f(x)dx$ de maneira automática: o Teorema Fundamental do Cálculo.

Comecemos enunciando uma proposição cuja demonstração será vista na disciplina de Análise.

Proposição 3.1

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável em $[a, b]$, então a função $|f| : [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável em $[a, b]$. Além disso,

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f|(x)dx = \int_a^b |f(x)|dx.$$

Lembremos que, por definição, $|f|(x) = |f(x)|$ para todo $x \in [a, b]$.

Exemplo 3.1

A recíproca da Proposição 3.1 não é verdadeira em geral, ou seja, podemos ter $|f|$ integrável sem que f seja integrável.

Realmente, consideremos a função $f : [0.1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -1$ se $x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ e $f(x) = 1$ se $x \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$. Raciocinando como no Exemplo 2.3, concluímos que f não é integrável em $[0, 1]$ (faça os detalhes). Entretanto, como $|f|(x) = |f(x)| = 1$ para todo $x \in [0, 1]$, então a função $|f|$ é integrável em $[0, 1]$.

Sejam $a < b$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$. Para cada $x \in [a, b]$ definamos

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Notemos que, como f é contínua em $[a,b]$, então f é contínua em $[a,x]$, logo integrável em $[a,x]$ para todo $x \in [a,b]$; assim, faz sentido considerar a função F.

Notemos ainda que, se $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$, então $F(x)$ representa a área da região compreendida entre o gráfico de f, o eixo das abscissas e as retas $t = a$ e $t = x$; ver a Figura 3.1.

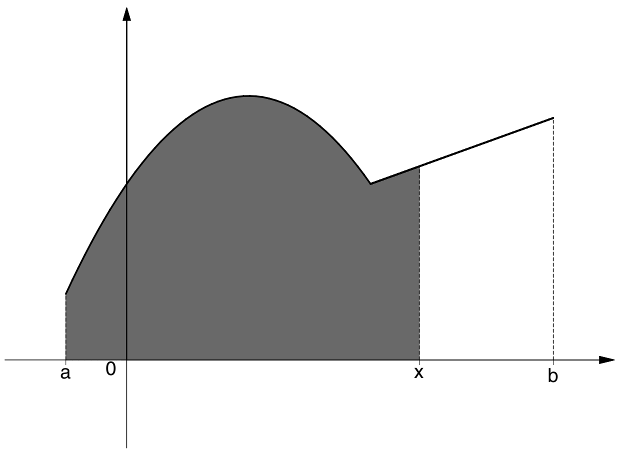

Figura 3.1

Teorema 3.1

[1ª forma do Teorema Fundamental do Cálculo] Se $a < b$ e $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a,b]$, então F é derivável em $[a,b]$ e

$$F'(x) = f(x)$$

para todo $x \in [a,b]$.

Demonstração: Fixemos $x \in (a,b)$. Mostremos que F é derivável em x e $F'(x) = f(x)$. Os casos em que $x = a$ ou $x = b$ são tratados de maneira análoga. Devemos provar que

$$\lim_{t\to x} \frac{F(t) - F(x)}{t - x} = f(x),$$

o que equivale a provar que

$$\lim_{t\to x^-} \frac{F(t) - F(x)}{t - x} = f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{t\to x^+} \frac{F(t) - F(x)}{t - x} = f(x).$$

Provaremos que

$$\lim_{t\to x^+} \frac{F(t) - F(x)}{t - x} = f(x),$$

sendo o caso do limite lateral à esquerda tratado de maneira análoga.

Tomemos então uma seqüência (t_n) arbitrária tal que $x < t_n \leq b$ para todo n e $\lim_{n\to\infty} t_n = x$. Verifiquemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(t_n) - F(x)}{t_n - x} = f(x).$$

Com efeito, segue da Proposição 2.2 que

$$F(t_n) - F(x) = \int_a^{t_n} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{t_n} f(t)dt.$$

Como, pelo Exemplo 2.2, $\int_x^{t_n} f(x)dt = (t_n - x)f(x)$ (como x está fixado, $f(x)$ faz o papel de uma constante), obtemos

$$\frac{F(t_n) - F(x)}{t_n - x} - f(x) = \frac{\int_x^{t_n} f(t)dt}{t_n - x} - \frac{\int_x^{t_n} f(x)dt}{t_n - x}.$$

Por outro lado, pela Proposição 2.1(c),

$$\frac{\int_x^{t_n} f(t)dt}{t_n - x} - \frac{\int_x^{t_n} f(x)dt}{t_n - x} = \frac{\int_x^{t_n} (f(t) - f(x))dt}{t_n - x}.$$

Logo,

$$\frac{F(t_n) - F(x)}{t_n - x} - f(x) = \frac{\int_x^{t_n} (f(t) - f(x))dt}{t_n - x}.$$

Assim, pela Proposição 3.1, obtemos

$$\left| \frac{F(t_n) - F(x)}{t_n - x} - f(x) \right| = \frac{\left| \int_x^{t_n} (f(t) - f(x))dt \right|}{t_n - x} \leq \frac{\int_x^{t_n} |f(t) - f(x)|dt}{t_n - x}.$$

Pelo teorema de Weierstrass, visto na aula 7 de Cálculo I, para cada n existe
$z_n \in [x, t_n]$ tal que

$$|f(t) - f(x)| \leq |f(z_n) - f(x)|$$

para todo $t \in [x, t_n]$ (estamos aplicando o teorema de Weierstrass à função contínua $t \in [x, t_n] \mapsto |f(t) - f(x)| \in \mathbb{R}$).

Pelo Exemplo 2.5, segue que

$$\int_x^{t_n} |f(t) - f(x)|dt \leq \int_x^{t_n} |f(z_n) - f(x)|dt = (t_n - x)|f(z_n) - f(x)|.$$

Conseqüentemente, temos

$$\left| \frac{F(t_n) - F(x)}{t_n - x} - f(x) \right| \leq |f(z_n) - f(x)|$$

para todo n.

Finalmente, como f é contínua em x e $\lim_{n\to\infty} z_n = x$ (pois $x \leq z_n \leq t_n$ e $\lim_{n\to\infty} t_n = x$), temos que $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(x)$, isto é, $\lim_{n\to\infty}(f(z_n) - f(x)) = 0$, isto é, $\lim_{n\to\infty} |f(z_n) - f(x)| = 0$. Portanto, em vista da desigualdade acima,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(t_n) - F(x)}{t_n - x} = f(x).$$

Como (t_n) é arbitrária, acabamos de mostrar que

$$\lim_{t\to x^+} \frac{F(t) - F(x)}{t - x} = f(x),$$

concluindo assim a demonstração do teorema.

Sejam $a < b$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$. Definamos

$$F_1(x) = \int_x^b f(t)dt$$

para todo $x \in [a, b]$. Pela Proposição 2.2, temos

$$\int_a^x f(t)dt + \int_x^b f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

para todo $x \in [a, b]$, isto é,

$$F_1(x) = F(b) - F(x)$$

para todo $x \in [a, b]$. Portanto, pelo Teorema 3.1, F_1 é derivável em $[a, b]$ e

$$F_1{}'(x) = -f(x)$$

para todo $x \in [a, b]$.

Exemplo 3.2

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua em $\mathbb{R}$ e seja a um número real arbitrário. Definamos $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Afirmamos que F é derivável em $\mathbb{R}$ e $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

De fato, seja $b > a$ arbitrário. Como f é contínua em $[a, b]$, o Teorema 3.1 nos garante que F é derivável em $[a, b]$ e $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

Por outro lado, seja $c < a$ arbitrário. Então, para todo $x \in [c, a]$, temos

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt = -\int_x^a f(t)dt = -F_1(x),$$

onde

$$F_1(x) = \int_x^a f(t)dt$$

para todo $x \in [c, a]$. Como vimos logo após o Teorema 3.1, F_1 é derivável em $[c, a]$ e ${F_1}'(x) = -f(x)$ para todo $x \in [c, a]$. Conseqüentemente, F é derivável em $[c, a]$ e $F'(x) = -{F_1}'(x) = -(-f(x)) = f(x)$ para todo $x \in [c, a]$.

Em vista do que acabamos de observar segue que, para quaisquer $c, b \in \mathbb{R}$, com $c < a < b$, a função F é derivável em (c, b) e $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in (c, b)$. Finalmente, como todo $x \in \mathbb{R}$ pertence a algum intervalo (c, b) (com $c < a < b$), concluímos que F é derivável em $\mathbb{R}$ e $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Como conseqüência imediata do Exemplo 3.2, obtemos:

Exemplo 3.3

A função $F(x) = \displaystyle\int_0^x \operatorname{sen}(t^2)\,dt$ é derivável em $\mathbb{R}$ e $F'(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, $F'\big(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\big) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$.

O próximo exemplo também decorre do Exemplo 3.2, apesar de exigir um raciocínio adicional.

Exemplo 3.4

A função $H(x) = \displaystyle\int_0^{x^3} \cos t\,dt$ é derivável em $\mathbb{R}$ e $H'(x) = 3x^2\cos(x^3)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

De fato, definamos $h(x) = x^3$ e $F(x) = \displaystyle\int_0^x \cos t\,dt$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Então $F \circ h = H$, pois

$$(F \circ h)(x) = F(h(x)) = F(x^3) = \int_0^{x^3} \cos t\,dt = H(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Como F e h são deriváveis em $\mathbb{R}$, a regra da cadeia nos garante que H é derivável em $\mathbb{R}$ e

$$H'(x) = (F \circ h)'(x) = F'(h(x))h'(x) = 3x^2\cos(x^3)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Resumo

Nesta aula você começou a estudar o Teorema Fundamental do Cálculo, um dos pilares do nosso curso.

Exercícios

1. Defina $G(x) = \displaystyle\int_0^{\operatorname{sen} x} t^n dt$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde n é um número inteiro positivo. Mostre que G é derivável em $\mathbb{R}$ e $G'(x) = (\cos x)(\operatorname{sen}^n x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

2. Defina $G(x) = \displaystyle\int_0^{x^3} \sqrt{t}\, dt$ para todo $x \in [0, +\infty)$. Mostre que G é derivável em $[0, +\infty)$ e $G'(x) = 3x^2\sqrt{x^3}$ para todo $x \in [0, +\infty)$.

3. Defina $G(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{x^3} \cos t\, dt$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que G é derivável em $\mathbb{R}$ e $G'(x) = 3x^2 \cos(x^3) - 2x\cos(x^2)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

   Sugestão: Defina $G_1(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{0} \cos t\, dt$, $G_2(x) = \displaystyle\int_0^{x^3} \cos t\, dt$ e note que $G(x) = G_2(x) + G_1(x)$.

Auto-avaliação

Os exercícios desta aula visam, essencialmente, fixar a $1^{\underline{a}}$ forma do Teorema Fundamental do Cálculo. Trata-se, portanto, de uma boa oportunidade para assimilá-la. Caso tenha sentido dificuldades ao tentar fazê-los, releia as aulas 7 e 12 de Cálculo I, e depois volte a eles. Se, porventura, persistirem as dúvidas, procure o tutor no pólo.

Aula 4 – O Teorema Fundamental do Cálculo. Continuação.

Referências: Aulas 9, 10, 12, 16, 17 de Cálculo I, 2 e 3 de Cálculo II.

Objetivo

Estudar uma formulação do Teorema Fundamental do Cálculo que é bastante eficaz no que diz respeito ao cálculo de integrais definidas.

Nesta aula usaremos a 1ª forma do Teorema Fundamental do Cálculo para obter a 2ª forma do Teorema Fundamental do Cálculo, esta última uma ferramenta importante para calcularmos integrais definidas, como ficará claro no decorrer da aula.

A 1ª forma do Teorema Fundamental do Cálculo nos garante que se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua, então existe $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivável tal que $F' = f$. O próximo resultado nos fornece uma maneira simples de calcular $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Teorema 4.1
[2ª forma do Teorema Fundamental do Cálculo] Sejam $a < b$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$. Se $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ é derivável em $[a, b]$ e $G' = f$, então

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

Demonstração: Seja $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ $(x \in [a, b])$ como na aula passada. Pelo Teorema 3.1, F é derivável em $[a, b]$ e $F' = f$. Logo, $G - F$ é derivável em $[a, b]$ e

$$(G - F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

para todo $x \in [a, b]$. Pelo Corolário 17.1, a função $G - F$ é constante, isto é, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $G(x) - F(x) = c$ para todo $x \in [a, b]$. Mas, como $F(a) = 0$, segue que $c = G(a)$. Portanto, fazendo $x = b$, obtemos

$$G(b) - G(a) = G(b) - c = F(b) = \int_a^b f(t)dt,$$

concluindo assim a demonstração do teorema.

Observemos que, para aplicar o Teorema 4.1, basta encontrar uma função derivável $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $G'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 4.1

Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, e para todo inteiro $n \geq 1$, temos

$$\int_a^b x^n dx = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

De fato, a função $G(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ tem por derivada a função contínua $f(x) = x^n$. Logo, pelo Teorema 4.1,

$$\int_a^b x^n dx = \int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

Exemplo 4.2

Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, temos

$$\int_a^b \operatorname{sen} x\, dx = \cos a - \cos b.$$

De fato, a função $G(x) = -\cos x$ tem por derivada a função contínua $f(x) = \operatorname{sen} x$. Logo, pelo Teorema 4.1,

$$\int_a^b \operatorname{sen} x\, dx = \int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) = -\cos b - (-\cos a) = \cos a - \cos b.$$

Exemplo 4.3

Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, temos

$$\int_a^b \cos x\, dx = \operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a.$$

De fato, a função $G(x) = \operatorname{sen} x$ tem por derivada a função contínua $f(x) = \cos x$. Logo, pelo Teorema 4.1,

$$\int_a^b \cos x\, dx = \int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) = \operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a.$$

Exemplo 4.4

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\, dx = 1.$$

De fato, consideremos a função contínua $f(x) = \sec^2 x$ $\left(x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right)$. Sendo $G(x) = \operatorname{tg} x$, temos $G'(x) = f(x)$ para todo $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Logo, pelo

Teorema 4.1,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx = G(\frac{\pi}{4}) - G(0) &= tg\tfrac{\pi}{4} - tg0 = \\ && = \frac{\text{sen}\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} - \frac{\text{sen}0}{\cos 0} = \\ && = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1.\end{aligned}$$

Exemplo 4.5

Sejam $0 < a < b$ e n um inteiro, com $n \geq 2$. Calculemos $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{x^n}$.

Com efeito, a função $f(x) = x^{-n}$ é contínua em $[a, b]$. Além disso, sendo $G(x) = \dfrac{x^{-n+1}}{-n+1}$, temos

$$G'(x) = \frac{-n+1}{-n+1} x^{-n+1-1} = x^{-n} = f(x)$$

para todo $x \in [a, b]$. Portanto, pelo Teorema 4.1,

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{dx}{x^n} &= \int_a^b x^{-n}dx = \textstyle\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) = \\ &= \frac{1}{-n+1}\left(b^{-n+1} - a^{-n+1}\right).\end{aligned}$$

Em particular,

$$\begin{aligned}\int_2^4 \frac{dx}{x^4} &= \frac{1}{-4+1}\left(4^{-4+1} - 2^{-4+1}\right) = \\ &= -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4^3} - \frac{1}{2^3}\right) = \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{64}\right) = \frac{7}{192}.\end{aligned}$$

Raciocinando como no exemplo acima, obtemos:

Exemplo 4.6

Sejam $a < b < 0$ e n um inteiro, com $n \geq 2$. Então

$$\int_a^b \frac{dx}{x^n} = \frac{1}{-n+1}\ \left(b^{-n+1} - a^{-n+1}\right).$$

Exemplo 4.7

Sejam $0 \leq a < b$ e n um inteiro, com $n \geq 2$. Calculemos $\displaystyle\int_a^b \sqrt[n]{x}\, dx$.

Com efeito, a função $f(x) = \sqrt[n]{x}$ é contínua em $[a, b]$. Além disso, sendo $G(x) = \dfrac{n}{n+1} \sqrt[n]{x^{n+1}} = \dfrac{n}{n+1}\, x^{\frac{n+1}{n}}$, temos

$$G'(x) = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n}\, x^{\frac{n+1}{n}-1} = x^{\frac{1}{n}} = f(x)$$

para todo $x \in [a, b]$. Portanto, pelo Teorema 4.1,

$$\begin{aligned}\int_a^b \sqrt[n]{x} dx &= \int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a) = \\ &= \frac{n}{n+1}\left(\sqrt[n]{b^{n+1}} - \sqrt[n]{a^{n+1}}\right).\end{aligned}$$

Em particular,

$$\int_1^2 \sqrt[3]{x}\, dx = \frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{16} - 1\right).$$

Exemplo 4.8

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, n um inteiro positivo e p um polinômio arbitrário. Calculemos $\displaystyle\int_a^b p'(x)(p(x))^n dx$.

Com efeito, observemos inicialmente que a função $f(x) = p'(x)(p(x))^n$ é contínua em $\mathbb{R}$ (justifique esta afirmação). Além disso, sendo $G(x) = \dfrac{(p(x))^{n+1}}{n+1}$, então G é derivável em $\mathbb{R}$ e

$$G'(x) = \frac{n+1}{n+1}(p(x))^{n+1-1}p'(x) = p'(x)(p(x))^n = f(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Pelo Teorema 4.1,

$$\begin{aligned}\int_a^b p'(x)(p(x))^n dx &= \int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a) = \\ &= \frac{(p(b))^{n+1}}{n+1} - \frac{(p(a))^{n+1}}{n+1}.\end{aligned}$$

Vamos usar o que acabamos de ver para calcular $\displaystyle\int_0^1 x(x^2+3)^4 dx$. Realmente, fazendo $p(x) = x^2 + 3$, temos $p'(x) = 2x$.

Portanto,

$$\begin{aligned}\int_0^1 x(x^2+3)^4dx &= \int_0^1 \frac{p'(x)}{2}(p(x))^4dx = \frac{1}{2}\int_0^1 p'(x)\,(p(x))^4dx = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{(p(1))^5}{5}-\frac{(p(0))^5}{5}\right) = \\ &= \frac{1}{10}\left(4^5-3^5\right).\end{aligned}$$

Exemplo 4.9

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, p um polinômio arbitrário e calculemos

$$\int_a^b p'(x)\ \cos(p(x))\,dx$$

Com efeito, observemos inicialmente que a função $f(x) = p'(x)\cos(p(x))$ é contínua em $\mathbb{R}$ (justifique esta afirmação). Além disso, sendo $G(x) = \text{sen}\ (p(x))$, a regra da cadeia nos garante que G é derivável em $\mathbb{R}$ e $G'(x) = p'(x)\cos(p(x)) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Pelo Teorema 4.1,

$$\int_a^b p'(x)\cos(p(x))\,dx = \int_a^b f(x)dx = G(b)-G(a) = \text{sen}\ (p(b)) - \text{sen}\ (p(a)).$$

Vamos usar o que acabamos de ver para calcular $\displaystyle\int_0^2 x^2\cos(x^3)dx$. Realmente, fazendo $p(x) = x^3$, temos $p'(x) = 3x^2$.

Portanto,

$$\begin{aligned}\int_0^2 x^2\cos(x^3)dx &= \int_0^2 \frac{p'(x)}{3}\cos(p(x))dx = \frac{1}{3}\int_0^2 p'(x)\cos(p(x))dx = \\ &= \frac{1}{3}(\text{sen}\ (p(2)) - \text{sen}\ (p(0))) = \\ &= \frac{\text{sen}\ 8}{3}.\end{aligned}$$

Exemplo 4.10

Seja $f(x) = \text{sen}\ x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Calculemos a área da região compreendida entre o gráfico de f, o eixo das abscissas e as retas $x = -\frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{\pi}{2}$ (a referida região está hachurada na Figura 4.1).

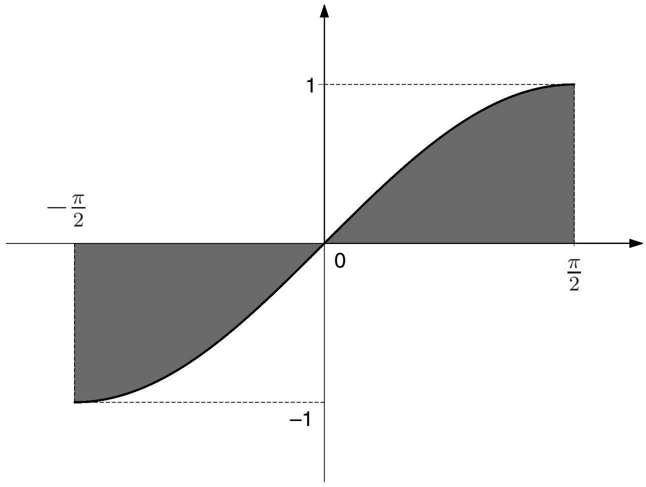

Figura 4.1

É fácil ver que a área em questão é $2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\, dx$. Como, pelo Exemplo 4.2,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\, dx = \cos 0 - \cos\frac{\pi}{2} = 1,$$

a área procurada vale 2.

Por outro lado,

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\, dx = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

mostrando que, neste caso, a área da região em questão e a integral definida $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\, dx$ não coincidem.

Exemplo 4.11

Vamos provar a Proposição 2.1(c) no caso particular em que $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ são contínuas em $[a, b]$.

Com efeito, como f e g são contínuas em $[a, b]$, então $f + g$ é contínua em $[a, b]$. Pelo Teorema 2.1, $f + g$ é integrável em $[a, b]$.

Agora, sejam $G, H : [a, b] \to \mathbb{R}$ duas funções deriváveis em $[a, b]$ tais que $G' = f$ e $H' = g$. Pelo Teorema 4.1,

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) \quad \text{e} \quad \int_a^b g(x)dx = H(b) - H(a).$$

Por outro lado, pela Proposição 10.2, a função $G + H$ é derivável em $[a, b]$ e $(G + H)'(x) = G'(x) + H'(x) = f(x) + g(x) = (f + g)(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Aplicando novamente o Teorema 4.1, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_a^b (f+g)(x)dx &= (G + H)(b) - (G + H)(a) = \\
&= (G(b) + H(b)) - (G(a) + H(a)) = \\
&= (G(b) - G(a)) + (H(b) - H(a)) = \\
&= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx,
\end{aligned}$$

provando o que desejávamos.

Como já observamos, a aplicabilidade do Teorema 4.1 depende de conhecermos explicitamente uma função derivável G tal que $G' = f$ (uma tal função G é dita uma *primitiva* de f). É claro que se G é uma primitiva de f e c é um número real arbitrário , então $G + c$ também é uma primitiva de f.

Na disciplina de Cálculo II você estudará *métodos de integração* que permitem a obtenção de primitivas de certas funções.

Resumo

Nas duas últimas aulas você aprendeu o Teorema Fundamental do Cálculo, um resultado muito importante que desempenhará um papel central em tudo o que veremos a seguir.

Exercícios

1. Calcule as seguintes integrais definidas:

   (a) $\displaystyle\int_{-1}^{2}(x^2+|x|+2)dx$; (b) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(5\,\text{sen}\,x-2\cos x)dx$;

   (c) $\displaystyle\int_{0}^{1}\sqrt{x}dx$; (d) $\displaystyle\int_{-2}^{-1}\left(\frac{1}{x^2}+x^2\right)dx$;

   (e) $\displaystyle\int_{1}^{2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)dx$; (f) $\displaystyle\int_{1}^{2}\left(\frac{1}{x^3}+x^3+\text{sen}\,x\right)dx$;

   (g) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos(3x)dx$; (h) $\displaystyle\int_{a}^{b}\cos(\alpha x)dx\ (\alpha\in\mathbb{R}-\{0\})$;

   (i) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\text{sen}\,(4x)dx$; (j) $\displaystyle\int_{a}^{b}\text{sen}\,(\alpha x)dx\ (\alpha\in\mathbb{R}-\{0\})$;

   (l) $\displaystyle\int_{-1}^{0}\sqrt[3]{x}\,dx$; (m) $\displaystyle\int_{-1}^{0}(\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x})dx$.

   $\big($Sugestão para (h): Se $G(x)=\dfrac{1}{\alpha}\,\text{sen}\,(\alpha x)$, então $G'(x)=\cos(\alpha x)\big)$.

   $\big($Sugestão para (l): Se $G(x)=\dfrac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}$, então $G'(x)=x^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{x}\big)$.

2. Sendo $f(x)=\text{sen}\,(3x)$, calcule a área da região compreendida entre o gráfico de f, o eixo das abscissas e as retas $x=0$ e $x=\dfrac{\pi}{3}$.

3. Sendo $f(x)=\sqrt[5]{x}$, calcule a área da região compreendida entre o gráfico de f, o eixo das abscissas e as retas $x=-1$ e $x=0$.

4. Calcule $\displaystyle\int_{0}^{1}\left(\int_{2}^{3}t^4\,\text{sen}\,x dt\right)dx$.

5. Seja $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ uma função contínua tal que $x^2\le f(x)\le 2x^2+1$ para todo $x\in[0,1]$. Mostre que

$$\frac{1}{3}\le\int_{0}^{1}f(x)dx\le\frac{5}{3}.$$

   Sugestão: Use o Exemplo 2.5.

6. Argumentando como no Exemplo 4.11, prove a Proposição 2.1(b) no caso particular em que f é contínua em $[a,b]$.

7. Sejam I um intervalo não trivial, $f:I\to\mathbb{R}$ e $G_1,G_2:I\to\mathbb{R}$ duas primitivas de f (isto é, G_1 e G_2 são deriváveis em I e ${G_1}'={G_2}'=f$). Prove que existe $c\in\mathbb{R}$ tal que $G_2=G_1+c$.

Auto-avaliação

Nos exercícios desta aula você teve a oportunidade de assimilar o significado do Teorema Fundamental do Cálculo. Trata-se de uma etapa importante do curso. Caso tenha sentido dificuldade nos exercícios, releia a aula e, em seguida, volte aos exercícios. Caso permaneçam dúvidas, procure o tutor no pólo.

Aula 5 – Cálculo de áreas. O teorema do valor médio para integrais.

Referências: Aulas 7 de Cálculo I, 2, 3 e 4 de Cálculo II.

Objetivos

- *Aprender como usar a integral definida para calcular a área de regiões planas.*

- *Aprender o teorema do valor médio para integrais.*

Nesta aula discutiremos uma das aplicações da integral definida, a saber, o cálculo de áreas de regiões planas. Discutiremos, ainda, o teorema do valor médio para integrais.

Consideremos duas funções contínuas $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ tais que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$. O nosso objetivo é calcular a área da região compreendida entre os gráficos de f e g e as retas $x = a$ e $x = b$, região esta hachurada na Figura 5.1.

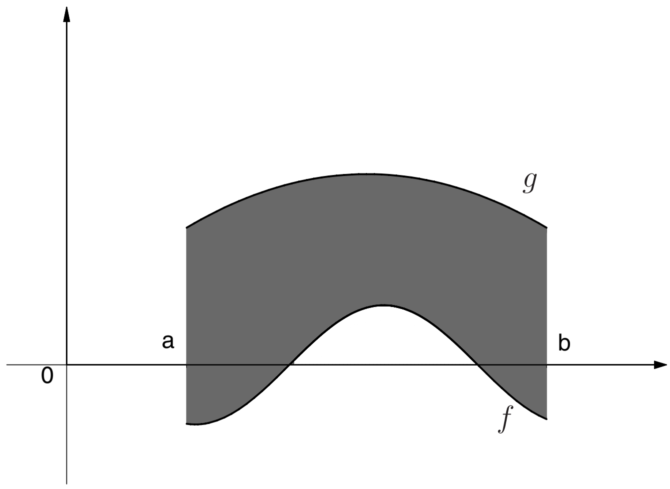

Figura 5.1

Como, pelo teorema de Weierstrass, o conjunto $f([a, b])$ é limitado, podemos encontrar um número real α tal que $f(x) + \alpha \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Então temos $0 \leq f(x) + \alpha \leq g(x) + \alpha$ para todo $x \in [a, b]$. É claro que a área procurada coincide com a área da região compreendida entre os gráficos de $f + \alpha$ e $g + \alpha$ e as retas $x = a$ e $x = b$, sendo esta última região hachurada na Figura 5.2.

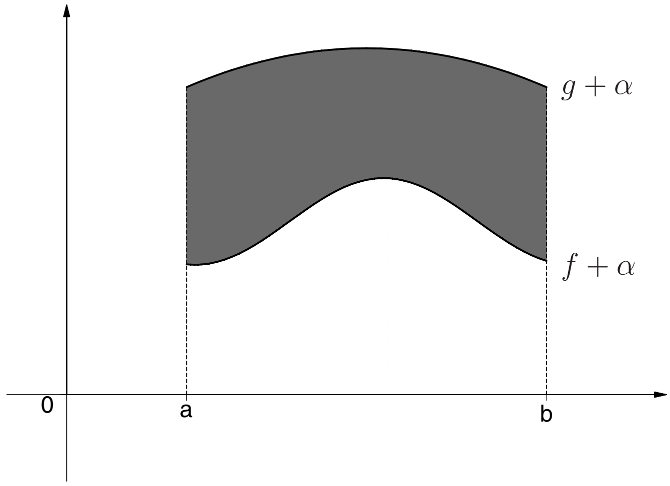

Figura 5.2

Mas a área desta última é a diferença entre a área da região compreendida entre o gráfico de $g+\alpha$, o eixo das abscissas e as retas $x=a$ e $x=b$ e a área da região compreendida entre o gráfico de $f+\alpha$, o eixo das abscissas e as retas $x=a$ e $x=b$, ou seja,

$$\int_a^b (g(x)+\alpha)dx - \int_a^b (f(x)+\alpha)dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx = \int_a^b (g(x)-f(x))dx.$$

Assim, a área procurada é

$$\int_a^b (g(x)-f(x))dx.$$

Notemos que, se $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$ ou $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a,b]$, então a área da região compreendida entre o gráfico de f, o eixo das abscissas e as retas $x=a$ e $x=b$ é igual a área da região compreendida entre os gráficos de f e g (onde $g(x)=0$ para todo $x \in [a,b]$) e as retas $x=a$ e $x=b$.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 5.1

Calculemos a área da região limitada pelas retas $x=0$, $x=1$, $y=2$ e pelo gráfico de $f(x)=x^3$ (a região em questão está hachurada na Figura 5.3).

Sendo $g(x)=2$ para todo $x \in [0,1]$, a área procurada é a área da região compreendida entre os gráficos de f e g e as retas $x=0$ e $x=1$ (notemos

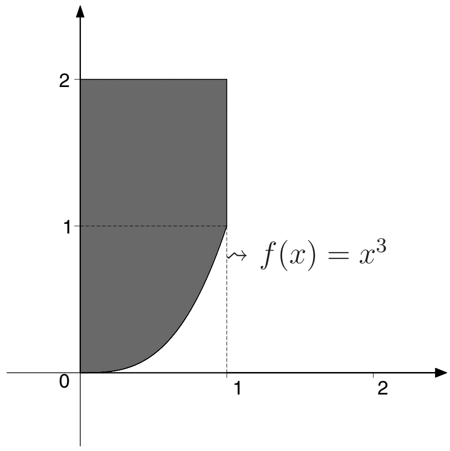

Figura 5.3

que $f(x) < g(x)$ para todo $x \in [0,1]$). Portanto, a área em questão é

$$\begin{aligned}\int_0^1 (g(x) - f(x))dx &= \int_0^1 (2 - x^3)dx = \int_0^1 2\,dx - \int_0^1 x^3 dx = \\ &= 2(1-0) - \frac{1}{4}(1^4 - 0^4) = \frac{7}{4}.\end{aligned}$$

Exemplo 5.2

Calculemos a área da região limitada pelos gráficos das funções $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$ (a região em questão está hachurada na Figura 5.4).

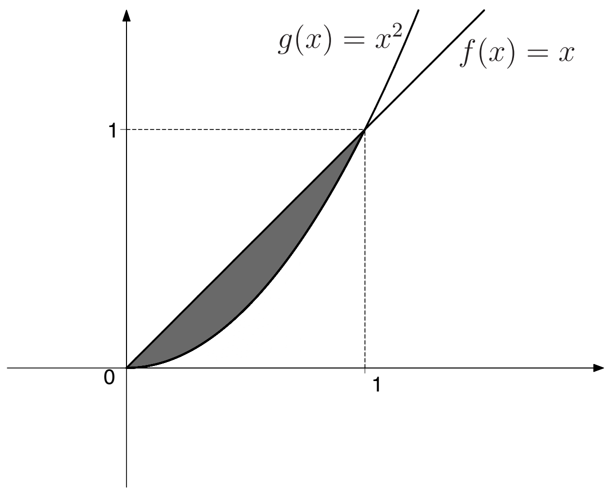

Figura 5.4

Com efeito, como $f(x) = g(x)$ se, e somente se, $x = 0$ ou $x = 1$ e como

$g(x) \leq f(x)$ para todo $x \in [0,1]$, a área em questão é

$$\int_0^1 (f(x) - g(x))dx \;=\; \int_0^1 (x - x^2)dx \;=\; \int_0^1 x\,dx - \int_0^1 x^2 dx =$$

$$= \frac{1}{2}(1^2 - 0^2) - \frac{1}{3}(1^3 - 0^3) = \frac{1}{6}.$$

Exemplo 5.3

Calculemos a área da região compreendida entre os gráficos das funções $f(x) = x$ e $g(x) = \sqrt{x}$ e as retas $x = 0$ e $x = 2$ (a região em questão está hachurada na Figura 5.5).

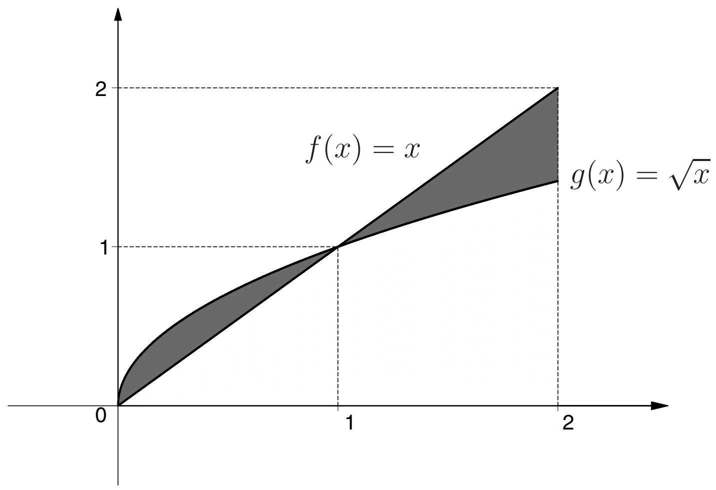

Figura 5.5

Com efeito, como $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [0,1]$ e $g(x) \leq f(x)$ para todo $x \in [1,2]$, a área em questão é

$$\int_0^1 (g(x) - f(x))dx \;+\; \int_1^2 (f(x) - g(x))dx =$$

$$= \int_0^1 (\sqrt{x} - x)dx \;+\; \int_1^2 (x - \sqrt{x})dx =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{x}\,dx - \int_0^1 x\,dx \;+\; \int_1^2 x\,dx - \int_1^2 \sqrt{x}\,dx =$$

$$= \frac{2}{3}(\sqrt{1^3} - \sqrt{0^3}) - \frac{1}{2}(1^2 - 0^2) \;+\; \frac{1}{2}(2^2 - 1^2) - \frac{2}{3}(\sqrt{2^3} - \sqrt{1^3}) =$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \;+\; \frac{3}{2} - \frac{4\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{3}(5 - 4\sqrt{2}).$$

Exemplo 5.4

Calculemos a área da região compreendida entre o gráfico de $f(x) = x^5$, o eixo das abscissas e as retas $x = -1$ e $x = 1$ (a região em questão está hachurada na Figura 5.6).

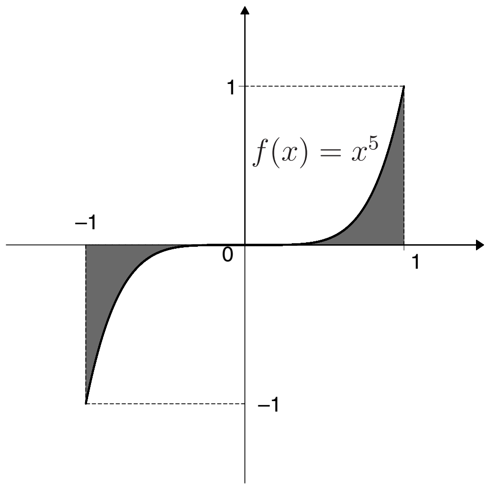

Figura 5.6

Com efeito, como $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [-1, 0]$ e $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [0, 1]$, a área em questão é

$$-\int_{-1}^{0} x^5 dx + \int_{0}^{1} x^5 dx = \frac{2}{6}.$$

Obviamente, poder-se-ia ver diretamente que a área procurada é

$$2\int_{0}^{1} x^5 dx,$$

já que $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 5.5

Calculemos a área do conjunto

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\, 1 \leq x \leq 2\,,\, 0 \leq y \leq \frac{1}{x^4}\right\},$$

o qual hachuramos na Figura 5.7.

Com efeito, como $\frac{1}{x^4} > 0$ para todo $x \neq 0$ e, em particular, para todo $x \in [1, 2]$, a área procurada é

$$\int_{1}^{2} \frac{1}{x^4} dx = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^3} - \frac{1}{1^3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right) \times \left(-\frac{7}{8}\right) = \frac{7}{24}.$$

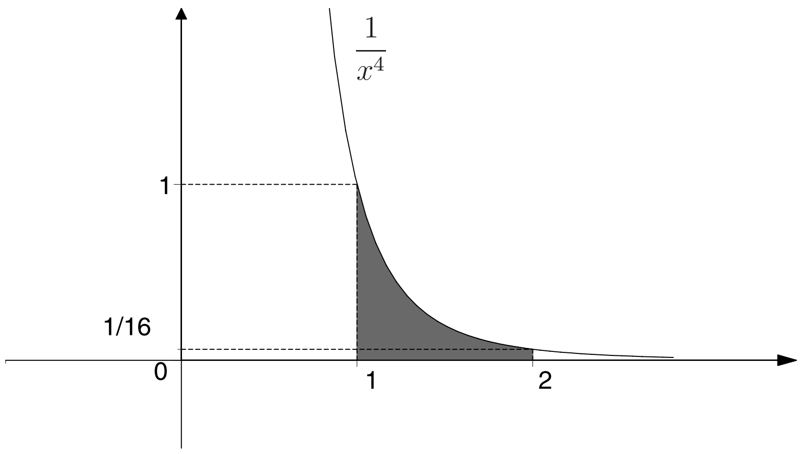

Figura 5.7

Exemplo 5.6

Calculemos a área do conjunto

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x \leq y \leq \sqrt[4]{x}\},$$

o qual hachuramos na Figura 5.8.

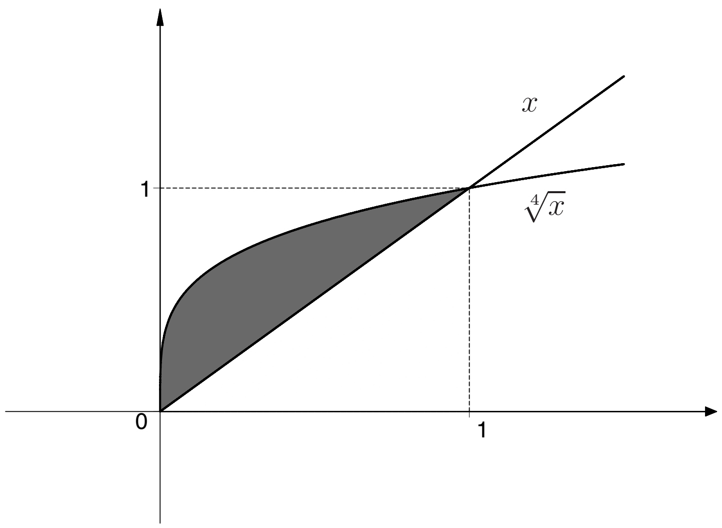

Figura 5.8

Notemos, primeiramente, que para (x, y) pertencer a D devemos ter $x \geq 0$. Além disso, $x = \sqrt[4]{x}$ se, e somente se, $x = 0$ ou $x = 1$. Como $x \leq \sqrt[4]{x}$ para todo $x \in [0, 1]$, a área de D é

$$\begin{aligned}\int_0^1 (\sqrt[4]{x} - x)dx &= \int_0^1 \sqrt[4]{x}\, dx - \int_0^1 x\, dx = \\ &= \frac{4}{5}(\sqrt[4]{1^5} - \sqrt[4]{0^5}) - \frac{1}{2} = \frac{3}{10}.\end{aligned}$$

Exemplo 5.7

Calculemos a área da região compreendida entre o gráfico de $f(x) = \frac{1}{x^2}$ $(x > 0)$ e as retas $y = x$ e $y = 4$ (a região em questão está hachurada na Figura 5.9).

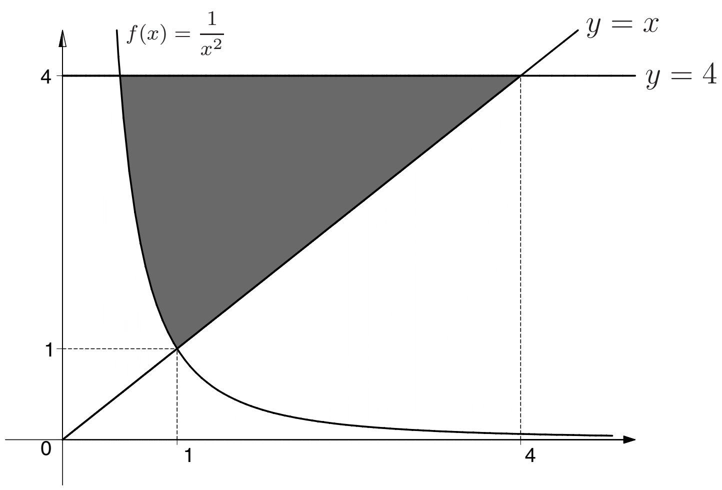

Figura 5.9

Para $x > 0$, $\frac{1}{x^2} = y$ se, e somente se, $x = \frac{1}{\sqrt{y}}$.

Para explicar este exemplo vamos trabalhar com uma função "da variável y", diferentemente do que vínhamos fazendo. Poderíamos, também, argumentar como antes mas, neste caso, o raciocínio utilizado é efetivamente mais simples (certifique-se de que esta afirmação é verdadeira raciocinando como nos exemplos anteriores).

Como $f(x) = x$ se, e somente se, $x = 1$, $f(1) = 1$ e como $y \geq \frac{1}{\sqrt{y}}$ para todo $y \in [1, 4]$, a área em questão é

$$\begin{aligned}\int_1^4 \left(y - \frac{1}{\sqrt{y}}\right) dy &= \int_1^4 y\, dy - \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{y}}\, dy = \\ &= \frac{1}{2}(4^2 - 1^2) - 2(\sqrt{4} - \sqrt{1}) = \frac{15}{2} - 2 = \frac{11}{2}.\end{aligned}$$

Exemplo 5.8

Calculemos a área da região hachurada na Figura 5.10, determinada pelos gráficos das funções $f(x) = x^3 - x$, $g(x) = x - x^3$ e pelo círculo de centro $(0, 0)$ e raio 1.

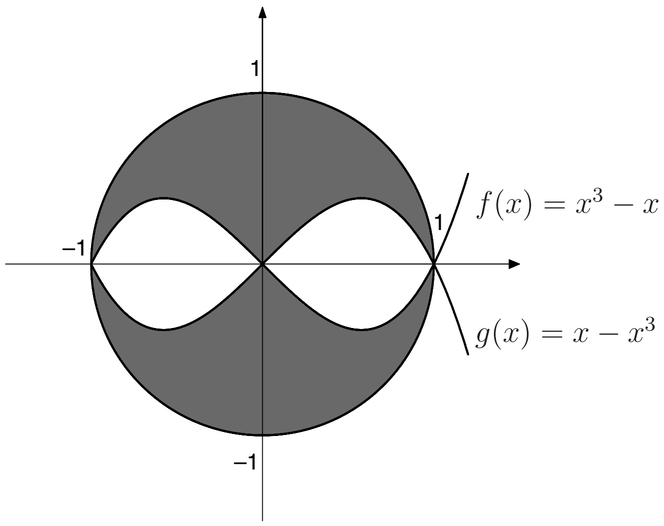

Figura 5.10

A área de um círculo de raio r é πr^2.

Inicialmente, notemos que $f(x) = g(x)$ se, e somente se $x^3 - x = x - x^3$, isto é, se, e somente se, $x = 0$, $x = -1$ ou $x = 1$.

A área em questão é o quádruplo da área da região hachurada que está acima do eixo das abscissas e à direita do eixo das ordenadas (justifique esta afirmação). Logo, basta achar esta última.

Para fazê-lo, basta observar que a área mencionada é

$$\frac{\pi}{4} - \int_0^1 (x - x^3)dx,$$

lembrando que a área de cada quadrante do círculo de centro $(0, 0)$ e raio 1 é $\frac{\pi}{4}$. Como

$$\int_0^1 (x - x^3)dx = \int_0^1 x\,dx - \int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4},$$

podemos finalmente afirmar que a área procurada é

$$4\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\right) = \pi - 1.$$

Vamos terminar a aula discutindo a seguinte pergunta: dada uma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, é possível encontrar um ponto $u \in [a,b]$ tal que a área da região compreendida entre o gráfico de f, o eixo das abscissas e as retas $x = a$ e $x = b$ (que é precisamente $\int_a^b f(x)dx$) coincida com a área do retângulo de base $[a,b]$ e altura $f(u)$ (que é precisamente $f(u)(b-a)$)? A Figura 5.11 ilustra a situação.

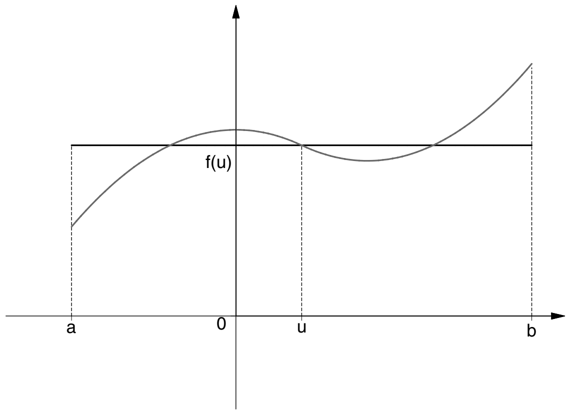

Figura 5.11

Provaremos que a resposta à pergunta formulada é afirmativa, como segue imediatamente do seguinte

Teorema 5.1

[teorema do valor médio para integrais] Se $a < b$ e $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a,b]$, existe $u \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(u)(b-a).$$

Demonstração: Pelo teorema de Weierstrass, visto na aula 7 de Cálculo I, existem $x_1, x_2 \in [a,b]$ tais que

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

para todo $x \in [a,b]$. Pelos Exemplos 2.2 e 2.5,

$$f(x_1)(b-a) = \int_a^b f(x_1)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b f(x_2)dx = f(x_2)(b-a),$$

isto é,

$$f(x_1) \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq f(x_2).$$

Se $x_1 = x_2$, f é constante em $[a,b]$ e qualquer $u \in [a,b]$ serve.

Suponhamos, então, $x_1 \neq x_2$ (digamos $x_1 < x_2$). Como f é contínua em $[x_1, x_2]$, o teorema do valor intermediário, visto na aula 7 de Cálculo I, garante a existência de $u \in [x_1, x_2]$ $\big(\subset [a,b]\big)$ tal que

$$f(u) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a},$$

isto é,

$$\int_a^b f(x)dx = f(u)(b-a).$$

Isto conclui a demonstração do teorema.

Exemplo 5.9

Seja $f(x) = x^3$ para todo $x \in [0,1]$. Pelo Teorema 5.1, existe $u \in [0,1]$ tal que

$$\int_0^1 x^3 dx = f(u)(1-0) = u^3.$$

Como $\displaystyle\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$, concluímos que $u = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$.

Assim, a área da região compreendida entre o gráfico de f, o eixo das abscissas e a reta $x = 1$ $\big($que é $\frac{1}{4}\big)$ coincide com a área do retângulo de base $[0,1]$ e altura $f\big(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\big) = \frac{1}{4}$; ver a Figura 5.12.

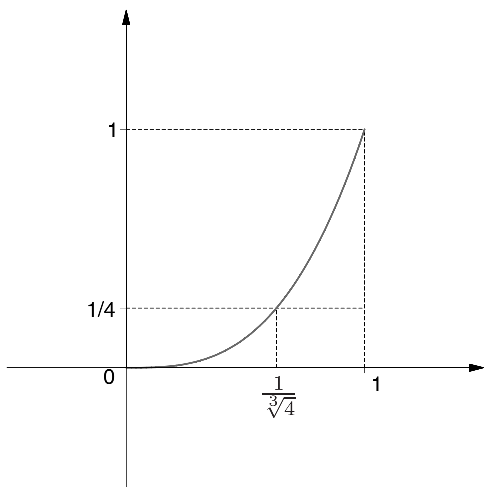

Figura 5.12

Evidentemente, só foi possível encontrar u explicitamente, no exemplo acima, por se tratar de uma situação bastante favorável.

Resumo

Nesta aula você aprendeu a fazer uso da integral definida para calcular a área de regiões planas. O teorema do valor médio para integrais também foi discutido.

Exercícios

1. Esboce a região e ache a área da região compreendida entre:

   (a) os gráficos de $f(x) = x^2$ e $g(x) = \dfrac{x^2}{2} + 2$;

   (b) os gráficos de $f(x) = x^2$ e $g(x) = 1 - x^2$;

   (c) os gráficos de $f(x) = x^2$ e $g(x) = 1 - x^2$ e a reta $y = 2$;

   (d) os gráficos de $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^2 - 2x + 4$ e a reta $x = 0$;

   (e) os gráficos de $f(x) = x^2$ e $g(x) = -x^2$ e as retas $x = -1$ e $x = 1$;

   (f) o gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ e as retas $y = 0$ e $x = a$, onde $a \in (0, +\infty)$ é arbitrário;

   (g) os gráficos de $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $g(x) = \dfrac{x^2}{16}$ e $h(x) = x^2$, para $x > 0$;

   (h) os gráficos de $f(x) = x^2 - x - 2$ e $g(x) = x + 6$;

   (i) os gráficos de $f(x) = 1 + \text{sen}\ x$, $g(x) = 1 + \cos x$ e a reta $x = 0$;

   (j) os gráficos de $f(x) = 1 + \text{sen}\ x$, $g(x) = 1 + \cos x$ e a reta $x = \pi$;

   (l) o gráfico de $f(x) = \cos x$ e as retas $x = 0$, $x = \pi$ e $y = 0$;

   (m) os gráficos de $f(x) = \text{sen}\ x$ e $g(x) = \cos x$ e as retas $x = 0$ e $x = \dfrac{\pi}{2}$;

   (n) a parábola $x = y^2$ e a reta $x = 4$.

2. Esboce o conjunto D e ache a área de D, nos seguintes casos:

   (a) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x^2 - 1 \leq y \leq 0\}$;

   (b) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\, 0 \leq y \leq 9 - x^2\}$;

   (c) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\, 0 \leq x \leq 1\,,\, \sqrt{x} \leq y \leq 3\}$;

   (d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x^2 + 1 \leq y \leq x + 1\}$;

   (e) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x^2 - 1 \leq y \leq x + 1\}$.

3. (a) Use o teorema do valor médio para integrais para mostrar que

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2 + 3} dx \leq \frac{2}{3}.$$

   (b) Chegue à mesma conclusão usando o Exemplo 2.5.

4. (a) Use o teorema do valor médio para integrais para mostrar que

$$\int_0^{\pi} \text{sen}\,(\sqrt{x})\,dx \leq \pi.$$

(b) Chegue à mesma conclusão usando o Exemplo 2.5.

Auto-avaliação

Nos Exercícios 1 e 2 você usou o Teorema Fundamental do Cáculo para determinar a área de regiões planas. Em caso de dúvida, releia esta aula e a aula 4, e tente novamente. Caso persista alguma dúvida, consulte o tutor no pólo.

Aula 6 – Exercícios resolvidos.

Referências: Aulas 7, 10, 12 e 17 de Cálculo I, e 2, 3, 4 e 5 de Cálculo II.

Objetivo

Amadurecer o conteúdo sobre integral definida visto nas aulas 2, 3, 4 e 5, notadamente o Teorema Fundamental do Cálculo.

Exercício 1: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e defina $H(x) = \int_0^x xf(t)\,dt$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que H é derivável em $\mathbb{R}$ e

$$H'(x) = \int_0^x f(t)\,dt + xf(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Nos Exercícios 1, 2, 3, 4, 5 usamos o Exemplo 3.2: se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua, $a \in \mathbb{R}$ e $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ $(x \in \mathbb{R})$, então F é derivável em $\mathbb{R}$ e $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solução: Sejam $g(x) = x$ e $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Então

$$H(x) = \int_0^x xf(t)\,dt = x\int_0^x f(t)\,dt = g(x)F(x) = (gF)(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Como g e F são deriváveis em $\mathbb{R}$, então H é derivável em $\mathbb{R}$ (como produto de duas funções deriváveis em $\mathbb{R}$) e

$$H'(x) = g'(x)F(x) + g(x)F'(x) = \int_0^x f(t)\,dt + xf(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 2: Seja $h(x) = 3x + 2\int_1^x \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}t^2\right)dt$, $x \in \mathbb{R}$. Determine os coeficientes α, β e γ do polinômio $p(x) = \alpha(x-1)^2 + \beta(x-1) + \gamma$ para que $p(1) = h(1)$, $p'(1) = h'(1)$ e $p''(1) = \frac{h''(1)}{\pi}$.

Solução: Como $p(1) = \gamma$ e $h(1) = 3$, devemos ter $\gamma = 3$. Como $p'(x) = 2\alpha(x-1)+\beta$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então $p'(1) = \beta$. Por outro lado, como $h'(x) = 3+2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}x^2\right)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então $h'(1) = 3+2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3+2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 4$. Logo, devemos ter $\beta = 4$.

Finalmente, como $p''(x) = 2\alpha$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então $p''(1) = 2\alpha$. Por outro lado, $h''(x) = 2\pi x\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}x^2\right)\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}x^2\right)\right)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, $h''(1) = 2\pi\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\frac{\pi}{4}\right) = 2\pi \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \pi$. Logo, devemos ter $2\alpha = 1$, isto é, $\alpha = \frac{1}{2}$.

Exercício 3: Seja $g(x) = \displaystyle\int_0^x t\,\text{sen}\,t\,dt$, $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$. Mostre que g possui apenas um ponto de máximo local em $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Solução: A função g é derivável em $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ e $g'(x) = x\,\text{sen}\,x$ para todo $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$. Temos ainda que $g'(x) = 0$ se, e somente se, $\text{sen}\,x = 0$; portanto, $g'(x) = 0$ se, e somente se, $x = \pi$. Além disso, como $g''(x) = \text{sen}\,x + x\cos x$ para todo $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, vem

$$g''(\pi) = \pi\cos\pi = -\pi < 0.$$

Logo, π é o único ponto de máximo local de g em $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Exercício 4: Determine $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, sendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que

$$\int_0^x f(t)\,dt = x^3\text{sen}\,(2x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solução: Definamos $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $F(x) = x^3\text{sen}\,(2x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então

$$f(x) = F'(x) = 3x^2\text{sen}\,(2x) + 2x^3\cos(2x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular,

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\text{sen}\,\pi + 2\left(\frac{\pi}{2}\right)^3\cos\pi = -\frac{\pi^3}{4}.$$

Exercício 5: Mostre que a função

$$G(x) = \int_1^{x^3+x} \frac{1}{1+\cos^4 t}\,dt \quad (x \in \mathbb{R})$$

é crescente.

Solução: Definamos $g(x) = x^3 + x$ e $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{1+\cos^4 t}\,dt$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Então é claro que $G = F \circ g$. Pela regra da cadeia, G é derivável em $\mathbb{R}$ e $G'(x) = (F \circ g)'(x) = F'(g(x))g'(x) = F'(x^3+x)\,g'(x) = \frac{3x^2+1}{1+\cos^4(x^3+x)}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim, $G'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, e daí resulta que G é crescente em $\mathbb{R}$.

Exercício 6: Calcule $\displaystyle\int_0^3 |x^2-1|\,dx$.

Solução: Inicialmente, observemos que como a função $x \in [0,3] \mapsto |x^2-1| \in R$ é contínua (justifique esta afirmação), então ela é integrável em $[0,3]$. Além disso, como $x^2-1 \le 0$ para $0 \le x \le 1$ e $x^2-1 \ge 0$ para $1 \le x \le 3$, temos

$$|x^2-1| = \begin{cases} 1-x^2 & \text{se } \ 0 \le x \le 1\ , \\ x^2-1 & \text{se } \ 1 \le x \le 3\ . \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int_0^3 |x^2-1|\,dx &= \int_0^1 |x^2-1|\,dx + \int_1^3 |x^2-1|\,dx = \\ &= \int_0^1 (1-x^2)\,dx + \int_1^3 (x^2-1)\,dx = \\ &= \int_0^1 dx - \int_0^1 x^2dx + \int_1^3 x^2dx - \int_1^3 dx = \\ &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(3^3-1^3\right) - 2 = \frac{22}{3}.\end{aligned}$$

Exercício 7: Sejam $a<b$ e $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que existe $u\in[a,b]$ tal que $\displaystyle\int_a^u f(t)dt = \int_u^b f(t)dt$.

Solução: O resultado é claro se $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0$ (basta tomar $u=a$ ou $u=b$). Suponhamos então $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \neq 0$, digamos $\displaystyle\int_a^b f(x)dx > 0$. Consideremos a função

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt - \int_x^b f(t)dt,$$

definida para $x\in[a,b]$. Como vimos na aula 3, as funções

$$x\in[a,b]\mapsto \int_a^x f(t)dt \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad x\in[a,b]\mapsto \int_x^b f(t)dt\in\mathbb{R}$$

são deriváveis em $[a,b]$, logo contínuas em $[a,b]$. Conseqüentemente, G é contínua em $[a,b]$. Além disso,

$G(a)=\int_a^a f(t)dt - \int_a^b f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt < 0 < \int_a^b f(t)dt - \int_b^b f(t)dt = G(b)$.

Pelo teorema do valor intermediário, existe $u\in(a,b)$ tal que $G(u)=0$, isto é,

$$\int_a^u f(t)dt = \int_u^b f(t)dt.$$

Exercício 8: Mostre que

$$\frac{3\pi}{24} \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (1+\text{sen}^2 x)dx \leq \frac{7\pi}{48}.$$

Solução: Pelo teorema do valor médio para integrais (justifique a aplicabilidade do mesmo), existe $u \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$ tal que

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (1+\text{sen}^2 x)dx = (1+\text{sen}^2 u)\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{12}(1+\text{sen}^2 u).$$

Por outro lado, como

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \text{sen}\,\frac{\pi}{4} \leq \text{sen}\,x \leq \text{sen}\,\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

para todo $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$, segue que

$$\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} \leq 1 + \text{sen}^2 u \leq 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}.$$

Logo,

$$\frac{3\pi}{24} = \frac{\pi}{12} \times \frac{3}{2} \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (1+\text{sen}^2 x)dx = \frac{\pi}{12}(1+\text{sen}^2 u) \leq \frac{\pi}{12} \times \frac{7}{4} = \frac{7\pi}{48},$$

provando o que desejávamos.

Exercício 9: Calcule a área da região compreendida entre o gráfico de $f(x) = (\sec x)(\text{tg}\,x)$, o eixo das abscissas e as retas $x = -\frac{\pi}{4}$ e $x = \frac{\pi}{4}$.

Solução: Primeiramente, notemos que $\sec x > 0$ para todo $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, $\text{tg}\,x \leq 0$ para todo $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$ e $\text{tg}\,x \geq 0$ para todo $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Portanto, $f(x) \leq 0$ para todo $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$ e $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Assim, a área em questão é

$$-\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} (\sec x)(\text{tg}\,x)dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (\sec x)(\text{tg}\,x)dx.$$

Tomemos agora $G(x) = \sec x$ para $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. A função G é derivável em $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ e

$$G'(x) = \frac{-(-\text{sen}\,x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x}\frac{\text{sen}\,x}{\cos x} = (\sec x)(\text{tg}\,x)$$

para todo $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec x)(\operatorname{tg} x)dx = G\left(\frac{\pi}{4}\right) - G(0) = \sec\frac{\pi}{4} - \sec 0 = \frac{2}{\sqrt{2}} - 1 = \sqrt{2} - 1.$$

De modo análogo, verifica-se que

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} (\sec x)(\operatorname{tg} x)dx = -(\sqrt{2} - 1)$$

(na verdade, este fato decorre facilmente do que vimos acima, já que $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]\big)$.

Podemos então finalmente afirmar que a área procurada é $2(\sqrt{2} - 1)$.

Resumo

Esta aula é dedicada, essencialmente, a exercícios nos quais o Teorema Fundamental do Cálculo está envolvido. Outros resultados importantes, vistos no decorrer do curso, também foram utilizados.