Volume | 1

Pré-Cálculo

cederj

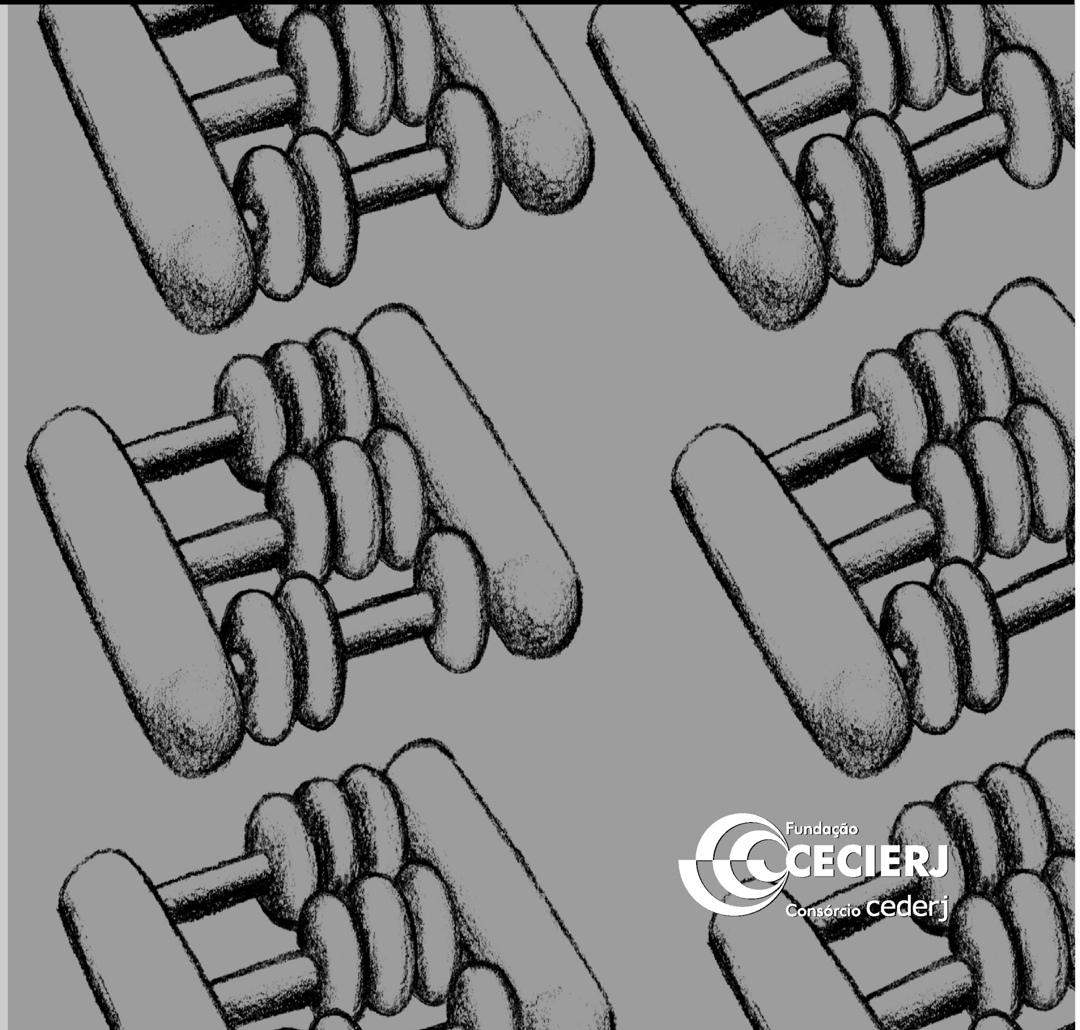
Módulos 1 e 2

Celso Costa

Volume 1

5ª edição

Pré-Cálculo



Fundação CECIERJ

Consórcio cederj

ISBN 85-7648-361-0

9 788576 483618

UENF Universidade Estadual do Norte Fluminense

UERJ Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Universidade Federal Fluminense uff

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

UNIRIO

FAPERJ Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

GOVERNO DO Rio de Janeiro SECRETARIA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

UAB UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

Fundação
CECIERJ
Consórcio cederj
Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

Pré-Cálculo

Volume 1 - Módulos 1 e 2
5ª edição

Celso Costa

GOVERNO DO
Rio de Janeiro
SECRETARIA DE
CIÊNCIA E TECNOLOGIA

UAB
UNIVERSIDADE
ABERTA DO BRASIL

Ministério
da Educação

BRASIL
UM PAÍS DE TODOS
GOVERNO FEDERAL

Apoio:

FAPERJ
Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo
à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Rua Visconde de Niterói, 1364 – Mangueira – Rio de Janeiro, RJ – CEP 20943-001
Tel.: (21) 2334-1569 Fax: (21) 2568-0725

Material Didático

ELABORAÇÃO DE CONTEÚDO
Celso Costa

Departamento de Produção

EDITORA
Tereza Queiroz

COORDENAÇÃO DE PRODUÇÃO
Jorge Moura

PROGRAMAÇÃO VISUAL
Aline Madeira Brondani
Marcelo Freitas

ILUSTRAÇÃO
Aline Madeira Brondani
André Amaral
André Dahmer

CAPA
Eduardo Bordoni
Fabio Muniz

PRODUÇÃO GRÁFICA
Fábio Rapello Alencar

C837c

Costa, Celso.
Pré-cálculo. v. 1 / Celso Costa. – 5. ed. – Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2009.
235p.; 21 x 29,7 cm.

ISBN: 85-7648-361-0

1. Matemática básica. 2. Sistemas de coordenadas. 3. Equação da reta. 4. Plano euclidiano. I. Título.

CDD: 510

2009/2

Referências Bibliográficas e catalogação na fonte, de acordo com as normas da ABNT.

Governo do Estado do Rio de Janeiro

Governador
Sérgio Cabral Filho

Secretário de Estado de Ciência e Tecnologia
Alexandre Cardoso

Universidades Consorciadas

UENF - UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO
Reitor: Almy Junior Cordeiro de Carvalho

UERJ - UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Ricardo Vieiralves

UFF - UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
Reitor: Roberto de Souza Salles

UFRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Aloísio Teixeira

UFRRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Ricardo Motta Miranda

UNIRIO - UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
Reitora: Malvina Tania Tuttman

SUMÁRIO

Prezado aluno e aluna.

A você que inicia hoje o estudo da disciplina Pré-cálculo, trago as boas vindas e o desejo de que possamos juntos fazer uma feliz e produtiva caminhada.

Este é o primeiro módulo desta disciplina, que possui dois outros módulos, cada um deles contendo dez aulas e, como o próprio nome revela, uma introdução ao cálculo.

O Cálculo Diferencial e Integral é um dos principais pilares da proposta do conteúdo específico de nosso Curso de Licenciatura em Matemática. E para dar conta desta tarefa teremos ainda mais quatro outras disciplinas, cobrindo os conteúdos essenciais desta importante área da Matemática.

Creio que é útil pontuar este início com algumas reflexões sobre as idéias que orientam em geral a Matemática e em particular a proposta desta disciplina.

De um lado, Matemática é um jogo lúdico e, por excelência, a arte de resolver problemas, e este é o oxigênio que vitaliza, desde sempre, sua permanente evolução. No ato de aprender Matemática não existe receita para galgar o entendimento, a não ser no exercício das ferramentas. Como um paciente escultor, que, com seu formão, conquista da madeira bruta a bela obra de arte, resolver problemas em Matemática é a via prazerosa de firmar conceitos e descobrir recônditas belezas.

Num estudo introdutório ao cálculo, a visualização geométrica é especialmente importante. Em todo o desenvolvimento deste módulo é forte o apelo à visualização, seja através da representação dos números reais na reta, da expressao do piano através de coordenadas ou na visualização de retas, semi-retas, hiperplanos e alguns conjuntos especiais do espaço definidos através de equações e inequações. Creio que é uma direção adequada para colocar a visão intuitiva que temos do espaço a favor do entendimento dos conceitos fundamentais, que fazem parte desta etapa inicial.

Desejo a você uma feliz caminhada, e que seu esforço o recompense!

Celso Costa

Aula 1 – Números naturais e inteiros

Objetivos

- rever propriedades básicas dos números naturais e inteiros;
- compreender a representação dos números inteiros sobre uma reta;
- utilizar o algoritmo de Euclides na divisão entre números inteiros.

Números naturais

Vivemos e nos orientamos num mundo de números. Temos horários para ir e voltar do trabalho, nosso endereço tem um número de CEP, nossa identidade e CPF são números. Acrescente-se ainda os números de emergência: polícia, bombeiros, hospitais. Seria exaustivo lembrar tantos números. Os números acompanham a evolução do ser humano primitivo vindo das cavernas e hoje, com o uso dos computadores, são ferramentas fundamentais na revolução que presenciamos na organização de nossa sociedade.

Os números estão de tal modo presentes em nossas vidas, que os usamos automaticamente sem lembrar que são criações abstratas da mente humana.

A mais antiga idéia de número surge da necessidade de contar. No princípio da aventura humana, o antigo pastor ao comparar seu conjunto de ovelhas ao correspondente conjunto de pedrinhas, identificava uma característica comum aos conjuntos. Esta característica quantitativa evolui posteriormente para a idéia abstrata de número e a expressão desta idéia através de símbolos. Por exemplo, o número 5. Pare um pouco e pense na imensa abstração por trás deste símbolo.

Os livros didáticos citam, freqüentemente, a história do ancestral pastor que a cada ovelha de seu rebanho fazia corresponder uma pedrinha em seu bolso. Com este procedimento simples, o pastor "contava" e controlava seu rebanho, evitando o desaparecimento ou comemorando o nascimento de um pequeno animal.

O conjunto dos números naturais, representado pela letra $\mathbb{N}$, é o conjunto

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}.$$

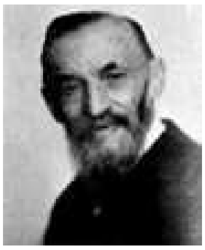
Notamos que é indiferente incluírmos ou não o número 0 (zero) no conjunto $\mathbb{N}$. Historicamente, a idéia abstrata de um número zero surge mais tarde, associado à ausência de objetos para contar.

É importante que você pare um pouco e reflita sobre o significado dos três pontinhos que aparecem na definição do conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$. Os pontinhos expressam que $\mathbb{N}$ é um conjunto infinito e que conhecemos de antemão como escrever indefinidamente um após outro os elementos de $\mathbb{N}$.

A consideração e compreensão do infinito é um grande salto de abstração, só possível pela mente humana!

- Quais são as propriedades fundamentais do conjunto $\mathbb{N}$ de números naturais?

São as propriedades conhecidas como Axiomas de Peano. Dentre elas destacamos duas. A primeira propriedade é a que garante a existência de um primeiro número natural, o número 1. A segunda propriedade garante que todo número natural tem um "sucessor". O sucessor de 4 é 5, o sucessor de 199 é 200 e, em geral, o sucessor de n é $n+1$.



Giuseppe Peano
1858-1932

Destacado lógico e matemático italiano, com contribuições importantes em Fundamentos da Aritmética e da Geometria.
Para saber mais sobre Peano e seus axiomas, consulte:
http://users.hotlink.com.br/marielli/matematica/geniomat/peano.html

Números inteiros

Os números naturais são úteis para resolver problemas de contagem, no entanto insuficientes para solucionar problemas do dia-a-dia, como perda, prejuízo etc ...

No fim do mês passado, dia 28, recebi uma terrível notícia ao pedir, no banco, o extrato de minha conta corrente num terminal eletrônico. Os valores impressos em tinta vermelha (advertência!) sentenciavam

$$\text{Saldo atual: } -305,00.$$

E é isto. Convencionamos para representar, por exemplo, a perda de 2 ovelhas em colocar o sinal "$-$" antes do número. Assim, -2 expressaria esta perda. Do mesmo modo, meu saldo de $-305,00$ no dia 28, expunha minha desagradável condição de devedor junto ao banco.

Os negativos de números naturais inicialmente não eram considerados números de verdade. Entretanto eles mostraram indispensáveis aos cálculos práticos, e ganharam direito de integrarem o universo dos números.

Incorporando aos números naturais, os números negativos e o número zero, chegamos ao conjunto dos números inteiros,

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Uma reação muito interessante contra os números negativos tinha a seguinte argumentação: se $-1 < 1$, então por que $\frac{-1}{1} = \frac{1}{-1}$?
O absurdo apontado pelos incrédulos dos números negativos era a igualdade das frações acima. Como isto pode acontecer se a primeira fração tem o numerador menor que o denominador enquanto na segunda fração ocorre justamente o contrário!

Os números naturais também são chamados de inteiros positivos.

Note que como conjuntos,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}.$$

Adição e multiplicação de números inteiros

No conjunto $\mathbb{Z}$ temos as operações fundamentais de adição e multiplicação. Estas operações permitem construir novos números a partir de pares de números dados, e são essenciais para o processo de contagem.

As propriedades fundamentais da adição (representada por $+$) e da multiplicação (representada por $\times$ ou por $\cdot$) de números inteiros são as seguintes:

Para números inteiros quaisquer a, b e c:

a) propriedade comutativa:

$$a + b = b + a \quad \text{e} \quad a \cdot b = b \cdot a$$

b) propriedade associativa:

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{e} \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

c) propriedade distributiva:

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

d) o número 1 desempenha o papel de unidade na multiplicação:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

e) o número zero é neutro na adição:

$$a + 0 = 0 + a = a\,.$$

O simétrico de um número inteiro

Um número inteiro m é simétrico de um número n se

$$m + n = 0\,.$$

Note que m ser simétrico de n, é equivalente a n ser simétrico de m. De fato, $m + n = 0$ é equivalente a $n + m = 0$. Observe ainda que sendo m simétrico de n então $m = -n$.

Exemplo 1.1

1. -5 é simétrico de 5, pois $-5 + 5 = 0$.
2. 5 é simétrico de (-5), pois $5 = -(-5)$.

3. de modo geral $-n$ é o simétrico de n (e n é o simétrico de $-n$).

4. O produto de qualquer número inteiro por (-1) é igual ao simétrico do número
$$-1(a) = -a = a(-1)\,.$$

Subtrair o inteiro n do inteiro m se escreve $m - n$; equivale a somar m ao simétrico de n. Assim, $m - n = m + (-n)$.

Exemplo 1.2

Simplifique a expressão $5x(-y) + y(-x)$, onde x e y representam inteiros quaisquer.

Solução:
$$\begin{aligned} 5x(-y) + y(-x) &= -5xy - yx = -5xy - xy \\ &= -6xy \end{aligned}$$

Representação de $\mathbb{Z}$ sobre uma reta

É muito útil representar os números inteiros sobre uma reta orientada. Escolha uma reta no plano e sobre ela marque dois pontos, o ponto O e o ponto I. Vamos associar aos pontos O e I, respectivamente, os números 0 (zero) e 1.

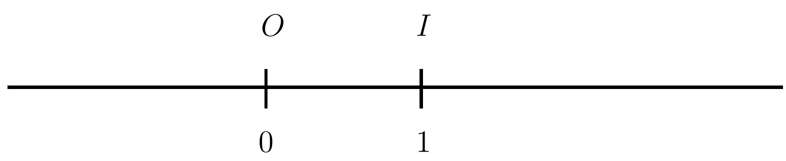


Figura 1.1: O segmento unidade.

O segmento de reta cujos extremos são os pontos O e I é denominado "segmento unidade". Com este segmento como padrão, definimos a posição de todos os números inteiros sobre a reta!

O segmento OI estabelece dois *sentidos de percurso* sobre a reta: o que vai de O para I e o que vai de I para O. Escolhemos um desses sentidos como sendo o *positivo* e o outro como o *negativo*. A convenção que predomina universalmente é a de escolher como sentido positivo o que vai de O para I. Também é uma convenção universal escolher o ponto I à direita de O, como na **Figura 1.1**.

A partir do ponto 0 (zero), e seguindo no sentido positivo da reta, vamos justapondo sucessivamente o segmento unidade de modo a relacionar cada número natural com um único ponto da reta. Esta construção é feita de tal modo que o segmento de reta cujos extremos são um número natural n

e seu sucessor $n+1$ tem o mesmo comprimento do *segmento unidade*. Uma construção análoga é feita a partir do ponto 0 (zero) no sentido negativo de percurso sobre a reta, marcando sucessivamente pontos associados aos números inteiros negativos -1, -2, -3, ... Veja a **Figura 1.2**.

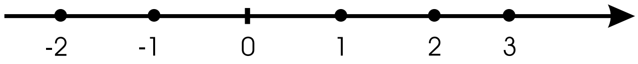
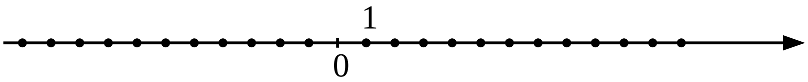


Figura 1.2: Os números inteiros na reta.

Reforçando: Quaisquer dois pontos consecutivos marcados para representar números inteiros na reta definem segmentos de comprimento unitário.

Atividade 1.1

Assinale na reta da figura abaixo, os pontos correspondentes aos números -10, 3, 9, -6, -2.



Relação de ordem

A representação dos números inteiros sobre uma reta orientada permite estabelecer uma relação de ordem no conjunto $\mathbb{Z}$.

Definição
Dizemos que o número inteiro m é menor que o número inteiro n se na representação sobre uma reta orientada o ponto que representa m aparecer antes do ponto que representa n.

Note que na definição de ordem usamos a expressão: m aparece antes de n na reta. Isto significa que a direção que aponta de m para n coincide com a direção da reta.

Utilizamos a notação $m < n$ para indicar que m é menor que n. A notação $n > m$ (que se lê n é maior que m) tem o mesmo significado que $m < n$.

Usamos a notação $m \leq n$ (que se lê m é menor ou igual a n) para significar que m é menor do que ou igual a n, e a notação $n \geq m$ (que se lê n é maior ou igual a m) equivale a $m \leq n$.

Definição
Um número m é dito *positivo* se for maior do que zero, isto é, $m > 0$.
Um número m é dito *negativo* se for menor do que zero, isto é, $m < 0$.
O número zero não é positivo nem negativo.

Valor absoluto

Vamos recordar a definição de valor absoluto de um número e usá-la nas "regras de sinal", muito úteis ao operar com números.

Definição
O valor absoluto de um número inteiro m, o qual representaremos por $|m|$ é definido por

(i) $|m| = m$ se $m > 0$.

(ii) $|m| = -m$ se $m < 0$.

(iii) $|0| = 0$.

Exemplo 1.3

$$|-4| = 4, \quad |2004| = 2004 \quad \text{e} \quad |-743| = 743\,.$$

Veja na **Figura 1.3** a representação geométrica da primeira igualdade do Exemplo 1.3, mostrando que o módulo representa a distância do número à origem.

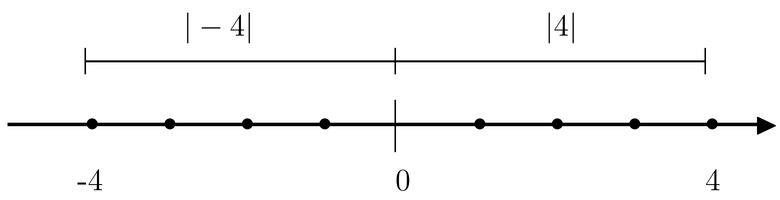


Figura 1.3: O módulo como distância.

Portanto, a **Figura 1.3** ilustra uma propriedade relevante do valor absoluto:

$$\boxed{|-m| = |m| \text{ para todo número inteiro } m}$$

Nota: O *sinal* de um número inteiro não nulo m é *positivo* se $m = |m|$, o que é equivalente a $m > 0$; o sinal de um número não nulo m é *negativo* se $|m| = -m$, o que é equivalente a $m < 0$. O número zero não tem sinal.

Propriedades operacionais para a soma e multiplicação

Veja as propriedades operacionais para a soma e multiplicação de números inteiros, popularmente denominadas "regras de sinais".

Para adicionar números inteiros de mesmo sinal, adicione seus valores absolutos, e dê ao resultado o mesmo sinal das parcelas.

Exemplo 1.4

Calcule a soma $-6 + (-43)$

Ambas as parcelas são números negativos. Logo a soma resultará um número negativo cujo valor absoluto é a soma dos valores absolutos das parcelas.

$$-6 + (-43) \;=\; -6 - 43 \;=\; -(6 + 43) \;=\; -49$$

Para adicionar números inteiros de sinais diferentes, subtraia o menor valor absoluto do maior. Dê ao resultado o mesmo sinal do inteiro de maior valor absoluto.

Exemplo 1.5

Calcule a soma $-63 + 43$

Temos a adição de um número negativo com um número positivo. O número negativo tem maior valor absoluto. Portanto a soma será um número negativo, cujo valor absoluto é a diferença entre o maior e o menor valor absoluto.

$$\begin{aligned} -63 + 43 &= -(63 - 43) \\ &= -20 \end{aligned}$$

O produto de dois inteiros que têm sinais diferentes é um número negativo cujo valor absoluto é obtido pelo produto do valor absoluto dos números.

Exemplo 1.6

Calcule $(-63) \cdot 43$

$$\begin{aligned} (-63) \cdot 43 &= -(63 \cdot 43) \\ &= -2709 \end{aligned}$$

O produto de dois inteiros de mesmo sinal é um número positivo, cujo valor absoluto é obtido pelo produto dos valores absolutos dos números.

Exemplo 1.7

Calcule $(-3) \cdot (-4)$

$$(-3) \cdot (-4) \;= +(3 \cdot 4) \;=\; +12 \;=\; 12$$

Atividade 1.2: Hierarquia das operações aritméticas:

Observe os exemplos **a)** e **b)**:

a) $9 - 2 \times 3 \times 9 - 2 \times 3$

Solução

As multiplicações sempre devem ser efetuadas antes das adições ou subtrações, a menos que a expressão contenha parênteses, chaves, colchetes, etc... que subvertam essa hierarquia.

Expressões numéricas que envolvam apenas adições ou subtrações, podem ser calculadas de acordo com a ordem em que as operações vão surgindo.

Portanto

$$\begin{aligned} 9 - 2 \times 3 \times 9 - 2 \times 3 &= 9 - 54 - 6 \\ &= 9 - 60 \\ &= -51 \end{aligned}$$

b) $(9 - 2 \times 3) \times (9 - 2 \times 3)$

Solução

Agora devemos efetuar primeiro as operações entre parênteses

$$9 - 2 \times 3 = 9 - 6 = 3$$

Assim

$$\begin{aligned} (9 - 2 \times 3) \times (9 - 2 \times 3) &= 3 \times 3 \\ &= 9 \end{aligned}$$

Note que os exemplos a) e b) contêm os mesmos números e as mesmas operações. Todavia as respostas são completamente diferentes, devido à presença de parênteses.

c) Calcule você mesmo:

i) $3 \times 5 - 2 \times 4 + 3 - 1$

Resposta: ____________

ii) $3 \times \{5 - 2 \times [4 + 3 - 1]\}$

Resposta: ____________

iii) Você obteve o mesmo resultado nos dois itens acima?

Resposta: ____________

Múltiplos e divisores

Definição 1.1 (Múltiplos de um número inteiro)
Dado um número inteiro n, os múltiplos de n são aqueles números obtidos pelo produto de n por um número inteiro arbitrário.

Representamos por $M(n)$ o conjunto de todos os números inteiros múltiplos de n.

Exemplo 1.8

a) $M(2) = \{\ldots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$ é o conjunto dos múltiplos do número 2.

b) $M(0) = \{0\}$. De fato, como $0 = 0 \times m$, para qualquer número inteiro m, então 0 é o único múltiplo de 0.

c) $M(-3) = M(3) = \{\ldots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots\}$

Nota: Veja o que ocorreu nos três exemplos anteriores: o zero aparece em todos os conjuntos. De fato, o número 0 (zero) é múltiplo de qualquer número inteiro n. Pois $0 = 0 \times n$. Em símbolos podemos então escrever,

$$0 \in M(n), \text{ para qualquer } n\,.$$

Atividade 1.3

a) Escreva dois conjuntos contendo, respectivamente, os sete primeiros múltiplos positivos de 5 e de 7.

b) Identifique o menor número comum aos dois conjuntos do item anterior.

Definição 1.2
Dados dois números inteiros não nulos a e b, o *mínimo múltiplo comum* dos números é o menor número inteiro positivo que é múltiplo de ambos. Usamos a notação $m.m.c(a, b)$ para representar este número.

Atividade 1.4

a) Encontre o mínimo múltiplo comum de cada um dos seguintes pares de números:

$$m.m.c(5,7) = \ldots, \; m.m.c(5,10) = \ldots, \quad \text{e} \quad m.m.c(6,14) = \ldots$$

b) Dois pilotos de Fórmula 1, um alemão e outro brasileiro treinam numa pista em forma de um circuito fechado. O piloto alemão gasta seis minutos para dar uma volta completa, enquanto o piloto brasileiro precisa de dez minutos para fazê-lo. Num dia de treino, ambos saem juntos do grid de largada. Depois de quanto tempo eles voltarão a se encontrar de novo no grid de largada?

Definição 1.3 (Divisores de um número inteiro)
Um número inteiro d, diferente de zero, é divisor do número inteiro m, se existir outro inteiro p tal que

$$m = p \cdot d\,.$$

Denotamos por $D(m)$ o conjunto dos divisores positivos do número m. Isto é, se $d \in D(m)$ então $d > 0$.

Exemplo 1.9

Os números 1, 2, 3 e 6 são todos os divisores positivos do número 6. Também 1 e 13 são todos os divisores positivos do número 13. Então

$$D(6) = \{1,2,3,6\} \quad \text{e} \quad D(13) = \{1,13\}\,.$$

Nota: Dado um número inteiro m qualquer, então 1 e m são divisores de m.

Definição 1.4 (Números primos)
Um número primo p é um número natural diferente de 1 e que admite como divisores positivos apenas os números 1 e p. Isto é,

$$D(p) = \{1,p\}\,.$$

Denotamos por $\mathcal{P}$ o conjunto dos números primos.

Exemplo 1.10

Escrevemos abaixo, em ordem crescente, os oito primeiros números primos e colocamos os três pontinhos exprimindo que existem infinitos outros números primos.

$$\mathcal{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots\}$$

Definição 1.5
Dois números inteiros m e n são primos entre si se admitirem apenas o número 1 como divisor positivo comum.

Exemplo 1.11

a) 3 e 50 são primos entre si. De fato, os divisores positivos de 3 são 1 e 3, e os divisores positivos de 50 são 1, 2, 5, 10, 25, 50. Logo, 1 é o único divisor comum positivo.

b) -28 e 21 são primos entre si. De fato, 1, 2, 4, 7, 14, 28 são os divisores positivos de -28, e 1, 3, 7, 21 são os divisores positivos de 21. Logo, 1 é o único divisor positivo de ambos.

Atividade 1.5

a) Qual o menor número natural m, maior que 1, que é primo com $n = 36$?

b) Escreva uma lista com todos os divisores positivos do número 6 e que são menores que 6. Estes são os divisores próprios de 6. Em seguida, calcule a soma dos números da lista. Você encontrou 6? Correto.

Você sabia que um número que tem a propriedade de ser igual à soma de seus divisores próprios chama-se *número perfeito*?

c) A distribuição dos números perfeitos entre os naturais é bem espaçada. Por exemplo, 496 é um número perfeito, pois

$$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248\,.$$

Você sabia que existe apenas mais um número perfeito entre 6 e 402. Este número é menor que 50 e você está desafiado a descobri-lo.

Para finalizar esta aula, convido você a estudar um importante resultado.

O algoritmo de Euclides

Vamos tratar a questão da divisibilidade do ponto de vista geométrico. Isto será muito útil mais tarde.

Vamos começar com um exemplo. Considere os números inteiros 17 e 3. Queremos dividir 17 por 3. Tomando os primeiros múltiplos positivos de 3 encontramos

$$3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, \ldots .$$

Na seqüência anterior, identificamos o número 15 como o último número que é menor que 17. O próximo número, 18, já supera 17.

Escrevemos

$$17 = 3 \cdot 5 + 2 \quad \text{ou} \quad \begin{array}{r|l} 17 & 3 \\ \hline 2 & 5 \end{array}$$

Na expressão anterior, 17 é o dividendo, 3 é o divisor, 5 é o quociente e 2 é o resto. Preste atenção na relação existente entre o divisor e o resto,

$$0 \leq 2 < 3.$$

O resto é maior ou igual a zero e inferior ao divisor.

Vamos a outro exemplo. Dividir o número -18 pelo número 7. Repetimos o processo anterior, escrevendo em ordem decrescente, da direita para a esquerda, os múltiplos de 7:

$$\ldots - 42, -35, -28, -21, -14, -7, 0, 7\,.$$

Note que lendo a lista da esquerda para a direita, e portanto na ordem crescente dos números, -21 é o número mais próximo de -18 que é inferior a -18. Escrevemos então

$$-18 = -3 \cdot 7 + 3 \quad \text{ou} \quad \begin{array}{r|l} \text{-18} & 7 \\ \hline 3 & \text{-3} \end{array}$$

Note que comparando o resto 3 com o divisor 7, encontramos que

$$0 \leq 3 < 7\,.$$

De novo vale: o resto é maior ou igual a zero e menor que 7. Moral da história: Estamos realizando divisões entre números inteiros, onde o divisor é "sempre positivo" e estamos exigindo no processo que o resto seja maior ou

Euclides
± 325 / ± 265 a.C.
Quase nada se sabe sobre a vida deste notável matemático grego. O que se costuma afirmar é que Euclides fundou uma escola de Matemática em Alexandria e, do conhecimento acumulado à época, escreveu "Os Elementos".
Para saber mais, acesse:
http://www.numaboa.com.br/criptologia/historia/euclides.php

igual a zero e inferior ao divisor. O fato que o divisor é um número positivo e a propriedade que estamos exigindo sobre o resto define um método de divisão, que chamamos de Divisão Euclidiana.

Convido você a olhar geométrica e ludicamente os dois exemplos anteriores. Afinal, Matemática tem muito de jogo e diversão.

Considere as divisões de 17 por 3 e de -18 por 7 e os números inteiros representados sobre uma reta orientada. Imagine dois sapinhos S_1 e S_2, respectivamente relacionados à primeira e segunda divisão, pulando a partir do zero em direção aos dividendos, com as seguintes características:

Primeiro: S_1 salta para a direita em direção ao dividendo 17, com pulos de comprimento 3 que é o divisor, salta 5 vezes que é o quociente caindo no número 15 para ter uma aproximação máxima de 17. Um próximo pulo superaria 17. Isto é, $3 \times 5 + 2 = 17$. Veja a **Figura 1.4**.

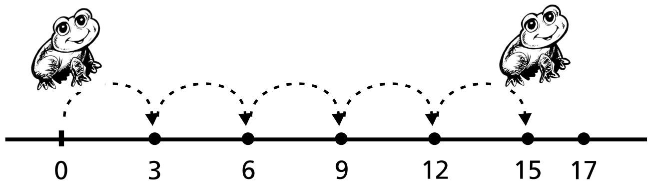


Figura 1.4: Divisão euclidiana I.

Segundo: S_2 salta para a esquerda em direção ao dividendo -18, com pulos de comprimento 7 que é o divisor, salta 3 vezes até superar pela primeira vez a marca do ponto -18. Como o salto é para a esquerda, o número de pulos é denotado por -3 e é preciso superar -18. Isto é, $(-3) \cdot 7 + 3 = -18$. Compare com o primeiro caso e examine a **Figura 1.5**.

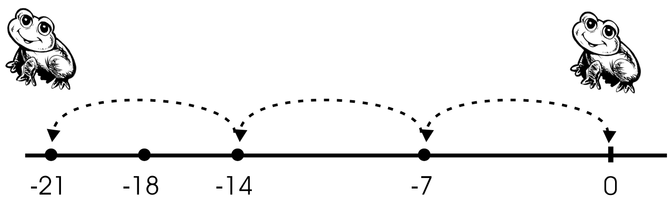


Figura 1.5: Divisão euclidiana II.

Note que neste processo, a diferença entre a posição final dos sapinhos e os pontos de chegada são sempre inferiores ao comprimento do pulo. Esta diferença pode ser nula no caso excepcional em que o sapinho caia exatamente sobre o dividendo.

Atividade 1.6

Realize geometricamente na reta os três exemplos com os dados: a) dividendo 101, divisor 13; b) dividendo -47, divisor 8; c) dividendo -121, divisor 11.

Podemos agora olhar de modo geral o problema da divisão. Queremos dividir um número inteiro m por outro número inteiro $d > 0$. Imagine, desde já estes dois números identificados na reta e um sapinho no ponto zero, disposto à cada pulo vencer um comprimento d, saltando para a esquerda se $m < 0$, para a direita se $m > 0$, ou permanecendo imóvel se $m = 0$. Seja então q o número de saltos que mais aproxima o sapinho de m, aproximação por falta. Veja a **Figura 1.6**, onde esta representada uma situação onde $m < 0$. Nesta situação vale

$$m = q \cdot d + r, \ \ 0 \leq r < d\,.$$

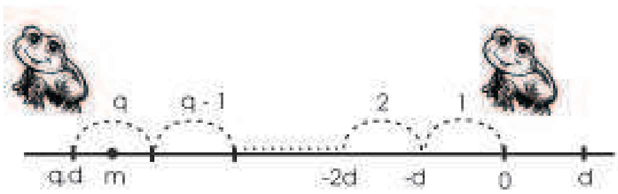


Figura 1.6: Divisão euclidiana III.

Baseados nestas discussões é evidente chegar ao importante resultado denominado algoritmo de Euclides.

> Algoritmo de Euclides
> Dados $m,\ d \in \mathbb{Z}$, sendo $d > 0$, podemos escrever m como soma de um múltiplo de d e de um possível resto r menor que d e maior ou igual a zero. Isto é,
>
> $$m = q \cdot d + r\,.$$
>
> Esta maneira de escrever é única. O número q é o quociente e r é o resto da divisão euclidiana de m por d.

Exercícios

1) Escreva, se possível, uma expressão mais simples e equivalente à expressão dada, onde $a,\ b,\ m,\ x$ e y são números inteiros.

   a) $13a + 5a$ b)$21x - 10x$ c) $3(5m - 14m)$
   d) $3(x + 2y) - 2y$ e) $4(3x + 2) + (2x + 3)$

2) Dois números inteiros a e b são tais que $5ab^2 + 2a^2b + a^2b^2 = 99$ e $5b + 2a + ab = 3$. Calcule o produto desses números.

3) A soma de dois números é 119. O quociente da divisão do maior pelo menor é 3 e o resto o maior possível. Calcule os números.

4) Achar o menor múltiplo de 13 que dividido por 15, 24 ou 40 deixa sempre resto 10.

5) Três pessoas viajaram hoje para São Paulo. A primeira faz essa mesma viagem de 15 em 15 dias, a segunda vai a São Paulo de 20 em 20 dias e a terceira de 24 em 24 dias. Daqui a quantos dias elas voltarão a viajar juntas?

Respostas das atividades

1) Localização de pontos

2) c) 9 d) -21, não

3) a) $\{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35\}$, $\{7, 14, 21, 28, 35, 42, 49\}$ b) 35

4) a) 35, 10, 42 b) 30 minutos

5) a) 5 b) $6 = 1 + 2 + 3$ c) 28

6) a) $101 = 7 \times 13 + 10$, b) $-47 = -6 \times 8 + 1$, c) $-121 = -11 \times 11$.

Respostas dos exercícios

1) a) $18a$, b) $11x$, c)$-27m$, d) $3x + 4y$, e) $14x + 11$

2) 33

3) 24 e 95

4) 130

5) 120 dias

Aula 2 – Números racionais

Objetivos

- trabalhar com propriedades operatórias do conjunto dos números racionais;
- recordar a representação dos números racionais na reta numérica;
- revisar a representação decimal dos números racionais.

Você está numa festa de aniversário e o dono da casa oferece um saboroso pedaço de bolo. Em virtude daquele regime que você começou ontem, o pedaço parece exagerado. Você exclama a duras penas:

- É muito grande! Por favor, quero apenas um terço deste pedaço de bolo.

O que aconteceu? O pedaço de bolo representava uma unidade que lhe era oferecida e você solicita que esta unidade seja dividida em três partes iguais, das quais apenas uma será sua parte. Você deseja uma exata parte, ou uma fração da unidade oferecida. A maneira abstrata de representar esta idéia é escrever $\frac{1}{3}$.

Os números racionais surgem para expressar ou medir quantidades onde aparecem envolvidas partes da unidade.

Veja na figura a seguir, um bolo de forma retangular dividido, em partes iguais de dois modos diferentes. Em 3 partes e em 9 partes, respectivamente.

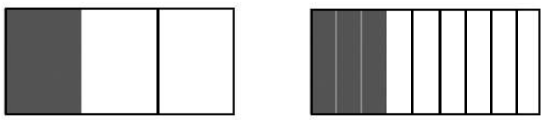


Figura 2.1: Divisão da unidade.

Do ponto de vista da quantidade, uma das partes do bolo dividido na **Figura 2.1**, à esquerda, representa $\frac{1}{3}$, enquanto que uma das partes na **Figura 2.1**, à direita, representa $\frac{1}{9}$. Agora é evidente que um pedaço de bolo representado na **Figura 2.1**, à esquerda, é o mesmo que 3 pedaços de bolo representado na **Figura 2.1**, à direita. Isto sugere que vale a igualdade

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{9},$$

e fica evidente que podemos representar de vários modos uma mesma porção da unidade.

Expressões do tipo $\frac{m}{n}$, onde m e n são números inteiros e $n \neq 0$, são chamadas frações. O termo acima do traço é o numerador e o termo abaixo do traço é o denominador da fração. Note que $\frac{1}{3}$ é igual a $\frac{3}{9}$, pelo simples fato que multiplicamos por 3 o número de divisões da unidade e também multiplicamos por 3 o número das partes que utilizamos para formar a nova fração.

Este exemplo permite induzirmos que ao multiplicarmos o numerador e o denominador de uma fração pelo mesmo número inteiro não nulo, não alteramos o valor da fração. Isto é,

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q},$$

se existe um número inteiro k, não nulo, tal que $p = k \cdot m$ e $q = k \cdot n$.

Igualdade ou equivalência de frações

Duas frações $\frac{m}{n}$ e $\frac{p}{q}$ são equivalentes ou iguais se e somente se $mq = pn$. Em símbolos, vale a regra do produto cruzado:

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \iff mq = pn\,.$$

A igualdade de frações enunciada acima pode ser provada do seguinte modo: como n e q são números inteiros não nulos podemos escrever

$$\frac{m}{n} = \frac{mq}{nq} \qquad \text{e} \qquad \frac{p}{q} = \frac{pn}{qn}\,.$$

Veja que os denominadores das frações transformadas agora coincidem. Então, a igualdade entre $\frac{m}{n}$ e $\frac{p}{q}$ ocorre exatamente e apenas quando os numeradores coincidem. Isto é,

$$mq = pn\,.$$

Números racionais

Nota: Duas frações equivalentes representam o mesmo número racional.

Agora podemos introduzir o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais. $\mathbb{Q}$ é o conjunto de todas as frações $\frac{m}{n}$, onde m e n são números inteiros e $n \neq 0$. Em símbolos:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n};\ m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0\right\}.$$

Soma e produto de números racionais

Sejam $\frac{m}{n}$ e $\frac{p}{r}$ números racionais quaisquer. Então:

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{r} = \frac{r \cdot m + n \cdot p}{n \cdot r} \quad \text{e} \quad \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{r} = \frac{m \cdot p}{n \cdot r}$$

são respectivamente, a soma e o produto dos números racionais.

Notas

1) Inclusão de conjuntos

Vale a inclusão de conjuntos, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Pois se $m \in \mathbb{Z}$, então $m = \frac{m}{1} \in \mathbb{Q}$.

Comentário: É muito importante poder considerar $\mathbb{Z}$ dentro de $\mathbb{Q}$. Mais importante ainda é o fato que as operações de adição e multiplicação definidos em $\mathbb{Q}$ herdam todas as propriedades já enunciadas para as mesmas operações em $\mathbb{Z}$. Reveja estas propriedades na Aula 1.

2) Frações Redutíveis e Irredutíveis

Uma fração $\frac{m}{n}$ é irredutível se não existe nenhum número natural $d > 1$, que seja divisor de m e divisor de n. Caso contrário, a fração é redutível.

Comentário: $\frac{m}{n}$ é uma fração irredutível se m e n são números primos entre si. Por exemplo, $\frac{-33}{5}$ é irredutível e $\frac{10}{4}$ é redutível.

3) Fração Irredutível com denominador positivo

Toda fração redutível é equivalente a uma fração irredutível e com denominador positivo.

Comentário: Para encontrar a fração irredutível na forma desejada, que seja equivalente a uma fração redutível dada, basta efetuar as divisões necessárias no denominador e numerador. Se, ao final das divisões, o denominador for negativo, multiplicamos por (-1) o numerador e o denominador, para encontrar a fração irredutível com denominador positivo.

Veja os dois exemplos a seguir:

$$\frac{120}{150} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}, \quad \frac{81}{-126} = \frac{27}{-42} = \frac{9}{-14} = \frac{-9}{14}.$$

4) Igualdade de números racionais

Dois números racionais $\dfrac{m}{n}$ e $\dfrac{p}{r}$ são iguais se e somente se $mr = np$. Em símbolos:

$$\boxed{\frac{m}{n} = \frac{p}{r} \iff m \cdot r = n \cdot p\,.}$$

Comentário: Já tivemos ocasião de falar sobre esta igualdade antes da definição do conjunto $\mathbb{Q}$. Este resultado é referido como "regra do produto cruzado" para identificar duas frações iguais ou dois números racionais iguais.

5) Divisão de números racionais

Se $\dfrac{p}{r} \neq 0$, a divisão do número $\dfrac{m}{n}$ por $\dfrac{p}{r}$ é definida por

$$\boxed{\frac{m}{n} \div \frac{p}{r} = \frac{m}{n} \times \frac{r}{p} = \frac{mr}{np}\,.}$$

6) Inverso de números racionais

Se $\dfrac{p}{r} \neq 0$, o inverso de $\dfrac{p}{r}$ é o número racional $\dfrac{r}{p}$. Note que $\dfrac{p}{r} \cdot \dfrac{r}{p} = 1$.

7) Simétrico de um número racional

O simétrico de um número racional q é o número racional s tal que

$$q + s = 0\,.$$

Comentário: Assim, o simétrico de $q = \dfrac{a}{b}$ é o número racional $-q = -\dfrac{a}{b}$. O simétrico de 0 é o próprio 0.

Observe que

$$\frac{a}{-b} + \frac{a}{b} = \frac{-a}{b} + \frac{a}{b} = \frac{-a+a}{b} = 0\,.$$

Tendo em vista a definição de simétrico, concluímos que $\dfrac{a}{-b} = -\dfrac{a}{b}$. Uma conta parecida mostra que $\dfrac{-a}{b} = -\dfrac{a}{b}$. Assim,

$$\boxed{\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}}$$

8) Expressão Irredutível para números racionais

Todo número racional pode ser expresso na forma $\dfrac{m}{n}$, onde $n > 0$ e m, n são primos entre si.

Comentário: O que enunciamos acima é equivalente ao que foi dito em (3). De fato, se o denominador do número racional n é negativo, basta multiplicarmos o numerador e o denominador por -1. Depois simplificamos os fatores comuns para encontrar o número racional expresso como fração irredutível.
Exemplo

$$\frac{26}{-34} = \frac{-26}{34} = \frac{-13}{17}\,.$$

9) Em vista do item 8) acima, podemos escrever os números racionais não nulos $\mathbb{Q}^*$ como $\mathbb{Q}^* = \left\{\dfrac{m}{n}\,;\ m\,,\ n \in \mathbb{Z};\ m,\, n \text{ primos entre si e } n > 0\right\}$.

Exemplo 2.1

Em um grupo de turistas, a sexta parte é de italianos, a metade de franceses e os 10 restantes são americanos. Quantos turistas há no grupo?

Solução

Temos que

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

correspondem a italianos e franceses. Logo $\dfrac{1}{3}$ dos turistas são americanos. Como são 10 os americanos, então o total de turistas é $\dfrac{3}{1} \times 10 = 30$.

Atividade 2.1

Encontre a forma irredutível e com denominador positivo das frações $\dfrac{-822}{81}$, $\dfrac{244}{132}$ e $\dfrac{121}{-143}$.

Representação geométrica dos números racionais

Já sabemos como representar os números inteiros numa reta. Recorde o que foi feito na Aula 1. Vamos ampliar nossa representação colocando sobre a reta todos os números racionais. Vamos começar com alguns exemplos.

Exemplo 2.2

Você se lembra do bolo da festa? Pois é ...

Considere agora o problema de representar o número racional $\dfrac{2}{3}$ que representa a parte do bolo que você não comeu.

Este número é uma fração da unidade. Basta dividir a unidade em três partes iguais, e "avançar" duas casas a partir do ponto inicial. Veja a **Figura 2.2**.

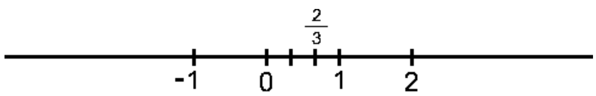


Figura 2.2: Representação do número $\dfrac{2}{3}$.

Exemplo 2.3

O mesmo procedimento vale quando queremos representar o número racional $\dfrac{r}{n}$, onde $0 \leq r < n$.

Nesta situação geral, dividimos o segmento que representa a unidade em n partes iguais, e avançamos r casas a partir do ponto inicial.

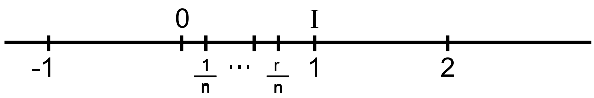


Figura 2.3: Representação do número $\dfrac{r}{n}$.

Exemplo 2.4

Considere o número racional $\dfrac{153}{4}$. Usando o algoritmo de Euclides, podemos escrever

$$153 = 4 \times 38 + 1\,.$$

Então,

$$\frac{153}{4} = \frac{4 \times 38 + 1}{4} = \frac{4 \times 38}{4} + \frac{1}{4} = 38 + \frac{1}{4}\,.$$

O que fazemos agora?

Bom, em primeiro lugar vamos ao intervalo de comprimento 1 da reta determinado pelos pontos correspondentes aos números inteiros 38 e 39.

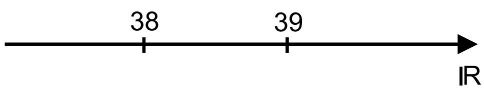


Figura 2.4: Intervalo unitário.

Agora, dividimos o intervalo unitário destacado em quatro partes iguais. Em seguida, a partir do ponto representado pelo número 38 "avançamos" uma casa para encontrar o ponto correspondente ao número procurado. Em destaque, na figura a seguir está indicado o ponto que corresponde ao número $\dfrac{153}{4}$.

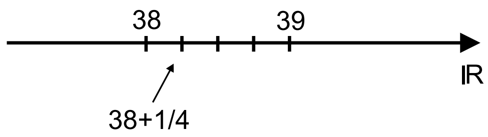


Figura 2.5: Representação do número $\dfrac{153}{4}$.

Exemplo 2.5

Representar na reta o número racional $\dfrac{-127}{5}$.

Nota oportuna: Este procedimento fornece um caminho para efetuar a divisão euclidiana quando o dividendo é um número negativo.

Pelo algoritmo da divisão de Euclides,

$$127 = 5 \times 25 + 2\,.$$

Daí,

$$-127 = -5 \times 25 - 2\,.$$

Mas não devemos esquecer que o *resto* na divisão euclidiana é sempre positivo ou nulo.

A fim de obter um resto euclidiano, basta subtrair e adicionar o divisor 5.

$$-127 = -5 \times 25 - 5 + 5 - 2 = -5 \times 26 + 3 = 5 \times (-26) + 3\,.$$

Portanto, a divisão euclidiana de -127 por 5 resulta um quociente -26 e um resto 3.

Prosseguindo,

$$\frac{-127}{5} = \frac{5 \times (-26) + 3}{5} = \frac{5 \times (-26)}{5} + \frac{3}{5} = -26 + \frac{3}{5}\,.$$

Portanto, entre os pontos da reta que representam os números -26 e -25, localizamos o ponto que representa o número racional $\dfrac{-127}{5}$. Veja a **Figura 2.6**.

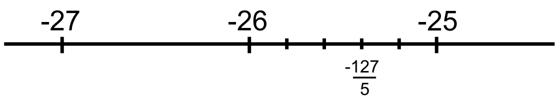


Figura 2.6: Representação do número $\dfrac{-127}{5}$.

De modo geral, usando o algoritmo de Euclides podemos concluir que todo número racional $\frac{m}{n}$, com $n > 0$, se escreve como

$$\frac{m}{n} = p + \frac{r}{n}\,, \text{ onde } p \in \mathbb{Z}\,,\ 0 \leq r < n\,.$$

A expressão acima para um número racional permite a representação do número sobre uma reta.

Atividade 2.2

Verifique que na **Figura 2.7** temos uma boa representação dos números $\frac{73}{4}$, $\frac{-3}{2}$ e $\frac{1}{2}$.

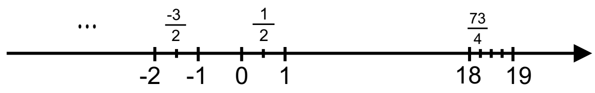


Figura 2.7: Representação de números.

Relação de ordem nos números racionais

A representação dos números racionais sobre uma reta orientada permite estabelecer uma relação de ordem no conjunto $\mathbb{Q}$. Suponha que os números racionais estão representados sobre uma reta horizontal, estando os números negativos à esquerda e os positivos à direita.

> Definição 2.1
> Dizemos que o número racional $q = \frac{m}{n}$ é menor que o número racional $s = \frac{p}{r}$ se na representação sobre uma reta orientada o ponto que representa q estiver à esquerda do ponto que representa s.

Para explorar um pouco mais a relação de ordem, suponha que $\frac{m}{n}$ e $\frac{p}{r}$ estão escritos de modo que $n > 0$ e $r > 0$. Note que

$$\frac{m}{n} = \frac{m \cdot r}{n \cdot r} \qquad \text{e} \qquad \frac{p}{r} = \frac{p \cdot n}{r \cdot n}\,.$$

Olhando os segundos membros das igualdades vemos que os números racionais estão expressos com o mesmo denominador. Logo, é possível concluir que

$$\boxed{\frac{m}{n} < \frac{p}{r} \iff m \cdot r < p \cdot n\,.}$$

Exemplo 2.6

Determine o conjunto de todos os racionais r para os quais a expressão

$$\frac{1}{r - \frac{1}{r}}$$

faz sentido. A seguir, simplifique a expressão.

Solução

Em primeiro lugar é preciso que $r \neq 0$, pois caso contrário a parcela $\frac{1}{r}$ no denominador não fica bem definida.

Efetuando a operação $r - \frac{1}{r}$ no denominador, obtemos $\frac{r^2 - 1}{r}$. Assim,

$$\frac{1}{r - \frac{1}{r}} = \frac{1}{\frac{r^2-1}{r}} = \frac{r}{r^2 - 1}$$

Vemos agora que é preciso ter $r^2 - 1 \neq 0$. Como $r^2 - 1 = (r-1)(r+1)$ e $(r-1)(r+1) = 0 \iff r - 1 = 0$ ou $r + 1 = 0$, vem que

$$r^2 - 1 \neq 0 \iff r \neq 1 \text{ e } r \neq -1$$

Resumindo, o conjunto de racionais para os quais a expressão dada está bem definida é

$$\mathbb{Q} - \{-1,\ 0,\ 1\}.$$

Atividade 2.3

a) Represente numa reta orientada os números $\frac{3}{6}$, $\frac{-12}{5}$, $\frac{9}{13}$ e $\frac{19}{-5}$;

b) Escreva estes números em ordem crescente.

c) Mostre que

$$\frac{4}{-20} > \frac{-13}{64}$$

Representação decimal de números racionais

Os números racionais expressos em forma de fração, apresentam dificuldades de uso na linguagem mais coloquial. Na prática do comércio, nas medidas de temperatura, em medidas científicas, muitas vezes aparecem números como 12,48 ou 0,267 ou $-3,51$, para representar as medidas de certas grandezas. Esta é a notação decimal para os números racionais. Qual é a convenção adotada? Ou melhor dizendo, que número estamos expressando através da notação decimal?

Vamos explicar isso.

A convenção é a seguinte: o número antes da vírgula é um número inteiro, o primeiro algarismo depois da vírgula expressa os décimos, o segundo algarismo os centésimos, o terceiro algarismo os milésimos e assim por diante. O número representado na notação decimal é a soma dessas quantidades. Assim,

$$12,48 = 12 + \frac{4}{10} + \frac{8}{100} = \frac{1200 + 40 + 8}{100} = \frac{1248}{100} = \frac{312}{25}\,.$$

Portanto, temos duas maneiras de expressar o mesmo número:

$$12,48 = \frac{312}{25}\,.$$

Veja outros exemplos:

$$0,267 = 0 + \frac{2}{10} + \frac{6}{100} + \frac{7}{1000} = \frac{200 + 60 + 7}{1000}\,.$$

Assim,

$$0,267 = \frac{267}{1000}\,.$$

Também,

$$-3,52 = -\left(3 + \frac{5}{10} + \frac{2}{100}\right) = -\frac{300 + 50 + 2}{100} = -\frac{352}{100} = -\frac{88}{25}\,.$$

Logo,

$$-3,52 = -\frac{88}{25}\,.$$

Então, 12,48 , 0,267 e $-3,52$ são outras maneiras de escrever os números racionais $\frac{312}{25}$, $\frac{267}{1000}$ e $-\frac{88}{25}$, respectivamente.

De modo geral, uma expressão do tipo

$$m, n_1\, n_2\, n_3\, \ldots\, n_p\,, \tag{2.1}$$

onde m é um número inteiro e $n_1, \ldots\, n_p$ são algarismos, é a representação decimal do número racional obtido pela seguinte soma:

$$m, n_1\, n_2\, n_3\, \ldots\, n_p = m + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{100} + \frac{n_3}{1000} + \ldots + \frac{n_p}{10^p}\,, \quad \text{se } m \geq 0$$

e

$$m, n_1\, n_2\, n_3\, \ldots\, n_p = -\left(-m + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{100} + \frac{n_3}{1000} + \ldots + \frac{n_p}{10^p} \right), \quad \text{se } m < 0\,.$$

Basta efetuar a soma das frações e as simplificações convenientes para encontrar, nas expressões acima, à direita, o número racional em forma de fração.

Neste momento é importante formular uma pergunta:

- Todo número racional pode ser expresso em notação decimal?

Ou perguntando de outro modo:

- Partindo de um número racional $\dfrac{m}{n}$ podemos escrevê-lo na forma

$$\frac{m}{n} = a_0,\, a_1\, a_2\, \ldots\, a_p\, ?$$

Para encontrar uma resposta, voltemos aos três exemplos trabalhados

$$\frac{312}{25} = 12,48\,, \quad \frac{267}{1000} = 0,267 \quad \text{e} \quad -\frac{88}{25} = -3,52\,.$$

Partindo das frações e usando o algoritmo de Euclides, encontramos

$$
\begin{array}{r|l}
312 & \underline{\ 25\quad} \\
\underline{-\ 25} & 12{,}48 \\
62 & \\
\underline{-\ 50} & \\
120 & \\
\underline{-\ 100} & \\
200 & \\
\underline{-\ 200} & \\
0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
267 & \underline{\ 1000\quad} \\
\underline{-\ 2000} & 0,\ 267 \\
6700 & \\
\underline{-\ 6000} & \\
7000 & \\
\underline{-\ 7000} & \\
0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
88 & \underline{\ 25\quad} \\
\underline{-\ 75} & 3{,}52 \\
130 & \\
\underline{-\ 125} & \\
50 & \\
\underline{-\ 50} & \\
0 &
\end{array}
$$

As contas acima são auto-explicativas e mostram que partindo de frações, o algoritmo euclidiano é a ferramenta para chegar à representação decimal de um número racional.

Mas, calma lá, não vivemos no melhor dos mundos! E os números $\frac{1}{3}$ e $\frac{8}{33}$? Vamos efetuar a divisão euclidiana para nos surpreender!

$$\begin{array}{r|l} 10 & 3 \\ \hline -\ 9 & 0{,}33\ldots \\ \hline 10 & \\ -\ 9 & \\ \hline 10 & \\ \vdots & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 80 & 33 \\ \hline -\ 66 & 0{,}2424\ldots \\ \hline 140 & \\ -\ 132 & \\ \hline 80 & \\ -\ 66 & \\ \hline 140 & \\ -\ 132 & \\ \hline 80 & \\ \vdots & \end{array}$$

Os resultados da divisão mostram a necessidade de expressar $\frac{1}{3}$ e $\frac{8}{33}$ através de somas envolvendo infinitas parcelas

$$\frac{1}{3} = 0,333\ldots = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \ldots + \frac{3}{10^n} + \ldots$$

e

$$\frac{8}{33} = 0,2424\ldots = \frac{2}{10} + \frac{4}{100} + \frac{2}{1000} + \frac{4}{10000} + \ldots .$$

Veremos mais adiante, nos conteúdos das disciplinas de Cálculo que somas com infinitas parcelas, como as somas acima no segundo membro das igualdades, representam os números escritos no primeiro membro. Então, é correto escrever,

$$\frac{1}{3} = 0,333\ldots \qquad \frac{8}{33} = 0,2424\ldots .$$

As expressões à direita das igualdades são chamadas representações ou expansões decimais infinitas e periódicas, ou simplesmente dízimas periódicas. A palavra periódica refere-se à repetição indeterminadamente do número 3 e do número 24, respectivamente, na representação de $\frac{1}{3}$ e $\frac{8}{33}$. Agora podemos responder a pergunta:

- Todo número racional pode ser expresso na forma decimal?

Se entendessemos forma decimal, apenas expressões do tipo (2.1), expressão onde aparece apenas um número finito de algarismos após a vírgula, a resposta é não.

No entanto, ao considerarmos somas infinitas e expressões decimais com infinitos algarismos, provaremos na próxima aula, quando tratarmos da representação de números racionais através de dízimas, o seguinte resultado:

"Todo número racional pode ser representado em forma de uma expressão decimal (finita) ou sob forma de uma expansão decimal infinita e periódica."

Mas lembra de como motivamos a notação decimal? Argumentamos com as necessidades práticas do comércio, da indústria, etc. Pois bem, para estas necessidades são suficientes valores que aproximam o valor real. A aproximação com maior ou menor erro, depende da natureza da operação realizada.

Por exemplo, $\frac{1}{3}$ pode ser aproximado por 0,333. Neste caso, usamos 3 algarismos após a vírgula. O que significa esta escolha?

$$0,333 = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} = \frac{300+30+3}{1000} = \frac{333}{1000}\,.$$

Note que

$$\frac{1}{3} - \frac{333}{1000} = \frac{1000-999}{3000} = \frac{1}{3000} < \frac{1}{1000}\,.$$

Isso mostra que

$$\frac{1}{3} \simeq 0,333, \ \text{ com erro de um milésimo.}$$

O símbolo $\simeq$ lê-se "aproximadamente". Então $\frac{1}{3}$ é aproximadamente 0,333 e o erro é inferior a um milésimo.

Numa máquina de calcular, quando dividimos 1 por 3 aparece no visor o número zero, seguido de um ponto (substituindo a vírgula) e uma quantidade finita de algarismos 3. Quanto maior for a capacidade da máquina, maior o número de dígitos 3 após o ponto (ou a vírgula) e tanto mais próximo do valor exato $\frac{1}{3}$ é o valor fornecido pela máquina.

Atividade 2.4

a) Mostre que $\frac{1}{3} < 0,334$.

b) Mostre que $0,334 - \frac{1}{3} < \frac{1}{1000}$.

c) Conclua que $\frac{1}{3} \simeq 0,334$ com erro inferior a um milésimo.

Exemplo 2.7

Expressar o número $\frac{29}{17}$ na forma decimal com erro inferior a um décimo de milésimo.

Solução

Usando o algoritmo euclidiano

$$
\begin{array}{r|l}
29 & 17 \\ \cline{2-2}
-17 & 1{,}7058 \\ \cline{1-1}
120 & \\
-119 & \\ \cline{1-1}
100 & \\
-85 & \\ \cline{1-1}
150 & \\
-136 & \\ \cline{1-1}
14 &
\end{array}
$$

Então, $\frac{29}{17} \sim 1,7058$ com erro inferior a um décimo de milésimo.
De fato, veja as contas que comprovam isto:

$$1,7058 = 1 + \frac{7}{10} + \frac{0}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{8}{10000} = \frac{17058}{10000}.$$

Então,

$$\frac{29}{17} - \frac{17058}{10000} = \frac{290000 - 289986}{170000} = \frac{14}{170000} < \frac{17}{170000} = \frac{1}{10000} = \frac{1}{10^4}.$$

Exercícios propostos

1. Determine os números naturais n que satisfazem a inequação $\frac{n}{n+2} < \frac{4}{5}$

2. Determine para que números racionais x, as expressões abaixo não estão bem definidas:

   (a) $\frac{x}{1-|x|}$

   (b) $\frac{x}{1-x^2}$

   (c) $\frac{2x}{2-x^2}$

3. Assinale as afirmações corretas, onde q representa um número racional arbitrário:

   (a) $q + 37/8$ está à direita de q

   (b) $q - 12$ está à esquerda de q

   (c) $5 + q$ está à direita de 5

   (d) $-6 - q$ está à esquerda de -6.

4. (a) Complete:

   Transladando o ponto correspondente a -12/8+ q para a direita, segundo o racional __________, obtemos o ponto correspondente a $q + 1$.

   (b) Determine os valores de $r \in \mathbb{Q}$ para os quais a expressão $|r-2|-2$ é positiva.

5. (a) Escreva em ordem crescente os elementos do conjunto $\left\{2,1342;\ 2,134201;\ -0,3259;\ -\frac{31}{7};\ \frac{21}{10}\right\}$.

   (b) Efetue: $-\frac{2}{5} + 24,70034$

6. Determine o menor inteiro positivo z, tal que os números $\frac{z}{2}, \frac{z}{3}, \frac{z}{4}, \frac{z}{5}$ sejam inteiros.

Respostas

Atividade 2.1: $\frac{-822}{81} = \frac{-274}{27}$, $\frac{244}{132} = \frac{61}{33}$ e $\frac{121}{-143} = \frac{-11}{13}$.

Atividade 2.2: $\frac{73}{4} = 18 + \frac{1}{4}$, $\frac{-3}{2} = -2 + \frac{1}{2}$.

Atividade 2.3

a) $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $\frac{-12}{5} = -3 + \frac{3}{5}$ e $\frac{19}{-5} = -4 + \frac{1}{5}$.

b) $\frac{19}{-5} < \frac{-12}{5} < \frac{3}{6} < \frac{9}{13}$

c) Basta mostrar que

$$\frac{4}{20} < \frac{13}{64} \Leftrightarrow \frac{1}{5} < \frac{13}{64} \Leftrightarrow 64 < 65\,.$$

Atividade 2.4

a) $0,334 = \frac{334}{1000} > \frac{1}{3}$, uma vez que $3 \times 334 > 1000$

b) $0,334 - \frac{1}{3} = \frac{334}{1000} - \frac{1}{3} = \frac{1002 - 1000}{3000} = \frac{2}{3000} < \frac{1}{1000}$

c) Basta examinar o resultado em b)

Exercícios propostos

1. $n < 8$

2. a) e b) $x \neq -1$ e $x \neq 1$ c) $x \neq \pm\sqrt{2}$

3. a) e b)

4. a) $\frac{5}{2}$, b) $r > 4$ ou $r < 0$

5. a) $\frac{-31}{7} < -0,3259 < \frac{21}{10} < 2,1342 < 2,134201$

   b) $24,30034$

6. $z = 60$

Aula 3 – Números irracionais - enfoque geométrico

Objetivos

- concluir que os números racionais são insuficientes para realizar todas as medidas;
- descrever uma infinidade de números irracionais;
- realizar sobre a reta real a representação geométrica de alguns números irracionais.

Estamos acompanhando o desenvolvimento da idéia de número. É um processo longo que pontuou a história do homem sobre a Terra. Relato da necessidade humana de contar objetos que levou à idéia abstrata de números naturais. E a partir daí, a necessidade de considerar números negativos e números racionais, estes últimos como expressões de partes da unidade.

Também trabalhamos nas aulas passadas a representação dos números naturais sobre uma reta orientada. Recorde com a **Figura 3.1**. A representação é tal que a distância entre o ponto 0 e o ponto 1 define uma unidade de medida. Assim dois números inteiros quaisquer consecutivos estão localizados na reta distantes um do outro, exatamente de uma unidade padrão de medida.

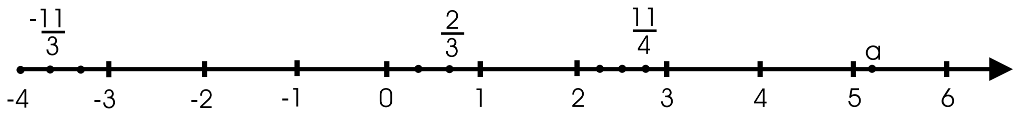


Figura 3.1: Números racionais na reta.

Por exemplo, o número $-\dfrac{11}{3}$ é tal que

$$-\frac{11}{3} = -\frac{9+2}{3} = -\left(3 + \frac{2}{3}\right).$$

Isto significa que $-\dfrac{11}{3}$ é um ponto à esquerda da reta, situado entre os pontos -4 e -3. Para dar conta da posição exata do número $\dfrac{-11}{3}$, dividimos o intervalo definido pelos números -4 e -3 em três partes iguais e assinalamos a posição procurada naquele ponto mais próximo de -4. Com isto, localizamos o número $\dfrac{-11}{3}$ sobre a reta. Volte e observe a **Figura 3.1**.

De modo geral, seja $\dfrac{m}{n}$ um número racional. Como localizar $\dfrac{m}{n}$ na reta numérica?

Vamos supor que, inicialmente, m e n são positivos e, portanto $\dfrac{m}{n}$ é positivo. Temos duas situações para examinar: $m < n$ ou $m \geq n$.

Primeiro caso: $m < n$ ou seja, $\dfrac{m}{n} < 1$.

Nesta situação, dividindo o intervalo cujos extremos são 0 e 1 em n partes iguais e tomando m destas partes, localizamos o número $\dfrac{m}{n}$. Veja na **Figura 3.1**, a localização do número $\dfrac{2}{3}$.

Segundo caso: $m > n$ ou seja, $\dfrac{m}{n} \geq 1$.

Neste caso, podemos efetuar a divisão euclidiana de m por n. Suponha que

$$m = q \cdot n + r\,, \quad 0 \leq r < n\,.$$

Logo, $\dfrac{m}{n} = \dfrac{q \cdot n + r}{n} = \dfrac{q \cdot n}{n} + \dfrac{r}{n} = q + \dfrac{r}{n}$. Em vista da divisão efetuada, concluímos que o número $\dfrac{m}{n}$ é um ponto sobre a reta, localizado entre os números inteiros q e $q+1$. Isto é

$$q \leq \frac{m}{n} < q + 1\,.$$

Em seguida, dividimos o intervalo de reta definido pelos números inteiros q e $q+1$ em n partes iguais e tomamos r destas partes. Acompanhe na **Figura 3.1**, o exemplo de localização do número $\dfrac{11}{4}$. Temos que,

$$\frac{11}{4} = \frac{2 \cdot 4 + 3}{4} = \frac{2 \cdot 4}{4} + \frac{3}{4} = 2 + \frac{3}{4}\,.$$

Depois desta discussão, podemos descrever geometricamente sobre uma reta todos os números racionais. De fato, considere uma reta orientada sobre a qual estão representados os números inteiros. Selecione dois números inteiros consecutivos, por exemplo, p e $p+1$, veja a **Figura 3.2**.

Figura 3.2: Um intervalo genérico.

Para encontrar números racionais no intervalo definido pelos números p e $p+1$, escolhemos um número natural n, dividimos o intervalo em n partes iguais. Cada ponto definido por uma destas divisões representa um número racional.

Note que o número de divisões n pode ser qualquer número natural (por exemplo $n = 10^{10^{10}}$). Este processo descreve todos os pontos da reta que representam números racionais entre p e $p+1$. Agora fazendo p variar nos números inteiros cobrimos toda a reta. Este é o modo de localizar a posição de qualquer número racional.

Por outro lado, volte e observe o ponto a na **Figura 3.1**.

- Qual é a distância do ponto a ao ponto 0?

Ou, a mesma pergunta feita de dois modos distintos:

- Qual é o número que deve ser gravado no lugar de a?

- Existe um número racional $\dfrac{m}{n}$ maior que 5 e menor que 6, tal que $a = \dfrac{m}{n}$?

Como veremos com exemplos, ainda nesta aula, existem pontos na reta que não podem ser representados por números racionais. O ponto a na **Figura 3.1** poderia ser um destes pontos. Isto significaria que, a medida do segmento de reta cujos extremos são o ponto zero e o ponto a não pode ser expressa por um número racional. Volte a observar a **Figura 3.1**.

Atividade 3.1

a) Encontre um número inteiro q tal que $q < -\dfrac{187}{13} < q+1$.

b) Desenhe a parte da reta onde estão localizados os números q e $q+1$ e identifique a posição do número $-\dfrac{187}{13}$.

Números irracionais

Estamos em plena viagem exploratória pelo mundo dos números!

Temos motivação suficiente vendo a importância que os números representam na organização de nossa sociedade. Pitágoras no século V a.C., um dos maiores matemáticos que o mundo conheceu, apregoava: “os números governam o mundo”. Na concepção de Pitágoras, o conjunto de números que deveriam “governar o mundo” eram os números racionais. E já naquele tempo percebeu-se que isto não era suficiente. Vamos aos fatos:

Para Pitágoras, a beleza da estrutura dos números era que a unidade e suas frações eram suficientes para expressar toda a beleza do universo. Naquela época tão remota, a Matemática confundia-se com a religião. Pitágoras e seus seguidores formaram o que hoje denominamos irmandade. O fato surpreendente ocorreu quando um discípulo de Pitágoras de nome Hipaso, percebeu que a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem uma unidade, não pode ser expressa por um número racional.

Vamos direto aos fatos: veja a **Figura 3.3** onde representamos um triângulo retângulo ABC cujos catetos AB e AC medem 1.

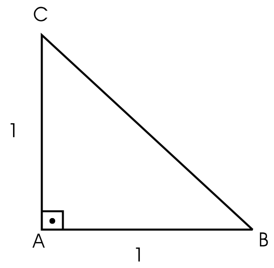


Figura 3.3: Triângulo retângulo de Hipáso.

Segundo o Teorema de Pitágoras temos que,

$$BC^2 = 1^2 + 1^2 = 2\,.$$

Hipaso chamou a atenção para o fato de que não existe um número racional cujo quadrado é 2. Isto é, para todo número racional $\dfrac{m}{n}$,

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 \neq 2\,.$$

A afirmação de Hipaso, foi extremo choque para Pitágoras, que não aceitou sua idéia de universo ser contrariada. Incapaz de refutar Hipaso, a história relata que Pitágoras usou seu poder na irmandade para condenar Hipaso à morte por afogamento.

- Mas por que não existe $\dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, tal que

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2\,?$$

Vamos manter o suspense! Antes precisamos de uma pequena preparação para responder à pergunta que acaba de ser formulada. Precisamos mostrar uma propriedade muito simples sobre os números naturais.

Proposição 3.1
Seja m um número natural. Se m^2 é par então m é par.

A propriedade sobre números naturais garantida pela proposição pode ser representada simbolicamente por

$$m^2 \text{ é par} \Rightarrow m \text{ é par}\,,$$

Para provar a proposição 3.1, vamos dar um passo é preparatório.

Passo preparatório: Vamos provar que se m é ímpar então m^2 é ímpar.

Veja como é a prova. Se m é ímpar então $m = 2p + 1$, para algum $p \in \mathbb{N}$. Isto é, $m^2 = (2p+1)^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2(2p^2 + 2p) + 1$, evidenciando que m^2 é ímpar. Provamos então que

$$m \text{ ímpar} \Rightarrow m^2 \text{ ímpar}.$$

Tendo estabelecido o resultado preparatório voltamos à prova da proposição. Queremos provar que se m^2 é par então m é par. Em símbolos necessitamos provar a implicação

$$m^2 \text{ par} \Rightarrow m \text{ par}. \tag{3.1}$$

Mas, Cuidado!

Leia com atenção a afirmação 3.1 acima! Para qualquer afirmação que se faça, em particular para esta afirmação com a qual estamos trabalhando, existem somente duas possibilidades: a afirmação é falsa ou é verdadeira. Nosso trabalho é mostrar que é verdadeira (...) ou mostrar que ela não é falsa. Isto em Matemática é incrível! E veja como provar que a afirmação escrita em (3.1) não é falsa.

Suponha que é falsa. Então encontraremos algum número natural m tal que m^2 é par e m é ímpar (m^2 par $\Rightarrow m$ ímpar). Uma situação destas pode existir? É claro que não. O passo intermediário, mostrou que se m é ímpar então m^2 é ímpar (m ímpar $\Rightarrow m^2$ ímpar). Juntando os raciocínios encontramos que

$$m^2 \text{ par} \Rightarrow m \text{ ímpar} \Rightarrow m^2 \text{ ímpar}.$$

Temos uma contradição, evidenciando que a implicação (3.1) não pode ser falsa. Portanto, a afirmação (3.1) é verdadeira.

Isto finaliza a prova da Proposição 3.1. $\square$

O método de prova, usado na proposição 3.1, é chamado de método da contraposição. O método garante que para provar que $A \Rightarrow B$ é suficiente mostrar que a suposição que A é verdadeira e B é falsa induz uma contradição.

Agora estamos prontos para provar que, não existe um número racional que meça a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos lados medem a unidade. Isto é, não existe $\dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, tal que

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2. \tag{3.2}$$

Na igualdade anterior podemos supor que $\dfrac{m}{n}$ é uma fração irredutível. Ou seja, m e n não possuem divisores comuns além da unidade. Agora, se existisse um número racional com as propriedades anteriores, então

$$m^2 = 2n^2\,.$$

Vamos em frente! Veja a igualdade acima. Ela diz que m^2 é par. Ora se m^2 é par então m é par (proposição 3.1). Isto é, $m = 2p$, para algum $p \in \mathbb{N}$. Então voltando à igualdade escrevemos

$$(2p)^2 = 2n^2 \Rightarrow 4p^2 = 2n^2 \Rightarrow 2p^2 = n^2\,.$$

A última igualdade mostra que n^2 é par. Mas então n também é par (usamos aqui de novo a proposição 3.1). Mas daí, m é par e n é par. Uma contradição, pois sendo a fração $\dfrac{m}{n}$ irredutível não pode ser simplificada por 2. Isto mostra que a igualdade 3.2 não pode acontecer.

Conclusão: Existem medidas que não podem ser expressas por um número racional. Veja a **Figura 3.4**, que localiza sobre a reta orientada o número a, tal que $a^2 = 2$. Denotamos, simbolicamente, este número por $a = \sqrt{2}$ e o denominamos a raiz quadrada de 2.

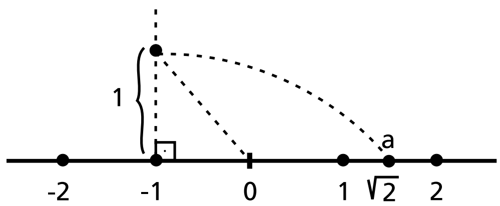


Figura 3.4: O número irracional $\sqrt{2}$.

UFA! Acabamos de subir uma pequena ladeira. Nesta posição um pouco mais elevada, a vista é larga e abrangente. Vale a pena recordar nossa subida e tirar algumas conseqüências.

- Qual foi o procedimento?

Encontramos o primeiro número irracional ao medirmos a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos lados medem 1. Isto foi possível porque provamos que, se a é o número que representa a medida da hipotenusa deste triângulo então

$$a \neq \frac{m}{n}\,,\ \text{ quaisquer que sejam } m\,,\ n \in \mathbb{Z}\,.$$

Denotamos $a = \sqrt{2}$ e encontramos nosso primeiro número irracional. Vamos às conseqüências. Observe que se $p \in \mathbb{Z}$ é um inteiro qualquer não nulo, então $p\sqrt{2}$ é também irracional. Vamos provar isto. Suponha, por absurdo, que $p\sqrt{2}$ é racional. Então, para algum m e n inteiros, com $n \neq 0$,

$$p\sqrt{2} = \frac{m}{n} \;\Rightarrow\; \sqrt{2} = \frac{m}{n \cdot p}\,.$$

Isto implicaria que $\sqrt{2}$ é racional. Isto é uma contradição. Logo $p\sqrt{2}$ é irracional.

Conclusão: temos já um número infinito de números irracionais

$$\ldots\; -3\sqrt{2},\, -2\sqrt{2},\, -\sqrt{2},\, \sqrt{2},\, 2\sqrt{2},\, 3\sqrt{2},\, 4\sqrt{2},\, \ldots$$

Afirmamos também que, para qualquer número natural n, $\dfrac{\sqrt{2}}{n}$ é um número irracional.

De fato, suponha por absurdo que $\dfrac{\sqrt{2}}{n} = \dfrac{p}{q}$, onde $p,\, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$. Então $\sqrt{2} = \dfrac{p \cdot n}{q}$ implicando que $\sqrt{2}$ seria racional. Esta contradição garante que $\dfrac{\sqrt{2}}{n}$ é irracional.

- Como representar na reta numérica $\dfrac{\sqrt{2}}{n}$?

Tomamos o segmento de reta cujos extremos são os pontos 0 (zero) e $\sqrt{2}$ e dividimos o segmento em n partes iguais. O ponto da divisão mais próximo de zero, representa $\dfrac{\sqrt{2}}{n}$. Veja na figura o ponto $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

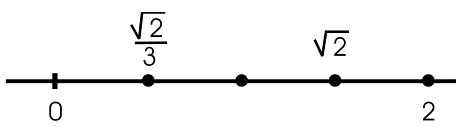


Figura 3.5

O mesmo tipo de argumento desenvolvido acima, é suficiente para provar que $\dfrac{p}{q}\sqrt{2}$ é um número irracional, onde $p,\, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$. Também é fácil de encontrar o ponto que representa $\dfrac{p}{q}\sqrt{2}$ na reta orientada. Veja como isto é realizado.

Primeiro, note que $\frac{p}{q}\sqrt{2} = p\left(\frac{\sqrt{2}}{q}\right)$. Em seguida, dividimos o segmento cujos extremos são os pontos representados pelo número zero e o número $\sqrt{2}$, e localizamos o ponto que representa $\frac{\sqrt{2}}{q}$. A partir daí, tomamos sucessivamente p destes segmentos um após o outro, para localizar o ponto que representa o número $p\left(\frac{\sqrt{2}}{q}\right)$. Veja na figura os números irracionais $\frac{3}{4}\sqrt{2}$ e $\frac{5}{4}\sqrt{2}$.

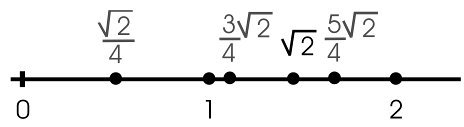


Figura 3.6

Atividade 3.2

Usando o Teorema de Pitágoras, determine as medidas x, y, z e w dos segmentos da **Figura 3.7**.

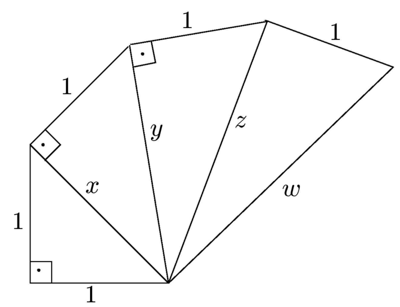


Figura 3.7

Encontramos o primeiro número irracional $\sqrt{2}$ como o número que fornece a medida de um segmento da reta. Esta é a única maneira de obter números irracionais.

Para nossos objetivos agora, podemos enunciar uma definição geométrica:

Definição 3.1

Um número é irracional quando ele é o valor da medida de um segmento de reta e que não pode ser escrito na forma $\frac{m}{n}$, onde m e n são números inteiros.

Nota: Na verdade, definimos acima os números irracionais positivos (uma vez que a medida de um segmento é positivo). Para acrescentar os números irracionais negativos, basta tomar os simétricos (negativos) dos números irracionais positivos.

Se denotarmos por $\mathbb{I}$ o conjunto dos números irracionais, então $\mathbb{R}$,

$$\mathbb{R} = \mathbb{I} \cup \mathbb{Q}\,,$$

é o conjunto dos números reais.

O número π

Outra medida importante detectada na antigüidade e que não pode ser expressa por um número racional foi o número π.

Para entender, tome um círculo de diâmetro igual a 1 e force este círculo a rolar sem deslizamento ao longo de uma reta, como na **Figura 3.8**.

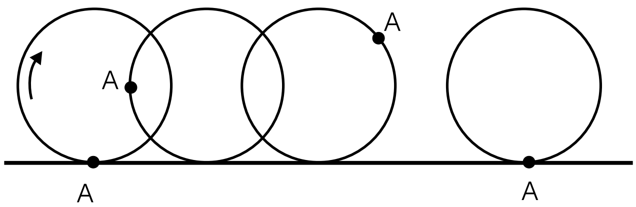


Figura 3.8: O perímetro do círculo.

O segmento de reta, compreendido entre duas posições consecutivas em que um ponto escolhido A toca a reta de rolagem, tem comprimento que denominamos π.

O número π é portanto o comprimento ou perímetro de um círculo cujo diâmetro mede 1.

O número π já era estudado à época do Oriente antigo e era lhe atribuído o valor aproximado de $\dfrac{256}{81} \simeq 3,16\ldots$. Este dado histórico esta registrado no Papiro de Rhind (1650 a.C.).

O grande geômetra da época grega (séc IV a.C.), Arquimedes de Siracusa, desenvolveu métodos geométricos eficientes para calcular valores numéricos ainda mais próximos para π. Usando um polígono de 96 lados inscrito numa circunferência, encontrou $\pi \sim 3,1428$.

No entanto, foram precisos mais de 3400 anos para que, em 1882, o matemático inglês Ferdinand Lindeman pudesse provar que o número π é irracional.

Para encerrar a aula, queremos apresentar ainda dois resultados sobre existência de números irracionais.

Você pode concluir através da Atividade 2 que, para qualquer número natural m existe um segmento cuja medida l é tal que $l^2 = m$. Faz sentido, portanto, definir o comprimento destes segmentos por $\sqrt{m}$. Com esta definição, $\sqrt{m}$ é a medida de um segmento e vale

$$\sqrt{m} \cdot \sqrt{m} = m\,.$$

O número $\sqrt{m}$ é dito a raiz quadrada de m e uma questão relevante é a seguinte: dado um número natural m, decidir se $\sqrt{m}$ é racional ou irracional.

Para encerrar esta Aula, provaremos que $\sqrt{3}$ e $\sqrt{2p}$ são números irracionais, se p é qualquer número natural ímpar.

Para provar estes resultados precisamos de preparação. Imitando a Proposição 3.1, vamos provar que:

Proposição 3.2
Seja m um número natural. Se m^2 é divisível por 3 então m é divisível por 3.

Prova: O que queremos provar é:

$$m^2 \text{ divisível por } 3 \Rightarrow m \text{ divisível por } 3\,.$$

Ora, se m^2 é divísivel por 3, então

$$m^2 = 3q\,,$$

para algum número natural q. Agora, efetuando a divisão euclidiana de m por 3 encontramos que

$$m = 3k + r\,, \text{ onde } 0 \leq r < 3\,. \tag{3.3}$$

Isto é, $k > 0$ e o resto r é um dos números 0, 1 ou 2. Então,

$$3q = m^2 = (3k+r)^2 = 9k^2 + 6kr + r^2\,.$$

Ou seja,

$$q = 3k^2 + 2kr + \frac{r^2}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{r^2}{3} = q - 3k^2 - 2kr\,.$$

- O que mostra a última igualdade?

Do lado direito temos um número inteiro $q-3k^2-2kr$. Então, do lado esquerdo, o número deve ser inteiro. Mas $0 \leq r < 3$. Isto é, $r = 0,\ 1$ ou 2. Note que os valores $r = 1$ e $r = 2$ produzem para $\dfrac{r^2}{3}$ os valores não inteiros $\dfrac{1}{3}$ e $\dfrac{4}{3}$. Logo, $r = 0$ e em (3.3), escrevemos $m = 3k$. Portanto, m é divisível por 3.

$\square$

Usando o resultado da Proposição 3.2, podemos provar que:

Proposição 3.3
O número $\sqrt{3}$ é irracional.

Prova: De fato, suponha, por absurdo, que $\sqrt{3}$ é um número racional. Então

$$\sqrt{3} = \frac{m}{n}\,,$$

onde $\dfrac{m}{n}$ é uma fração irredutível com $n > 0$. Logo,

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = (\sqrt{3})^2 \quad \Rightarrow \quad m^2 = 3n^2\,.$$

A última igualdade mostra que m^2 é divisível por 3. Então a Proposição 3.2 garante que m é divisível por 3. Isto é, $m = 3q$, para algum número natural q. Então

$$m^2 = 3n^2 \Rightarrow (3q)^2 = 3n^2 \Rightarrow 3q^2 = n^2\,.$$

Então n^2 é divisível por 3. De novo, a Proposição 3.2 garante que n é divisível por 3. Mas isto não pode ocorrer, porque m e n divisíveis por 3 contraria o fato que $\dfrac{m}{n}$ é uma fração irredutível. Este absurdo prova que

$$\sqrt{3} \neq \frac{m}{n}\,,$$

para quaisquer números inteiros m e n. Portanto, $\sqrt{3}$ é irracional.

$\square$

Proposição 3.4
Se p é um número natural ímpar então $\sqrt{2p}$ é irracional.

De fato, vamos supor, por absurdo, que existe uma fração irredutível $\dfrac{m}{n}$, $n > 0$, tal que

$$\sqrt{2p} = \frac{m}{n}\,. \tag{3.4}$$

Então,

$$2p = \left(\frac{m}{n}\right)^2 \Rightarrow m^2 = 2pn^2 .$$

logo m^2 é par. Pela Proposição 3.1, m é também par. Isto é, $m = 2k$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Logo,

$$(2k)^2 = 2pn^2 \Rightarrow 4k^2 = 2pn^2 \Rightarrow 2k^2 = pn^2 .$$

Isto mostra que pn^2 é par. Mas como p é um número ímpar, para pn^2 ser par a única possibilidade é que n^2 seja par. Pela Proposição 3.1, n^2 sendo par temos que n é par. Ora, m par e n par implica que $\dfrac{m}{n}$ é redutível (podemos dividir por 2). Isto é uma contradição. Logo não é possível escrever a igualdade (3.4) e $\sqrt{2p}$ é um número irracional.

Atividade 3.3

Prove com auxílio da Proposição 3.4, que são irracionais os números:

a) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

b) $\sqrt{2} - \sqrt{3}$

Exercícios

1. Assinale verdadeiro (V) ou falso (F) para cada uma das afirmações abaixo e justifique sua resposta.

   (a) Se r e q são números racionais então $r + q$ é um número racional.

   (b) Se r e q são números racionais e ambos não inteiros então $r - q$ pode ser um número inteiro.

   (c) Se r e q são números racionais, com $q \neq 0$, então $r + q\sqrt{2}$ é sempre irracional.

   (d) Existem infinitos números irracionais.

2. A partir de dois segmentos de reta de medidas m e n, mostre como construir um segmento de medida $\sqrt{mn}$.

3. Prove que $\sqrt{2} + \sqrt{p}$ é um número irracional se p é um número primo.

Respostas

Atividade 3.1

a) $\dfrac{-187}{13} = -15 + \dfrac{8}{13} \Rightarrow, \quad q = -15$

Atividade 3.2 $x = \sqrt{2},\;\; y = \sqrt{3},\;\; , z = \sqrt{4} = 2,\;\; w = \sqrt{5}$

Atividade 3.3

a) Escreva $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \dfrac{m}{n}$ e eleve ao quadrado. Use a proposição 3.4.

b) Mesma sugestão de a).

Exercícios

1. a) V   b) V   c) V   d) V

2. Construir um semi-círculo cujo diâmetro mede $m + n$. Sejam A e B os pontos extremos do diâmetro e C um ponto interior ao segmento AB de modo que $AC = m$ e $BC = n$. A semi-reta com origem em C, ortogonal a AB corta o semi-círculo no ponto D. Então CD é o segmento procurado.

3. Suponha que $\sqrt{2} + \sqrt{p} = \dfrac{m}{n}$ eleve ao quadrado e use a proposição 3.4.

Aula 4 – Números reais – representação decimal

Objetivos

- entender os números reais positivos como medida de um segmento da reta real;
- encontrar representações decimais para números racionais;
- distinguir entre os números racionais, aqueles que possuem representação decimal finita daqueles que só possuem representação decimal infinita;
- associar representação decimal infinita e periódica a números racionais;
- entender que um número irracional tem uma representação decimal infinita e não periódica.

Na aula anterior tomamos contato com o primeiro número irracional. Este número foi representado pelo símbolo $\sqrt{2}$ e expressa a medida do comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem a unidade. Este resultado mostrou que os números racionais não são suficientes para medir o comprimento de todos os segmentos. É preciso mais uma vez aumentar o nosso conjunto de números.

Recorde como começamos! Necessidade de contar objetos levou à idéia abstrata do conjunto dos números naturais,

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}\,.$$

Em seguida, devido à necessidade de expressar contagem negativa (perda, prejuízo) chegamos aos números inteiros $\mathbb{Z}$,

$$\mathbb{Z} = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}\,.$$

Como $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, o que fizemos foi uma ampliação do conjunto $\mathbb{N}$.

Indo mais além, a necessidade de considerar partes da unidade levou à formulação dos números racionais,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n}\,;\ m,\, n \in \mathbb{Z} \ \text{e} \ n \neq 0 \right\}.$$

Foi mais uma ampliação na nossa capacidade de medir. E neste nível atingido temos que

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}\,.$$

No entanto, com a impossibilidade de exprimir o comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem uma unidade, por um número racional, somos levados a promover nova ampliação. Ao conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$, devemos adicionar o conjunto dos números irracionais $\mathbb{I}$.

- E quais são todos estes números irracionais?

Apelamos para nosso modelo usual, uma reta orientada onde estão localizados os números racionais. Neste modelo os números irracionais são interpretados como medida de segmentos que não podem ser medidos pelos números racionais. Juntando ao conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ ao conjunto dos números irracionais $\mathbb{I}$, chegamos ao conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. Então

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}\,.$$

Nesta aula vamos aprofundar um pouco nosso conhecimento sobre os números irracionais e por conseqüência sobre os números reais.

Para motivar o desenvolvimento lanço uma pergunta:

- Qual é o comprimento do maior lado da mesa de sua sala?

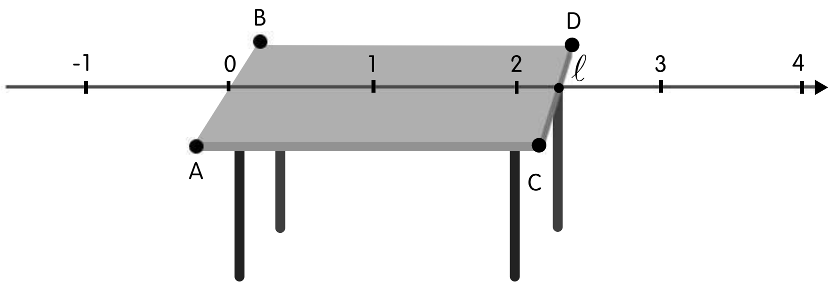


Figura 4.1: Medida da largura da mesa I.

Vamos imaginar que a mesa seja retangular, como ilustrada na **Figura 4.1**. Sobre a mesa está representada uma reta r orientada sobre a qual estão localizados os números inteiros.

Note que a reta r está posta perpendicularmente ao menor lado AB da mesa e o ponto 0 (zero) está localizado sobre este lado. Suponha ainda que o ponto 1 também esteja estrategicamente localizado, de modo que o comprimento do segmento cujos extremos são 0 e 1 vale um metro. Este segmento é o segmento unidade U.

Também, o ponto l, localizado sobre a reta e sobre o segmento CD, representa um número que definirá a medida do comprimento da mesa. Certamente, a medida l será superior a dois metros e inferior a três metros.

- Em que circunstâncias podemos garantir que l é um número racional?

Existe uma resposta muito simples a esta pergunta. Pense um pouco, antes de ler a resposta.

Resposta: O número l é racional se for possível dividir o segmento de extremos 2 e 3 em n partes iguais (n um número natural bem escolhido) de modo que um ponto da divisão caia sobre l.

Para exemplificar uma possibilidade, suponha que após a divisão do segmento de extremos 2 e 3 em 512 partes iguais, um dos pontos da subdivisão cai sobre o ponto l e este é o ponto número 204, quando contamos as subdivisões da esquerda para a direita. Então

$$l = 2 + \frac{204}{512} = \frac{1024 + 204}{512} = \frac{1228}{512} = \frac{307}{128},$$

que é um número racional.

Por outro lado, se a medida l é representada por um número irracional, então para toda divisão do intervalo de extremos 2 e 3 em n partes iguais, nenhum ponto das subdivisões encontradas coincidirá com o ponto l. Esta situação ocorre, por exemplo, se o comprimento l da mesa é $2\sqrt{2}$.

Vamos explorar um pouco esta possibilidade de l ser igual a $2\sqrt{2}$. É claro que a medida $2\sqrt{2}$ metros para a largura da mesa é extremamente precisa, mas nunca utilizada na prática.

Imagine que você está numa loja de móveis e pergunta ao vendedor a largura de uma mesa em exposição na vitrine. Nunca o vendedor responderá $2\sqrt{2}$ metros. Ele responderá uma medida racional muito próxima de $2\sqrt{2}$. Como isto acontece? Como se expressa no dia a dia esta medida? Bem, o vendedor da loja lança mão de um "metro". Este instrumento de trabalho é uma barra ou régua de madeira expressando a unidade de comprimento usual denominada metro. Este metro está dividido em 10 partes iguais, cada uma destas partes definindo um decímetro e cada decímetro aparece dividido em 10 partes iguais, definindo um centímetro. Se o metro for especial, pode ainda dividir o centímetro em 10 partes iguais, definindo um milímetro.

A unidade U de medida usada pelo vendedor é o metro. A relação entre as outras medidas pelo fracionamento estão assim relacionadas:

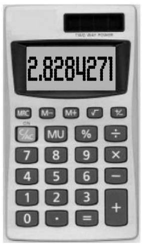
$$1\,m = 10\,dm,\ 1\,dm = 10\,cm,\ 1\,cm = 10\,mm\,.$$

Ou ainda,

$$1\,dm = \frac{1}{10}\,m,\ 1\,cm = \frac{1}{100}\,m,\ 1\,mm = \frac{1}{10^3}\,m\,.$$

Para medir então o comprimento l da mesa, o vendedor anota quantas vezes, no máximo, o metro cabe no segmento AC (comprimento da mesa), veja a **Figura 4.1**. Isto é feito, colocando sucessivamente o metro sobre a mesa a partir do ponto 0 (zero) em direção ao ponto l (sem justapor as medidas). Depois o vendedor verifica quantas vezes, no máximo, cabe no segmento restante, o decímetro, repetindo a operação para os centímetros e depois para os milímetros.

Uma máquina de calcular mostra no visor o resultado da operação $2 \times \sqrt{2}$.



com 7 dígitos de aproximação.
$2\sqrt{2} \sim 2,8284271$

Agora vamos usar fortemente a suposição que o comprimento da mesa é $l = 2\sqrt{2}$. Se você tem uma máquina de calcular, veja que valor a máquina oferece para $2\sqrt{2}$, ou consulte a lateral desta página. Então, ao medir o comprimento do segmento L, que representa a largura da mesa, veja a **Figura 4.2**, o vendedor constatou o seguinte:

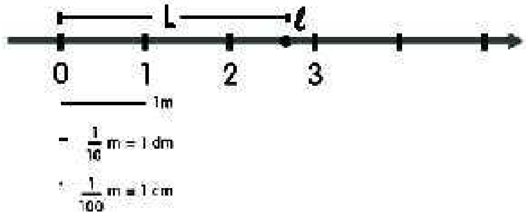


Figura 4.2: Medida da largura da mesa II.

a) No segmento L cabem 2 metros, mas 3 metros excedem. Então 2 metros é a primeira aproximação grosseira de l.

b) No segmento que resta a ser medido, cujos extremos são os pontos 2 e o ponto l, cabem 8 vezes $\dfrac{1}{10}\,m$, mas 9 vezes $\dfrac{1}{10}\,m$ excedem. Então

$$l_1 = 2 + \frac{8}{10} = 2,8$$

é uma medida próxima de l. O erro desta medida é inferior a $\dfrac{1}{10}\,m$. Note que o valor de referência 8 usado está inscrito no visor da máquina de calcular.

c) $l_1 = 2,8$ é um ponto muito próximo de l e à esquerda de l. Entre l_1 e l não cabe $\dfrac{1}{10}\,m = 1\,dm$. No segmento cujos extremos são os pontos l_1 e l cabem $\dfrac{2}{100}\,m = 2\,cm$. Mas $\dfrac{3}{100} = 3\,cm$ excedem.

Então

$$l_2 = 2 + \frac{8}{10} + \frac{2}{100} = 2,82$$

é uma medida aproximada para l, com erro inferior a $\dfrac{1}{100}m = 1cm$.

d) No segmento cujos extremos são os pontos l_2 e l cabem $\dfrac{8}{1000}\,m = 8\,mm$, mas $\dfrac{9}{1000}\,m = 9\,mm$ excedem.

Assim,

$$l_3 = l_2 + \frac{8}{1000} = 2 + \frac{8}{10} + \frac{2}{100} + \frac{8}{1000} = 2,828\,,$$

é uma medida aproximada de l com erro inferior a $\dfrac{1}{1000}m = \dfrac{1}{10^3}m = 1mm$.

Em conclusão,

$$l \sim 2,828\,m$$

é a medida aproximada do comprimento da mesa, com erro inferior a um milímetro. E quem se importa com erro de 1 milímetro para medida do comprimento de uma mesa? Portanto, em termos práticos substituímos o número irracional $2\sqrt{2}$, pelo número racional 2,828. Isto é

$$l \simeq 2,828 = \frac{2828}{1000} = \frac{707}{250}\,.$$

Mas, note. Se o vendedor tivesse meios técnicos continuaria usando $\dfrac{1}{10^4}\,m$, $\dfrac{1}{10^5}\,m$ etc ... e obtendo valores racionais cada vez mais próximos de l. Por exemplo,

$$l \sim 2,82842712\,,$$

é uma medida de l com erro menor que $\dfrac{1}{10^8} = \dfrac{1}{100000000}$.

Moral da história: Desconfiem quando o noticiário da televisão diz que a temperatura em Brasília atingiu máxima de $39,4$ graus no último verão. Este número não é exato. Há probabilidade desta medida de temperatura ser uma aproximação racional do número irracional $28\sqrt{2}$. Neste caso, a notícia um pouco mais exata seria que a temperatura máxima do último verão em Brasília foi de 39,59797968 graus. Esta desconfiança sobre a notícia tem fundamento. Mais tarde, em nossos estudos, poderemos provar que "existem muito mais números irracionais que números racionais".

Exemplo 4.1

Existem números irracionais muito próximos do número irracional $2\sqrt{2}$. Veja a prova que $a = 2\sqrt{2} + \dfrac{1}{500}$ é um número irracional.

De fato, suponha por absurdo que a seja racional. Então $a = \dfrac{m}{n}$ para $m,\, n \in \mathbb{Z}$ e $n \neq 0$. Logo

$$2\sqrt{2} + \frac{1}{500} = \frac{m}{n}\,.$$

Assim

$$2\sqrt{2} = \frac{m}{n} - \frac{1}{500} = \frac{500m - n}{500n}\,,$$

Logo

$$\sqrt{2} = \frac{500m - n}{1000n}\,.$$

- O que mostra a igualdade anterior?

No segundo membro temos no numerador $500m - n$, que é um número inteiro e no denominador $1000n$, outro número inteiro. Isto leva à conclusão que o segundo membro é um número racional. No entanto, o primeiro membro é $\sqrt{2}$, um número irracional. Isto é uma contradição. Um número irracional não pode ser igual a um número racional.

- O que nos levou a esta contradição?

Foi o fato de supormos, no início de nossa prova que $2\sqrt{2} + \frac{1}{500}$ é um número racional. Então não tem saída, $2\sqrt{2} + \frac{1}{500}$ é um número irracional.

Atividade 4.1

a) Use argumentos como no exemplo 4.1 acima para provar o seguinte: Se i é um número irracional e n é um número inteiro então $i + n$ é um número irracional.

b) Represente numa reta numérica os números 0 (zero), 1 e os números do conjunto $\{m + \sqrt{2}\,;\ m \in \mathbb{Z}\}$.

Representação decimal de números reais positivos

A motivação central desta aula é a representação decimal dos números reais.

Considere uma reta real, como na **Figura 4.3**, onde localizamos um ponto, sobre o qual está identificado o número real b. Temos dois segmentos em destaque, o segmento unidade U, cujos extremos são os pontos (números) 0 (zero) e 1 e o segmento B cujos extremos são os pontos (números) 0 (zero) e b.

Vale a pena destacar que

$$\text{medida (U)} = 1 \ \text{ e } \ \text{medida } (B) = b\,.$$

Isto é, os comprimentos dos segmentos U e B são dados pelos números reais 1 e b, respectivamente.

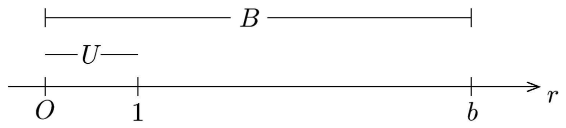


Figura 4.3: Os segmentos B e U.

Vamos medir o segmento B e identificar o número real b. Nesta direção vamos encontrar a representação decimal do número real b. Temos que considerar algumas possibilidades.

$1^{\underline{a}}$ **possibilidade:** b é um número inteiro, por exemplo, $b = 3$. Neste caso,

$$b = 3,0000\ldots$$

é a representação decimal de b.

$2^{\underline{a}}$ **possibilidade:** b é um número racional não inteiro ou irracional e, neste caso, também vamos definir o valor de b através de sua representação decimal. Suponha que o ponto b tem localização na reta como na **Figura 4.4**.

Procedemos do seguinte modo. Definimos U como unidade de medida, U mede 1. Você pode imaginar U como sendo o metro do vendedor da loja.

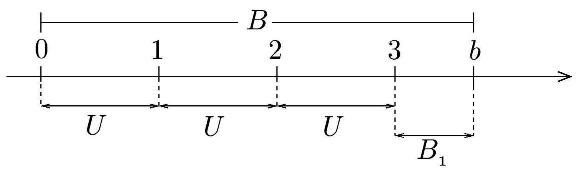


Figura 4.4: A medida do segmento B.

Encaramos o segmento B como um caminho a ser percorrido de 0 (zero) até b. Ou ainda, um caminho que queremos pavimentar ou ladrilhar linearmente com varetas. Varetas são segmentos cujos comprimentos são baseados na unidade U e em suas divisões decimais.

Vamos olhar este processo de pavimentar com varetas o caminho retilíneo de 0 até b como uma brincadeira. Expliquemos melhor nosso jogo.

Temos tantas varetas quanto quisermos de comprimento 1. Temos 9 varetas de comprimento $\frac{1}{10}$, 9 varetas de comprimento $\frac{1}{100}$, 9 de comprimento $\frac{1}{10^3}$, $\ldots$, 9 de comprimento $\frac{1}{10^n}$, $\ldots$ e assim por diante.

- Mas qual é a regra da brincadeira?

Regra: A pavimentação começa no ponto 0 (zero) e vai em direção ao ponto b. Usando em ordem, primeiro as varetas de comprimento 1, depois as de comprimento $\frac{1}{10}$, depois as de $\frac{1}{100}$ e, assim por diante. Só paramos de usar um tipo de vareta se esta não couber mais no caminho, isto é, a vareta se colocada ultrapassa o ponto b. Nesta situação, passamos a usar o tipo seguinte de vareta de comprimento 10 vezes menor.

Para facilitar a linguagem, a vareta (segmento) unidade é denotada por U. Cada uma das varetas seguintes de comprimentos $\frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10^3}, \ldots, \frac{1}{10^n}, \ldots$, são denotadas por U_1, U_2, U_3, …, U_n, …. Dentro das regras do jogo, em primeiro lugar, usamos o tipo maior de varetas, representadas pelo segmento unidade U. Acompanhe pela **Figura 4.4** e observe que encontramos que cabem 3 vezes o segmento U no segmento B. Isto significa que podemos escrever que

$$b \sim 3\,.$$

Isto é, b é um número real próximo a 3. Mas, b é superior a 3, uma vez que se encontra mais à frente no sentido de percurso da reta real. Ou dito em outras palavras, do ponto em que não podemos mais usar varetas de comprimento 1 até chegar ao ponto b, temos ainda um segmento restante a ser percorrido (pavimentado). Este segmento restante está identificado com o segmento B_1 e representado na **Figura 4.4**.

Para cobrir B_1 lançamos mão dos segmentos (varetas) U_1 de comprimento $\frac{1}{10}$. Note que possuímos 9 destas varetas U_1. E não precisaremos mais que estas, uma vez que 10 segmentos de comprimento $\frac{1}{10}$ resultam comprimento 1 e B_1 tem medida inferior à unidade. Veja a **Figura 4.5**.

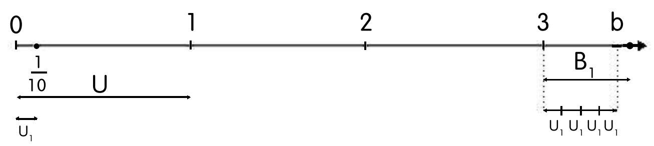


Figura 4.5: Medida do segmento B_1.

Trabalhando agora com hipóteses, suponha possível colocar 4 segmentos U_1 no segmento restante B_1 e que, no entanto, 5 segmentos U_1 seriam excessivos para cobrir B_1. Neste caso, escrevemos

$$b \sim 3 + \frac{4}{10} = \frac{30+4}{10} = \frac{34}{10}\,.$$

Ou,

$$b \sim 3 + \frac{4}{10} = 3 + 0,4 = 3,4\,.$$

Isto é, b pode ser medido aproximadamente por 3,4. Além do mais, o erro que cometemos ao escrever ou ao identificar b com 3,4 é inferior a $\frac{1}{10}$.

Já usamos 3 varetas de comprimento 1 e 4 varetas de comprimento $\frac{1}{10}$. Mas ainda não chegamos lá! Então lançamos mão dos segmentos (varetas) U_2 de comprimento $\frac{1}{100}$ para pavimentar mais à frente nosso caminho até o ponto b. Suponha que podemos colocar 7 segmentos (varetas) U_2 de comprimento $\frac{1}{100}$ no buraquinho que falta para pavimentarmos o caminho até o ponto b, mas que 8 destes segmentos (varetas) ultrapassam b. Então podemos escrever

$$b \sim 3 + \frac{4}{10} + \frac{7}{100} = \frac{300 + 40 + 7}{100} = \frac{347}{100}\,.$$

Ou,

$$b \sim 3,47\,.$$

O valor obtido é muito próximo de b. Ao trocarmos b por 3,47, estaríamos cometendo um erro inferior a $\frac{1}{100}$.

Vamos refletir um pouco sobre esta nossa pavimentação. Temos apenas duas situações futuras a considerar:

1ª **situação**: Ao prosseguirmos no processo, e tendo usado sucessivamente as subdivisões U_1, U_2, U_3, ... da unidade U, chegamos a uma situação que ao usarmos varetas de comprimento $\frac{1}{10^n}$, alcançamos exatamente o ponto b.

Vamos considerar um exemplo hipotético desta situação para tirarmos conclusões. Vamos supor, por exemplo, que ao usarmos varetas U_5 de comprimento $\frac{1}{10^5}$ fechamos com

$$b = 3 + \frac{4}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{1}{10^5}\,.$$

Neste caso,

$$b = 3,47251$$

é a representação decimal do número b.

2ª **situação**: O processo nunca termina. Ao usarmos sucessivamente as varetas $\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2, \ldots \mathrm{U}_n$, estas varetas não dão conta de fechar exatamente o processo. Um último segmento (vareta) U_n não atinge o ponto b, enquanto que mais um segmento U_n ultrapassa b. Neste caso, só resta a opção de continuar indefinidamente.

Por exemplo, poderíamos encontrar a situação em que escreveríamos

$$b = 3 + \frac{4}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{8}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{0}{10^5} + \frac{8}{10^6} + \frac{2}{10^7} + \ldots$$

Ou

$$b = 3,4785082\ldots .$$

Os pontinhos significam que o processo continua. A igualdade acima expressa a representação decimal de b.

Resumo

Voltamos à reta real orientada como indicada na **Figura 4.6**, onde estão os pontos 0 (zero), 1 e um ponto arbitrário b, para um resumo.

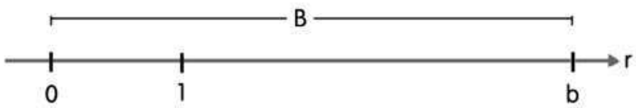


Figura 4.6: Volta ao segmento B.

Note que b é um número real que expressa a medida do segmento B de extremos 0 (zero) e b.

O que vimos na nossa discussão anterior é que dependendo da posição de b, podemos encontrar dois casos:

1º **caso**: b se expressa como uma soma de um número finito de parcelas,

$$b = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n},$$

onde a_0 é um número inteiro maior ou igual a zero e a_1, a_2, $\ldots$, a_n são números inteiros maiores ou iguais a zero e menores ou iguais a 9.

Neste caso b se escreve como

$$b = a_0, a_1\, a_2\, a_3\, \ldots\, a_n\,. \tag{4.1}$$

Note que

$$b = \frac{a_0 \times 10^n + a_1 \times 10^{n-1} + a_2 \times 10^{n-2} + \ldots + a_n}{10^n}. \tag{4.2}$$

Portanto, b é um número racional.

$2^{\underline{o}}$ **caso**: b se expressa como soma de um número infinito de parcelas,

$$b = b_0 + \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \ldots + \frac{b_m}{10^m} + \ldots\,, \tag{4.3}$$

onde b_0 é um número inteiro maior ou igual a zero e b_1, b_2, $\ldots$, $b_m, \ldots$ são números inteiros maiores ou iguais a zero e menores ou iguais a 9.

Ou seja, podemos escrever

$$b = b_0, b_1\, b_2\, b_3\, \ldots\, b_m\, \ldots \tag{4.4}$$

Neste caso não acontece a possibilidade de que a partir de um certo índice m todos os dígitos b_{m+1}, b_{m+2}, b_{m+3}, etc sejam nulos.

E dentro do quadro que até agora pintamos, ficam duas questões. A primeira é identificar os números racionais cuja representação decimal é finita. A segunda questão é identificar dentre os números cuja representação decimal é infinita, aqueles que são racionais.

- Vamos nos dedicar a este assunto?

Números racionais com representação decimal finita

Do que vimos até agora existem números reais b, cuja representação decimal é finita. Isto é,

$$b = a_0, a_1\, a_2\, \ldots\, a_n\,,$$

onde $a_0 \in \mathbb{Z}$ e a_1, a_2, $\ldots$, a_n são números inteiros maiores ou iguais a zero e menores ou iguais a 9. Estes números são racionais, como expressa a fórmula 4.2.

Interessante notar que o denominador de (4.2) é $10^n = 2^n \times 5^n$. Isto é, na fatoração do denominador aparecem apenas os primos 2 e 5.

Note que o número racional que aparece em (4.2) pode não ser a expressão de b como uma fração irredutível. Isto acontece se o numerador

$$10^n a_0 + 10^{n-1} a_1 + 10^{n-2} a_2 + \ldots + a_n\,,$$

for divisível por 2 ou por 5.

De qualquer modo, após as simplificações a partir de (4.2), a expressão irredutível de $b = \dfrac{m}{n}$ é tal que o denominador n de b tem como fatores primos no máximo os números 2 e 5.

Isto motiva uma pergunta e induz a resposta.

- Que números racionais têm representação decimal finita?

Resposta: Aqueles números racionais $b = \dfrac{m}{n}$, que escritos na forma de uma fração irredutível, o denominador tem como fatores primos, no máximo, o número 2 e o número 5.

Exemplo 4.2

Vamos encontrar a representação decimal de $b = \dfrac{18}{25}$.

Vemos que a fração é irredutível e a fatoração do denominador fornece $25 = 5^2$. Logo b tem representação decimal finita. Devemos encontrar um denominador como potência de 10. Escrevemos

$$b = \frac{18 \times 4}{25 \times 4} = \frac{72}{100} = \frac{70+2}{100} = \frac{70}{100} + \frac{2}{100} = \frac{7}{10} + \frac{2}{10^2}\,.$$

Logo $b = 0,72$ é a representação decimal.

Números racionais com representação decimal infinita

Vimos em (4.3) e (4.4), a possibilidade da representação decimal de um número se expressar através de uma soma onde comparecem um número infinito de parcelas não nulas. Veja (4.3).

- Tem sentido somas com uma infinidade de parcelas?

A resposta é sim. Estas somas chamam-se séries numéricas e podemos (dependendo da natureza da série) associar um número como soma da série. Só podemos dar sentido à uma soma com infinito número de parcelas se a soma for convergente. Este é um assunto a ser tratado em Cálculo 1. Adiantamos que somas com infinitas parcelas (ou séries) como as escritas em (4.3) são convergentes e então podemos associar um número real à soma.

As mais elementares séries convergentes são as progressões geométricas de razão positiva e inferior a unidade. Por exemplo, se $a > 0$ e $0 < r < 1$ então $a + \frac{a}{r} + \frac{a^2}{r^2} + \ldots + \frac{a^n}{r^n} + \ldots = \frac{a}{1-r}$.
Por exemplo,
$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = 2$

- Qual é a representação decimal de um número racional $b = \dfrac{m}{n}$, onde a fração que expressa o número é irredutível e o denominador n possui fatores primos distintos de 2 e 5?

A resposta a esta pergunta pode ser encontrada se olharmos como fica a representação decimal de números racionais como

$$b = \frac{5}{7} \;\text{ e }\; c = \frac{19}{11}\,.$$

Para encontrar a representação decimal, usamos repetidas vezes o algoritmo de Euclides para a divisão de números inteiros,

$$\begin{array}{l|l}
50 & \;\;\;7 \\ \cline{2-2}
\to 10 & 0{,}71428571 \\
\quad 30 & \\
\quad\; 20 & \\
\quad\;\; 60 & \\
\quad\;\;\; 40 & \\
\quad\;\;\;\; 50 & \\
\quad\; \to 10 & \\
\quad\;\;\;\;\;\; 30 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l|l}
19 & \;\;11 \\ \cline{2-2}
\to 80 & 1,72727 \\
\quad 30 & \\
\; \to 80 & \\
\quad\;\; 30 & \\
\;\; \to 80 &
\end{array}$$

Olhe detalhadamente os exemplos acima e encontre o caminho para a resposta. Os números racionais que tem representação decimal com infinitos algarismos têm na representação decimal obrigatoriamente a partir de uma certa posição, um bloco de algarismos que se repete periodicamente. Nos exemplos tratados

$$\frac{5}{7} = 0,71428571\ldots \qquad \frac{19}{11} = 1,7272\ldots.$$

Para $\frac{5}{7}$ o bloco periódico é 714285 e para $\frac{19}{11}$ o bloco é 72. Podemos usar uma notação simplificada nestes casos, e escrever

$$\frac{5}{7} = 0,\overline{714285} \;\text{ e }\; \frac{19}{11} = 1,\overline{72}\,,$$

onde a barra identifica o bloco de algarismos que se repete indefinidamente.

Com estes exemplos estudados, podemos responder como é a representação decimal de um número racional $b = \frac{m}{n}$, escrito em forma de fração irredutível e onde n possui fator primo distinto de 2 ou 5. De fato, como motivado nos exemplos concretos que acabamos de examinar acima, após efetuarmos a divisão euclidiana repetida de m por n, os números que aparecem como restos na divisão estão necessariamente no conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, n-1\}$. Isto ocorre porque o resto é inferior ao divisor n. Ora, como o processo é infinito, o resto deve se repetir uma primeira vez no processo de divisão. A partir da primeira repetição no resto, tudo acontece de modo automático, repetindo os algarismos no quociente.

Reexamine os exemplos anteriores. No número racional $\frac{5}{7}$, ao dividir 5 por 7 encontramos o resto 1 repetindo uma primeira vez, definindo a repetição do bloco periódico 714285 no quociente. No número racional $\frac{19}{11}$ o resto que se repete pela primeira vez é o resto 8. Esta repetição determina o bloco periódico 72 no quociente.

Números irracionais e representação decimal infinita

Depois das considerações anteriores temos a seguinte conclusão: Um número irracional é exatamente aquele que tem na sua representação decimal infinitos algarismos e nenhum bloco de algarismos repetindo periodicamente.

Conclusão

A representação decimal

$$b = a_0,\, a_1\, a_2\, \ldots\, a_n\, a_{n+1}\, \ldots$$

de um número real é como fosse seu DNA, dois números diferentes tem representações decimais diferentes.

Exercícios

1. Encontre a representação decimal dos seguintes números:

a) $\dfrac{-27}{12}$ b) $\dfrac{-135}{21}$ c) $\dfrac{67}{15}$ d) $\dfrac{329}{5}$ e) $\dfrac{7}{10}$

2. Coloque em ordem crescente os números racionais

$$-3,\overline{217},\quad 0,272,\quad \frac{13}{29},\quad -3,22$$

3. Calcule o número resultante das operações abaixo e o expresse na representação decimal.

$$\frac{1,3-\frac{1}{5}}{5} - \frac{0,35}{1,4}$$

4. Apenas examinando o denominador das frações indique quais dos números racionais tem representação decimal finita.

a) $\dfrac{3041}{238}$ b) $\dfrac{711}{60}$ c) $\dfrac{1}{220}$ d) $-\dfrac{6}{60}$

5. Responda falso (F) ou verdadeiro (V) justificando a resposta.

   (a) Números reais muito próximos de 2 são racionais.

   (b) Se b é um número irracional então $\dfrac{1}{b}$ é irracional.

   (c) Se s é um número irracional positivo então s^2 é um número racional.

6. Se a é um número real positivo e $r = \dfrac{1}{a} + 5$, calcule o valor de $\dfrac{1}{r}$.

7. Construa as representações decimais de $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$.

8. Baseado na resposta da questão 7 e no algoritmo de Euclides, o que você pode deduzir da expansão decimal de um número racional positivo representado pela fração irredutível $\frac{p}{3}$?

Respostas das atividades

Atividade 4.1

a) Se $i+n$ é racional então $i+n = \frac{p}{q}$, onde p e q são inteiros e $q \neq 0$. Daí, que $i = \frac{p}{q} - n = \frac{p-nq}{q}$. A equação mostra que i é racional, o que é um absurdo. Logo, $i+n$ é irracional.

b) Localize antes o número $\sqrt{2}$ e após todos os números $m+\sqrt{2}$.

Respostas dos exercícios

1. a) $-2,25$, b) $-6,\overline{428571}$, c) $4,4\overline{6}$, d) 65,8 e) 0,7

2. $-3,22 < -3,\overline{217} < 0,272 < \frac{13}{29}$

3. $-0,03$

4. b) e d)

5. a) F $\quad 2+\frac{\sqrt{2}}{n}$ é irracional para todo n.

   b) V $\quad$ Se b não se escreve como $\frac{m}{n}$, o mesmo é verdade para $\frac{1}{b}$.

   c) F $\quad s=\sqrt{2}+1$ é irracional e $s^2 = 2\sqrt{2}+3$ é também irracional.

6. $\frac{1}{r} = \frac{a}{1+5a}$

7. $\frac{1}{3} = 0,\overline{3}$, $\quad \frac{2}{3} = 0,\overline{6}$

8. O algoritmo de Euclides permite escrever $p = 3m+r$ onde $r=1$ ou $r=2$. Logo $\frac{p}{3} = m + \frac{r}{3}$. Então $\frac{p}{3} = m,\overline{3}$ ou $\frac{p}{3} = m,\overline{6}$.

Conclusão: O período $\frac{p}{3}$ tem comprimento 1 e o algarismo do bloco periódico é 3 ou 6.

Aula 5 – Números reais: potências, radicais e expressões numéricas

Objetivos

Depois de trabalhar esta aula, você:

- compreenderá os conceitos de potenciação e radiciação de números reais;
- estará apto a resolver ou simplificar expressões numéricas.

Você já deve ter experiência desde o Ensino Fundamental e Médio de lidar com o assunto que iniciamos nesta aula: potenciação.

De um lado temos uma questão de notação. Quando escrevemos, por exemplo 3^4, estamos expressando em símbolos e abreviadamente o produto $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$. Notamos vantagem nesta convenção. Imagine se tivermos que expressar através de produto de fatores 3^{500}. É muito fatigante! Daí, o poder da notação.

Doutro lado, o estudo de potências leva, com o aprofundamento, à consideração de importantes classes de funções. Mais especialmente, as funções exponenciais e funções logarítmicas entre outras. Será então o momento de estudarmos funções como e^x, $\log x$, x^n e $x^{m/n}$.

Nesta aula, vamos desenvolver as idéias mais simples de potenciação, no entanto, fundamentais.

Potências de um número real

Antes da primeira definição é bom você recordar nossa escolha. O conjunto dos números naturais não contem o zero. Isto é, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Definição 5.1
Seja b um número real.

a) Se n é um número natural então

$$b^n = b \cdot b \cdot \ldots \cdot b \quad (n \text{ fatores iguais a } b)\,.$$

b) Se $b \neq 0$ e m é um número inteiro negativo,

$$b^m = (b^{-1})^{-m} = \left(\frac{1}{b}\right)^{-m} = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{b}\,.$$

Acima temos um produto com $-m$ fatores. Note que $-m > 0$.

c) Se $b \neq 0$ então $b^0 = 1$.

Notas

1) Na definição 5.1, b é chamado a base e n, m e 0 (zero) são os expoentes.

2) Observe, na definição 5.1, a questão da abrangência dos números reais que servem de base. No item a) b é qualquer número real; nos itens b) e c) é necessária à condição $b \neq 0$.

Vamos a alguns exemplos!

Exemplo 5.1

a) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27}.$

b) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{5}\right)^{-4} = \left(-\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^4 = \left(-\frac{5}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(-\frac{5}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(-\frac{5}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(-\frac{5}{\sqrt{2}}\right) =$
$= \frac{25}{2} \cdot \frac{25}{2} = \frac{625}{4}.$

c) $(3,12)^0 = \left(\frac{312}{100}\right)^0 = 1\,.$

Mais algumas observações relevantes

1) Atenção! Não tem sentido matemático a expressão 0^0.

2) Aproveito a ocasião para lembrar que, você já deve ter topado com outras expressões matemáticas sem sentido, ou indeterminadas. Recordo mais um exemplo: $\frac{0}{0}$ não tem sentido ou é indeterminado.

Propriedades da potenciação

As propriedades da potenciação que enunciamos a seguir são conseqüências diretas das propriedades fundamentais das operações de adição e multiplicação de números reais.

Suponha que os números reais b e c e os números inteiros m e n, permitem definir todas as potências explicitadas nos itens de a) até d) a seguir. Então valem as propriedades:

a) $b^m \cdot b^n = b^{m+n}$

b) $(b^m)^n = b^{mn}$

c) $b^m \div b^n = b^m \cdot \dfrac{1}{b^n} = b^m \cdot b^{-n} = b^{m-n}$

d) $(b \cdot c)^m = b^m \cdot c^m$.

Atividade 1

Calcule:

a) $(\sqrt{2} \div \sqrt{3})^{-4}$

b) $[(\sqrt{2})^{-2}]^{-3}$

c) $(\sqrt{2} - 5)^2$

Raízes n-ésimas de números reais

Freqüentemente ficamos diante da necessidade de definir que número real x verifica uma equação como

$$x^n = b,$$

onde n é um número natural e b, um número real. Explicando melhor: na equação, b é um número real conhecido e precisamos encontrar um ou mais números reais x tais que

$$b = x \cdot x \cdot x \ldots x \quad (n \text{ fatores } x)\,.$$

- Você lembra do surgimento do primeiro número irracional, na aula 3?

Naquela ocasião, o número real x que fornecia a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 1, verificava $x^2 = 2$. Como visto, provamos que x é irracional e usamos a notação $x = \sqrt{2}$ para expressar o número. Portanto, $\sqrt{2}$ tem a propriedade que $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$.

Veja outros exemplos.

Exemplo 5.2

a) Encontre números reais x tais que $x^3 = -8$.

A equação proposta tem como única solução $x = -2$. De fato, $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$.

b) Encontre números reais x tais que $x^6 = 8$.

Neste caso, as duas soluções possíveis são os números $x_1 = \sqrt{2}$ e $x_2 = -\sqrt{2}$. De fato, $(\sqrt{2})^6 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. O mesmo desenvolvimento valendo para $x_2 = -\sqrt{2}$.

Estamos em condições de definir o conceito de raiz enésima de um número real.

Definição 5.2 (Raízes n-ésimas)
Seja b um número real. Então,

a) Se $b > 0$ e n um número natural, a raiz n-ésima de b é o número real positivo que elevado à potência n resulta b.

Usamos a notação $\sqrt[n]{b}$ ou $b^{\frac{1}{n}}$ para representar a raiz n-ésima de b. Isto é, $b = \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{b} \ldots \sqrt[n]{b}$ (n fatores).

b) Se $b < 0$ e n é um número natural ímpar, a **raiz enésima de** b é o número real negativo que elevado a potência n resulta b.

Permanecemos com a notação $\sqrt[n]{b}$ ou $b^{\frac{1}{n}}$ para representar a n-ésima raiz de b. Então $b = \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{b} \ldots \sqrt[n]{b}$ (n fatores).

c) Se $b = 0$ e n é um número natural então a **raiz enésima de** $b = 0$ é o número zero. Isto é, $\sqrt[n]{0} = 0$.

Notas

1) Não definimos $\sqrt[m]{b}$, qualquer que seja o número real b, se m é um número inteiro e $m \leq 0$.
2) Na expressão $\sqrt[n]{b}$, o número b é o radicando, o símbolo $\sqrt{\ }$ é a raiz e n é o índice da raiz.
3) No caso $n = 2$, em vez de $\sqrt[2]{\ }$ escrevemos $\sqrt{\ }$ e lemos: “raiz quadrada”. Por exemplo, a igualdade $\sqrt{49} = 7$, lê-se “raiz quadrada de 49 é igual a 7”.
4) No caso $n = 3$, o símbolo $\sqrt[3]{\ }$ lê-se raiz cúbica. Por exemplo, a igualdade $\sqrt[3]{-125} = -5$ lê-se: “raiz cúbica de -125 é igual a -5”.

Propriedades da radiciação

a) Se a e b são números reais positivos e n é um número natural, então

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\,.$$

b) Se a é um número real negativo, b um número real positivo e n é um número natural ímpar, então

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\,.$$

A verificação da validade das propriedades a) e b) é imediata. Note que

$$(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \ldots \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \qquad (n \text{ fatores } \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})\,.$$

Usando a propriedade comutativa do produto de números reais, organizamos o segundo membro para encontrar que

$$\begin{aligned}(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n &= \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \ldots \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{b} \ldots \sqrt[n]{b} = \\ &= (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = a \cdot b\,.\end{aligned}$$

Portanto, $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ é a raiz enésima de $a \cdot b$. Isto é, $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$.

Exemplo 5.3

a) $\sqrt[3]{27} = 27^{\frac{1}{3}} = 3$. Pois, $3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3 = 27$

b) Não tem sentido $\sqrt{-4}$ quando trabalhamos com números reais. Uma vez que, não existe um número real x, tal que $x^2 = -4$.

c) $\sqrt[5]{-32} = -2$. Pois $(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32$.

d) $\sqrt{8} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

e) $\sqrt[3]{-81} = \sqrt[3]{(-3)^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{(-3)^3} \cdot \sqrt[3]{3} = -3\sqrt{3}$.

Notas importantes

1. Observe que $(-3)^2 = 9$ e $3^2 = 9$. No entanto $\sqrt{9} = 3$. É errado escrever $\sqrt{9} = -3$!! Pois para todo número real positivo b e todo número natural n, $\sqrt[n]{b}$ é, por definição, um número positivo.

2. Sendo $\sqrt{9} = 3$ então tomando os números simétricos (ou multiplicando por -1) escrevemos $-\sqrt{9} = -3$.

Atividade 2

Verifique as seguintes igualdades:

a) $\sqrt[3]{-250} = -5\sqrt[3]{2}$ b) $\sqrt[4]{48} = 2\sqrt[4]{3}$ c) $\sqrt[5]{-512} = -2\sqrt[5]{16}$

Potências racionais de números reais

Dado um número racional r podemos sempre supor que a fração que o representa é irredutível e o denominador é positivo. Isto é, podemos escrever r na forma,

$$r = \frac{m}{n}\,,$$

onde m e n são números inteiros primos entre si (sem fator comum) e $n > 0$.

Dentro destas condições estabelecidas introduzimos a próxima definição.

Definição 5.3
Sejam b um número real e $r = \dfrac{m}{n}$ tais que uma das condições é satisfeita:

a) $b^m < 0$ e n é um número natural ímpar. Ou b) $b^m > 0$

Então,

$$b^r = b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m}\,.$$

Nota: Veja que as condições a) e b) impostas na definição 5.3, são necessárias para que as operações de radiciação e potência fiquem bem definidas. Também, observe que em virtude das propriedades da radiciação vale

$$b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m} = (\sqrt[n]{b})^m\,.$$

Exemplo 5.4

a) $16^{\frac{2}{4}} = \sqrt[4]{16^2} = \sqrt[4]{(4^2)^2} = \sqrt[4]{4^4} = 4^{\frac{4}{4}} = 4^1 = 4.$

b) $(-8)^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{(-8)^5} = \sqrt[3]{(-8)^3\cdot(-8)^2} = \sqrt[3]{(-8)^3}\cdot\sqrt[3]{(-8)^2} = -8\sqrt[3]{64} =$
$-8\times 4 = -32.$

c) $(27)^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^{-2}} = \sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{27}\right)^2} = \left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{27}}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{9}.$

Atividade 3

Mostre que valem as seguintes igualdades:

a) $(-500)^{\frac{1}{3}} = -5\sqrt[3]{4}$ b) $(-32)^{-\frac{1}{5}} = -\dfrac{1}{2}.$

A definição 5.3 coloca o conceito de potenciação de modo bem geral, englobando o conceito de radiciação dado na definição 5.2. Por exemplo, para um número real b e um número natural n ímpar

$$\sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}}\,.$$

A questão que permanece no ar é a seguinte:

Como definir em toda generalidade b^a, onde b e a são números reais arbitrários?

Chegamos perto desta generalidade. Veja que conseguimos definir b^r, onde b é número real e r é número racional, em grande parte dos casos. No entanto, que sentido dar à expressão $3^{\sqrt{2}}$, ou mesmo, $\sqrt{3}^{\sqrt{2}}$. A técnica para tratar a questão de definir b^a, onde a é irracional, é através de convergência de seqüências. Devemos encontrar seqüências de números racionais $(r_n) = (r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots)$ que convergem para a $(r_n \to a)$ e definir b^a como o limite de b^{r_n}. Mas estas são questões que envolvem convergência de seqüências de números reais, e você deve aguardar a disciplina de Cálculo 1, para um estudo deste assunto. Além disso, problemas de natureza indeterminada podem ocorrer no processo de convergência. A definição geral é delicada.

Expressões numéricas e simplificações

Uma expressão onde aparecem números reais, operações entre os números e sinais convencionais de organização da ordem das operações é o que chamamos de uma expressão numérica real ou simplesmente expressão numérica.

Por exemplo

$$E = \left\{ -2\sqrt[3]{5} + \left[\left(\frac{1}{2} + \sqrt[3]{5} - \frac{1}{6} \right) \times 3 + 5^2 \right] \div 2 \right\} \times 5\,,$$

é uma expressão numérica. Na expressão destacada acima aparecem as operações fundamentais, a potenciação, a radiciação e os símbolos organizadores, chaves $\{,\}$, colchetes $[,]$ e os mais populares parênteses $(,)$.

A expressão numérica é, geralmente, a tradução (equacionamento) da solução de um problema qualquer que porventura estejamos resolvendo. Portanto, diante de expressão algébrica, o objetivo maior é resolvê-la, achando o número real que a representa ou, na impossibilidade, realizar operações para simplificá-la.

Uma expressão numérica, portanto, é uma coisa do tipo decifra-me ou te devoro!

Vamos resolver, ou decifrar, a expressão anterior!

A hierarquia é bem conhecida: primeiro resolvemos o que está entre parênteses, depois o colchete e, finalmente, as chaves. Quanto às operações, resolveremos primeiro o produto, depois a divisão e finalmente soma e subtração. Então, vamos ao ataque da expressão E! Acompanhe passo a passo as contas.

$$
\begin{aligned}
E &= \left\{ -2\cdot\sqrt[3]{5} + \left[\left(\frac{3-1}{6} + \sqrt[3]{5}\right)\cdot 3 + 25\right] \div 2 \right\} \times 5 = \\
&= \left\{ -2\cdot\sqrt[3]{5} + \left[\left(\frac{1}{3} + \sqrt[3]{5}\right)\cdot 3 + 25\right] \div 2 \right\} \times 5 = \\
&= \left\{ -2\cdot\sqrt[3]{5} + \left[1 + 3\cdot\sqrt[3]{5} + 25\right] \div 2 \right\} \times 5 = \\
&= \left\{ -2\cdot\sqrt[3]{5} + \left[26 + 3\cdot\sqrt[3]{5}\right] \div 2 \right\} \times 5 = \\
&= \left\{ -2\sqrt[3]{5} + 13 + \frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{5} \right\} \times 5 = \\
&= \left\{ -2\sqrt[3]{5} + 13 + \frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{5} \right\} \times 5 = \\
&= \left\{ \frac{-4+3}{2}\sqrt[3]{5} + 13 \right\} \times 5 = \left\{ -\frac{1}{2}\sqrt[3]{5} + 13 \right\} \times 5 = \\
&= \frac{-5}{2}\sqrt[3]{5} + 65\,.
\end{aligned}
$$

Compare o resultado encontrado com a expressão original. Convenhamos, o resultado que encontramos é um valor numérico muito mais palatável para E.

Com o objetivo de resolver expressões numéricas, vamos abrir nossa caixa de truques e retirar dali a ferramenta chamada racionalização. Veja os exemplos típicos:

Exemplo 5.5

Racionalize ou simplifique expressões do tipo:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, b) $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$,

onde a e b são números reais positivos e $a \neq b$.

Solução

Para efetar as operações recordamos uma igualdade importante envolvendo números reais x e y,

$$(x-y)(x+y) = x^2 - y^2\,.$$

Esta igualdade é chamada popularmente "um produto notável". Vamos usá-lo. Então,

a) $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}\,,$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$

Veja alguns exemplos numéricos.

Exemplo 5.6

Simplifique (racionalize) as expressões numéricas:

a) $E_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

b) $E_2 = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

c) $E_3 = \dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

d) $E_4 = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{3}}$

Solução de a)

$$E_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{(1-\sqrt{5})\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-5}{5} = \frac{\sqrt{5}}{5} - 1\,.$$

Solução de b)

$$\begin{aligned} E_2 &= \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{12}+\sqrt{18}}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2} \\ &= \frac{\sqrt{3\cdot 4}+\sqrt{2\cdot 9}}{2-3} = \frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{-1} = -2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\,. \end{aligned}$$

Solução de c)

$$\begin{aligned} E_3 &= \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \\ &= \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{6}\,. \end{aligned}$$

Solução de d)

$$\begin{aligned}
E_4 &= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{3}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{2}}+\sqrt{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{2}}+\sqrt{\sqrt{3}}} \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{2}}-\sqrt{\sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{2}}-\sqrt{\sqrt{3}}} = \\
&= \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{3})}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{3}\,.
\end{aligned}$$

Exemplo 5.7

Racionalize ou simplifique a expressão $E = \dfrac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$.

Solução

$$\begin{aligned}
E &= \frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{5}} = \frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{2})}{(\sqrt{7}-\sqrt{2})(\sqrt{7}+\sqrt{2})} - \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{5^2}} = \\
&= \frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{2})}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{2})^2} - \frac{\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{2})}{7-2} - \frac{\sqrt[3]{25}}{5} = \\
&= \frac{2\sqrt{7}+2\sqrt{2}-\sqrt[3]{25}}{5}\,.
\end{aligned}$$

Chegamos ao fim de mais uma aula. O conteúdo fundamental foi o estudo de potenciação e de suas propriedades básicas. Definimos (demos sentido) a uma expressão do tipo b^r, onde r é um número racional e b é um número eal. Algumas restrições foram exigidas de b, dependendo do valor de r. Você deve conhecer bem até onde b pode se "espalhar" na reta condicionado ao valor de r. Só para lembrar: $(-2)^{\frac{1}{4}}$ não tem sentido.

Lembre que a equação fundamental envolvendo a simbologia introduzida é $b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m}$.

Agora trabalhe os exercícios, procure seus colegas para discussão em grupo. Não deixe acumular as dúvidas. Procure as tutorias presencial e a distância.

Exercícios

1. A expressão numérica

$$E = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} - 3\right) \div \sqrt{3} - 2\left(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right]$$

é igual a:

a) $\dfrac{\sqrt{3}-3}{3}$ b) $\dfrac{\sqrt{3}+9}{3}$ c) $\dfrac{\sqrt{3}-9}{3}$

2. Mostre que são verdadeiras as igualdades:

a) $(\sqrt{2}-1)^3 = 5\sqrt{2}-7$ b) $\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}} - 1\right) \div \dfrac{\sqrt{2}-2}{2} = \dfrac{3+\sqrt{2}}{2}$

3. Determine o valor de x em cada uma das equações abaixo:

a) $5^{3x-2} = 1$ b) $16^{x+2} = 2^{3x-1}$

c) $(x^2+3)^{x^2-x} = 1$

4. O número $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \dfrac{3}{\sqrt[3]{-3}}$ é igual a:

a) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}-\sqrt[3]{9}}{3}$ b) $\dfrac{3\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt[3]{9}}{3}$

c) $\dfrac{3\sqrt{3}-3\sqrt{2}+\sqrt[3]{9}}{3}$ d) $\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt[3]{9}$

5. Verifique que as seguintes igualdades são verdadeiras:

a) $\dfrac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$ b) $\dfrac{3}{\sqrt[4]{3}} = \sqrt[4]{3^3}$

c) $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{8}-\sqrt{5}} - \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}+\sqrt{5}} = \dfrac{17+\sqrt{10}}{3}$

6. Considere a e b números reais diferentes de zero. Mostre que são verdadeiras as afirmações e igualdades abaixo:

a) $a^2 = b^2$ então $a = b$ ou $a = -b$

b) se $a \neq b$ então $(a^3 - b^3) \div (a - b) = a^2 + ab + b^2$

c) se $a < 0$ então $\left(\sqrt{1-\sqrt[3]{a}}\right)^6 = 1 + 3\sqrt[3]{a}(\sqrt[3]{a}-1) - a$.

7. Mostre que são negativos os números:

a) $3 - 2\sqrt{3}$ e b) $\sqrt{3+\sqrt{3}} - \sqrt{3\sqrt{3}}$

Auto-avaliação

Antes de passar a aula seguinte você deve:

- Ter resolvido todas as atividades propostas e os exercícios;
- Poder definir dado um número racional $r = \dfrac{m}{n}$, com $n > 0$, qual é o domínio de variação do número real b, para ter sentido a expressão b^r.

Respostas das atividades

1. a) $(\sqrt{2} \div \sqrt{3})^{-4} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^{-4} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^{4} = \dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{9}{4}$

   b) $\left((\sqrt{2})^{-2}\right)^{-3} = \left[\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2}\right]^{-3} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 8$

   c) $$\begin{aligned}(\sqrt{2}-5)^2 &= (\sqrt{2})^2 + 2\cdot\sqrt{2}\cdot(-5) + (-5)^2 = \\ &= 2 - 10\sqrt{2} + 25 = 27 - 10\sqrt{2}\end{aligned}$$

2. a) $\sqrt[3]{-250} = \sqrt[3]{-2\cdot 5^3} = \sqrt[3]{2\cdot(-5)^3} = -5\sqrt[3]{2}$

   b) $\sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{2^4\times 3} = 2\sqrt[4]{3}$

   c) $\sqrt[5]{-512} = \sqrt[5]{-2^9} = \sqrt[5]{(-2)^5\cdot 2^4} = -2\sqrt[5]{2^4} = -2\sqrt[5]{16}$

3. a) $(-500)^{\frac{1}{3}} = (-4\cdot 5^3)^{\frac{1}{3}} = [4\cdot(-5)^3]^{\frac{1}{3}} = 4^{\frac{1}{3}}\cdot(-5)^{\frac{3}{3}} = -5\sqrt[3]{4}$

   b) $(-32)^{-\frac{1}{5}} = (-2^5)^{-\frac{1}{5}} = [(-2)^5]^{-\frac{1}{5}} = (-2)^{-1} = \left(\dfrac{1}{-2}\right)^{1} = -\dfrac{1}{2}$

Respostas dos exercícios

1. $$\begin{aligned} E &= \frac{\sqrt{3}}{3}\left[\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3} - 3\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} - 2\left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{6}}{6}\right)\right] = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}\left[-(\sqrt{2}-\sqrt{3}+3)\frac{\sqrt{3}}{3} - 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{6}}{3}\right] = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}\left(-\frac{\sqrt{6}}{3} + 1 - \sqrt{3} - 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{6}}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}-9}{3}\end{aligned}$$

2. a) $$\begin{aligned}(\sqrt{2}-1)^3 &= (\sqrt{2}-1)^2\cdot(\sqrt{2}-1) = (2-2\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = \\ &= (3-2\sqrt{2})(\sqrt{2}-1) = 5\sqrt{2}-7\end{aligned}$$

   b) $$\begin{aligned}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}-1\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{2}-2} &= \frac{\sqrt{2}-4}{4}\cdot\frac{2(\sqrt{2}+2)}{(\sqrt{2}-2)(\sqrt{2}+2)} = \\ &= \frac{\sqrt{2}-4}{4}\cdot(-\sqrt{2}-2) = \frac{3+\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

3. a) $5^{3x-2} = 5^0 \;\Rightarrow\; 3x - 2 = 0 \;\Rightarrow\; x = \dfrac{2}{3}$

   b) $x = -9$ c) $x = 0$ ou $x = 1$

4. d

5. Verificação

6. a) $a^2 = b^2 \;\Rightarrow\; a^2 - b^2 = 0 \;\Rightarrow\; (a-b)(a+b) = 0 \;\Rightarrow\; a - b = 0$ ou $a + b = 0 \;\Rightarrow\; a = b$ ou $a = -b$.

   b) Basta verificar que

$$a^3 - b^3 = (a^2 + ab + b^2)(a - b)\,.$$

   c)
$$\begin{aligned}\left(\sqrt{1-\sqrt[3]{a}}\right)^6 &= (1-\sqrt[3]{a})^3 = (1-\sqrt[3]{a})^2 \cdot (1-\sqrt[3]{a}) = \\ &= (1 - 2\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2})(1-\sqrt[3]{a}) = 1 - 3\sqrt[3]{a} + 3\sqrt[3]{a^2} - a = \\ &= 1 + 3\sqrt[3]{a}\,(\sqrt[3]{a} - 1) - a\end{aligned}$$

7. a) Veja que

$$(3-2\sqrt{3})(3+2\sqrt{3}) = 3^2 - (2\sqrt{3})^2 = 9 - 12 = -3$$

   é um número negativo. Como $3 + 2\sqrt{3} > 0$ então $3 - 2\sqrt{3}$ é negativo.

   b) Veja que

$$\left(\sqrt{3+\sqrt{3}} - \sqrt{3\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{3+\sqrt{3}} + \sqrt{3\sqrt{3}}\right) = 3 + \sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 3 - 2\sqrt{3}\,,$$

   é um número negativo (use o item a)). Como $\sqrt{3+\sqrt{3}} + \sqrt{3\sqrt{3}}$ é positivo então $\sqrt{3+\sqrt{3}} - \sqrt{3\sqrt{3}}$ é negativo.

Aula 6 – Números reais: relação de ordem, intervalos e inequações

Objetivos

Após estudar esta aula, você terá condições de:

- compreender a estrutura de ordem dos números reais e suas principais propriedades;
- compreender o conceito de intervalo de números reais, realizar operações com intervalos e representá-los graficamente na reta;
- utilizar as propriedades de ordem dos números reais para resolver inequações e usar os intervalos para expressar os conjuntos soluções.

A representação dos números reais sobre uma reta é uma poderosa ferramenta. É como se construíssemos uma ponte ligando a aritmética e a álgebra à geometria. Além disso, permite fazer uma representação mental unificada dos números reais. Isto é extremamente útil. Quando nos é colocado um problema sobre números reais vamos verificar como funciona no modelo geométrico construído sobre uma reta.

Operações com números reais

A adição e a multiplicação são as operações fundamentais entre números reais. Elas gozam de propriedades similares já enunciadas para os números inteiros. Convido você a recordar estas propriedades relendo-as na Aula 1. As operações fundamentais podem ser definidas ou interpretadas geometricamente sobre a reta real. Vamos lá!

Soma de dois números reais a e b

Vamos supor que os números reais a e b sejam positivos. Isto é, a e b pertencem à semi-reta real positiva. Veja a **Figura 6.1**.

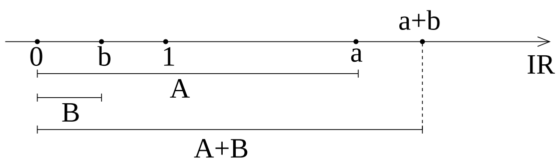


Figura 6.1: Soma de dois números.

Os números reais a e b correspondem às medidas dos comprimentos dos segmentos A e B, respectivamente. A soma $a+b$ é a medida do comprimento do segmento $A+B$, obtido pela justaposição (soma) dos segmentos A e B.

O caso de soma de dois números reais negativos é similar ao caso de dois números positivos. A única diferença é que a operação é realizada na semi-reta real negativa.

O caso de soma de um número real negativo com um número real positivo é representado geometricamente por subtração de segmentos e também não apresenta dificuldade. Veja a atividade 1 logo adiante.

Produto de dois números reais a e b

Em primeiro lugar temos a “regra dos sinais” para o produto de dois números reais: $a.b$ é positivo se a e b são ambos positivos ou ambos negativos; $a.b$ é negativo se a for positivo e b negativo ou se a negativo e b positivo. Com estas observações em mente vamos interpretar geometricamente apenas a multiplicação de dois números reais positivos. Veja a **Figura 6.2**.

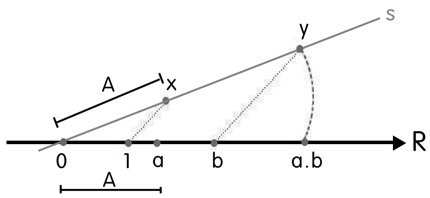


Figura 6.2: Multiplicação de dois números.

Os números a e b estão representados sobre a reta $\mathbb{R}$. Usamos uma semi-reta auxiliar s com início no ponto 0 (zero). Transportamos, a partir de 0, sobre s o segmento A, encontrando o ponto x. O ponto y é determinado sobre s de modo que os segmentos $1x$ e by sejam paralelos. Finalmente assinalamos o ponto ab sobre $\mathbb{R}$ para representar o número igual a medida do segmento Oy. Veja que a linha tracejada que une o ponto y ao ponto ab é um arco de círculo de centro no ponto O. Nesta situação, usando a semelhança dos triângulos $Ox1$ e Oyb, podemos verificar que,

$$\frac{b}{1} = \frac{Oy}{Ox} \Rightarrow b = \frac{Oy}{a} \Rightarrow Oy = ab\,.$$

E aí está a construção geométrica que permite multiplicar dois números positivos a e b.

Não é demais recordar mais uma vez as propriedades fundamentais da adição e da multiplicação de números reais. Para o enunciado das propriedades 1 até 5, considere números reais a, b e c arbitrários. Então:

Propriedade 1: A adição e a multiplicação são comutativas.

$$a + b = b + a \quad \text{e} \quad a.b = b.a\,.$$

A Propriedade 1 estabelece que mudar a ordem das parcelas não altera a soma e mudar a ordem dos fatores não altera o produto.

Propriedade 2: Associatividade

$$a + (b + c) = a + (b + c) \quad \text{e} \quad a(bc) = (ab)c\,.$$

A Propriedade 2 estabelece que agrupar as parcelas de diferentes modos não altera a soma e agrupar os fatores não altera o valor do produto.

Propriedade 3: Elementos neutros
Os números 0 (zero) e 1 satisfazem,

$$a + 0 = 0 \quad \text{e} \quad a.1 = a\,.$$

Propriedade 4: Simétrico e inverso de um número

$$a + (-a) = 0 \quad \text{e} \quad a.a^{-1} = 1\,, \;\; (a \neq 0)\,.$$

A Propriedade 4 estabelece que os números $-a$ e a^{-1} são, respectivamente, o simétrico e o inverso do número real a. Portanto, a^{-1}, o inverso de a, verifica $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$.

Propriedade 5: Distributividade

$$a.(b + c) = a.b + a.c\,.$$

A Propriedade 5 estabelece que o produto se distribue em relação à soma.

Atividade 6.1

Represente geometricamente, na reta real, a soma e o produto dos números $\frac{3}{2}$ e -2.

Relação de ordem em $\mathbb{R}$

A representação dos números reais sobre uma reta orientada é tão importante que é corriqueiro em Matemática chamarmos o conjunto dos números reais de reta real. Ou para os mais intimos $\mathbb{R}$ é a reta!

Outro aspecto importante da representação dos números reais sobre uma reta é o fato que os números aparecem de maneira organizada, possibilitando comparar as ordens de grandeza de dois números por suas posições. Para motivar esta última observação proponho uma atividade para começar.

Atividade 6.2

Após tomar um banho, coloque uma roupa legal, pra cima, borrifadas de um agradável perfume ajuda. Pronto. Saia a rua. Você vai à uma loja comprar uma televisão nova, de tela grande, a Copa do Mundo se aproxima e estão oferecendo garantia de 10 anos, controle remoto e o escambau. Só falta garantir a vitória do seu time.

De volta à casa, televisão instalada. Você liga. O canal 10 é automaticamente sintonizado e o som está muito baixo. O jogo da seleção já começou, está passando no canal 12 e você precisa também entrar em campo! Você está com o controle na mão, aconchegado no sofá e o manual de instruções longe. Observando o controle remoto, você identifica o ícone de volume (VOL) e o ícone dos canais (CH). Veja o controle na **Figura 6.3** a seguir.

Figura 6.3: Controle remoto.

- Que tecla apertar para passar ao canal 12? Duas vezes a tecla acima do ícone canal (CH) ou duas vezes aquela abaixo?

-Que tecla comprimir para aumentar o volume? Aquela à direita ( ) ou aquela à esquerda ( ) do ícone volume?

Pense um pouco e responda! Acredite, sua resposta definirá sua condição de pessoa bem ou mal orientada em relação às convenções de comunicação gráfica adotadas.

Se você já se decidiu, consulte a resposta à esta atividade 2 no fim desta aula.

E aí? Acertou a resposta? Pois é, são convenções que tem o seu fundamento.

Veja porque! Ao representarmos os números reais sobre uma reta horizontal eles crescem, da esquerda para a direita e, evidentemente, decrescem da direita para a esquerda. Se a reta, representando os números reais, fosse posicionada verticalmente, a representação dos números seria crescente para cima e decrescente para baixo!

Para tornar um pouco mais rigorosa esta idéia, vamos introduzir a relação de ordem nos números reais.

Considere os números reais representados sobre uma reta real orientada, como na **Figura 6.4**.

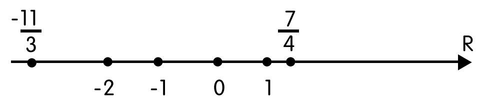


Figura 6.4: Números reais sobre a reta.

Dados dois números reais a e b representados sobre a reta escrevemos que

$$a < b\,,$$

para significar que o sentido que vai de a para b coincide com a orientação da reta.

A expressão $a < b$ é uma desigualdade e lê-se: "a é menor do que b".

Observando a **Figura 6.4**, concluímos que

$$-\frac{11}{3} < -2\,, \quad 0 < \frac{7}{4}\,, \quad -2 < -1\,.$$

Se $a < b$, equivalentemente, podemos escrever que $b > a$, lê-se b é maior que a.

Também as notações $x \leq y$ e $z \geq w$ são permitidas entre números reais x, y, z e w. A primeira expressão $x \leq y$ traduz que o número x é menor do que ou igual ao número y. A segunda expressão $z \geq w$ traduz que o número z é maior do que ou igual a w.

A relação de ordem introduzida nos números reais tem propriedades muito interessantes. Vamos recordar cinco delas ao longo desta aula.

Para o enunciado das propriedades considere que, a, b e c são números reais arbitrários.

Propriedade 6: Entre dois números reais a e b apenas uma das três possibilidades abaixo acontece:

$$a < b \quad \text{ou} \quad b < a \quad \text{ou} \quad a = b\,.$$

O enunciado da Propriedade 6 é evidente por si, se os números já estão representados na reta. Dados dois números ao acaso, suas posições na reta real $\mathbb{R}$ coincidem ou então um deles está à esquerda do outro. No entanto, a afirmação contida na propriedade merece a seguinte pergunta:

- Dados dois números reais distintos, como identificar o menor deles? Ou melhor, como identificar aquele que deve ser representado à esquerda do outro na reta?

Primeiro, é evidente a resposta se os números são inteiros. Os números inteiros estão bem espalhados sobre a reta real e é fácil identificar o menor dentre os dois, aquele número que deve ser assinalado à esquerda. Por exemplo, se os números são 5 e 8, 5 está à esquerda. Se os números são -12 e -8, -12 está à esquerda. Isto é, $5 < 8$ e $-12 < -8$.

Para dois números racionais, os quais podemos supor escritos com denominadores positivos, temos o seguinte resultado, chamado regra do produto cruzado:

$$\frac{m}{n} < \frac{p}{q} \ \text{ se e somente se } \ mq < np\,.$$

Veja porque vale a afirmação. Como os denominadores são positivos, então

$$\frac{m}{n} = \frac{mq}{nq} \ \text{ e } \ \frac{p}{q} = \frac{pn}{nq}\,.$$

Logo,

$$\frac{m}{n} < \frac{p}{q} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{mq}{nq} < \frac{pn}{nq} \quad \Leftrightarrow \quad mq < pn\,,$$

provando a equivalência prometida.

Agora vamos atacar o problema bem geral. Como escolher entre dois números reais distintos a e b aquele que é menor?

Temos três casos a considerar:

Primeiro Caso: Os números tem sinais contrários. Por exemplo, a é negativo e b positivo. Neste caso, óbvio, o número negativo é menor ($a < b$).

Segundo Caso: Um dos números é zero. Por exemplo, $a = 0$. Neste caso, $a < b$ se b é positivo ou $b < a$ se b é negativo.

Terceiro Caso: Os números possuem o mesmo sinal. Neste caso, precisamos considerar a expansão decimal.

Suponha, em primeiro lugar que a e b são positivos. Então

$$a = a_0,\, a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n \ldots, \quad b = b_0,\, b_1\, b_2\, b_3 \ldots b_n \ldots$$

Nestas expansões estamos supondo a possibilidade que a partir de um certo índice todos os dígitos sejam nulos. Nesta situação, $a < b$ se uma das seguintes situações ocorrerem:

1) $a_0 < b_0$ ou 2) existe um número natural k tal que $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $\ldots$, $a_{k-1} = b_{k-1}$ e $a_k < b_k$.

Exemplo

$3,0125 < 3,01312111\ldots$

Por outro lado, se a e b são negativos, então

$$a = -a_0,\, a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n \ldots, \quad b = -b_0,\, b_1\, b_2\, b_3 \ldots b_n \ldots$$

Nestas expansões estamos também considerando a possibilidade de que a partir de certo índice todos os algarismos sejam nulos. Nesta situação, $a < b$ se uma das seguintes situações ocorrerem.

1) $a_0 > b_0$ ou 2) existe um número natural k tal que $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $\ldots$, $a_{k-1} = b_{k-1}$ e $a_k > b_k$.

Propriedade 7. Se $a < b$ e $b < c$ então $a < c$.

Veja um exemplo.

$$-3 < 5 \text{ e } 5 < 25 \Rightarrow -3 < 25\,.$$

Propriedade 8. Se $a < b$ então $a + c < b + c$.

A propriedade 8 é muito útil para resolver inequações, assunto que trataremos adiante. Veja um exemplo! Queremos determinar todos os valores inteiros x que satisfazem a desigualdade, $x - 12 < -9$. Usando a Propriedade 8, temos que

$$x - 12 < -9 \Rightarrow x - 12 + 12 < -9 + 12 \Leftrightarrow x < 3\,.$$

Logo, os valores são $x = 2,\ 1,\ 0,\ -1,\ -2,\ \ldots$.

> Propriedade 9. Se $a < b$ e $c > 0$ então $a.c < b.c$.

Esta propriedade é enunciada ressaltando que multiplicando ambos os membros de uma desigualdade por um número positivo a desigualdade **permanece**. Exemplo:

$$-250 < -32 \quad \Rightarrow \quad -500 < -64\,.$$

> Propriedade 10. Se $a < b$ e $c < 0$ então $a.c > b.c$.

Esta propriedade é enunciada ressaltando que multiplicando ambos os membros de uma desigualdade por um número negativo a desigualdade **inverte de sentido**.

Intervalos de números reais

Intervalos são subconjuntos de números reais que expressam um *continuum* dos números reais. Esta caracterização implica que se dois números a e b estão num intervalo I e $a < b$, então qualquer número entre a e b está em I. Mais tarde, ao estudar cálculo, você poderá apreciar melhor esta caracterização de intervalos. Mas falamos do *bicho* intervalo, sem apresentá-lo. Vamos às definições.

Definição 6.1
Dados os números reais a e b, com $a < b$, definimos os seguintes conjuntos de números reais:

a) $(a, b) = \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$,   b) $[a, b) = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\}$,

c) $(a, b] = \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\}$,   d) $[a, b] = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}$,

Os intervalos acima definidos são referidos como intervalos abertos (a), fechado à esquerda e aberto à direita (b), aberto à esquerda e fechado à direita (c), e intervalo fechado (d). Os números a e b são os extremos do intervalo.

Localizando os números a e b sobre a reta real temos representações gráficas dos intervalos definidos.

Exemplo 6.1

Representação gráfica dos intervalos $(-3,-2)$, $[-1,0)$, $(1,2]$ e $\left[3,\dfrac{7}{2}\right]$. Veja a **Figura 6.5**.

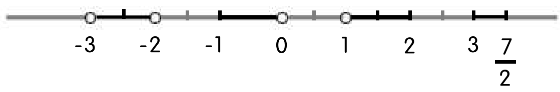


Figura 6.5: Representação de intervalos.

Se a é um número real podemos usar o símbolo $+\infty$ e $-\infty$ para expressar intervalos infinitos.

Definição 6.2

Os subconjuntos de números reais

a) $(a,\infty)=\{x\in\mathbb{R};\ x>a\}$, b) $[a,\infty)=\{x\in\mathbb{R};\ x\geq a\}$,

c) $(-\infty,a)=\{x\in\mathbb{R};\ x<a\}$, d) $(-\infty,a]=\{x\in\mathbb{R};\ x\leq a\}$,

são os intervalos infinitos.

Exemplo 6.2

Representação gráfica dos intervalos $(2,\infty)$, $(-\infty,0]$. Veja a **Figura 6.6**.

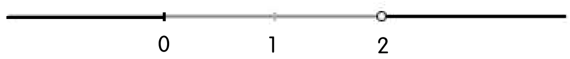


Figura 6.6: Representação de intervalos infinitos.

Notas

1) Na definição de um intervalo, o número que fica no extremo esquerdo é menor que o número que fica no extremo direito. Assim $(-1,\sqrt{2})$ é um intervalo, mas $(3,0]$ não tem sentido.

2) Usando o recurso de representar subconjuntos da reta por intervalos, podemos escrever $(-\infty,\infty)=\mathbb{R}$.

Exemplos

a) $[2,3]\cap[3,7)=\{3\}$ e b) $(-1,2)\cap(0,5)=(0,2)$.

Vamos resolver o item a). Note que

$$[2,3] = \{x \in \mathbb{R};\ 2 \leq x \leq 3\} \text{ e } [3,7) = \{x \in \mathbb{R};\ 3 \leq x < 7\}.$$

Como se trata de uma interseção de conjuntos, as desigualdades mostram que $x = 3$ é o único número que aparece em ambos conjuntos. Logo é válida a igualdade a).

Note que a validade da igualdade de conjuntos expressa no item b) pode ser observada graficamente na **Figura 6.7**. Nas cópias da reta real estão representados, respectivamente os subconjuntos $(-1,2)$, $(0,5)$ e $(-1,2) \cap (0,5)$.

Também,

$$(-1,2) = \{x \in \mathbb{R};\ -1 < x < 2\} \text{ e } (0,5) = \{x \in \mathbb{R};\ 0 < x < 5\}.$$

Logo, todo x tal que $0 < x < 2$ pertence a ambos os conjuntos. Provando a igualdade b).

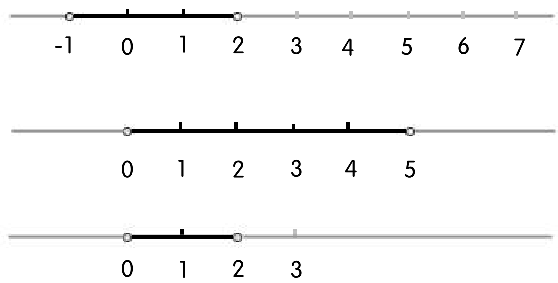


Figura 6.7: Interseção de intervalos.

Atividade 6.3

Prove que,

a) $(-1, \sqrt{2}) \subset (-\infty, 3)$

b) $(-\sqrt{3}, 10) \cap [0, 10\sqrt{2}) = [0, 10)$.

Represente geometricamente as operações entre os intervalos.

Inequações de uma variável real

Inequações são expressões onde aparecem números, desigualdades e uma variável freqüentemente representada por x. A inequação define todos os valores reais que podem ser assumidos pela variável.

Resolver a inequação é explicitar o subconjunto de números reais onde a variável pode assumir valores, de modo que a inequação seja satisfeita. A linguagem dos intervalos é muito útil para expressar o conjunto solução de uma inequação.

Veja alguns exemplos.

Exemplo 6.3

Encontre o conjunto solução das inequações abaixo:

a) $6 - 2x \leq 8x$ e b) $-x^2 + x > -6$

Solução de a)

$$6 - 2x \leq 8x \Rightarrow 6 \leq 8x + 2x \Rightarrow 6 \leq 10x$$

Então

$$\frac{6}{10} \leq x \Rightarrow x \geq \frac{3}{5}\,.$$

Logo o conjunto solução S da inequação é

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R};\ x \geq \frac{3}{5} \right\} = \left[\frac{3}{5}, \infty \right).$$

Solução de b)

Multiplicando ambos os membros da inequação por -1 e invertendo o sinal da desigualdade, a inequação é equivalente a

$$x^2 - x < 6 \Rightarrow x^2 - x - 6 < 0\,.$$

Olhando para a equação do segundo grau $x^2 - x - 6 = 0$, encontramos

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) \Rightarrow \Delta = 25\,.$$

Logo,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}\,,$$

definem as raízes, como sendo

$$x_1 = 3 \ \text{ e } \ x_2 = -2\,.$$

Logo,

$$x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)\,.$$

Assim, a inequação que precisamos resolver é

$$(x - 3)(x + 2) < 0\,.$$

Ora as soluções possíveis ocorrem apenas quando os fatores do primeiro membro da inequação possuem sinais contrários. Então

$$x - 3 > 0 \;\text{ e }\; x + 2 < 0 \;\text{ ou }\; x - 3 < 0 \text{ e } \; x + 2 > 0$$

são as soluções. Desenvolvendo, encontramos

$$x > 3 \;\text{ e }\; x < -2 \;\text{ ou }\; x < 3 \;\text{ e }\; x > -2\,.$$

Como não existe número x tal que $x > 3$ e $x < -2$, ficamos somente com a segunda possibilidade $x < 3$ e $x > -2$. Portanto, o conjunto solução é representado pela interseção de intervalos,

$$S = (-\infty, 3) \cap (-2, \infty) = (-2, 3)\,.$$

Atividade 6.4

a) Use a Propriedade 9 para descrever todos os números reais tais que: $2x < -7$.

b) Use a propriedade 10 para descrever os números reais x tais que: $-13x < -5$.

Exemplo 6.4

Para que valores reais de x a desigualdade abaixo faz sentido e é verdadeira.

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} > 0\,.$$

Solução Primeiramente é preciso que

$$x \neq 1 \;\text{ e }\; x \neq -1\,,$$

para que faça sentido as frações que aparecem na desigualdade.

Podemos escrever

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2}{(x-1)(x+1)} > 0\,.$$

Ora para que a desigualdade seja verdadeira é suficiente que

$$(x-1)(x+1) > 0\,.$$

Vamos fazer uma tabela para identificar os sinais de $x-1$ e $x+1$. Veja a **Figura 6.8**.

	$-\infty$ -1		$+1$ $+\infty$
$(x-1)$	$-$	$-$	$+$
$(x+1)$	$-$	$+$	$+$
$(x-1)(x+1)$	$+$	$-$	$+$

Figura 6.8: Os sinais de $x-1$ e $x+1$.

Note que

$$x+1>0 \Leftrightarrow x>-1 \text{ e } (x-1)>0 \Leftrightarrow x>1\,.$$

Também,

$$x+1<0 \Leftrightarrow x<-1 \text{ e } (x-1)<0 \Leftrightarrow x<1\,.$$

Com isto, concluímos, a partir da **Figura 6.8** que

$$(x+1)(x-1)>0 \quad \Leftrightarrow \quad x<-1 \text{ ou } x>1\,.$$

Portanto, o conjunto solução S da inequação é

$$S=(-\infty,-1)\cup(1,\infty)=\mathbb{R}-[-1,1]\,.$$

Para encerrar esta aula, vamos provar uma proposição muito útil sobre desigualdades de números reais. Você certamente já conhece e usa este resultado para resolver suas contas. Aprecie.

Proposição 6.1
Sejam a e b números reais positivos. Então $a<b$ se e somente se $a^2<b^2$.

Prova: Em símbolos, a proposição garante que para números reais positivos a e b

$$a<b \quad \Leftrightarrow \quad a^2<b^2\,.$$

Outra maneira de escrever a equivalência é

$$a-b<0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2-b^2<0\,.$$

Veja como ainda podemos melhorar o retrato de nossa equivalência:

$$a-b<0 \quad \Leftrightarrow \quad (a-b)(a+b)<0\,.$$

A proposição traduzida na forma desta última equivalência pode agora ser provada.

Como a e b são positivos, então temos mais uma informação:

$$a + b > 0\,.$$

Isto deixa evidente que

$$a - b < 0 \;\Rightarrow\; (a - b)(a + b) < 0$$

e que

$$(a - b)(a + b) < 0 \;\Rightarrow\; (a - b) < 0\,.$$

$\square$

Atividade 6.5

a) Mostre que, para quaisquer números reais a e b vale a igualdade:

$$a^3 - b^3 = (a^2 + ab + b^2)(a - b)\,.$$

b) Imitando os argumentos da proposição 6.1, mostre que se a e b são números reais positivos então vale a equivalência

$$a < b \;\Leftrightarrow\; a^3 < b^3\,.$$

Conclusão

Vencemos mais uma aula, onde de importante trabalhamos com a noção de ordem nos números reais e com a interpretação geométrica deste conceito sobre a reta real. Assim, para dois números reais a e b, representados como pontos sobre a reta, $a < b$, significa que a direção que aponta de a para b coincide com a orientação da reta.

Nesta aula também estudamos 10 propriedades sobre os números reais. As primeiras cinco são propriedades ligadas às operações fundamentais de adição e multiplicação. E estas, creio, são bem conhecidas de vocês. As últimas cinco propriedades são de correntes da estrutura de ordem e são importantes para a resolução de inequações.

Você já deve ter resolvido todas as cinco atividades ao longo da aula. Agora após uma pausa para recomposição de forças, resolva os exercícios que vem a seguir.

Sucesso na tarefa e até a próxima aula!

Exercícios

1. Coloque em ordem cresente os seguintes números reais: $\frac{-13}{12}, \frac{-18}{17}, \frac{13}{12}, \frac{18}{17}$.

2. Coloque em ordem crescente os números

$$-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{3},\ \sqrt{2},\ \frac{7}{5}$$

3. Mostre que

$$3 < \sqrt{10} < 3,2$$

4. Descreva todos os números naturais n para os quais

$$\frac{\sqrt{5}}{n} > \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

5. Represente na reta real os seguintes intervalos:

a) $(-\sqrt{2}, 2]$, b) $\left(\frac{7}{8}, \frac{10}{4}\right)$ c) $[\pi, \infty)$.

6. Efetue as seguintes operações com intervalos:

a) $[-6, 0) \cap [-2, 5]$ b) $(-\infty, 1) \cap (-1, \infty)$

c) $\mathbb{R} - (1, \infty)$ d) $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{3}\right) \cup (0, \infty)$

7. Apresente na forma de intervalo de números reais o conjunto solução das inequações:

a) $\frac{x}{\sqrt{2}} - 1 < \sqrt{2}x - 1$ b) $\frac{1}{x} - 1 > 0$

8. Responda Falso (F) ou Verdadeiro (V) para as sentenças abaixo. Justifique a resposta.

a) $(-2, \infty) \cup (-\infty, -2) = \mathbb{R}$

b) $\mathbb{N} = [1, \infty)$

c) $1 \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}\right) \cap \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$

9. Encontre o maior número natural n para o qual

$$-\frac{1}{\sqrt{5}} + n < \frac{5}{\sqrt{2}}.$$

10. Prove que são verdadeiras as desigualdades:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} < 2\sqrt{2}$, b) $\sqrt{3\sqrt{3}} < \dfrac{7}{3}$.

11. Mostre que se n é um número natural então existe um outro número natural m tal que $\dfrac{n}{2} - \sqrt{2} < m < \dfrac{n}{2} + \sqrt{2}$.

Auto-avaliação

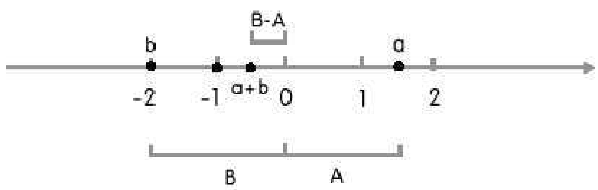
Antes de passar à aula seguinte, veja se você:

- Resolveu e não tem dúvidas sobre as atividades desta aula.
- Domina as dez propriedades operacionais dos números reais enunciadas.
- Sabe definir todos os tipos de intervalos e fazer as operações de soma e interseção de conjuntos.
- Resolveu os exercícios da série A.

Respostas das atividades

Atividade 6.1

Se $a = \dfrac{3}{2}$ e $b = -2$, então como os sinais são diferentes, devemos subtrair segmentos.



O segmento B cuja medida é 2 e maior que o segmento A de medida $\dfrac{3}{2}$. Logo, o resultado da soma é negativo e representa, em módulo, o comprimento de $B - A$.

Quanto ao produto, usamos a mesma resolução baseada na **Figura 6.2**. Para trabalhar com dois números positivos, buscamos o valor de $a\cdot(-b)$. Este número é positivo e colocado à direita na reta. Faça a construção como na **Figura 6.2**. O número $a \cdot b$ é o simétrico e situado à esquerda na reta.

Atividade 6.2

Você acertou se respondeu  para o canal e  para o volume.

Atividade 6.3

a) Se $x \in (-1, \sqrt{2}) \Rightarrow -1 < x < \sqrt{2}$. Em particular, $x < 3$. Logo, $x \in (-\infty, 3)$. Isto prova a).

b) Se $x \in (-\sqrt{3}, 10)$ então $-\sqrt{3} < x < 10$. Se $x \in [0, 10\sqrt{2})$ então $0 \leq x < 10\sqrt{2}$. Como $10 < 10\sqrt{2}$, um número real x para estar simultaneamente em ambos os conjuntos deve satisfazer $0 \leq x < 10$.

Atividade 6.4

a) Usando a Propriedade 9, encontramos que

$$2x < -7 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 2x < \frac{1}{2} \cdot (-7) \Rightarrow x < -\frac{7}{2}\,.$$

Logo, todos os números reais menores que $-\dfrac{7}{2}$ são soluções. Deste modo, o conjunto solução S é dado por $S = \left(-\infty, -\dfrac{7}{2}\right)$.

b) Usando a Propriedade 10, encontramos que

$$-13x < -5 \Leftrightarrow 13x > 5 \Leftrightarrow x > \frac{5}{13}\,.$$

Logo, $S = \left(\dfrac{5}{13}, \infty\right)$ é o conjunto solução.

Atividade 6.5

a) Basta fazer a multiplicação.

b) Use a proposição 6.1 e o item a).

Respostas dos exercícios

1. Note que

$$\frac{-13}{12} = -\frac{13 \times 17}{12 \times 17} = -\frac{221}{12 \times 17} \quad \text{e} \quad -\frac{18}{17} = \frac{-18 \times 12}{17 \times 12} = \frac{-216}{17 \times 12}\,.$$

Sendo $-221 < -216$, então $\dfrac{-13}{12} < \dfrac{-18}{17}$.

Do mesmo modo, aproveitando as contas já feitas, vem que $216 < 221$ e então $\dfrac{18}{17} < \dfrac{13}{12}$. Logo,

$$\frac{-13}{12} < \frac{-18}{17} < \frac{18}{17} < \frac{13}{12}\,.$$

2. Note que

$$-\frac{1}{2} = \frac{-3}{2\times 3} \quad \text{e} \quad -\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{-2\sqrt{3}}{3\times 2}\,.$$

Agora, $-2\sqrt{3} < -3$. Portanto $-\dfrac{\sqrt{3}}{3} < -\dfrac{1}{2}$.

Do mesmo modo $\dfrac{7}{5} < \sqrt{2}$, uma vez que $\left(\dfrac{7}{5}\right)^2 < \left(\sqrt{2}\right)^2$. Ou seja, $\dfrac{49}{25} < 2$. Portanto,

$$-\frac{\sqrt{3}}{3} < -\frac{1}{2} < \frac{7}{5} < \sqrt{2}\,.$$

3. Mostrar que $3 < \sqrt{10}$ é equivalente a mostrar que $3^2 < \left(\sqrt{10}\right)^2$ (veja a Proposição 6.1) e isto é verdade, pois $9 < 10$.

Por outro lado, $\sqrt{10} < 3,2$ é equivalente a $\left(\sqrt{10}\right)^2 < (3,2)^2 = 10,24$. Portanto,

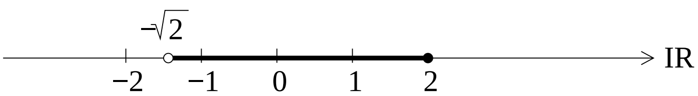
$$3 < \sqrt{10} < 3,2\,.$$

4. Veja que

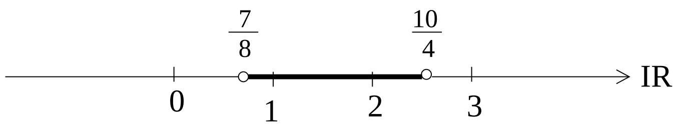
$$\frac{\sqrt{5}}{n} > \frac{1}{\sqrt{5}} \;\Leftrightarrow\; \frac{\sqrt{5}}{n}\cdot\sqrt{5} > \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \;\Leftrightarrow\; \frac{5}{n} > 1\,.$$

Ou seja, $5 > n$. Portanto, $n = 1$, 2, 3 e 4, satisfazem a desigualdade original.

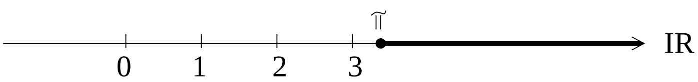
5. a)



b)



c)



6. a) $[-2,0)$, b) $(-1,1)$, c) $(-\infty,1]$, d) $\left[\dfrac{-\sqrt{2}}{2},\infty\right)$

7. a) $\sqrt{2}\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}} - 1\right) < \sqrt{2}\left(\sqrt{2}x - 1\right) \Rightarrow x - \sqrt{2} < 2x - \sqrt{2} \Rightarrow$ $-x < 0 \Rightarrow x > 0$.

Conjunto solução: $S = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\} = (0, \infty)$.

b) Em primeiro lugar temos que ter $x \neq 0$. Temos

$$\frac{1}{x} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x} > 0\,.$$

As soluções portanto ocorrem quando x e $(1-x)$ possuem o mesmo sinal. Vamos fazer a tabela de sinais.

$-\infty$	0	1	∞
$1-x$	$+$	$+$	$-$
x	$-$	$+$	$+$
$\frac{1-x}{x}$	$-$	$+$	$-$

Logo o conjunto solução é $S = \{x \in \mathbb{R}; -1 < x < 1\} = (-1, 1)$.

8. a) Falso. Note que $-2 \notin (-2, \infty) \cup (-\infty, -2)$.

b) Falso. Note que $\dfrac{3}{2} \in [1, \infty)$ e $\dfrac{3}{2} \notin \mathbb{N}$.

c) Verdadeiro. O número 1 pertence a ambos os conjuntos.

9. Note que

$$-\frac{1}{\sqrt{5}} + n < \frac{5}{\sqrt{2}} \iff n < \frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} \iff$$

$$n^2 < \left(\frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{25}{2} + \frac{10}{\sqrt{10}} + \frac{1}{5} = \frac{25}{2} + \frac{1}{5} + \sqrt{10}\,.$$

Ou seja, é preciso encontrar o maior natural n tal que

$$n^2 < \frac{127}{10} + \sqrt{10}\,.$$

Usando o exercício 3 vemos que

$$12,7 + 3 < \frac{127}{10} + \sqrt{10} < 12,7 + 3,2 \Leftrightarrow 15,7 < \frac{127}{10} + \sqrt{10} < 15,9\,.$$

Com estes dados concluímos que $n = 3$ é o maior número natural tal que $-\dfrac{1}{\sqrt{5}} + n < \dfrac{5}{\sqrt{2}}$.

10. a) Como os números envolvidos são positivos, multiplicando ambos os membros por $\sqrt{5} + \sqrt{3}$, a desigualdade fica equivalente a

$$1 < 2\sqrt{2}\left(\sqrt{5} + \sqrt{3}\right) = 2\left(\sqrt{10} + \sqrt{6}\right)\,.$$

É claro que a desigualdade é verdadeira.

b) $\sqrt{3\sqrt{3}} < \dfrac{7}{3} \iff 3\sqrt{3} < \left(\dfrac{7}{3}\right)^2 = \dfrac{49}{9}$. Ou ainda,

$$27\sqrt{3} < 49 \iff \left(27\sqrt{3}\right)^2 < 49^2 \iff 27^2 \times 3 < 49^2.$$

A última desigualdade sendo verdadeira, em vista das equivalências também $\sqrt{3\sqrt{3}} < \dfrac{7}{3}$.

11. Vamos chamar de I_n, o intervalo,

$$I_n = \left(\frac{n}{2} - \sqrt{2}, \frac{n}{2} + \sqrt{2}\right).$$

I_n tem comprimento $2\sqrt{2} = \left(\dfrac{n}{2} + \sqrt{2}\right) - \left(\dfrac{n}{2} - \sqrt{2}\right)$. Como $2\sqrt{2} > 1$ então em todo intervalo I_n existem números inteiros. Veja o caso particular $n = 1$. Neste caso, $1 \in I_1$, pois $I_1 = \left(\dfrac{1}{2} - \sqrt{2}, \dfrac{1}{2} + \sqrt{2}\right)$ e $\dfrac{1}{2} - \sqrt{2} < 1 < \dfrac{1}{2} + \sqrt{2}$. Faça as contas para provar estas últimas desigualdades. Também $1 \in I_2 = (1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$, pois $1 - \sqrt{2} < 1 < 1 + \sqrt{2}$. Agora, se $n \geq 3$ então $\dfrac{n}{2} > 0$, o que implica que $I_n \subset (0, \infty)$. Logo, existem números naturais dentro de I_n, uma vez que existem nestes intervalos números inteiros como já mostrado.

Aula 7 – Módulo de um número real, distribuição de números na reta e inequações

Objetivos

Nesta aula, você:

- compreenderá o conceito de módulo de um número real e relacionará este conceito com a distância entre 2 pontos da reta;
- distinguirá entre os conjuntos de números reais aqueles que são intervalos;
- entenderá os conceitos de conjunto denso e conjunto discreto;
- saberá provar a densidade dos números racionais e irracionais.

Nesta aula continuamos a aumentar nosso conhecimento acerca dos números reais com três tópicos a mais explicitados, no título da aula. Vamos ao primeiro tópico.

Módulo de um número real

Definição 7.1
Dado um número real x, o módulo de x, representado por $|x|$, é definido por

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Veja os seguintes exemplos de módulos de números:

$$|\sqrt{2}| = \sqrt{2}, \quad \left| -\frac{1}{2} \right| = -\left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad |0| = 0\,.$$

Observe algumas propriedades básicas do módulo que decorrem diretamente da definição:

Propriedades

1. Para qualquer número real x,

$$|x| \geq 0 \quad \text{e} \quad |x| \geq x\,.$$

2. Se x, y são números reais então

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \, .$$

3. Se x, y são números reais e $y \neq 0$, então

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \, .$$

Vamos comentar estas três propriedades.

Propriedade 1. Retorne com atenção à definição de módulo de um número real. Veja que na coluna após a chave estão escritos números positivos nas duas primeiras linhas e o número zero na terceira linha. Isto mostra que o módulo é sempre positivo ou nulo. Isto é $|x| \geq 0$ para qualquer x. Também se x for positivo então $|x| = x$ e no caso de x negativo ou nulo então $|x| \geq x$.

Propriedade 2. Veja que se um dos números x ou y for nulo, então a igualdade é verdadeira. Precisamos mostrar, portanto, a validade da igualdade nos casos em que $x \neq 0$ e $y \neq 0$. O quadro da **Figura 7.1** fornece as possibilidades de sinais para os números.

x	+	-	+	-
y	-	+	+	-
x.y	-	-	+	+

Figura 7.1: Sinal de um produto.

Para a primeira coluna temos que $x \cdot y < 0$. Logo, $|x \cdot y| = -x \cdot y = x \cdot (-y) = |x| \cdot |y|$.

Para a segunda coluna temos que $x \cdot y < 0$. Logo, $|x \cdot y| = -x \cdot y = (-x) \cdot y = |x| \cdot |y|$.

Para a terceira coluna temos que $x \cdot y > 0$. Logo, $|x \cdot y| = x \cdot y = |x| \cdot |y|$.

Para a quarta coluna, temos que $x \cdot y > 0$. Logo, $|x \cdot y| = x \cdot y = (-x) \cdot (-y) = |x| \cdot |y|$.

Propriedade 3. Vamos deixar esta propriedade para você fazer como atividade.

Atividade 7.1 Verifique a igualdade proposta pela propriedade 3, nos casos das colunas 2, 3, 4 e 5 da **Figura 7.1**.

Caracterização geométrica do módulo

Vamos usar a representação dos números reais sobre uma reta para caracterizar geometricamente o módulo de um número. Veja na **Figura 7.2**, sobre a reta real, dois números reais x e y, onde $x > 0$ e $y < 0$.

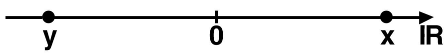


Figura 7.2: Módulo como distância à origem.

Como $x > 0$, então $|x| = x$. Por outro lado, como $y < 0$, então $|y| = -y$.

Em um ou outro caso $|x|$ e $|y|$ representam, respectivamente, a medida da distância de x até a origem O ou de y até a origem O.

Com esta interpretação geométrica em mente, enunciamos mais uma propriedade para o módulo.

Propriedade 4: Sejam x e y números reais representados geometricamente na reta real. Então

$$|x - y| = d(x, y)\,, \tag{7.1}$$

onde $d(x, y)$ significa a distância do ponto x ao ponto y ou o que é a mesma coisa, $d(x, y)$ é o comprimento do segmento cujos extremos são os pontos x e y.

Veja como funciona a prova da igualdade 7.1 para o caso em que $x < 0$ e $y > 0$. Veja a **Figura 7.3**.

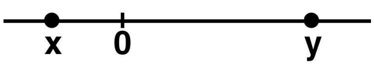


Figura 7.3: Distância entre números.

Como $x < 0$ e $y > 0$ então $x - y < 0$. Logo

$$|x - y| = -(x - y) = y - x = |y| + |x|\,.$$

Esta última igualdade mostra que $d(x, y)$ é obtida somando o comprimento dos segmentos Ox e Oy.

Atividade 7.2 Considere outras posições para x e y na reta e comprove a validade da igualdade 7.1.

Desigualdade triangular

Agora vamos provar uma proposição fundamental sobre números reais, chamada desigualdade triangular.

Proposição 7.1
Sejam a e b números reais quaisquer. Então

$$|a+b| \leq |a| + |b| \,.$$

Prova: Em primeiro lugar, note que a desigualdade vale obviamente se um dos números ou os dois são nulos. Desenvolva este caso particular. Vamos provar a validade da desigualdade triangular examinando, caso a caso, as várias possibilidades de sinais para os números a e b. Veja na tabela (**Figura 7.4**) as possibilidades de sinais para a e b.

	sinal de a	sinal de b
caso 1	+	+
caso 2	-	-
caso 3	+	-
caso 4	-	+

Figura 7.4: Sinal de dois números.

Prova do caso 1. $a > 0$ e $b > 0$. Neste caso $a + b > 0$ e escrevemos

$$|a+b| = a+b = |a| + |b| \,,$$

Isto é

$$|a+b| = |a| + |b| \,,$$

provando a desigualdade triangular no caso 1.

Prova do caso 2. $a < 0$ e $b < 0$. Neste caso $a + b < 0$ e então,

$$|a+b| = -(a+b) = -a + (-b) = |a| + |b| \,,$$

Isto é,

$$|a+b| = |a| + |b| \,,$$

provando a desigualdade triangular no caso 2.

Prova do caso 3. $a > 0$ e $b < 0$. Nesta situação temos que trabalhar com duas situações: $a + b \geq 0$ ou $a + b < 0$. Na primeira situação $(a + b \geq 0)$ escrevemos

$$|a+b| = a+b = a-(-b) = |a| - |b| \,.$$

Então,

$$|a+b| = |a| - |b| < |a| - |b| + 2|b| = |a| + |b| \,.$$

Na segunda situação $(a+b<0)$ escrevemos

$$|a+b| = -(a+b) = -a + (-b) = -|a| + |b|\,.$$

Logo,

$$|a+b| < -|a| + 2|a| + |b| = |a| + |b|\,.$$

Portanto em uma situação ou em outra a desigualdade é verificada também no caso 3.

Prova do caso 4. A prova do caso 4 é muito parecida com a do caso 3. Basicamente, basta trocar a com b.

$\square$

A desigualdade triangular que acabamos de provar pode aparecer expressa de outras maneiras. Por exemplo:

Para quaisquer dois números reais a e b valem as seguintes desigualdades:

1) $|a| - |b| \leq |a-b|$

2) $|b| - |a| \leq |a-b|$

Prova: Veja como as desigualdades acima são conseqüência direta da desigualdade triangular que aparece na Proposição 7.1. De fato

$$|a| = |a-b+b| \leq |a-b| + |b|\,.$$

Logo

$$|a| - |b| \leq |a-b|\,,$$

provando a primeira desigualdade.

Você mesmo pode construir a prova da segunda desigualdade. Mãos à obra!

Atividade 7.3

a) Prove que para quaisquer números a e b,

$$|b| - |a| \leq |a-b|$$

b) Prove que se a_1, a_2, a_3 são números reais então

$$|a_1 + a_2 + a_3| \leq |a_1| + |a_2| + |a_3|$$

Definição 7.2
Dados os números reais a e r, onde $r > 0$, os intervalos

$$(a - r, a + r) \quad \text{e} \quad [a - r, a + r]$$

são ditos, respectivamente, o intervalo aberto de centro em a e raio r e o intervalo fechado de centro em a e raio r.

Na **Figura 7.5** representamos os intervalos centrados em $\sqrt{2}$ e -2 de raios iguais a 1, o primeiro aberto e o segundo fechado.

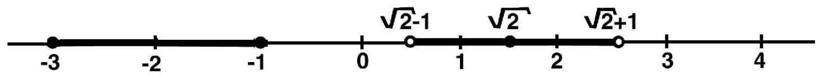


Figura 7.5: Intervalos aberto e fechado.

Nota: O intervalo $(a - r, a + r)$ é constituído por todos os números reais que estão a uma distância inferior a r do número a. Veja porque

$$(a - r, a + r) = \{x \in \mathbb{R};\ a - r < x < a + r\}\,.$$

Vamos separar a dupla desigualdade que aparece na definição do intervalo em

$$a - r < x \quad \text{e} \quad x < a + r\,.$$

Estas desigualdades são equivalentes por sua vez a

$$-(x - a) < r \quad \text{e} \quad x - a < r\,.$$

Logo o número $x - a$ e seu simétrico $-(x - a)$ são inferiores a r. Então

$$|x - a| < r\,.$$

Portanto, podemos escrever o intervalo aberto de centro a e raio r, como

$$(a - r, a + r) = \{x \in \mathbb{R};\ |x - a| < r\} = \{x \in \mathbb{R};\ d(x, a) < r\}\,.$$

Esta maneira de representar o intervalo é geometricamente relevante. Podemos dizer que $(a - r, a + r)$ é o conjunto dos números (pontos) da reta que estão a uma distância inferior a r do número (ponto) que é o centro do intervalo.

Exemplo 7.1

Encontre o conjunto obtido pela interseção dos intervalos abertos I_1 e I_2, de centros $\frac{1}{3}$ e $\frac{-5\sqrt{3}}{4}$ e raios $r_1 = 1$ e $r_2 = 3$, respectivamente.

Solução: Veja como se expressam os intervalos por I_1 e I_2. Respectivamente,

$$I_1 = \left(\frac{1}{3} - 1, \frac{1}{3} + 1\right) \quad \text{e} \quad I_2 = \left(\frac{-5\sqrt{3}}{4} - 3, \frac{-5\sqrt{3}}{4} + 3\right).$$

Também, veja na **Figura 7.6** a representação geométrica dos intervalos em duas cópias da reta. Para ajudar a visualização observe o valor aproximado $\sqrt{3} \simeq 1,7$ e então $\frac{-5\sqrt{3}}{4} \simeq -2,12$.

Também

$$I_1 = \left(\frac{-2}{3}, \frac{4}{3}\right) \text{ e } I_2 = \left(\frac{-5\sqrt{3}}{4} - 3, \frac{-5\sqrt{3}}{4} + 3\right).$$

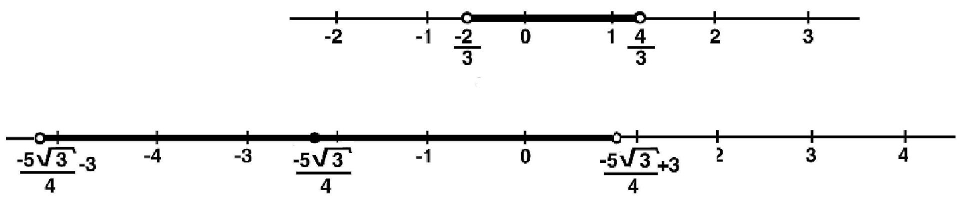


Figura 7.6

Então $I_1 \cap I_2 = \left(\frac{-2}{3}, \frac{-5\sqrt{3}}{4} + 3\right) = \left(\frac{-2}{3}, \frac{12 - 5\sqrt{3}}{4}\right)$.

Distribuição de números na reta

Você já sabe como são distribuídos na reta real os números inteiros. É uma distribuição que determina que, para cada número inteiro n, existem um número inteiro sucessor $n + 1$ e um número inteiro antecessor $n - 1$, igualmente distantes de n. Isto é, em termos de distância entre números, escrevemos,

$$d(n, n + 1) = d(n, n - 1) = 1\,.$$

Veja a **Figura 7.7**.

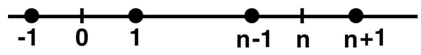


Figura 7.7: Distribuição dos inteiros.

O fato explicado acima mostra uma propriedade importante do conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$. Os números inteiros são isolados, ou se distribuem de maneira isolada. Para ver este isolamento, basta ver a seguinte igualdade de conjuntos

$$\left(n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right) \cap \mathbb{Z} = \{n\}\,. \tag{7.2}$$

A igualdade acima garante que no intervalo aberto centrado em n e de raio $r = \dfrac{1}{2}$, não existe outro número inteiro além de n. O número n está isolado no conjunto $\mathbb{Z}$. Veja o caso do isolamento dos números 4 e -2, na **Figura 7.8**.

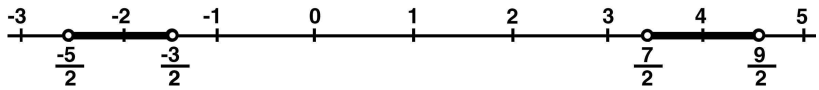


Figura 7.8: Intervalos isolando números.

$$\left(4 - \frac{1}{2}, 4 + \frac{1}{2}\right) \cap \mathbb{Z} = \left(\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right) \cap \mathbb{Z} = \{4\}\,,$$
$$\left(-2 - \frac{1}{2}, -2 + \frac{1}{2}\right) \cap \mathbb{Z} = \left(\frac{-5}{2}, \frac{-3}{2}\right) \cap \mathbb{Z} = \{-2\}\,.$$

Subconjuntos de números reais com propriedade como $\mathbb{Z}$ são chamados de conjuntos discretos.

Vamos a uma definição rigorosa.

Definição 7.3

Um subconjunto X de números reais é chamado um conjunto discreto se para todo $x \in X$, existir um intervalo aberto I centrado em x tal que

$$I \cap X = \{x\}\,.$$

Em outras palavras, existe um $r > 0$ tal que

$$(x - r, x + r) \cap X = \{x\}\,.$$

Exemplo 7.2

Se a é um número real fixado, são discretos os seguintes conjuntos:

1) $M(a) = \{n \cdot a;\ n \in \mathbb{Z}\}$

2) $S(a) = \{n + a;\ n \in \mathbb{Z}\}$

De fato,

1) Se $a = 0$ então $M(0) = \{0\}$ e $S(0) = \mathbb{Z}$ e estes conjuntos são discretos.

2) Se $a \neq 0$, escolha $r_1 = \dfrac{|a|}{2}$ e $r_2 = \dfrac{1}{2}$. Com estes raios encontramos que

$$(a - r_1, a + r_1) \cap M(a) = \{a\} \quad \text{e} \quad (a - r_2, a + r_2) \cap S(a) = \{a\}\,.$$

Atividade 7.4

Escolha um número real $a < 0$ e represente geometricamente na reta os conjuntos $M(a)$ e $S(a)$. Convença-se que eles são conjuntos discretos.

Veja um novo exemplo de conjunto discreto.

Exemplo 7.3

O conjunto $A = \left\{\dfrac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dots\right\}$ é um conjunto discreto na reta.

De fato,

1) Tomando um elemento qualquer $\dfrac{1}{n} \in A$, devemos, segundo a definição achar $r > 0$ tal que

$$\left(\frac{1}{n} - r, \frac{1}{n} + r\right) \cap A = \left\{\frac{1}{n}\right\}.$$

Veja a **Figura 7.9** onde está representado o conjunto A.

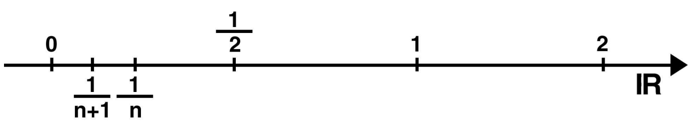


Figura 7.9

Note que

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots > \frac{1}{n-1} > \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \dots$$

Então os elementos de A mais próximos de $\frac{1}{n}$ são $\frac{1}{n-1}$ à direita e $\frac{1}{n+1}$ à esquerda. Veja que

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{e} \quad \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n-1)n}\,.$$

Também como $n(n+1) > (n-1)n$, então $\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{(n-1)n}$. Logo se escolhermos para raio r a metade do menor comprimento, isto é, $r = \frac{1}{2n(n+1)}$ teremos que,

$$\left(\frac{1}{n} - r, \frac{1}{n} + r\right) \cap A = \{n\}\,.$$

Veja a **Figura 7.10** ilustrando a situação.

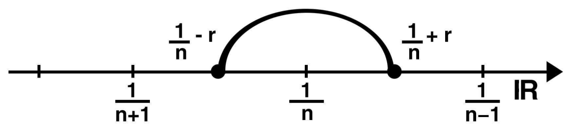


Figura 7.10: Isolamento do elemento $\frac{1}{n}$.

- Qual é a idéia geométrica que você construiu sobre um conjunto X discreto de números reais?

Você está correto se interpreta um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ discreto como um conjunto espalhado pela reta, ocupando pouco espaço e cujos pontos são isolados uns dos outros.

Vamos agora virar radicalmente o jogo e tratar de conjuntos de números reais densos em $\mathbb{R}$.

Definição 7.4
Um subconjunto $Y \subset \mathbb{R}$ é um conjunto denso em $\mathbb{R}$ se para todo intervalo aberto I acontecer de $Y \cap I \neq \emptyset$.

Vamos reler a definição para tomarmos posse de todo seu significado. Dizer que um subconjunto $Y \subset \mathbb{R}$ é um conjunto denso na reta significa que para qualquer escolha de um intervalo $I = (a, b)$ existe $y \in Y$ tal que $y \in I$. E note que o tamanho do intervalo I pode ser arbitrariamente minúsculo.

Veja a **Figura 7.11** que ilustra a densidade do conjunto Y.

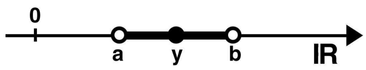


Figura 7.11: Conjunto denso.

Agora vamos dar um corte no nosso desenvolvimento e lembrar a época dos Pitagóricos onde correu sangue pela descoberta do número irracional $\sqrt{2}$. Cremos que se o pobre Hipaso, descobridor do primeiro irracional que perdeu a vida, tivesse evidenciado a existência de infinitos números irracionais e que, além disso, estes números estão presentes em qualquer intervalo aberto, por mais miscrocópico que seja este intervalo, não restaria à comunidade Pitagórica a não ser a imolação coletiva.

Eis o resultado surpreendente e fundamental:

Teorema 7.1
Os seguintes subconjuntos são conjuntos densos na reta:

a) o subconjunto dos números irracionais

b) o subconjunto dos números racionais.

Antes de provar o resultado expresso no Teorema 7.1, pedimos licença para preparar o terreno. As Notas 1 e 2 a seguir, são resultados preparatórios.

Nota 1. Se $I = (a, b)$ é um intervalo aberto então $a < b$ e $d = b - a$ é o diâmetro do intervalo I. Veja a **Figura 7.12** , onde o diâmetro d é representado.

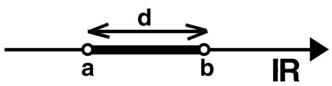


Figura 7.12: Diâmetro de um intervalo.

Nota 2. Dado qualquer número positivo $d > 0$, existe um número natural n tal que

$$2\sqrt{2} < nd\,.$$

Veja a **Figura 7.13** ilustrando a Nota 2. O resultado expresso nesta nota recebe o nome de "Princípio Arquimediano" em homenagem ao geômetra grego Arquimedes, que viveu no século IV a.C.

Justificativa da Nota 2.

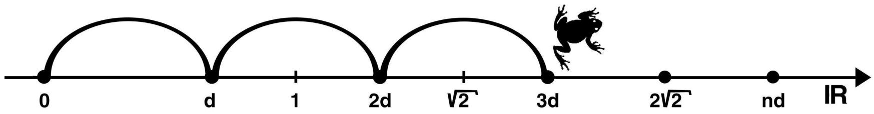


Figura 7.13: Princípio Arquimediano.

Observe em primeiro lugar que $2\sqrt{2}$ é um número fixo. O número $d > 0$ pode ser imaginado como o tamanho do pulo de um sapinho que sai da origem 0 (zero) e quer alcançar e ultrapassar o marco $2\sqrt{2}$, como na **Figura 7.13**.

É claro que se o tamanho do pulo $d > 0$ do sapinho for muito pequeno, o número de pulos n tem que ser grande para superar $2\sqrt{2}$. Inversamente, se o tamanho do pulo $d > 0$ for grande, o número de pulos n será pequeno. Em outras palavras, o número de pulos n é inversamente proporcional ao tamanho $d > 0$ do pulo. De qualquer modo o sapinho pulará, tanto quanto necessário, para ultrapassar a marca $2\sqrt{2}$.

Isto é,

$$d + d + d + \ldots + d > 2\sqrt{2} \qquad (n \text{ parcelas } d)\,.$$

Atividade 7.5

Se $d = 0,001 = 10^{-3}$, qual é o menor n tal que $2\sqrt{2} < n \cdot d$?

Sugestão: Use que $14141 \times 10^{-4} < \sqrt{2} < 14142 \times 10^{-4}$.

Juntando os resultados das notas 1 e 2 podemos provar agora o Teorema 7.1.

Prova do Teorema 7.1

Queremos mostrar que qualquer que seja o intervalo $I = (a, b)$, onde $a < b$, existem dentro de I números racionais e números irracionais.

Por incrível que pareça, para provar o teorema, no contexto em que estamos, é suficiente promover uma corrida de sapos!

Veja porque! Suponha, inicialmente que o intervalo está na parte positiva da reta. Isto é, $I = (a, b)$, onde $0 < a < b$. Temos que $d = b - a > 0$ é o diâmetro do intervalo. A Nota 2 assegura que existe n tal que

$$2\sqrt{2} < n \cdot d \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{n} < \frac{d}{2}\,.$$

Serão dois sapinhos saindo da origem 0 (zero) na direção positiva e com pulos de comprimentos $\dfrac{\sqrt{2}}{n}$ e $\dfrac{1}{n}$ respectivamente. Note que ambos os pulos são menores do que a metade do diâmetro d do intervalo I, pois vale,

$$\frac{1}{n} < \frac{\sqrt{2}}{n} < \frac{d}{2}\,.$$

Ora, nestas condições os sapinhos após um número finito de pulos têm a máxima aproximação do ponto a e daí no próximo pulo caem dentro da armadilha representada pelo conjunto $I = (a, b)$. O fato dos sapinhos caírem dentro do intervalo decorre que seus pulos não cobrem o diâmetro do intervalo. Veja a **Figura 7.14**.

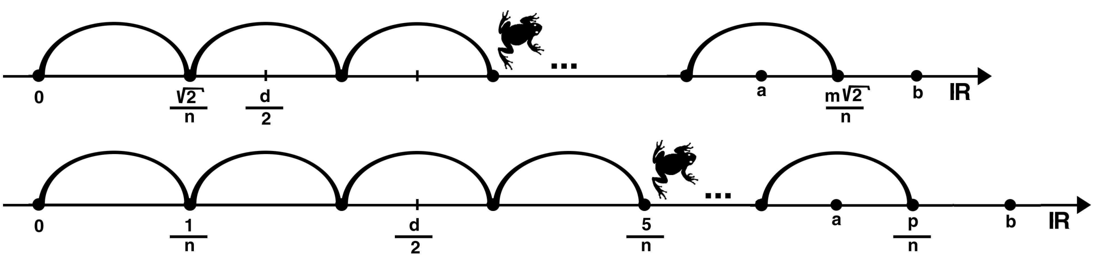


Figura 7.14: A corrida de sapos.

Portanto com $(m-1)$ pulos de comprimento $\dfrac{\sqrt{2}}{n}$, o sapinho irracional tem a máxima aproximação do ponto a e, assim o m-ésimo pulo cai dentro do intevalo. Logo

$$a < \frac{m\sqrt{2}}{n} < b \Rightarrow \frac{m\sqrt{2}}{n} \in I = (a, b)\,.$$

Também com $(p-1)$ pulos de comprimento $\dfrac{1}{n}$, o sapinho racional tem a máxima aproximação de a e, assim o p-ésimo pulo cai dentro de I. Logo,

$$a < \frac{p}{n} < b \Rightarrow \frac{p}{n} \in I = (a, b)\,.$$

Como $\dfrac{m\sqrt{2}}{n}$ é um número irracional e $\dfrac{p}{n}$ um número racional, e estes números estão dentro do intervalo I está encerrada a prova do Teorema 7.1, no caso em que $I = (a, b)$ e $0 < a < b$.

Por outro lado, se $I = (a, b)$ ocupa uma posição qualquer na reta, certamente existe um número inteiro k tal que $k < a$. Então colocamos nossos sapinhos pulando a partir de k. Novamente após s pulos e r pulos respectivamente os sapinhos caem na armadilha. Isto é,

$$k + \frac{s\sqrt{2}}{n} \in I = (a, b) \quad \text{e} \quad k + \frac{r}{n} \in I = (a, b)\,.$$

Os números $k + \dfrac{s\sqrt{2}}{n}$ e $k + \dfrac{r}{n}$ são, repectivamente, um número irracional e um número racional. Isto completa nossa prova que os subconjuntos dos números racionais e os irracionais são densos em $\mathbb{R}$.

Atvidade 7.6

a) Considere o intervalo $I = (a, b)$, $a = \sqrt{2}$ e $b = \dfrac{36}{25}$. Calcule o diâmetro de I.

b) Encontre um número racional e um número irracional dentro de I?

Inequações com módulo

Para encerrar esta aula vamos praticar, em alguns exemplos, a solução de inequações onde aparecem módulos.

Exemplo 7.4

Determine o conjunto de números reais, tais que $|x + 1| < 5$.

Solução. Usando a definição de módulo, a desigualdade proposta corresponde a duas desigualdades

$$x + 1 < 5 \text{ e } -(x + 1) < 5\,.$$

Ou seja, $x < 4$ e $-6 < x$. Portanto $S = (-6, 4)$ é o conjunto solução.

Exemplo 7.5

Determine o conjunto solução da inequação $|x - 1| > 6$.

Solução. A desigualdade é equivalente a

$$x - 1 > 6 \text{ e } -(x - 1) > 6\,.$$

Ou seja, $x > 7$ e $-5 > x$. Logo o conjunto solução S é dado pela união de dois intervalos abertos infinitos: $S = (-\infty, -5) \cup (7, \infty)$.

Exemplo 7.6

Determine o conjunto solução da inequação $|x + 1| < |x - 1|$.

Solução. O problema consiste em identificar todos os números reais x tais que a distância até -1 é inferior à distância até 1. Temos três casos a examinar.

1º caso: $x > 1$.

Neste caso, $x+1 > 0$ e $x-1 > 0$ e a equação se torna $x+1 < x-1 \Leftrightarrow 1 < -1$, o que é absurdo.

2º caso: $-1 \leq x \leq 1$.

Neste caso, $x + 1 \geq 0$ e $x - 1 \leq 0$. Então a desigualdade se expressa como

$$x + 1 < -(x - 1) \Leftrightarrow 2x < 0 \Leftrightarrow x < 0\,.$$

Logo, $-1 \leq x < 0$ é solução neste caso.

3º caso: $x < -1$.

Neste caso, $x + 1 < 0$ e $x - 1 < 0$ e a desigualdade se expressa como $-(x + 1) < -(x - 1)$. Ou seja, $-1 < 1$. Portanto, todo $x < -1$ verifica a desigualdade.

Juntando as possibilidades representadas pelo 2º e 3º casos temos que

$$S = [-1, 0) \cup (-\infty, -1) = (-\infty, 0)\,,$$

é o conjunto solução procurado.

Exercícios

1. Existe algum número real a tal que $|a - 2| = |a + 1|$? Interprete sua solução em termos de distância.
2. Determine os números $x \in \mathbb{R}$ que estão à distância 3 do número -3.
3. Dado intervalo aberto I, determine o centro c e o raio r. Isto é, escreva I na forma $I = (c - r, c + r)$, onde

   (a) $I = (-3, 2)$

   (b) $I = \left(\dfrac{-5}{2}, \dfrac{8}{3}\right)$

(c) $I = (2 - \sqrt{2}, \sqrt{3} + 2)$

4. Calcule o diâmetro de cada um dos intervalos do exercício 3.

5. Determine e represente na reta real o conjunto solução de

   (a) $\left| x + \dfrac{1}{5} \right| = 2$

   (b) $|x - 3| = -1$

   (c) $|x + 6| < 3$

Respostas das atividades

7.1: Para a segunda coluna $\dfrac{x}{y} < 0$ e $\left|\dfrac{x}{y}\right| = -\dfrac{x}{y} = \dfrac{x}{-y} = \dfrac{|x|}{|y|}$. Para a terceira coluna $\dfrac{x}{y} < 0$ e $\left|\dfrac{x}{y}\right| = -\dfrac{x}{y} = \dfrac{-x}{y} = \dfrac{|x|}{|y|}$. Para a quarta coluna $\dfrac{x}{y} > 0$ e $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{x}{y} = \dfrac{|x|}{|y|}$. Para a quinta coluna $\dfrac{x}{y} > 0$ e $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{x}{y} = \dfrac{-x}{-y} = \dfrac{|x|}{|y|}$.

7.2: Se $0 < x < y$ então $d(x, y) = y - x = |x - y|$. Faça o desenho deste caso e discuta outras possibilidades

7.3: a) A desigualdade básica é $|a+b| \leq |a|+|b|$. Note que $|b| = |b-a+a| \leq |b - a| + |a|$. Logo, $|b| - |a| \leq |b - a| = |a - b|$.

b) $|a_1 + a_2 + a_3| \leq |a_1 + a_2| + |a_3| \leq |a_1| + |a_2| + |a_3|$.

7.4: Para $a = \dfrac{1}{3}$, faça o desenho na reta dos conjuntos
$M\left(\dfrac{1}{3}\right) = \left\{ \dots - \dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}, 0, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3} \dots \right\}$ e $S(a) = \left\{ \dots - \dfrac{5}{3}, -\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{3}, \dots \right\}$

7.5: Usando a sugestão, basta encontrar o menor n tal que $nd > 2 \times 14142 \times 10^{-4}$. Ou seja, $n \cdot 10^{-3} > 28284 \times 10^{-4}$. Logo, $n > 2828,4$. Portanto $n = 2829$.

7.6: a) $d = \dfrac{36}{25} - \sqrt{2}$;

b) Como $d = \dfrac{144}{100} - \sqrt{2} = 14400 \times 10^{-4} - \sqrt{2}$ e $14141 \times 10^{-4} < \sqrt{2} < 14142 \times 10^{-4}$ então $258 \times 10^{-4} < d < 259 \times 10^{-4}$.

Então se $c = 10^{-4}$ temos que $0 < c < d$ e os números $\sqrt{2}+c$ e $\dfrac{36}{25}-c$ são números, respectivamente, irracional e racional e que pertencem ao intervalo I.

Respostas dos exercícios

1. A igualdade significa que a está igualmente distante dos pontos (números) 2 e -1.

   Se $a \leq -1$ a igualdade é equivalente a $-(a-2) = -(a+1) \Rightarrow 2 = -1$, sem solução.

   Se $-1 < a \leq 2$ a igualdade é equivalente a $-(a-2) = a+1 \Rightarrow a = \dfrac{1}{2}$.

   Se $a > 2$ a igualdade é equivalente a $a - 2 = a + 1 \Rightarrow -2 = 1$, sem solução.

   Logo, $a = \dfrac{1}{2}$ é a única solução.

2. $x = -6$ e $x = 0$.

3. (a) $I = \left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{5}{2}, -\dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{2}\right)$

   (b) $I = \left(\dfrac{1}{12} - \dfrac{31}{12}, \dfrac{1}{12} + \dfrac{31}{12}\right)$

   (c) $\left(\dfrac{4+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}, \dfrac{4+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}\right)$

4. a) 5, b) $\dfrac{31}{6}$, c) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$

5. (a) $x + \dfrac{1}{5} = 2$ ou $-\left(x + \dfrac{1}{5}\right) = 2 \Rightarrow x = \dfrac{9}{5}$ ou $x = -\dfrac{11}{5}$.

   (b) $x - 3 = -1$ ou $-(x-3) = -1 \Rightarrow x = 2$ ou $x = 4$

   (c) $x + 6 < 3$ ou $-(x+6) < 3 \Rightarrow x < -3$ ou $x > -9$.

"... partindo das árvores baobás gêmeas, andar 3200 *pés na direção do sol poente, aguardar a meia noite da lua nova de março..."*

Aula 8 – Sistemas de coordenadas em um plano

Objetivos

Nesta aula, você:

- identificará que coordenadas em uma reta ou em um plano são ferramentas que permitem representar graficamente subconjuntos da reta e do plano;
- compreenderá que numa reta com coordenadas a noção de módulo de um número real conduz à noção de distância entre pontos de uma reta;
- entenderá a construção de coordenadas polares num plano e a relação destas com coordenadas cartesianas.

Veja a inscrição encontrada num pergaminho de uma biblioteca na antigüidade, dando referências para encontrar um tesouro enterrado.

"Na ilha de Samos, partindo das árvores baobás gêmeas, andar 3200 *pés na direção do sol poente e aguardar a meia noite de uma lua nova de março. Caminhar mais* 7.280 *pés na direção da estrela Sirius, para ter o tesouro estará a seus pés.* "

Considerando o espaço descrito pelo "Mapa do tesouro" como um plano, as indicações referem-se a pontos com localizações precisas e direções que ligam estes pontos.

A **Figura 8.1** a seguir, poderia ser uma representação esquemática do "Mapa do tesouro". Os pontos A, B e C seriam, respectivamente, o ponto de partida, a primeira parada para aguardar a lua nova de março e finalmente o tesouro no ponto C. As direções indicadas de A para B e de B para C representam as direções do sol poente e da estrela Sirius num céu de lua nova de março.

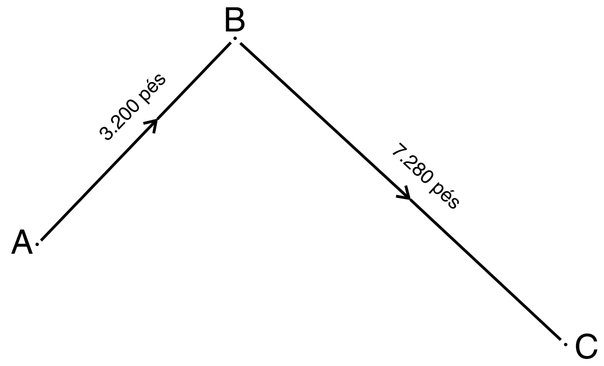


Figura 8.1: O mapa do tesouro.

Nesta aula vamos introduzir um sistema de coordenadas no plano para resolver problemas ligados à localização de pontos, descrição de lugares geométricos (regiões do plano) e oferecer uma ferramenta para resolver problemas que permitam uma expressão geométrica.

Como teremos ocasião de estudar, a introdução de um sistema de coordenadas em um plano constroe uma ponte entre a Álgebra e a Geometria, estabelecendo um método eficaz para resolver problemas.

O método funciona mais ou menos assim: queremos resolver um problema e traduzimos seu enunciado em termos algébricos. Em seguida, as expressões algébricas são interpretadas ou expressadas como lugares geométricos num plano com sistema de coordenadas. Resolve-se o problema geometricamente. Após, interpreta-se as soluções à vista da proposição algébrica original do problema, selecionando as soluções compatíveis.

Coordenadas em uma reta

Dada uma reta r indicamos os pontos sobre a reta por letras maiúsculas A, B, C etc ...

A idéia de introduzir coordenadas em uma reta é a de associar a cada ponto da reta um número real de maneira tão organizada que possam ser conseguidas as seguintes propriedades:

- fica definido uma unidade de medida;
- todo ponto representa um e apenas um número real e, todos os números reais são representados;
- a distância entre dois pontos é dada pelo módulo da diferença dos números inscritos sobre o ponto.

Uma vez introduzido o sistema de coordenadas sobre a reta, está estabelelecido uma representação geométrica dos números reais. A partir daí, pontos da reta e números reais são a mesma coisa. Problemas envolvendo números reais podem ser resolvidos geometricamente e propriedades de números reais podem ser interpretadas geometricamente.

Este assunto coincide com a representação geométrica dos números reais sobre uma reta, assunto visto nas aulas anteriores. Não é demais repetir a construção, agora com foco no sistema de coordenadas.

Mas vamos à ação!

Dada uma reta r escolha um ponto origem O e o represente pelo número 0 (zero), escolha outro ponto diferente para localizar o número 1. Neste ponto estamos aptos a representar sobre a reta todos os números reais. Veja a **Figura 8.2**.

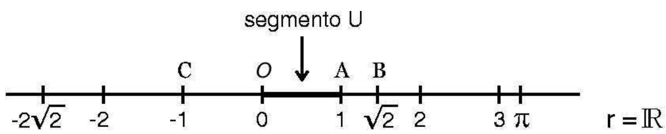


Figura 8.2: A reta real.

O segmento OA cujas extremidades são os pontos 0 (zero) e 1 (um), indicado como segmento U, define a unidade de medida que permite localizar todos os números reais sobre a reta.

De que modo? Sobre a reta r estão definidas duas semi-retas opostas com origem comum O. Sobre aquela semi-reta que contém o número 1 representaremos todos os números reais positivos e sobre a semi-reta oposta representaremos todos os números reais negativos. Este modo de proceder, faz com que a todo número real corresponda um e apenas um ponto da reta r e a cada ponto da reta corresponda um e apenas um número real. Outro modo de dizer a mesma coisa: "entre os pontos da reta e os números reais estabeleceu-se uma identificação biunívoca".

Uma identificação biunívoca entre dois conjuntos X e Y é uma relação que associa a cada elemento de X um único elemento de Y, e de modo que a relação pode ser invertida associando a cada elemento de Y, igualmente, um único elemento de X.

Este modo de representar os números reais sobre uma reta faz com que o segmento de reta em cujos extremos estão representados números inteiros consecutivos n e $n + 1$ tenha comprimento igual a do segmento segmento unitário U.

Para recordar os detalhes sobre a localização dos números reais sobre a reta a partir dos números inteiros depois racionais e enfim os irracionais, retorne à leitura da Aula 3.

Reforçando e estruturando a idéia! A todo ponto A da reta r está associado um único número real digamos, a, que é a coordenada do ponto.

Na **Figura 8.2**, os pontos A e B têm como coordenadas, respectivamente, os números 1 e $\sqrt{2}$.

Mas, qual é a propriedade geral que determina a posição relativa entre números sobre a reta? É a seguinte: "se os pontos P e Q tem como coordenadas os números p e q então o comprimento do segmento PQ é $|p - q|$.

Uma reta com estrutura de coordenadas é dita uma reta numérica ou a reta real. Estamos autorizados a representar esta reta por $\mathbb{R}$. Veja esta notação na **Figura 8.2**.

Distância entre dois pontos da reta

A notação AB representa tanto o segmento de reta como a medida de seu comprimento. O contexto no qual é escrito AB deve indicar claramente do que se está falando.
Alguns autores preferem escrever $m(AB)$ ou $\overline{AB}$ para a medida do comprimento do segmento AB. Cremos que esta opção sobrecarrega os textos com quase nenhuma vantagem.

Conforme já observado, numa reta com coordenadas é muito fácil calcular a distância entre dois pontos A e B. Se a e b são respectivamente os números que representam as coordenadas dos pontos A e B, então o comprimento do segmento de reta AB é a distância entre os pontos, a qual pode ser calculada por

$$d(A, B) = AB = |b - a| \, .$$

Vamos entender bem o que está escrito na fórmula acima. A distância entre A e B é o comprimento do segmento cujos extremos são estes pontos. Este comprimento está indicado por AB e pode ser calculado pelo módulo do número $b - a$.

Coordenadas em um plano

Mas, pretendemos ir além, introduzindo coordenadas em um plano. De que modo? Considere um plano α e um par de retas t e s perpendiculares, cuja interseção ocorre no ponto O. Veja a **Figura 8.3**.

Considere em cada uma dessas retas sistemas de coordenadas de modo que r e s se tornem retas numéricas, com a mesma unidade U de medida.

Afirmamos que, com a ajuda deste par de retas (ou eixos), existe uma identificação biunívoca entre os pontos P do plano α e os pares (x, y), onde x, y são números reais.

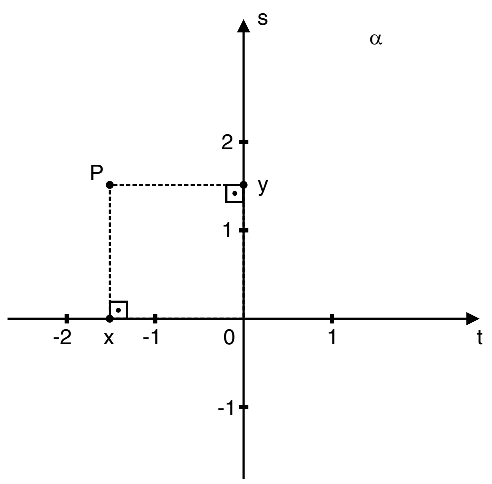


Figura 8.3: Eixos ortogonais no plano.

Como funciona? Tome um ponto P arbitrário e trace perpendiculares às retas t e s obtendo, respectivamente os pontos x e y. Assim, legitimamente, podemos denotar

$$P = (x, y)\,.$$

Os números x e y são chamados, respectivamente, a abscissa e a ordenada do ponto P. As retas t e s são ditas, respectivamente, o eixo horizontal ou das abcissas e o eixo vertical ou das ordenadas.

Retorne a **Figura 8.3**, para visualizar a representação do ponto P.

O plano euclidiano

Veja o passo fundamental que demos! Ao introduzir adequadamente um par de eixos (retas) no plano α provocamos uma identificação biunívoca entre os pontos P de α e os pares ordenados (x, y) de números reais. Esta identificação é escrita como $P = (x, y)$ e permite expressar o plano α como o conjunto

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y);\ x \text{ e } y \text{ são números reais}\}\,,$$

que é o produto cartesiano de duas cópias do conjunto dos números reais $\mathbb{R}$.

Portanto é útil ao invés de dizer que α tem um sistema de coordenadas, escrevermos simplesmente $\mathbb{R}^2$ para o plano α.

Então está estabelecida nossa convenção. Quando escrevermos,

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y);\ x, y \in \mathbb{R}\}\,,$$

estamos nos referindo a um plano com um sistema de coordenadas retangulares. O plano $\mathbb{R}^2$ com esta estrutura recebe o nome de Plano Euclidiano, em homenagem ao ilustre geômetra grego.

A identificação biunívoca entre pontos P do plano e pares de números reais significa que dois pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ são iguais se e somente se $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.

Representação gráfica

No plano euclidiano $\mathbb{R}^2$ temos o local ideal para representar graficamente objetos geométricos, como pontos, segmentos, retas e figuras planas em geral. Mais tarde na Aula 19, a idéia de representar geometricamente objetos no plano $\mathbb{R}^2$, atinge um ponto importante, com a representação gráfica de funções.

Vamos começar mostrando casos bem simples.

Exemplo 8.1

Descreva algebricamente e represente no plano o segmento de reta cujos extremos são os pontos $A = (2, 1)$, $B = (-1, 1)$.

Solução: Na **Figura 8.4** temos a representação gráfica do segmento AB.

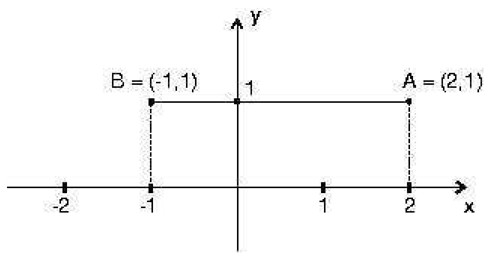


Figura 8.4: Um segmento em $\mathbb{R}^2$.

Em termos algébricos,

$$AB = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ -1 \leq x \leq 2,\ y = 1\}.$$

Exemplo 8.2

Represente graficamente os conjuntos

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x \leq 1\} \quad \text{e}$$

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ -1 \leq y \leq 1\}$$

Solução: Para representar graficamente U, levamos em conta a variação da abcissa x e o fato que não há restrição à variação da ordenada y. Para a representação gráfica de V, levamos em conta a variação da ordenada y e o fato que não há restrição à variação da abcissa x. Veja a **Figura 8.5**.

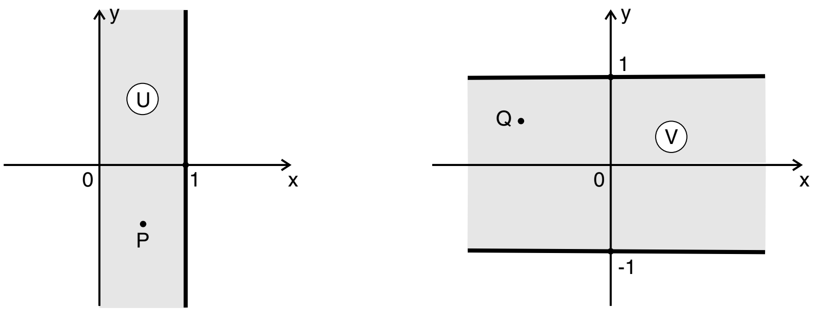


Figura 8.5: Faixas vertical e horizontal.

Exemplo 8.3

Represente graficamente o conjunto

$$Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x \leq 1 \ \text{ e } \ -1 \leq y \leq 1\}.$$

Solução: Para construir o gráfico de Z, levamos em conta as variações da abcissa x e da ordenada y. Mas antes de tudo, veja que $Z = U \cap V$. Isto facilita tudo para a representação pois conhecemos os gráficos de U e V. A **Figura 8.6** representa Z através dessa interseção.

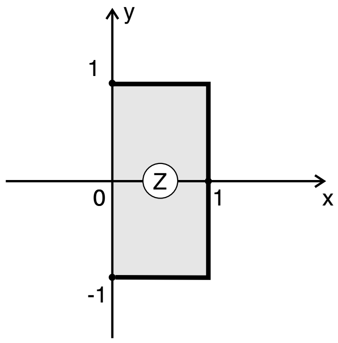


Figura 8.6: Um retângulo em $\mathbb{R}^2$.

Semi-planos e quadrantes

Vamos continuar explorando coordenadas para descrever importantes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$. Considere $\mathbb{R}^2$, como na **Figura 8.7**, $\mathbb{R}^2$ com seu sistema de coordenadas,

onde estão representados os pontos $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, $P_3 = (x_3, y_3)$ e $P_4 = (x_4, y_4)$.

O eixo x das abcissas divide o plano em dois semi-planos, um deles posicionado acima do eixo e outro abaixo do eixo. Por exemplo, poderíamos nos referir a estes semi-planos, respectivamente pelos símbolos H_+ e H_-.

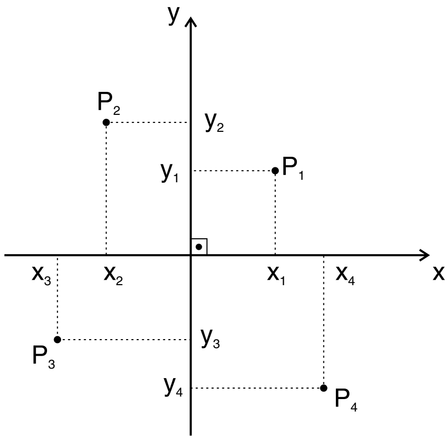


Figura 8.7: Pontos no plano $\mathbb{R}^2$.

Veja como se expressam estes semi-planos em termos de conjuntos,

$$H_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y \geq 0\} \quad \text{e}$$
$$H_- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y \leq 0\}\,.$$

Veja na **Figura 8.8** a representação gráfica de H_+.

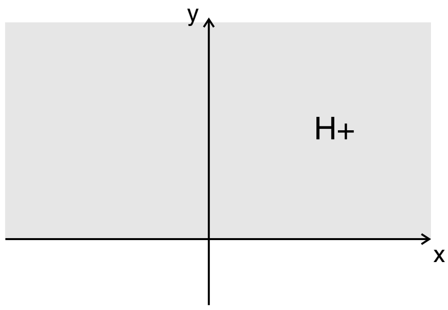


Figura 8.8: Semi-planos em $\mathbb{R}^2$.

Se você comparar a **Figura 8.8** com a **Figura 8.7** verá que os pontos P_1 e P_2 pertencem a H_+ e os pontos P_3 e P_4 não pertencem a H_+.

Veja diretamente na definição de H_+ para concluir que todos os pontos sobre o eixo x pertencem a H_+. Isto é, $(x, 0) \in H_+$, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$.

O conjunto H_- teria uma representação gráfica análoga. Isto faz parte da atividade que propomos:

Atividade 8.1

Construa um sistema ortogonal de coordenadas num plano e

a) Represente os pontos $A = (0, -2)$, $B = (5, 3)$, $C = (-1, 2)$, $D = (-3, 0)$.

b) Responda falso (F) ou verdadeiro (V) para cada uma das perguntas abaixo:

1) $(0, -2) \in H_+$
3) $(5, 3) \in H_-$
2) $(-7, 2) \in H_-$
4) $(-3, 0) \in H_-$
5) $(-3, 0) \in H_+$

c) Descreva o conjunto $H_+ \cap H_-$.

Você realizou a atividade? Então podemos continuar nosso caminho explorativo na identificação de novos conjuntos de $\mathbb{R}^2$, expressos através de desigualdades. Veja os dois próximos exemplos.

Exemplo 8.4

$$L_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0\} \quad \text{e} \quad L_- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \leq 0\}\,,$$

são semi-planos de $\mathbb{R}^2$, obtidos quando o plano todo é repartido pelo eixo das ordenadas y. O primeiro ficando à direita do eixo y e o segundo à esquerda do eixo y. Veja na **Figura 8.9**, a representação gráfica de L_-.

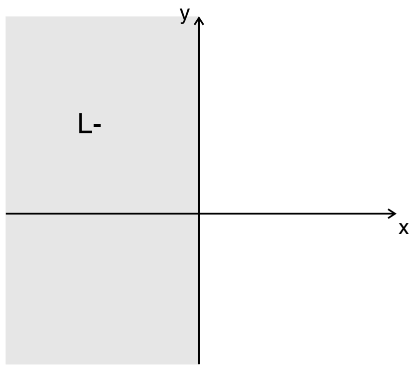


Figura 8.9: Representação de semi-plano.

Veja que vale a seguinte propriedade:

$$L_+ \cap L_- = \{(0, y);\ y \in \mathbb{R}\} = \text{eixo } y\,.$$

Quadrantes de $\mathbb{R}^2$

Principalmente quando estudamos trigonometria e enfrentamos a abstrata (complicada) definição de ângulo, é útil naquele contexto a divisão do plano em quadrantes.

Veja como fica simples a representação dos quadrantes através do uso de coordenadas!

Represente os quadrantes pelos símbolos Q_1, Q_2, Q_3 e Q_4, para se referir, respectivamente, ao primeiro, segundo, terceiro e quarto quadrantes do plano.

Temos que

$$\begin{aligned} Q_1 &= \{(x,y);\; x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\}\,, \\ Q_2 &= \{(x,y);\; x \leq 0 \text{ e } y \geq 0\}\,, \\ Q_3 &= \{(x,y);\; x \leq 0 \text{ e } y \leq 0\} \text{ e} \\ Q_4 &= \{(x,y);\; x \geq 0 \text{ e } y \leq 0\}\,. \end{aligned}$$

Veja na **Figura 8.10** a representação gráfica de Q_2, o segundo quadrante.

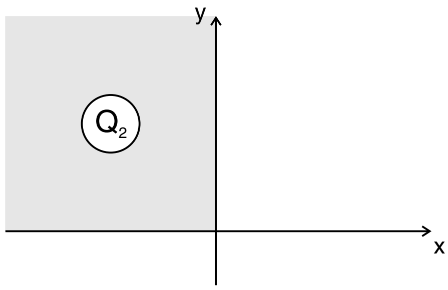


Figura 8.10: O segundo quadrante de $\mathbb{R}^2$.

Notas

1) A origem $O = (0,0)$ é comum a todos os quadrantes, $O \in Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3 \cap Q_4$.

2) $Q_1 \cap Q_2 = \{(0,y);\; y \geq 0\}$, é a parte não negativa do eixo y.

Atividade 8.2

a) Identifique graficamente num plano com coordenadas os quadrantes Q_1, Q_2, Q_3 e Q_4.

b) Represente graficamente os conjuntos

$$\text{i) } Q_2 \cap Q_3\,,\ \text{ii) } Q_3 \cap Q_4 \ \text{ e iii) } \ Q_4 \cap Q_1\,.$$

Coordenadas polares

Estamos trabalhando com o problema de introduzir em um plano um sistema de coordenadas que permita referências seguras, que possam relacionar os vários lugares do plano.

Esta idéia é antiga na mente dos homens. Lembra daquela história infantil? João e Maria, filhos de um pobre lenhador, seriam abandonados na floresta pelo pai, na manhã seguinte, por causa da penúria de alimentos. Este foi o tom da conversa entre os pais ouvida à noite pelas crianças. Na manhã seguinte, João pega pequenos pedaços de pão e joga no caminho que ele faz na vã esperança de poder refazer o percurso de volta à casa após ser abandonado pelo pai. Mas houve uma falha no plano. Os passarinhos comeram as migalhas... bem você sabe a história! Recordei apenas para referir a um sistema infantil de orientação, uma coordenada muito elementar introduzida pelas crianças para se orientar no plano de seu mundo.

Mas, com as abelhas ocorre diferente, elas se orientam em busca do néctar através de coordenadas polares. Estes insetos têm apurada percepção geométrica, recorde a estética estrutura hexagonal dos favos. Mas guarde a curiosidade! Antes de revelar o segredo da orientação das abelhas, vamos introduzir as coordenadas polares no plano.

Num plano, fica definido um sistema de coordenadas polares com a escolha de dois elementos:

- um ponto O origem
- uma semi-reta E com início na origem O, definindo um eixo orientado, onde estão representados os números reais positivos.

Veja a **Figura 8.11** onde estes elementos estão definidos no plano.

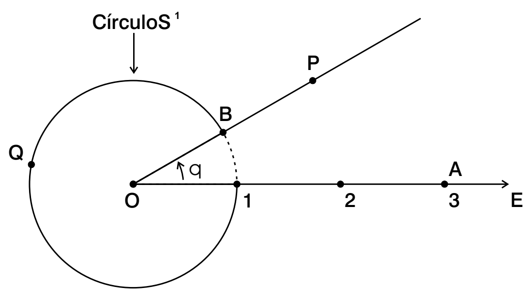


Figura 8.11: Coordenadas polares.

Sobre o eixo E está definida uma unidade de medida de comprimento.

Todos os pontos Q que estão sobre o círculo S^1, de centro na origem e raio 1, tem a propriedade que $d(Q,O) = OQ = 1$.

Um ponto P arbitrário do plano, $P \neq 0$, é expresso em coordenadas como

$$P = (r, \theta)\,,$$

onde θ é a medida do ângulo que o eixo E faz com a semi-reta OP, medido no sentido anti-horário, e r é a igual distância entre P e O. Isto é,

$$r = d(O,P) = OP\,,\ \theta = \text{medida do arco } \overset{\frown}{1B}\,.$$

Note, por exemplo, que as coordenadas do ponto A se expressam como

$$A = (r, \theta) = (3, 0)\,.$$

Notas

1) Para expressar todos os pontos do plano em coordenadas, o ângulo θ deve variar no intervalo $0 \leq \theta < 2\pi$ ou, o que é a mesma coisa, expressa em graus, $0^0 \leq \theta < 360^0$.

2) O ponto origem O não pode ser expresso em coordenadas polares, uma vez que é impossível a definição de um ângulo para esse ponto.

Transição entre coordenadas cartesianas e polares

Considere sobre o plano os dois sistemas de coordenadas, o cartesiano e o polar, de modo que:

- a origem O dos dois sistemas de coordenadas coincidam;
- o eixo E do sistema polar coincide com o eixo x positivo do sistema cartesiano.

Veja a **Figura 8.12**.

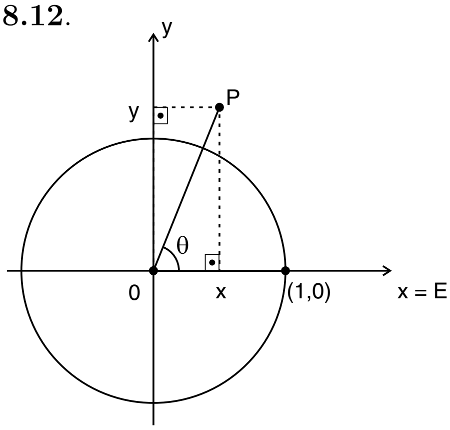


Figura 8.12

Examinando a **Figura 8.12**, note que no triângulo retângulo OPx cuja hipotenusa mede $OP = r$, vale

$$Ox = OP\cos\theta\,,\ \ Px = OP\,\text{sen}\,\theta\,.$$

Ou seja,

$$x = r\cos\theta\,,\ \ y = r\,\text{sen}\,\theta\,.$$

As equações definem a relação entre as coordenadas de um ponto P nos sistemas cartesiano e polar. Isto é

$$P = (x, y) = (r, \theta)\ \ \text{, onde}\ \ \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases}.$$

Note que $x^2 + y^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\text{sen}^2\theta = r^2$. Isto é,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Exemplo 8.5

a) O hiperplano superior $H_+ = \{(x, y)\ ,\ y \geq 0\}$, em coordenadas polares, se expressa como

$$H_+ = \{(r, \theta)\ ;\ r > 0\ ,\ 0 \leq \theta \leq \pi\}\ .$$

b) Considere o conjunto A do plano que, em coordenadas polares, se expressa como

$$A = \{(r, \theta);\ 0 < \theta < \pi,\ r \operatorname{sen} \theta \leq 2\}\ .$$

Como fica a representação gráfica do conjunto A?

Para responder à pergunta é conveniente usar a conversão de coordenadas polar - cartesiana. Veja que para um ponto P expresso como $P = (x, y)$ em coordenadas cartesianas ou $P = (r, \theta)$ em coordenadas polares, a equação $0 < \theta < \pi$ é equivalente a $y > 0$.

Por outro lado, a conversão de coordenadas, onde $x = r\cos\theta$ e $y = r \operatorname{sen}\theta$, mostra que a equação $r \operatorname{sen}\theta \leq 2$ é equivalente a $y \leq 2$. Logo, podemos escrever, em coordenadas cartesianas

$$A = \{(x, y),\ 0 < y \leq 2\}\ .$$

Portanto o conjunto A, representa uma faixa no plano, como representado na **Figura 8.13**.

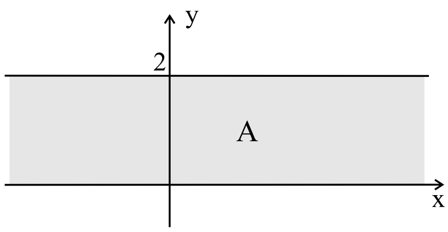


Figura 8.13: A faixa A no plano.

Atividade 8.3

a) Expresse em coordenadas polares o primeiro quadrante Q_1 de $\mathbb{R}^2$, excetuando o ponto origem.

b) Exprima em coordenadas polares o conjunto

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y = x\ ,\ x < 0\}\ .$$

c) Represente no plano, os pontos $A = \left(1, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $B = \left(3, \dfrac{\pi}{4}\right)$, os quais estão expressos em coordenadas polares.

Vamos voltar ao caso das abelhas! Seres antigos na Terra, precursores na intuição sobre o uso das coordenadas polares na definição de posições (pontos) sobre um plano.

Na verdade, o sistema das abelhas são coordenadas polares no espaço. Considere um ponto O, representando a colméia e centre neste ponto uma esfera de raio 1. Veja a **Figura 8.14**.

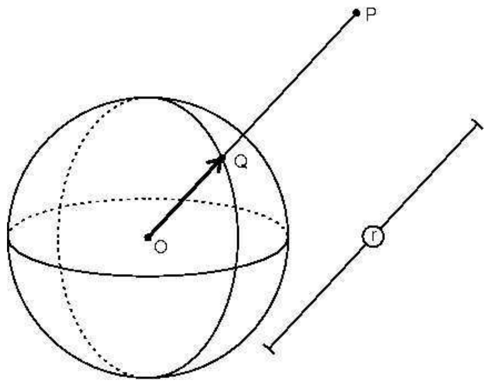


Figura 8.14: Orientação das abelhas.

Todo ponto P do espaço está definido, em termos de direção por um único ponto Q sobre a esfera de centro O. A direção $\overrightarrow{OQ}$ será a direção de tiro para a abelha sair da colméia em busca do néctar na posição P, onde está uma flor.

- Como isto acontece?

É o fenômeno da dança das abelhas. Uma operária chega com as patinhas carregadas de néctar e promove uma dança em torno da colméia para comunicar às outras operárias a direção do tiro para o vôo. Esta é a direção θ do sistema polar. Depois a operária deve voar nesta direção até encontrar o ponto P, percorrendo uma distância $r = OP$.

Nota Histórica

A introdução de um sistema de coordenadas no plano estabelece, como dissemos, uma providencial ponte entre a Álgebra e a Geometria, e abre caminho para a Geometria Analítica.

A Geometria Analítica surgiu no século XVII com trabalhos de Pierre de Fermat e Rene Descartes. Interessante que, como é comum ocorrer com grandes idéias na Matemática, elas surgiram de modo independente de descobertas pelos dois autores e com ponto de vista também diferentes.

Fermat ia da Álgebra à Geometria. A partir de uma equação, se propunha a estudar suas propriedades geométricas. Descartes fazia o caminho da

Geometria para a Álgebra. Partindo de propriedades geométricas de pontos e figuras geométricas, Descartes procura uma tradução algébrica para seus problemas. Fermat e Descartes algebrizaram a Geometria. A ponte entre estas duas áreas nobres da Matemática é o sistema de coordenadas.

Exercícios

1. Os pontos $(-2,3),(3,3)$ são vértices consecutivos de um quadrado que não intercepta o eixo OX. Quais são as coordenadas dos outros vértices?

2. Os pontos $A=(2,3)$, $B=(-2,7)$ são vértices opostos de um quadrado. Determine os outros vértices.

3. Um sistema de coordenadas no plano está orientado de modo que o eixo x aponta para o leste e o eixo y para o norte. A unidade de comprimento é o km. Um caminhante sai do ponto $(-1,2)$ caminha 5 km na direção sul, em seguida 13 km na direção leste, 2 km na direção norte e finalmente 11 km na direção oeste. Quais as coordenadas do ponto P de chegada do caminhante?

4. Considere os pontos $A=(-2,3)$ e $B=(3,-2)$. Encontre as coordenadas de M, o ponto médio de AB.

5. Represente graficamente em $\mathbb{R}^2$ o conjunto

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 0\le x\le 2 \ \text{ e } \ y\le x\right\}.$$

6. Represente em coordenadas polares (r,θ) os pontos $A=(2,2)$, $B=(-2,2)$, $C=(-3,-3)$, $D=(3,\sqrt{3})$ e $E=(-3,\sqrt{3})$.

7. Represente graficamente num plano com coordenadas polares os conjuntos

   (a) $X=\left\{(r,\theta);\ \theta=\dfrac{\pi}{4}\right\}$

   (b) $Y=\{(r,\theta);\ 0\le\theta\le\pi\}$

8. Considere dois números reais a e b. Responda falso (F) ou verdadeiro (V) às afirmações justificando brevemente a resposta.

   (a) Se $a, b \geq 0$ então $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$.

   (b) Se $a \leq b$ então $a^2 - b^2 \leq 0$.

   (c) Se $a \geq 2$ então $a^3 - 1 \geq a^2 + a + 1$.

9. Os pontos $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$ e $C = (2, a)$ são vértices consecutivos de um retângulo. Encontre a ordenada do terceiro vértice e escreva as coordenadas do quarto vértice D.

10. Considere dois números reais a e b tais que $a > |b|$. Mostre que $a^2 - b^2 > 0$.

11. (Questão desafio) Represente em $\mathbb{R}^2$ o conjunto

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0,\ y \geq 0 \ \text{ e } \ x + y \leq 1\}.$$

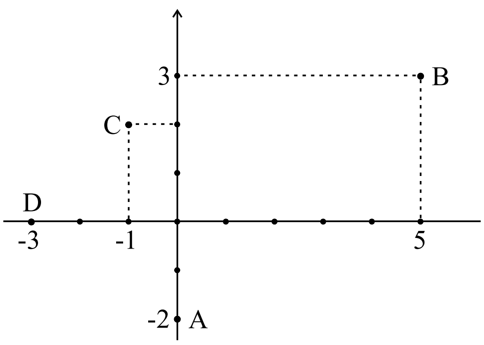
12. Represente, graficamente, num plano com coordenadas polares os conjuntos

   (a) $X = \left\{(r, \theta);\ 0 \leq \theta < \dfrac{\pi}{2},\ r\cos\theta \leq 1\right\}$

   (b) $Y = \{(r, \theta);\ 0 \leq \theta < \pi,\ r \operatorname{sen}\theta \leq 1\}$

Respostas das atividades

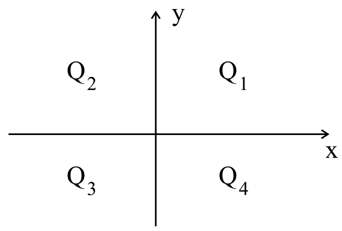
8.1. a)



b) 1- F, 2- F, 3- F, 4- V, 5- V

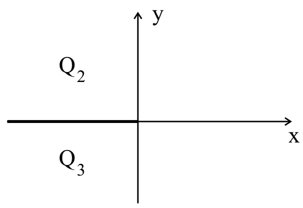
c) $H_+ \cap H_- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y = 0\}$ é o eixo x.

8.2. a)



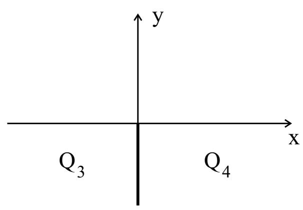
b)

(i)



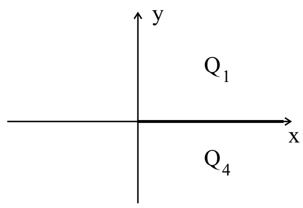
$Q_2 \cap Q_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y = 0 \text{ e } x \leq 0\}$, representa o eixo x não positivo.

ii)



$Q_3 \cap Q_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x = 0 \text{ e } y \leq 0\}$, representa o eixo y não positivo.

iii)

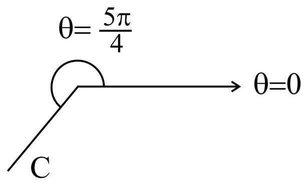


$Q_4 \cap Q_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y = 0 \text{ e } x \geq 0\}$, representa o eixo x não negativo.

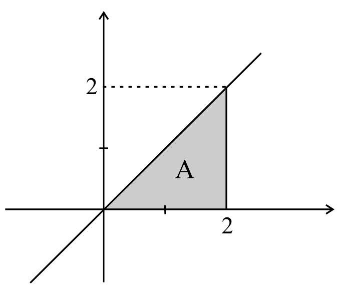
8.3. a) $Q_1 = \left\{(r, \theta);\ 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}\right\}$

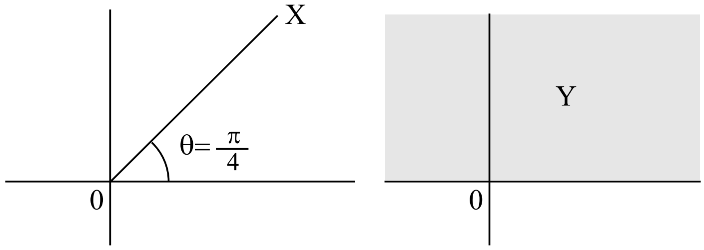
b) Se $y = x < 0$, então $r \operatorname{sen}\theta = r\cos\theta < 0$. Como $r > 0$ vem que $\operatorname{sen}\theta = \cos\theta < 0$. Portanto, $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = 1$ e $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{3\pi}{2}$. Finalmente, $\operatorname{tg}\,\theta = 1$, $\theta = \pi + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{5\pi}{4}$ e $C = \left\{(r,\theta);\ \theta = \dfrac{5\pi}{4}\right\}$.

Veja a figura



Respostas dos exercícios

1. $(-2, 8)$ e $(3, 8)$
2. $(-2, 3)$ e $(2, 7)$
3. $P = (1, -1)$
4. $M = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$
5. 

6. $A = \left(2\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{4}\right)$, $B = \left(2\sqrt{2}, \dfrac{3\pi}{4}\right)$, $C = \left(3\sqrt{2}, \dfrac{5\pi}{4}\right)$, $D = \left(2\sqrt{3}, \dfrac{\pi}{6}\right)$ e $E = \left(2\sqrt{3}, \dfrac{5\pi}{6}\right)$
7. 

8. a) V. Como os números são positivos, é suficiente mostrar que $(a+b)^2 \geq (2\sqrt{a \cdot b})^2$ ou, equivalentemente, que $a^2+2ab+b^2 \geq 4ab$. Ou ainda, que $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$. Ou seja $(a-b)^2 \geq 0$. Esta desigualdade vale sempre.

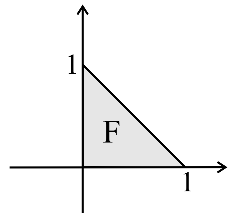
   b) F. Tome $a = -1$ e $b = 0$.

   c) V. Veja que $a^3 - 1 = (a^2 + a + 1)(a - 1) \geq a^2 + a + 1$.

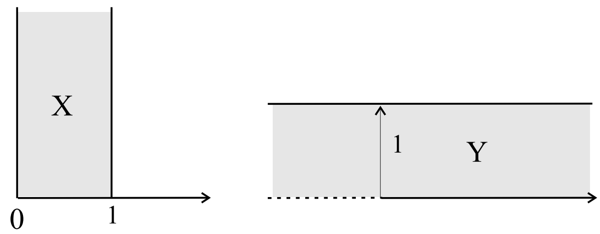
9. $a = 3,\ D = (3, 2)$

10. Como $a > b$ e $a > -b$ então $a + b > 0$ e $a - b > 0$. Logo, $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) > 0$.

11.



12.



Aula 9 – Distância entre pontos do plano euclidiano

Objetivos

Nesta aula, você:

- usará o sistema de coordenadas para calcular a distância entre dois pontos;
- descreverá, lugares geométricos mais simples, com o uso de coordenadas e distância.

Um sistema de coordenadas permite representar graficamente objetos geométricos no plano, mas também permite a realização de medidas. Com a possibilidade de medir entramos no ramo da Geometria. Aqui se trata da Geometria Analítica. Estas medidas podem ser as mais simples como a distância entre dois pontos, áreas de polígonos regulares, até áreas de regiões mais complicadas do plano como interseções de figuras. Tudo, até onde o limite do método não cause sofrimento! Senão temos que recorrer a ferramentas mais sofisticadas. A mais importante destas sendo as técnicas do Cálculo Diferencial e Integral.

Já foi dito que a Matemática é a arte de resolver problemas. Um matemático sem problemas é um ser em ócio. Mas basta um pequeno problema para entusiasmar seu desejo de endorfina através da ginástica mental.

Às ferramentas!! Bem, o matemático precisa de uma caixa de ferramentas para trabalhar, atacar, seus problemas. Nesta caixa acabamos de introduzir a ferramenta "coordenadas no plano" ou mais amplamente as ferramentas de Geometria Analítica.

Distância entre dois pontos da reta

Recorde da aula anterior que a distância entre dois pontos A e B sobre a reta real é dada pelo valor absoluto da diferença entre as coordenadas dos pontos. Assim, se A tem coordenada a e B tem coordenada b, então a distância entre A e B, que escrevemos como $d(A, B)$ é

$$d(A, B) = AB = |b - a| = \sqrt{(a - b)^2}\,.$$

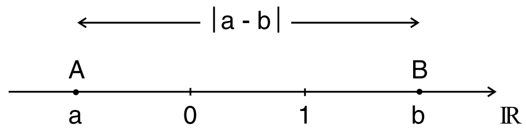


Figura 9.1

Distância entre dois pontos do plano

Considere dois pontos $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$. A distância entre P e Q é o comprimento do segmento PQ. Em termos das coordenadas dos pontos, a distância $d(P, Q)$ é dada pela equação

$$d(P, Q) = PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\,. \tag{9.1}$$

Vamos ver porque esta fórmula funciona. Considere quatro casos:

a) Os pontos P e Q coincidem. Isto é, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$. Neste caso, a distância é zero. Este resultado é compatível com a fórmula (9.1) da distância.

b) Os pontos P e Q são distintos e situados numa reta paralela ao eixo x. Isto é, $x_1 \neq x_2$ e $y_1 = y_2$. Veja a **Figura 9.2** , à esquerda, onde os pontos P e Q definem um segmento paralelo ao eixo x. Como P, Q, x_1 e x_2 são vértices de um retângulo então

$$PQ = |x_1 - x_2|\,.$$

Portanto, a fórmula (9.1) é válida, neste caso.

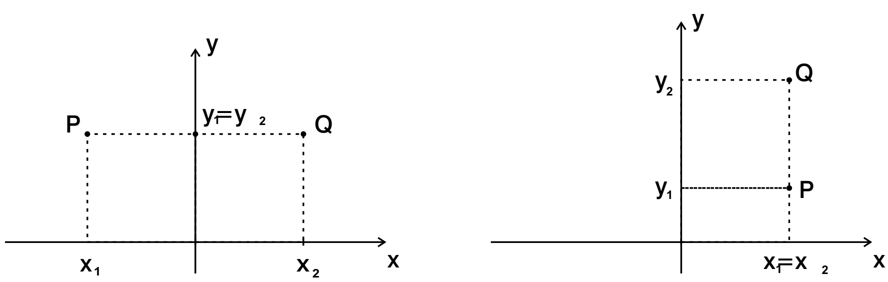


Figura 9.2

c) Os pontos P e Q são distintos e situados numa reta paralela ao eixo y. Isto é, $x_1 = x_2$ e $y_1 \neq y_2$. Este caso é similar ao anterior e aparece representado na **Figura 9.2**à direita. Temos que

$$PQ = |y_1 - y_2|\,.$$

De novo a fórmula (9.1) continua válida.

d) Os pontos P e Q são distintos, $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$. Este é o caso geral e está representado na **Figura 9.3**.

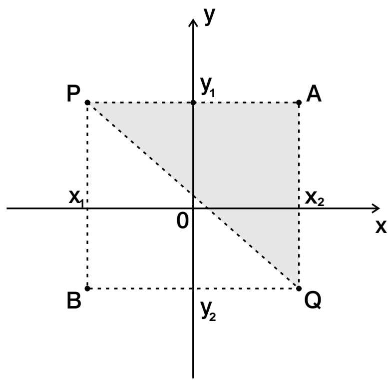


Figura 9.3

Note que P e Q são vértices opostos de um retângulo cujos lados medem $|x_1 - x_2|$ e $|y_1 - y_2|$. Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo APQ, encontramos que

$$PQ^2 = |x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

ou

$$d(P, Q) = PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\,,$$

que é a fórmula (9.1).

Exemplo 9.1

a) A distância entre os pontos $P = (3, 2)$ e $Q = (1, 6)$ é,

$$\begin{aligned} d(P, Q) &= \sqrt{(3-1)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{2^2 + (-4)^2} \\ &= \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}\,. \end{aligned}$$

b) A distância entre os pontos $P = (-1, 3)$ e $Q = (-7, -7)$ é

$$\begin{aligned} d(P, Q) &= \sqrt{[-1 - (-7)]^2 + [3 - (-7)]^2} = \sqrt{6^2 + 10^2} = \sqrt{136} \\ &= \sqrt{4 \times 34} = 2\sqrt{34}\,. \end{aligned}$$

Exemplo 9.2

Quais são os pontos do plano equidistantes dos pontos $A = (-1, 0)$ e $B = (-1, 3)$.

Solução: Se $P = (x, y)$ é um ponto arbitrário e equidistante de A e B, então

$$d(P, A) = d(P, B) \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2}\,.$$

Desenvolvendo ambos os membros da última igualdade, vem que

$$(x+1)^2 + y^2 = (x+1)^2 + (y-3)^2 \Leftrightarrow y^2 = (y-3)^2 \Leftrightarrow 0 = -6y + 9$$

Logo

$$d(P, A) = d(P, B) \Leftrightarrow y = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}\,.$$

Portanto, o conjunto S dos pontos equidistantes de A e B verificam

$$S = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\; y = \frac{3}{2}\right\}.$$

Ora este conjunto S é uma reta paralela ao eixo x a uma altura $y = \dfrac{3}{2}$. Veja a **Figura 9.4**.

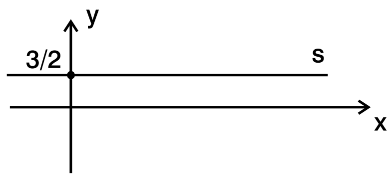


Figura 9.4

Atividade 9.1. Calcule a distância do ponto $A = (-2, 3)$ até o eixo x.

Atividade 9.2. Encontre os pontos do eixo y que estão à distância 1 do ponto $(-\frac{1}{2}, 1)$.

Exemplo 9.3

Quais são os pontos do plano equidistantes dos pontos $A = (-1, 0)$ e $B = (0, -1)$?

Solução: Se $P = (x, y)$ é um ponto arbitrário equidistante de A e B, então

$$d(P, A) = d(P, B) \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y+1)^2}\,.$$

Isto é,

$$(x+1)^2 + y^2 = x^2 + (y+1)^2\,.$$

Logo,

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 = x^2 + y^2 + 2y + 1 \Leftrightarrow x = y\,.$$

Então o conjunto S,

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\; x = y\}$$

são todos os pontos equidistantes dos pontos $A = (-1, 0)$ e $B = (0, -1)$.

Confira na **Figura 9.5** que S é a reta bissetriz comum ao ângulo formado pelos eixos positivos do sistema de coordenadas.

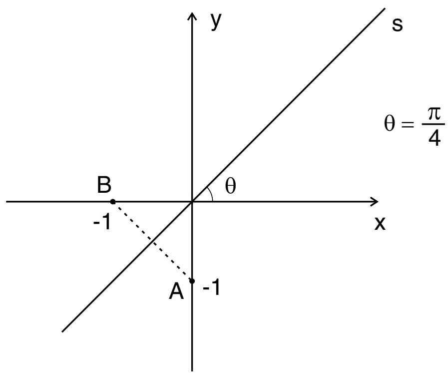


Figura 9.5

Exemplo 9.4

Um círculo S_r no plano de raio $r > 0$ e com centro no ponto $C = (a, b)$ é descrito pela equação,

$$S_r = \{(x, y);\ x^2 + y^2 - 2ax - 2by = r^2 - a^2 - b^2\}\,.$$

Veja como encontrar este resultado, acompanhando pela **Figura 9.6**.

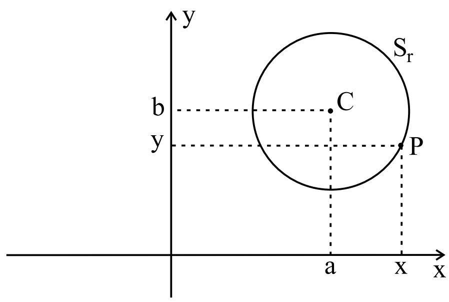


Figura 9.6

A distância de um ponto $P = (x, y)$ até o centro $C = (a, b)$ é constante e igual a r. Então

$$d(P, C) = r \Rightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r\,.$$

Agora, elevando ao quadrado ambos os membros da igualdade e isolando os termos independentes no segundo membro encontramos

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = r^2 - a^2 - b^2\,.$$

Atividade 9.3. Encontre a equação do círculo de raio 2 com centro no ponto $C = (-2, 1)$.

Exercícios

1. Numa reta com coordenadas,

   (a) determine todos os números reais x tais que $d(x, -2) = 3x$

   (b) existe algum número real x tal que $d(x, -2) = d(x, 5)$?

   (c) determine todos os números reais x tais que $d(x, -1) \geq d(x, 8)$

   (d) determine o conjunto de números reais x para os quais vale a igualdade
   $$\frac{1}{d(x,2)} = \frac{1}{d(x,-4)}$$

2. Os pontos $A = (-1, 0)$ e $C = (2, -3)$ são vértices opostos de um quadrado $ABCD$.

   (a) Calcule o comprimento da diagonal do quadrado.

   (b) Encontre as coordenadas dos outros vértices B e D.

3. Encontre um ponto $P = (0, a)$ sobre o eixo y e equidistante dos pontos $A = (-2, 3)$ e $B = (3, 0)$.

4. Encontre a equação de um círculo situado no terceiro quadrante, de raio $r = 2$ e que tangencia o eixo y no ponto $A = (0, -3)$.

5. Determine o centro C e o raio r do círculo $x^2 + 2x + y^2 - 3 = 0$.

Solução das atividades

9.1. A reta perpendicular ao eixo x e que passa pelo ponto $A = (-2, 3)$ encontra o eixo x no ponto $P = (-2, 0)$. Então,
$$d(A, P) = \sqrt{[-2 - (-2)]^2 + (3 - 0)^2} = 3\,.$$

9.2. Os pontos do eixo y são do tipo $P = (0, a)$ onde $a \in \mathbb{R}$. A distância do ponto P procurado até o ponto $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ vale 1. Então
$$\left(0 + \frac{1}{2}\right)^2 + (a-1)^2 = 1^2 \Rightarrow a = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$
Logo $\left(0, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $\left(0, 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ são os pontos procurados.

9.3. Temos que
$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 2^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$$

Respostas dos exercícios

1. (a) $x = 1$; (b) $x = \dfrac{3}{2}$; (c) $x \geq \dfrac{7}{2}$; (d) $x = -1$.
2. (a) $3\sqrt{2}$; (b) $B = (2, 0)$, (c) $D = (-1, -3)$
3. $P = \left(0, \dfrac{2}{3}\right)$
4. $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 9 = 0$
5. $C = (-1, 0)$, $r = 2$.

Aula 10 – Equação da reta e inclinação

Objetivos

Após estudar esta aula, você será capaz de:

- encontrar a equação de uma reta que passa por um ponto e tem inclinação definida em relação ao eixo x;
- encontrar a equação de uma reta que passa por dois pontos pré-determinados;
- entender e trabalhar com o conceito de inclinação de uma reta.

Introdução

Ao introduzir coordenadas em uma reta r, identificamos r com o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. Ao introduzir coordenadas em um plano α identificamos α com $\mathbb{R}^2$. Isto é, o plano α é identificado com o produto cartesiano de $\mathbb{R}$ por $\mathbb{R}$,

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y)\,;\; x, y \in \mathbb{R}\}\,.$$

Com esta estrutura, $\mathbb{R}^2$ é denominado Plano Euclidiano ou Plano Cartesiano e as coordenadas introduzidas referidas como coordenadas retangulares ou coordenadas cartesianas.

Na Aula 8 começamos a usar as coordenadas para descrever algebricamente e representar graficamente muitos subconjuntos do plano $\mathbb{R}^2$. Vamos continuar este trabalho com o mais simples destes subconjuntos que são as retas.

Como preparação aos estudos desta aula vamos recordar três resultados importantes. O primeiro refere-se a dois axiomas básicos da Geometria Euclidiana:

- Por dois pontos distintos P_1 e P_2 do plano passa uma única reta.
- Por um ponto P fora de uma reta r passa uma única reta paralela à reta r.

O segundo resultado que recordamos é sobre paralelogramos. Lembre que um paralelogramo $ABCD$ é um quadrilátero onde os lados opostos são

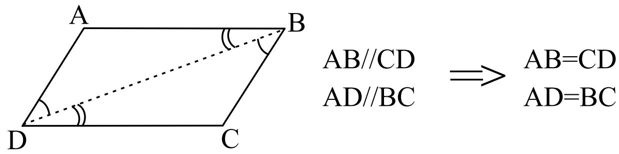


Figura 10.1: Congruência de lados opostos no paralelogramo.

paralelos. Veja a **Figura 10.1**. Temos o seguinte resultado: num paralelogramo o comprimento dos lados opostos coincidem.

O terceiro resultado a ser relembrado é sobre semelhança de triângulos.

Dois triângulos ABC e DEF que possuem ângulos correspondentes com mesma medida ($\widehat{A} = \widehat{D}$, $\widehat{B} = \widehat{E}$ e $\widehat{C} = \widehat{F}$) são triângulos semelhantes. A semelhança implica que

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}\,.$$

Com estes resultados estabelecidos voltamos ao nosso objetivo principal que é expressar, através de equações, qualquer reta do plano $\mathbb{R}^2$. Vamos começar com os exemplos mais elementares.

Retas horizontais

É tradição introduzir no plano um sistema de coordenadas cartesianas de modo que o eixo das abcissas seja horizontal e o eixo das ordenadas vertical. Em vista disto, uma reta paralela ao eixo das abcissas é chamada uma reta horizontal.

Uma reta horizontal fica determinada pelo ponto de interseção com o eixo y. Veja na **Figura 10.2** a representação de duas retas s e t horizontais.

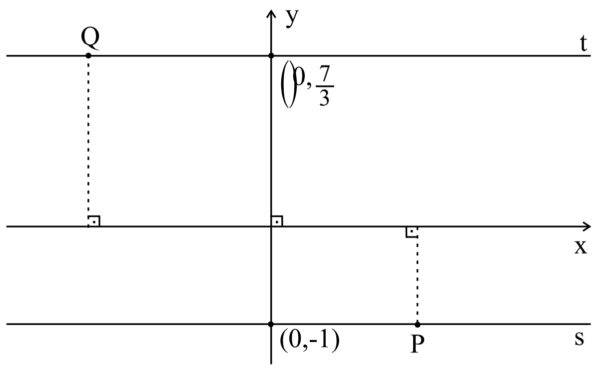


Figura 10.2: Retas horizontais.

As retas s e t cortam o eixo y respectivamente, nos pontos $(0,-1)$ e $\left(0,\dfrac{7}{3}\right)$. É claro que todo ponto $P = (x, y) \in s$, deve verificar $y = -1$.

Assim,

$$y = -1 \quad \text{ou} \quad y + 1 = 0\,,$$

é a equação de s. Como conjunto, escrevemos

$$s = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\ y = -1\}\,.$$

Do mesmo modo, todo ponto $Q = (x, y)$ pertencente à reta t deve verificar $y = \dfrac{7}{3}$. Então

$$y = \frac{7}{3} \quad \text{ou} \quad 3y - 7 = 0\,,$$

é a equação da reta t. Como conjunto,

$$t = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\ y = \frac{7}{3}\right\}.$$

O que fizemos até aqui permite descrever a equação de qualquer reta horizontal.

Retas horizontais

Se m é um número real arbitrário

$$y = m \ \text{ ou } \ y - m = 0\,,$$

é a equação da reta h_m paralela ao eixo x e que intercepta o eixo y no ponto $(0, m)$.

Em termos de conjunto, a reta h_m se escreve,

$$h_m = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\ y = m\} = \{(x, m)\,;\ x \in \mathbb{R}\}\,.$$

Nota: A equação $y = 0$ define a reta horizontal que coincide com o eixo x. Na linguagem de conjuntos e coordenadas escrevemos

$$\text{eixo } x = \{(x, 0)\,;\ x \in \mathbb{R}\}\,.$$

Retas verticais

Toda reta paralela ao eixo y é chamada de reta vertical. Uma reta vertical fica determinada pelo ponto de interseção com o eixo x. Veja na **Figura 10.3** exemplos de duas retas verticais r e u.

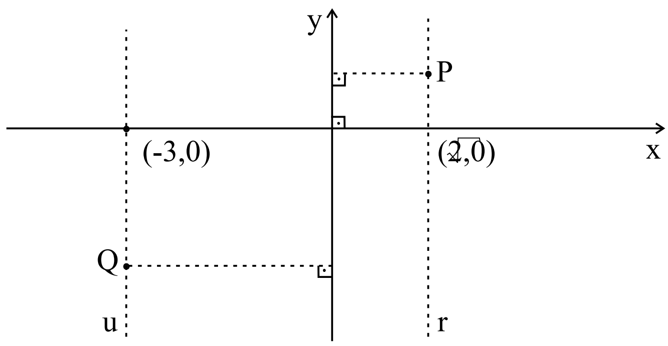


Figura 10.3: Retas verticais.

As retas r e u cortam o eixo das abcissas x nos pontos $(\sqrt{2}, 0)$ e $(-3, 0)$, respectivamente.

Todo ponto $P = (x, y)$ sobre a reta r deve verificar $x = \sqrt{2}$ e todo ponto $Q = (x, y)$ sobre a reta u deve verificar $x = -3$. Então,

$$x = \sqrt{2} \quad \text{ou} \quad x - \sqrt{2} = 0\,,$$

é a equação que define r, enquanto que

$$r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\; x = \sqrt{2}\} = \{(\sqrt{2}, y)\,;\; y \in \mathbb{R}\}$$

são descrições de r como conjunto.
Também,

$$x = -3 \quad \text{ou} \quad x + 3 = 0\,,$$

é a equação da reta u, enquanto que

$$u = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\; x = -3\} = \{(-3, y)\,;\; y \in \mathbb{R}\}\,,$$

descrevem u como conjunto.

Neste ponto, podemos identificar todas as retas verticais do plano $\mathbb{R}^2$.

Retas verticais
Se n é um número real arbitrário,

$$x = n \quad \text{ou} \quad x - n = 0$$

é a equação da reta vertical v_n paralela ao eixo y e que intercepta o eixo x no ponto $(n, 0)$.
Em termos de conjunto, a reta v_n se define como

$$v_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\; x = n\} = \{(n, y)\,;\; y \in \mathbb{R}\}\,.$$

Nota: A equação $x = 0$ define a reta vertical que coincide com o eixo y. Na linguagem de conjuntos e coordenadas,

$$\text{eixo } y = \{(0, y)\,;\; y \in \mathbb{R}\}\,.$$

Feixe de retas passando pela origem

Fixado um ponto $P = (x, y)$ do plano $\mathbb{R}^2$, o conjunto de todas as retas do plano que passam pelo ponto P é denominado feixe de retas pelo ponto P.

Nosso objetivo agora é encontrar as equações de todas as retas que passam pelo ponto origem $(0, 0)$. Isto é, descrever o feixe de retas pela origem.

A primeira iniciativa que devemos tomar quando nos propomos a resolver um problema é encontrar uma forma, a mais simples possível, para expressar este problema.

- Como caracterizar todas as retas que passam pela origem $(0, 0)$?

Veja uma possível resposta, e mais tarde um pouco você vai entender esta escolha. Considere no plano a reta r vertical cuja equação é $x = 1$. Então qualquer reta que passe pela origem intersecta a reta r, salvo a reta representada pelo próprio eixo y. Então toda reta distinta do eixo y que passa pela origem é definida por dois pontos, um deles a origem e o outro um ponto do tipo $(1, m)$ que está sobre a reta r vertical, $x = 1$. Vamos chamar de s_m a reta que passa pela origem e pelo ponto $(1, m)$.

Na **Figura 10.4** veja representados no plano $\mathbb{R}^2$ a reta vertical r, assim como a reta s_m, definida pelos pontos $O = (0, 0)$ e $B = (1, m)$.

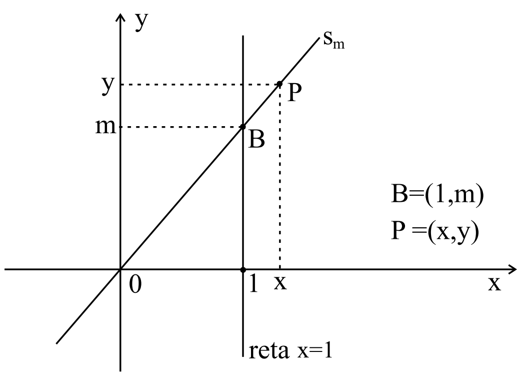


Figura 10.4: Retas de inclinada pela origem.

Agora uma parada técnica para duas perguntas:

- Quais são as equações das retas s_m, quando m varia em $\mathbb{R}$?

- As retas s_m, com m variando arbitrariamente sobre os números reais, representam todas as retas do plano que passam pelo ponto $(0,0) \in \mathbb{R}^2$?

Vamos responder à primeira pergunta. Volte a examinar a reta s_m na **Figura 10.4**, onde $m > 0$.

Usando a semelhança entre os triângulos $O1B$ e OxP escrevemos

$$\frac{Ox}{O1} = \frac{xP}{1B} \Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{y}{m} \Rightarrow y = mx\,.$$

Portanto, como $P = (x,y)$ é um ponto arbitrário da reta, podemos escrever que

$$s_m = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\; y = mx\}\,.$$

Ou simplesmente, s_m é a reta

$$y = mx \text{ ou } y - mx = 0\,.$$

Veja o que ocorre se $m < 0$, como representado na **Figura 10.5**.

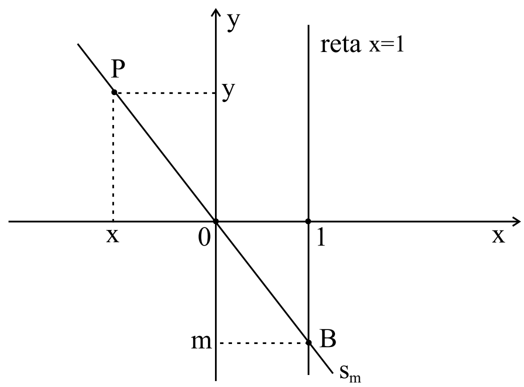


Figura 10.5: Reta de inclinada pela origem.

Usando a semelhança dos triângulos OPy e OBm escrevemos,

$$\frac{Oy}{Om} = \frac{Py}{Bm} \Rightarrow \frac{y}{|m|} = \frac{|x|}{1} \Rightarrow \frac{y}{-m} = \frac{-x}{1} \Rightarrow y = mx\,.$$

Portanto, ainda no caso $m < 0$, temos que

$$s_m = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\; y = mx\} \quad \text{ou} \quad y = mx\,,\; y - mx = 0\,,$$

é a equação da reta que passa por $(0,0)$ e $(1,m)$. Note que no caso em que $m = 0$, então s_m se realiza como a reta $y = 0 \cdot x = 0$. Ou seja a reta $y = 0$. Esta reta é o eixo x das abcissas.

Agora vamos responder à segunda pergunta formulada: as retas s_m, com m percorrendo todos os números reais descrevem todas as retas que passam pelo ponto origem?

Resposta: Todas, menos uma. Fica faltando a reta $x = 0$, reta que coincide com o eixo y.

Do que vimos até agora sai um resumo em dois pontos:

Retas inclinadas passando pela origem

• Para cada número real m, a equação

$$y = mx \ \text{ ou } \ y - mx = 0$$

representa uma reta que passa pela origem.

• As retas

$$x = 0 \ \text{ e } \ y = mx, \ \text{ onde } \ m \in \mathbb{R}\,,$$

representam todas as retas de $\mathbb{R}^2$ que passam pela origem.

Temos fortes motivos para destacar o número real m que define a reta $y = mx$, que estamos estudando.

Definição 10.1
O número real m é chamado o **coeficiente angular** ou a **inclinação da reta** $y = mx$.

Interpretação geométrica de m

Considere três retas $y = mx$, $y = nx$ e $y = 0$ com inclinações $m > 0$, $n < 0$ e nula, conforme representadas na **Figura 10.6**. Associado a estas três retas temos os ângulos θ_1, θ_2 e o ângulo nulo.

Queremos mostrar que,

$$\operatorname{tg}\theta_1 = m\,, \ \ \operatorname{tg}\theta_2 = n \ \text{ e } \ \operatorname{tg} 0 = 0\,,$$

onde tg é a função tangente da trigonometria. Veja na **Figura 10.6** as retas representadas:

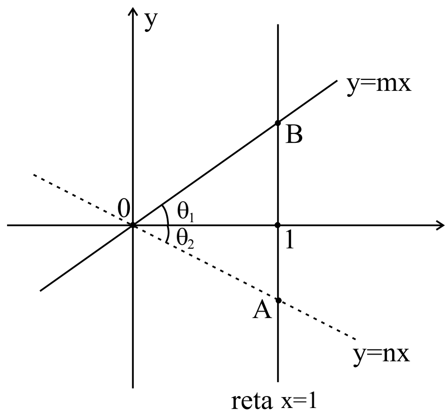


Figura 10.6: Ângulos de retas inclinadas.

O que queremos mostrar é que o **coeficiente angular** de uma reta que passa pela origem é igual ao valor da tangente do ângulo que a reta forma com o eixo positivo das abcissas. O valor da tangente resultando positivo ou negativo, segundo o ângulo é medido, a partir do eixo x, no sentido anti-horário ou horário, respectivamente.

Volte a observar a **Figura 10.6** para concluir que, de modo geral,

A reta $y = kx$, com $k \neq 0$ é uma reta que

- está contida no primeiro e terceiro quadrantes se $k > 0$;
- está contida no segundo e quarto quadrantes se $k < 0$.

- Vamos dar uma parada para entender a relação entre o coeficiente angular e a tangente do ângulo?

- Você se lembra da construção baseada no círculo trigonométrico das funções seno, cosseno e tangente?

Este assunto será revisado nas Aulas 21 e 22. No entanto, correndo o risco de colocar *o carro na frente dos bois*, vamos usar a tangente para a interpretação, que queremos. Como funciona?

Na **Figura 10.7**, o círculo de raio $r = 1$ está centrado na origem e a reta tangente ao círculo no ponto $A = (1, 0)$ é usada para definir tg θ, para todo ângulo $-90^0 < \theta < 90^0$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2} \right)$.

Veja como funciona acompanhando pela **Figura 10.7**. Tomando o eixo x positivo como referência, os ângulos medidos, a partir do eixo Ox, no sentido anti-horário são positivos (ângulo θ_1) e ângulos medidos no sentido horário são negativos (ângulo θ_2).

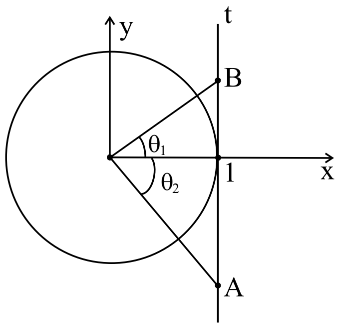


Figura 10.7: A tangente de um ângulo.

Veja que a reta t tangente ao círculo, reta esta definida pelo segmento AB é a referência para medir tg θ, para qualquer ângulo $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$.

Por exemplo, tg $\theta_1 = 1B$ (comprimento do segmento) e tg $\theta_2 = -1A$ (o simétrico do comprimento do segmento).

Vamos agora produzir uma nova **Figura 10.8**, a partir das **Figuras 10.6** e **10.7** para interpretar os coeficientes angulares m e n.

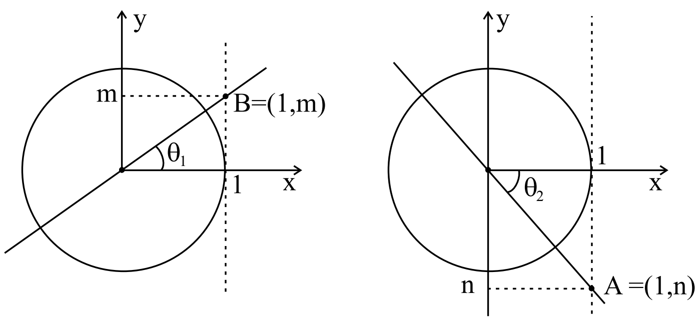


Figura 10.8: Tangentes de retas inclinadas.

Na representação à esquerda da **Figura 10.8**, para a reta $y = mx$, temos que

$$\operatorname{tg}\theta_1 = m > 0 \;\; (\text{comprimento do segmento } 1B)\,.$$

Enquanto que na direita temos que, para a reta $y = nx$,

$$\operatorname{tg}\theta_2 = n < 0 \;\; (\text{o simétrico do comprimento do segmento } A1)\,.$$

Neste momento, é prudente uma parada técnica para resumir o que nós conseguimos até agora e fazer o balanço do que falta.

Se a, b e m são números reais arbitrários, as equações

- $x = a$ ou $x - a = 0$ representa uma vertical, portanto paralela ao eixo y e cortando o eixo x no ponto $(a, 0)$;
- $y = b$ ou $y - b = 0$ representa uma reta horizontal, portanto paralela ao eixo x e cortando o eixo y no ponto $(0, b)$;
- $y = mx$ ou $y - mx = 0$, onde $m > 0$, representa uma reta que passa pela origem $(0, 0)$ e pelo ponto $(1, m)$. O ângulo θ que a reta faz com o eixo x é dado por $\operatorname{tg}\theta = m$.

Atividade 10.1

a) Encontre a equação da reta que passa pelo ponto $(0, 0)$ e faz um ângulo de 60^0 com o eixo x.

b) Encontre a equação da reta que passa pelo ponto $(0, 0)$ e faz um ângulo de 315^0 com o eixo x (medido no sentido anti-horário).

Dados: tg $60^0 = \sqrt{3}$, tg $(-45^0) = -1$.

Retas inclinadas não passando pela origem

Vamos voltar ao nosso caminho em direção ao objetivo principal desta Aula. Dada uma reta no plano queremos sua equação.

Suponha agora uma reta t em uma posição tal no plano que é distinta de qualquer uma das retas que constam no quadro destacado antes da atividade 10.1. Então acontece o seguinte: t intercepta os eixos coordenados em 2 pontos distintos.

Sejam $A = (a, 0)$ e $B = (0, b)$, os pontos de interseção de t com os eixos coordenados. Veja a **Figura 10.9**, onde apresentamos uma possibilidade para t.

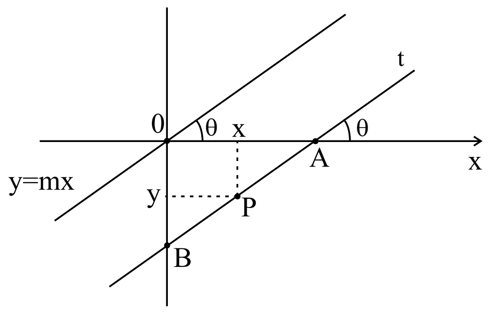


Figura 10.9: Reta não passando pela origem.

Veja assinalado na **Figura 10.9**, o ângulo θ que a reta faz com o eixo x. Suponha que $m = \operatorname{tg}\theta$. Note, também, a reta paralela a t que passa pela origem. Esta reta é expressa pela equação $y = mx$, devido ao paralelismo das retas e ao fato que $m = \operatorname{tg}\theta$. Considere um ponto arbitrário $P = (x, y)$ sobre a reta t.

Como os triângulos retângulos AxP e AOB são semelhantes e lembrando que $A = (a, 0)$, $B = (0, b)$, podemos escrever,

$$\frac{AO}{Ax} = \frac{OB}{xP} \Rightarrow \frac{a}{a-x} = \frac{|b|}{|y|} \Rightarrow \frac{a}{a-x} = \frac{-b}{-y}\,.$$

Logo,

$$ay = -bx + ab \Rightarrow y = \frac{-b}{a}x + b\,.$$

Note ainda que no triângulo retângulo OAB, usando que ângulos opostos pelo vértice são congruentes, resulta que

$$m = \operatorname{tg}\theta = \frac{OB}{OA} = \frac{|b|}{|a|} = \frac{-b}{a} = -\frac{b}{a}.$$

Finalmente encontramos a equação para a reta t,

$$y = -\frac{b}{a}x + b \quad \text{ou} \quad y = mx + b\,.$$

A primeira forma da equação anterior também pode ser escrita como

$$bx + ay = ab\,.$$

Esta última equação tem uma forma muito elegante como expressão da reta que passa pelos pontos $A = (a, 0)$ e $B = (b, 0)$.

A equação da reta na forma $y = mx+b$, não é menos elegante e expressa t como reta que intersecta o eixo y no ponto $B = (0, b)$ e faz com o eixo x um ângulo θ, tal que $m = \operatorname{tg}\theta$.

Exemplo 10.1

Encontre a equação da reta r que passa por $A = (-1, 2)$ e é paralela à reta bissetriz do primeiro quadrante.

Solução. A reta r bissetriz do primeiro quadrante faz um ângulo $\theta = 45^0$ com o eixo x. Como tg $45^0 = 1$, então

$$y = x$$

é a equação de r.

Portanto, toda reta paralela a reta r tem equação

$$y = x + b\,,$$

onde $b \in \mathbb{R}$. Como a reta que procuramos passa pelo ponto $A = (-1, 2)$, substituindo na última equação, temos que

$$2 = -1 + b \;\;\Rightarrow\;\; b = 3\,.$$

Logo, $y = x + 3$ é a reta procurada.

Exemplo 10.2

Encontre a equação da reta t que passa pelo ponto $(2\sqrt{3}, -1)$ e faz um ângulo de 330^0 com o eixo positivo dos x.

Solução. Veja na **Figura 10.10** a representação do plano com um sistema de coordenadas e o ponto A localizado. Precisamos encontrar a posição para a reta t, que passa por A fazendo ângulo de 350^0 com a direção positiva do eixo x.

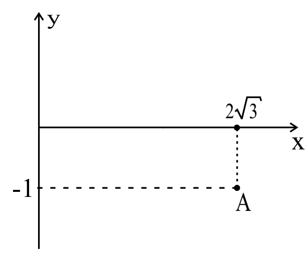


Figura 10.10

Como $y = mx + b$ é a equação geral de uma reta inclinada e

$$m = \operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg} 330^0 = \operatorname{tg}(-30^0) = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}\,,$$

vem que

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + b\,.$$

Além disso, a reta contém o ponto $A = (2\sqrt{3}, -1)$. Logo,

$$-1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}(2\sqrt{3}) + b \ \Rightarrow b = 1\,.$$

Donde, $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}x + 1$ é a equação da reta procurada.

Atividade 10.2

a) Dada a reta $2y = -3x + 2$ encontre os pontos de interseção da reta, respectivamente com o eixo x e com o eixo y.

b) Qual é o coeficiente angular da reta do item a)?

c) Encontre a equação da reta que passa por $A = (-\sqrt{3}, -1)$ e é paralela à reta $2y = -\sqrt{3}x - 1$.

Reta por dois pontos

A pergunta é a seguinte:

- Qual é a equação da reta r que passa por dois pontos distintos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ do plano?

A resposta à pergunta pelo menos, para duas posições especiais dos pontos, é imediata. A primeira posição especial para os pontos P_1 e P_2 ocorre quando $x_1 = x_2$ e a reta é vertical. A segunda ocorre quando $y_1 = y_2$ e a reta é horizontal. Na primeira situação a equação da reta é $x = x_1$ e no segundo caso a equação é $y = y_1$. veja a **Figura 10.11**.

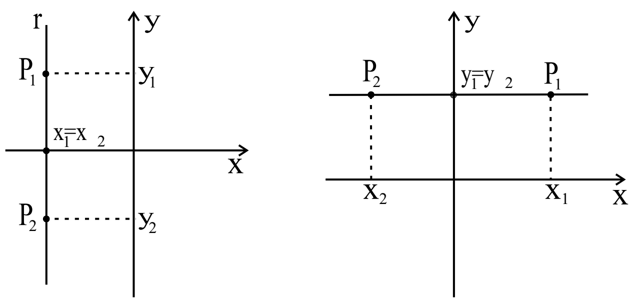


Figura 10.11: Retas por dois pontos em posições especiais.

Agora se $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$ então a reta r estaria numa posição geral como, por exemplo, representada na **Figura 10.12**.

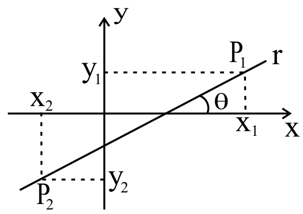


Figura 10.12: Reta por dois pontos em posição geral.

Então se tg $\theta = m$, onde θ é o ângulo que a reta faz com o eixo x, a equação da reta r tem a forma

$$y = mx + b\,. \tag{10.1}$$

Note que a inclinação $m = \operatorname{tg}\theta$ é a mesma da reta paralela que passa pela origem.

Vamos determinar m e b sabendo que a reta passa por P_1 e P_2. Substituindo as coordenadas de $P_1 = (x_1, y_1)$ e de $P_2 = (x_2, y_2)$, respectivamente na equação da reta escrita em (10.1) encontramos que

$$y_1 = mx_1 + b \;\text{ e }\; y_2 = mx_2 + b\,. \tag{10.2}$$

Fazendo a diferença entre as equações vem que

$$y_2 - y_1 = mx_2 - mx_1 \;\Rightarrow\; m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,. \tag{10.3}$$

O valor encontrado de m substituindo na equação $y_1 = mx_1 + b$ fornece,

$$y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_1 + b \;\Rightarrow\; b = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_1\,. \tag{10.4}$$

Com os valores de m e b, substituídos em (10.1) encontramos que

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x + y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_1\,.$$

Simplificando, obtemos

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \;\text{ ou }\; \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\,.$$

Em resumo,

Se os pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ definem uma reta r não horizontal e não vertical, então a reta tem inclinação

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

e equação

$$y - y_1 = m(x - x_1)\,.$$

Atividade 10.3

a) Encontre a equação da reta definida pelos pontos $A = (-\sqrt{2}, \sqrt{3})$ e $B = (\sqrt{3}, \sqrt{2})$.

b) Determine o coeficiente angular da reta do item a)

Resumo

Nesta Aula você aprendeu a encontrar equações de uma reta nas seguintes situações:

- retas paralelas a um dos eixos coordenados;
- retas passando pela origem;
- retas determinadas por dois pontos quaisquer.

Também você trabalhou com o conceito de coeficiente angular de uma reta e aprendeu seu significado geométrico.

Exercícios

1. Fixado um sistema de coordenadas no plano, trace o gráfico das retas:

   a) $y = 3x$ b) $y = \frac{1}{2}x - 1$

   c) $y = -2x$ d) $2y - 3 = -x$

2. Determine a equação da reta que passa pela origem e pelo ponto $(-1, 0)$.

3. Determine

   a) A reta que passa pelo ponto $A = (-2, 1)$ e é paralela à reta $y = -2x$.

   b) A reta que passa pelos pontos $A = (-1, 0)$ e $B = (3, -5)$.

   c) Os pontos de interseção da reta $2y = 3x - 2$ com os eixos coordenados.

   d) A inclinação da reta que passa pelos pontos $A = (-\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$ e $B = (2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

4. Determine a equação da reta

   a) que passa por $A = (-2, 1)$ e faz um ângulo de 30^0 com o eixo x. $\left(\operatorname{tg} 30^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

   b) que passa por $A = \left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$ e faz um ângulo de 300^0 com o eixo positivo das abcissas. ($\operatorname{tg}\,(-60^0) = -\sqrt{3}$)

5. Calcule a área do triângulo determinado pelos eixos coordenados e pela reta $y = -\sqrt{3}x + 2$.

6. Calcule o ponto de interseção das retas $2y = -x + 2$ e $y = x + \sqrt{3}$

7. Considere a reta $y = x - 2$ e o círculo de centro $C = (0, 2)$ e raio $r = \sqrt{26}$. Calcule o comprimento da corda determinada pela interseção da reta com o círculo.

8. Encontre a equação da reta que passa pela interseção dos círculos

$$x^2 + x + y^2 = 0 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 - y = 0, .$$

Solução das atividades

Atividade 10.1

a) Como $\operatorname{tg}\, 60^0 = \dfrac{\operatorname{sen} 60^0}{\cos 60^0} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$, então $y = \sqrt{3}x$ é a equação da reta.

b) Como $\operatorname{tg}\,(315^0) = \operatorname{tg}\,(-45^0) = -1$, então $y = -x$ é a equação da reta.

Atividade 10.2

a) Se $x = 0$ é substituído na equação da reta vem que $2y = -3 \times 0 + 2 \Rightarrow y = 1$. Logo $(0,1)$ é a interseção da reta com o eixo y.

Se $y = 0$ na equação, vem que $2 \times 0 = -3x + 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$. Logo $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ é a interseção da reta com o eixo x.

b) Como $y = \frac{-3}{2}x + 1 \Rightarrow m = -\frac{3}{2}$ é o coeficiente angular.

c) A reta dada é $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}$, cujo coeficiente angular é $m = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Toda reta paralela a essa reta tem equação do tipo $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + b$.

Substituindo o ponto $A = (-\sqrt{3}, -1)$ nesta última equação vem que

$$-1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}(-\sqrt{3}) + b \Rightarrow b = -\frac{5}{2}.$$

Então $2y = -\sqrt{3}x - 5$ é a equação procurada.

Atividade 10.3

a) A equação da reta é $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$, onde $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$. Substituindo encontramos a equação

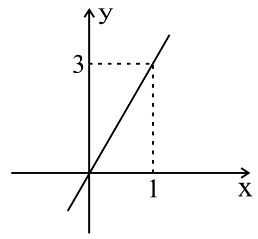
$$y = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}x + \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2} - \sqrt{3})}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \sqrt{3} \Rightarrow y = (2\sqrt{6} - 5)x + 5\sqrt{3} - 5\sqrt{2}.$$

b) $m = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = 2\sqrt{6} - 5$

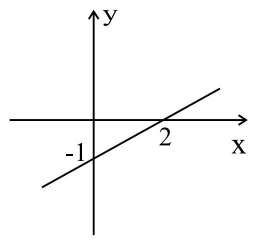
Respostas dos exercícios

1.

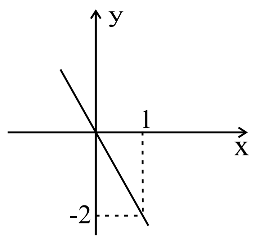
a)



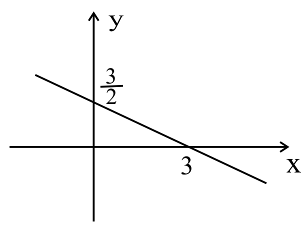
b)



c)



d)



2. $y = 0$ (eixo x)

3. a) $y = -2x + b \Rightarrow 1 = -2 \times (-2) + b \Rightarrow b = -3 \Rightarrow y = -2x - 3.$

b) $y = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \Rightarrow y = \dfrac{-5}{4}x - \dfrac{5}{4}.$

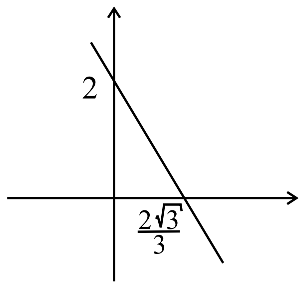
c) $(0, -1)$ e $\left(\dfrac{2}{3}, 0\right).$

d) $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{-\sqrt{2} - 3\sqrt{2}}{2\sqrt{2} + \sqrt{2}} = -\dfrac{4}{3}$

4. a) $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x + b \Rightarrow 1 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}(-2) + b \Rightarrow b = \dfrac{3 + 2\sqrt{3}}{3}$. Logo, $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x + \dfrac{3 + 2\sqrt{3}}{3}.$

b) $y = -\sqrt{3}x + b \Rightarrow 1 = -\sqrt{3} \cdot \dfrac{1}{2} + b \Rightarrow b = \dfrac{\sqrt{3} + 2}{2}$. Logo, $y = -\sqrt{3}x + \dfrac{\sqrt{3} + 2}{2}.$

5. Área $= \left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \times 2\right) \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$



6. $\left(\dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}, \dfrac{2+\sqrt{3}}{3}\right)$.

7. As soluções (x, y) do sistema

$$\begin{cases} y = x - 2 \\ x^2 + (y-2)^2 = 26 \end{cases}$$

são os pontos $A = (-1, -3)$ e $B = (5, 3)$.

O comprimento da corda é $d(A, B) = 6\sqrt{2}$.

8. Estes são pontos de interseção: $A = (0, 0)$ e $B = \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$. Logo, $y = -x$ é a reta.