

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Tiago de Oliveira

O Ensino de Variáveis Complexas na Licenciatura em Matemática: o caso das funções complexas

Juiz de Fora

2024

Tiago de Oliveira

O Ensino de Variáveis Complexas na Licenciatura em Matemática: o caso das funções complexas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação Matemática. Área de concentração: Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Amarildo Melchiades da Silva

Juiz de Fora

2024

Ficha catalográfica elaborada através do programa de geração automática da Biblioteca Universitária da UFJF, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

de Oliveira, Tiago.

O Ensino de Variáveis Complexas na Licenciatura em Matemática: o caso das funções complexas / Tiago de Oliveira. -- 2024.

114 p.

Orientador: Amarildo Melchiades da Silva

Dissertação (mestrado acadêmico) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, 2024.

1. Educação Matemática. 2. Modelo dos Campos Semânticos. 3. Variáveis Complexas. 4. Ensino e Aprendizagem. 5. Funções Complexas. I. Melchiades da Silva, Amarildo, orient. II. Título.

Tiago de Oliveira

O Ensino de Variáveis Complexas na Licenciatura em Matemática: o caso das funções complexas.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação Matemática. Área de concentração: Educação Matemática.

Aprovada em 27 de setembro de 2024.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Amarildo Melchiades da Silva - Orientador

Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Rodolfo Chaves - Membro externo

Instituto Federal do Espírito Santo

Profa. Dra. Viviane Cristina Almada de Oliveira - Membro interno

Universidade Federal de Juiz de Fora

Juiz de Fora, 26/09/2024.



Documento assinado eletronicamente por **Amarildo Melchiades da Silva, Professor(a)**, em 07/10/2024, às 20:50, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Rodolfo Chaves, Usuário Externo**, em 16/10/2024, às 08:25, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **VIVIANE CRISTINA ALMADA DE OLIVEIRA, Usuário Externo**, em 17/10/2024, às 15:51, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Uffj (www2.uffj.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **2007358** e o código CRC **FF921EBC**.

Dedico este trabalho a todos meus familiares, amigos e, em especial, à
minha esposa Ludmila Alves Rioga e às minhas filhas Nina Rioga de
Oliveira e Liz Rioga de Oliveira.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, expresso minha gratidão a Deus por me conceder força e orientação durante toda esta jornada.

À minha amada esposa, Ludmila Alves Rioga, e às minhas queridas filhas, Nina Rioga de Oliveira e Liz Rioga de Oliveira, meu profundo agradecimento por seu amor incondicional e apoio constante.

A todos que foram fundamentais em minha jornada acadêmica, expresso minha profunda gratidão. Ao meu orientador, Prof. Dr. Amarildo Melchiades da Silva, agradeço pela orientação, pelo companheirismo, pelos valiosos ensinamentos e pela sincera amizade. À Prof^a. Dr^a. Viviane Cristina Almada de Oliveira, manifesto igualmente minha sincera gratidão pela colaboração prestada.

Agradeço também a todos os familiares, amigos e colegas de trabalho que estiveram ao meu lado, oferecendo apoio e encorajamento nos momentos desafiadores.

Não poderia deixar de expressar minha gratidão ao Instituto Federal Sudeste de Minas Gerais (IF Sudeste MG), *campus* Santos Dumont, e aos alunos da Licenciatura em Matemática, cuja colaboração foi fundamental para o desenvolvimento deste trabalho. Um agradecimento especial à Prof^a. Lectícia Sobreiro Rezende de Souza por seu valioso apoio e contribuições.

À Universidade Federal de Juiz de Fora, aos professores e à oportunidade concedida para realizar este mestrado em Educação Matemática, meu sincero agradecimento por possibilitar esta experiência enriquecedora.

Por fim, gostaria de expressar minha profunda gratidão aos membros desta banca examinadora, em especial ao meu orientador, Prof^a. Dr^a. Viviane Cristina Almada de Oliveira e ao Prof. Dr. Rodolfo Chaves, por sua atenção, críticas construtivas e contribuições para o aprimoramento deste trabalho.

A todos, meu mais sincero obrigado por fazerem parte desta jornada e por seu apoio inestimável.

o professor precisa saber mais, e não menos Matemática, mas sempre esclarecendo que este mais não se refere a mais conteúdo, e sim a um entendimento, uma lucidez maior, e isto inclui, necessariamente, a compreensão de que mesmo dentro da Matemática do matemático produzimos significados diferentes para o que parece ser a mesma coisa (Lins, 2005a, p. 122).

RESUMO

A presente pesquisa teve como objetivo investigar a produção de um conjunto de tarefas, referenciadas teórica e metodologicamente, para o ensino de funções complexas em disciplinas cuja ementa trate do tema variáveis complexas, como parte do processo de formação de estudantes de uma Licenciatura em Matemática no projeto de educá-los matematicamente. A investigação foi fundamentada teoricamente pelo Modelo dos Campos Semânticos, que compartilha ideias com a Teoria histórico-cultural, em particular, com Vigotski e Leontiev. Enquanto projeto de pesquisa, caracteriza-se como uma abordagem qualitativa de investigação em que será desenvolvida uma pesquisa de campo. Enquanto projeto de desenvolvimento foi produzido um produto educacional constituído por uma sequência didática, composto por fichas de trabalho, para uso nas salas de aula no ensino superior.

Palavras-chave: Educação Matemática, Modelo dos Campos Semânticos, Variáveis Complexas, Ensino e Aprendizagem, Funções Complexas.

ABSTRACT

The present research aimed to investigate the production of a set of tasks, theoretically and methodologically referenced, for the teaching of complex functions in courses whose syllabus addresses the topic of complex variables, as part of the process of training students in a Mathematics Teaching Degree with the goal of educating them mathematically. The investigation was theoretically grounded in the Model of Semantic Fields, which shares ideas with the cultural-historical theory, particularly with Vygotsky and Leontiev. As a research project, it is characterized as a qualitative research approach in which field research will be developed. As a development project, an educational product was produced consisting of a didactic sequence, composed of worksheets, for use in higher education classrooms.

Keywords: Mathematics Education, Model of Semantic Fields, Complex Variables, Teaching and Learning, Complex Functions.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: Aplicação: $f: A \rightarrow \mathbb{C}$, $A \subseteq \mathbb{C}$	53
Figura 2 - Escrita Cristina - Tarefa 1.1	60
Figura 3 - Escrita Nyna - Tarefa 1.1	62
Figura 4 - Escrita Lero - Tarefa 1.2	67
Figura 5 - Escrita Malu - Tarefa 2.1	70
Figura 6 - Escrita dos alunos - Tarefa 2.1	73
Figura 7 - Escrita Malu e Sandora – Tarefa 2.2	74

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Disciplinas que envolvem números complexos	23
Quadro 2 - Ementa criada (Introdução às Variáveis Complexas para a Licenciatura).....	28
Quadro 3 - Bibliografia das disciplinas do Quadro 1 que foram citadas mais de uma vez.	29
Quadro 4 - Trabalhos provenientes da pesquisa em banco de teses e dissertações	32
Quadro 5 - Trabalhos provenientes da pesquisa no acervo do Mestrado em Educação Matemática da UFJF.....	35
Quadro 6 - Trabalhos provenientes da pesquisa na rede Sigma-t.....	36
Quadro 7 - Ementa: Introdução às Variáveis Complexas para Licenciatura.....	47
Quadro 8 - Pseudônimos dos discentes	48

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BDBT	Biblioteca Digital Brasileira de Teses
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
EDO	Equações Diferenciais Ordinárias
EJA	Educação de Jovens e Adultos
ETM	Ensino Tradicional de Matemática
ERE	Ensino Remoto Emergencial
IES	Instituições de Ensino Superior
IF/JF	Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais – <i>Campus</i> Juiz de Fora
IF/RP	Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais – <i>Campus</i> Rio Pomba
IF/SD	Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais – <i>Campus</i> Santos Dumont
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação
MCS	Modelo dos Campos Semânticos
NDE	Núcleo Docente Estruturante
OPT	Optativa
PAV	Programa Acelerar para Vencer
PED	Programa de Estímulo à Docência
PPC	Projeto Pedagógico do Curso
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática
UFJF	Universidade Federal de Juiz de Fora
UFOP	Universidade Federal de Ouro Preto
UFSJ	Universidade Federal de São João del-Rei
UFV	Universidade Federal de Viçosa

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	O ENSINO DE VARIÁVEIS COMPLEXAS NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA	21
3	REVISÃO DA LITERATURA.....	31
4	O REFERENCIAL TEÓRICO E O PROBLEMA DE PESQUISA	38
4.1	O Modelo dos Campos Semânticos.....	39
4.2	O Problema de Pesquisa e o Produto Educacional	42
5	METODOLOGIA DE PESQUISA.....	45
5.1	Caracterização da Pesquisa.....	46
5.2	Design da disciplina	46
5.3	Leitura Epistemológica das Ações Enunciativas dos Estudantes.....	49
5.4	A produção das Tarefas	50
6	UMA LEITURA DA DINÂMICA DA SALA DE AULA	56
6.1	Avaliação Diagnóstica.....	57
6.2	Tarefa 1.1 – Função real de uma variável real	59
6.3	Outras Definições de Funções	63
6.4	Tarefa 1.2 – Introdução a Funções Complexas	65
6.5	Tarefa 2.1 – Funções Complexas	69
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	78
	REFERÊNCIAS	82
	ANEXOS.....	86
	I - Termo de Compromisso Ético	87
	II – Avaliação Diagnóstica	88
	III – Definições de Funções Reais de Uma Variável Real	92
	IV – Fichas de Trabalho.....	94

1

INTRODUÇÃO

Esta dissertação é parte do macroprojeto de pesquisa intitulado *Educação Matemática Escolar no Século XXI: a formação de estudantes e professores da Educação Básica* desenvolvido no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora e no Núcleo de Investigação, Divulgação e Estudos em Educação Matemática/NIDEEM.

Este macroprojeto está inserido em um programa de investigação interinstitucional denominado *Programa Linsiano de Investigação* em homenagem ao educador matemático Romulo Campos Lins (1955-2017), que foi produzido com o propósito de investigar duas questões: (i) Como formar um(a) estudante educado(a) matematicamente ao longo da Educação Básica no século XXI?; (ii) Como deve ser a formação inicial de professores(as) no interior das licenciaturas em Matemática e Pedagogia para educar matematicamente os (as) estudantes da Educação Básica neste século? (Silva; Oliveira; Bastos, 2024, p. 95)

Segundo os pesquisadores que estão à frente da pesquisa as questões foram propositalmente formuladas como questões abertas, porém, direcionadas aos interesses de pesquisa do grupo em que os macroprojetos são desenvolvidos nas diferentes instituições de pesquisa que fazem parte do projeto e que responderão localmente as perguntas orientadoras acima apresentadas.

Nossa dissertação se insere na segunda pergunta orientadora do programa e está vinculado ao macroprojeto de pesquisa cujos interesses são:

- Investigar uma estrutura alternativa para a Licenciatura em Matemática;
- Investigar o design para as disciplinas de matemática do matemático para que estejam a serviço da formação de professores. Em particular, as disciplinas Cálculo Diferencial e Integral, Teoria dos Números, Estruturas Algébricas e Análise Matemática.
- Investigar o design para as disciplinas de conteúdos estatísticos para que estejam a serviço da formação de professores. Em particular, as disciplinas de Probabilidade e Álgebra Matricial (Silva; Oliveira; Bastos, 2024, p. 102).

Além disso, como observam Silva, Oliveira e Bastos (2024):

Nesta frente de pesquisa também investiremos no processo de desenvolvimento de material didático para as disciplinas matemáticas, ditas de matemática pura, cujo ensino baseado em livros-textos do matemático promovem alto índice de reprovação e consequente retenção na formação do licenciando retardando sua entrada no mercado de trabalho (Silva; Oliveira; Bastos, 2024, p. 102).

Assim, nossa pesquisa se insere nesse Programa ao tratar do ensino de Variáveis Complexas para um curso de Licenciatura em Matemática a partir da constatação de que, a

concepção de disciplinas que tratam desse tema, suas ementas, as metodologias de ensino e bibliografias utilizadas historicamente são propostas a partir da visão do matemático para a formação do futuro matemático e, por isso, não voltadas especificamente à formação do futuro professor da educação básica.

Nossa investigação teve como objetivo analisar a produção de um conjunto de tarefas, referenciadas teórica e metodologicamente, para o ensino de funções complexas em disciplinas cuja ementa trate de temas que envolve o que os matemáticos designam pelo título de Variáveis complexas, como parte do processo de formação de estudantes de uma Licenciatura em Matemática no projeto de educá-los matematicamente. E, portanto, tem como finalidade intervir na formação inicial do futuro professor de Matemática.

Como consequência, por ser uma pesquisa em um Mestrado Profissional, o produto educacional, decorrente de nossa investigação, será a produção de um material didático para o ensino de funções complexas em licenciaturas de Matemática.

A proposta da pesquisa está alinhada com a nossa trajetória acadêmica e profissional, marcada por várias inquietações que nos trouxeram ao Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF). Para situar o leitor sobre tais inquietações, farei uma breve explanação a respeito do que considero os principais pontos desta caminhada.

Minha formação acadêmica aconteceu em uma Licenciatura em Matemática, na Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP), na qual participei de vários projetos como o Programa de Estímulo à Docência (PED), projetos de extensão e iniciação científica.

Após a conclusão da graduação, em 2013, ingressei na Pós-Graduação (Mestrado Profissional em Matemática – Profmat), pela Universidade Federal de São João del-Rei (UFSJ), finalizado em 2016.

Como experiência profissional, venho atuando como professor que ensina matemática desde 2010. Ao longo da minha jornada como professor trabalhei em escolas estaduais, lecionando matemática para o Ensino Fundamental, Médio, Técnico, em programas do governo federal, tais como, o Programa Acelerar para Vencer (PAV); na Educação de Jovens e Adultos (EJA) e em escolas particulares, lecionando para o Ensino Fundamental.

Minha trajetória acadêmica iniciou na Universidade Federal de Ouro Preto, como professor substituto lecionando nos cursos de Química Industrial, Ciências da Computação, Ciências Biológicas e em cursos de Engenharias (de Minas, Civil, Metalúrgica, Ambiental e Geológica), lecionando as seguintes disciplinas: Cálculo Diferencial e Integral I e II, Geometria Analítica e Introdução à Álgebra Linear e, atualmente, no Instituto Federal Sudeste de Minas

Gerais (IF Sudeste MG), como professor efetivo. Tomei posse no IF Sudeste MG - *campus* Santos Dumont em 2016 e fiquei por lá até o final do primeiro semestre de 2023, atuando nos cursos técnicos e de graduação, dando ênfase aos cursos de Licenciatura em Matemática e Engenharia Ferroviária e Metroviária, com as seguintes disciplinas: Fundamentos de Matemática Elementar I e II, Trigonometria e Números Complexos, Geometria Analítica e Sistemas Lineares, Álgebra Linear, Cálculo I, II e III, Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), Análise Real I e Introdução às Variáveis Complexas para Licenciatura, em seguida, no ano de 2023, fui para o *campus* Juiz de Fora, onde continuo atuando como professor.

Ainda no *campus* Santos Dumont, vivenciei minha primeira experiência administrativa ao coordenar o Curso de Licenciatura em Matemática, no período de novembro de 2018 a abril 2023, fazendo parte do Núcleo Docente Estruturante (NDE) e do colegiado do curso. Durante o período de atuação no *campus* Santos Dumont, fui também professor orientador do programa Residência Pedagógica, no qual participei duas vezes (2020-2022 e 2022-2023), coordenador geral de graduação e Pesquisador Institucional do *campus* Santos Dumont por um ano. Participei da comissão para elaboração e reformulações do *Projeto Pedagógico do Curso* (PPC) da Licenciatura em Matemática e do PPC da Pós-Graduação Lato Sensu em Práticas Pedagógicas na Educação Contemporânea, além de orientar monitores e participar em projetos de extensão e de ensino.

Atualmente, no *campus* Juiz de Fora, estou lecionando disciplinas de matemática na Licenciatura em Matemática, Licenciatura em Física, Engenharias e no Ensino Médio Integrado¹, além de fazer parte do NDE da Licenciatura em Matemática.

Considerando minha trajetória acadêmica e profissional, o interesse em pesquisar o ensino de conteúdos ligados a disciplinas de matemática surgiu depois de diversas dificuldades de ordem didática como professor de disciplinas matemáticas, tais como Cálculo Diferencial e Integral I, II e III, Geometria Analítica e Álgebra Linear, lecionadas na Universidade Federal de Ouro Preto e posteriormente no IF Sudeste MG *campus* Santos Dumont.

Ao longo dos anos constatamos, prática letiva o elevado índice de retenção e evasão de estudantes nos cursos superiores nas áreas consideradas exatas, o que está diretamente relacionado às dificuldades enfrentadas pelos alunos nessas disciplinas, algo que me preocupa profundamente. Barreto observa que:

¹ O curso técnico integrado, também chamado de ensino médio técnico integrado, oferece a formação geral de forma integrada à formação profissional. O aluno tem as disciplinas do currículo normal do ensino médio e as específicas do curso técnico escolhido. A duração é de três ou quatro anos, dependendo de cada curso ou *campus*.

O ensino de Cálculo nas universidades brasileiras tem sido objeto de questionamento em diversos fóruns em função das dificuldades apresentadas pelos alunos na sua aprendizagem, bem como pela alta evasão dos estudantes dos primeiros períodos, matriculados nesta disciplina (Barreto *apud* Reis, 2005, p. 4).

As dificuldades enfrentadas pelos alunos nas disciplinas de matemática do ensino superior, bem como a evasão estudantil e os debates sobre os métodos de ensino e aprendizagem dessas disciplinas, permanecem como um tema atual e objeto de pesquisa nos meios acadêmicos. Outras discussões como elaboração de currículo e ementas, materiais utilizados pelos docentes e referências bibliográficas de disciplinas da matemática também são assuntos de trabalhos e pesquisas que nos interessam, Reis (2001) comenta:

Uma questão que precede à elaboração de currículos e ementas, à escolha de bibliografias e livros-textos e à opção por uma determinada metodologia ou recursos metodológicos, é que a prática pedagógica do professor de Cálculo deve se pautar, primeiramente, na reflexão e compreensão do papel fundamental do Cálculo Diferencial e Integral na formação matemática de seus alunos. Somente estabelecendo elementos que esclareçam a real função do Cálculo na formação matemática do aluno, o professor terá condições de refletir sobre que objetivos traçar, que conteúdos e metodologias estabelecer, enfim, que prática pedagógica desenvolver! (Reis, 2001, p. 23).

A forma como o professor atua nas disciplinas de matemática do ensino superior e sua metodologia podem ter um impacto substancial na aprendizagem do aluno. Por isso, entendemos que é essencial analisar em nosso estudo as ementas das disciplinas, com vistas a procurar identificar quais materiais didáticos podem transformar, o escopo vigente do Ensino Tradicional de Matemática (ETM) (Chaves, 2004), no que se refere aos processos de ensino assim, compreender o papel da discussão desse tema na formação do aluno e, em seguida, estabelecer os objetivos a serem alcançados e selecionar recursos e metodologias que possam se contrapor ao quadro vigente (ETM e a apropriação da matemática focada na formação do matemático em detrimento à formação do professor que ensina matemática na educação básica).

Para além desses quesitos, o trabalho também nas disciplinas de matemática na Licenciatura requer, como sugeriu Lins (1999), escutar (ler) o aluno, entender o porquê de ele agir assim e procurar promover oportunidades para que aluno produza significados para o que lhes estamos ensinando.

Por ter trabalhado e participado da reformulação de cursos de formação de professores do IF Sudeste MG, percebo que existem muitos desafios e dificuldades encontradas na oferta de disciplinas de matemática desses cursos, como na construção de uma ementa, escolha da referência bibliográfica, escolha de qual disciplina deve existir no curso, seja de forma mais

introdutória ou mais avançada, análises dos documentos norteadores para reformulações dos PPCs e posteriormente em como trabalhar com essas disciplinas no curso. Além disso, é perceptível que a velha e ao mesmo tempo atual forma de se ensinar conteúdos matemáticos, aula expositiva\explicativa, lousa e giz, mantendo a passividade do aluno, promovendo a meritocracia, continua sendo um desafio, como (Chaves, 2004) comenta:

[...] a aula expositiva ou expositivismo professoral é o principal dispositivo de controle daquilo que conhecemos como ensino tradicional de matemática (ETM), onde o conteúdo programático é o elemento central, principal e irrefutavelmente é colocado além do bem e do mal. A aula expositiva, nos moldes do ETM, é o lugar-comum da pregação enunciativa do expositivista ou de práticas educativas expositivistas; uma aula onde o professor — ser falante — ocupa grande parte do tempo envolvido com a exposição, e, o aluno — ser ouvinte — aceita passivamente as verdades apresentadas (Chaves, 2004, p. 79).

O ambiente citado em Chaves (2004) é pautado no ensino tradicional e, geralmente, nele se pauta a prática de professores que ofertam disciplinas de matemática dos cursos de Licenciatura em Matemática.

Com base nessas reflexões e discussões – que abordam a influência de uma disciplina de matemática na vida acadêmica do aluno, bem como as dificuldades de ordem didática, o currículo das licenciaturas, os materiais didático-pedagógicos e as bibliografias utilizadas pelos docentes – surgiram meus primeiros questionamentos em nossa pesquisa: Como podemos abordar o ensino de conteúdos matemáticos de forma diferente da tradicional, dando voz ao aluno e promovendo sua participação ativa no curso? Como podemos prepará-lo para adotar abordagens não tradicionais em suas futuras aulas? Entendemos que a busca por metodologias alternativas e seu potencial impacto nas futuras aulas dos licenciandos, assim como o desenvolvimento de materiais didáticos alternativos aos tradicionais livros-textos, são aspectos que podem contribuir para o desempenho dos alunos, com o propósito de reduzir a evasão e a retenção nos cursos de Licenciatura em Matemática.

Assim, optamos em adotar neste trabalho uma abordagem que envolva conteúdos matemáticos de disciplinas presentes no currículo de Licenciatura em Matemática. Devido aos prazos regulamentares do mestrado profissional, decidimos restringir nossa análise à disciplina intitulada Variáveis Complexas. Essa escolha também foi influenciada pela minha experiência pessoal durante a graduação e pela relevância das disciplinas que envolvem números complexos no contexto das Licenciaturas. Ao longo do trabalho, vamos detalhar essa importância de forma mais clara. Sendo assim, investigaremos, mais localmente o ensino das funções complexas, um

dos temas que constitui a referida disciplina, propondo, a partir do produto educacional, uma possibilidade de abordar o referido tema para licenciandos em Matemática.

Ao refletir a respeito dos questionamentos apresentados e a escolha do tema, formulamos o seguinte problema de pesquisa: “Investigar a produção de um conjunto de tarefas, referenciadas teórica e metodologicamente, para o ensino de funções complexas em disciplinas cuja ementa trate do tema Variáveis Complexas, como parte do processo de formação de estudantes de uma Licenciatura em Matemática”. E para isso delineamos três ações a serem consideradas e trabalhadas ao longo do estudo.

A primeira ação consiste em pensar na disciplina a partir da perspectiva de como ela pode contribuir para a formação do futuro professor de Matemática da Educação Básica. Nesse sentido, buscamos sugerir que nosso foco não se restringe apenas às unidades curriculares usualmente apresentadas, mas também abarca uma proposta metodológica na qual o estudante em formação seja desafiado

A segunda ação, refere-se à identificação das características da referida disciplina para um curso de Licenciatura em Matemática que, segundo nosso entendimento, está centrada no processo, na produção de significados, enquanto que, para engenheiros e matemáticos aplicados o interesse se centra no resultado.

Com base nessas características identificadas, passamos à última ação, que consiste no desenvolvimento de fichas de trabalho que abordem nossa questão de pesquisa. Em outras palavras, buscamos elaborar um material didático que os professores possam utilizar, embasado nas características que propusemos para o curso. É importante ressaltar que ao mencionar fichas de trabalho, sugerimos uma ruptura com a abordagem peculiar ao ETM.

Para procurar atacar nossas questões de investigação, usamos como referencial teórico-epistemológico o Modelo dos Campos Semânticos (MCS) elaborado pelo professor Romulo Campos Lins. Assim, entendemos que este referencial possa vir a ser um possível direcionador (ou base) para os docentes de como objetos matemáticos possam vir a ser trabalhados e discutidos em sua sala de aula.

Com esses objetivos de nosso referencial, esta dissertação está organizada em sete capítulos, sendo o primeiro esta introdução.

No segundo capítulo, apresentamos uma análise de como o ensino de Variáveis Complexas aparece em diferentes Licenciaturas em Matemática nas diferentes instituições públicas da zona da mata mineira que ministram as disciplinas.

No terceiro capítulo, apresentamos uma revisão de literatura, onde usamos a Biblioteca Digital Brasileira de Teses (BDBT), o acervo do Mestrado Profissional em Educação Matemática da UFJF e o acervo digital da Rede Sigma-t.

No quarto capítulo tratamos da fundamentação teórica desta pesquisa, que utiliza o Modelo dos Campos Semânticos proposto e elaborado pelo educador matemático Romulo Campos Lins, além do nosso problema de pesquisa.

No quinto capítulo temos a metodologia da pesquisa, a qual se enquadra na pesquisa qualitativa e investigativa na perspectiva de Bogdan e Biklen (2013), dentro da modalidade da pesquisa de campo. A pesquisa de campo ocorreu na cidade Santos Dumont/MG, localizada na Zona da Mata mineira, em um curso de Licenciatura em Matemática. Atuamos como professores da disciplina Optativa denominada Introdução às Variáveis Complexas para a Licenciatura. Nesta disciplina, utilizamos uma série de tarefas apresentadas sob a forma de fichas de trabalho, todas centradas nos números complexos e nas funções complexas. Os detalhes específicos desse trabalho são discutidos ao longo deste texto

Ainda no capítulo 5, trazemos a caracterização da disciplina onde ocorreu a pesquisa, leitura das tarefas realizadas pelos discentes e por fim como foram produzidas as tarefas.

No sexto capítulo apresentamos a análise da produção de significados dos participantes da pesquisa a respeito das tarefas aplicadas. Foram aplicadas duas fichas de trabalho, cada uma com um objetivo específico e a análise foi feita de forma individual com cada tarefa através das falas dos próprios alunos.

No sétimo capítulo trazemos algumas considerações finais a respeito da pesquisa de maneira geral, as dificuldades encontradas no decorrer e realização da mesma e as contribuições do estudo à formação de professores de Matemática.

2**O ENSINO DE VARIÁVEIS COMPLEXAS
NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

Neste capítulo, apresentamos inicialmente algumas reflexões e características do ensino da disciplina Variáveis Complexas nas Instituições Federais da Zona da Mata Mineira. Em seguida dissertamos a respeito da presença deste assunto na formação dos licenciandos em Matemática.

Uma disciplina de matemática acadêmica presente no currículo da Licenciatura em Matemática, segundo nosso entendimento, não deve limitar a ensinar a matemática pela matemática pois, como Lins observou, “[...] a demanda a que o sistema escolar deverá responder, é que a educação matemática de nossos alunos deve corresponder a uma ‘educação PELA Matemática’ e não uma ‘educação PARA A Matemática’” (Lins, 2020, p. 15).

O pesquisador considera o impacto deste tipo de educação, tomando como exemplo o ensino de Cálculo no seguinte comentário: “[...] não se pode negar que este [...] oferece para os alunos – como acontece em qualquer outro curso – um certo modelo de aula, um modelo de como ensinar matemática” (Lins, 2005, p. 118).

De fato, muitos alunos acabam reproduzindo o que aprenderam nas disciplinas de matemática que, muitas vezes são ofertadas pelos matemáticos, baseadas em definições axiomáticas, método dedutivo e demonstrações mais propícia a prática de pesquisa deste profissional.

Entendemos que seja relevante que, a formação matemática do professor continue sendo estudada e que algumas perguntas continuem sendo feitas, tais como: O enfoque dado a matemática acadêmica para os licenciandos de matemática não poderia ser diferente daquele que pretende formar o aluno de bacharelado em matemática? Qual metodologia de ensino seria mais adequada a formação do futuro professor em oposição ao ensino tradicional. Por exemplo, uma metodologia que escutasse o aluno, dando-lhe voz, fazendo uma escuta ativa (Silva, 2022) e que possuísse um “instrumento” de leitura das ações enunciativas dos estudantes a partir da análise epistemológica do MCS (Silva, 2022), fazendo assim com que ele participe de forma efetiva das aulas. Quais contribuições uma disciplina que pretende ensinar os temas relativos à matemática pura pode trazer para formação do estudante? A tal respeito, Lins (2005) observa:

A existência de cursos de “conteúdo matemático”, desarticulados teórica e praticamente do que seja a profissão do professor de Matemática, se apresenta como um enorme desafio para comunidade de formadores (Lins, 2005, p.117).

Sabendo de tal dificuldade em lidar com a matemática pura, procuramos investigar uma possível maneira de tratar o estudo de funções complexas num formato diferente do Ensino Tradicional Vigente (ETV), como proposto em Baldino (1995), oferecendo uma possibilidade

de aprendizagem diferente das metodologias tradicionais que os licenciandos estão acostumados nas disciplinas da matemática acadêmica.

A unidade programática relativa a funções complexas é um dos temas de uma disciplina de Variáveis Complexas. Em algumas instituições, em um curso de Licenciatura em Matemática temos uma disciplina básica de números complexos nos primeiros anos de curso e/ou uma disciplina de Variáveis Complexas obrigatória ao final do curso ou como optativa (OPT).

Nossa proposta se constituiu analisar os cursos de instituições de públicas de ensino que possuem Licenciatura em Matemática fazendo a delimitação de selecionar as instituições da Zona da Mata Mineira do Estado de Minas Gerais.

O quadro 1 apresenta o resumo de nosso levantamento:

Quadro 1 - Disciplinas que envolvem números complexos

Disciplina	Instituição	Ementa
Funções do Plano Complexo (6ºP)	UFJF	Números Complexos; Funções Analíticas; Funções Elementares; Transformações por Funções Elementares.
Fundamentos de Matemática Elementar II (1ºP)	UFV	Trigonometria e funções trigonométricas; Introdução aos números complexos; Polinômios.
Variáveis Complexas (OPT)	UFV	Números complexos; Limite e continuidade; Derivadas; Integração; Séries de potências; Resíduos.
Números Complexos e Polinômios (8ºP)	IF Sudeste de MG <i>campus</i> Juiz de Fora	Números complexos; Polinômios; Equações polinomiais.
Cálculo com variável complexa (OPT)	IF Sudeste de MG <i>campus</i> Juiz de Fora	Funções Analíticas; Funções Elementares; Integração; Séries de Potências.
Trigonometria e Números Complexos (2ºP)	IF Sudeste de MG <i>campus</i> Santos Dumont	A Trigonometria do Triângulo Retângulo; Extensões das Funções Trigonômicas; As Leis do Seno e do Cosseno; Equações e Inequações Trigonômicas, Números Complexos; Trigonometria e Números Complexos; Transformações nas Funções Trigonômicas.
Introdução às Variáveis Complexas para a Licenciatura (OPT)	IF Sudeste de MG <i>campus</i> Santos Dumont	Ementa contemplada no quadro 02 da próxima seção.

Trigonometria e Números complexos (2ºP)	IF Sudeste de MG <i>campus</i> Rio Pompa.	Razões trigonométricas no triângulo retângulo. Ângulos notáveis. Ciclo trigonométrico. Relações fundamentais. Transformações trigonométricas. Identidades. Equações e inequações. Forma algébrica dos números complexos. Operações. Plano de Argand-Gauss. Forma trigonométrica. 1ª e 2ª fórmulas de Moivre.
Variáveis Complexas (8ºP)	IF Sudeste de MG <i>campus</i> Rio Pompa.	Números Complexos. Funções complexas de uma variável complexa: continuidade e derivabilidade. Funções analíticas e Equações de Cauchy-Reimann. Funções complexas elementares. Funções harmônicas e a Equação de Laplace.

Fonte: Criado pelo autor

Observamos que em todos os cursos de Licenciatura em Matemática dessas instituições (Quadro 1) há uma disciplina que trabalha com os números complexos, o que implica que o estudo desse tema está presente em 100% dos cursos, cujas ementas analisamos. Esse dado é relevante para nossa pesquisa, pois evidencia a importância atribuída a esse tópico na região. Embora os números complexos possam não receber tanto destaque quanto disciplinas como Cálculo Diferencial e Integral, sua presença em nossa área de estudo indica a necessidade de investigação e aprofundamento nesse tema, o que também motivou nossa escolha de abordá-lo neste trabalho.

Para nossa pesquisa, desenvolvemos nossa pesquisa lecionando a disciplina optativa denominada *Introdução às Variáveis Complexas para a Licenciatura* no IF Sudeste MG, *campus* Santos Dumont, destinada a uma turma que já havia estudado números complexos no segundo período do curso, na disciplina obrigatória Trigonometria e Números Complexos.

Ainda a respeito das ementas das disciplinas que envolvem Números Complexos e Variáveis Complexas, é possível realizar uma análise detalhada dos PPCs de qualquer IES para identificar as disciplinas e conteúdos abordados. Atualmente, observamos a existência de uma disciplina específica dedicada aos Números Complexos, Variáveis Complexas ou Cálculo IV, que pode receber diferentes denominações em várias IES, especialmente nos cursos de Engenharia, Física e Matemática.

Decidimos, no entanto, restringir nossa pesquisa à região da Zona da Mata Mineira, onde estamos localizados. Essa escolha foi motivada pela familiaridade e proximidade com o

contexto local, o que nos permitiu uma análise mais minuciosa e contextualizada das questões investigadas. Passemos então a analisar mais detidamente as ementas e suas referências das disciplinas do Quadro 1.

Antes de analisar/discutir as ementas dos cursos apresentadas na Quadro 1, falemos como uma disciplina de Variáveis Complexas é introduzida em um curso de Licenciatura em Matemática. É importante citar que a implementação da disciplina de Variáveis Complexas passa pela decisão dos Núcleos Docentes Estruturantes (NDEs) em oferecer uma disciplina mais básica nos anos iniciais de curso ou uma com mais amplitude de aspectos abordados ao final, ou até mesmo como optativa, como vimos na seção anterior. Para entendermos como funciona a inserção de uma disciplina de matemática na Licenciatura em Matemática temos alguns passos.

Primeiramente, para criar um curso de Licenciatura em Matemática, segue-se os documentos internos das instituições que estão pleiteando a oferta do curso e os documentos externos, como as resoluções e leis que definem as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial de Professores para a Educação Básica. Existem muitos desafios na implementação de um curso para formação de professores, sendo alguns deles as mudanças e atualizações das resoluções.

Atualmente, temos a resolução CNE/CP Nº 2, DE 20 DE DEZEMBRO DE 2019 (BRASIL, 2019), que define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial de Professores para a Educação Básica e institui a Base Nacional Comum para a Formação Inicial de Professores da Educação Básica (BNC-Formação) que está em vigor. A resolução citada segue a Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB) (BRASIL, 1996) e estabelece que os currículos dos cursos da formação de docentes terão por referência a Base Nacional Comum Curricular (BNCC-Educação Básica):

A Base Nacional Comum Curricular é um documento normativo para as redes de ensino e suas instituições públicas e privadas, referência obrigatória para elaboração dos currículos escolares e propostas pedagógicas para a educação infantil, ensino fundamental e ensino médio no Brasil (BRASIL, 2018, (s.p)).

Atualmente, não estão completados alguns temas matemáticos que são trabalhados no ensino médio, como Geometria Analítica, Números Complexos, Polinômios e outras unidades curriculares que ainda são abordados nas Licenciaturas, seja como disciplinas ou partes de alguma disciplina. Em alguns cursos de Licenciatura em Matemática do Brasil, a disciplina de Variáveis Complexas não é obrigatória. De acordo com a resolução CNE/CP Nº 2, DE 20 DE DEZEMBRO DE 2019 (BRASIL, 2019) são destinadas 1600 horas às disciplinas específicas

das áreas, componentes, unidades temáticas e objetos de conhecimento da BNCC, e para o domínio pedagógico dessas unidades curriculares. Sendo assim, os NDEs analisam as competências e habilidades propostas na resolução juntamente com os conteúdos abordados no ensino básico para a oferta das disciplinas de matemática em seu curso.

O nosso interesse não é fixar qual disciplina de matemática “deve” (ou não) ser obrigatória, ou qual “deve” (ou não) ser optativa, e sim trabalhar com a disciplina de Variáveis Complexas, sendo mais específico, com o estudo das funções complexas, que é considerado um dos ramos importantes da matemática. Estudiosos como Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), Karl Wilhelm Theodor Weierstraß, conhecido como Karl Weierstrass (1815-1897) e Carl Friedrich Gauss (1777–1855) trouxeram expressivas contribuições para o desenvolvimento desse estudo, que resultaram em deixar de se entender as raízes complexas de uma equação como mero recurso algébrico à resolução, passando, já no século XIX, a entendê-las como um número em um campo numérico que não se encontra mais na reta, mas no plano: o plano complexo.

Mesmo que o estudo dos números complexos não seja obrigatório em uma Licenciatura em Matemática, é perceptível sua importância nos cursos de Matemática e por isso entendemos que uma disciplina de Variáveis Complexas é relevante aos licenciandos, pois muitos estudantes do Ensino Médio já tiveram algum contato com os números complexos ou, pelo menos, ouviram falar sobre eles, mesmo que atualmente não sejam um conteúdo obrigatório no currículo.

Uma situação comum é a resolução de uma equação do 2º grau com discriminante negativo que, erroneamente, muitos propagam como sendo o mote para o desenvolvimento dos complexos. Do ponto de vista histórico é relevante destacarmos tal visão equivocada, pois foram as tentativas de resolução de equações cúbicas reduzidas ($x^3 + cx = d \Leftrightarrow$ Um cubo de coisas igual a números), tanto no Ocidente, a partir do método proposto por Scipione del Ferro (1465-1526) e “plagiada” por Gerolamo Cardano (1501-1576) que a publicou em sua obra *“Ars Magna”*, mostrando sua aplicação a Equações Cúbicas gerais, quanto no Oriente, pela resolução de equações cúbicas da forma $x^3 + px^2 + qx = N$ ou biquadráticas do tipo $x^4 + px + q = 0$, propostas por Wang Xiaotong (580-640 DEC.) na obra *Jigu Suanjin* (Continuação da Matemática Antiga) (C. 626 DEC.), ou ainda pela proposta do persa Omar Khayyām (1048-1113) que resolvera tais equações usando as curvas cônicas de Apolônio, no século XI e previra uma futura solução mesma por métodos algébricos.

Nesse caso, o professor do Ensino Médio provavelmente explicará que a equação não possui solução no conjunto dos números reais, mas que existe um conjunto chamado conjunto

dos números complexos, onde a solução é possível. É provável que o professor também explique que o conjunto dos números reais está contido no conjunto dos números complexos. Mesmo não sendo um assunto obrigatório, há boas oportunidades para o professor introduzir e motivar o estudo dos números complexos.

Para que o professor do Ensino Médio consiga abordar ou responder a questionamentos relativos aos números complexos, é fundamental que ele tenha estudado esse tópico durante sua graduação. Para um curso de Formação de Professores, é crucial incluir o estudo dos números complexos, pois em algum momento da carreira docente, é possível que venha a trabalhar com esse assunto ou discutir sobre ele e, como apresentamos em nossa epígrafe,

o professor precisa saber mais, e não menos Matemática, mas sempre esclarecendo que este mais não se refere a mais conteúdo, e sim a um entendimento, uma lucidez maior, e isto inclui, necessariamente, a compreensão de que mesmo dentro da Matemática do matemático produzimos significados diferentes para o que parece ser a mesma coisa (Lins, 2005a, p. 122).

Além disso, em uma sociedade em que o desenvolvimento tecnológico é cada vez mais presente, o estudo dos números complexos é relevante em diversas áreas, como física quântica, teoria do caos, engenharias e matemática avançada.

As disciplinas mencionadas na Tabela 1, sejam introdutórias ou avançadas, começam com os números complexos. As ementas geralmente são semelhantes, abordando inicialmente os números complexos e suas diversas representações, seguidas por funções complexas, limites e continuidade. Outros tópicos incluem diferenciação complexa e as equações de Cauchy-Riemann, integração complexa e o Teorema de Cauchy, finalizando com séries e o Teorema do Resíduo. Algumas ementas podem variar, incluindo mais ou menos assuntos dos tópicos citados.

Lembrando que as funções reais de uma variável real estão presentes na vida escolar do aluno desde a educação básica, ou seja, alunos podem chegar ao Ensino Superior familiarizados com essa temática e, possivelmente, com o que ela se relaciona. Ainda assim, boa parte do trabalho realizado nas disciplinas de matemática dos cursos de exatas, em especial nos cálculos é dedicado a esse tema, justamente por ser um tópico essencial para muitas discussões dentro dos seus respectivos cursos.

Porém, olhando para as ementas do Quadro 1, notamos que o assunto de funções complexas divide espaço com outros temas que são na maioria das vezes mais extensos,

sobrando pouco tempo à abordagem introdutória do assunto. Em nossa pesquisa trabalhamos com as funções complexas de uma forma mais lenta (no sentido de focada), discutindo atentamente as definições, as transformações e as funções elementares.

A ementa da disciplina Introdução às Variáveis Complexas para a Licenciatura (Quadro 02) em que a pesquisa foi realizada ficou um pouco mais flexível, dando mais oportunidade ao docente abordar o que considera mais relevante. Segue a ementa:

Quadro 2 - Ementa criada (Introdução às Variáveis Complexas para a Licenciatura)

Disciplina: Introdução às Variáveis Complexas para a Licenciatura (MAT06025)	
Período:	
Carga Horária: 60 horas	
Natureza: Optativa	
Pré-Requisitos: Não há	
<p>Ementa: Esta disciplina aborda a construção dos números complexos a partir da insuficiência do conjunto dos números reais em determinar as raízes de equações com radicais negativos, aprofundando a discussão com o estudo da teoria das equações e a noção de função complexa. Com base no aprendizado das ideias basilares de variáveis complexas, o processo histórico de emergência dos números complexos é trazido a discussão com o objetivo de que os estudantes entendem a necessidade que gerou a ampliação do conjunto dos números reais e com objetivo de produzir uma comparação entre esse processo e a apresentação atual no ensino.</p>	
<p>Bibliografia Básica:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1- ÁVILA, G. Variáveis Complexas e Aplicações. Rio de Janeiro: LTC, 1990. 2- CARAÇA, Bento J. Conceitos Fundamentais da Matemática. 7. ed. Lisboa: Gradiva, 2010. 3- DOMINGUES, H.H. Síntese da História das Equações algébricas. São José do Rio Preto, SP: Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM-SP, 2000. 	
<p>Bibliografia Complementar:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1- CARMO, Manfredo P. et al. Trigonometria e números complexos. Rio de Janeiro: SBM, 1992. 2- CHURCHILL, R.V. Variáveis Complexas e suas Aplicações. São Paulo: Mc Graw Hill, 2001. 3- FERNANDEZ, C.S.; BERNARDES JR., N. Introdução às funções de uma variável complexa. SBM, Rio de Janeiro, Brasil, 2006. 4- GARBI, Gilberto G. O romance das Equações Algébricas. São Paulo: Makron Books, 1997. 	

5- ZIL D. G., et al., **Curso introdutório à análise complexa com aplicações**, 2. ed., Rio de Janeiro: LTC, 2011.

Fonte: PPC 2020 – Licenciatura em Matemática do IF Sudeste MG – campus Santos Dumont

Inferimos que uma disciplina com ementa mais aberta seja mais interessante a discentes e docentes, que na maioria das vezes têm um tempo escasso para trabalhar o assunto já fixado na ementa. A quantidade extensa de coisas a serem tratadas a partir de uma ementa, junto com o tempo reduzido podem ser pontos de escolha, por parte do docente para um ensino tradicional. Nesse sentido propusemos trabalhar com uma ementa do nosso ponto de vista mais aberta, com mais tempo e com uma metodologia diferente da tradicional.

Aqui é importante destacarmos que, o fato de termos adotado uma proposta metodológica, não significa que a defendemos como algo permanente (como um produto), visto que: (1) na perspectiva do MCS, em um processo de análise de produção de significado e em sua leitura, o interesse se destina à leitura do processo e não na permanência (no produto); (2) uma proposta metodológica é entendida por nós como um objeto e, na perspectiva vigotskiana, segundo Lins (1993), um objeto é secundário em relação ao sujeito e ao outro.

As referências bibliográficas em disciplinas que envolvem o assunto Variáveis Complexas são parecidas, a maioria dos livros utilizados nas referências bibliográficas é conteudista, assim como a maioria dos livros de Cálculo, Álgebra Linear, EDO, dentre outros. A questão é que é difícil encontrar livros sobre o assunto voltada à Licenciatura em Matemática. Com o propósito de facultarmos uma possível leitura mais abrangente, seguem as referências mais usadas nos cursos que foram citados no Quadro 1:

Quadro 3 - Bibliografia das disciplinas do Quadro 1 que foram citadas mais de uma vez.

Livros	Instituições	Básica (B)/Complemen.(C)
AHLFORS, L.V. Complex analysis;	UFV - IF/JF	C - C
ÁVILA, G. Variáveis Complexas e Aplicações.	UFJF - IF/SD - IF/RP	B - B - B
ÁVILA, G.S.S. Funções de uma variável complexa	UFV - IF/JF	B - B
CARMO, M. P.; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. Trigonometria e Números Complexos.	UFJF - UFV - IF/JF - IF/SD - IF/SD - IF/RP	C - B - B - B - B - B
CHURCHILL, R. V. Variáveis Complexas e suas Aplicações.	UFJF - UFV - IF/JF - IF/SD - IF/RP	B - B - B - C - B

FERNANDEZ, C. S.; BERNARDES JR., N. C. Introdução às Funções de uma Variável Complexa	UFJF - IF/SD - IF/RP	B - C - C
GARBI, G. G. O romance das equações algébricas	IF/JF - IF/SD	C - C
IEZZI, G. Fundamentos da Matemática Elementar, Complexos, Polinômios, Equações	UFV - IF/JF - IF/SD - IF/RP	B - B - B - B
IEZZI, G. Fundamentos da Matemática Elementar, Trigonometria.	UFV - IF/SD - IF/RP	B - B - B
LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. A Matemática do Ensino Médio , vol. 3	UFV - IF/JF - IF/SD	C - B - C
LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. A Matemática do Ensino Médio , vol 1	UFV - IF/JF - IF/SD	C - C - C
MEDEIROS, L.A.J. Introdução às funções complexas	UFV - IF/JF	C - B
SOARES, M. G. Cálculo em uma Variável Complexa	UFJF - UFV - IF/JF - IF/RP	C - B - C - C
SPIEGEL, M. R. Variáveis Complexas . São Paulo: McGraw-Hill	UFJF - UFV - IF/JF	C - B - C

Fonte: Criado pelo autor

Fazendo um levantamento, temos que as obras mais usadas são: Churchill (2001 [1960]), Ávila (1996 [1990]), Soares (2003 [1999]), Iezzi (2013 [1983]) e Carmo (2005 [1992]), ou seja, são obras do século passado que abordam objetos relativos a Variáveis Complexas. Com base nas referências citadas, não encontramos nenhuma obra que trabalhe com as Variáveis Complexas para Licenciatura em Matemática e poucos que abordem a História dos números complexos.

Para a construção das fichas de trabalho que utilizamos em nossa pesquisa, também usamos alguns livros citados anteriormente. Porém, tomamos o cuidado de não deixar as fichas parecidas com os livros, procurando construir um material voltado para a Licenciatura em Matemática que desse espaço ao diálogo e à produção de significados relativos aos temas abordados. Sendo assim, toda a construção foi pensada através do nosso referencial teórico.

No capítulo seguinte apresentaremos a revisão da Literatura.

3 REVISÃO DA LITERATURA

Neste capítulo, exploramos a literatura consultada durante nossa pesquisa, a qual incluiu o acervo da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), bancos de teses e dissertações na área de Educação Matemática disponíveis nos sites de Programas de Pós-graduação, bem como o acervo digital da Sigma-t - a Rede de Pesquisa e Desenvolvimento em Educação Matemática a qual estamos filiados.

Encontramos desafios ao criar nossa *string* de busca na BDTD. Nossa intenção era encontrar trabalhos que explorassem o ensino de variáveis complexas no contexto da formação de futuros professores. Tentamos diversas combinações, como "Formação Matemática" e "Variáveis Complexas" e "Licenciatura em Matemática", mas não obtivemos nenhum resultado.

Retomamos então os objetivos deste trabalho. O foco não deveria estar primariamente no conteúdo de variáveis complexas, mas sim na formação, também matemática, de licenciandos.

Além disso, nosso referencial teórico - o Modelo dos Campos Semânticos - precisava ser um norteador de busca por trabalhos que fossem compatíveis com nossos pressupostos. Assim novas *strings* foram criadas, e dessa vez retornando pesquisas que de muito nos auxiliaram nessa caminhada, e foi ela “‘Formação de professores’ e ‘Modelo dos Campos Semânticos’ e ‘Cálculo’” ou apenas ‘Formação de Professores’ e ‘Ensino de Cálculo’. Colocamos o conteúdo de cálculo apenas por ser um conteúdo que também é trabalhado na licenciatura e por ser um assunto que normalmente existem mais trabalhos.

Quadro 4 - Trabalhos provenientes da pesquisa em banco de teses e dissertações

Título do Trabalho	Autor	Trabalho - Ano
Um olhar sobre as idéias matemáticas em um curso de cálculo: a produção de significados para a continuidade	Barto, Maria Cecília Arena Lopes	Dissertação, 2004
Delineando uma pesquisa: legitimidades para a disciplina de cálculo na formação do professor de matemática	Laís Cristina Viel Gereti	Tese, 2018
Uma abordagem didático-pedagógica do cálculo diferencial e integral I na formação de professores de matemática	Diogo, Maria das Graças Viana de Sousa	Tese, 2015
As contribuições dos mapas conceituais para a (re)significação de conceitos em cálculo diferencial e integral I na formação docente	Santos, Luan Danilo Silva dos	Dissertação, 2019

A importância do cálculo diferencial e integral para a formação do professor de matemática da educação básica	Alessio, Amanda	Dissertação, 2019
O comprometimento do estudante e a aprendizagem em cálculo diferencial e integral I	Santos, Guilherme Mendes Tomaz dos	Dissertação, 2014
Um estudo das atividades propostas em um curso de licenciatura em matemática, na disciplina de introdução ao cálculo diferencial e integral, na modalidade a distância	Alves, Antonio Fernando Silveira	Dissertação, 2011

Fonte: Criado pelo autor

Com esse formato de busca, tivemos como resultado 6 trabalhos, dos quais duas pesquisas foram selecionadas como constituintes da revisão de literatura de nossa pesquisa. Elas não tratavam diretamente sobre variáveis complexas, mas versavam sobre ensino de matemática acadêmica na formação de professores.

A dissertação intitulada *Um olhar sobre as ideias matemáticas em um curso de cálculo: a produção de significados para a continuidade* de Barto (2004), que teve como objetivo investigar a dinâmica da produção de significados para a continuidade de funções de uma variável real.

A pesquisa de Barto (2004) trata-se de uma pesquisa qualitativa, do tipo estudo de caso e foi realizada em uma universidade de São Paulo, envolvendo dez alunos e a professora de um curso de Pós-graduação em Educação Matemática. A coleta de dados incluiu filmagens, anotações da pesquisadora, trabalhos escritos pelos alunos e entrevistas. Barto cita que

Este estudo permitiu observar e entender um pouco mais como alunos utilizam suas experiências cotidianas, impregnadas e às vezes inconscientes, para produzir significados para conceitos abstratos da Matemática (Barto, 2004, n.p).

A nossa proposta de trabalho se assemelha com a de Barto, no sentido de se tratar de uma pesquisa qualitativa, de se relacionar um conteúdo de matemática que normalmente é abordado no ensino superior e que esses alunos do curso eram professores de matemática.

E a segunda pesquisa, uma tese, intitulada *Delineando uma pesquisa: legitimidades para a disciplina de cálculo na formação do professor de matemática* de Gereti (2018), que teve como objetivo produzir uma discussão a respeito da legitimidade da disciplina de Cálculo na formação inicial de professores de matemática.

O trabalho de Gereti (2018) apresenta um levantamento de pesquisas acerca do Cálculo para Licenciatura em Matemática, entrevistas com professores formadores e da educação básica e discussões sobre o currículo e a formação matemática de professores de matemática. Ainda sobre o currículo, o pesquisador, afirma que o

[...] currículo do curso de Licenciatura em Matemática foi e é pensado por grupos que têm considerado algumas disciplinas como legítimas para se formar o professor da Educação Básica. Apesar de muitas mudanças que vêm ocorrendo no currículo, as disciplinas “tradicionais” são mantidas, como o Cálculo Diferencial e Integral (e todas as demais relacionadas com ela), porque, na verdade, não se questiona sobre a permanência delas (Gereti, 2018, p.105).

Em nossos estudos também faremos uma análise sobre a importância das disciplinas de matemática no currículo da Licenciatura em Matemática e para formação matemática dos futuros professores de matemática.

Ainda procurando por trabalhos que envolvessem as variáveis complexas voltadas ao ensino, com a seguinte *string* “Variáveis Complexas” e “Ensino” e “Aprendizagem”, na BDTD encontramos alguns trabalhos, mas apenas um estava dentro do assunto:

Encontramos uma dissertação intitulada *Números complexos e funções de variável complexa no ensino médio: uma proposta didática com uso de objeto de aprendizagem* (Monzon, 2012). O objetivo deste trabalho foi apresentar uma proposta didática para o ensino de Números Complexos e Funções de Variável Complexa, utilizando um objeto de aprendizagem.

A proposta de Monzon (2012) foi implementada em um terceiro ano do Ensino Médio e teve como objetivo, “[...] aprimorar o ensino de números complexos dentro do ensino médio” (Monzon, 2012, p.17). Apenas o início do trabalho de Monzon (2012) que se assemelha com a nossa proposta usada na primeira parte da disciplina de Introdução às Variáveis Complexas para Licenciatura, como por exemplo o contexto histórico que explica a necessidade da criação dos números complexos. Em seguida o autor utiliza as tecnologias como recurso para a aprendizagem e como ferramenta motivacional para os alunos.

Continuando nossa busca, fizemos uma consulta em bancos de dissertações defendidas no acervo do Mestrado Profissional em Educação Matemática da UFJF e no Sigma-t, na qual não encontramos nenhum trabalho com o tema que pretendemos pesquisar usando o Modelo dos Campos Semânticos. Todavia, três trabalhos se destacaram pela natureza da proposta, que foram:

Quadro 5 - Trabalhos provenientes da pesquisa no acervo do Mestrado em Educação Matemática da UFJF

Título do Trabalho	Autor	Trabalho - Ano
Álgebra linear como um curso de serviço para a licenciatura em matemática: o estudo dos espaços vetoriais	Alves, Aretha Fontes	Dissertação, 2013
Álgebra linear como um curso de serviço: o estudo das transformações lineares	Almeida, Vitor Rezende	Dissertação, 2013
Geometria como um curso de serviço para a licenciatura em Matemática: uma leitura da perspectiva do modelo dos campos semânticos	Procopio, Ricardo Bevilaqua	Dissertação, 2011

Fonte: Criada pelo autor

Assim como nos trabalhos de Alves (2013) e Almeida (2013), nossa proposta de pesquisa foi dividida em duas partes: a primeira voltada para o Ensino dos Números Complexos na Licenciatura e foi realizada pela professora Lectícia Sobreiro Rezende de Souza, outra orientanda do professor Amarildo Melchiades da Silva. Já a segunda parte, voltada ao ensino de funções complexas para Licenciatura, sendo importante destacar que as duas propostas de trabalho foram realizadas na mesma disciplina, Introdução às Variáveis Complexas para Licenciatura no curso de Matemática. Sendo assim, temos que o nosso trabalho acontece de forma complementar ao trabalho da professora Lectícia, ajudando em uma proposta comum, ou seja, apresentando o Ensino das Variáveis Complexas depois do Ensino dos Números Complexos para Licenciatura em Matemática, de forma diferente da tradicional, utilizando o Modelo e fichas de trabalho.

As dissertações de Almeida (2013), Alves (2013) e Procopio (2011), com abordagens também qualitativas, se aproximam em diversos aspectos por estarem inseridas em um mesmo grande projeto, com finalidade em aprofundar o estudo entre os processos de ensino e aprendizagem em disciplinas do Ensino Superior e a formação matemática do licenciando em Matemática. O referencial teórico em comum dos três trabalhos e o Modelo dos Campos Semânticos, mas o tópico matemático em foco nos estudos se diferencia: Almeida (2013) trata de Transformações Lineares, Alves (2013) discute Espaços Vetoriais e Procópio (2011) se dedica a tópicos de Geometria Plana e Espacial.

O objetivo dessas dissertações consistia em mapear as características das disciplinas da Licenciatura em Matemática, cada uma voltada para um tópico específico, de forma que essas disciplinas desempenhassem o papel de Curso de Serviço.

Sobre o termo "Curso de Serviço", é pertinente mencionar que ele "surgiu para denominar as disciplinas voltadas para a formação em uma área específica" (Almeida, 2013, p. 2). Entretanto, é fundamental esclarecer que, no contexto da Educação Matemática, a "proposta direcionada a Cursos de Serviço está voltada às disciplinas de conteúdo específico das Licenciaturas em Matemática e, como consequência, para a formação inicial do Professor de Matemática" (Procopio, 2011, p. 20).

Por serem disciplinas de conteúdo matemático voltadas para a formação inicial, caracterizam-se por serem disciplinas "que também se preocupam com a formação didática e pedagógica do futuro professor de Matemática" (Almeida, 2013, p. 2).

As leituras realizadas ressaltam a importância de pesquisar o que nos propomos. Muitos são os conteúdos matemáticos ditos como puros e acadêmicos, pertencentes ao considerado matemático. Quanto mais esses conteúdos são discutidos em perspectivas além da tradicional teórica/axiomática, mais rica pode ser a experiência tanto do aluno quanto do professor.

Por fim, conduzimos uma busca na plataforma que nos permitisse entrar em contato direto com as publicações de autores que utilizam o Modelo dos Campos Semânticos como referencial teórico e/ou metodológico. A Rede de Pesquisa e Desenvolvimento em Educação Matemática – Rede Sigma-t é uma rede de pesquisa, constituída pesquisadores e professores com interesse no Modelo dos Campos Semânticos.

Ao explorarmos o acervo digital de teses e dissertações, e ao restringirmos nossa busca aos trabalhos orientados pelo próprio Romulo Lins, identificamos dois trabalhos que se relacionam com nossa pesquisa:

Quadro 6 - Trabalhos provenientes da pesquisa na rede Sigma-t

Título do Trabalho	Autor	Trabalho - Ano
Sobre a produção de significados para a noção de transformação linear em álgebra linear.	Oliveira, Viviane Cristina Almada de	Dissertação, 2002
Cálculo diferencial e integral: uma abordagem epistemológica de alguns aspectos	SAD, Lígia Arantes.	Tese, 1998

Fonte: Criado pelo Autor

Oliveira (2002), apresenta sua leitura da produção de significados de alunos de uma Licenciatura em Matemática em relação às transformações lineares, e mesmo investigando sobre transformações lineares, Oliveira aponta que com sua pesquisa poderá, também, subsidiar discussões mais amplas sobre a formação inicial do professor de Matemática, como o queremos.

Além dessa leitura, Oliveira realizou um estudo histórico juntamente com uma análise de livros didáticos, com a intenção de verificar como influenciaram e influenciam os significados produzidos para a ideia de transformação linear em Álgebra Linear.

Sad (1999) trabalha com investigações centradas na produção de conhecimento a partir do Cálculo. A pesquisa de Sad está ligada ao ensino e aprendizagem de Cálculo com bases epistemológicas, e tem como motivo principal as experiências vividas em termos de sala de aula. Uma das preocupações citadas em (Sad, 1999) é na contribuição ‘para a compreensão do desenvolvimento do pensamento diferencial e integral do estudante em meio às atividades pertinentes ao Cálculo’.

As discussões apresentadas nessas duas dissertações foram fundamentais para elucidar termos do Modelo dos Campos Semânticos ao longo de minha pesquisa, desde a compreensão dos fundamentos teóricos até a aplicação prática desses conceitos na análise proposta. Além disso, as leituras realizadas indicam a necessidade de investigar e buscar novas alternativas para trabalhar com conteúdos matemáticos, que são frequentemente considerados puros e acadêmicos, pertencentes ao matemático. Abordá-los sob perspectivas além da abordagem teórica/axiomática tradicional pode enriquecer significativamente a experiência de estudantes e professores.

4

O REFERENCIAL TEÓRICO E O PROBLEMA DE PESQUISA

Neste capítulo, apresentamos inicialmente o referencial teórico que fundamentou nossa pesquisa, isto é, orientará nossa proposta de elaboração de uma sequência de ensino com vista à aprendizagem da noção de função de variáveis complexas. Em seguida, na segunda seção, apresentaremos o problema de pesquisa e a proposta do produto educacional, como consequência do nosso desenvolvimento de projeto.

4.1 O Modelo dos Campos Semânticos

Em nossa investigação tomaremos como referencial teórico-epistemológico o Modelo dos Campos Semânticos, elaborado pelo professor e pesquisador Romulo Campos Lins a partir do ano de 1993; um ano após a sua defesa da tese de doutorado intitulada *A Framework For Understanding What Algebraic Thinking Is*.

O MCS trata-se de um modelo epistemológico, pautado nas noções de conhecimento, significado e campo semântico, inspirado nas pesquisas de Lev Semionovitch Vigotski (1896-1934), Alexis Nikolaevich Leontiev (1903-1979), Vasily Vasilovich Davydov (1930-1998), Nelson Goodman (1906-1998), dentre outros.

Passemos então a descrever as principais noções constitutivas do MCS que utilizamos em nossa pesquisa, a saber: as noções de significado, produção de significados, conhecimento, produção de conhecimento, processo comunicativo e campo semântico.

Para Lins, significado é tudo que o sujeito da enunciação pode e efetivamente diz sobre algo em uma determinada atividade (no sentido proposto por Leontiev);

Segundo Silva (2022) a noção de atividade, proposta por Leontiev:

É um processo psicológico consciente do sujeito e, portanto, uma atividade interna em que as seguintes condições devem ser satisfeitas: (i) Surge de uma necessidade; (ii) Existe por parte do sujeito, um objetivo preciso que o estimula a executar a atividade para satisfazer uma necessidade determinada, denominada o motivo da atividade; (iii) Motivo e fim devem coincidir na atividade (Silva, 2022, p. 77)

Lins (1999) ao comentar sobre a sua formulação de significado observa:

[...] o significado de algo é aquilo que digo deste algo. *Grosso modo*, significado, para mim, é o que a coisa é. Mas este é não se refere a uma essência da coisa. Talvez isto fique mais claro com a seguinte formulação: os objetos são constituídos enquanto tal precisamente pela produção de significados para eles. Não se trata de ali estão os objetos e aqui estou eu, para a partir daí eu descobrir seus significados; ao contrário, eu me constituo

enquanto ser cognitivo através da produção de significados que realizo, ao mesmo tempo em que constituo objetos através destas enunciações (Lins, 1999, p. 86).

No MCS a produção de significados é o centro da aprendizagem pois, é através da análise da produção de significados, das ações enunciativas dos alunos, que podemos perceber como está acontecendo a produção de conhecimento, ou seja, “[...] ensinar é sugerir modos de produção de significados e aprender é internalizar modos legítimos de produção de significados” (Lins, 2008, p. 543)

Como parte do processo de produção de significados o MCS considera o processo de produção de conhecimento no seguinte sentido: o conhecimento é algo do domínio da enunciação, ou seja, conhecer algo faz com que as pessoas sejam capazes de falar sobre determinado assunto. Procurando responder “o que é conhecimento?” Lins (1993) propõe uma formulação essencial do MCS:

conhecimento é entendido como uma crença – algo em que o sujeito acredita e expressa, e que caracteriza-se, portanto, como uma afirmação – junto com o que o sujeito considera ser uma justificação para sua crença afirmação (Lins, 1993, p.86).

Ou seja, primeiro o sujeito precisa acreditar em algo, e a maneira dele demonstrar essa crença por meio de uma enunciação e afirmando-a. Crença, afirmação e justificação são elementos constituintes do conhecimento, só produzido quando acreditado, afirmado e justificado. Para Lins “um conhecimento não é nem mais, nem menos, que isto. Existe em sua enunciação e deixa de existir quando ela termina” (Lins, 2012); já a justificação, não é uma justificativa ou uma explicação para o que um sujeito diz, mas sim, aquilo em que o sujeito acredita que o autoriza a dizer o que diz. Para o MCS, produzir significado é exatamente “falar” a respeito de “algo”, em que o verbo “falar” a respeito de “algo” seria equivalente a produções ações enunciativas, e “algo” seria um objeto interno a determinada atividade.

Na prática letiva, entender o que o aluno está falando não é uma tarefa simples. Quando um aluno fala algo que consideramos estar “correto”, na maioria das vezes, simplesmente aceitamos e continuamos com nossas aulas; mas quando um aluno fala algo que não compartilhava um mesmo espaço comunicativo, que o nosso ou que consideramos “não estar correto”, normalmente corrigimos sem tentar entender como ele chegou naquele pensamento. O espaço comunicativo, é quando o autor (sujeito que produz a enunciação) e leitor possuem os mesmos modos de produção de significados (interlocutores).

O processo comunicativo proposto por Lins possui três elementos constitutivos: autor, texto e leitor.

O autor é aquele que, nesse processo, produz a enunciação: um professor em uma aula expositivo-explicativa, um artista plástico expondo seus trabalhos ou um escritor apresentando sua obra. O leitor é aquele que, ainda nesse processo, se propõe a produzir significados para os resíduos das enunciações como, por exemplo, o aluno que, assistindo a aula, busca entender o que o professor diz, o crítico de arte que analisa a obra de um artista plástico ou uma pessoa que leia um romance buscando entender a história do autor. Já o texto, é entendido como qualquer resíduo de enunciação para o qual o leitor produza algum significado (Silva; Oliveira; Almeida, 2022, p. 103).

Como caracterizar e entender o que os alunos estavam pensando quando “erravam”, sem um julgamento de estar “certo” ou “errado”, foi o ponto de partida para o desenvolvimento da nossa pesquisa em sala de aula e, para isso, usamos o referencial teórico Modelo dos Campos Semânticos (MCS), que partiu dessa mesma pressuposição em sua elaboração pelo educador matemático.

Portanto, o processo comunicativo nos permite observar o processo de interação comunicativa entre duas pessoas quando, por exemplo, autor e leitor estão produzindo significados na mesma direção, ou seja, no compartilhamento de um espaço comunicativo ou quando isto não está ocorrendo. Por isso, em nosso estudo, nosso olhar se dirige a este processo como proposto pelo MCS e não a partir da chamada transmissão de conhecimento presente no ensino tradicional.

Segundo o MCS, “o núcleo de um campo semântico é constituído por estipulações locais, que são, localmente, verdades absolutas, que não requerem, localmente, justificação”. (Lins, 2012, p.26).

Para articular os processos de produção de conhecimento e a produção de significados temos a noção de campo semântico. Lins denotou a noção de campo semântico como sendo “um processo de produção de significado, em relação a um núcleo, no interior de uma atividade” (Lins, 2012, p.17).

Por fim, o MCS nos sugere que é crucial que o professor adote uma postura atenta e receptiva para identificar as dificuldades que surgem durante as atividades propostas, sejam elas obstáculos específicos ou limitações epistemológicas. Mais uma vez, o papel do docente não é julgar, mas sim mediar, apresentando alternativas de abordagem diferentes daquelas que o aluno está empregando.

Por meio das noções gerais descritas e de outras mais internas a teoria, reunimos ferramentas desde a criação de nosso material didático até a análise dos resíduos de enunciação que obtivemos na aplicação de nosso produto educacional.

Ao longo do nosso trabalho, vamos apresentar como as principais noções constitutivas do MCS serão utilizadas em nossa pesquisa, por exemplo, temos que a análise de produção de significados fornece uma maneira dos professores com seus alunos, realizarem uma leitura do que os alunos estão dizendo e fazendo. Dessa forma, as atividades nas fichas de trabalhos que propusemos e desenvolvemos voltaram-se à aprendizagem e, conseqüentemente, à produção de significado.

Pensamos que, entender como ocorre a produção de significados do aluno ao que lhe é proposto vem a ser o foco principal de qualquer professor. Desta forma, pensamos que o foco em um conteúdo programático, dirigido “[...] uma educação PARA A Matemática” (Lins, 2020, p. 15) e não vislumbrando “[...] uma educação PELA Matemática” (*Ibid*, p. 15), “esconde” particularidades de processos de produção de significados que acontecem em sala de aula; sendo assim, elaboramos fichas de trabalhos para apresentação das funções complexas, de modo que o aluno oportunizasse participar de uma metodologia diferente das que vivenciou até o presente momento e que possamos identificar em suas falas o que eles produziram de significados sobre os conceitos abordados, na tentativa de estimular a produção de conhecimento desses alunos.

4.2 O Problema de Pesquisa e o Produto Educacional

A presente pesquisa foi motivada pela nossa vivência na realidade da sala de aula de um instituto federal ministrando aulas numa Licenciatura em Matemática, onde o desinteresse dos alunos pelo curso, suas dificuldades de aprendizagem fruto de uma formação deficiente, a evasão para iniciar no mundo do trabalho e a retenção nas disciplinas de matemática do ensino superior se tornaram cada vez mais comuns. Sabemos que mudar essa realidade é um desafio, e para nós, educadores preocupados com os processos de ensino e aprendizagem, é importante refletir sobre esses problemas e como podemos ajudar nesse processo. Acreditamos que, por meio da introdução de materiais e metodologias alternativas, podemos explorar novas possibilidades para o ensino superior, especificamente nas disciplinas de matemática, e, quem sabe, contribuir para uma mudança no futuro próximo.

Portanto, nosso problema de pesquisa consiste em desenvolver um conjunto de tarefas fundamentadas teoricamente, que introduzam as funções complexas no contexto da sala de aula de matemática, juntamente com uma proposta metodológica escolar diferente da aula exclusivamente expositiva/explicativa, incentivando os futuros professores a pensarem em novas metodologias para suas futuras aulas.

Assim, a proposta de investigação é fundamentada nas premissas do MCS com o objetivo de mudar o *status quo* no ensino de Licenciatura de modo que em relação aos discentes, pretendemos com a proposição das tarefas:

- (i) Dar voz aos alunos de modo que o professor possa identificar de que “lugar” eles dizem o que dizem e operam;
- (ii) Estimular a interação entre eles de modo que a cooperação aconteça na busca por aprendizagem do assunto em discussão;
- (iii) Estimular a interação entre os alunos e o professor de modo que o docente, a partir das ações enunciativas dos estudantes possa intervir em suas dificuldades de aprendizagem (obstáculos e limites epistemológicos).

Com relação à disciplina, ela será elaborada a partir das tarefas propostas de modo que:

- a) Aconteça uma diminuição de aulas expositivas e explicativas em que o professor é o único detentor do conhecimento e o aluno é um receptor passivo dos conteúdos que lhe são apresentados;
- b) Fichas de trabalho, contendo as tarefas, possibilitam que, frente a novas noções e ideias matemáticas, os alunos possam se debruçar sobre elas e iniciar, cada um, seu processo de produção de significados e que a discussão seja estimulada a partir daquela tarefa;
- c) Inspirado na proposta de metodologia de ensino denominada Assimilação Solidária proposta pelos Cabraldinos², minimizar o valor da prova escrita como única forma de avaliação, incluindo o trabalho produtivo em sala de aula também como elemento constitutivo da avaliação.

Dado que nossa pesquisa está inserida em um Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, direcionamos nossa atenção para dois projetos complementares: o projeto de pesquisa, que consiste na elaboração da dissertação de mestrado e o produto educacional, que no nosso caso é a elaboração de um conjunto de fichas de trabalho com tarefas cujo objetivo é introduzir o estudante de licenciatura no estudo de funções complexas em uma

² Roberto Ribeiro Baldino e Tânia Cristina Baptista Cabral se autodenominaram *Os Cabraldinos*, termo que usaremos quando fizermos menção ao trabalho que desenvolvem em conjunto.

turma de Licenciatura em Matemática cuja finalidade é que os estudantes aprendam a matemática em discussão.

5

METODOLOGIA DE PESQUISA

Neste capítulo, dividido em quatro seções, apresentaremos inicialmente a caracterização da pesquisa utilizada em nosso processo de investigação. Em seguida na segunda seção, apresentaremos a caracterização do curso. Já na terceira seção, trabalharemos com a leitura epistemológica das ações iniciativas dos estudantes. Por fim, na quarta seção apresentaremos um conjunto de tarefas que foram desenvolvidas e utilizadas em nosso processo investigativo.

5.1 Caracterização da Pesquisa

Esta pesquisa caracteriza-se por uma abordagem qualitativa de investigação. Para entendermos melhor como funciona essa abordagem, vejamos sua caracterização de acordo com Bogdan e Biklen:

I) Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal. II) A investigação qualitativa é descritiva. Os dados recolhidos são em forma de palavras ou imagens e não de números. III) Os investigadores interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos. IV) Os investigadores tendem a analisar os seus dados de forma indutiva. Não recolhem dados ou provas com o objetivo de confirmar ou infirmar hipóteses construídas previamente. V) O significado é de importância vital na abordagem qualitativa. Os investigadores que fazem uso deste tipo de abordagem estão interessados no modo como diferentes pessoas dão sentido às suas vidas (Bogdan; Biklen, 2013, p. 47-51).

Na abordagem qualitativa optamos pela pesquisa de campo como caminho para validar nosso produto educacional a partir da análise das potencialidades das tarefas para uso dos professores em sala de aula.

Em relação ao ambiente em que foi realizada a pesquisa, temos que a instituição de ensino é situada na Zona da Mata Mineira. Sendo mais específico, a pesquisa foi realizada na disciplina de Introdução às Variáveis Complexas para a Licenciatura, no 7º período do curso Licenciatura em Matemática de um Instituto Federal. Os desdobramentos dessas etapas serão apresentados nas seções seguintes.

5.2 Design da disciplina

Nossa preocupação com a formação matemática do futuro docente de Matemática, em relação às disciplinas consideradas de matemática pura, em particular a disciplina intitulada

Variáveis Complexas, e pelos motivos apresentados no texto, nos fez escolher a disciplina de Introdução às Variáveis Complexas para o nosso objeto de pesquisa. Esta disciplina foi ministrada pelo professor Tiago de Oliveira e observada pela professora Leticia Sobreiro Rezende de Souza, como parte de sua pesquisa de campo no que diz respeito à primeira parte da ementa destinada aos números complexos.

A disciplina Introdução às Variáveis Complexas para Licenciatura é uma disciplina optativa para o curso de Licenciatura em Matemática na IES escolhida para o estudo e foi oferecida no primeiro semestre de 2021, primeiro período presencial após período de isolamento devido à Covid-19. Na criação desta disciplina, os docentes envolvidos colocaram os seguintes objetivos a serem cumpridos:

- *Ampliar os modos de produção de significados dos alunos sobre números complexos a partir da geração de situações problemas;*
- *Desenvolver uma leitura dos números complexos a partir de uma perspectiva histórica e de problemas geradores observando as transformações ocorridas até se chegar a ser objeto de ensino;*
- *Experenciar a construção de um conjunto dos números complexos em comparação com o conjunto dos números reais avaliando as perdas e os ganhos obtidos com a expansão efetivada.*
- *Introduzir o estudante na ampliação da noção de função do plano real para o plano complexo.*
- *Exercitar a escrita do texto matemático a partir da possibilidade de produzir definições, teoremas e justificações para as proposições (demonstrações, por exemplo).*

A disciplina em questão foi criada para que o professores que fossem lecionar, pudessem fazer um trabalho diferente do tradicional, sendo assim sua ementa foi construída de forma aberta, dando liberdade para o professor trabalhar da forma que achasse melhor.

Quadro 7 - Ementa: Introdução às Variáveis Complexas para Licenciatura

Ementa
Esta disciplina aborda a construção dos números complexos a partir da insuficiência do conjunto dos números reais em determinar as raízes de equações com radicais negativos, aprofundando a discussão com o estudo da teoria das equações e a noção de função complexa. Com base no aprendizado das ideias basilares de variáveis complexas, o processo

histórico de emergência dos números complexos é trazido a discussão com o objetivo de que os estudantes entendam a necessidade que gerou a ampliação do conjunto dos números reais e com objetivo de produzir uma comparação entre esse processo e a apresentação atual no ensino.

Fonte: PPC da Licenciatura em Matemática – IF Sudeste MG – Campus Santos Dumont

Desta forma, a disciplina foi dividida em duas partes. Na primeira parte foram trabalhados os Números Complexos e na segunda as Funções Complexas. Para as duas partes foram criadas as fichas de trabalhos e aplicadas aos alunos.

No início do curso foi aplicado um termo de compromisso para os discentes assinarem e informado que as discussões e os possíveis resultados seriam publicados posteriormente. Em relação aos discentes, foram 09 alunos matriculados e eles podiam escolher os nomes que seriam usados na pesquisa ou manter os próprios nomes, sendo assim tivemos os seguintes pseudônimos: Malu, Lero, Manoel, Jota, Juliana, Doronice, Nyna, Cristina e Sandora. Para exemplificar os dados dos alunos, temos a seguinte tabela:

Quadro 8 - Pseudônimos dos discentes

Nomes	Período que se encontrava no curso	Idade
Cristina	7ºP – 2ª turma do curso	22 anos
Doronice	7ºP – 2ª turma do curso	36 anos
Jota	1ª turma do curso	25 anos
Juliana	7ºP – 2ª turma do curso	44 anos
Lero	7ºP – 2ª turma do curso	45 anos
Malu	7ºP – 2ª turma do curso	23 anos
Manoel	7ºP – 2ª turma do curso	29 anos
Nyna	7ºP – 2ª turma do curso	41 anos
Sandora	7ºP – 2ª turma do curso	32 anos

Fonte: Autor

Uma observação é que praticamente todos os discentes matriculados já tinham feito uma disciplina (Trigonometria e Números Complexos) no início do curso que trabalhava com o conteúdo de números complexos.

Os alunos na disciplina de Introdução as Variáveis Complexas para Licenciatura foram avaliados de acordo com as fichas de trabalhos e discussões em sala, os alunos que respondiam

as fichas e participavam das discussões ganhavam os pontos referentes ao encontro. Ao todo foram aplicadas seis fichas na primeira parte do curso e duas na segunda parte, muitas dessas fichas foram divididas em dois ou três encontros. As fichas foram aplicadas em quatorze encontros, tendo 0,75 ponto em cada encontro, assim totalizando 10,5 pontos. Nossa preocupação não era saber se o aluno resolvera errado ou certo, mas sim aprofundar nas discussões e refinar nosso olhar a respeito de possíveis contribuições da disciplina de Variáveis Complexas à prática profissional desses professores e para um pensamento alternativo em outras metodologias de ensino.

Na próxima seção apresentaremos a análise da produção de significados dos participantes da pesquisa a respeito das tarefas aplicadas.

5.3 Leitura Epistemológica das Ações Enunciativas dos Estudantes.

Realizar uma leitura após a produção de significados dos estudantes é uma ação importante que será realizada ao final de cada tarefa. Para entendermos como será feita essa análise ou leitura epistemológica precisamos falar das noções-categorias. Segundo Silva (2022):

No momento em que um estudante se propõe a produzir significados para o problema proposto (entendido como gerador da atividade) observamos da perspectiva do MCS o desencadeamento de um processo – o processo de produção de significados – que envolve as seguintes noções-categorias: i) A constituição de objetos – coisas sobre as quais aquele estudante sabe dizer algo e diz. Isto permite ao pesquisador observar tanto novos objetos que estão sendo constituídos quanto os significados produzidos para esses objetos. ii) A constituição e a transformação de um núcleo (processo de nucleação): suas estipulações locais, as operações e suas lógicas associadas ao núcleo; iii) A produção de conhecimento: enunciação de crenças-afirmação e suas respectivas justificações; iv) A fala na direção de um interlocutor; v) As legitimidades, isto é, o que é legítimo ou não dizer (para quem está produzindo significados) no interior daquela atividade (Silva, 2022, p.133)

Percebemos que essa análise/leitura é constituída de várias etapas e que elas serão iniciadas após a produção de significados dos estudantes. Silva ainda comenta que “[...] a partir dos resíduos de enunciação produzidos por ele (o autor da enunciação), desenvolvida com as noções-categorias, é o que designamos, em termos linsianos, de análise ou leitura epistemológica” (Silva, 2022, p. 134).

A lista de elementos apresentadas por Silva, que usualmente é chamada de noções-categorias, não precisa ser apresentada necessariamente na mesma ordem, como ele mesmo comenta: “[...] mas queremos dizer que é o conjunto dessas coisas que estaremos considerando quando estivermos fazendo nossa leitura” (Silva, 2022, p. 134).

Nosso interesse está em identificar os elementos envolvidos na dinâmica da sala de aula entendidos como importantes na formação matemática, metodológica e epistemológica do futuro professor de Matemática. Com isso, queremos sugerir que a disciplina não foi concebida como apenas de conteúdo matemático, como sugere o ensino tradicional.

O interesse está em analisar a produção de significados dos alunos para as tarefas propostas. A avaliação da disciplina foi feita baseada no trabalho produtivo dos alunos em sala de aula, inspirado na proposta de avaliação da metodologia assimilação solidária proposta por Baldino (Silva, 1998), denominado Contrato de Trabalho, em oposição à avaliação exclusiva por provas.

O Contrato de Trabalho é um dos instrumentos integrantes da Assimilação Solidária (AS), tal qual caracteriza-se como proposta interventora na sala de aula, mudando o conceito de mérito, ou seja, instituindo valores que vão além do valor atribuído à competência de conteúdos. Considera-se, nessa abordagem, acoplado ao prêmio ao saber, o justo prêmio ao trabalho coletivo produzido em sala de aula. (Silva, 1998, p. 157)

Utilizar os preceitos da AS para avaliação implica na projeção de uma avaliação por trabalho realizado. Isso significa que a produção ocorrida em sala de aula constitui instrumento avaliativo.

A disciplina foi conduzida a partir de fichas de trabalho constituídas por um conjunto de tarefas que tratam dos temas de interesse de variáveis complexas.

Na próxima seção vamos apresentar como foi a produção das tarefas nas fichas de trabalho.

5.4 A produção das Tarefas

A elaboração das tarefas, que resultaram nas fichas de trabalhos e que constitui no produto educacional foi elaborada com a finalidade de analisar a produção de significados dos participantes. As fichas foram aplicadas durante a pesquisa de campo e tiveram uma proposta baseada na sequência inspirada na metodologia de ensino denominada de *Assimilação Solidária*

elaborada pelos Cabraldinos, sendo referenciadas teoricamente, pois as fichas foram produzidas tendo como base o MCS.

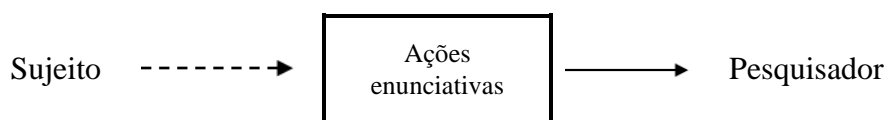
O produto educacional foi formado com quatro fichas de trabalhos, todas envolvendo objetos matemáticos relativos ao tema funções complexas e comporá o nosso produto educacional, porém apenas duas fichas foram aplicadas na turma. Como as discussões gastaram um tempo maior do que o esperado em sala de aula, não nos preocupamos em finalizar todas as fichas.

As fichas de trabalhos desempenhavam o papel de texto básico da disciplina e as tarefas nas fichas foram criadas de forma que fossem: familiares e não-usuais. Segundo Silva (2003) “familiar, no sentido de permitir que as pessoas falem a partir daquele texto e, não-usual, no sentido de que a pessoa tenha que desprender um certo esforço cognitivo na direção de resolvê-lo.” (Silva, 2003, p.41). Ao trabalharmos com as fichas de trabalho, sugerimos um rompimento com a proposta metodológica escolar de aulas exclusivamente expositivas/explicativas.

Além disso, na produção das tarefas teremos em mente o que foi proposto por Silva (2022) que indica que o processo de interação do professor seus alunos tem a tarefa como instrumento de mediação a partir do seguinte esquema:



Ele sugere ainda que no processo de produção de significados do sujeito, o esquema passa a ser como proposto no esquema abaixo (em que a seta seccionada sugere o sujeito da enunciação e, ao passo em que a seta contínua indica o leitor no processo):



Assim, a partir das ações enunciativas do sujeito, tanto o professor quanto o pesquisador desenvolve sua leitura considerando os resíduos de enunciação (fala, gestos, desenhos), que recebe do participante e que é fundamental para entender sua produção de significados.

Tanto para a pesquisa, quanto para a sala de aula Silva (2022) sugere ter as seguintes orientações metodológicas em mente:

- Dar voz aos participantes da pesquisa: a esta altura o leitor já deve ter clareza da importância de dar voz aos participantes da pesquisa. E a tarefa proposta é o instrumento para desencadear o processo de enunciação desses participantes quando buscam explicar a resolução da situação-problema que têm em mãos.
- Estimular a produção de significados e garantir que diferenças, nos modos de produção de significados singulares de cada participante, sejam explicitadas e se tornem objeto de atenção do pesquisador: não se trata de explicitar o diferente, mas trazer à luz a diferença, isto é, não identificar apenas o significado produzido (o produto) mas levar em consideração o processo em curso.
- Desenvolver uma escuta ativa: o pesquisador precisa desenvolver e aprimorar o ato de ler as ações enunciativas do sujeito, na medida do possível, enquanto elas acontecem (ou registrando, por exemplo, em vídeo), buscando identificar a partir das noções-categorias o que emerge das enunciações.
- Realizar uma leitura plausível e/ou positiva da produção de significados dos informantes no sentido que discutimos anteriormente.
- Identificar, se for interesse da investigação, a partir da produção de significados dos sujeitos, evidências que ajudem na análise das dificuldades de aprendizagem (obstáculos e limites epistemológicos) e de possível processo de impermeabilização que possam estar ocorrendo (SILVA, 2022, p. 138).

Com estas ideias em mente, conduzimos metodologicamente a produção das tarefas e consideramos a dinâmica da sala de aula para a discussão do tema funções complexas com os licenciandos.

Para iniciar os trabalhos da segunda parte do curso, que é o nosso foco de pesquisa, foi apresentada a primeira ficha das funções complexas que focou em tarefas relacionadas às funções reais de uma variável real.

Na tarefa 1.1, intitulada "Função real de uma variável real", foi solicitado aos discentes que definissem o que são funções reais de uma variável real. Após discussões entre os alunos e a apresentação de suas definições, o professor apresentou algumas definições de funções reais de uma variável real que são utilizadas em alguns livros.

Dando continuidade na primeira ficha, foi solicitado aos discentes na tarefa 1.2 "Introdução a Funções Complexas": a) Defina uma função $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Como você representaria essa transformação (função)?; b) Dê dois exemplos de funções do tipo $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. c) Defina uma função $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$. Como você representaria essa transformação (função)? Dê dois exemplos de funções do tipo $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$. A primeira ficha de trabalho foi criada com intuito de iniciar os estudos das funções complexas.

Já na segunda ficha de trabalho, Tarefa 2.1 Funções Complexas, foi apresentada a definição de funções complexas seguido de alguns exemplos para os alunos praticarem e para serem discutidos em sala. Exemplo 1) Seja $f(z) = z^2 + 1$. Encontre $u(z) = u(x, y)$ e $v(z) = v(x, y)$. Exemplo 2) Seja $f(z) = 2z^3 - z + i$. Encontre $u(z) = u(x, y)$ e $v(z) = v(x, y)$.

Ainda na mesma ficha, temos um texto que traz reflexões em relação aos gráficos das funções complexas: Dada uma função complexa de variável complexa $f: A \rightarrow \mathbb{C}$, $A \subseteq \mathbb{C}$, definida por $w = f(z)$, podemos trabalhar algebricamente, como vimos nos exemplos anteriores, porém, pensando no gráfico dessas funções, vemos que para representar apenas os valores da variável independente z - que é complexa - precisamos do plano de Gauss (duas dimensões); e assim, para fazer um daqueles gráficos necessitaríamos, no total, de quatro dimensões, o que é simplesmente impossível, pois o espaço físico em que vivemos possui somente três dimensões.

Um recurso para visualizar geometricamente uma função $w = f(z)$ é representar imagens de curvas ou regiões do domínio, que está contido em um plano que identificaremos como plano xy , no contradomínio, que identificaremos como plano uv . Deste modo, a função é considerada como uma “transformação”. Essa ideia de pensar na função complexa de variável complexa como uma transformação entre dois planos é atribuída ao matemático alemão Riemann.

Sendo assim, dada uma função $w = f(z)$, é usual imaginar-se $z = x + yi$ variando em um plano denominado plano dos xy e $w = f(z) = u + vi$ variando em outro plano denominado uv . Tem-se, desta forma, a seguinte visão geométrica de uma aplicação $f: A \rightarrow \mathbb{C}$, $A \subseteq \mathbb{C}$. Exemplo:

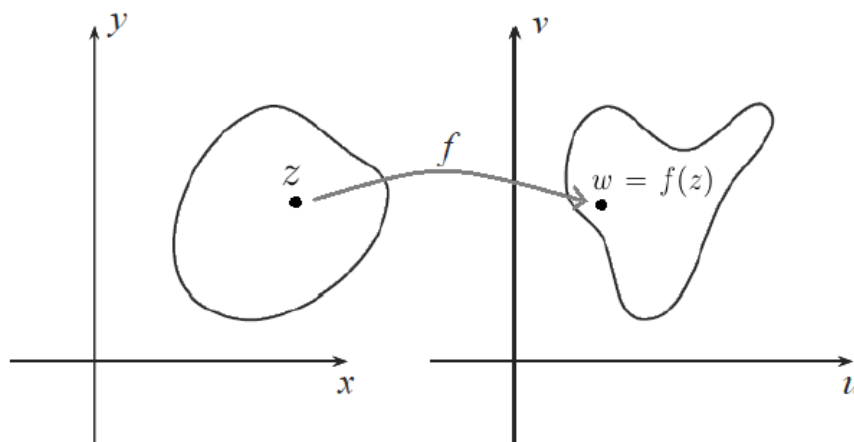


Figura 1: Aplicação: $f: A \rightarrow \mathbb{C}$, $A \subseteq \mathbb{C}$.

Em seguida foi apresentado um exemplo para os alunos resolverem: Considerando $w = z^2$, em que $w = u + vi$ e $z = x + yi$. Encontre a imagem do ponto $(1,2) \in xy$. Ainda na Ficha 02, temos a Tarefa 2.2 – Domínio das Funções Complexas, com o seguinte texto inicial: Sabemos que, para caracterizar uma função não basta dar a lei de correspondência f , é preciso especificar também o domínio de definição A . “Pense como os livros abordam os exemplos e exercícios de funções reais de uma variável real, será que eles trazem essa caracterização completa?”. Entretanto, frequentemente consideramos funções dadas em termos de relações analíticas bem definidas $w = f(z)$, sem especificar o domínio de definição. Nestes casos fica subentendido que o domínio da função é o conjunto de todos os valores de z para os quais faz sentido a expressão analítica $f(z)$. Por exemplo, quando falamos "seja a função

$$w = \frac{3z - 5i}{(z - 1)(z + 7)}$$

estamos usando esta relação para especificar a lei de correspondência f que liga z a w ; ao mesmo tempo fica subentendido que o domínio desta função é o plano complexo, exceto os pontos $z = 1$ e $z = -7$. Por fim, temos o último exemplo: Encontre o domínio das seguintes funções a) $f(z) = \frac{3z-2}{z^2+4}$ e b) $g(z) = z^3 - 5z + 1$.

É importante ressaltar que a abordagem que trouxemos para iniciar os estudos das funções complexas é parecida com as abordagens dos livros didáticos para as funções reais de uma variável real. Porém a maioria dos livros de Variáveis Complexas trabalham de forma rápida o assunto das funções complexas, inviabilizando uma discussão aprofundada sobre o tema.

As fichas de trabalho 03 e 04 traziam assuntos complementares às funções complexas, como as funções unívocas e plurívocas, funções inversas e algumas funções elementares (funções exponenciais e funções logarítmicas). Porém não foi possível aplicar as duas últimas fichas devido ao tempo que gastamos nas duas primeiras fichas.

Em relação a dinâmica de nossa sala de aula, baseada no Modelo, estabelecemos alguns pontos importantes:

1. Estimular a produção de significados do(a)s estudantes, sugerindo a discussão conjunta na direção de atender as demandas das tarefas de maneira colaborativa;
2. A aula seria dividida em três momentos. O primeiro, de produção individual. O segundo, de produção em grupo, e o terceiro momento se dá pelo compartilhamento das

produções realizadas com a turma, gerando a discussão e posterior formalização das ideias ali presentes;

3. A ordem de fala no terceiro momento seria a seguinte: quem tiver dúvidas e não tiver certeza de como chegar a uma resposta, ou não tiver certeza se o que fez será aceito pela turma, sempre falará primeiro. Quem na turma tiver alguma certeza de como chegar a uma resposta ou que chegou a alguma resposta da tarefa, falará por último;

4. Nós como docentes poderíamos fazer intervenções nos momentos de discussão, mas falas referentes a algum tipo de explicação ou esclarecimento de questões matemáticas relacionadas ao tema da tarefa trabalhada precisariam ser evitadas.

Assim, na dinâmica de sala de aula a proposta foi gerar a discussão dos diferentes modos de produção de significados que ali emergissem vindo dos alunos.

No próximo capítulo apresentaremos uma análise de cada uma das tarefas junto à nossa leitura da produção de significados dos participantes da pesquisa.

6

**UMA LEITURA DA DINÂMICA DA SALA
DE AULA**

Neste capítulo, analisamos a produção de significados dos alunos que participaram da disciplina de Introdução às Variáveis Complexas para Licenciatura, registradas durante nossa pesquisa de campo. Esta análise foi feita de acordo com a descrição apresentada em nossa metodologia. Através dessa leitura, pretendemos transformar os resíduos de enunciação dos sujeitos em textos para nós, com objetivo de obter considerações a respeito da metodologia utilizada, ao propormos uma abordagem diferente da tradicional em uma disciplina considerada da matemática pura, ou seja, diferentes das aulas expositivas/explicativas. Em nossa leitura da produção de significados, apresentamos a avaliação diagnóstica que foi aplicada no início do curso e duas fichas de trabalhos relacionadas ao conteúdo de funções complexas.

6.1 Avaliação Diagnóstica

No início da disciplina aplicamos uma avaliação diagnóstica com intuito de nos programar em relação às tarefas, reconhecer as etapas de aprendizagem em que os alunos estavam inseridos, além de identificar significados e conhecimentos produzidos pelos alunos, bem como possíveis limites (ou obstáculos) epistemológicos ou ainda possíveis processos de impermeabilização em curso, na qual cada estudante possa ter se deparado no decorrer da dinâmica proposta.

Como primeira pergunta, solicitamos que os discentes descrevessem os conjuntos numéricos: Naturais, Inteiros, Racionais, Irracionais e Reais. Dos oito alunos que responderam, dois representaram os conjuntos na forma que usualmente é esperada pelos professores. Alguns produziram significados para representação dos complexos através de diagramas, outros através de representações de conjuntos-

Como segunda pergunta, solicitamos aos discentes que resolvessem duas equações (uma do segundo grau e outra biquadrada): a) $x^2 + x - \sqrt{3}x - \sqrt{3} = 0$ e b) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$. A primeira equação envolvia números irracionais e não estava na forma sincopada (Haper, 1987) $ax^2 + bx + c = 0$, a segunda resultava em soluções reais e complexas. Queríamos observar que significados produziram em relação às soluções complexas, visto que alguns desses alunos fizeram a disciplina de números complexos no início da graduação. Dois discentes encontraram as raízes reais da segunda equação, sendo que um deles informou que as outras raízes seriam complexas, não as apresentando. Houve quem deixasse a questão número

dois em branco. A tarefa foi elaborada com intuito de verificar que significados seriam produzidos pelos alunos.

Na terceira questão estávamos interessados em analisar os significados produzidos por esses alunos, diante da proposta de demonstrarem um teorema aleatório, identificando hipótese e tese. Colocamos o seguinte teorema: Se a soma de dois números inteiros é par, então a sua diferença também é par. i) Qual é a hipótese do teorema? ii) Qual é a tese do eorema? iii) Demostre o teorema. Três alunos identificaram a hipótese e a tese. Mas colocou-se em curso um processo de impermeabilização no que se refere a uma possível demonstração do que fora solicitad. Pensamos em colocar um teorema para analisar os significados produzidos pelos discentes ao lidarem e trabalharem com os teoremas que possivelmente apareçam na disciplina.

Por fim, na quarta questão, solicitamos que os discentes definissem com suas palavras o que é função, em seguida pedimos que eles apresentassem alguns exemplos.. Algumas das enunciações relativas ao que pedimos foram:: (i) possui domínio e imagem; (ii) tem entrada e saída; (iii) função é a lei que está ditando o movimento de uma determinada curva, podendo essa ser uma reta, parábola etc. Foram apresentados exemplos em diagramas, funções específicas através da lei de formação, dentre outras. Percebemos que todos os discentes conseguiriam produzir significados na direção da definição de função, citando exemplos de quando teríamos uma função ou não. A questão quatro foi inserida na atividade com o propósito de analisar o que os discentes conseguiam falar de funções pensando nos estudos das funções complexas.

Nossas considerações sobre a avaliação diagnóstica é que a maioria dos discentes não lembravam de assuntos já estudados como os conjuntos numéricos, resolução de equações, fórmula de Bhaskara, hipótese e tese de teoremas e definição de função. Como foi a primeira disciplina depois do ensino remoto emergencial (ERE), alguns discentes informaram que não estudaram com muita frequência no ERE, outros informaram que trancaram o curso e uns finalizaram informando que não precisavam de tanto estudo no ensino remoto. Outro ponto que nos chama atenção é que sete dos oito alunos fizeram uma disciplina introdutória no curso chamada Números Complexos e Trigonometria, e que cinco desses alunos. Uma aluna afirmou que números complexos é quando envolve o número i e outra já citou a questão de envolver raiz quadrada de um número negativo. Sabendo da dificuldade apresentada pelos alunos, construímos nossas fichas de trabalho de forma que fosse possível voltar em algum conteúdo introdutório para dar continuidade ao conteúdo que seria proposto. Por exemplo, antes de apresentar as funções complexas, apresentamos algumas atividades de funções reais de variáveis reais como introdução.

Na primeira parte da disciplina foi abordado o assunto dos números complexos, de uma maneira diferente da que é proposta nos livros-texto. Os detalhes e as tarefas propostas estão no trabalho da professora Lecticia. Agora apresentaremos nossa análise em relação às Fichas 01 e 02 que foram abordadas na parte final da disciplina relacionada às funções complexas.

6.2 Tarefa 1.1 – Função real de uma variável real

Sobre a segunda parte do curso, fizemos uma análise da produção de significados dos discentes, que tiveram como tarefas as fichas de funções complexas. Na primeira ficha de trabalho colocamos as seguintes informações de como a aula e as tarefas seriam conduzidas: A tarefa a seguir deve ser resolvida individualmente e posteriormente discutida com a turma de modo que cada aluno possa apresentar suas ideias durante a resolução, suas dúvidas e como chegou à resposta. Como combinamos, a proposta da dinâmica das nossas aulas será conduzida pela seguinte proposta negociada anteriormente com a turma: quem tem dúvidas e não tem certeza de como chegar à resposta ou não tem certeza de que o que está afirmando é satisfatório para resolver a tarefa, fala primeiro. Por outro lado, o (a) aluno(a) que acredita que sua resolução e justificção resolve a tarefa, fala por último.

As tarefas de funções complexas foram criadas de maneira que o licenciando conseguisse falar sobre o assunto, por exemplo na **Tarefa 1.1** – Função real de uma variável real, foi solicitado aos discentes definirem uma função real de uma variável real e em seguida para eles citarem alguns exemplos. Ainda sobre a Tarefa 1.1 vamos apresentar as ações enunciativa e nossa leitura em relação a produção de significados dos discentes.

A discente Cristina apresentou uma função do tipo $f(x) = ax + bx + cx$, em que a, b e c são números inteiros, supondo um conjunto qualquer da função $f(x)$. Não conseguimos produzir significados em relação ao que foi escrito. Em seguida, foi apresentado um diagrama com dois conjuntos (um x e outro $f(x)$), onde os elementos do conjunto x foram relacionados a um único elemento no conjunto $f(x)$. Sendo assim, sugerimos que Cristina produziu significados para função. O que nos pareceu é que isto é tudo que ela poderia dizer sobre a questão proposta naquele momento.

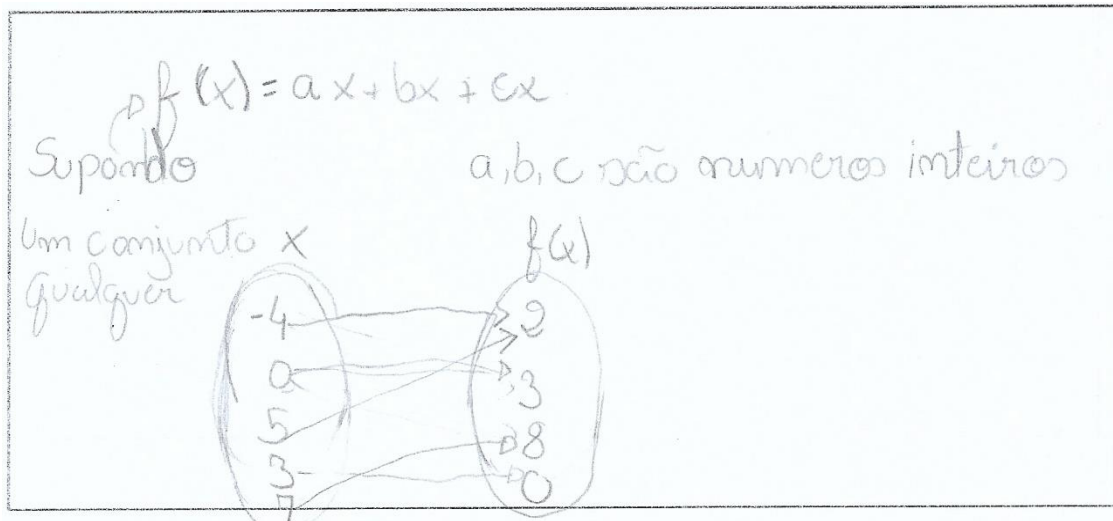


Figura 2 - Escrita Cristina - Tarefa 1.1

Em seguida, Cristina escreveu: “*função de uma variável real, determinam a relação de dependência entre uma quantidade e a outra*”. Analisando as ações nunciativas da discente, percebemos a dificuldade em se trabalhar com as definições dos objetos da matemática.

Doronice escreveu “*Uma função real é formada por domínio e contradomínio, cujo os elementos do domínio são ligados as imagens do contradomínio. Cada elemento do domínio só pode ter uma única imagem do contradomínio.*” Em seguida, a discente fez uma representação em diagrama para citar o exemplo de funções: Dois conjuntos, um chamado de domínio e outro de contradomínio, sendo que os elementos a, b e c pertenciam ao domínio e os elementos d, e e f pertenciam ao contradomínio. Cada elemento do domínio foi levado em um único elemento do contradomínio. Por fim, a discente relatou: “*Uma variável real é uma função cuja sua lei de formação é formada por elemento de números reais cujo os resultados são números reais*”. Entendemos que Doronice produziu significados na direção da definição de uma função, apresentado algumas dificuldades na escrita e na formalização da definição de uma função real de uma variável real.

Continuando apresentado as ações enunciativas dos discentes em relação a Tarefa 1.1, temos a seguinte escrita do aluno Jota: “*É uma função onde relacionamos números reais à números reais, como uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = ax + b$, onde estamos relacionando um x real que pertence ao domínio, e $f(x)$ é a imagem que pertence aos reais.*” Das respostas nas fichas de trabalho, o discente Jota produziu significados na direção do que foi solicitado, mesmo não apresentando uma definição completa. O discente apresentou um exemplo

específico, dando ênfase que tanto o elemento do domínio quanto a imagem pertenciam ao conjunto dos reais.

O discente Lero apresentou o seguinte exemplo: “ **$f(x) = x + 2$, onde x pertence aos \mathbb{R}** ”. Em seguida o discente fez um diagrama representando dois conjuntos, o primeiro com os números 1,2,3 e 4 e o segundo com 3,4,5 e 6. O elemento 1 do primeiro conjunto estava sendo levado no elemento 3 do segundo conjunto, o 2 no 4, o 3 no 5 e o 4 no 6. A definição apresentada foi: “***Função é a interseção do conjunto domínio com o destino de forma que exista apenas um resultado do destino para cada item do domínio***”. Entendemos que o aluno teve dificuldades em citar os exemplos de funções e para representar a definição solicitada, usou a palavra “interseção” no lugar de outra para dar sentido ao que queria explicar.

Em seguida, temos as ações enunciativas da aluna Malu: “***Sejam A e B subconjuntos de \mathbb{R} , tal que $x \in A$ e $y \in B$. A função f é a lei que possibilita que todo $x \in A$ tenha pelo menos um y correspondente em B*** ”. Em seguida foi apresentado um diagrama com dois conjuntos, chamando um de A (Domínio) e outro de B (contradomínio), ligando um elemento x de A em um elemento y de B . Continuando a estrita, temos: “***Dentro do contradomínio B está contido o subconjunto Imagem. A Imagem é todo valor y que é correspondente aos valores definidos pelo domínio.***

$$Im(f) = \{y \in B \mid f(x) = y \ \forall \ x \in A\}$$

O domínio de f é descrito como o intervalo em que f está definida, que nada mais é do que todos os valores de x que possuem um correspondente y ” A discente citou dois exemplos:

- 1) “ **$f(x) = 2x + 4$, $f(2) = 8$. Sendo o domínio e o contradomínio pertencentes a \mathbb{R}** ”.
- 2) “ **$f(x) = \sqrt{2x + 4}$. O domínio é o intervalo em que $2x + 4 \geq 0$.**” Ela fez as contas, chegando em $x \geq -2$. Por fim a discente finalizou o exemplo escrevendo “***logo a variável x pode assumir qualquer valor real no intervalo $[-2, +\infty)$*** ”.

Em nossa leitura em relação a tarefa da Malu, percebemos que a discente teve um bom entendimento de funções, produzindo significados na direção do que foi solicitado. Um ponto que nos chama atenção foi a escrita “A função f é a lei que possibilita que todo $x \in A$ tenha

pelo menos um y correspondente em B ”, pois o elemento x tem que ter apenas um correspondente.

O discente Manoel apresentou o seguinte relato: “***Para que seja função é necessário que os elementos de um determinado conjunto esteja ligados a um elemento de um outro conjunto, gerando a imagem.***” Em seguida, apresentou um diagrama para citar o exemplo de funções: Dois conjuntos, um chamado de A e outro de B , no domínio tinha três pontos e no contradomínio tinha outros três pontos. Cada ponto do domínio foi levado em um único ponto do contradomínio. Manoel continuou “***onde, A é o domínio, B o contradomínio e a imagem dos elementos é refletido pelos elementos do domínio e contradomínio. Por exemplo: uma função real pode ser na forma de visualizar o que reflete no nosso dia-a-dia como, o valor do Kg de um determinado produto custa x , caso compramos 5kg desse produto iremos pagar $5x$, ou seja o valor sofrerá variação conforme a quantidade que for comprada***”. O discente apresentou dificuldade para escrever a definição de função e produziu significados na direção do entendimento da definição de função e de quando temos uma função, dando ênfase que cada elemento do domínio seria levado em um único elemento do contradomínio. Por último, o discente apresentou um exemplo específico de uma função linear.

As ações enunciativas da discente Nyna começa com: “***A função é uma regra que relaciona cada elemento a um único elemento de outro***”. Em seguida foi apresentado três diagramas para exemplificar o que seria função ou não.

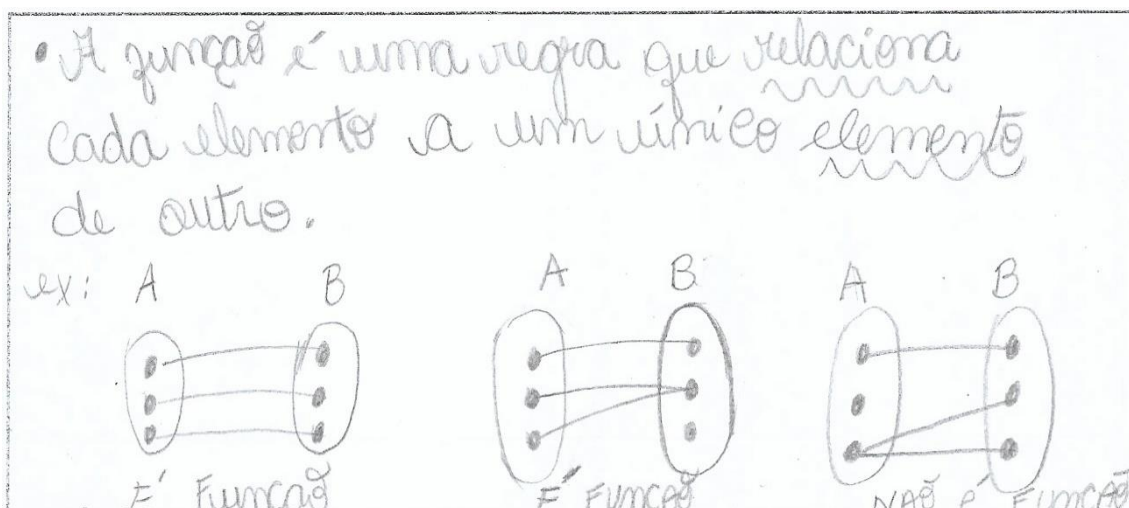


Figura 3 - Escrita Nyna - Tarefa 1.1

Entendemos que a discente não conseguiu apresentar a definição de função; entretanto, consideramos que, através dos diagramas, ela produziu significados que indicam o que acontece em uma função, diferenciando quando há ou não uma função.

Finalizando nossa leitura, temos a escrita da aluna Sandora: ***“Função real é a relação de elementos reais onde existem variáveis reais que dependem uma da outra. Exemplo: Na função afim, temos: $y(x) = ax + b$, onde temos dois elementos a e b , duas variáveis, onde y depende x ”***. A discente se atentou aos detalhes do que foi pedido, mas teve dificuldade para colocar no papel. O exemplo ficou vazio, ela escolheu uma função afim e não escreveu mais nenhuma informação.

Depois que os alunos responderam a tarefa 1.1, demos um tempo para eles conversarem entre si e pedimos para eles responderem o que acharam da questão. A Doronice apresentou um estranhamento em relação à questão de “uma variável real” e afirmou que normalmente nas definições de funções não aparecem dessa forma. A Sandora disse que pensou em exemplos reais, indo para uma outra linha de pensamento. A Malu disse que tentou apresentar uma definição mais formal e que não foi tão fácil quanto ela imaginava. Perguntamos para os discentes o porquê a maioria pensou em uma função afim para colocar como exemplo. A Malu respondeu que é pelo fato de a função afim ser uma das primeiras funções que eles aprenderam, sendo uma das que eles mais usaram e, portanto, a que veio no pensamento. Por fim, depois de vários relatarmos o que considerava ser uma função real de variável real, solicitamos que eles investigassem em casa o que seria uma função real de variável para próxima aula.

6.3 Outras Definições de Funções

Começamos a aula do dia 20/07/22 perguntando se eles tinham pensado nas funções reais de variáveis reais. Os alunos presentes relataram que não conseguiram pensar. A discente Malu disse que manteve o pensamento dela sobre o que foi feito na tarefa anterior. Em seguida, apresentamos duas definições de funções reais de uma variável real³: 1) Livro de Cálculo - Guidorizzi e 2) Definição que criamos. A primeira definição é mais formal e, para ela, fizemos uma leitura com os discentes, eles acharam a definição muito complexa. Já a segunda definição,

³ As definições estão apresentadas no anexo.

os discentes acharam mais simples e informaram que haviam entendido. Por fim, apresentamos três exemplos de funções e solicitamos que os discentes analisassem cada uma delas

Exemplos:

1)

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \\ &= x^2 \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} f: \mathbb{Q} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 1}, & \text{se } x \geq 0 \\ x + 1, & \text{se } x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} f: X &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(x-1)}} \end{aligned}$$

Em relação ao primeiro exemplo, alguns discentes apresentaram um estranhamento quanto ao domínio ser o próprio conjunto dos reais, pois na definição informava que o domínio teria que ser um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$. Lembramos aos discentes que cada conjunto é um subconjunto de si mesmo, já que todos os seus elementos são elementos dele mesmo. No segundo exemplo, eles informaram que se tratava de uma função de duas sentenças e que era uma função real de variável real. Também informaram que os valores do domínio pertenciam ao conjunto dos racionais. Nosso objetivo não era nos estender nos exemplos nem fazer uma análise detalhada como nas fichas de trabalhos, mas sim ver alguns exemplos de funções reais de variáveis reais. Na parte final da aula, ao olhar para o terceiro exemplo, pedimos que identificassem quais eram os possíveis valores de x do domínio X , de modo que a função fosse real de uma variável real. A discussão foi calorosa: alguns tentaram fazer cálculos, outros ficaram “chutando valores” e, por fim, fizemos as contas com eles no quadro, chegando aos possíveis conjuntos para X :

$$X_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x > 1\}, \quad X_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\} \quad \text{e} \quad X_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$$

Informamos que qualquer um dos conjuntos acima poderia ser o domínio da função e que, normalmente, os livros de cálculo solicitam para o discente encontrar o domínio de algumas funções referindo-se ao domínio maximal.

Na aula seguinte, apresentamos a segunda folha da Tarefa 01, que começava com a definição de função real de uma variável real:

6.4 Tarefa 1.2 – Introdução a Funções Complexas

Uma função $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ que possui como domínio um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ e cujos valores $f(x)$, para todo $x \in X$, são números reais, chamamos de função real de uma variável real ou função de uma variável real a valores reais.

Em seguida apresentamos a tarefa 1.2 – Introdução a Funções Complexas. Iniciando o texto com a seguinte frase: Vamos pensar em funções complexas:

a) Defina uma função $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Como você representaria essa transformação (função)?

Iniciaremos apresentando as seguintes ações enunciativas: A aluna Cristina apresentou a seguinte definição: “*Seja $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, onde no seu domínio seja um conjunto dos números complexos e a sua imagem também.*” Ainda na tarefa, a discente fez um diagrama com dois conjuntos (X e Y), no conjunto X tinha os elementos $2i$, $4i$ e i , no conjunto Y tinha os elementos $5i$, $8i$ e $3i$. O elemento $2i$ estava sendo levado no $3i$, o elemento $4i$ no $8i$ e o i no $5i$. Em relação a tarefa 1.1, percebemos que a discente Cristina produziu significado a partir da tarefa proposta e trouxe um exemplo com dois conjuntos e nesses conjuntos tinham apenas números imaginários puros. A discente trouxe a relação usada na função real de uma variável real: Para todo elemento do domínio vamos ter um único elemento do contradomínio. Mas sabemos que isso não acontece nas funções $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, temos o caso das funções plurívocas que seriam abordadas na ficha de trabalho 03.

Em seguida, temos a definição da discente Doronice: “*Uma $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é definida quando o elemento do domínio é formado por números complexos tal que a imagem do contradomínio também seja um número complexo*”. Doronice abordou que o domínio e contradomínio eram formados por números complexos, apresentando algumas incoerências, como “a imagem do contradomínio” e não apresentou a função através de símbolos.

O aluno Jota, apresentou a seguinte definição: “*Uma função em que o domínio é o conjunto dos complexos e a imagem pertence também aos complexos*”. Em seguida o discente fez a seguinte representação:

$$\begin{array}{l} f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ x \mapsto y = f(x) \end{array}$$

O discente apenas trocou o conjunto \mathbb{C} por \mathbb{R} , mas teve a percepção de que o domínio e contradomínio eram formados por números complexos.

A definição descrita por Lero foi: “*Função complexa formada por X (domínio) e Y (contradomínio) onde X e $Y \in \mathbb{C}$ e os elementos x e $y \in$ aos conjuntos X e Y de forma que a lei de formação seja $x \mapsto f(x) = y$* .” O discente Lero informou que o domínio e contradomínio eram formados pelos números complexos, explicando quem eram os conjuntos X e Y . O discente produziu significados na direção do que foi solicitado usando uma notação mais formal do que os demais colegas de sala.

Quanto a discente Malu, temos a seguinte definição “*Seja $x \in A$ e $y \in B$, sendo $A, B \subset \mathbb{C}$, f é uma lei de formação que faz com que todo x chegue a um correspondente y . Sendo x e y números da forma $a + bi$* ”. Malu usou a ideia apresentada na definição de uma função real de variável real para definir a função $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, destacando que os números x e y são números complexos da forma $a + bi$. A discente Malu produziu significados na direção do que foi solicitado, destacando que os números desses conjuntos são da forma $a + bi$.

Manoel elaborou sua definição nos seguintes termos: “*A função $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, é representada pela parte real e imaginária. Como exemplo: $3 + 5i$. Que é definida pela lei de formação dos números complexos $a + bi$. Onde o domínio é complexo e o contradomínio também um complexo*”. O discente se apresentava diante de um limite epistemológico para definir a função $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, (Não conseguimos produzir significado à sua enunciação relativa à parte abordada que a função é representada pela parte real e imaginária), mas ele produziu significados na direção da definição, deixando claro que tanto o domínio quanto o contradomínio seriam formados por números complexos e que a lei de formação da função teria que envolver números da forma $a + bi$.

Nyna, por sua vez, apresentou a seguinte definição: “*É uma função da variável z no conjunto A . O A é usualmente usado como domínio da função*”. Acreditamos ser uma frase

vaga, incompleta e que a discente não tenha conseguido produzir significados para o que foi solicitado.

A nossa expectativa era que eles utilizassem a definição de função real de uma variável real para construir a definição da função solicitada e que tivessem mais facilidade para trabalhar com o tema de funções, conseguindo produzir significados para aquele assunto. Percebemos que a maioria dos discentes usou a definição de função apresentada nas aulas anteriores e que não foi capaz de justificar, com suas próprias palavras, a definição solicitada e de apresentar os exemplos também requeridos.

Na letra b) da mesma atividade, foi solicitado para os discentes citarem dois exemplos de funções do tipo $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. A aluna Cristina colocou a função $f(x) = 5i + x$, mas enunciou quem seria o x . Sendo assim, não produzimos significado para o fato dela estar pensando em um x real que não deixa de ser um número complexo ou se o x seria um número complexo da forma $a + bi$. A discente Doronice deixou a tarefa em branco, já o Jota apresentou apenas um exemplo:

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$x \mapsto y = f(x) = 2x$$

em que $x = a + bi$ e $y = c + di$. Aqui, destacamos que o discente se atentou em deixar claro que tanto o elemento x do domínio quanto o elemento y do contradomínio eram números complexos.

Quanto ao aluno Lero, ele apresentou os seguintes exemplos:

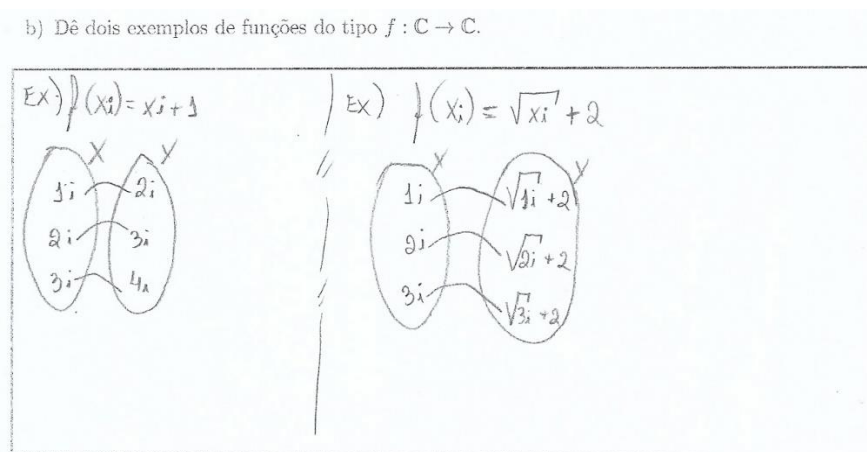


Figura 4 - Escrita Lero - Tarefa 1.2

Observamos que o discente se confundiu em apresentar os elementos do contradomínio no primeiro exemplo, pois teríamos que ter as respectivas imagens $i + 1$, $2i + 1$ e $3i + 1$, somando xi com o 1 como se o número 1 fosse o i . O segundo exemplo foi bem parecido com o primeiro.

Analisando as ações enunciativas da Malu, temos que a discente apresentou dois exemplos diferentes, apresentando um número complexo sendo levado em outro número complexo. Produzindo significados na direção do que foi solicitado.

1) $f(c) = 2c + i$ e 2) $f(c) = c^2$ sendo $c \in \mathbb{C}$ um número na forma $a + bi$.

Para 1) $f(2 + 3i) = 2(2 + 3i) + i = 4 + 6i + i = 4 + 7i$;

Para 2) $f(2 + i) = (2 + i)^2 = 4 + 2i + i^2 = 3 + 2i$.

O discente Manoel escreveu $f: a + bi$. Percebemos que o discente tentou elaborar alguns exemplos e depois apagou, pois é possível ver pela marcação na folha.

Quanto a aluna Nyna, ela apresentou os seguintes exemplos:

1) “ $f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2yi$ é uma função complexa da variável z .”

2) $f(x) = |z| = (x^2 + y^2)^{1/2}$.

Percebemos que a discente produziu significados na direção do que foi solicitado (exemplos de funções do tipo $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$). Porém esqueceu de alguns detalhes em sua justificativa. No exemplo 1) faltou a variável x no último termo $2yi$. No exemplo 2), acreditamos que ela quis dizer $f(z)$ e não $f(x)$, de acordo o primeiro exemplo apresentado, além de ter trocado o sinal $(x^2 + y^2)$, pois $(iy)^2 = -y^2$.

Por último, tínhamos a letra c): Defina uma função $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$. Como você representaria essa transformação (função)? Dê dois exemplos de funções do tipo $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$. Devido ao nosso tempo, a maioria dos discentes não conseguiriam finalizar a letra c), optamos por deixar a letra c) em nossas discussões.

Tínhamos como objetivo apresentar as diversas possibilidades de se trabalhar com as funções complexas e através dos exemplos apresentados discutir algumas possibilidades: Na letra a) tínhamos uma função $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, em que o domínio e o contradomínio seriam formados pelo conjunto dos números complexos. Já na letra c) tínhamos outra função complexa $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, só que aqui apesar do contradomínio ser formado pelo conjunto dos números complexos, existia uma restrição, teria que ser formado apenas pelo conjunto dos números reais.

Depois de responderem as perguntas, demos um tempo para eles interagirem e conversarem sobre as três questões colocadas na tarefa 1.2. Logo após esse breve diálogo, pedimos aos sujeitos que discutissem a respeito do resíduo de enunciação da definição na letra a) e c) e dos exemplos solicitados, para que eles produzissem significados.

Os discentes informaram que a definição das funções $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ e $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ seriam parecidas com a definição de uma função real de variável real, só que os domínios das duas seriam formados pelo conjunto dos números complexos, o contradomínio da primeira seria formado pelo conjunto dos complexos e o contradomínio da segunda pelos reais. Perguntamos sobre a representação desses conjuntos e eles informaram que poderia ser feito de forma análoga ao da função real de uma variável real. Sobre os exemplos, eles informaram que pensaram muito e que tiveram muitas dificuldades. Sandora e Doronice relataram que elas pensaram em um número real para a função $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, elas falaram que um número real também era complexo.

Por fim, como foi colocado em nossa proposta da dinâmica “Quem da turma tem alguma certeza de como chegar à resposta ou que chegou à resposta da tarefa, fala por último”. Jota e Malu apresentaram suas definições e exemplos aos demais colegas e eles concordaram com o que foi apresentado.

Percebemos que os discentes tiveram muita dificuldade para relatar o que foi solicitado e para pensar nos exemplos. Entendemos que os alunos conseguiram produzir significados na direção da definição solicitada, sendo que as discussões e falas ajudaram no entendimento. Nas aulas dos dias 02/08, 03/08 e 05/08 trabalhamos com a Tarefa 2.1 – Funções Complexas.

6.5 Tarefa 2.1 – Funções Complexas

Iniciamos a aula do dia 02/08 dando um tempo para leitura da definição das funções complexas. Ressaltamos na ficha que quando estudamos funções reais de uma variável real, usamos a notação $y = f(x)$. Assim por analogia, adotariamos a notação $w = f(z)$ para funções complexas de variável complexa. Em seguida na ficha, tínhamos:

Como $w = f(z) \in \mathbb{C}$, podemos escrever

$$w = f(z) = u + iv, \quad u, v \in \mathbb{R}$$

Desse modo, podemos representar uma função $f: A \rightarrow \mathbb{C}$, $A \subset \mathbb{C}$, com

$$f(z) = u(z) + i v(z).$$

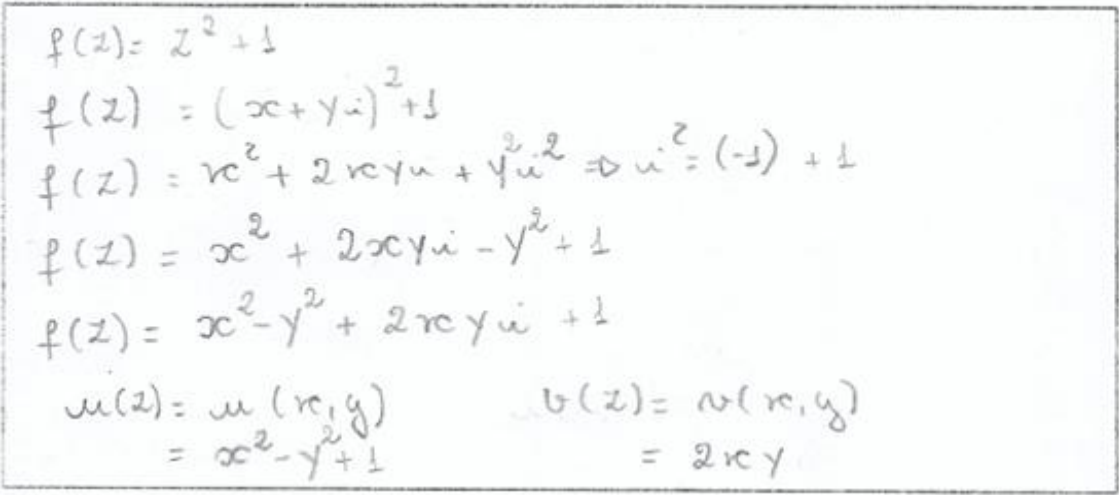
Antes da realização da primeira tarefa, discutimos a definição apresentada com os discentes. Alguns alunos tiveram um estranhamento na definição apresentada, uns ficaram em silêncio, outros disseram que não entenderam bem. Sandora informou que a definição era basicamente a mesma apresentada para função real de uma variável real e que “os números complexos estavam escritos na forma completa”. Em seguida solicitamos para os discentes realizarem a primeira tarefa: Seja $f(z) = z^2 + 1$. Encontre $u(z) = u(x, y)$ e $v(z) = v(x, y)$. Em relação as ações enunciativas dos discentes, temos que Cristina e Nyna substituíram z por $x + yi$. Em seguida elas fizeram as contas, chegaram em $f(z) = x^2 - y + 2yi$ e apresentaram o seguinte resultado:

$$u(z) = u(x, y) = 2xyi \quad e \quad v(z) = v(x, y) = x^2 - y.$$

Percebemos que elas esqueceram do $+ 1$ na função, trocaram o u com v e colocaram o i junto com o $2xy$. Mesmo ocorrendo algumas trocas, entendemos que as discentes produziram significados na direção do que foi solicitado.

Os discentes Lero, Malu e Sandora, substituíram z por $x + yi$. Apresentaram os cálculos e chegaram nos mesmos resultados:

Exemplo: Seja $f(z) = z^2 + 1$. Encontre $u(z) = u(x, y)$ e $v(z) = v(x, y)$.



$$\begin{aligned}
 f(z) &= z^2 + 1 \\
 f(z) &= (x + yi)^2 + 1 \\
 f(z) &= x^2 + 2xyi + y^2 i^2 \Rightarrow i^2 = (-1) + 1 \\
 f(z) &= x^2 + 2xyi - y^2 + 1 \\
 f(z) &= x^2 - y^2 + 2xyi + 1 \\
 u(z) &= u(x, y) & v(z) &= v(x, y) \\
 &= x^2 - y^2 + 1 & &= 2xy
 \end{aligned}$$

Figura 5 - Escrita Malu - Tarefa 2.1

Percebemos que os discentes produziram significados na mesma direção do que foi solicitado através de suas contas. Os alunos Doronice e Manoel, mesmo fazendo o exercício

separadamente, o fizeram de forma análoga, no lugar do z eles substituíram por $x + yi$. Eles fizeram os cálculos e chegaram no seguinte resultado:

$$u(z) = u(x, y) = x^2 - y + 1 \quad e \quad v(z) = v(x, y) = 2xy.$$

Os discentes esqueceram de colocar o y ao quadrado no $u(x, y)$. Percebemos também que os discentes entenderam a proposta, produziram significados na direção do que foi solicitado através das suas contas.

O aluno Jota iniciou o processo substituindo z por $(x + yi)$, elevou ao quadrado o $(x + yi)$, no lugar de $(yi)^2$ colocou o $-y$ e depois voltou com o $-y^2$. Por fim, ele deu a seguinte resposta

$$f(z) = \underbrace{x^2 - y^2 + 1}_{Re} + \underbrace{2xy i}_{Im}$$

De forma geral, os discentes conseguiram fazer o exemplo proposto. Eles se reuniram depois do exemplo e os que não chegaram na mesma resposta entenderam onde tinham errado. Um ponto que nos chamou atenção foi em relação a notação, quando eles trocavam o z por $x + yi$, a maioria continuava usando o $f(z)$.

O segundo exemplo da tarefa era parecido com o primeiro. Foi dada a função $f(z) = 2z^3 - z + i$ e em seguida solicitamos aos discentes que encontrassem a parte real $u(x, y)$ e a parte imaginária da função $v(x, y)$. Como essa questão envolvia muito cálculo, a maioria dos discentes chegaram a respostas parecidas, acontecendo alguns erros de sinais:

$$\text{Malu e Sandora: } u(x, y) = 2x^3 - 6xy^2 - x \quad e \quad v(x, y) = 6x^2y - 2y^3 - y + 1;$$

$$\text{Lero: } u(x, y) = 2x^3 - 6xy^2 - x \quad e \quad v(x, y) = 6x^2y - y^3 + y - 1;$$

$$\text{Jota: } f(z) = 2x^3 - 6xy^2 - x + (6x^2y - 2y^3 + y)i;$$

$$\text{Cristina e Doronice: } u(x, y) = 2x^3 - 6xy^2 - y^3 - x \quad e \quad v(x, y) = 6x^2y - y + 1;$$

$$\text{Manoel: } u(x, y) = 2x^3 - 6xy^2 - x \quad e \quad v(x, y) = 6x^2y - 2y^3 + y + 1.$$

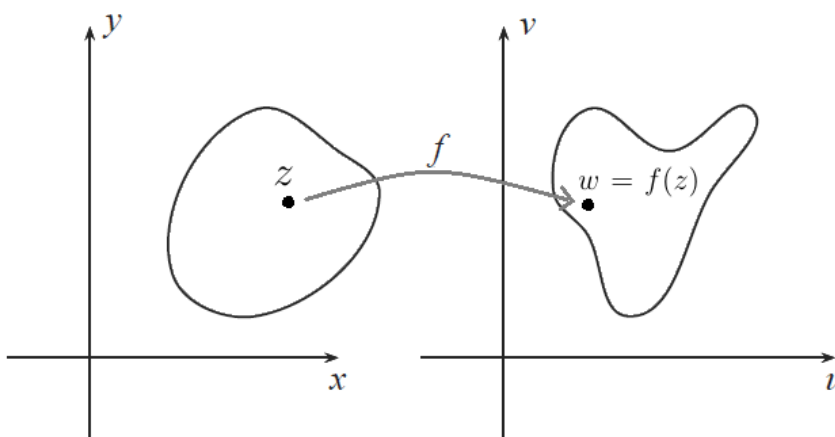
Ao finalizarem as tarefas, os alunos conversaram entre si e perceberam que apenas o da Sandora e da Malu estavam corretos. Os demais discentes encontraram os seus erros e depois relataram onde tinham errado. O objetivo desses dois primeiros exemplos era contribuir para os discentes se familiarizarem mais com as funções complexas, olhando para o domínio, para lei de formação em função de x e y , analisando a parte real e imaginária da função.

Dando continuidade na ficha de trabalho 02, apresentamos um texto falando dos gráficos das funções complexas:

Dada uma função complexa de variável complexa $f: A \rightarrow \mathbb{C}, A \subset \mathbb{C}$, definida por $w = f(z)$, podemos trabalhar algebricamente, como vimos nos exemplos anteriores, porém, pensando no gráfico dessas funções, vemos que para representar apenas os valores da variável independente z – que é complexa – precisamos do plano de Gauss (duas dimensões); e assim, para fazer um daqueles gráficos necessitaríamos, no total, de quatro dimensões, o que é simplesmente impossível, pois o espaço físico em que vivemos possui somente três dimensões.

Um recurso para visualizar geometricamente uma função $w = f(z)$ é representar imagens de curvas ou regiões do domínio, que está contido em um plano que identificamos como plano xy no contradomínio, que identificaremos como plano uv . Deste modo, a função é considerada como uma “transformação”. Essa ideia de pensar na função complexa de variável complexa como uma transformação entre dois planos é atribuída ao matemático alemão Bernhard Riemann.

Sendo assim, dada uma função $w = f(z)$, é usual imaginar-se $z = x + yi$ variando em plano denominado plano dos xy e $w = f(z) = u + vi$ variando em outro plano denominado uv . Tem-se desta forma, a seguinte visão geométrica de uma aplicação $f: A \rightarrow \mathbb{C}, A \subset \mathbb{C}$.



Como atividade, solicitamos aos discentes que considerassem $w = z^2$, em que $w = u + vi$ e $z = x + yi$ e depois para encontrarem a imagem do ponto $(1,2) \in xy$.

Os discentes Lero, Jota, Malu, Manoel e Sandora substituíram z por $(x + yi)$ fizeram os cálculos, chegando em $w = x^2 - y^2 + 2xyi$ em que $u(x, y) = x^2 - y^2$ e $v(x, y) = 2xy$. Alguns fizeram

$$w(1,2) = 1^2 - 2^2 + 2.1.2i = -3 + 4i$$

e outros fizeram:

Considerando $w = z^2$, em quem $w = u + vi$ e $z = x + yi$. Encontre a imagem do ponto $(1, 2) \in xy$.

$$\begin{aligned}
 w &= (x + yi)^2 \\
 w &= (x^2 + 2xyi + y^2i^2) = (x^2 + 2xyi - y^2) \quad \text{seja: } i^2 = (-1) \\
 u(z) &= u(x, y) & v(z) &= v(x, y) \\
 &= x^2 - y^2 & &= 2xy + i^2 \\
 &= 1^2 - 2^2 & &= 2.1.2 + i^2 \\
 &= 1 - 4 = -3 // & &= 4 // = 4
 \end{aligned}$$

Figura 6 - Escrita dos alunos - Tarefa 2.1

Os discentes conversaram entre si e perceberam que todos haviam chegado na mesma resposta. Percebemos que os discentes estavam com mais facilidade para trabalhar com a parte algébrica das funções complexas e que eles estavam produzindo significado na direção do que foi solicitado usando as contas como justificativa.

Como estávamos na parte final da disciplina, três discentes não finalizaram as atividades dessa última ficha de trabalho e apenas duas alunas responderam a tarefa 2.2 – Domínio das Funções Complexas:

Sabemos que, para caracterizar uma função não basta dar a lei de correspondência f , é preciso especificar também o domínio de definição A . Entretanto, frequentemente consideramos funções dadas em termos de relações analíticas bem definidas $w = f(z)$, sem especificar o domínio de definição. Nestes casos fica subentendido que o domínio da função é o conjunto de todos os valores de z para os quais faz sentido a expressão analítica de $f(z)$. Por exemplo, quando falamos “seja a função

$$w = \frac{3z - 5i}{(z - 1) \cdot (z + 7)} "$$

Estamos usando esta relação para especificar a lei de correspondência f que liga z a w , ao mesmo tempo fica subentendido que o domínio desta função é o plano complexo, exceto os pontos $z = i$ e $z = -i$.

Como exemplo pedimos para os discentes encontrarem o domínio das seguintes funções:

$$a) f(z) = \frac{3z-2}{z^2+4} \quad e \quad b) g(z) = z^3 - 5z + 1.$$

As duas discentes Malu e Sandora que resolveram o exemplo anterior, responderam que o domínio da letra a) seria:

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq \pm 2i\}.$$

Em relação à letra b), as duas informaram que o domínio seria o conjunto dos números complexos.

Exemplo: Encontre o domínio das seguintes funções

a) $f(z) = \frac{3z-2}{z^2+4}$ e

b) $g(z) = z^3 - 5z + 1.$

a) $z^2 + 4 \neq 0$ logo
 $z^2 + 4 = 0$
 $z^2 = -4$
 $z = \pm \sqrt{-4}$
 $z = \pm \sqrt{4 \cdot (-1)}$
 $z = \pm 2i$

$D = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq \pm 2i\}$

b) $g(z) = z^3 - 5z + 1$
 Domínio = \mathbb{C}

Figura 7 - Escrita Malu e Sandora – Tarefa 2.2

As duas alunas chegaram na mesma resposta, produzindo significados, possivelmente numa mesma direção.

Para concluir, apresentaremos um detalhamento das perguntas formuladas aos alunos ao final da disciplina, juntamente com as respostas que eles forneceram. Essas questões foram elaboradas para avaliar a percepção dos discentes sobre a proposta de trabalho desenvolvida ao

longo do curso, bem como sua opinião sobre a dinâmica aplicada. Nosso objetivo é compartilhar esses insights para oferecer uma visão mais ampla das diferentes percepções sobre o método utilizado e o impacto que ele teve no processo de aprendizagem dos alunos.

Em relação a primeira pergunta: O que você achou da metodologia de ensino baseada em fichas de trabalhos? Temos as seguintes respostas:

Doronice: *“Legal, pois proporciona uma análise crítica.”*

Jota: *“Achei muito boa, pois ela permitiu analisar com calma os aspectos relacionados ao conteúdo, como o aspecto histórico em torno do problema dos volumes que deu início a discussão do conteúdo, isso para mim sem dúvida agregou ao conhecimento adquirido”.*

Lero: *“Interessante e bastante didático”.*

Sandora: *“Legal.”*

Dando continuidade nas perguntas, temos: Quais vantagens e desvantagens que você viu nessa metodologia?

Doronice: *“Vantagens: Visão crítica e uma melhor compreensão”. “Desvantagens: Poderia haver uma pesquisa posterior as propostas direcionais”.*

Jarbas: *“A primeira vantagem do ponto de vista do aluno é, não haver prova, o que para mim é uma vantagem, pois tira a preocupação com a nota, que geralmente em disciplinas convencionais sobrepõem a preocupação com a aprendizagem, além disso a interação com o professor e com os outros alunos nas discussões sobre as fichas ajudam, essa abertura para a discussão dos conceitos, acredito que também, proporcione uma avaliação do aluno pois, o professor irá conseguir observar o entendimento do aluno pelas interações. As desvantagens acredito que seja o tempo pois, toda ficha necessita do tempo para resolver, discutir e isso talvez atrapalhe em praticar o conteúdo.”*

Lero: *“Vantagem que aprendemos com os nossos erros, pois iniciamos os trabalhos com as fichas utilizando o que imaginamos saber e depois discutimos os resultados com o professor e toda a turma e conseguimos detectar o que fizemos de errado e aprendemos com os erros. A desvantagem é que não sabemos no primeiro momento se o que fizemos está bem direcionado”.*

Sandora: *“Vantagens: Com as fichas se pratica mais. Desvantagens: Perda de tempo quando não compreende os conteúdos.”*

Por fim, perguntamos: Você acha que é possível aplicar essa metodologia em outras disciplinas, como os cálculos, álgebra linear e outras disciplinas da matemática?

Doronice: *“Sim. Caso houvesse direcionamento para pesquisas prévias em que os alunos encontrassem soluções propostas pelos direcionamentos”.*

Jota: *“Acho que depende, pois o cálculo geralmente tem muitos alunos; talvez isso atrapalhe e o conteúdo distribuído nas fichas pode acabar sendo extenso, porém acredito que depende do objetivo da disciplina, utilizar este método em outras disciplinas também pode trazer benefícios, e particularmente acho que, com essa metodologia pode-se conseguir fazer com que o aluno entenda melhor os procedimentos que são feitos nestas matérias”.*

Lero: *“Acredito que sim, pois é muito válido.”*

Sandora: *“Sim, pois é um conteúdo que embora não seja muito trabalhado nas disciplinas de matemática, é um conteúdo muito importante para compreender a parte dos números complexos.”*

Ao analisar os comentários e a postura dos alunos em sala de aula, foi evidente que a metodologia adotada em sala diferia do que estavam acostumados. A maioria expressou apreciação pela abordagem baseada em fichas de trabalho, destacando a utilidade das discussões em sala e a importância das interações para o processo de aprendizado.

Entretanto, alguns alunos mencionaram desafios, como o tempo dedicado às tarefas e a preocupação em cobrir todo o conteúdo. Isso sugere uma ligação dos alunos com o modelo tradicional de ensino, apesar do reconhecimento da eficácia do modelo proposto na disciplina. Esse cenário pode representar um ponto de partida para a exploração de novas metodologias em suas futuras práticas de ensino.

Observamos de perto a evolução dos alunos ao decorrer do curso. Inicialmente, muitos estavam tímidos e inseguros, mas ao longo do tempo, tornaram-se mais confortáveis e participativos. Percebemos também, que a estratégia de revisar conteúdos anteriores mostrou-se relevante, permitindo aos alunos relembrem de conceitos que antes pareciam simples, mas que hora das tarefas muitos não conseguiam produzir significados na direção do que foi solicitado, como a definição e exemplos de uma função real. Outro ponto relevante em nossa pesquisa foi o referencial teórico junto com a proposta de dinâmica em nossas aulas, que

possibilitou mais abertura para um diálogo com os alunos e para fazer uma leitura em relação a produção de significados dos alunos.

7

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo deste estudo, nosso trabalho foi fundamentado pelas noções do Modelo dos Campos Semânticos. Cada etapa do processo, desde a formulação da pesquisa até a análise dos dados, foi cuidadosamente orientada pelas premissas teóricas que fundamentaram nossa abordagem.

Assim, encerramos este trabalho com a certeza de que as escolhas metodológicas adotadas, em consonância com o referencial teórico, foram essenciais para alcançar os resultados obtidos. Esperamos que as reflexões aqui apresentadas possam contribuir para futuras pesquisas e discussões sobre o tema.

Para fornecer uma visão geral do nosso estudo, apresentamos de forma sucinta as etapas que compuseram este trabalho, destacando nossa percepção ao longo dessas fases.

As dificuldades enfrentadas pelos alunos de Licenciatura em Matemática nas disciplinas de matemática, a alta taxa de evasão, e os debates sobre métodos de ensino e aprendizagem sempre despertaram meu interesse. A partir dessas reflexões, que examinam a influência de uma disciplina de matemática na trajetória acadêmica dos alunos, tive como objetivo trabalhar com uma disciplina da Licenciatura em Matemática para minha pesquisa. Acreditamos que a exploração de metodologias alternativas e seu potencial impacto nas práticas pedagógicas dos futuros professores, assim como o desenvolvimento de materiais didáticos alternativos, além dos tradicionais livros-textos, são aspectos que podem melhorar o desempenho dos alunos e, possivelmente, reduzir a evasão nos cursos de Licenciatura em Matemática.

Dessa forma, optamos por adotar neste trabalho uma abordagem focada em conteúdos matemáticos das disciplinas presentes no currículo da Licenciatura em Matemática. Como apresentado ao longo do texto, decidimos restringir nossa análise ao estudo das variáveis complexas.

Uma das primeiras etapas foi investigar como a disciplina de Variáveis Complexas é abordada nos cursos superiores das instituições públicas na Zona da Mata mineira. Como já mencionado anteriormente, identificamos que em todos os cursos há, pelo menos, uma disciplina que aborda os números complexos no início do curso ou uma disciplina de Variáveis Complexas ao final, sendo que, em alguns casos, ambas são oferecidas. Constatamos também que, nas ementas desses cursos, o tema de funções complexas é abordado de maneira superficial, dividindo espaço com outros conteúdos, geralmente mais extensos, o que resulta em uma abordagem introdutória limitada. Em nossa pesquisa, nos empenhamos em trabalhar as funções complexas de maneira mais detalhada, com foco nas definições, nas transformações e nas funções elementares.

No que diz respeito às referências bibliográficas dos cursos de Variáveis Complexas, observamos que elas são bastante semelhantes entre si, sendo compostas majoritariamente por livros-textos de conteúdo denso, assim como ocorre com as bibliografias de Cálculo, Álgebra Linear, Equações Diferenciais Ordinárias entre outros.

Um desafio identificado foi a escassez de livros-texto de Variáveis Complexas voltados especificamente para a Licenciatura em Matemática. Diante disso, estabelecemos como objetivo desenvolver um material alternativo a esses livros-texto, no que diz respeito ao ensino de funções complexas, mais adequado às necessidades dos cursos de licenciatura.

Em nossa revisão da literatura, verificamos que não existem muitos estudos relacionados a Variáveis Complexas e a formação de professores. No entanto, encontramos trabalhos que abordam disciplinas matemáticas do ensino superior olhando para formação de professores. Com isso, vislumbramos a possibilidade de, ao lecionar a disciplina de Introdução às Variáveis Complexas para Licenciatura em Matemática, adotar uma abordagem diferente das tradicionais aulas expositivas/explicativas, utilizando uma dinâmica de sala de aula alternativa, como a que empregamos. Nosso foco não era apenas desenvolver os conteúdos matemáticos, mas também contribuir para a formação pedagógica dos licenciandos, intervindo na produção de significados a partir dos conceitos matemáticos.

Assim, ao longo do trabalho, tivemos como problema de pesquisa, desenvolver um conjunto de tarefas, referenciadas teórica e metodologicamente, para o ensino de funções complexas em disciplinas cuja ementa trate do tema variáveis complexas, como parte do processo de formação de estudantes de uma Licenciatura em Matemática no projeto de educá-los matematicamente. O material que contém essas tarefas são as fichas de trabalho utilizadas em sala de aula, que também representam o produto educacional desta pesquisa.

Em relação ao trabalho de campo, especificamente à aplicação das fichas de trabalho e à dinâmica adotada na disciplina de Introdução às Variáveis Complexas para Licenciatura, destacamos alguns pontos. Inicialmente, foi desafiador seguir a dinâmica proposta, principalmente para nós, docentes, que estávamos acostumados a métodos mais tradicionais. A tendência natural é a de sanar as dúvidas dos alunos e orientar o caminho para soluções já conhecidas. Contudo, nosso papel em sala de aula deve ser o de mediar discussões e, quando necessário, apresentar maneiras de resolver e utilizar os conceitos matemáticos conhecidos academicamente. Para os discentes, a adaptação à nova proposta também foi um desafio no início, mas, com o decorrer da disciplina, eles foram se adaptando e se engajando na proposta.

Com base em nosso referencial teórico, compreendemos que uma disciplina de matemática pode ser vista como um resíduo de enunciação para o qual os alunos podem ou não

produzir significados. Nesse contexto, consideramos que o papel do professor de Matemática é o de sugerir tarefas e analisar a produção de significados de seus alunos. O mecanismo, metodologia ou dinâmica utilizados pelo professor variam conforme suas preferências e experiência, mas acreditamos que a interação entre professor e alunos nos processos de ensino e aprendizagem é essencial.

Por fim, esperamos que o material didático e a proposta de ensino que desenvolvemos para Funções Complexas possam servir como ponto de partida para os professores refletirem sobre novas tarefas, de acordo com suas experiências e interesses, e que possam incentivá-los a pensar em novas metodologias e dinâmicas para suas futuras aulas. Desejamos que esses professores ampliem este material ou criem novos recursos didáticos com propostas alternativas ao modelo tradicional vigente.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, V. R. **Álgebra linear como um curso de serviço**: o estudo das transformações lineares. 2013. 172 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.
- ALVES, A. F. **Álgebra linear como um curso de serviço para a licenciatura em matemática**: o estudo dos espaços vetoriais. 2013. 176 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.
- BALDINO, Roberto R. **Assimilação Solidária**. Rio Claro, SP: Notas do Grupo de Pesquisa-Ação em Educação Matemática – GPA, IGCE – Departamento de Matemática, 1995.
- BALDINO, Roberto R. Assimilação Solidária: escola, mais-valia e consciência cínica. **Educação em Foco**, Juiz de Fora, vol. 03, n.1, p.27-38, 1998.
- BARTO, M. C. A. L. **Um olhar sobre as idéias matemáticas em um curso de cálculo: a produção de significados para a continuidade**. 2004. 145 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.
- BIKLEN, S.; BOGDAN, R.C. **Investigação qualitativa em educação**. Porto: Porto, 2013.
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518-versaofinal_site.pdf. Acesso em: 26 jan. 2022.
- BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional Nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996**. Brasília, 1996. Disponível em: <https://www2.camara.leg.br/legin/fed/lei/1996/lei-9394-20-dezembro-1996-362578-publicacaooriginal-1-pl.html>. Acesso em: 26 jan. 2023.
- BRASIL. **CONSELHO NACIONAL DE EDUCAÇÃO**. CONSELHO PLENO. Resolução CNE/CP nº 2, de 20 de dezembro de 2019. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/docman/dezembro-2019-pdf/135951-rcp002-19/file>. Acesso em: 26 jan. 2022.
- CHAVES, R. **Por que anarquizar o ensino de matemática intervindo em questões socioambientais?** Tese de Doutorado, Unesp, Rio Claro – SP, 2004.
- CHURCHILL, R.V. **Variáveis Complexas e suas Aplicações**. São Paulo: Mc Graw Hill, 2001.
- GERETI, L. C. V. **Delineando uma pesquisa**: legitimidades para a disciplina de cálculo na formação do professor de matemática. 2018. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual de Londrina, Paraná, 2018.
- LINS, R. C. **A diferença como oportunidade para aprender**. In: XIV ENDIPE, 2008, Porto Alegre. Trajetórias e processos de ensinar e aprender: sujeitos, currículos e culturas. Porto Alegre: Edi PUCRS, v.3. p. 530- 550, 2008.
- LINS, R. C. **A formação pedagógica nas disciplinas de conteúdo matemático nas licenciaturas em Matemática**. Revista de Educação, Campinas, v. 1, n. 18, p. 117-123, 2005.
- LINS, R. C. **A framework for understanding what algebraic thinking is**. 1992. 330p. Thesis (Phd) – University of Nottingham, Nottingham.

- LINS, R. C. **Epistemologia, História e Educação Matemática: Tornando mais Sólidas as Bases da Pesquisa.** *Revista de Educação Matemática da SBEM-SP*, Campinas ano 1, n.1, p. 75-91, set. 1993.
- LINS, R. C. **O Modelo dos Campos Semânticos: estabelecimentos e notas de teorizações.** In: *Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática: 20 anos de História.* ANGELO, C. L. et al. São Paulo: Midiograf, p. 11, 30. 2012.
- LINS, R. C. **Por que discutir teoria do conhecimento é relevante para a Educação Matemática.** In: BICUDO, M. A. V. (org.), 75-94. 1. ed. Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: Editora da UNESP, 1999.
- LINS, R. C. Os PCN e a Educação Matemática no Brasil. In: OLIVEIRA, V. C. A. de et al. (org.). **O Modelo dos Campos Semânticos na Educação Básica.** 1. ed. Curitiba: Appris, 2020. (Educação, Tecnologias e Transdisciplinaridades).
- MONZON, L.W. **Números complexos e funções de variável complexa no ensino médio: uma proposta didática com uso de objeto de aprendizagem.** Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.
- OLIVEIRA, V. C. A. **Sobre a produção de significados para a noção de transformação linear em álgebra linear.** 2002. 195 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” , Rio Claro, 2002.
- OLIVEIRA, V. C. A. de. **Uma leitura sobre formação continuada de professores de Matemática fundamentada em uma categoria de vida cotidiana.** 2011. 207f. Tese - (doutorado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2011.
- PROCOPIO, R. B. **Geometria como um curso de serviço para a licenciatura de matemática: uma leitura da perspectiva do modelo dos campos semânticos.** 2011. 82 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2011.
- REIS, F. S. **A Tensão entre Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise: A visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos.** Tese de Doutorado. Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2001.
- SAD, L. **Cálculo diferencial e integral: uma abordagem epistemológica de alguns aspectos.** Tese de Doutorado, Universidade Paulista, São Paulo (1998).
- SILVA, A. M. **O Modelo dos Campos Semânticos: Um modelo epistemológico em Educação Matemática.** Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2022.
- SILVA, A. M. **Sobre a dinâmica da produção de significados para a Matemática.** 244f. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Unesp, Rio Claro – SP, 2003.
- SILVA, A.M.; POWELL, A.B. **Educação Financeira na Escola: A perspectiva da Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico.** Boletim GEPEM, nº 66, p. 3-19, jun. 2015.
- SILVA, Amarildo M.; BASTOS, Ronaldo R.; OLIVEIRA, Rosana. (2024) **Educação Matemática Escolar no século XXI: a formação de estudantes e professores da educação**

básica. In: Silva, A.M.; Rodrigues, C.K; Cruz, W.J. (orgs.). Programa de Pós-graduação em Educação Matemática: perspectiva de pesquisa e implicações no ensino e na aprendizagem de matemática. Juiz de Fora: Editora da UFJF, p. 92-109, 2024.

SILVA, M. R. S. **Avaliação: um contrato de trabalho.** In: Interface – Comunicação , Saúde, Educação, Botucatu, SP: Fundação UNI, 1998. v.2, n.2, p. 155-172.

ANEXOS

I - Termo de Compromisso Ético



Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática

Termo de Compromisso Ético

A problemática da pesquisa intitulada O ENSINO DAS VARIÁVEIS COMPLEXAS NA LICENCIATURA: O CASO DAS FUNÇÕES COMPLEXAS

A problemática da pesquisa intitulada O ENSINO DAS VARIÁVEIS COMPLEXAS NA LICENCIATURA: O CASO DAS FUNÇÕES COMPLEXAS se expressa pela seguinte questão: “de que forma podemos propor um curso de Variáveis Complexas para os Licenciados que tenha uma contribuição significativa para sua formação?”. Um dos objetivos é a criação de um material didático para que os professores e professoras possam utilizar, baseados nas características que teremos proposto para a disciplina. A aplicação desse material didático, juntamente da análise de resíduos de enunciação que serão coletados, servirão como material para embasar as conclusões da pesquisa.

Durante a aplicação e discussão do material didático os encontros poderão ser gravados e registros escritos de participantes podem ser solicitados, a fim de que seus dados sejam analisados posteriormente pelo pesquisador. Esses dados respeitarão o sigilo da identidade das(os) participantes, que poderão escolher seus nomes fictícios no caso de haver publicação dos resultados da pesquisa.

A participação nesta pesquisa é voluntária, podendo ser interrompida a qualquer momento se for do desejo da(o) participante. Assim, o presente termo torna-se necessário com a perspectiva de esclarecer e firmar o compromisso de participantes da pesquisa com as ações explicitadas acima.

_____, ____ de julho de 2022.

Nome da(o) licencianda(o) participante da pesquisa

Pesquisador

II – Avaliação Diagnóstica

Avaliação Diagnóstica

Com intuito de nos programar e até mesmo para saber como vamos conduzir nossas tarefas, gostaríamos que respondessem as seguintes perguntas:

1) Descreva o conjunto dos números:

Naturais (\mathbb{N}), Inteiros (\mathbb{Z}), Racionais (\mathbb{Q}), Irracionais (\mathbb{I}) e Reais (\mathbb{R}).

Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática

2) Resolva as seguintes equações: (a) $x^2 + x - \sqrt{3}x - \sqrt{3} = 0$ e (b) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$.

Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática

3) Considere o seguinte Teorema:

Se a soma de dois números inteiros é par, então a sua diferença também é par.

- i) Qual é a hipótese do Teorema?
- ii) Qual é a tese do Teorema?
- iii) Demonstre o Teorema.

Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática

- 4) Defina com suas palavras o que é função, em seguida apresente alguns exemplos.

III – Definições de Funções Reais de Uma Variável Real

Funções de uma Variável Real a Valores Reais - Guidorizzi

Entendemos por uma função f uma terna

$$(A, B, a \mapsto b)$$

em que A e B são dois conjuntos e $a \mapsto b$, uma regra que nos permite associar a cada elemento a de A um único b de B . O conjunto A é o domínio de f e indica-se por D_f , assim $A = D_f$. O conjunto B é o contradomínio de f . O único b de B associado ao elemento a de A é indicado por $f(a)$ (leia-se: f de a): diremos que $f(a)$ é o valor que f assume em a ou que $f(a)$ é o valor que f associa a a .

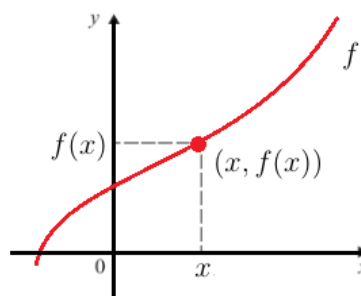
Uma função f de domínio A e contradomínio B é usualmente indicada por $f: A \rightarrow B$ (leia: f de A em B).

Uma função de uma variável real a valores reais é uma função $f: A \rightarrow B$, em que A e B são subconjuntos de \mathbb{R} .

Seja $f: A \rightarrow B$ uma função. O conjunto

$$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$$

denomina-se gráfico de f ; assim, o gráfico de f é um subconjunto do conjunto de todos os pares ordenados (x, y) de números reais. Munindo-se o plano de um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas, o gráfico de f pode ser pensado como o lugar geométrico descrito pelo ponto $(x, f(x))$ quando x percorre o domínio de f .



É usual representar uma função f de uma variável real a valores reais e com domínio A , simplesmente por

$$y = f(x), \quad x \in A.$$

Neste caso, diremos que x é a variável independente, e y , a variável dependente. É usual, ainda, dizer que y é função de x .

Observação: Por simplificação, deixaremos muitas vezes de explicitar o domínio e o contradomínio de uma função; quando tal ocorrer, ficará implícito que o contradomínio é \mathbb{R} e o domínio o “maior” subconjunto de \mathbb{R} para qual faz sentido a regra em questão.

E na sequência apresentamos a seguinte definição:

Definição de Função Real de Variável Real

Seja X um conjunto não vazio e f uma lei ou regra que associa a cada elemento $x \in X$ um único elemento $y \in \mathbb{R}$. Assim, dizemos que

$$f: X \rightarrow \mathbb{R}$$

é uma função real de variável real quando $X \subset \mathbb{R}$.

Exemplos:

1)

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \\ &= x^2 \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} f: \mathbb{Q} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 1}, & \text{se } x \geq 0 \\ x + 1, & \text{se } x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} f: X &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(x-1)}} \end{aligned}$$

IV – Fichas de Trabalho

Ficha de Trabalho 01

Caro estudante,

A tarefa a seguir deve ser resolvida individualmente e posteriormente discutida com a turma de modo que cada aluno possa apresentar suas ideias durante a resolução, suas dúvidas e como chegou à resposta.

Como combinamos, a proposta da dinâmica das nossas aulas será conduzida pela seguinte conduta: quem tem dúvidas e não tem certeza de como chegar à resposta ou não tem certeza de o que fez está correto, fala primeiro. Quem na turma tem alguma certeza de como chegar a resposta ou que chegou à resposta da tarefa, fala por último.

Recordamos também que o importante em nosso trabalho de sala de aula não é que você saiba sobre todas as coisas ou apresente sempre a resposta correta, mas é que todos digam o que estão pensando e do resultado de nossa reflexão e discussão conjunta todos aprendam de maneira colaborativa.

Tarefa 1.1 - Função real de uma variável real

Defina função real de uma variável real. Dê exemplos:

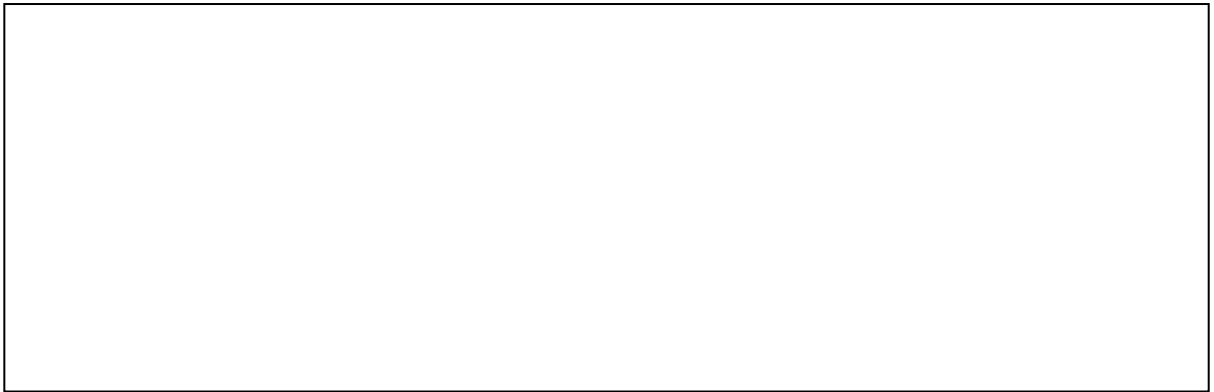
Uma função $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ que possui como domínio um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ e cujos valores $f(x)$, para todo $x \in X$, são números reais, chamamos de função real de uma variável real ou função de uma variável real a valores reais. Em símbolos:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Tarefa 1.2 - Introdução a Funções Complexas

Vamos pensar em funções complexas:

a) Defina uma função $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Como você representaria essa transformação (função)?;



b) Dê dois exemplos de funções do tipo $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.



c) Defina uma função $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$. Como você representaria essa transformação (função)? Dê dois exemplos de funções do tipo $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$.

Ficha de Trabalho 02 – Funções Complexas – 1ª parte

Tarefa 2.1 – Definição de Funções Complexas

Quando estudamos funções reais de variável real, isto é, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ com $A \subset \mathbb{R}$, usamos a notação $y = f(x)$. Assim, por analogia, adotamos a notação $w = f(z)$ para funções complexas de variável complexa.

Como $w = f(z) \in \mathbb{C}$, podemos escrever

$$w = f(z) = u + iv, \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

Desse modo, podemos representar uma função $f: A \rightarrow \mathbb{C}$, $A \subset \mathbb{C}$, com

$$f(z) = u(z) + i v(z),$$

onde u e v são funções de A em \mathbb{R} .

Temos $u(z) = \operatorname{Re}(f(z))$ e $v(z) = \operatorname{Im}(f(z))$ e, de forma mais usual, escreveremos $u(z) = u(x, y)$, $v(z) = v(x, y)$, $z = x + yi$, pensando em u e v como funções de um subconjunto do \mathbb{R}^2 em \mathbb{R} .

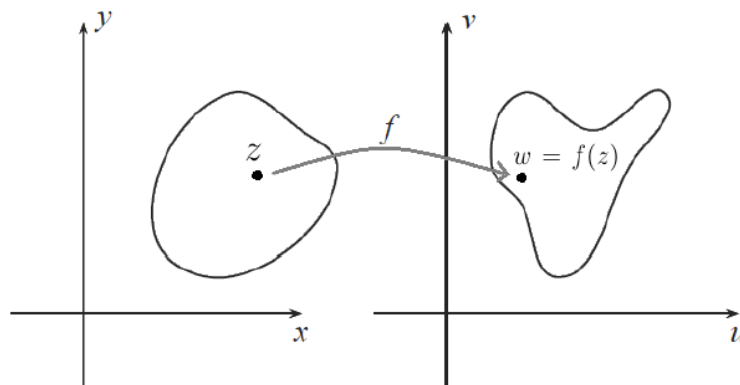
Exemplo: Seja $f(z) = z^2 + 1$. Encontre $u(z) = u(x, y)$ e $v(z) = v(x, y)$.

Exemplo: Seja $f(z) = 2z^3 - z + i$. Encontre $u(z) = u(x, y)$ e $v(z) = v(x, y)$.

Dada uma função complexa de variável complexa $f: A \rightarrow \mathbb{C}$, $A \subset \mathbb{C}$, definida por $w = f(z)$, podemos trabalhar algebricamente, como vimos nos exemplos anteriores, porém, pensando no gráfico dessas funções, vemos que para representar apenas os valores da variável independente z - que é complexa - precisamos do plano de Gauss (duas dimensões); e assim, para fazer um daqueles gráficos necessitaríamos, no total, de quatro dimensões, o que é simplesmente impossível, pois o espaço físico em que vivemos possui somente três dimensões.

Um recurso para visualizar geometricamente uma função $w = f(z)$ é representar imagens de curvas ou regiões do domínio, que está contido em um plano que identificaremos como plano xy , no contradomínio, que identificaremos como plano uv . Deste modo, a função é considerada como uma “transformação”. Essa ideia de pensar na função complexa de variável complexa como uma transformação entre dois planos é atribuída ao matemático alemão Riemann.

Sendo assim, dada uma função $w = f(z)$, é usual imaginar-se $z = x + yi$ variando em um plano denominado plano dos xy e $w = f(z) = u + vi$ variando em outro plano denominado uv . Tem-se, desta forma, a seguinte visão geométrica de uma aplicação $f: A \rightarrow \mathbb{C}$, $A \subset \mathbb{C}$. Exemplo:



Exemplo: Considerando $w = z^2$, em que $w = u + vi$ e $z = x + yi$. Encontre a imagem do ponto $(1,2) \in xy$.

Tarefa 2.2 – Domínio das Funções Complexas

Sabemos que, para caracterizar uma função não basta dar a lei de correspondência f , é preciso especificar também o domínio de definição A . Entretanto, frequentemente consideramos funções dadas em termos de relações analíticas bem definidas $w = f(z)$, sem especificar o domínio de definição. Nestes casos fica subentendido que o domínio da função é o conjunto de todos os valores de z para os quais faz sentido a expressão analítica $f(z)$. Por exemplo, quando falamos "seja a função

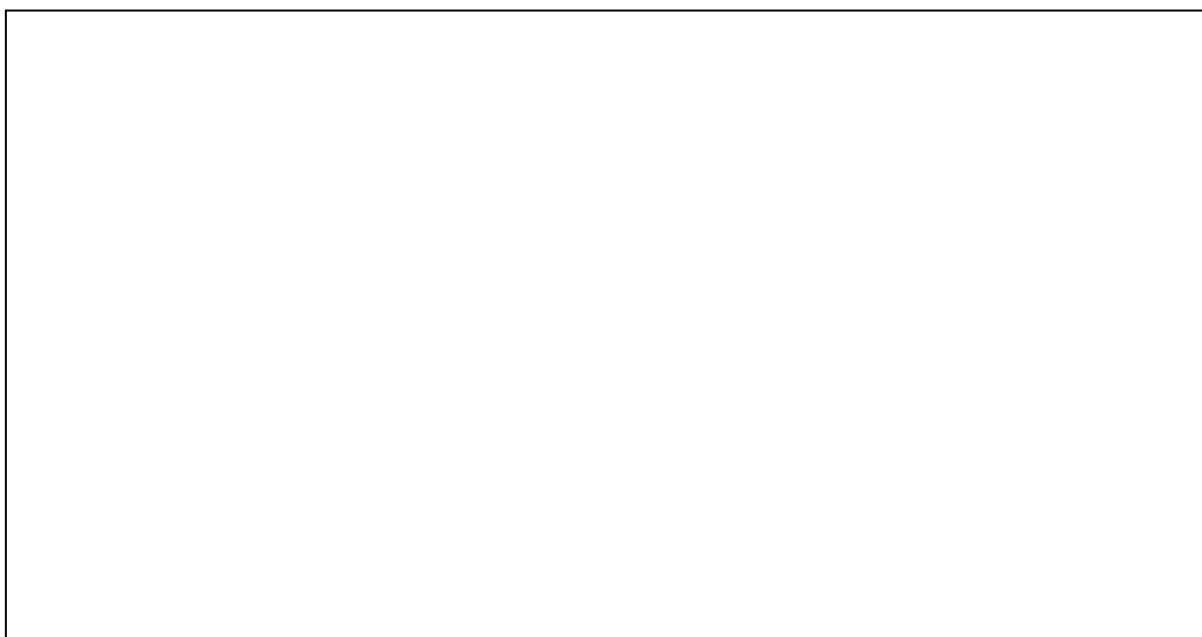
$$w = \frac{3z - 5i}{(z - 1)(z + 7)} "$$

estamos usando esta relação para especificar a lei de correspondência f que liga z a w ; ao mesmo tempo fica subentendido que o domínio desta função é o plano complexo, exceto os pontos $z = i$ e $z = -7$.

Exemplo: Encontre o domínio das seguintes funções

a) $f(z) = \frac{3z-2}{z^2+4}$;

b) $g(z) = z^3 - 5z + 1$.



Ficha 03 – Funções Complexas – 2ª parte

Tarefa 3.1 – Funções Unívocas e Plurívocas

Em relação às funções reais de uma variável real, cite alguns exemplos que não podem acontecer para termos uma função:

Em relação às funções complexas é possível obter imagens diferentes para o mesmo cara do domínio? Caso a resposta seja positiva, cite pelo menos um exemplo:

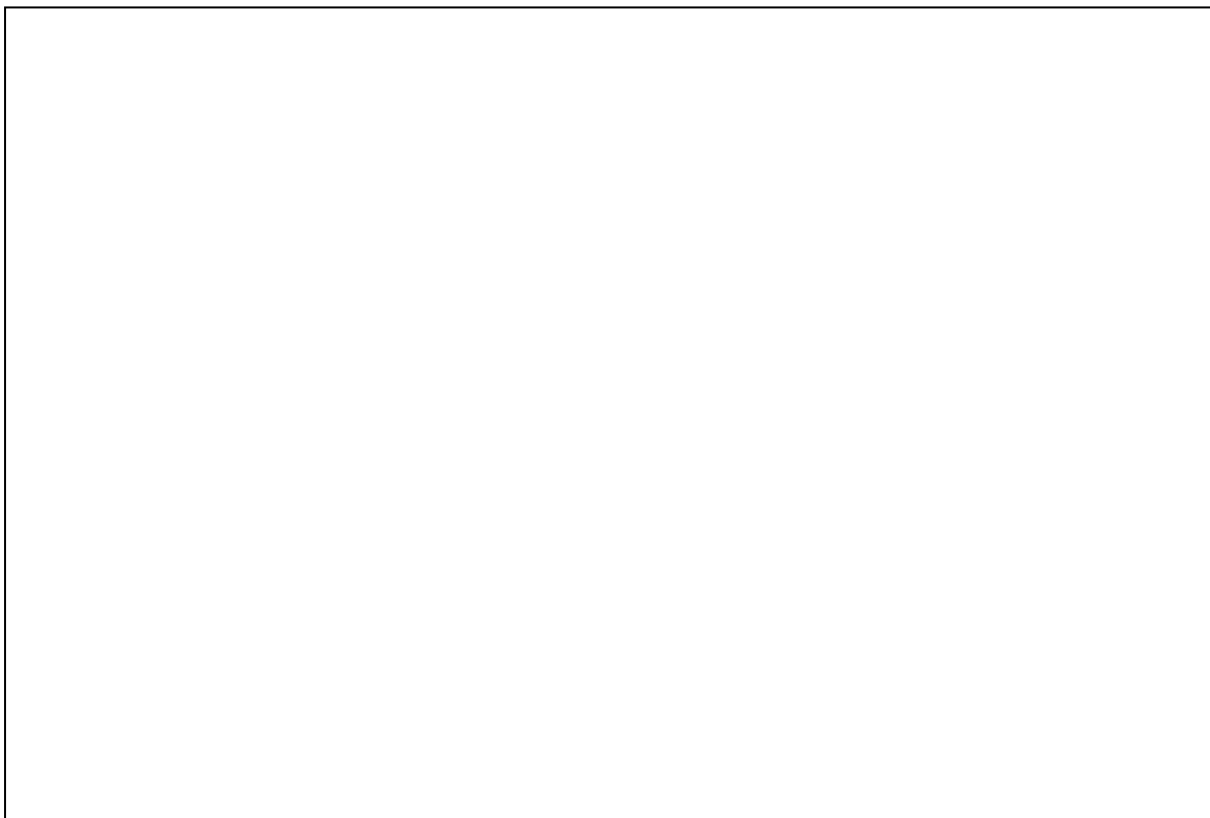
Se a cada z corresponde somente um valor de w , dizemos que w é uma função unívoca de z , ou simplesmente uma função de z . Se a cada valor de z corresponde mais de um valor de w , dizemos que w é uma função plurívoca de z .

Uma função plurívoca pode ser considerada como uma coleção de funções unívocas, e cada uma delas é chamada um ramo da função. Dentre todos os ramos, existe um, ao qual damos o nome de ramo principal da função plurívoca e o valor da função correspondente a esse ramo é o valor principal da função plurívoca.

Exemplo: Identifique se as seguintes funções são unívocas ou plurívocas:

a) $w = z^2$;

b) $w = z^{1/2}$.



Tarefa 3.2 – Funções Inversas

Em relação às funções reais de uma variável real, defina função inversa.




É possível encontrar a função inversa das seguintes funções?

a) $y = x^2$;

b) $y = x + 1$.

Quando for possível, encontre sua inversa.



Seja f uma função de variável complexa definida em $f: A \rightarrow B$, com $A, B \subset \mathbb{C}$, bijetora e tal que $f(z) = w$. Chama-se função g inversa de f , com $g: B \rightarrow A$ tal que $g(w) = z$. Notação: $g = f^{-1}$.

Temos também que

$$f \circ f^{-1}(z) = f^{-1} \circ f(z) = z, \quad (f^{-1})^{-1} = f.$$

Observação: Podemos fazer o mesmo procedimento feito para encontrar a função inversa das funções reais no caso das funções complexas.

Exemplo: Obtenha a inversa da função $f(z) = 5z + 2 - 4i$;

Exemplo: Obtenha a inversa f^{-1} da função $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, definida pela lei $f(z) = z^4$ de modo que

$$f^{-1}(-1) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i).$$

Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática

Ficha de Trabalho 04 – Funções Elementares – 1ª parte

Funções Exponenciais

Em relação às funções reais de uma variável real, apresente a definição e as principais propriedades da Função Exponencial:

Como você definiria função exponencial complexa?

Antes de apresentar a definição da função exponencial complexa é importante lembrarmos da fórmula de Euler⁴:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta.$$

Um caso especial da fórmula de Euler, também conhecida como identidade de Euler é quando $\theta = \pi$:

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi = -1.$$

Definição: Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função. Se $z = x + iy$ é um número complexo com $x, y \in \mathbb{R}$, a função exponencial complexa é definida da seguinte maneira:

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y),$$

onde $e = 2,71828 \dots$ é base natural dos logaritmos.

Observações:

i) Se a é real e positivo, definimos

$$a^z = e^{z \ln a}$$

onde $\ln a$ é o logaritmo natural a .

ii) As funções exponenciais complexas têm propriedades semelhantes às das funções exponenciais reais. Por exemplo,

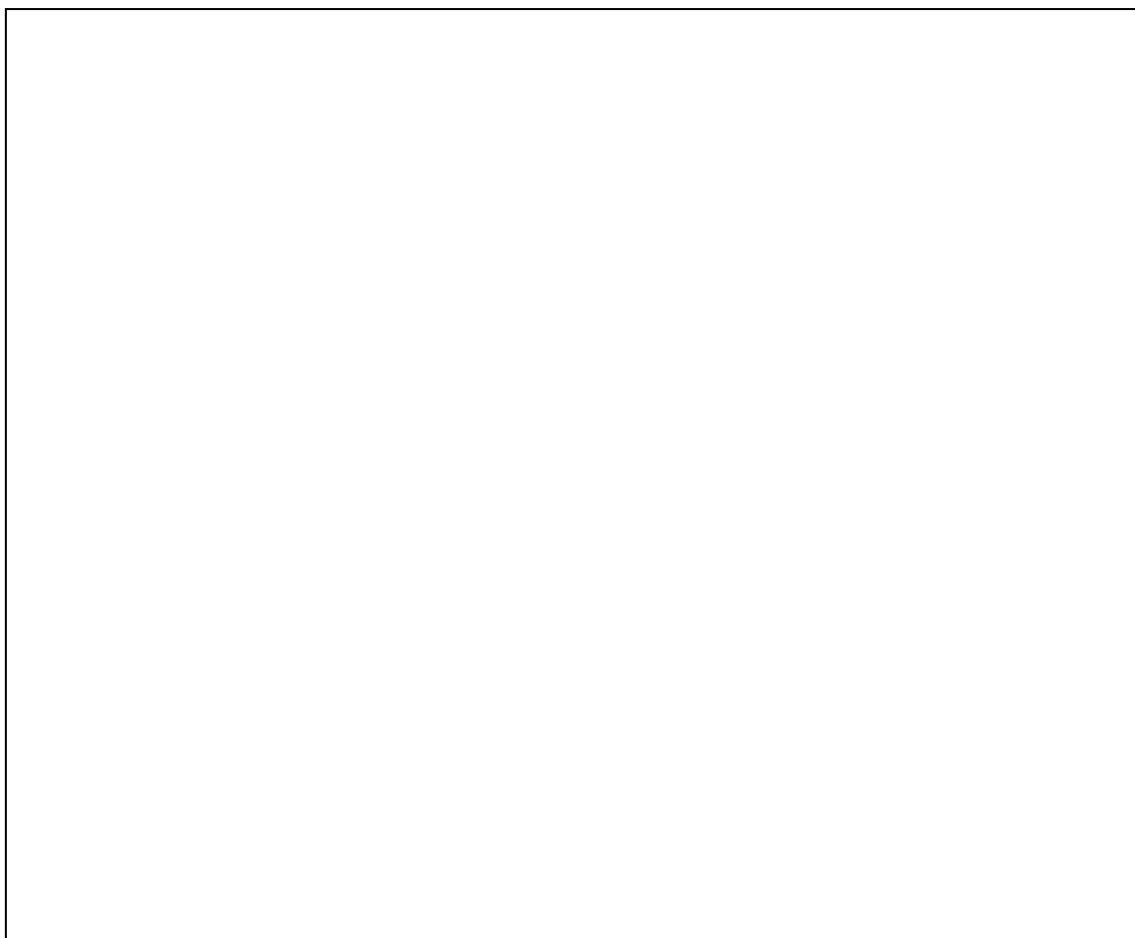
$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2} \quad \text{e} \quad \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}.$$

iii) A função exponencial complexa nunca se anula. Se $z = x + iy$, então $e^z = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y)$. Como $e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, a função e^z só se anularia se $\cos y + i \operatorname{sen} y$ fosse nulo para algum y real. Mas isso nunca ocorre, pois as funções seno e cosseno não se anulam simultaneamente já que $\cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y = 1$ para todo $y \in \mathbb{R}$. Portanto, o contradomínio da função exponencial complexa é o conjunto dos números complexos não nulos.

⁴ Demonstração da Fórmula de Euler no Final da Ficha de Trabalho.

Exercícios:

- 1) Mostre que se z for real ($z = x + i \cdot 0$), então $f(z) = e^x$.
- 2) Em relação a função $f(z) = e^z$, o que acontece quando $z = x + i\pi$? Que conclusão podemos tirar em relação a função exponencial real?
- 3) Se $e^z = e^w$ com $z, w \in \mathbb{C}$ podemos afirmar que $z = w$?
- 4) Calcule o módulo de e^z com $z \in \mathbb{C}$.
- 5) Encontre as soluções da equação $e^z = -1$.



Funções Logarítmicas

Em relação às funções reais de uma variável real, apresente a definição e as principais propriedades da Função Logarítmica:

Como você definiria Logarítmica Complexa? Podemos afirmar que a função logarítmica complexa é a função inversa da função exponencial complexa? Explique:

Sabemos que a função logarítmica real é a função inversa da função exponencial real. Já para as funções complexas temos que tomar um certo cuidado. Vimos anteriormente, que a função exponencial complexa não é injetora (periódica de período $2\pi i$), portanto, não admite inversa em \mathbb{C} .

Para definirmos a função logarítmica complexa, vamos primeiramente fixar um número complexo $z \neq 0$ da forma $z = e^w$, em que $w = a + bi \in \mathbb{C}$ e $a, b \in \mathbb{R}$. Lembrando que o número complexo $z = e^w = |z|e^{i\theta}$, assim

$$e^w = e^{a+bi} = e^a \cdot e^{ib} = |z|e^{i\theta}$$

o que implica que

$$\begin{cases} e^a = |z| \\ e^{ib} = e^{i\theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \ln |z| \\ b = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Portanto, $w = \ln|z| + i(\theta + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Definição: Se $z = e^w \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, então escrevemos $w = \ln z$, e chamamos logaritmo natural de z . Assim, a função logarítmica natural pode ser definida por

$$w = \ln z = \ln|z| + i \underbrace{(\theta + 2k\pi)}_{\text{argumento de } z}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

em que $\ln|z|$ indica o logaritmo natural real de um número positivo $|z|$ e θ medido em radianos.

Observações:

i) Temos que $\ln z$ é uma função plurívoca (tem infinitos ramos) e **valor principal** ou ramo principal de $\ln z$ é definido comumente por $\ln|z| + i\theta$, onde $0 \leq \theta < 2\pi$. Entretanto, qualquer outro intervalo de comprimento 2π pode ser tomado, por exemplo $-\pi < \theta \leq \pi$, etc.

ii) A função logarítmica pode ser definida para bases reais, diferentes do e . Assim, se

$$z = a^w, \text{ então } w = \log_a z, \text{ onde } a > 0 \text{ e } a \neq 1,$$

neste caso, $z = e^{w \ln a}$.

iii) Dados dois números complexos não nulos z_1 e z_2 , temos que:

a) $\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2$;

b) $\log\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \log z_1 - \log z_2$;

c) $\log(z_1)^m = m \log z_1$ para todo $m \in \mathbb{Z}^*$.

Exercícios:

1) Calcule os seguintes logaritmos:

a) $\ln(i)$;

b) $\ln(1 + i)$;

c) $\ln(-2)$.

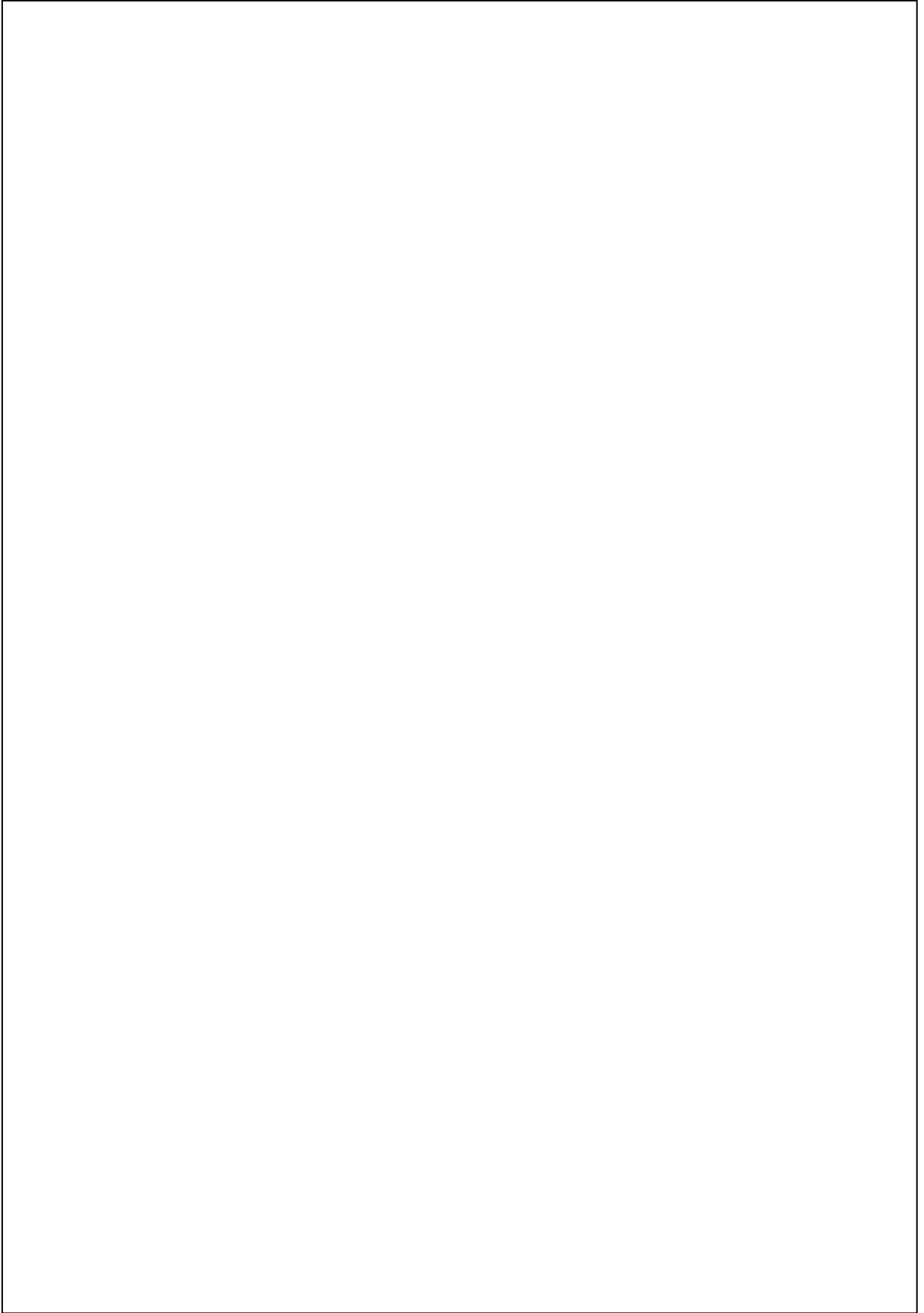
2) É possível calcular $\ln 1$ e $\ln 0$? Quando for possível, resolva o logaritmo.

3) As propriedades apresentadas na observação iii) também são válidas para o logaritmo principal?

4) Por meio do logaritmo complexo, resolva a seguinte equação:

$$e^{2z} + e^z + 1 = 0.$$





Apêndice – Fórmula de Euler

A série de potências

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

converge para todo número real ou complexo. Se fizermos $x = i\theta$, θ um número real, então

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = 1 + i\theta + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \frac{i^4\theta^4}{4!} + \dots \quad (1)$$

Agora, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$ e assim por diante. Logo, (1) pode ser separada em parte real e parte imaginária:

$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots\right) \quad (2)$$

Mas, lembramos que

$$\cos \theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \theta^{2n} \quad \text{e} \quad \sin \theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \theta^{2n+1},$$

em que cada série converge para todo número real θ . Portanto, (2) pode ser escrita como

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta. \quad (3)$$

Esse último resultado é conhecido como fórmula de Euler. Note que, em vista de (3), a forma polar $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ de um número complexo pode ser expressa de maneira compacta:

$$z = |z|e^{i\theta}.$$