UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Cristiane Corrêa Amaral

Uma análise de obstáculos identificados por meio da aplicação de Experimentos Mentais a um grupo de licenciandos em Matemática

Juiz de Fora
2024

Cristiane Corrêa Amaral

Uma análise de obstáculos identificados por meio da aplicação de Experimentos Mentais a um grupo de licenciandos em Matemática

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação Matemática. Área de concentração: Educação Matemática.

Orientador: Doutor Willian José da Cruz

Juiz de Fora

2024

Cristiane Corrêa Amaral

Uma análise de obstáculos identificados por meio da aplicação de Experimentos Mentais a um grupo de licenciandos em Matemática

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestra em Educação Matemática. Área de concentração: Educação Matemática.

Aprovada em 09 de agosto de 2024.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Willian José da Cruz - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Profa. Dra. Chang Kuo Rodrigues
Universidade Federal de Juiz de Fora

Profa. Dra. Luciene de Paula
Universidade Federal do Mato Grosso

Juiz de Fora, 18/07/2024.

Documento assinado eletronicamente por **Willian Jose da Cruz**, **Professor(a)**, em 21/08/2024, às 18:51, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **CHANG KUO RODRIGUES**, **Usuário Externo**, em 21/08/2024, às 20:51, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Luciene de Paula**, **Usuário Externo**, em 28/08/2024, às 17:50, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf (www2.ufjf.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **1873150** e o código CRC **519013C5**.

Dedico este trabalho aos meus pais, à minha irmã e a todos que participaram, direta ou indiretamente, de sua realização.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Imaculada e José, por sempre se empenharem para que eu recebesse a melhor educação e formação profissional, apoiando-me em cada etapa do meu desenvolvimento. Agradeço também à minha irmã, Viviane, que me acompanhou ao longo de toda a minha trajetória educacional com muito carinho e alegria. Este trabalho não seria possível sem o apoio de vocês.

A todos os participantes desta pesquisa, que, com muita disposição, se dedicaram ao máximo para contribuir com o desenvolvimento deste estudo, compartilhando seus conhecimentos e vivências ao longo de sua formação, meu sincero agradecimento. Agradeço também ao Thomas por estar sempre presente, incentivando-me e realizando diversos Experimentos Mentais em seu tempo livre para compartilhar seus achados, contribuindo assim com esta pesquisa.

À minha amiga Natalia, que me apoiou durante a escrita desta dissertação. Aos meus colegas de turma do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, que compartilharam suas alegrias e dificuldades ao longo desta jornada de mestrado. Agradeço também aos professores do programa, que nos introduziram a novos conhecimentos e práticas.

Ao meu orientador, professor Dr. Willian José da Cruz, que, com paciência e dedicação, compartilhou seu conhecimento e pesquisa durante os encontros do Grupo de Estudos e Pesquisas dos Experimentos Mentais na Educação Matemática, contribuindo significativamente para a minha formação como educadora matemática desde a graduação.

Às professoras Dra. Chang Kuo Rodrigues e Dra. Luciene de Paula, que integraram a banca examinadora. Suas sugestões e orientações foram essenciais para o desenvolvimento desta pesquisa.

“The writer of a book can do nothing but set down the items of his thought. For the living thought, itself, in its entirety, the reader has to dig into his own soul” (CP 1.221).

RESUMO

Esta pesquisa propõe uma metodologia complementar ao ensino de Matemática, denominada Experimentos Mentais, e visa analisar suas contribuições na formação inicial de um grupo de licenciandos em Matemática na Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF). Tais Experimentos são formas de representar o objeto do conhecimento por meio de diagramas, desenvolvendo deduções e abduções que, ao modificar esses diagramas, levam à formação de novos conceitos e/ou generalizações. A escolha dessa proposta metodológica surge da inquietação dos pesquisadores em resgatar práticas pedagógicas que se apoiam em experimentações, analogias e no uso da dialética no ensino de Matemática. Dentro dessa perspectiva, investigaremos a questão: Como a utilização dos Experimentos Mentais no contexto da Educação Matemática influencia a formação inicial de um grupo de professores de Matemática? Para esta pesquisa qualitativa, buscamos alcançar o objetivo traçado ao identificar os obstáculos tanto da metodologia quanto da Matemática, especialmente aqueles de origem epistemológica e didática, que emergem durante a aplicação dos Experimentos Mentais como estratégia metodológica. Os fundamentos teóricos que embasam este estudo incluem os conceitos semióticos de Peirce e os obstáculos de Brousseau, considerados como signos neste contexto. A pesquisa foi desenvolvida durante as aulas da disciplina Matemática Escolar III, ministrada para licenciandos em Matemática da UFJF. A proposta de utilizar os Experimentos Mentais como recurso adicional demonstrou promover um ensino mais contextualizado e crítico, proporcionando aos licenciandos uma compreensão dialética dos conceitos matemáticos.

Palavras-chave: Experimentos Mentais. Obstáculos. Formação de professores. Ensino de Matemática.

ABSTRACT

This research proposes a complementary methodology to Mathematics teaching, called Thought Experiments, and aims to analyze its contributions to the initial training of a group of Mathematics undergraduates at the Federal University of Juiz de Fora (UFJF). These Thought Experiments are ways of representing the object of knowledge through diagrams, developing deductions and abductions that, by modifying these diagrams, lead to the formation of new concepts and/or generalizations. The choice of this methodological approach arises from the researchers' concern to recover pedagogical practices that rely on experimentation, analogies, and the use of dialectics in Mathematics teaching. Within this perspective, we will investigate the question: How does the use of Thought Experiments in the context of Mathematics Education influence the initial training of a group of Mathematics teachers? For this qualitative research, we aim to achieve the outlined objective by identifying obstacles both in the methodology and in Mathematics, especially those of epistemological and didactic origins, that emerge during the application of Thought Experiments as a methodological strategy. The theoretical foundations of this study include Peirce's semiotic concepts and Brousseau's obstacles, considered as signs in this context. The research was conducted during the classes of the course Mathematics School III, taught to Mathematics undergraduates at UFJF. The proposal to use Thought Experiments as an additional resource proved to promote a more contextualized and critical teaching approach, providing undergraduates with a dialectical understanding of mathematical concepts.

Keywords: Thought Experiments. Didactic Obstacles. Teacher Education. Mathematics Teaching.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A história da educação formal no Brasil começou em 1549 com a chegada dos Jesuítas ao país, marcando o surgimento das primeiras instituições de ensino. Ao longo dos séculos, diversos modelos e tendências educacionais foram se delineando, cada um com suas características e abordagens específicas. Um exemplo notável e duradouro na educação brasileira é a Tendência Liberal Tradicional, conforme ressaltado por Libâneo (2006). O autor aponta que, nesse modelo educacional, os conteúdos são delineados por legislações, conferindo ao docente a responsabilidade de conduzir a aprendizagem de acordo com esses parâmetros. Dentro desse contexto, o autor destaca que o professor desempenha o papel de detentor do conhecimento, utilizando predominantemente a exposição oral para comunicar os conteúdos aos alunos, que assumem uma posição mais passiva como receptores das informações.

Além disso, Libâneo (2006) salienta que a abordagem tradicional enfatiza a memorização mecânica dos conteúdos e a reprodução de informações. Segundo o autor, essa ênfase se justifica pela crença de que a aprendizagem é garantida por meio da repetição de exercícios e do treinamento para aplicar respostas similares em novas situações. Mesmo atualmente, observa-se a prevalência desse modelo em muitas instituições de ensino, frequentemente sem a complementação de outras metodologias, devido à sua institucionalização e enraizamento (Silva *et al.*, 2021). Entretanto, novas teorias e abordagens pedagógicas têm sido propostas na tentativa de promover uma maior participação e protagonismo dos alunos no processo de aprendizagem, além de valorizar o pensamento crítico, a criatividade e a autonomia dos estudantes.

As abordagens metodológicas empregadas no ensino de Matemática, especialmente aquelas que se baseiam exclusivamente em uma única perspectiva, exercem um impacto significativo. Conforme destacado por Miguel (1994), existem quatro paradigmas distintos na Educação Matemática, cada um com concepções próprias. O autor descreve cada paradigma, sendo o primeiro, caracterizado como a ciência do “anti-logos” (Miguel, 1994, p. 53), uma abordagem que nega a razão e não permite questionamentos. Nessa concepção, não há espaço para dúvidas ou debates, apenas uma aceitação passiva do conhecimento imposto. O foco está exclusivamente na resolução de problemas, sem explorar os processos subjacentes, o contexto histórico ou promover uma reflexão crítica sobre o conhecimento matemático.

O segundo paradigma, designado como “concepção light” por Miguel (1994, p. 54), representa uma abordagem superficial e descomprometida com as necessidades sociais e contextuais. Dentro dessa perspectiva, Miguel (1994) aponta que os conteúdos são apresentados de maneira desconexa, sem significado e valor, resultando em um ciclo de aprendizado que não favorece a compreensão dos conceitos matemáticos. O terceiro paradigma, identificado como "mente-caixa registradora" (Miguel, 1994, p. 54), conduz os alunos a se tornarem meros registradores de informações e técnicas, sem compreender o significado do que estão aprendendo. Essa abordagem, conforme o autor, prioriza exclusivamente a memorização e a aplicação mecânica de fórmulas e procedimentos matemáticos, sem estimular o pensamento crítico ou a habilidade de resolver problemas de forma contextualizada.

Por fim, o quarto paradigma, caracterizado por Miguel (1994) como a concepção tecnicista, simplifica a Matemática ao reduzi-la a um conjunto de fórmulas e algoritmos destinados à aplicação em momentos específicos. Essa abordagem desconsidera a relevância do entendimento conceitual e da contextualização dos conteúdos, concentrando-se unicamente em resultados práticos e imediatos. Diante disso, é fundamental que os professores busquem superar abordagens restritivas, adotando diferentes metodologias para cada fase do processo de ensino.

Um exemplo que demonstra a relevância de adotar novas abordagens é o estudo realizado por Duarte (2018). Essa pesquisa envolveu 157 estudantes de duas escolas particulares em Belo Horizonte, incluindo alunos do 9º ano do ensino fundamental e do 1º ano do ensino médio. Os resultados revelaram que 90,45% dos estudantes acreditam que a metodologia empregada pelo professor pode influenciar de maneira significativa o sucesso ou o fracasso escolar. Além disso, 83,44% dos estudantes consideraram o modelo tradicional de ensino como 'desmotivador' e 'entediante', o que contribui para a dispersão em sala de aula.

Esse modelo estritamente tradicional, em consonância com os paradigmas da Educação Matemática, pode ser metaforicamente comparado a uma gaiola que limita os estudantes, privando-os da liberdade de explorar amplamente a realidade e identificar problemas mais abrangentes (D'Ambrosio; Lopes, 2015). Destacamos a necessidade premente de reavaliar as práticas pedagógicas, proporcionando aos estudantes a oportunidade de experimentar abordagens metodológicas complementares. Nesse sentido, o presente estudo, conduzido no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora (PPGEM/UFJF), tem como objetivo analisar as contribuições de uma metodologia complementar, conhecida como Experimentos Mentais, na formação inicial de um grupo de licenciandos em Matemática.

Com o intuito de alcançar esse objetivo, propomos investigar os obstáculos[i], especialmente aqueles de origem epistemológica e didática, que surgem durante a aplicação dos Experimentos Mentais como estratégia metodológica. Esses obstáculos, considerados como signos neste estudo segundo a semiótica peirceana, foram conceituados por Cornu (2002), analisados por Brousseau (2002) e detalhados no terceiro capítulo desta pesquisa. Além disso, salientamos que o cerne desta pesquisa é a indagação: Como a utilização dos Experimentos Mentais no contexto da Educação Matemática influencia a formação inicial de um grupo de professores de Matemática?

Os experimentos mentais são amplamente reconhecidos por filósofos, físicos, matemáticos e outros pensadores, especialmente quando não é viável acessar diretamente um objeto ou testá-lo empiricamente, como será discutido no segundo capítulo deste estudo. Nesse contexto, são criados cenários hipotéticos que permitem a exploração de novas possibilidades e o desenvolvimento de diferentes ideias. Um dos elementos fundamentais dos Experimentos Mentais como metodologia de ensino de Matemática, conforme ressaltado por Cruz (2019), reside exatamente na sua capacidade de conceber e explorar contextos imaginários. O autor destaca que, ao contrário das estruturas lógicas, rígidas e típicas da Matemática, geralmente definidas em termos axiomáticos, formais e dedutivos, os Experimentos Mentais operam em um espaço no qual a imaginação e a intuição desempenham papéis cruciais.

Assim, dentro do amplo contexto de aplicação dos experimentos mentais, destaca-se a importância dessa prática no campo da Educação Matemática. Nessa área específica, os Experimentos Mentais emergem como uma metodologia que não apenas possibilita a representação do objeto de conhecimento por meio de diagramas, mas também permite a realização de deduções, abduções e a verificação dos resultados dentro desses diagramas. O propósito intrínseco é transformar esses diagramas, resultando na obtenção de novos conceitos e/ou generalizações (Cruz, 2024).

Adicionalmente, Cruz (2020a) ressalta que os Experimentos Mentais surgem como uma metodologia que visa resgatar e reintroduzir práticas pedagógicas fundamentadas em experimentação, analogia e no uso de metáforas no ensino da Matemática. O autor destaca que essa abordagem tem como princípio central a inserção do estudante como protagonista ativo e construtor de seu próprio conhecimento, conferindo-lhe um papel essencial no processo de aprendizagem. Ao enfatizar a criatividade como uma ferramenta crucial nesse processo, os

[i] Guy Brousseau (1933 - 2024) conduziu um estudo sobre os obstáculos na Matemática, denominando-os de obstáculos didáticos. Nesta pesquisa, utilizamos o termo "obstáculos" para nos referirmos aos "obstáculos didáticos".

Experimentos Mentais buscam promover uma abordagem mais participativa no ensino da disciplina, incentivando continuamente o aluno a se envolver em uma relação dialética com conceitos e/ou objetos matemáticos.

Essa abordagem metodológica tem suas bases na semiótica desenvolvida por Charles Sanders Peirce (1839-1914), um renomado filósofo, lógico e matemático. Peirce propôs que "A Matemática é o estudo do que é verdadeiro em estados hipotéticos das coisas. Essa é sua essência e definição" (CP 4. 233[ii], tradução nossa[1]). Dentro desse contexto, os Experimentos Mentais ocupam uma posição proeminente, proporcionando um meio de explorar e compreender os aspectos hipotéticos da Matemática.

A relação entre a visão de Peirce sobre a natureza da Matemática e os Experimentos Mentais é analisada de forma mais detalhada no segundo capítulo deste estudo. Nele, apresentamos diferentes perspectivas sobre a Matemática, desde os tempos de Platão e Aristóteles até as correntes de pensamento influenciadas por eles, como o racionalismo e o empirismo. Destaca-se também a posição do filósofo Immanuel Kant, que inspirou Peirce e transitava entre essas duas correntes filosóficas. Além disso, são enfatizadas as visões de Ernst Cassirer (2021), Otte (2012) e Peirce (2010), que convergem para conceber a Matemática como um processo semiótico. A importância desse conjunto de concepções sobre a natureza da Matemática para este trabalho reside no fato de que os Experimentos Mentais se baseiam na ideia de que a Matemática utiliza processos semióticos. A partir dessa premissa, adentramos no estudo da semiótica de Peirce para compreender o que implica considerar a Matemática como uma atividade semiótica, ou seja, como um raciocínio diagramático. Dessa forma, conseguimos estabelecer uma base sólida para a conceituação dos Experimentos Mentais no contexto da Educação Matemática, uma vez que o raciocínio diagramático é fundamental para a execução desses Experimentos.

A metodologia da pesquisa é detalhadamente descrita no quarto capítulo, enquanto no quinto capítulo realizamos a análise dos dados provenientes da aplicação de Experimentos Mentais a estudantes de graduação em Matemática. Além disso, como parte dos resultados desta pesquisa, desenvolvemos um Produto Educacional composto por atividades pedagógicas elaboradas com base na metodologia dos Experimentos Mentais no contexto da Educação Matemática.

Os resultados obtidos por meio desta pesquisa têm o potencial de oferecer contribuições relevantes para o cenário da educação básica, pois repercutem na área de pesquisa

---

[ii] Nas referências de Peirce, CP abrevia The Collected Papers of Charles Sanders Peirce (ver Peirce, 1931-1958). A convenção internacional é CP seguido pelo número do volume, ponto e o número do parágrafo.

educacional. Isso enriquece a compreensão sobre a utilização dos Experimentos Mentais e seu impacto na formação inicial de professores e no ensino da Matemática.

2 MATEMÁTICA COMO ATIVIDADE SEMIÓTICA: A NECESSIDADE DE EXPERIMENTOS MENTAIS

Quem nunca cometeu erros? A própria noção de erro carrega um receio paralisante, pois pressupõe a existência de apenas uma resposta correta e todas as outras incorretas. Essa visão reducionista e pejorativa pode levar o professor a buscar apenas respostas que se encaixem em seu padrão de aceitabilidade, punindo qualquer desvio. No entanto, é essencial reconhecer que até mesmo matemáticos cometem erros. Nós, como professores, também erramos, assim como os mais renomados pensadores que, ao longo dos anos, cometeram equívocos em trabalhos célebres, como será discutido no capítulo três. Isso ocorre porque o conhecimento matemático, assim como qualquer outro tipo de conhecimento, é falível.

Por trás de um erro pode haver um emaranhado complexo de fatores, conhecidos como obstáculos, que permeiam a história do conhecimento matemático. Esses obstáculos podem ter diversas causas, desde a forma como o conhecimento é ensinado até o estágio de desenvolvimento em que o aluno se encontra. Por isso, a preocupação do professor não deve se limitar a corrigir o erro, mas a identificar e superar os obstáculos que podem estar presentes nesse erro. Esta pesquisa não se concentra no erro em si, mas nos obstáculos, compreendidos à luz da semiótica, como será explorado no capítulo três. Contudo, sem uma compreensão clara do que é a Matemática e do que ela trata, não conseguimos identificar o que constitui um obstáculo matemático.

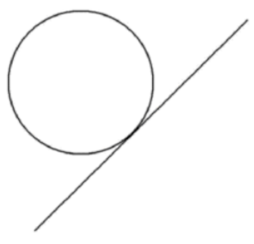
Do que se trata a Matemática? Por séculos, diversos estudiosos têm se dedicado a questões sobre a natureza da Matemática, incluindo filósofos como Platão (428 a.C. - 327 a.C.), Kant (1724-1804) e Peirce (1839-1914). O campo que se debruça sobre essas questões é conhecido como filosofia da Matemática, pois está constantemente buscando elucidar aspectos da própria Matemática, suas aplicações, a linguagem matemática e até mesmo nós próprios. Uma tarefa intimidante [...]" (Shapiro, 2000, p. 30).

Dessa forma, Shapiro (2000) argumenta que o filósofo da Matemática se concentra em responder a perguntas sobre o que é a Matemática, como foi seu desenvolvimento, o que nos permite entender a Matemática, compreender sua linguagem, ensiná-la a outros e, particularmente, como conhecer as referências que a Matemática faz a certos objetos especiais, se é que eles existem. Diferentes correntes filosóficas apresentam visões sobre a natureza da Matemática, como o realismo, o idealismo e o nominalismo. Shapiro (2000) explicita cada uma delas: no realismo, acredita-se que existem objetos matemáticos que independem de nós; no idealismo, concebe-se que esses objetos existem, mas dependem da mente humana e não da realidade física; já o nominalismo é uma corrente que nega a existência de entidades matemáticas.

Silva (2007) afirma que Platão foi um filósofo idealista que concebia o mundo físico, acessado por meio dos sentidos, como uma cópia imperfeita de um mundo com entidades perfeitas, eternas e imutáveis, o mundo das Ideias. Dessa forma, o autor justifica que os objetos matemáticos, como números e figuras geométricas, pertencem a um reino independente do mundo físico e do sujeito; isto é, mesmo que o mundo físico não existisse, a Matemática ainda existiria no mundo das Ideias, onde estão as essências puras. Assim, Silva (2007) explana que, para Platão, a Matemática se concentra nas formas e não nos ideais perfeitos que existem fora do espaço e do tempo, pois estes não são acessíveis pelos sentidos. Exemplos disso incluem retas sem espessura, pontos adimensionais e circunferências perfeitas, que representam apenas aproximações das formas puras.

Shapiro (2000) ilustra o conceito platônico ao considerar o teorema geométrico que afirma que uma reta tangente a uma circunferência a toca em um único ponto. Para o autor, se tentarmos representar isso no papel, mesmo com ferramentas avançadas ou um lápis muito afiado, perceberemos que a reta não toca a circunferência em um único ponto, mas em uma pequena região (Figura 1). No entanto, isso não contradiz o teorema, e Platão justifica essa discrepância argumentando que estamos apenas construindo aproximações tanto da circunferência quanto da reta verdadeira, que existem no mundo das Ideias. Ele explica que os geômetras, por exemplo, utilizam figuras tendo em mente os originais dos quais essas figuras são imagens: "fazem os seus raciocínios por causa do quadrado em si ou da diagonal em si, mas não daquela cuja imagem traçaram, e do mesmo modo quanto às restantes figuras" (República[iii], V, 510d 6-9).

Figura 1 – Reta tangente a uma circunferência



Fonte: Shapiro, 2000, p. 79.

[iii] O formato de citação das obras da Antiguidade não segue as normas da ABNT. Ao fazer referência aos livros de Platão, é comum destacar o livro em numeração romana, seguido das páginas e dos parágrafos (a, b, c e d), podendo acrescentar o número da linha.

Dessa forma, de acordo com Brown (2011), existem vários ingredientes envolvidos no platonismo, destacando-se: (1) os objetos matemáticos existem de forma independente; portanto, os enunciados matemáticos são verdadeiros ou falsos, independentemente do nosso conhecimento; (2) esses objetos são abstratos, existindo fora do nosso espaço e tempo; (3) os apreendemos por meio da mente; e (4) o conhecimento matemático é *a priori*, ou seja, não depende dos sentidos físicos. A aceitação do reino das Ideias idealizado por Platão é baixa, embora a "imagem da Matemática como uma ciência de um domínio fora desse mundo ao qual ascendemos pelo pensamento é ainda a 'filosofia' natural dos matemáticos" (Silva, 2007, p. 43).

Aristóteles foi um dos filósofos que se opôs à crença no reino de entidades eternas concebido por Platão. Conforme Silva (2007), para Aristóteles, os objetos matemáticos, sejam aspectos quantitativos ou geométricos, são idealizados a partir dos objetos físicos ou são apenas uma ficção útil, isto é, meras possibilidades. Além disso, o autor destaca que a Matemática abstrai, ou seja, retira apenas algumas características ou aspectos dos objetos, por exemplo, abstraí-se da bola a forma geométrica aproximada da esfera e, ao mesmo tempo, idealiza-se a forma desconsiderando as diferenças entre elas. O acesso a esses objetos depende, de certa maneira, dos sentidos humanos, pois são características de objetos reais: "nós literalmente vemos os objetos matemáticos, grudados como uma pele aos objetos sensíveis" (Silva, 2007, p. 55).

Posteriormente, Platão e Aristóteles desempenharam papéis significativos em duas correntes filosóficas que surgiram na Europa no século XVII: o racionalismo e o empirismo. Conforme Shapiro (2000), os herdeiros naturais de Platão foram os racionalistas, como sugere o próprio nome, uma vez que enfatizavam a razão em contraposição à experiência sensorial na busca pelo conhecimento. Por outro lado, os empiristas fundamentavam-se nas experiências proporcionadas pelos sentidos humanos, ou seja, no conhecimento adquirido por meio da observação do mundo, o que remete a uma perspectiva aristotélica. Nessa visão, "a nossa ideia do número seis, por exemplo, vem da nossa experiência com grupos de seis objetos. A ideia de 'triângulo' vem de observar objetos triangulares" (Shapiro, 2000, p. 102).

Além disso, Shapiro (2000) enfatiza que tanto os racionalistas quanto os empiristas reconhecem que a Matemática lida com magnitudes físicas, ou seja, objetos com extensão. No entanto, o autor pontua que os racionalistas enfrentam o desafio de estabelecer uma relação entre as entidades matemáticas e os objetos materiais ao nosso redor devido às discrepâncias existentes entre eles. Por outro lado, os empiristas não enfrentam essa dificuldade, pois há uma concordância entre os objetos físicos e a matemática derivada deles. Desse modo, evidenciam-se novamente outras características herdadas das ideias e abordagens desenvolvidas por Platão e Aristóteles, que influenciam o racionalismo e o empirismo.

No encontro entre as correntes racionalistas e empiristas, surge a figura do filósofo Immanuel Kant (1724-1804), que adotou uma postura equilibrada, considerando tanto a razão, com suas condições *a priori*, quanto a experiência intuitiva. Kant categorizou os juízos em dois tipos: analíticos e sintéticos. Os juízos, ou asserções, são declarações compostas por sujeito e predicado, sendo o predicado aquilo que se afirma do sujeito.

Os juízos analíticos são aqueles nos quais o conceito do predicado já está contido no conceito do sujeito. Dessa forma, eles são obtidos apenas por meio da análise conceitual, resultando em uma mera repetição ou reafirmação. Por exemplo, o juízo 'todo triângulo tem três lados' é analítico porque o conceito de 'três lados' está incluído no conceito de 'triângulo'. A definição de triângulo implica a existência de três lados, sem agregar nova informação, apenas reafirmando o que já é conhecido.

Por outro lado, o juízo sintético difere do analítico porque o conceito do predicado vai além do conceito do sujeito e não pode ser decomposto ou derivado deste último. Por exemplo, o juízo 'a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° na geometria euclidiana' é sintético, pois exige conhecimentos que ultrapassam a simples definição de triângulo. É necessário realizar uma investigação geométrica para demonstrar essa propriedade, pois não se trata apenas de um rearranjo de conceitos.

Conforme Kant (B14)[iv], a essência da Matemática é sintética, ou seja, ela proporciona novas verdades que extrapolam o que está contido nos conceitos analisados. Além disso, é considerada *a priori*, visto que, para ele, a Matemática não está sujeita à experiência sensorial do mundo. De acordo com Silva (2007), essa natureza é paradoxal, pois nem os sentidos nem a lógica, fornecida pelos juízos analíticos, são suficientes para analisar as proposições matemáticas. Para resolver esse dilema, Kant postula a existência de intuições puras, que são independentes dos sentidos, não empíricas e inatas a todos os seres humanos. Por exemplo, para ele, o tempo e o espaço são formas puras de intuição que são dadas *a priori*, razão pela qual dispensam a experiência.

Isso é evidenciado quando Kant argumenta sobre a proposição '$7 + 5 = 12$'. À primeira vista, pode-se acreditar que essa proposição é analítica. No entanto, uma análise meramente conceitual não é suficiente para produzir o resultado da adição igual a doze, pois

[iv] As citações das obras de Kant correspondem à forma recomendada pela Akademie-Ausgabe e adotada pela Sociedade Kant Brasileira.

não há nada nos conceitos de 'cinco' e 'sete' que resulte no número doze, como menciona Silva (2007). Kant (B16) afirma que, se observamos de perto, percebemos que “o conceito da soma de 7 e 5 não contém nada mais do que a unificação de ambos os números em um único, pela qual absolutamente não se pensa qual seria esse único número que reúne ambos”. A solução proposta por Kant é recorrer à representação dos conceitos de 5 e 7 por meio de uma intuição pura.

Silva (2007) explica que, para Kant, nossa imaginação busca exemplos de conceitos numéricos por meio da intuição temporal. Por exemplo, o número sete é representado por uma sequência com sete instantes no tempo, ou então, espacializamos a representação utilizando uma sequência de sete pontos. É comum observarmos que as crianças representam essa adição utilizando os dedos das mãos. Primeiramente, uma das parcelas a ser somada é representada com sete dedos e, em seguida, cada uma das unidades da segunda parcela é adicionada utilizando os dedos restantes.

Shapiro (2000, p. 115) argumenta que “necessitamos de um exemplo de uma coleção de cinco objetos. Isto, todavia, não é suficiente, visto que ainda não temos a soma. Então ‘gradualmente adicionamos, ao conceito de sete, as unidades dos cinco dados na intuição’”. Assim, são produzidos os demais números, como sete, oito, e assim por diante, até chegarmos ao onze e ao doze. Esse conceito construído não está contido na proposição, sendo a intuição pura responsável pela descoberta das possibilidades dessa atividade construtiva, o que torna a Matemática essencialmente uma atividade de construção mental (Shapiro, 2000). Dessa forma, os objetos matemáticos, para Kant, são construídos no intelecto do sujeito por meio da intuição pura e são acessados por meio de suas representações, pois, “nós não podemos pensar linha alguma sem desenhá-la em pensamento; não podemos pensar círculo algum sem delineá-lo” (Kant, B155).

Para Otte (2012), professor emérito da Universidade de Bielefeld (Alemanha), o conhecimento matemático não está exclusivamente na mente do sujeito. Em vez disso, Otte (2012, p. 13) concebe o conhecimento como “um processo semiótico que envolve o próprio sujeito”. Segundo sua perspectiva, a transformação da percepção em cognição só é possível por meio de símbolos, estabelecendo assim uma mediação entre a sensação consciente e a reação objetiva. Essa interação ocorre por meio de representações, ou seja,

> O pensamento ocorre por sinais e por representações, ao invés de ser por meio de imaginações ou intuições, que procuramos dentro de nossas cabeças. Isso não significa que o reconhecimento consciente e a atividade intuitiva sejam dispensáveis. Significa apenas que eles têm que ser considerados como meios e instrumentos da atividade cognitiva, ao invés de como seus fundamentos (Otte, 2012, p. 15).

Ernst Cassirer (1874-1945), filósofo alemão, observa que "o conhecimento humano é por sua própria natureza um conhecimento simbólico" (Cassirer, 2021, p. 96). Cruz (2018, p. 21) corrobora essa visão, afirmando que "as coisas no mundo são essencialmente de dois tipos: objetos e símbolos". Essa perspectiva do conhecimento como um processo simbólico está alinhada com as ideias de Charles Sanders Peirce, que desenvolveu uma teoria abrangente do estudo dos signos.

Peirce (2010, p. 195) conceitua a Matemática como “a ciência que extrai conclusões necessárias”, uma definição herdada de seu pai, Benjamin Peirce (1809 - 1880), e também como "o estudo do que é verdadeiro quanto ao estado de coisas hipotético" (CP 4.233)[2]. Campos (2007) cita as seguintes características desse estado hipotético: (1) é um conjunto de situações ou um mundo matemático perfeitamente definido e geral; (2) é um mundo real no sentido de que podemos trazê-lo ao campo de ação da imaginação, no qual nada se esconde; (3) o conjunto de situações não corresponde a nenhum estado que exista na natureza; (4) mesmo sendo situações imaginárias, podem ser compreendidas pela reflexão, pois são delimitadas logicamente, ou seja, existem regras que governam esse mundo; (5) as verdades matemáticas são consequências possíveis de uma hipótese. Dessa forma, as hipóteses matemáticas gerais são construções mentais que existem em uma realidade própria, independente da experiência, mas regidas pela lógica.

De acordo com Campos (2007, p. 85), esse mundo hipotético citado por Peirce pode ser representado por meio de um diagrama cujo objetivo principal “não é o ato de desenhar uma figura geométrica ou escrever uma expressão algébrica; na verdade, é o ato de imaginar uma representação que incorpore a relação entre objetos que se sustentam em nosso mundo puramente hipotético”. Assim, diferentemente de Platão, Aristóteles e Kant, a visão de Peirce sobre a Matemática é que ela se desenvolve por meio de diagramas, sendo essencialmente uma atividade semiótica. Isso quer dizer que a Matemática constrói diagramas, faz experimentações sobre eles e observa os resultados. Nessa concepção, a Matemática é uma prática que envolve a imaginação de situações hipotéticas e a busca pela verdade sobre essas situações, visando explorar os diversos mundos possíveis (Campos, 2007).

Diante da variedade de interpretações sobre a natureza da Matemática e a questão de onde residem seus objetos, caso existam, optaremos por adotar a perspectiva semiótica da Matemática, conforme estudada por Peirce. A razão por trás dessa escolha reside na consideração da Matemática como um raciocínio diagramático, uma abordagem que fundamenta os Experimentos Mentais no âmbito da Educação Matemática. Dessa forma, aprofundaremos a análise da teoria semiótica de Peirce para estabelecer uma compreensão mais precisa e conceitual do raciocínio diagramático e dos Experimentos Mentais.

2.1 SIGNOS NA TEORIA DE CHARLES SANDERS PEIRCE

Embora existam atualmente várias linhas de pesquisa em semiótica, foi apenas no século XX que a perspectiva de "uma ciência dos signos, da significação e da cultura" (Santaella, 2018, p. XV) se tornou amplamente reconhecida. Uma dessas correntes foi desenvolvida por Charles Sanders Peirce (1839-1914), um filósofo, cientista e matemático nascido em Cambridge (EUA). Essa corrente tem suas bases na fenomenologia, que é definida como "[...] o total coletivo de tudo o que está de alguma forma ou em algum sentido presente na mente, independentemente de corresponder ou não a qualquer coisa real"[3] (CP 1.284, tradução nossa).

Na semiótica desenvolvida por Peirce, signo é "aquilo que, sob certo aspecto ou modo, representa algo para alguém. [...] O signo representa alguma coisa, seu objeto. Representa esse objeto não em todos os seus aspectos, mas como referência a um tipo de ideia" (Peirce, 2010, p. 46). Dessa forma, um simples gesto de despedida é um signo, pois indica que a pessoa se retirará do local. Além disso, podemos afirmar que um grito, um sinal feito com a intenção de fazer um ônibus parar, um livro, uma pintura, uma fotografia, uma palavra, uma música etc., são todos signos nessa concepção. Segundo Santaella:

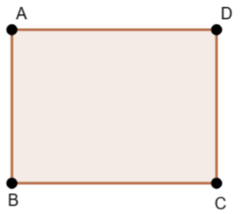
> Qualquer coisa que esteja presente à mente tem a natureza de um signo. Signo é aquilo que dá corpo ao pensamento, às emoções, reações etc. Por isso mesmo, pensamentos, emoções e reações podem ser externalizados. Essas externalizações são traduções mais ou menos fiéis de signos internos para signos externos (Santaella, 2018, p. 10).

Conforme destacado por Santaella (2018), um signo é uma entidade de qualquer natureza que representa um objeto, seja ele físico ou abstrato, e provoca um efeito interpretativo. Ele é algo que se apresenta à mente e estabelece uma ligação entre o objeto que representa e o interpretante. Por um lado, o signo é determinado pelo seu objeto e, por outro, ele determina uma mente, denominada interpretante, como delineado por Peirce (2010). Nesse sentido, o signo possui uma relação triádica, o que significa que ele pode ser compreendido por si só, em relação ao que indica (seu objeto) e nas interpretações que pode provocar nas pessoas (Santaella, 2018).

Voltemos ao exemplo do grito como um signo. Quando alguém emite um grito, produz um som que pode indicar diferentes estados emocionais, como perigo, felicidade ou dor. Esses estados emocionais são os possíveis objetos representados pelo grito, ou seja, constituem o conteúdo transmitido pelo grito. De acordo com Santaella (2018), a reação de alguém correr para ajudar a pessoa que gritou ou expressar alegria ao gritar junto com ela ocorre devido ao efeito interpretativo gerado no intérprete.

Também podemos considerar uma situação em uma sala de aula. Quando um professor desenha uma figura na lousa, como exemplificado na Figura 2, o aluno é capaz de reconhecê-la observando suas características, como o número de lados, vértices e ângulos. Conforme mencionado por Cruz (2018), esse signo visual criado pelo professor representa um conceito matemático abstrato, conhecido como quadrilátero, que provoca um efeito interpretativo no aluno, permitindo que ele identifique a figura como um quadrilátero.

Figura 2 – Representação de um quadrilátero



Fonte: Produzido pela autora, 2023.

No entanto, de acordo com Cruz (2019), para que um intérprete possa reconhecer a representação de um objeto, é necessário que ele já possua um conhecimento prévio sobre o objeto em questão. Em outras palavras, o objeto deve ter uma relevância ou significado pré-existente para o intérprete. Assim, sem a atuação interpretativa, o próprio signo perde seu significado intrínseco. É de extrema importância que haja um sujeito epistêmico, "responsável por interpretar representações internas baseadas em interesses, propósitos, crenças, valores, emoções e fatores como seu mundo próprio, ambiente e estado neurofisiológico" (Hoffmann, 2013, p. 118). Nesse contexto, o papel do signo se revela crucial, pois, como salientado por Cruz:

> […] o signo é uma relação de representação, ou seja, o sinal media a relação entre os objetos e o interpretante. Mais uma vez, ele [Peirce] oferece uma tríade e distingue entre os sinais: o representâmen, o sinal; o interpretante, o sentido ou significado feito pelo sinal, seja imediato (o significado é o sinal), dinâmico (o significado é um efeito) ou final (sentido normativo/ideal); e o objeto, representado pelo sinal, seja imediato (o objeto é representado no sinal) ou dinâmico (o objeto real) (Cruz, 2018, p. 29).

Segundo Peirce (2010), o ato de representar envolve assumir o lugar de algo, o que implica que indivíduos como advogados, porta-vozes ou deputados podem ser considerados como se estivessem desempenhando o papel de outra entidade. De maneira similar, os signos assumem as características de um objeto para ocupar seu lugar. Para representar um objeto, utiliza-se um representâmen (um sinal). No entanto, é crucial observar que o signo não substitui completamente o objeto, uma vez que não consegue abarcar todas as suas características de maneira abrangente (Peirce, 2010).

Conforme discutido por Nöth e Santaella (2017), a palavra "pato", por exemplo, é um signo porque representa algo para alguém. No entanto, eles ressaltam que nem a palavra nem a representação visual podem substituir integralmente um pato real, que possui qualidades distintas, como a capacidade de voar e nadar. O artista René Magritte (1928), renomado desenhista, ilustrador e pintor belga associado ao movimento surrealista, explorou essa noção de representação em sua icônica obra intitulada "A Traição das Imagens" (Figura 3). Ao examinarmos essa obra, deparamo-nos com a imagem de um cachimbo, acompanhada pela inscrição: "Isto não é um cachimbo". Essa declaração questiona diretamente a noção de que a representação visual do objeto seja equivalente ao objeto em si.

Figura 3 – Obra do artista René Magritte

Fonte: Magrite, 1929.

Peirce também aborda o conceito de objeto imediato, que é "tal como o próprio signo o representa" (Peirce, 2010, p. 177), indicando que o objeto está intrinsecamente ligado ao signo. Em contrapartida, o objeto dinâmico é aquilo que "o signo não pode exprimir, que ele pode apenas indicar" (Peirce, 2010, p. 177), pois o objeto está externo ao signo. Além disso, o termo "imediato" é utilizado porque nossa única conexão com o objeto dinâmico é mediada pelo objeto imediato, uma vez que nossa interação com o que consideramos realidade sempre ocorre por meio de signos (Santaella, 2018). Por exemplo, a fotografia de uma cidade representa um objeto imediato, enquanto a própria cidade em sua existência é o objeto dinâmico. Da mesma forma, um concerto musical assistido pela televisão é um objeto imediato, enquanto o show ao vivo constitui o objeto dinâmico.

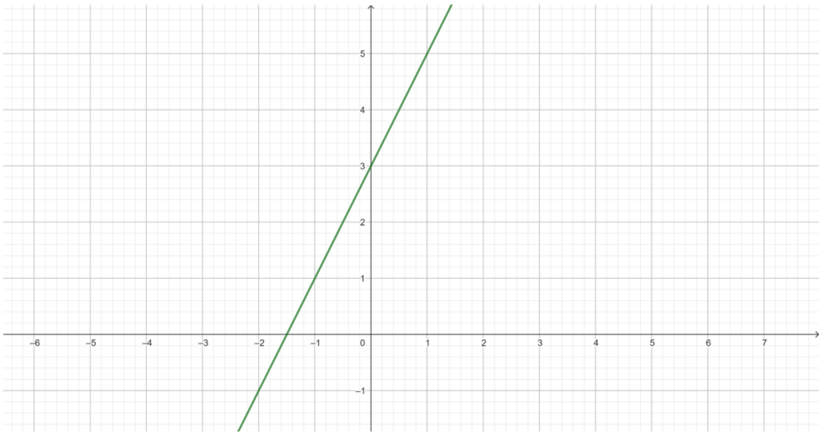
Na teoria semiótica de Peirce, o interpretante é categorizado em três tipos: imediato, dinâmico e final. O interpretante imediato refere-se ao potencial interpretativo do signo, enquanto o interpretante dinâmico diz respeito ao efeito produzido em um intérprete específico. Além disso, o interpretante final é descrito por Peirce como "aquilo que *finalmente se decidiria* ser a interpretação verdadeira se se considerasse o assunto de um modo tão profundo que se pudesse chegar a uma opinião definitiva" (Peirce, 2010, p. 164, *grifo do autor*), ou seja, o interpretante final representa o resultado que todos os intérpretes deveriam alcançar de maneira coletiva. Contudo, dado que isso não é possível, o interpretante final é meramente um limite imaginário, nunca plenamente atingido (Santaella, 2018).

Desse modo, conforme argumenta Otte (2012), não existe um significado definitivo para qualquer coisa, uma vez que todo o nosso raciocínio é essencialmente uma interpretação de signos, gerando novos signos em um ciclo infinito. Peirce (2010, p. 74) aborda esse processo, chamado de semiose, ao afirmar que um signo é "qualquer coisa que conduz alguma outra coisa (seu interpretante) a referir-se a um objeto ao qual ela mesma se refere (seu objeto), de modo idêntico, transformando-se o interpretante, por sua vez, em signo, e assim sucessivamente *ad infinitum*". Essa perspectiva nos leva a uma visão evolutiva do conhecimento, em que ocorre uma contínua transformação das representações, permitindo interpretações das próprias interpretações (Monteiro, 2021).

Assim, ao examinarmos o gráfico na Figura 4, identificamos a representação de uma função afim. Iniciamos um processo de semiose, gerando novos signos, ao compreender a estrutura da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida como $f(x) = ax + b$, em que a e b são números reais e $a \neq 0$. Nesse contexto, o coeficiente a representa a inclinação da reta em relação ao eixo x, também conhecido como coeficiente angular, enquanto b é o coeficiente linear, correspondendo à ordenada do ponto de interseção com o eixo y.

Desse modo, para o gráfico abaixo, encontramos $f(x) = 2x + 3$, pois a reta passa pelos pontos $A\ (0, 3)$ e $B\ (-1, 1)$. O coeficiente linear é igual a 3, e o coeficiente angular é calculado como $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1-3}{-1-0} = \frac{-2}{-1} = 2$. Além disso, é possível explorar o crescimento ou decrescimento da função, sua imagem e domínio. Também podemos abordar a função afim como uma transformação de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ do tipo $X \mapsto AX + B$, em que A é uma matriz $n \times n$ com entradas reais e determinante não nulo, B é um vetor coluna fixo e $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$. No caso proposto, utilizamos $n = 1$, $A = [a] \neq 0$ e $x \mapsto ax + b$ (Medeiros, 2021). Com isso, estamos constantemente interpretando interpretações, começando pelo primeiro signo dado, o que demonstra um contínuo processo de semiose.

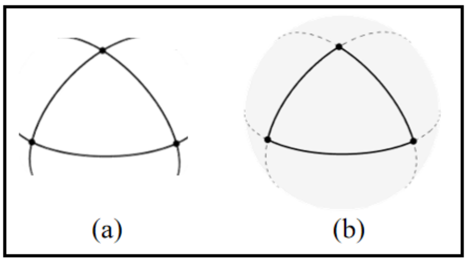
Figura 4 – Função afim



Fonte: Produzido pela autora, 2023.

Nöth e Santaella (2017) explicam que o processo interpretativo ocorre em diferentes níveis e está intrinsecamente ligado à maneira como o signo representa o objeto. Por exemplo, ao examinar a Figura 5(a), é imediatamente possível perceber um efeito interpretativo primário que indica a união de três arcos (interpretante imediato), uma vez que esse sentido está contido no próprio signo. No entanto, essa mesma representação pode gerar outro efeito interpretativo em um intérprete específico (interpretante dinâmico), sugerindo a presença de semelhanças com triângulos, já que possui três vértices, três ângulos internos e três lados. Como resultado, o objeto retratado na Figura 5(a) pode estar relacionado ao conceito de triângulos na geometria esférica, conforme ilustrado na Figura 5(b), o que constitui o interpretante final (Cruz, 2022).

Figura 5 – União de três arcos e/ou triângulo da Geometria Esférica?



Fonte: Produzido pela autora, 2022.

Conforme Lafuente (2016), podemos conceber que o interpretante imediato abarca todo o conhecimento disponível acerca de um objeto, isto é, a totalidade das informações a respeito da Figura 5(a) até o momento. Em contrapartida, o interpretante dinâmico representa uma parcela desse conhecimento, contida no signo e acessível a um intérprete específico. Enquanto isso, o interpretante final corresponde à finalidade subjacente a essa representação, possivelmente relacionada ao triângulo na geometria esférica, como retratado na Figura 5(b) (Lafuente, 2016). Além disso, podemos identificar o objeto imediato como a representação do triângulo (Figura 5(b)), ao passo que o triângulo em sua concepção idealizada constitui o objeto dinâmico.

A representação do triângulo da geometria esférica na Figura 5(b) exemplifica um tipo de signo denominado ícone, devido à sua semelhança com o objeto matemático abstrato conhecido como triângulo. Quando nos referimos a esse objeto, empregamos indicadores como "triângulo ABC". Esta maneira de fazer referência a um objeto específico, que não apenas se assemelha, caracteriza um signo chamado índice. Por outro lado, ao mencionarmos "triângulo esférico", utilizamos um símbolo, ou seja, uma ideia geral que faz com que o símbolo seja interpretado de forma a significar o objeto.

Santaella (2018) explora o conceito de que, entre as inúmeras propriedades que as coisas possuem, três delas conferem a elas a capacidade de desempenhar o papel de signos: sua qualidade, existência e caráter de lei. Assim, há três categorias de relação que um signo pode estabelecer com seu objeto. Peirce considera essa relação triádica fundamental para o processo de raciocínio, sendo o primeiro aspecto:

> [...] o signo diagramático ou ícone, que ostenta uma semelhança ou analogia com o sujeito do discurso; o segundo é o índice que, tal como um pronome demonstrativo ou relativo, atrai a atenção para o objeto particular que estamos visando sem descrevê-lo; o terceiro (ou símbolo) é o nome geral ou descrição que significa seu objeto por meio de uma associação de ideias ou conexão habitual entre o nome e o caráter significado (Peirce, 2010, p. 10).

Nöth e Santaella (2017) discutem que, de maneira semelhante à gramática, em que palavras que se referem a categorias gerais são chamadas de substantivos comuns, na semiótica, um signo que representa um objeto geral é denominado símbolo. Quando há a necessidade de especificar algo dentro dessa categoria, na língua portuguesa utilizamos substantivos próprios, enquanto na semiótica empregamos índices. Além disso, ao atribuirmos características a substantivos, utilizamos adjetivos como "bonito", "alegre" ou "redondo". Os autores destacam que, para Peirce, signos que representam qualidades são chamados de ícones; por exemplo, uma imagem representa qualidades como cores etc.

Nesse sentido, conforme Santaella (2018, p. 20), “o ícone sugere através de associações por semelhança e o índice indica através de uma conexão de fato, existencial, o símbolo representa através de uma lei”. Para compreender essa relação triádica definida por Peirce, considere a imagem de uma árvore. Essa representação possui semelhanças e qualidades relacionadas à árvore concreta, tornando-se um ícone. As folhas que caem ao chão indicam a existência de uma árvore, sendo, portanto, signos indiciais. Por outro lado, ao ouvirmos a palavra "árvore", nossa mente pode associar ideias que se referem a algo com folhas, tronco e galhos, criando uma representação mental do signo. Essa associação específica é um símbolo.

Os ícones, índices e símbolos desempenham um papel frequente na Matemática, como observado por Cruz (2019). Em sua argumentação, ele ressalta que todas as letras empregadas na álgebra funcionam como índices, enquanto os diagramas algébricos e geométricos atuam como ícones. Tomemos a Figura 4 como exemplo: identificamos essa representação como um ícone que simboliza uma função afim (símbolo); sua formalização, $f(x) = 2x + 3$, também é um ícone. Poderíamos representá-la como a função f, que segue uma regra de formação específica. A Figura 2, por sua vez, exibe um quadrilátero, que se configura como um ícone devido à sua semelhança com o conceito matemático de quadrilátero. A palavra "quadrilátero" assume o papel de símbolo, evocando uma associação geral de ideias que leva o intérprete a conceber uma figura plana com quatro lados, ângulos e vértices. Ao mencionarmos um objeto específico, podemos fazê-lo por meio da expressão "quadrilátero ABCD".

Além disso, os símbolos podem ser utilizados como argumentos, conforme definido por Peirce (2010, p. 29), sendo “um signo que representa distintamente o interpretante, denominado de sua Conclusão, que ele deve determinar”. Isso implica que um argumento é composto por uma conclusão e por premissas, sendo estas os elementos restantes quando a conclusão é removida. Peirce destaca que existem três tipos de argumentos: indução, dedução e abdução.

A indução, conforme descrita por Peirce (2010), é um processo de verificação experimental de uma teoria específica. Neste método, a conclusão é considerada aproximada, já que é resultado de um processo de inferência. Um exemplo disso é quando há um galpão contendo vários sacos de feijão. Ao abrir um dos sacos e retirar um punhado, observa-se que todos os grãos são pretos. A partir dessa observação experimental, é possível inferir que todos os feijões daquele saco possuem coloração preta.

Por outro lado, a dedução, segundo Peirce (2010), envolve a análise do estado das coisas presentes nas premissas. Um diagrama é então elaborado, revelando relações que podem não ter sido explicitamente indicadas inicialmente. A dedução conclui que essas relações sempre existiram, pelo menos em certos casos, desenvolvendo assim as consequências de uma hipótese.

Em consonância com Santaella (2018, p. 18), um diagrama “representa seu objeto por similaridade entre as relações internas que o signo exibe e as relações internas do objeto que o signo visa representar”. Para a autora, um exemplo seria o mapa do metrô de Londres, que é um diagrama devido à semelhança das relações internas com o objeto representado, não se restringindo apenas à aparência. Isso está alinhado com o entendimento de Peirce (2010, p. 66), no qual ele esclarece que “muitos diagramas não se assemelham, de modo algum, com seus objetos, quanto à aparência; a semelhança entre eles consiste apenas quanto à relação entre suas partes”.

Por exemplo, considere o seguinte problema representado por um diagrama algébrico: Em um restaurante, há 12 mesas, todas ocupadas. Algumas mesas têm 4 pessoas, enquanto outras têm apenas 2 pessoas, resultando em um total de 38 fregueses. Precisamos determinar o número de mesas ocupadas por apenas 2 pessoas. Este problema pode ser representado pelo sistema de equações:

$$\begin{cases} 4x + 2y = 38 \\ x + y = 12 \end{cases}$$

No qual x representa o número de mesas ocupadas por 4 pessoas e y representa o número de mesas ocupadas por 2 pessoas. Este diagrama não se assemelha ao objeto original em termos de aparência, mas sim nas relações entre suas partes. Uma abordagem alternativa para resolver o problema é desenhar 12 mesas, cada uma com 4 pessoas, totalizando 48 pessoas. Em seguida, subtraímos 2 pessoas de 5 mesas, ou seja, 10 pessoas, para obter o total desejado de 38 fregueses. Assim, concluímos que há 5 mesas ocupadas por apenas 2 pessoas.

Peirce (2010) também identifica dois tipos de deduções: as necessárias, que podem ser classificadas como ilativas ou teoremáticas, e as prováveis. No primeiro caso, premissas que são verdadeiras levam a conclusões também verdadeiras. Nas deduções ilativas, a conclusão de um argumento é apresentada em um diagrama e, por meio de mera observação, a verdade da conclusão é comprovada. Por outro lado, a dedução teoremática implica a modificação do diagrama original, validando a verdade da conclusão por meio da observação do diagrama alterado. Por fim, as deduções prováveis estão relacionadas a razões de frequência (Peirce, 2010).

A abdução, também conhecida como retrodução, envolve a investigação de fatos para formular uma hipótese provisória, uma teoria que possa explicar esses fatos. Segundo Peirce (2010), é o único tipo de raciocínio que introduz uma nova ideia. Consequentemente, “dedução prova que algo deve ser; a Indução mostra que alguma coisa é realmente operativa; a Abdução simplesmente sugere que alguma coisa pode ser” (Peirce, 2010, p. 220). Portanto, qualquer forma de raciocínio que não se encaixe na indução nem na dedução deve ser classificada como abdução, uma vez que, segundo Peirce, existem apenas três formas de raciocínio.

A concepção de abdução pode parecer ampla e complexa, mas o que Peirce deseja comunicar é que:

> Em outras palavras: os argumentos abdutivos formulam sinteticamente explicações, tentativas para todas as situações na ciência ou fora dela que, sem eles, permaneceriam como fatos inexplicáveis. Em palavras mais simples ainda: diante de algo que nos surpreende, a abdução é o processo pelo qual brota, engendra-se uma hipótese ou conjectura. Esse processo ou raciocínio tem a forma de uma inferência lógica, isto é, de um argumento frágil, ao mesmo tempo em que nasce no flash de um insight. Uma inferência que é simultaneamente um insight. Eis aí o nó da questão (Santaella, 2004, p. 102).

No entanto, é possível identificar certas problemáticas no conceito abdutivo de Peirce. Segundo Hoffmann (2006), qualquer percepção poderia ser potencialmente vista como uma abdução. Ela argumenta que essa abordagem poderia ser considerada uma simples operação lógica, mas não há como derivar uma hipótese genuinamente nova por meio de inferência lógica. Hoffmann (2006) também destaca a incerteza quanto ao que exatamente a abdução realiza e se a geração de uma ideia nova e a formulação de uma hipótese explicativa são processos idênticos, já que é possível que a segunda ocorra sem a necessidade de criar a primeira. Além disso, a autora aponta que não está claro se a novidade da ideia gerada se aplica somente à pessoa que a formula ou à sociedade como um todo. Diante dessas complexidades, a definição de abdução proposta por Peirce pode se expandir para englobar seis formas distintas, como ilustrado no Quadro 1.

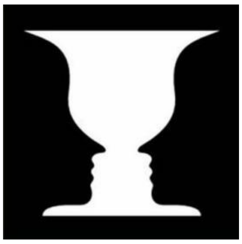
Quadro 1 – Formas de abdução

	Se "ideia" significa algo que pode ser representado por um símbolo singular (Com base na reificação)	Se "ideia" significa a perspectiva sobre dados, ou sobre uma representação (Transformação teórica)
Se uma explicação é possível ao fazer referência a uma ideia que já existente em nossa mente	Identificando Abdução (a)	Mudança de Gestalt (b)
Se criarmos uma ideia que é nova para nós, mas que já existe como parte do conhecimento de nossa cultura	Abdução Reificadora Analógica (c)	Abdução Teórica Analógica (d)
Se criarmos uma ideia que é completamente nova	Abdução Reificadora criativa (e)	Abdução teórica criativa (f)

Fonte: Hoffmann (2006, p. 9, tradução nossa).

Cruz (2022) exemplifica cada uma das seis formas de abdução mencionadas. A forma de abdução (a) ocorre quando ouvimos a palavra "triângulo" e instantaneamente formamos uma imagem mental de um triângulo equilátero. A mudança de forma (b) está relacionada a figuras ambíguas, nas quais diferentes perspectivas de observação revelam formas distintas, alinhando-se diretamente aos princípios da Teoria da Gestalt (Figura 6). A abdução reificadora analógica (c) pode ser compreendida ao considerarmos o conceito geral de um triângulo na Matemática, já que representamos somente alguns casos particulares. A abdução teórica analógica (d) encontra seu exemplo na estimativa realizada por Tales de Mileto da altura de uma pirâmide, relacionando as sombras da estaca e da pirâmide.

Figura 6 – Rosto ou cálice?



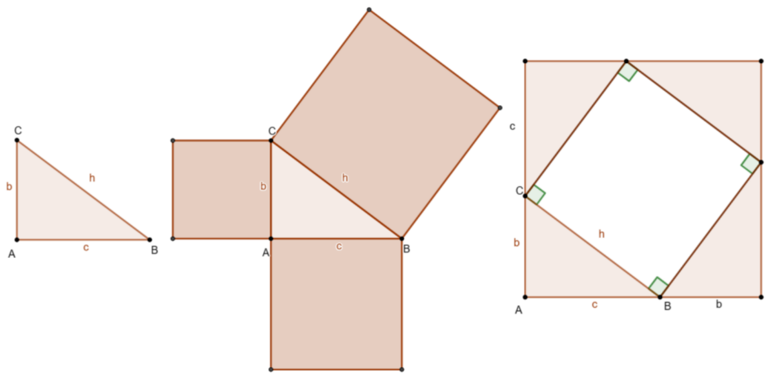
Fonte: Site o que é o que, 2023[4].

A abdução reificadora criativa (e) materializa-se quando, por exemplo, matemáticos desenvolvem o conceito de uma bola aberta com centro em a e raio $r > 0$. Isso equivale ao conjunto $B(a, r)$ dos pontos de um espaço métrico M nos quais a distância até o ponto a é menor que r. Por outro lado, a bola é considerada fechada quando essa distância é menor ou igual a r, e é denominada esfera quando a distância é exatamente igual a r (Lima, 2011). Assim, estabelecendo uma métrica, uma bola aberta pode ser interpretada como o interior de um quadrado com centro em a e raio com comprimento de $2r$, de um círculo com centro em a e raio r, entre outras configurações. Por último, a abdução teórica criativa (f) pode ser exemplificada ao considerarmos o contexto dos números complexos, no qual $i^2 = -1$.

Consideremos um exemplo a fim de identificarmos a tríade do raciocínio: dedução, indução e abdução. Ao analisarmos a seguinte afirmação: se o triângulo ABC é retângulo, em que h é a hipotenusa e b e c são os catetos, então $h^2 = b^2 + c^2$, percebemos que se trata de um argumento com a premissa "o triângulo ABC é retângulo, em que h é a hipotenusa e b e c são os catetos" e conclusão "$h^2 = b^2 + c^2$". Neste exemplo, é possível aplicar a indução, isto é, partimos de casos específicos para estabelecer uma relação geral. Consideremos triângulos retângulos com lados medindo $(5, 4, 3)$, $(10, 8, 6)$, $(15, 12, 9)$, etc., de forma que h, b e c são, respectivamente, a hipotenusa e os catetos, isto é, (h, b, c). Verificamos que $5^2 = 4^2 + 3^2$, $10^2 = 8^2 + 6^2$, $15^2 = 12^2 + 9^2$ e assim por diante. Logo, poderíamos inferir que $h^2 = b^2 + c^2$.

Além disso, podemos elaborar um diagrama da premissa (Figura 7 (a)) para perceber relações que não estão explícitas, como a construção de quadrados nos catetos e na hipotenusa do triângulo (Figura 7 (b)).

Figura 7 – Dedução do argumento



(a) (b) (c)

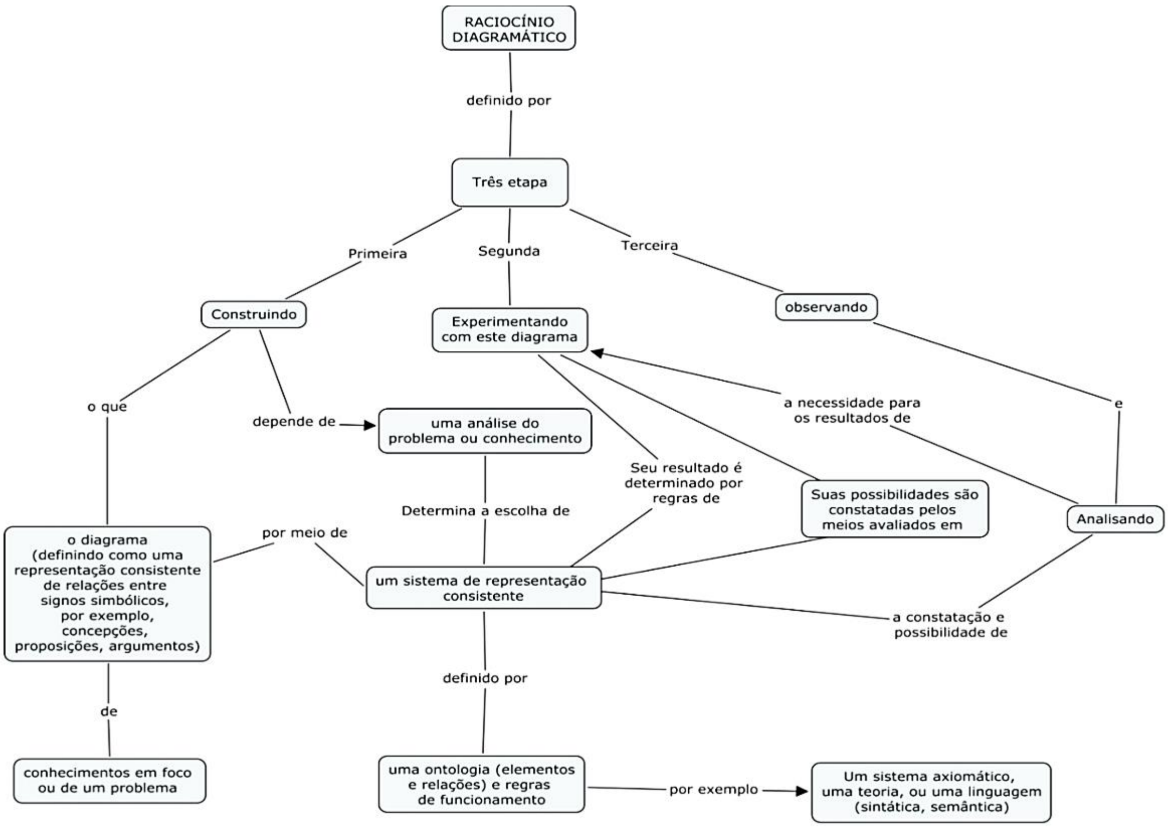
Fonte: Produzido pela autora, 2023.

Por outro lado, aplicar uma abdução ao argumento em questão visa examinar os fatos presentes na premissa e elaborar uma teoria explicativa. Nesse sentido, começamos construindo um quadrado na hipotenusa do triângulo, estendendo os catetos com semirretas e traçando duas retas paralelas aos catetos através dos vértices do quadrado construído, como ilustrado na Figura 7 (c). Desse diagrama, concluímos que $(b + c)^2 = 4\frac{bc}{2} + h^2 \Rightarrow b^2 + 2bc + c^2 = 4\frac{bc}{2} + h^2 \Rightarrow b^2 + c^2 = h^2$ (Cruz, 2022).

O método de raciocínio matemático utilizado para este e outros resultados é conhecido como raciocínio diagramático, sendo considerado como "o único raciocínio fértil" (CP 4.571). Nesse processo, Peirce (2010, p. 216) discute que “construímos um ícone de nosso estado de coisas hipotético e passamos a observá-lo. Esta observação leva-nos a suspeitar que algo é verdadeiro, algo que podemos ou não ser capazes de formular com precisão, e passamos a indagar se é ou não verdadeiro”. Segundo Peirce, um "estado de coisas hipotético" representa um mundo matemático com uma descrição perfeitamente definida e geral, não referente a estados existentes na natureza, mas sim imaginário, ou seja, uma ciência do possível que explora um caso sob circunstâncias hipotéticas (Campos, 2007).

Esse mundo matemático puramente hipotético pode ser visualizado e explorado por meio de diagramas, utilizando o raciocínio diagramático. Esse método não se limita a uma simples visualização mental, mas ocorre por meio da manipulação e experimentação com diagramas. O processo de raciocínio diagramático é composto por três etapas, conforme Peirce: (1) construir uma representação, (2) experimentar essa representação e (3) observar os resultados, como ilustrado na Figura 8.

Figura 8 – O processo do raciocínio diagramático



Fonte: Hoffmann (2006 *apud* Cruz, 2019, p. 27).

Conforme Hoffmann (2013), o uso do pensamento diagramático tem a finalidade de simplificar processos mentais quando a situação é excessivamente complexa para ser tratada apenas por meio da cognição interna. Embora empreguemos esse processo de maneira constante, uma vez que, como observa Fabbrichesi (2013, p. 29-30), “se estamos em uma sequência de pensamentos, que é uma sequência de signos, e se esses signos são ícones, exibidos à observação, então devemos aceitar a conclusão de Peirce: nossa mente trabalha todo o tempo com diagramas”. Portanto, o raciocínio diagramático mantém uma íntima relação com a visão. Peirce chega a enfatizar que a origem da verdade matemática surge quando observamos a manifestação de nossa imaginação visual, que então representamos no papel por meio de diagramas (Peirce, 1931-1935). Para ele:

> O procedimento do matemático é, primeiro, afirmar sua hipótese em termos gerais; segundo, construir um diagrama, seja um arranjo de letras e símbolos com o qual "regras" convencionais ou permissões de transformação estejam associados, seja uma figura geométrica, a qual não apenas lhe dá segurança contra confusões em relação a todo e alguns, mas também coloca um ícone diante dele de cuja observação serão detectadas relações entre as partes do diagrama diferentes daquelas que foram usadas na sua construção. Essa observação é o terceiro passo. O quarto passo reside em assegurar a si mesmo que a relação observada seria encontrada em toda representação icônica da hipótese. O quinto e último passo está na afirmação do assunto em termos gerais (Peirce, 1903 *apud* Santaella, 2004, p. 151).

No entanto, essa elaboração deve ser realizada dentro de um sistema de representação coeso, que se caracteriza por ser um conjunto de convenções com o objetivo de representar as proposições e relações lógicas envolvidas nessas proposições, indicando um conjunto de regras que ajudam a transformar o diagrama (Cruz, 2021a). Portanto, ao desenvolvermos o raciocínio ilustrado na Figura 7 (c), modificamos o diagrama concebido na dedução, Figura 7 (b), ao estender determinados lados do triângulo e traçar duas retas paralelas, utilizando as regras de um sistema de representação baseado na geometria euclidiana. Vale ressaltar que, segundo a construção acima, a etapa primordial do raciocínio diagramático, que inclusive instiga a formação do diagrama, é a dedução, ou seja, os diagramas representam uma expansão conceitual da dedução (Stjernfelt, 2013).

Ademais, conforme Hoffmann (2006), o sistema de representação é determinante para o resultado da transformação do diagrama, visto que diferentes sistemas apresentam possibilidades distintas. Isso se torna claro quando revisitamos o exemplo do triângulo na geometria esférica, Figura 5 (b). Ao elaborarmos um diagrama para explorar a propriedade da soma dos ângulos internos $\hat{A}, \hat{B}$ e $\hat{C}$ do triângulo, chegamos a resultados diversos em diferentes contextos. Ao aderirmos às regras estabelecidas pelo sistema de representação da geometria esférica, obtemos $180° < \widehat{\mathrm{A}} + \widehat{\mathrm{B}} + \widehat{\mathrm{C}} < 540°$, enquanto na geometria euclidiana $\widehat{\mathrm{A}} + \widehat{\mathrm{B}} + \widehat{\mathrm{C}} = 180°$ e na geometria hiperbólica $0 < \widehat{\mathrm{A}} + \widehat{\mathrm{B}} + \widehat{\mathrm{C}} < 180°$.

Assim, o raciocínio diagramático apresenta diversas vantagens, priorizando o aspecto visual e simplificando a identificação do problema, a geração de novas ideias e a dedução de diagramas. Ele reduz a quantidade considerável de símbolos e fórmulas utilizados na álgebra, por exemplo. Além disso, é capaz de destacar premissas implícitas no problema, introduzir contradições que ajudam na construção do conhecimento e oferecer perspectivas diversas sobre uma mesma questão. Segundo Hoffmann (2013), esse método encontra aplicação em várias áreas, como no exemplo de Sócrates orientando um jovem a descobrir como duplicar um quadrado, conforme descrito no "Meno" de Platão, ou quando uma criança aprende cálculos e utiliza os dedos para resolver problemas de aritmética. Também é empregado em campos como a física, a computação, entre outros. Ademais, esse tipo de raciocínio é utilizado em Experimentos Mentais no campo da Educação Matemática, tema que será explorado neste capítulo.

2.2 O QUE SÃO EXPERIMENTOS MENTAIS?

O dinamarquês Hans Christian Ørsted (1777–1851), físico, químico e precursor do eletromagnetismo, utilizou o termo "experimento mental" em seu artigo *First Introduction to General Physics*, publicado em 1811. Raicik e Peduzzi (2021) destacam que Ørsted vai além dos experimentos concretos ao afirmar que coloca a mente em estado de atividade criativa, elevando a arte experimental para os experimentos do pensamento. Esse tipo de experimento tem sido discutido ao longo da história como capaz de provocar novos conhecimentos em diversas áreas de pesquisa. Conhecido como *Gedankenexperiment* em alemão, ou *Thought Experiment* em inglês, o conceito tem origem na Filosofia e no pensamento grego de Platão, dos pré-socráticos e de Aristóteles, que imaginavam situações hipotéticas para suas doutrinas e sistemas de mundos sensíveis ideais. Na modernidade, experimentos desse tipo também foram realizados por Newton, Descartes, Kant, Leibniz, entre outros (Guimarães, 2021).

No entanto, o uso desses experimentos nas ciências é alvo de críticas por parte de alguns pesquisadores. Fernandes et al. (2019, p. 51) contrapõem essas críticas afirmando que “o pensamento e a imaginação são inferiorizados em favor do método científico, como se os mesmos não pudessem fazer parte da ciência”. Isso ocorre, conforme Pereira (2015), devido à concepção de que esses experimentos introduzem influências subjetivas que deveriam ser evitadas em uma pesquisa científica rigorosa. Todavia, a subjetividade está presente no próprio método científico mais do que a maioria dos cientistas admite, visto que as observações não são imparciais e até mesmo argumentos dedutivos dependem da subjetividade do pesquisador ao escolher as premissas (Pereira, 2015). Na matemática, por exemplo, há uma visão ortodoxa que considera que qualquer coisa que não seja uma prova formal é apenas especulação, especialmente no uso de imagens, diagramas e experimentos mentais, pois são considerados ilegítimos e meramente ilustrativos (Brown, 2011).

Muitos teóricos discutem sobre o que são experimentos mentais, sem que haja uma definição rígida e convencional. Segundo o físico e estudioso da filosofia da ciência Thomas

Kuhn (1977), os experimentos mentais possibilitam aumentar a compreensão humana sobre a natureza, auxiliando em situações que não podem ser examinadas empiricamente no laboratório. Para Kuhn (1977), a situação imaginada não é inteiramente desconhecida, pois o experimento mental se baseia em informações já disponíveis e aceitas sobre o mundo. Dessa forma, não são produzidas novas compreensões acerca da natureza, mas sim reformulações no aparato conceitual do próprio cientista. Ou seja, o objetivo é a reformulação de ideias que já existiam a priori no pesquisador, obrigando-o a reconhecer contradições inerentes ao seu modo de pensar. Além disso, Stuart, Fehige e Brown (2018) afirmam que, para Kuhn, o experimento mental é principalmente uma ferramenta que auxilia os cientistas a enfrentarem crises entre paradigmas científicos. Kuhn (1997) afirma que:

> […] uma crise induzida pelo fracasso da expectativa e seguida pela revolução está no cerne das situações de pensamento experimental que temos vindo a examinar. Por outro lado, o experimento mental é um dos instrumentos analíticos essenciais que são utilizados durante a crise e que, em seguida, ajudam a promover a reforma conceptual de base (Kuhn, 1997, p. 263, tradução nossa).[5]

O filósofo canadense James Robert Brown (2011) concorda com Kuhn que experimentos mentais desempenham um papel justificativo nas revoluções científicas. Brown define esses experimentos como realizados no "laboratório da mente", envolvendo manipulações mentais que dificilmente são executadas fisicamente, seja por falta de tecnologias adequadas, seja pela impossibilidade empírica de tratar objetos ideais.

Brown (2011) propõe uma classificação dos experimentos mentais em duas categorias: destrutivos e construtivos. Os experimentos destrutivos têm o propósito de refutar uma teoria. Já os experimentos construtivos são subdivididos em três tipos: mediativos, que auxiliam na conclusão da teoria por meio de uma relação lógica; conjecturais, que propõem uma explicação para a situação observada; e diretos, que não se baseiam em uma teoria bem estruturada e têm como objetivo desenvolvê-la. Há também uma categoria especial, denominada platônica, que inclui tanto os experimentos destrutivos quanto os construtivos (diretos). Esses experimentos, ao mesmo tempo em que contestam uma teoria estabelecida, contribuem para o desenvolvimento de outra, facilitando assim a mudança de paradigmas, conforme descrito por Kuhn.

Stuart, Fehige e Brown (2018) destacam que diversos tipos de experimentos mentais são observados em distintas áreas do conhecimento, como na Filosofia, Física, Matemática pura e aplicada, nas artes (pintura e literatura), política, economia, Biologia, Química e até mesmo na vida cotidiana, ao planejar formas de se deslocar de um lugar para outro. Pricladnitzky (2020) compartilha dessa perspectiva, afirmando que os experimentos mentais são utilizados para vários propósitos, como educação, entretenimento, e formulação de hipóteses e teorias. Segundo Pricladnitzky, uma situação hipotética é empregada devido à ausência de meios para sua realização no mundo físico, ou seja, é um artifício da imaginação.

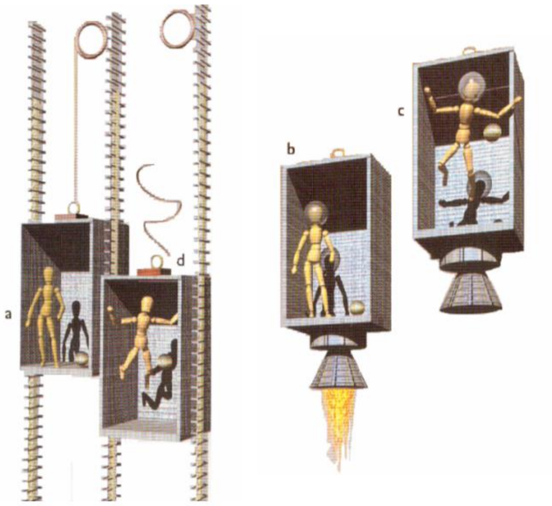
O físico teórico alemão Albert Einstein (1879-1955) utilizou experimentos mentais em física inúmeras vezes. Em dezembro de 1922, Einstein relembrou uma dessas ocasiões durante um discurso no Japão, dizendo:

> […] estava sentado numa cadeira no meu escritório de patentes em Berna. De repente, um pensamento me atingiu: se um homem cai livremente, ele não sentiria seu peso. Fiquei surpreendido. O simples experimento mental causou-me uma profunda impressão. Foi isso que me levou à teoria da gravidade (Pais, 2005, p. 179, tradução nossa).[6]

Einstein usou experimentos mentais envolvendo elevadores imaginários para refletir sobre a queda livre e a ausência de aceleração. Medeiros e Medeiros (2005) explicam que, inicialmente, se considera uma pessoa confinada dentro de um elevador sem janelas e sem contato externo com o mundo. A pessoa sente uma força empurrando-a contra o chão do elevador e, ao mesmo tempo, uma esfera cai de suas mãos. Einstein oferece duas explicações para esse fenômeno: (1) a gravidade está atuando na pessoa, exercendo uma força, e o elevador pode estar se movendo com velocidade constante (veja a Figura 9, item a); (2) o elevador pode estar no espaço sideral, longe da influência gravitacional, mas sendo acelerado para cima por um foguete (Figura 9, item b).

Posteriormente, Einstein imagina que a pessoa dentro do elevador não sente a ação de nenhuma força. Duas explicações são fornecidas para essa situação: ou o elevador está no espaço sideral, longe de qualquer força gravitacional e não acelerado (Figura 9, item c), ou está em queda livre em um campo gravitacional (Figura 9, item d). Tanto a pessoa representada na Figura 9, item a, quanto a da Figura 9, item b, sofrem experiências indistinguíveis, o mesmo ocorrendo com os sujeitos na Figura 9, item d, e na Figura 9, item c. Einstein conclui que a experiência em um campo gravitacional é localmente a mesma percebida por um observador em aceleração, levando ao Princípio da Equivalência.

Figura 9 – Elevador de Einstein



Fonte: Glossário, 2023[7].

Outro tipo de experimento mental é encontrado na Filosofia, onde também se imagina situações hipotéticas com o objetivo de refletir sobre implicações filosóficas. Entre os mais famosos, destaca-se a alegoria da caverna, concebida por Platão no início do livro VII de *A República*. Guimarães e Jesus (2021) afirmam que, de forma simbólica, Platão ilustra a necessidade de o homem se apropriar da educação para viver em sociedade e, acima de tudo, alcançar o mundo das verdades e do inteligível. Além disso, Platão aborda a passagem de graus de conhecimento, do inferior para o superior, enfatizando que o verdadeiro conhecimento é acessado pelo intelecto, e não pela dimensão visível.

Sócrates inicia o livro com o seguinte experimento mental: "imagine a nossa natureza, relativamente à educação ou à sua falta, de acordo com a seguinte experiência [...]" (República, VII, 514a 1-3). Ele propõe que prisioneiros estão acorrentados desde o nascimento, de modo que sempre olham para a parede à sua frente, dentro de uma caverna. Atrás deles há um pequeno muro e uma fogueira, de forma que, quando pessoas do lado de fora da caverna passam carregando objetos, as sombras desses objetos são refletidas na parede que os prisioneiros são forçados a observar. Como nunca viram nada além das sombras, eles não compreendem que estão vendo apenas sombras.

O que acontece quando um dos prisioneiros é liberto? Platão descreve que, como a luz machuca os olhos do prisioneiro, ele inicialmente terá dificuldade em ver os objetos reais atrás do muro. Nesse estado, o prisioneiro pode preferir voltar a observar as sombras que estava acostumado desde a infância. Caso ele seja forçado a permanecer fora da caverna, Platão destaca que o estado de confusão será passageiro e, com o tempo, o prisioneiro conseguirá distinguir os objetos e as pessoas reais.

Outro caso em que um experimento mental foi utilizado pode ser considerado no Paradoxo do Hotel de Hilbert. Segundo Gamow (1961), em uma das palestras do matemático David Hilbert (1862-1943) foi apresentada uma propriedade paradoxal sobre os números infinitos. Devido à natureza hipotética, esse paradoxo pode ser considerado um experimento mental relacionado à contagem de conjuntos infinitos. Hilbert começa imaginando um hotel com infinitos quartos ocupados, mas um novo hóspede chega à procura de uma acomodação. Para recebê-lo, o gerente solicita que todos os hóspedes se mudem para o quarto ao lado. Ou seja, a pessoa que está no quarto 1 é realojada para o quarto 2, a pessoa no quarto 2 é mudada para o quarto 3, o hóspede do quarto n é colocado no quarto $n + 1$, e assim sucessivamente. Dessa forma, o quarto número 1 ficará vago para receber o novo hóspede, mostrando que, mesmo quando o hotel está lotado, ainda é possível alocar novos hóspedes (Gamow, 1961).

Depois de um tempo, Hilbert imagina um ônibus com infinitos passageiros chegando ao hotel e solicitando quartos. Novamente, todos os hóspedes acomodados no hotel são solicitados a mudarem de quartos. No entanto, ao invés de se mudarem para o quarto ao lado, eles deverão ir para o quarto cujo número é o dobro do quarto que ocupam no momento. Isto é, o hóspede do quarto 1 irá para o quarto 2, o hóspede do quarto 2 irá para o quarto 4, o hóspede do quarto n irá para o quarto $2n$, e assim em diante (Gamow, 1961). Essa estratégia permite que os quartos de número ímpar fiquem disponíveis para acomodar os infinitos hóspedes que chegaram. Com isso, pode-se concluir que a quantidade total de quartos nesse hotel é a mesma que a quantidade dos quartos pares e, também, dos ímpares. Ou seja, é possível estabelecer uma correspondência entre os quartos e os números naturais.

Embora os experimentos mentais sejam amplamente utilizados em várias áreas, como mencionado anteriormente, seu uso no campo da Educação Matemática é relativamente recente. A seguir, exploraremos a conceituação e as características desses experimentos dentro desse contexto. Além disso, discutiremos a possibilidade de sua utilização como uma metodologia de ensino que visa a complementaridade com as outras já conhecidas.

2.2.1 Experimentos Mentais na Educação Matemática

Cruz (2024, p. 5), educador matemático, conceitua os Experimentos Mentais, dentro do campo da Educação Matemática, como “são formas de representar o objeto do conhecimento, por meio de um diagrama, e de desenvolver certas deduções e abduções no referido diagrama, a ponto de modificá-lo, para que seja possível chegar a novos conceitos e/ou generalizações”. Dessa forma, a base teórica desses Experimentos consiste no fato de adotar uma concepção matemática que justifique a sua utilização.

Conforme mencionado anteriormente, adotamos a visão de Peirce sobre a natureza da Matemática, considerando-a uma atividade semiótica. Nesse contexto, o raciocínio predominante nos Experimentos Mentais é principalmente diagramático. De acordo com Peirce (2010), o raciocínio diagramático envolve fundamentalmente três etapas: (1) a construção do diagrama, que é um ícone representando as relações entre os signos, usando índices e símbolos, podendo não se assemelhar ao objeto; (2) a experimentação do diagrama, cujo resultado é determinado pelas regras do sistema de representação escolhido; e (3) a observação do resultado.

Durante o Experimento, a elaboração do diagrama é instigada pela dedução, que envolve a análise do estado das coisas presentes nas premissas do argumento, conforme ressaltado por Peirce (2010) e na segunda parte deste capítulo. Ao longo da investigação, o diagrama sofre alterações, uma vez que o objetivo principal é examinar os fatos nas premissas e desenvolver uma teoria explicativa, ou seja, aplicar uma abdução ao argumento em questão. A modificação do diagrama original para validar a verdade da conclusão é a dedução teoremática em ação.

Cruz (2022) analisa algumas características essenciais dos diagramas elaborados nos Experimentos Mentais na área da Educação Matemática, identificando-as como Forma, Estrutura, Compreensão, Dependência, Revelação e Comparação (ver Figura 10), as quais podem não corresponder ao significado convencional. Nesse contexto, a noção de **Forma** se refere às hipóteses, ou seja, a um conjunto de atividades presumidas. Isso implica que “as atividades partem de certas conjecturas e hipóteses desenvolvidas em uma representação particular do objeto geral” (Cruz, 2022, p. 33).

Por sua vez, a **Estrutura** de um Experimento Mental pressupõe implicitamente certas coisas sobre o problema em questão e utiliza a abdução, ou seja, envolve a geração de uma nova ideia que não é diretamente fornecida pelo problema. Isso permite o estabelecimento de diferentes conexões e a construção de novas possibilidades, pois a “abdução não é simplesmente uma coisa psicológica como criatividade. Abdução implica generalização. Generalização implica introdução de objetos ideais novos e exige uma teoria de experimentação e de análise e por isto de Experimentos Mentais” (Cruz, 2021, p. 24).

Na **Compreensão**, utiliza-se o processo dedutivo, seguindo “uma lógica de considerações heurísticas com deduções lógicas e cálculos formais quando necessários” (Cruz, 2022, p. 34). Já a **Dependência**, indica que os conhecimentos e informações utilizadas nos

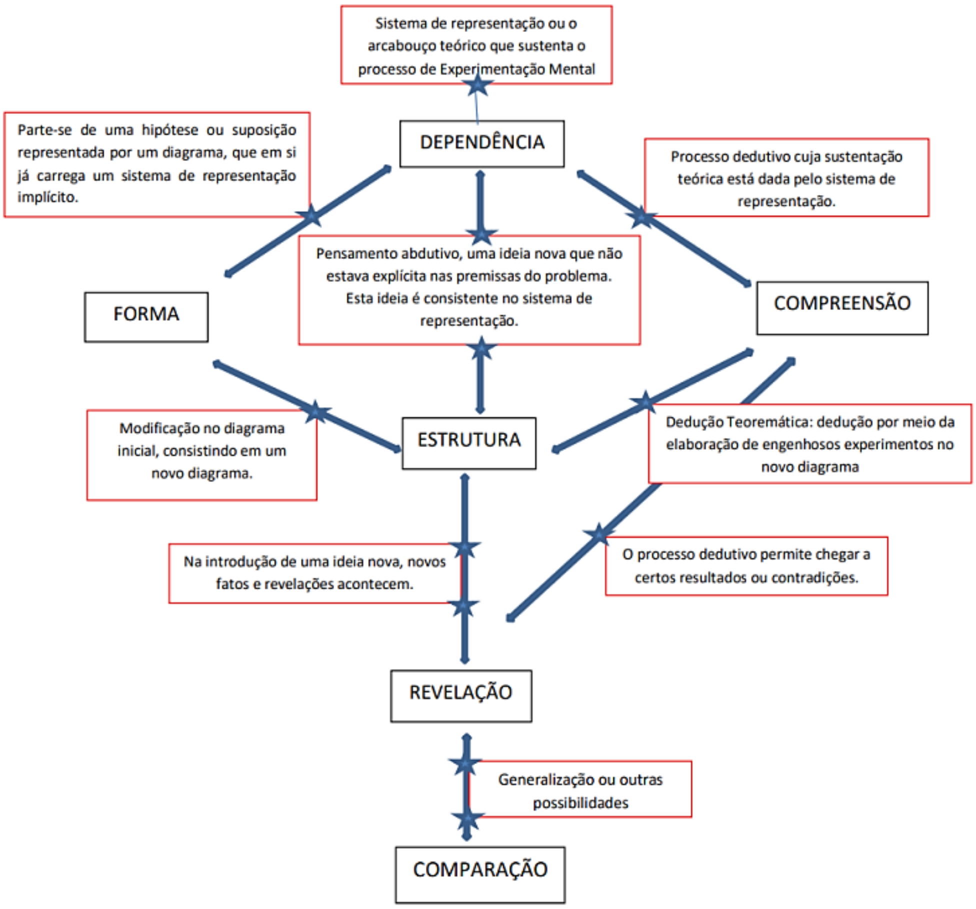
Experimentos devem ser disponíveis e aceitas pela comunidade científica. Outra característica importante dos Experimentos é nomeada de **Revelação**, pois auxilia o reconhecimento de contradições e/ou confusões lógicas no modo de pensar no decorrer da atividade proposta.

Por fim, Cruz (2022) discute que a característica **Comparação** consiste em avaliar o conhecimento em relação a outras possibilidades de solução de uma atividade, prova ou problema. Portanto, durante o processo de experimentação, todas essas características são consideradas e, conforme Cruz (2024, p. 6):

> Elas vão e vêm, mas sempre partindo de uma suposição (Forma), isto é, de uma hipótese que já está ancorada a um sistema de representação (Dependência). A introdução de uma ideia nova, um pensamento abdutivo (Estrutura), também é desenvolvida por meio desse sistema de representação, assim como o processo dedutivo (Compreensão). Ao final, a Revelação pode ocorrer na introdução da ideia nova (uma contradição aparente ou implícita) ou ao término do processo dedutivo. Há possibilidades outras!? (Comparação). (Cruz, 2024, p. 7).

Assim, todos esses aspectos não são desenvolvidos uma após a outra, mas simultaneamente, ou seja, acontecem conjuntamente durante todo o processo da experimentação. Todavia, nem todas as seis características que compõem os experimentos mentais são identificadas durante o processo, mas a Forma, Estrutura, Compreensão e Dependência são fundamentais (Cruz, 2022).

Figura 10 – Características dos Experimentos Mentais na Educação Matemática



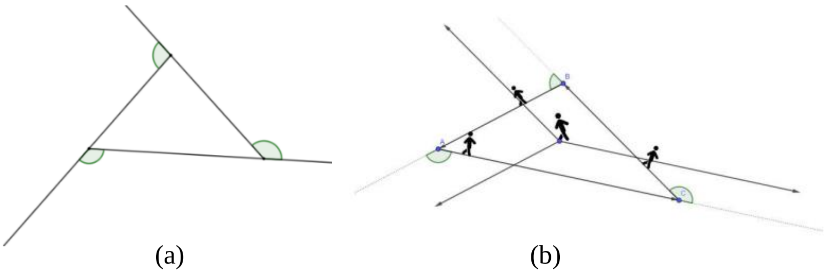
Fonte: Cruz, 2024, p. 6.

Vamos analisar um exemplo de Experimento Mental no contexto da Educação Matemática para explorar suas diversas características e elementos. O estudo realizado por Cruz (2022) aborda um Experimento relacionado à soma dos ângulos externos de um triângulo, diferenciando-se das demonstrações algébricas presentes em livros didáticos que utilizam os ângulos internos. Para ilustrar esse exemplo, é preciso compreender as etapas e componentes envolvidos na sua realização.

Inicialmente, o Experimento começa com a representação do objeto de estudo por meio de um diagrama, que é um ícone, como apresentado na Figura 11(a). A abordagem parte de uma hipótese inicial, isto é, um triângulo em particular (**Forma**). No ambiente da sala de aula, é possível iniciar essa representação no chão usando uma fita para delinear o triângulo e convidar os alunos a caminharem ao redor dele. Quando um estudante completa o percurso e retorna ao ponto inicial, surge a discussão sobre a quantidade de graus que ele girou.

Na fase subsequente, o Experimento avança ao introduzir uma nova perspectiva ao problema (abdução). O ato de contornar o triângulo caminhando equivale a girar ao redor de si mesmo em um ponto selecionado no interior do triângulo. Essa abordagem permite representar cada parte do percurso com um vetor e, depois, utilizar segmentos orientados equipolentes, representantes dos vetores, com origem em um ponto interior ao triângulo, como visualizado na Figura 11(b). Esse momento constitui a **Estrutura** do Experimento Mental.

Figura 11 – Experimento Mental sobre a soma dos ângulos externos de um polígono



(a) (b)

Fonte: Cruz, 2022, p. 83.

Por meio de um processo dedutivo, que reflete a característica de **Compreensão**, podemos observar que os representantes dos vetores formam ângulos equivalentes aos ângulos externos do triângulo. Isso decorre do paralelismo entre os vetores, os lados do triângulo, e seus representantes, fundamentado nos princípios da geometria plana. Esse processo demonstra a característica de **Dependência** do Experimento, uma vez que começa com uma representação facilitada pela geometria euclidiana e, progressivamente, incorpora conceitos da geometria vetorial.

Como conclusão do processo dedutivo, emerge a constatação de que os ângulos formados pelos representantes dos vetores totalizam um ângulo de 360°. Esse resultado introduz a **Revelação**, outra característica do Experimento Mental. Por fim, é possível expandir as investigações para outras possibilidades (**Comparação**), explorando a soma dos ângulos externos de diferentes polígonos além do triângulo.

Quando um sujeito epistêmico conduz o experimento com conhecimento prévio sobre o objeto "polígono", a fase inicial de interpretação abrange todo o conhecimento existente sobre o objeto "triângulo". Parte desse conhecimento torna-se acessível ao intérprete (interpretante dinâmico), permitindo que ele analise o diagrama para compreender a finalidade subjacente ao Experimento (interpretante final). Essa finalidade envolve estabelecer uma relação entre o triângulo euclidiano e os conceitos de geometria vetorial para deduzir a soma dos ângulos externos.

O triângulo no diagrama construído representa o objeto imediato, o qual é intrínseco ao signo, fazendo referência ao objeto dinâmico externo ao signo – o triângulo em sua concepção idealizada. É essencial ressaltar que a representação do objeto no diagrama não é o objeto em si; portanto, o triângulo representado como um ícone é apenas um exemplo particular, não o triângulo em sua totalidade.

Cruz (2020a, 2022, 2023) destaca que um Experimento Mental possibilita ao sujeito entender a produção do conhecimento matemático por meio da complementaridade entre teoria e aplicação. Durante esse processo, são reveladas contradições do pensamento, estimulando a busca por novas hipóteses. O autor enfatiza que a aprendizagem de Matemática é enriquecida com o uso de analogias e metáforas, promovendo a criatividade e a construção do conhecimento do aluno.

Diniz (1991) sugere que a aprendizagem matemática ocorre quando o aluno pode transformar o conhecimento com autonomia, liberando sua criatividade, uma possibilidade oferecida pelos Experimentos Mentais Caso contrário, o aluno pode limitar-se a reproduzir modelos sem desenvolver senso crítico, resultando em desistência diante de problemas não previamente treinados.

A aprendizagem da matemática e o ato de ensiná-la estão intimamente conectados. O termo "ensinar", originado do latim "insignio", significa "pôr uma marca" conforme o dicionário Priberam da Língua Portuguesa. Refletir sobre o tipo de marca que o ensino da Matemática tem deixado nos estudantes é crucial. Segundo Freire (1977), o ato de ensinar também deixa uma marca no professor. Portanto, é essencial questionar se o ensino da Matemática está estimulando a criatividade, autonomia e exploração de conceitos, ou se está cultivando o medo e a insegurança, tornando a disciplina temida e inacessível.

O ensino, segundo Hirst (1971), é uma atividade humana caracterizada por seu propósito de promover a aprendizagem. A intenção do ensino é gerar aprendizagem, sendo ambos conceitos interdependentes, já que não há ensino sem a intenção de produzir aprendizagem. A aprendizagem, para o autor, busca alcançar um resultado ou estado final, como adquirir novo conhecimento ou realizar algo antes inalcançável. Para Scheffler (1974), isso significa que o ensino busca um resultado, uma meta que exige um esforço contínuo. Sob essa perspectiva, a aprendizagem é concebida como o desfecho do ensino, levando à conclusão de que não se pode afirmar que houve ensino sem a correspondente aprendizagem por parte do aluno, uma vez que "ensinar é o nome da relação entre o que um professor faz e a aprendizagem de um aluno" (Kubo; Botomé, 2001, p. 5).

Contudo, na prática de ensino, é imprescindível ter uma abordagem que conduza em direção aos objetivos estabelecidos, ou seja, uma metodologia. No entanto, essa metodologia não pode ser uniforme e inflexível, pois varia de acordo com o contexto histórico em que está inserida. Ao longo do tempo, diversos conceitos de metodologia de ensino foram desenvolvidos. De acordo com Manfredi (1993, p. 5), é inadequado acreditar na "existência de uma única e correta conceituação de metodologia do ensino, dependendo esta das concepções de homem, educação e sociedade e dos parâmetros teórico-epistemológicos pelos quais optamos".

Dessa maneira, a escolha da metodologia de ensino é feita com base na visão que o educador possui sobre o ensino e a Matemática. Como ressaltado por Fiorentini (1995), a prática pedagógica de um professor que adota uma perspectiva de Matemática como algo a-histórico, concluído e estruturado de maneira lógica, difere da abordagem de um docente que percebe a Matemática como um campo em constante construção ao longo do tempo, dinâmico e que atende às demandas e necessidades sociais.

Manfredi (1993) explora diferentes perspectivas de metodologia de ensino. A abordagem tradicional busca transmitir conhecimento de maneira sistemática e universal. Em contraste, a visão escolanovista se concentra no aprimoramento individual e social, com ênfase no desenvolvimento de atitudes humanas. A concepção tecnicista reconfigura a metodologia de ensino por meio de um processo de taylorização, visando maior produção e eficiência. Na perspectiva crítica, o foco é proporcionar reflexões sobre a realidade, com o propósito de promover sua transformação. Por fim, a autora apresenta a visão histórico-dialética da educação como:

> [...] um conjunto de princípios e/ou diretrizes sócio-políticos, epistemológicos e psico-pedagógicos articulados a uma estratégia técnico-operacional capaz de reverter os princípios em passos e/ou procedimentos orgânicos e sequenciados, que sirvam para orientar o processo de ensino-aprendizagem em situações concretas (Manfredi, 1993, p. 5).

Sob essa ótica, Cruz (2022) introduz os Experimentos Mentais como uma abordagem adicional no ensino da Matemática. Essa perspectiva educacional, enraizada na concepção histórico-dialética, é fundamentada no materialismo histórico-dialético de Marx, caracterizado pelo movimento do pensamento. Essa abordagem envolve contemplar a realidade a partir do empírico, da forma inicial do objeto, e das abstrações, que são elaborações do pensamento, visando alcançar uma compreensão concreta, a essência do objeto (Pires, 1997). Bezerra Neto e Bezerra (2012) elucidam que, segundo Marx e Engels, todo fenômeno no universo pode ser racionalmente compreendido devido à sua materialidade. Contudo, para acessar a essência das coisas, é necessário transcender a sua aparência superficial, o que é facilitado por meio das abstrações.

Danieli e Niedermayer (2022) afirmam que, na concepção do materialismo histórico-dialético, a educação não visa apenas à transmissão e assimilação de conhecimentos, mas busca ser transformadora, crítica e reflexiva, "[...] parte do ser social, da realidade, do homem material e concreto [...] uma práxis educativa que supera as contradições de uma sociedade dividida em classe, da divisão social do trabalho e as contradições inerentes dessa própria sociedade capitalista" (Danieli; Niedermayer, 2022, p. 532).

À luz das reflexões delineadas neste capítulo, o próximo se concentrará na análise dos diversos obstáculos de ordem epistemológica, didática, psicológica e ontogenética. Nosso objetivo é identificar esses obstáculos, com ênfase especial nos de natureza didática e epistemológica, durante a aplicação dos Experimentos Mentais a um grupo de professores em formação inicial em Matemática. Partimos do princípio de que o próprio obstáculo é uma forma de signo, pois, se consideramos que todo pensamento é um signo, então podemos inferir que toda teoria também é um signo. Dessa forma, nos apoiaremos nos obstáculos descritos por Brousseau, considerando-os como signos segundo a teoria de Peirce.

3 POSSÍVEIS OBSTÁCULOS NA APRENDIZAGEM MATEMÁTICA

Thomas Edison (1847-1931) se tornou famoso pela criação da lâmpada incandescente, uma inovação crucial no final do século XIX. Segundo Zagnoli (2017), durante o processo de desenvolvimento, Edison enfrentou diversos desafios para encontrar o material ideal a ser usado como filamento nas lâmpadas. Mesmo diante de centenas de tentativas, ele adotou uma perspectiva positiva em relação aos erros, declarando que não considerava essas tentativas malsucedidas como verdadeiros fracassos. Questionado sobre seus sucessivos erros, ficou conhecido pela célebre frase: "De fato, não fracassei ao tentar, cerca de 10.000 vezes, desenvolver um acumulador. Simplesmente, encontrei 10.000 maneiras que não funcionam".

Ao longo dos séculos, os matemáticos também enfrentaram erros, embora a Matemática pareça ser livre deles, uma vez que somente o resultado final é apresentado, não havendo espaço para as incertezas do processo de construção. Um exemplo notório é o famoso problema do Último Teorema de Fermat, formulado por Pierre de Fermat em 1637. Nele, Fermat anotou na margem do livro II da *Aritmética* sua observação de que é impossível um "cubo ser escrito como a soma de dois cubos ou uma quarta potência ser escrita como uma soma de dois números elevados a quatro, ou, em geral, para qualquer número que seja elevado a uma potência maior do que dois ser escrito como a soma de duas potências semelhantes" (Singh, 1998, p. 79). Isso significa que Fermat acreditava que não era possível encontrar uma solução com números inteiros para uma generalização do Teorema de Pitágoras, isto é, $x^n + y^n = z^n$, para $n > 2$.

Durante mais de três séculos, vários matemáticos, como Leonhard Euler (1707-1783), Sophie Germain (1776-1831), Augustin Louis Cauchy (1789-1857), Gabriel Lamé (1795-1870), Yutaka Taniyama (1927-1958), Goro Shimura (1930-2019), e Évariste Galois (1811-1832), se empenharam de alguma forma na busca pela solução desse desafiador problema (Singh, 1998). Somente com o trabalho de Andrew Wiles (1953-), professor da Universidade de Oxford, o problema foi finalmente resolvido, em 1994. No entanto, ao longo desse processo, muitas idas e vindas, erros e incoerências surgiram, evidenciando que mesmo os matemáticos, especialistas na área, não são infalíveis, como bem questionou Poincaré (2000, p. 86, tradução nossa): "é necessário acrescentar que os próprios matemáticos não são infalíveis?"[8].

No campo da Didática da Matemática, ramo que conduz as condições para determinar a aprendizagem matemática (D'Amore, 2007a), a noção de obstáculo, desenvolvida pelo filósofo francês Gastão Bachelard (1884-1962), e que vai além do simples erro, tem sido amplamente difundida. Segundo Pais (2019), o objetivo de Bachelard era estudar a evolução da ciência, observando que, para ocorrer uma ruptura de conhecimentos anteriores, são enfrentados obstáculos. Estes são conhecimentos antigos que resistem a novas concepções e ideias, pois “o ato de conhecer dá-se *contra* um conhecimento anterior” (Bachelard, 1996, p. 17, *grifo do autor*), o que ameaça a estabilidade intelectual dos pesquisadores e cientistas.

Em sua obra intitulada *A formação do espírito científico*, Bachelard afirma que os obstáculos são uma parte importante do processo de avanço científico, pois é preciso superar os paradigmas do passado para possibilitar novas descobertas. Ele esclarece que:

> Quando se procuram as condições psicológicas do progresso da ciência, logo se chega à convicção de que *é em termos de obstáculos que o problema do conhecimento científico deve ser colocado*. E não se trata de considerar obstáculos externos, como a complexidade e a fugacidade dos fenômenos, nem de incriminar a fragilidade dos sentidos e do espírito humano: é no âmago do próprio ato de conhecer que aparecem, por uma espécie de imperativo funcional, lentidões e conflitos. É aí que mostraremos causas de estagnação e até de regressão, detectaremos causas de inércia às quais daremos o nome de obstáculos epistemológicos (Bachelard, 1996, p. 17, *grifo do autor*).

Dessa forma, para Bachelard (1996), o conhecimento não é imediato, mas funciona como uma projeção de luz que ilumina algumas áreas e revela informações, ao mesmo tempo em que cria sombras, isto é, áreas de incertezas. Assim, existem aspectos que permanecem ocultos no conhecimento, possibilitando novas descobertas, uma vez que o conhecimento não é completo nem definitivo. Nessa concepção, o conhecimento é recorrente, um movimento contínuo que destrói um conhecimento para construir outro. Isso permite encontrar novas informações à medida que a compreensão avança, ou seja, “aceder à ciência é rejuvenescer espiritualmente, é aceitar uma brusca mutação que contradiz o passado” (Bachelard, 1996, p. 18).

Para isso, é necessário destruir conhecimentos habituais, pois o que acreditamos saber claramente pode, na verdade, obscurecer aquilo que deveríamos saber. Para Bachelard (1996, p. 18), "diante do real, aquilo que cremos saber com clareza ofusca o que deveríamos saber". Desse modo, o primeiro obstáculo a ser superado é o senso comum, que pode levar ao erro e nos impedir de alcançar o conhecimento. Esse é o aspecto no qual os professores falham, segundo Bachelard (1996), pois acreditam que podem reconstruir uma cultura que já é falha apenas pela repetição da lição. Não compreendem que os alunos já possuem conhecimentos constituídos e que esses obstáculos, já sedimentados pela vida cotidiana, devem ser derrubados. Assim, “toda cultura científica deve começar [...] por uma catarse intelectual e afetiva. Resta, então, a tarefa mais difícil: colocar a cultura científica em estado de mobilização permanente, substituir o saber fechado e estático por um conhecimento aberto e dinâmico" (Bachelard, 1996, p. 24). Segundo Pais:

> Isso faz com que a noção seja de interesse para a didática, pois, para a aprendizagem escolar, por vezes, é preciso que haja fortes rupturas com o saber cotidiano, caracterizando a ocorrência de uma revolução interna, o que leva o sujeito a vivenciar a passagem do seu mundo particular a um quadro mais vasto de ideias, às vezes, incomensuráveis através do antigo conhecimento (Pais, 2019, p. 45).

Embora Bachelard tenha estudado os obstáculos em distintas ciências, na Matemática deve haver um cuidado particular, pois, para ele, "a história da Matemática é maravilhosamente regular. Conhece períodos de pausa. Mas não conhece períodos de erro" (Bachelard, 1996, p. 28). Pais (2019) disserta que, de fato, as rupturas encontradas nas ciências experimentais não possuem registro histórico claro na Matemática; não existe uma regularidade absoluta nas descobertas matemáticas, uma vez que o registro formal, por meio das demonstrações matemáticas, não explicita as dificuldades envolvidas no processo de criação. Dessa forma, o autor afirma que os obstáculos matemáticos são mais visíveis na fase de aprendizagem e síntese do conhecimento, na gênese das ideias iniciais, em vez do registro histórico.

Ao contrário de Bachelard, Guy Brousseau (1933-2024) apresentou um estudo dos obstáculos na Matemática, aos quais ele nomeou de obstáculos didáticos. Em sua perspectiva:

> O erro não é apenas o efeito da ignorância, da incerteza, do acaso, como se acredita nas teorias empiristas ou behavioristas de aprendizagem, mas sim o resultado de um conhecimento anterior que teve seu interesse, seus sucessos, mas que agora se revela falso ou simplesmente inadequado. Erros desse tipo não são erráticos e imprevisíveis, eles se constituem em obstáculos. Tanto no funcionamento do professor quanto do aluno, o erro é constitutivo do sentido do conhecimento adquirido (Brousseau, 1983, p. 171, tradução nossa)[9].

Essa noção de obstáculo foi estudada por Duroux (1983), que descreve algumas condições necessárias para sua caracterização: (1) o obstáculo é um conhecimento e não a falta dele ou dificuldade; (2) em certos contextos frequentes esse conhecimento produz respostas adequadas; (3) respostas incorretas são geradas ao tentar adaptar esse conhecimento em outras situações; (4) o conhecimento resiste a contradições e a rupturas, não desaparecendo a medida que um conhecimento melhor surja; e (5) mesmo após a tomada de consciência sobre a sua imprecisão, a sua manifestação continua ocorrendo de forma obstinada.

Conforme Japiassu (1986, p. 73), o obstáculo surge durante o processo de construção do conhecimento e se manifesta de duas formas: como um "contrapensamento" e como uma "parada do pensamento". O "contrapensamento" refere-se a conhecimentos pré-existentes que influenciam nossa percepção das novas informações, podendo se tornar uma barreira na compreensão e assimilação do novo saber. Já a “parada do pensamento” está relacionada a uma resistência do pensamento, dificultando o avanço na construção do saber. É como se o conhecimento anterior atuasse como uma força contrária à assimilação da nova aprendizagem, mantendo-nos em um estado de estagnação, impedindo o progresso em direção ao novo conhecimento. Essa resistência só pode ser superada por meio de uma ruptura epistemológica, no qual ocorre uma transformação na forma como concebemos e compreendemos o conhecimento, permitindo-nos avançar em direção ao novo saber (Pais, 2019).

Para Schubring (2002), a crescente ênfase em pesquisas sobre erros na Matemática e o abandono da visão de que o erro é apenas um aspecto marginal na didática têm gerado resultados que evidenciam a relevância das preconcepções dos alunos. Nesse contexto, o autor ressalta que os estudos demonstram que, ao se depararem com novos conhecimentos, os alunos frequentemente enfrentam conflitos de compreensão devido à interação com o que já possuem em seu repertório cognitivo. Isso significa que a incorporação do novo conhecimento não acontece de forma direta e linear, mas sim através de um processo complexo.

A pesquisa realizada por Sierpinska e Viwegier (1992) com crianças de 10 a 12 e 14 anos mostra a dificuldade de romper conhecimentos já formados pelos alunos. O objetivo do estudo era entender em que condições as concepções e atitudes dos alunos em relação ao conceito de infinito se tornavam um obstáculo epistemológico. Sierpinska (1994) discute os resultados do experimento, que mostraram que Agnès, de 10 anos, compreendeu mais rapidamente o argumento principal dos pesquisadores sobre a equipotência de números naturais e pares do que Martha, de 14 anos, que argumentou contra essa ideia e levou mais tempo para identificar inconsistências em seu raciocínio. A autora diz que Agnès demonstrou um pensamento complexo, enquanto Martha já tinha uma compreensão conceitual do infinito, considerando-o como algo "tão grande quanto desejamos", e dos subconjuntos, como “partes do todo com menos elementos”.

A pesquisa revelou que os conceitos de Martha sobre o infinito e subconjuntos funcionaram como obstáculos para sua compreensão da equipotência, porque eles eram “[...] partes de um sistema de conceitos, modos de pensar e crenças, e, portanto, não poderiam ser removidos ou alterados sem prejudicar todo o sistema. [...] estavam ligados a crenças sobre o que é o conhecimento e o que o torna válido” (Sierpinska, 1994, p. 156, tradução nossa)[10]. Ela buscou consistência em seu pensamento e tentou minar a consequência lógica da definição de "tanto quanto", mas ao perceber uma inconsistência em seus argumentos, optou por rejeitar a própria definição. Essa frustração demonstrou seu desejo de preservar suas crenças fundamentais, mesmo que isso implicasse em modificar os axiomas da teoria matemática. No entanto, apesar da frustração, o entendimento de Martha sobre Matemática tornou-se mais profundo ao final do experimento em comparação com o das crianças mais novas.

Dessa forma, cabe ao docente, segundo Brousseau (1983), propor meios para a superação de obstáculos, reconhecendo-os e rejeitando-os, pois esses obstáculos são componentes do conhecimento, e tratamentos inadequados do professor podem levar a erros frequentes. Assim, Brousseau (1998) propõe a interação dialética entre o aluno e a situação-problema para que seja possível a construção do significado. Ele argumenta que é necessário que o sujeito mobilize seus conhecimentos prévios para submetê-los a uma revisão, modificando-os, complementando-os ou rejeitando-os, permitindo a formação de novas concepções. A ação docente torna-se fundamental, pois para que ocorra a ruptura, a desestabilização do saber, sucessivas ações devem ocorrer, ou seja,

> Organizar a superação de um obstáculo consistirá em propor uma situação suscetível de evoluir e de fazer evoluir o aluno segundo uma dialética conveniente. Será uma questão, não de comunicar as informações que queremos ensinar, mas de encontrar uma situação na qual elas são as únicas a serem satisfatórias ou ótimas – entre aquelas às quais se opõem – para obter um resultado em que o aluno se dedicou (Brousseau, 1983, p. 179, tradução e grifo nosso)[11].

Para a análise dos obstáculos no conhecimento matemático, Sierpinska (1985 *apud* Igliori, 1999) produz uma releitura de Bachelard e destaca quatro pontos que podem ser aplicados: (1) o conhecimento se torna um obstáculo quando se acredita que ele o é, ao constituir-se num preconceito, ao não haver mais questionamentos sobre ele e se não há mais a exigência de sua validação; (2) a opinião se torna um obstáculo para o conhecimento científico; (3) quando o conhecimento científico se degenera em um hábito intelectual, ou seja, o conhecimento se torna um hábito fixo e estático na mente do sujeito, repetido sem reflexão e questionamentos; e (4) ao concretizar objetos abstratos.

Cornu (2002), argumentando sobre os obstáculos, escreve que é possível identificar quatro tipos: obstáculos genéticos e psicológicos, que estão relacionados ao desenvolvimento pessoal do aluno; obstáculos didáticos, que surgem devido o modo de ensino e do professor; e obstáculos epistemológicos, que estão relacionados à própria natureza dos conceitos matemáticos. Exploraremos cada um desses obstáculos na sequência, que são tratados como signos nesta pesquisa, porém concentraremos a análise em detalhes nos obstáculos de natureza epistemológica e didática, enquanto os obstáculos ontológicos e psicológicos serão considerados como potenciais aspectos a serem abordados e identificados durante a aplicação dos Experimentos Mentais.

3.1 OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS

O termo "epistemologia" foi inserido na Didática da Matemática em 1960. Como destaca D'Amore:

> No nosso campo de pesquisa: uma concepção epistemológica é um conjunto de convicções, de conhecimentos e de saberes científicos, os quais tendem a dizer o que são os conhecimentos dos indivíduos ou de grupos de pessoas, como funcionam, os modos de estabelecer sua validade, bem como adquiri-los e então de ensiná-los e aprendê-los; a epistemologia é uma tentativa de identificar e de unificar concepções epistemológicas diferentes relativas a determinadas ciências, a movimentos intelectuais, a grupos de pessoas, a instituições, ou a culturas (D'Amore, 2007a, p. 181).

A noção de obstáculo epistemológico, de acordo com Sierpinska (1994), tem sido o foco de muitas pesquisas entre teóricos para estabelecer sua natureza, possíveis definições e razões para aplicá-la na Didática Matemática. A autora destaca que, em 1988, Nadine Bednarz organizou uma conferência em Montreal com a participação de psicólogos, filósofos da ciência e educadores matemáticos e físicos, na tentativa de esclarecer a noção de obstáculo epistemológico, mas, ao final do evento, os participantes saíram sentindo-se ainda mais confusos. Sierpinska menciona que até mesmo Bachelard, criador do conceito, nunca o definiu "formalmente", mas apresentou diversos exemplos.

Os obstáculos didáticos de origem epistemológica são conceituados, por Brouseau (1983), como inerentes ao processo de construção do conhecimento matemático, dos quais não se pode escapar, uma vez que fazem parte da história dos conceitos matemáticos.

> Os obstáculos de origem genuinamente epistemológica são aqueles dos quais não se pode nem se deve escapar, devido ao seu papel formativo no conhecimento que está sendo buscado. Eles podem ser encontrados na própria história dos conceitos. Isso não significa que devemos ampliar o seu efeito ou reproduzir no contexto escolar as condições históricas em que foram superados (Brousseau, 2002, p. 87)[12].

Ao realizar uma análise de alguns estudos, Artigue (1989) observa que os obstáculos epistemológicos são fundamentados de forma significativa pelo fato de terem surgido e resistido ao longo da história dos conceitos em questão. A autora ressalta a importância de não apenas verificar a persistência desses obstáculos nos alunos atuais, mas também analisar concepções análogas que se assemelham àquelas encontradas historicamente.

É importante ressaltar que nem todas as dificuldades enfrentadas pelos alunos devem ser consideradas obstáculos epistemológicos. De acordo com Brousseau (1989), é necessário seguir algumas etapas para identificar e estabelecer obstáculos: primeiro, é preciso identificar os erros recorrentes e relacioná-los em torno de concepções; em seguida, encontrar os obstáculos que têm origem na história da Matemática; por fim, confrontar os obstáculos históricos com os de aprendizado, o que possibilita compreender sua natureza epistemológica.

No entanto, de acordo com Schubring (2002), a concepção de Brousseau ao utilizar a história principalmente para encontrar erros cometidos por matemáticos revela uma fraqueza e uma visão distorcida sobre o papel da história na Educação Matemática. Essa abordagem trata a história como um mero museu, não valoriza seu papel ativo e dinâmico. O autor enfatiza que identificar obstáculos na história requer uma abordagem mais ampla, não se restringindo apenas aos poucos matemáticos famosos, mas sim aprofundando o estudo sobre como os conceitos foram discutidos e modificados na comunidade matemática em determinada época e cultura, incluindo também comparações com distintas culturas.

Contudo, os pesquisadores em Didática da Matemática têm se empenhado em identificar várias concepções que podem resultar em obstáculos epistemológicos. Por exemplo, Almouloud (2007) destaca cinco áreas nas quais esses obstáculos foram observados: o estatuto dos números, o conceito de zero, o infinito, o conceito de função e o conceito de probabilidade. No que diz respeito ao conceito de zero, Almouloud ressalta que muitos equívocos surgem devido à associação com a ideia de "nada". Essa associação incorreta pode levar os estudantes a não compreenderem plenamente o valor e o significado do zero na Matemática.

Almouloud ainda aponta que o infinito tem sido uma fonte de dificuldades para muitos alunos ao longo do tempo. Essas dificuldades remontam aos famosos paradoxos de Zenon de Eleia, um filósofo do século V a.C., como o paradoxo de Aquiles e a Tartaruga. Esses paradoxos, que parecem ser contraditórios, têm o potencial de causar confusão e incompreensão em relação à natureza do infinito na Matemática. Além disso, essas questões persistiram e se estenderam à teoria dos conjuntos, com os enigmas apresentados por Cantor e Russel, acrescentando mais complexidade ao entendimento desse conceito matemático.

Almouloud (2007) também menciona os obstáculos identificados no campo dos números, os quais incluem diferentes resistências e rejeições por parte de matemáticos renomados ao longo da história. Esses obstáculos são destacados da seguinte forma: (1) Kronecker rejeitou a fração como um número; (2) Euler apresentou propriedades duplicadas para os números naturais e, posteriormente, para as frações; (3) Os Pitagóricos não aceitaram a irracionalidade da raiz quadrada de dois; (4) Carnot e Stendhal resistiram em aceitar os números negativos como válidos; (5) Cauchy e Gauss reconheceram tardiamente o estatuto de números para o conjunto dos complexos. Esses obstáculos representam momentos significativos na evolução do conhecimento matemático, evidenciando as dificuldades e resistências enfrentadas pelos matemáticos ao longo do tempo para aceitar conceitos que hoje são fundamentais na Matemática.

A pesquisa realizada por Igliori e Silva (1998, *apud* Igliori, 1999) com alunos do terceiro ano do ensino médio revelou aspectos apontados por Artigue (1989), como a presença de fortes convicções formadas sobre as propriedades dos números naturais que são importadas para os números decimais. Os resultados também corroboram com Brousseau, que destaca vários obstáculos conhecidos nesse contexto:

> - A dificuldade de aceitar que um aumento pode ser obtido por uma divisão e uma diminuição por uma multiplicação.
> - A dificuldade de encontrar um número decimal entre dois outros, evitando a busca pelo sucessor de um número decimal.
> - A dificuldade de aceitar a "dupla escrita" dos números decimais (por exemplo: 1.5 e 1.4999...).
> - A dificuldade de conceber o produto de dois números decimais escalares.
> - A dificuldade de conceber novos tipos de divisão
>
> (Brousseau, 2002, p. 112, tradução nossa)

Os alunos da pesquisa de Igliori (1999) aplicaram erroneamente o conceito de que a multiplicação sempre gera números maiores e a divisão números menores ao contexto dos decimais, além da crença de que todo número possui um antecessor e um sucessor. Os resultados do estudo ainda mostraram que os alunos enfrentaram dificuldades para identificar um número decimal entre 3,25 e 3,26, e também acreditaram que o sucessor de 3,14 é 3,15.

Esse processo consiste na generalização abusiva das propriedades dos números naturais para os decimais, segundo Artigue (1989), que cita outros processos geradores de obstáculos epistemológicos: a regularização formal abusiva, o foco excessivo em uma contextualização ou modelagem familiar, a mistura de conceitos e a aderência exclusiva a um ponto de vista. No primeiro processo, ocorrem situações em que, por exemplo, a expressão $(a+b)^2$ é equivocadamente considerada igual a a^2+b^2. Na segunda situação, a associação ao modelo aditivo de perdas e ganhos, conforme Almouloud (2007), torna-se um problema de conceituação dos números inteiros como objetos matemáticos abstratos. O terceiro processo produz erros persistentes, como no tratamento de comprimentos e áreas pelos alunos.

Finalmente, o quarto processo é considerado crucial na relação com os obstáculos epistemológicos.

A existência de obstáculos epistemológicos pode, muitas vezes, dar origem a obstáculos didáticos. Como discutido, os obstáculos epistemológicos relacionam-se ao conteúdo do conhecimento e às concepções inconsistentes que os alunos desenvolvem sobre conceitos matemáticos. Por outro lado, abordaremos como os obstáculos didáticos surgem durante o processo de ensino e podem ser causados por escolhas metodológicas e decisões do professor. Em alguns casos, as abordagens adotadas pelo professor podem reforçar os obstáculos epistemológicos se as concepções equivocadas dos alunos não forem tratadas adequadamente. A seguir, analisaremos mais detalhadamente os obstáculos de origem didática.

3.2 OBSTÁCULOS DIDÁTICOS

Os obstáculos didáticos são aqueles que dependem apenas de projetos ou escolhas de ensino do professor (Brousseau, 1983). Conforme Almouloud (2007), esse tipo de obstáculo é provocado por transposições didáticas que são difíceis de serem alteradas, sendo inevitáveis e inerentes ao processo, pois:

> [...] cada docente escolhe um projeto, um currículo, um método, interpreta de maneira pessoal a transposição didática, de acordo com as suas convicções científicas e didáticas: ele acredita nessa escolha e a propõe à classe porque a considera eficaz; mas aquilo que é verdadeiramente eficaz para determinado estudante não é dito que o seja para os outros. Para esses *outros*, a escolha *daquele* projeto revela-se um *obstáculo didático* (D'Amore, 2007b, p. 213, *grifo do autor*).

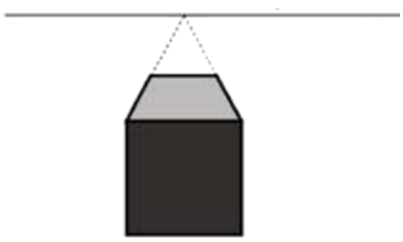
Esse tipo de obstáculo se torna mais evidente quando o professor ensina de forma rígida e inflexível, apresentando o conhecimento matemático como uma verdade única e imutável, sem espaço para questionamentos e discussões (Gomes, 2002). Esse comportamento decorre de uma visão absolutista do próprio professor sobre o que é a Matemática, conforme argumentado por D'Ambrosio (1993), na qual a Matemática é vista como uma coleção de verdades prontas, acumuladas e indiscutíveis. Essa concepção rígida sobre a natureza da Matemática pode ser resultado das experiências que o docente vivenciou, "[...] das influências socioculturais que sofreram durante suas vidas, influências essas que vêm se formando ao longo dos séculos, passando de geração a geração, a partir das ideias de filósofos que refletiram sobre a Matemática" (Cury, 1999, p. 11).

D'Ambrosio (1993) enfatiza a importância de compreender a Matemática como uma disciplina dinâmica e investigativa. Ela argumenta que os professores devem entender a natureza da Matemática, os processos de aprendizagem, e criar um ambiente propício para isso. Para D'Ambrosio (1993), a atividade Matemática deve ser centrada na ação, permitindo que os alunos proponham, explorem e investiguem problemas, em vez de apenas acumularem informações, pois não são recipientes passivos de fatos e ideias. A efetivação dessas concepções matemáticas e a mitigação dos obstáculos didáticos dependem amplamente da qualidade da formação dos professores, uma vez que:

> [...] obstáculos provocados pelo próprio professor, no interior das escolas [...] justifica a necessidade de mudanças significativas na formação de professores, pois permitir que nossos alunos terminem a graduação e saiam para o mercado de trabalho provocando obstáculos na aprendizagem de seus alunos ao invés de favorecerem e enriquecerem a aprendizagem dos mesmos é inadmissível em nossos dias! (Gomes, 2006, p. 142)

No processo de ensino-aprendizagem da Matemática, diversos exemplos de obstáculos didáticos se destacam. Um desses exemplos é discutido por Pais (2019), que aborda a aprendizagem de geometria espacial por meio da leitura de certas perspectivas da representação. Segundo o autor, esse método pode não ser tão evidente para os alunos e, consequentemente, dificultar a compreensão das propriedades geométricas dos sólidos representados. Especificamente, Pais (2019) destaca a representação do cubo em perspectiva paralela, o que é ilustrado na Figura 12. Nessa representação, a face superior do cubo é retratada como um paralelogramo, porém, não necessariamente um paralelogramo quadrado. Isso significa que os ângulos entre as arestas da face superior podem não ser percebidos como ângulos retos quando observados no papel.

Figura 12 – Cubo em perspectiva paralela



Fonte: Canotilho, 2005, p. 65.

Outros estudos também identificaram obstáculos didáticos na aprendizagem de geometria. Em relação à percepção espacial de problemas geométricos, Nurjanah e Juliana

(2020) observaram que, nos anos finais do ensino fundamental na Indonésia, os professores tendem a enfatizar mais os cálculos do que os conceitos básicos de geometria. Além disso, nos materiais de estudo, falta discussão sobre as propriedades geométricas das faces dos sólidos. O tempo utilizado pelos professores também foi apontado como um obstáculo didático, pois, se o ensino ocorre de forma rápida, os alunos têm dificuldades em compreender completamente o conteúdo. Ademais, a falta de materiais didáticos para manipulação nas aulas dificulta a visualização dos objetos geométricos pelos alunos.

Novainda e Turmudi (2021) realizaram uma revisão bibliográfica de estudos que abordam barreiras de aprendizagem nos livros de geometria nos anos finais do ensino fundamental na Indonésia. Os resultados das análises dos seis estudos encontrados indicaram que os obstáculos didáticos incluíam materiais de ensino desorganizados e com concepções equivocadas. Além disso, os professores ensinavam conceitos inconsistentes, muitas vezes utilizando soluções rápidas ou termos pouco claros, o que resultava em um aprendizado incompleto. Brum e Silva (2015) discutem esse problema, observando que:

> Na tentativa de minimizar as dificuldades encontradas pelos alunos, os professores em função de seu papel institucional de formação, comumente utilizam em sala de aula diversas estratégias com o intuito de facilitar a aprendizagem. Entre as estratégias, destacam-se as analogias, metáforas, imagens, resolução de problemas, desafios entre outras. Ainda que empregadas com a intenção de contribuir para a compreensão de determinado conteúdo, as estratégias se caracterizam como subterfúgios pedagógicos, substituindo assim, linhas de raciocínio por esquemas e macetes, o que se por um lado se torna atrativo de interesse, por outro se cristaliza intuições (Brum e Silva, 2015, p. 2).

Almouloud (2007) também discute obstáculos didáticos, como a noção de fração, que muitas vezes é ensinada como uma mera partição de figuras, remetendo à ideia de que fração está sempre relacionada a partes de um todo. Além disso, o autor aponta que, no ensino primário, é comum que os professores ensinem que um quadrado não é um tipo de retângulo. Essa separação rígida entre os dois conceitos pode gerar confusão, limitando a capacidade de fazer conexões entre diferentes formas geométricas e prejudicando uma visão mais abrangente da geometria.

Almouloud (2007) identifica um obstáculo no ensino da adição de números inteiros, frequentemente abordada através de escalas de temperaturas e extratos bancários, o que pode se tornar um entrave à medida que os alunos avançam para a multiplicação desses números. O autor também destaca que o estudo de gráficos de funções afins unicamente no oitavo e/ou nono ano são obstáculos didáticos para a compreensão do conceito no ensino médio. Já no campo da probabilidade, Almouloud (2007) ressalta que o uso restrito da fórmula $\frac{casos\ favoráveis}{casos\ possíveis}$ limita o trabalho didático apenas a situações de equiprobabilidade, o que impossibilita outros cenários probabilísticos relevantes e impede que os alunos compreendam plenamente os conceitos e cálculos envolvidos nessa área da Matemática.

Já no ensino de potências, a pesquisa de Paias (2019), identificou oito obstáculos didáticos, como: o uso de figuras e materiais concretos que limitam o estudo das potências aos expoentes dois (representados por quadrados) e três (representados por cubos), dificultando a compreensão de expoentes maiores; a falta de problemas, não exercícios, sobre potências nos livros didáticos; a apresentação mecânica de convenções para o aluno, como potências com expoentes zero e um, sem uma justificativa adequada; a falta de explicação das diferenças entre o cálculo de potências com e sem o uso de parênteses; exemplos como 2^2, que podem gerar conflito entre o dobro de dois e o seu quadrado; a abordagem restrita da conversão de representação da língua natural para a representação numérica das potências, com uma introdução limitada dos termos "base" e "expoente"; e a exclusão de potências com expoentes fracionários em alguns livros didáticos. Esses obstáculos podem dificultar o processo de aprendizagem e compreensão das potências por parte dos alunos.

Há uma inter-relação entre os obstáculos de origem didática e os de origem ontogênica, uma vez que, como mencionado anteriormente, os primeiros estão relacionados às escolhas metodológicas do professor, a materiais inadequados, etc., enquanto os segundos dizem respeito às limitações no desenvolvimento cognitivo do próprio sujeito. Portanto, se o professor ensina algum conhecimento para o qual o aluno ainda não tem a capacidade de compreender e construir, isso pode resultar no surgimento de barreiras no processo de aprendizagem. A seguir, discutiremos com mais detalhes os obstáculos de origem ontogênica.

3.3 OBSTÁCULOS ONTOGÊNICOS

A ontogênese é um campo de estudo que abrange o desenvolvimento de um organismo ao longo do tempo, incluindo todas as mudanças nas esferas biológicas, cognitivas, emocionais e comportamentais. Nesse contexto, os obstáculos didáticos de origem ontogênica surgem no processo de aprendizagem devido às limitações específicas e à falta de maturidade cognitiva, que não está necessariamente ligada à idade cronológica. Essas limitações podem incluir restrições neurofisiológicas impostas pelas características do sistema nervoso (Brousseau, 1983).

Jean Piaget (1896-1980), renomado psicólogo e biólogo, dedicou-se ao estudo do processo de desenvolvimento humano. De acordo com Coll e outros (2007), a epistemologia genética de Piaget visa investigar o desenvolvimento intelectual, descrevendo e explicando a transição do pensamento infantil para o pensamento abstrato adulto. Piaget (1999) compara o desenvolvimento psíquico ao crescimento orgânico do corpo. Assim como o corpo atinge um nível estável através da maturação dos órgãos, o desenvolvimento psíquico também progride em direção a um equilíbrio, passando de fases iniciais para mais avançadas.

A equilibração é um processo contínuo ao longo do desenvolvimento cognitivo e ocorre por meio de dois mecanismos fundamentais: assimilação e acomodação. Na assimilação, o indivíduo integra e internaliza conhecimentos novos às estruturas cognitivas já existentes. Por outro lado, a acomodação envolve o reajuste e a transformação dessas estruturas cognitivas para incorporar novas informações (Piaget, 1999). Esse processo de equilibração se completa "[...] desde que haja satisfação das necessidades, isto é, logo que o equilíbrio – entre o fato novo, que desencadeou a necessidade, e a nossa organização mental, tal como se apresentava anteriormente – é restabelecido" (Piaget, 1999, p. 16).

Assim, ao longo do desenvolvimento cognitivo, o sujeito percorre uma série de níveis de equilíbrio por meio dos processos de assimilação e acomodação, ou seja, ele atravessa estágios de desenvolvimento. De acordo com Piaget (1999), cada estágio apresenta uma estrutura característica, diferenciando-se dos estágios anteriores, mas mantendo o essencial das fases precedentes. Coll e outros (2007) descrevem os quatro estágios propostos por Piaget: sensório-motor (0 a 2 anos), em que a inteligência se relaciona principalmente com problemas de ação, como se movimentar e alcançar objetos; pré-operatório (2 a 7 anos), em que a inteligência é simbólica, com desenvolvimento da linguagem e da imaginação, embora a criança ainda apresente tendência ao egocentrismo; operatório-concreto (7 a 12 anos), o pensamento lógico emerge, mas ainda depende de verificação empírica e se limita à realidade concreta; e operatório-formal (a partir da adolescência), em que o pensamento lógico se desenvolve de forma mais abstrata, permitindo à pessoa imaginar hipóteses, organizá-las, comprová-las, verificar e sistematizar os resultados.

As idades cronológicas estimadas por Piaget nem sempre se aplicam a todos os indivíduos. Portanto, é relevante observar em qual fase de desenvolvimento cada estudante se encontra, levando em consideração suas características individuais. Estudos realizados por Chiappetta (1976) mostraram que muitos jovens de 15 ou 16 anos ainda não alcançaram a fase operatório-formal, que é caracterizada pelo desenvolvimento do pensamento abstrato e lógico. Essa constatação é corroborada por diversas pesquisas que indicam que uma grande proporção de adolescentes e jovens adultos nos Estados Unidos (mais de 85% dessa população) não atinge esse nível de desenvolvimento cognitivo. Essas análises foram baseadas em pesquisas que utilizaram pelo menos três tarefas do tipo piagetiano, que são ferramentas de avaliação para identificar estágios específicos de desenvolvimento cognitivo. As atividades foram apresentadas aos participantes em formato de entrevista pessoal, possibilitando uma abordagem individualizada sobre a compreensão dos conceitos avaliados.

No contexto das fases de desenvolvimento cognitivo estudadas por Piaget, é possível identificar obstáculos de origem ontogênica na aprendizagem da Matemática. Por exemplo, se um aluno ainda não alcançou o estágio operatório-formal, ele pode enfrentar dificuldades na compreensão de conceitos matemáticos abstratos, como os números inteiros negativos e irracionais. Além disso, estudantes que ainda não desenvolveram o pensamento lógico podem encontrar obstáculos em problemas que envolvem sequências lógicas complexas, como problemas de várias etapas ou a compreensão de tabelas-verdade, conforme mencionado por Kikuchi (2011).

A utilização de linguagem matemática, que inclui símbolos, letras e expressões, pode também representar um obstáculo ontogênico para estudantes mais jovens, pois requer uma compreensão de representações mais abstratas. Conteúdos relacionados a medidas de tempo podem apresentar desafios para crianças em idades mais precoces. A pesquisa de Kikuchi (2012) identificou que a falta de experiência prática na diferenciação entre a medição da área de uma figura plana e suas dimensões pode se tornar um obstáculo ontogênico quando os alunos enfrentam problemas relacionados a esse conteúdo.

Outro estudo realizado por Devichi e Munier (2013) investigou as dificuldades dos alunos na construção do conceito de ângulo e identificou que um obstáculo ontogênico frequente é a crença equivocada de que o ângulo está relacionado ao comprimento de seus lados. Em outras palavras, algumas crianças das séries iniciais tendem a pensar que quanto menor a medida do ângulo, menores serão os comprimentos dos seus lados, o que pode prejudicar a compreensão adequada desse conceito. Nessa pesquisa, também foi identificado que, conforme a literatura (Piaget; Inhelder, 1956; Baldy; Devichi; Chatillon, 2004), as crianças têm maior propensão a desenhar ângulos retos e linhas perpendiculares. Esse comportamento é apontado como outro obstáculo ontogênico, pois pode levar as crianças a desenvolverem uma compreensão limitada dos diversos tipos de ângulos existentes.

Em alguns casos, os obstáculos ontogênicos podem contribuir para o surgimento de obstáculos psicológicos. O primeiro está relacionado ao estágio de desenvolvimento cognitivo em que o sujeito se encontra, enquanto o segundo refere-se aos aspectos psicológicos do aluno, como suas crenças e atitudes em relação à aprendizagem. Assim, um estudante que ainda não alcançou o estágio de desenvolvimento cognitivo necessário para compreender um conteúdo matemático pode enfrentar desestabilizações emocionais, resultando em obstáculos de origem psicológica, que serão discutidos a seguir.

3.4 OBSTÁCULOS PSICOLÓGICOS

Conforme Almouloud (2007), os obstáculos didáticos de origem psicológica surgem quando o processo de aprendizagem causa desestabilização no aluno, resultando em um conflito com suas representações profundas. O autor ilustra que isso pode ocorrer quando o estudante percebe que a lógica ensinada na escola difere da lógica do dia a dia Além disso, o medo de lidar com situações matemáticas complexas, como a divisão por zero, bem como as condições psicológicas no momento do aprendizado de um novo conceito, podem influenciar a aplicação dessa noção em problemas. Outro exemplo citado por Almouloud (2007) é a crença ou rejeição do acaso, como a ideia de que uma das faces do dado é mais propensa a ocorrer do que outra.

Kikuchi (2012) ressalta que os obstáculos de origem psicológica estão associados ao contexto em que o aluno está inserido, às crenças transmitidas pelos familiares e à sua natureza afetiva. A autora exemplifica que, se o aluno frequentemente ouve sobre as dificuldades que seus pais tiveram com a Matemática, é provável que ele desenvolva medos e crenças negativas sobre a disciplina, como a ideia de que a Matemática é difícil. Em sua pesquisa, Kikuchi (2012) identificou que o ambiente da comunidade em que o aluno vive pode desencadear obstáculos psicológicos, por exemplo, se o termo "peso" é utilizado para descrever o que está na balança, isso pode dificultar a compreensão dos conceitos de massa e peso, que possuem significados distintos no conhecimento científico.

Além das crenças negativas influenciadas pelos pais, o medo de cometer erros pode gerar obstáculos psicológicos na aprendizagem da Matemática. Esse receio faz com que os alunos evitem participar das aulas e não sanem suas dúvidas. A aversão ao erro, muitas vezes exacerbada pelo sistema educacional, cria um ambiente inibidor onde os estudantes sentem medo de resolver problemas ou se envolver em discussões matemáticas. Além disso, quando um aluno é rotulado como “não bom em Matemática”, isso pode afetar negativamente sua confiança na disciplina, criando um obstáculo psicológico.

A pesquisa de Tobias (1990) revela obstáculos psicológicos enfrentados por estudantes universitários. A autora conduziu 600 entrevistas com alunos universitários e adultos e constatou que três principais fatores contribuem para as dificuldades com a Matemática nesse ambiente: o medo da Matemática, a crença de que a Matemática é um domínio exclusivo de homens brancos e a ideia de que as pessoas são boas apenas em Matemática ou em linguística. Durante as entrevistas, muitos alunos compartilharam suas experiências de terem sido informados de que as meninas não são boas nessa disciplina ou que pessoas negras não se tornam engenheiros. Essas crenças negativas influenciam a percepção dos estudantes sobre suas habilidades em Matemática e podem criar barreiras psicológicas que dificultam o aprendizado e o desenvolvimento nessa área.

Conforme Steele (1997), o estereótipo de que as mulheres não possuem habilidades matemáticas equivalentes às dos homens pode representar uma ameaça ao desempenho acadêmico delas. Nesse contexto, obstáculos psicológicos surgem quando as mulheres são constantemente expostas a estereótipos negativos sobre suas habilidades matemáticas, o que pode impactar sua confiança na área. Segundo o estudo, a pressão social e cultural pode levá-las a temer confirmar o estereótipo, prejudicando ainda mais seu desempenho.

Ainda, segundo a pesquisa de Tobias (1990), a sala de aula de Matemática parece se tornar uma fonte de trauma para muitos estudantes, configurando-se como um obstáculo psicológico. Isso ocorre devido à falta de espaço para o debate e a discussão dentro desse ambiente. Como resultado, os alunos tendem a preferir outras disciplinas, como ciências sociais ou línguas, pois podem participar de forma mais ativa das discussões em sala de aula e não enfrentam a pressão de encontrar uma única resposta correta.

Portanto, os obstáculos de natureza psicológica na Educação Matemática estão interligados com os obstáculos didáticos e ontogênicos. O método de ensino pode reforçar aversões à Matemática, estabelecendo uma conexão com os obstáculos didáticos. Além disso, a maturidade cognitiva dos alunos é relevante para a compreensão de certos conceitos matemáticos, podendo provocar dificuldades e resistências emocionais ao lidar com determinados temas, o que se relaciona com os obstáculos ontogênicos. Adicionalmente, os obstáculos epistemológicos, que envolvem o próprio conhecimento matemático, também podem gerar obstáculos de origem psicológica, uma vez que representam barreiras historicamente percebidas e internalizadas pelos estudantes.

Nesta pesquisa, conduziremos uma análise aprofundada dos obstáculos, com ênfase nos de origem epistemológica e didática. Os obstáculos psicológicos e ontogênicos serão considerados como possibilidades durante a aplicação de Experimentos Mentais. No próximo capítulo, detalharemos a metodologia deste estudo, abrangendo os procedimentos para a coleta de dados, a seleção dos participantes e a escolha dos Experimentos Mentais. Além disso, forneceremos informações sobre a análise dos dados.

4 METODOLOGIA DA PESQUISA

Ao tratar do conhecimento científico, torna-se essencial compreender e estabelecer sua diferenciação em relação a outros tipos de conhecimento que coexistem em nossa sociedade, como o senso comum, ou saber popular. Nessa perspectiva, Marconi e Lakatos (2017) enfatizam que o primeiro passo nesse processo é discernir claramente as características que constituem o conhecimento científico e o distinguem das demais formas de saber. Os autores ressaltam que a divergência fundamental entre essas modalidades de conhecimento reside no método pelo qual o conhecimento é obtido. Embora a ciência seja uma das principais vias para a busca de saberes, não é a única forma de acesso ao conhecimento existente.

O senso comum é construído a partir de observações cotidianas, muitas vezes baseadas em noções transmitidas culturalmente, ou seja, "preenche nossa vida diária; é um saber que possuímos sem que o tenhamos procurado ou estudado, sem que tenhamos aplicado um método e sem que tenhamos refletido sobre algo" (Marconi; Lakatos, 2017, p. 82). Por outro lado, o conhecimento científico fundamenta-se em fatos e é obtido por meio de um método sistemático, racional e empiricamente verificável. No entanto, os autores alertam que os resultados científicos não são definitivos, podendo ser revistos e aprimorados, o que torna a ciência falível e sempre em busca de maior precisão em suas conclusões.

Severino (2017) destaca que a ciência utiliza métodos científicos, nos quais o pesquisador aplica recursos técnicos e se apoia em fundamentos epistemológicos para embasar a metodologia de suas investigações. Existem diversas modalidades de pesquisa no âmbito científico, cada uma com suas características e abordagens específicas. Este estudo adota a abordagem qualitativa, conforme delineado por Bogdan e Biklen (1994). Os autores apontam que uma das premissas da pesquisa qualitativa é que o ambiente natural se torna a principal fonte de dados, sendo esse ambiente compreendido como o contexto real no qual os fenômenos ocorrem. Nesse sentido, o pesquisador considera que o comportamento humano é fortemente influenciado pelo contexto em que se insere, e a compreensão desse contexto é essencial para a interpretação dos dados coletados.

Ademais, Bogdan e Biklen (1994) abordam mais quatro características fundamentais da pesquisa qualitativa. Primeiramente, destacam que essa abordagem é descritiva, o que significa que não se restringe à coleta de dados numéricos, mas busca compreender e retratar os fenômenos estudados por meio do uso de palavras, imagens e outros recursos que permitem capturar a complexidade e a riqueza das experiências dos participantes. Outro aspecto relevante é a ênfase no processo de pesquisa em vez do resultado final. Isso significa que, na pesquisa qualitativa, a trajetória percorrida durante a coleta e análise dos dados é considerada tão importante quanto os resultados obtidos.

Além disso, os autores ainda apontam que a pesquisa qualitativa adota uma abordagem indutiva na análise dos dados, isto é, não há intenção de confirmar hipóteses prévias ou estabelecer relações causais de antemão. Pelo contrário, as conclusões são construídas ao longo do processo de coleta e análise dos dados, permitindo que novas perspectivas e compreensões surjam durante o desenvolvimento da pesquisa. Por fim, para Bogdan e Biklen (1994), a pesquisa qualitativa prioriza o significado atribuído pelos participantes da pesquisa. Eles afirmam que essa abordagem busca compreender as perspectivas, visões de mundo e experiências dos sujeitos estudados, dando voz aos participantes e capturando suas vivências e interpretações dos fenômenos sociais em seu contexto real.

Em contraste à abordagem qualitativa, Severino (2017) ressalta que, nos primórdios da era moderna, a ciência se fundamentou no acesso racional à essência dos objetos, resultando em uma abordagem que limitava sua compreensão a uma simples relação de causa e efeito, medida unicamente por meio de funções matemáticas. No entanto, o autor aponta que o avanço contínuo da pesquisa científica trouxe consigo uma importante percepção: o conhecimento não pode ser reduzido somente a esses critérios. Para ele, a ciência necessita incorporar uma perspectiva mais ampla, considerando a diversidade de aspectos, incluindo o subjetivo, a complexidade das interações humanas e a compreensão dos fenômenos em seus contextos naturais.

Segundo Bicudo (2019), a pesquisa qualitativa se destaca por conter aspectos subjetivos no estudo, permitindo a exploração profunda das sensações e opiniões dos participantes envolvidos. Bicudo enfatiza que essa abordagem busca compreender os fenômenos em seus contextos naturais, valorizando a riqueza das experiências individuais. Por outro lado, a autora argumenta que a pesquisa quantitativa tem como objetivo central a mensuração de dados objetivos e passíveis de quantificação. Ao utilizar técnicas estatísticas e números, esse tipo de pesquisa busca estabelecer relações precisas e objetivas entre variáveis, permitindo a generalização dos resultados para uma população maior.

Neves (1996) explica que o estudo qualitativo é conduzido de maneira diferenciada ao longo de todo o processo de desenvolvimento. Isso quer dizer que, ao contrário das abordagens quantitativas, que muitas vezes se restringem à medição de eventos e à aplicação de instrumentos estatísticos, a pesquisa qualitativa enfatiza uma compreensão mais abrangente. Essa abordagem valoriza a perspectiva dos participantes, reconhecendo que suas vozes são fundamentais para situar a interpretação dos resultados. Para o autor, o pesquisador qualitativo busca entender os significados atribuídos pelos participantes às suas experiências, bem como as influências do contexto em que os eventos ocorrem.

Dessa forma, a presente pesquisa foi conduzida no contexto da disciplina Matemática Escolar III, oferecida aos estudantes de licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), localizada na Rua José Lourenço Kelmer, s/n, no Bairro São Pedro, na cidade de Juiz de Fora, em Minas Gerais. Conforme o Projeto Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática Diurno[v], o Departamento de Matemática da UFJF conta com quarenta e dois professores, 95% dos quais possuem doutorado em diversas áreas da Matemática. A modalidade de licenciatura em Matemática foi instituída em 1981, como parte do curso de Matemática, cujo reconhecimento ocorreu em 1975.

O currículo do Curso de Licenciatura em Matemática Diurno[vi] é organizado em 8 períodos, compreendendo diferentes cargas horárias distribuídas da seguinte forma: 600 horas em disciplinas obrigatórias comuns, que visam fornecer conhecimentos fundamentais em todas as áreas das Ciências Exatas; 960 horas em disciplinas obrigatórias específicas da licenciatura em Matemática; 420 horas em disciplinas práticas, que proporcionam experiências direcionadas em ambientes escolares; 540 horas em disciplinas da Ciência da Educação, História e Filosofia das Ciências, Matemática e acessibilidade; 120 horas em disciplinas eletivas, permitindo escolhas personalizadas; 400 horas em estágio curricular; e 200 horas em Flexibilização Curricular. A resolução n. 75/2022[vii], de 12 de julho de 2022, estabelece, no mínimo, 10% da carga horária total para integralização do curso em atividades extensionistas.

A disciplina Matemática Escolar III faz parte do conjunto de disciplinas de prática curricular e é cursada no oitavo período, totalizando 60 horas de carga horária. A ementa abrange: (1) análise do currículo de Matemática do ensino médio; (2) Exploração de metodologias alternativas de ensino; e (3) Abordagem de problemas relacionados aos processos de ensino e aprendizagem de Matemática no ensino médio. Dentro do escopo da segunda área, os estudantes foram apresentados aos Experimentos Mentais durante uma aula de 4 horas, das 19h às 23h, em 18 de maio de 2023, ministrada a um grupo de seis licenciandos em Matemática.

---

[v] Disponível em: https://www2.ufjf.br/matematica/wp-content/uploads/sites/393/2015/04/PPC.licenciatura.novembro.pdf. Acesso em 27 maio 24.

[vi] A Universidade Federal de Juiz de Fora oferece dois cursos de licenciatura presenciais (noturno e integral). A disciplina Matemática Escolar III é ofertada para os dois cursos.

[vii] Disponível em: https://www2.ufjf.br/congrad/wp-content/uploads/sites/30/2022/07/Resolu%C3%A7%C3%A3o-75.2022.pdf. Acesso em 16 jun. 2024.

Para a produção de dados, utilizamos dois Experimentos Mentais: um relacionado à multiplicação de números inteiros e outro à determinação da equação da reta que passa por dois pontos. Nas análises e discussões, nos concentraremos apenas no primeiro Experimento (Apêndice A). Antes de iniciarmos os Experimentos, oferecemos uma visão conceitual com base no segundo capítulo desta pesquisa. Durante as atividades propostas, adotamos uma abordagem abrangente, registrando informações por meio de anotações escritas e gravações audiovisuais, que incluíram tanto os diálogos verbais, que foram transcritos (Apêndice B), quanto os comportamentos não verbais dos participantes. Nesse sentido, seguimos a orientação de Powell, Francisco e Maher (2004), os quais ressaltam a importância da observação detalhada desses comportamentos para compreender as complexidades das interações no contexto educacional.

Os dados obtidos com a aplicação dos dois Experimentos inicialmente constituíram o teste piloto. No entanto, após análises preliminares, concluímos que os dados já coletados eram suficientes, tornando desnecessária uma nova aplicação. A atividade proposta foi modificada para integrar o Produto Educacional desta pesquisa, que contém um conjunto abrangente de atividades pedagógicas destinadas a promover o desenvolvimento e a aplicação de Experimentos Mentais no contexto da Educação Matemática no nível básico. As alterações na atividade proposta para os licenciandos incluíram ajustes no layout e aperfeiçoamento da linguagem utilizada. Além disso, como o público-alvo do Produto Educacional é formado por professores da educação básica, decidimos remover as demarcações das características específicas dos Experimentos Mentais, como Forma, Estrutura, Compreensão, Dependência, Revelação e Comparação. Essa modificação foi feita porque, no caso dos licenciandos, desejávamos destacar os detalhes heurísticos dos Experimentos Mentais.

Assim, a primeira etapa da pesquisa consistiu em buscar fundamentação teórica na literatura sobre os Experimentos Mentais, utilizando obras de autores como Cruz (2018, 2022) e Peirce (2010). Além disso, para alcançar o objetivo da pesquisa de identificar os obstáculos, utilizamos fontes como Brousseau (2002). Após estabelecermos as bases teóricas da pesquisa, desenvolvemos os Experimentos Mentais utilizados nas atividades aplicadas e no Produto Educacional. Na segunda fase do estudo, planejamos e aplicamos o teste piloto com as atividades já elaboradas, realizamos análises preliminares e concluímos que não seria necessário reaplicar as atividades.

Por fim, na terceira fase da pesquisa, nos dedicamos à interpretação dos signos produzidos pelos participantes, baseando nossa análise na afirmação de Peirce (CP. 5.314) de que "todo pensamento é um signo". Nosso principal objetivo foi identificar os obstáculos que poderiam ser classificados como de origem epistemológica, didática, psicológica ou ontogênica. Para determinar o tipo de obstáculo presente nos signos produzidos pelos participantes, consideramos o próprio obstáculo como uma forma de signo. Se consideramos que todo pensamento é um signo, então podemos inferir que toda teoria também é um signo.

Além disso, de acordo com Santaella (2004, p. 162), Peirce afirma em um de seus manuscritos (MS 774, p. 4) que um signo pode ser entendido como:

> qualquer pintura, diagrama, grito natural, dedo apontando, piscadela, mancha em nosso lenço, memória, sonho, imaginação, conceito, indicação, ocorrência, sintoma, letra, numeral, palavra, sentença, capítulo, livro, biblioteca e, em resumo, qualquer coisa que seja, esteja ela no universo físico, esteja ela no mundo do pensamento, que – quer corporifique uma ideia de qualquer espécie (e nos permita usar amplamente esse termo para incluir propósitos e sentimentos), quer esteja conectada com algum objeto existente, quer se refira a eventos futuros por meio de uma regra geral – leva alguma outra coisa, seu signo interpretante, a ser determinado por uma relação correspondente com a mesma ideia, coisa existente ou lei (MS 774, p. 4, apud Santaella, 2005, p.39).

Dessa forma, o alcance da referência de um signo é bastante diversificado, abrangendo uma ampla gama de formas e naturezas. O signo pode estar relacionado a algo material e concreto, como uma cadeira, que é um objeto físico claramente definido no espaço. No entanto, ele também pode se referir a aspectos emocionais, como a felicidade, que representam estados internos e subjetivos do ser humano. Além disso, os signos podem se referir a conceitos, como os obstáculos delineados por Brousseau, que são construções teóricas utilizadas para entender e explicar certos fenômenos educacionais. Da mesma maneira, os signos podem apontar para ideias abstratas, que não possuem uma existência física tangível, mas são cruciais para o entendimento de diversas disciplinas, como a própria Matemática.

Por outro lado, interpretar um signo significa construir um novo signo, mas nenhum signo criado retrata o objeto em todos os seus aspectos, pois Peirce considera que não existe um significado definitivo (Cruz, 2021b). Em nosso estudo, a interpretação dos signos produzidos pelos participantes revela uma variedade de obstáculos que podem ser categorizados de acordo com suas origens epistemológicas, didáticas, psicológicas e ontogênicas. Essa categorização não é fixa, pois cada nova análise ou novo intérprete pode reclassificar os obstáculos com base em novas perspectivas e entendimentos. Assim, por exemplo, ao analisar um signo produzido por um participante, podemos identificar um obstáculo epistemológico, mas outro pesquisador pode ver nesse mesmo signo um obstáculo psicológico.

Portanto, estamos realizando uma interpretação por meio de signos, baseando-nos nos conceitos traçados por Brousseau. Este processo envolve a compreensão de que cada obstáculo é um signo que, ao ser interpretado, gera novos signos e novas compreensões. Essa flexibilidade de análise permite que diferentes intérpretes cheguem a diferentes conclusões sobre o mesmo fenômeno, refletindo a ideia de que os significados são sempre provisórios e sujeitos a novas interpretações.

No próximo capítulo, examinaremos a identificação dos obstáculos que podem surgir durante a aplicação dos Experimentos Mentais. Os dados coletados em campo, por meio dos relatos dos participantes e da observação das atividades, desempenharam um papel importante no embasamento das análises e reflexões, contribuindo para a compreensão das influências dos Experimentos Mentais na formação inicial dos professores participantes.

5 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS PRODUZIDOS

Dentro do contexto desta pesquisa, foram realizados dois Experimentos Mentais envolvendo um grupo composto por seis estudantes matriculados na graduação em Matemática, com foco na modalidade de licenciatura, que é oferecida pela Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF). A fase experimental ocorreu no dia dezoito de maio de 2023, com duração aproximada de uma hora e vinte minutos para cada Experimento, sendo desenvolvida no âmbito da disciplina denominada Matemática Escolar 3, ministrada pelo professor doutor Willian José da Cruz.

5.1 EXPERIMENTO MENTAL: MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS

Antes de realizar o experimento mental selecionado para ser desenvolvido com os estudantes de graduação, houve uma discussão sobre a natureza dos Experimentos Mentais, os quais são conduzidos em situações em que o acesso físico ao objeto não é viável. Para ilustrar esse conceito, apresentamos o experimento mental proposto por Einstein, conhecido como o experimento do trem. A razão pela qual Einstein o propôs foi que, na prática, sua execução com um trem em alta velocidade seria impossível.

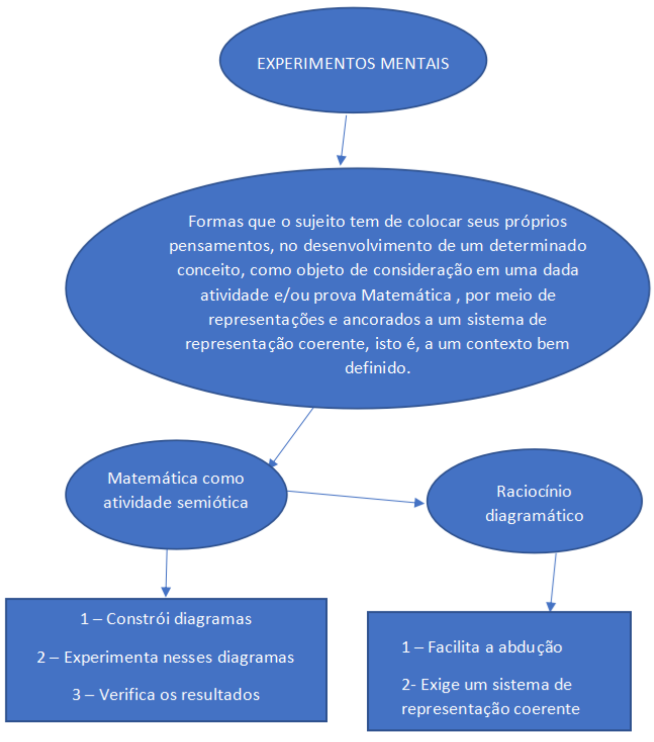
Nesse experimento, consideramos uma situação em que um trem está se movendo a uma velocidade próxima à da luz. Um observador situado fora do trem vê dois raios de luz sendo emitidos ao mesmo tempo de pontos distintos em direção ao centro do trem. No entanto, o observador dentro do trem, durante a mesma situação, não percebe a chegada dos raios de forma simultânea, pois se movia em direção a um dos raios enquanto se afastava do outro. Einstein utilizou esse experimento mental para introduzir a noção de simultaneidade relativa em oposição à simultaneidade absoluta. Dessa forma, ele desenvolveu o princípio da relatividade, que tem implicações na forma como entendemos as relações espaço-tempo em altas velocidades.

Prosseguindo com a atividade, exploramos o âmbito dos Experimentos Mentais no contexto da Educação Matemática. Para tal, foi essencial promover uma discussão sobre a natureza dos objetos matemáticos, explorando perspectivas filosóficas, conforme abordado no segundo capítulo desta pesquisa. Destacamos, por exemplo, a concepção aristotélica, na qual os objetos matemáticos são concebidos como entidades com existência física em nossa realidade observável. Em contraste, os platonistas acreditam na existência desses objetos em um domínio de Ideias, onde nosso mundo é uma mera reprodução imperfeita da realidade ideal.

De certa forma, a abordagem dos Experimentos na Educação Matemática assume um platonismo cognitivo, acreditando na existência de objetos na Matemática. Esses objetos são concebidos de forma ideal e não são diretamente acessíveis em sua forma física, mas sim por meio de suas representações, que não capturam completamente sua totalidade, mas preservam algumas de suas características essenciais. Nesse contexto, os Experimentos Mentais se fundamentam na semiótica de Peirce, uma vez que envolvem representações dos objetos matemáticos na forma de diagramas submetidos a um processo de investigação e análise.

Inicialmente, utilizamos dois mapas mentais para auxiliar na apresentação da metodologia de maneira organizada e visualmente compreensível. O primeiro mapa mental concentrou-se na concepção dos Experimentos Mentais, fornecendo uma visão geral dos princípios fundamentais que norteiam essa metodologia, como a utilização de representações por meio de diagramas (Figura 13). Reconhecendo que um sistema de representação coeso é crucial para a construção do diagrama, o segundo mapa mental sintetizou as principais características que compõem os Experimentos, a saber: Forma, Estrutura, Compreensão, Dependência, Revelação e Comparação.

Figura 13: Mapa Mental sobre os Experimentos Mentais



Fonte: Produzido pela autora, 2023.

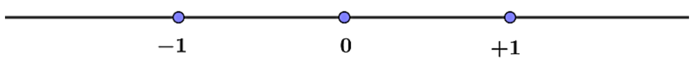
Posteriormente, realizamos a aplicação de dois Experimentos Mentais distintos: um focado na multiplicação de números inteiros e o outro relacionado à equação de uma reta que passa por dois pontos específicos. Para essa análise, optamos por abordar o primeiro experimento mencionado (ver Apêndice A).

Ao analisar o Experimento Mental sobre a multiplicação de números inteiros, Cruz (2020b) enfatiza a importância da complementaridade entre o objeto, seja ele físico, mental ou atemporal, e o processo ou ação envolvidos na construção do conhecimento. O autor ilustra essa dinâmica comparando um objeto a um processo que ocorre em um ritmo mais lento, enquanto um processo é comparado a um objeto que se move em um ritmo mais acelerado. Essa perspectiva torna-se evidente quando ele se refere à observação da Terra: para um geólogo, a Terra é percebida como um processo em uma escala de tempo extensa, enquanto, para um astronauta que a avista de longe por um curto período, ela se assemelha a um objeto estático.

Cruz (2020b) destaca que essa perspectiva se aplica analogamente aos objetos matemáticos, que também estão sujeitos a processos, embora esses processos muitas vezes se tornem mais evidentes quando consideramos um período mais longo. Essa abordagem reforça a compreensão de que os conceitos matemáticos não são estáticos, mas resultantes de transformações que ocorrem ao longo do tempo. Dessa forma, o Experimento Mental selecionado visa construir explicações para as multiplicações $(+1) \cdot (-1)$, $(-1) \cdot (+1)$ e $(-1) \cdot (-1)$ em termos de objetos sendo transformados em processos.

No início da aplicação do Experimento, criamos um espaço para que os alunos debatessem como justificariam o resultado de $(-1) \cdot (-1)$. Para auxiliar o desenvolvimento desse processo, consideramos os números -1 e $+1$ como objetos, representando pontos (números) simetricamente opostos em relação a um ponto central em uma reta. Os estudantes foram convidados a representar visualmente essa informação na característica "Forma" do Experimento Mental, como mostrado na Figura 14.

Figura 14 – Característica Forma da multiplicação de números inteiros

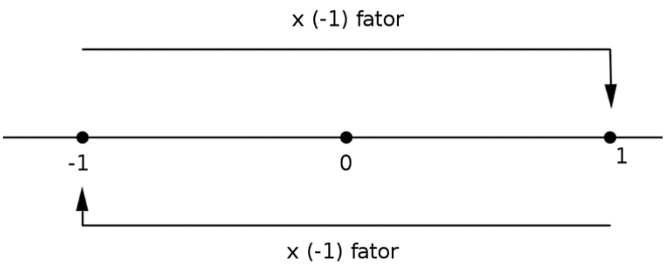


Fonte: Produzido pela autora, 2023.

Ao adotar a abordagem do raciocínio diagramático, essencial para os Experimentos Mentais, concluímos a primeira etapa, que envolve a construção da representação visual, ou seja, do ícone, que auxilia na compreensão do processo. A experimentação e investigação dessa representação visual compõem a segunda etapa, que começou quando passamos a desenvolver o processo para encontrar uma regra para a multiplicação de números inteiros. Utilizamos transformações geométricas que, ao multiplicar um número (ponto) por -1, chamado de fator de simetria, encontramos o seu simétrico. Por outro lado, ao multiplicar por $+1$, mantemos o próprio número (ponto) inalterado. Logo, é necessário fazer uma distinção clara entre o objeto (número; ponto) e o fator de simetria.

Um exemplo de dinâmica que pode ser adotada nesse contexto é estabelecer que, ao multiplicar um objeto por um fator de simetria, o resultado seja novamente um objeto, ou seja, $(objeto) \cdot (fator) = objeto$ (veja a Figura 15). Alternativamente, podemos adotar a convenção de que $(fator) \cdot (objeto) = objeto$. A criação e a manipulação desse processo constituem as características Estrutura e a Compreensão do Experimento Mental. Ao investigar o diagrama construído e estabelecer a primeira regra, observamos que, por exemplo, $(+1) \cdot (-1)$ significa encontrar o simétrico do objeto $+1$. Por outro lado $(-1) \cdot (+1)$ significa manter o objeto -1, uma vez que o fator de simetria é $+1$.

Figura 15 – Investigação do diagrama para multiplicação de números inteiros

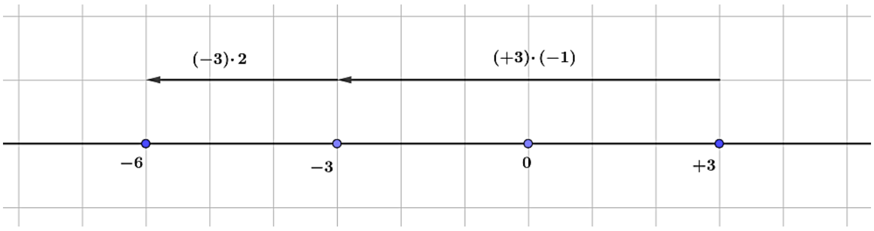


Fonte: Cruz, 2020b, p. 13.

Dessa maneira, a igualdade $(+1) \cdot (-1) = (-1) \cdot (+1)$ é possível, pois gera o mesmo objeto, isto é, o -1. No entanto, neste processo criado, obtemos multiplicações diferentes, uma vez que no primeiro membro da igualdade o objeto é $+1$ e o fator de simetria é -1, enquanto no segundo, o objeto é -1 e o fator de simetria é $+1$, conforme a primeira regra adotada, constituindo, assim, a característica Revelação. À medida que avançamos no Experimento, podemos transformar esses objetos em um processo que permita compreender a multiplicação de quaisquer números inteiros, o que engloba a característica Comparação. Como exemplo, consideremos a multiplicação $(+3) \cdot (-2)$ dentro dessa dinâmica de transformações geométricas.

Iniciamos identificando o objeto e o fator de simetria, seguindo a regra $(objeto) \cdot (fator) = objeto$. Consideramos o objeto como $+3$ e o fator de simetria como -2, mesmo que, até então, estivéssemos trabalhando apenas com os fatores de simetria $+1$ e -1. Para facilitar a visualização, reescrevemos -2 como sendo a multiplicação de -1 e 2, resultando na expressão $(+3) \cdot (-1) \cdot 2$. Consequentemente, aplicamos ao objeto $+3$ o fator de simetria -1, obtendo o resultado -3 (Figura 16). Ao aplicar o fator de simetria 2, considera-se um fator de dilatação, que duplica o resultado anterior, resultando em -6.

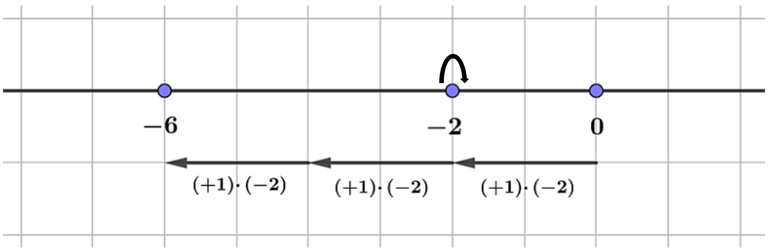
Figura 16 – Experimento Mental da multiplicação $(+3) \cdot (-1) \cdot 2$



Fonte: Produzido pela autora, 2023.

No mesmo exemplo, ao adotar a regra alternativa, em que o produto do fator pelo objeto resulta no próprio objeto, temos $+3$ como o fator de simetria e -2 como o objeto. Reescrevendo o fator de simetria como a multiplicação de $(+1)$ e 3, observamos a igualdade $(+1) \cdot 3 \cdot (-2) = 3 \cdot (+1) \cdot (-2)$, evidenciando que a intenção do fator de simetria $+1$ é preservar o objeto (-2). Por outro lado, o fator de simetria 3 pode ser usado como um fator de dilatação, triplicando o objeto original, ou pode-se utilizar a ideia de translação (Figura 17).

Figura 17 – Experimento Mental da multiplicação $3 \cdot (+1) \cdot (-2)$



Fonte: Produzido pela autora, 2023.

Assim, o Experimento Mental oferecido aos participantes proporcionou-lhes a oportunidade de desempenhar um papel ativo na construção do conhecimento matemático. Nesse cenário, os alunos não apenas repetem procedimentos pré-definidos; ao contrário, tornam-se agentes responsáveis por moldar o processo e tomar decisões com base nos objetos matemáticos em questão, permitindo que explorem a essência do pensamento matemático.

A seguir, será realizada uma análise dos signos produzidos por dois participantes do grupo de licenciandos que conduziram o Experimento, com ênfase na identificação dos obstáculos manifestados durante o processo. A escolha desses dois participantes deve-se à maior produção de dados por parte deles, possibilitando uma análise mais abrangente.

5.1.1 Vivência do Participante 3 com o Experimento Mental

Enquanto os participantes 1, 2 e 5 manifestaram dificuldades em explicar as regras de sinais para a multiplicação de números inteiros, observando que apenas as haviam aprendido por meio de regras que não os convenciam, o participante 3 afirmou ter justificado por meio de uma demonstração algébrica. No entanto, um dos participantes sugeriu que essa abordagem talvez não fosse a mais adequada, pois:

> *[...] tanto pela regra ou usar propriedades algébricas, quando a gente vai ensinar isso aqui, geralmente os alunos estão muito novos para. Pelo menos a forma que a gente conhece acho que não seria a melhor forma para ensinar, mas até então não tem outra. Isso é um problema, né?* (Participante 5).

Os participantes continuaram tentando justificar a regra escrevendo no papel, mas sem sucesso. Os pesquisadores observaram que muitos conceitos na Matemática parecem não ter uma explicação direta e são apenas memorizados para uso futuro. Essa percepção foi confirmada pelo participante 2, que destacou: "*[...] a gente quer que as crianças lá, de sei lá, sexto, sétimo, ano saibam isso, mas a gente não sabe explicar o porquê*". O participante 3 então expressou que não conseguia pensar em outra forma de justificar além da demonstração algébrica apresentada na Figura 18.

Figura 18 – Explicação do participante 3 sobre $(-1) \cdot (-1) = +1$

$$
\begin{aligned}
& 0 = (1 + (-1)) \\
\Rightarrow\ & 0(-1) = (1 + (-1))(-1) \\
\Rightarrow\ & 0 = 1 \cdot (-1) + (-1)(-1) \\
\Rightarrow\ & 0 = -1 + (-1)(-1) \\
\Rightarrow\ & 1 + 0 = 1 + (-1) + (-1)(-1) \\
\Rightarrow\ & 1 = 0 + (-1)(-1) \\
\Rightarrow\ & 1 = (-1)(-1)
\end{aligned}
$$

Fonte: Dados da pesquisa, 2023.

Os pesquisadores questionaram a afirmação direta de que $0 \times 1 = 0$, explicando que a metodologia empregada visa gerar contradições para modificar ou fortalecer ideias, em vez de simplesmente fornecer respostas. Em seguida, o participante apresentou outra demonstração para explicar $0 \times 1 = 0$, sempre buscando mais demonstrações para fatos que havia assumido como verdadeiros. No entanto, o participante 5 expressou sua frustração, dizendo: *"Meu Deus, não tem fim"*. O participante 3 então comentou: *"Ah, eu esqueço um pouco que vocês não estão interessados na álgebra"*.

Neste momento, os pesquisadores destacam que o pensamento algébrico é de grande interesse, pois ao desenvolvermos o Experimento Mental de maneira geométrica, estamos, de certa forma, construindo o argumento algébrico de que $(-1) \times (-1) = 1$. Esse argumento surge da experimentação do processo geométrico e não da álgebra em si. Os pesquisadores expressam interesse na demonstração apresentada e encorajaram o participante a considerar também uma abordagem geométrica. No entanto, o participante sugeriu outra forma de demonstração: *"Você poderia usar outra forma algébrica também e dizer que esse produto é igual a um x e dividir por 1 dos dois lados. Aí sai mais rápido do que eu fiz aqui* [apontando para a demonstração anterior]".

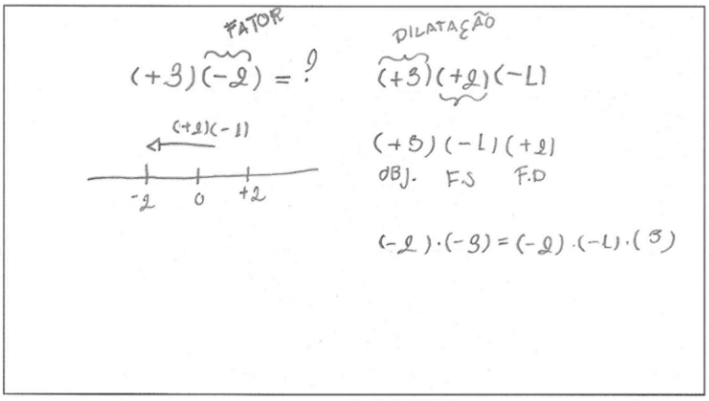
Quando os pesquisadores sugeriram explorar $(+3) \times (-2)$ por meio do Experimento Mental, o participante 4 sugeriu utilizar o -2 como um objeto que seria aplicado três vezes. O participante 5 lembrou que, até então, só havíamos usado os fatores $+1$ e -1. Portanto, ele argumentou que, nesse novo caso, deveríamos manter o -2 três vezes, pois o fator $+1$ mantém o objeto uma vez. Assim, na reta numérica, estaríamos somando três partes de -2. Os Participantes 1, 2 e 5 destacaram que poderiam reescrever -2 como $(-1) \times 2$, ou seja, reescrever o -2 para encontrar o fator de simetria -1 e o objeto $+2$, resultando na explicação do objeto inicial -2. O participante 4 salientou que -2 é um fator que desempenha duas funções: aplicar o simétrico ao objeto e dobrá-lo, sendo, portanto, um fator de dilatação e de simetria.

O participante 3 percebeu que foi criada uma nova ideia, o fator dilatador. Surpreendido, o participante 4 comenta: "*Desse jeito já resolve todos os problemas de multiplicação, né? Eu acho*". No entanto, o participante 3 expressa confusão sobre os conceitos de fator de simetria e dilatador, este último sendo um fator de homotetia. Em seguida, os pesquisadores negociam que o objeto sempre será o elemento inicial, argumentando que o conhecimento é formado por meio de combinações e é negociável, já que nenhuma representação captura totalmente a essência do objeto. Dessa forma, percebemos algumas características, enquanto outras precisarão ser construídas por meio de consenso, pois o conhecimento matemático não é definitivo, nem é uma verdade absoluta, mas sim uma construção de ideias.

Os pesquisadores ressaltaram que não existe uma única regra que dê a resposta, mas sim um processo que construímos para alcançar as respostas. Eventualmente, não precisaremos mais desse processo, pois ao refletir sobre o processo desenvolvido, já chegaremos ao resultado. Portanto, o objetivo dessa abordagem é estimular o pensamento crítico, em vez de simplesmente memorizar conceitos, e desenvolver processos coerentes. No entanto, é importante notar que todo processo coerente também tem suas inconsistências. Essa metodologia visa lidar com essas inconsistências do processo, como os conceitos de fator de simetria e dilatação, reconhecendo que as coisas nem sempre funcionam de maneira perfeita.

Após a discussão, o participante 3 registrou sua conclusão sobre $(+3) \times (-2)$ (Figura 19).

Figura 19 – Conclusão do participante 3 sobre $(+3) \times (-2)$



Fonte: Dados da pesquisa, 2023.

Seguiremos com a análise das ideias apresentadas pelo participante 3 e a identificação dos obstáculos.

5.1.1.1 Discussão sobre os Obstáculos Enfrentados pelo Participante 3

O Quadro 2 sintetiza a análise das respostas do participante 3 durante a condução do Experimento Mental sobre a multiplicação de números inteiros. As respostas dos participantes foram registradas em vídeo e posteriormente transcritas, conforme documentado no Apêndice B deste estudo. O quadro é composto por quatro colunas, cada uma contendo informações relevantes para a análise dos significados semióticos produzidos pelos participantes durante a atividade.

Na primeira coluna, registramos as perguntas realizadas pelos pesquisadores durante a aplicação do experimento. Esses questionamentos foram formulados para estimular a reflexão do participante sobre o processo em curso, abrangendo aspectos além da atividade escrita. A segunda coluna contém as respostas dadas pelos participantes às perguntas feitas pelos pesquisadores. As respostas são fundamentais para compreender como cada participante abordou os conceitos matemáticos discutidos e como tentou justificar suas respostas.

A terceira coluna destina-se à identificação dos obstáculos observados nas respostas do participante. Essa seção visa identificar as áreas em que o participante apresentou dificuldades para compreender ou explicar o processo de multiplicação de números inteiros, com base nos princípios discutidos no capítulo 3 deste estudo. Por fim, a última coluna destina-se à produção de interpretante por parte dos pesquisadores, ou seja, à elaboração de análises e conclusões a partir das respostas do participante e da identificação dos obstáculos didáticos.

Quadro 2 – Análise dos dados produzidos pelo participante 3 inserido na licenciatura em Matemática da UFJF

<table>
<tr><th>Problema apresentado</th><th>Resposta do participante</th><th>Obstáculos percebidos</th><th>Produção de interpretantes por parte do pesquisador</th></tr>
<tr><td>Se alguém perguntasse o porquê de (-1)×(-1) = +1, o que vocês responderiam para essa pessoa?</td><td>Ah, eu fiz uma demonstração, mas é muito algébrico.
[...]
Eu usei as propriedades algébricas de corpo. Anel, melhor dizendo, de forma geral, o corpo é um anel.</td><td rowspan="3">Obstáculo epistemológico e didático</td><td rowspan="3">O participante demonstra uma tendência a enfatizar demonstrações algébricas, apresentando diversas abordagens para justificar raciocínios de forma axiomática, mas enfrenta dificuldades em expor um pensamento geométrico. Isso pode ser atribuído à marginalização histórica da geometria em favor da álgebra e análise matemática no século XIX. Anteriormente, a geometria era vista como o fundamento principal da Matemática, mas sua importância diminuiu com a crescente axiomatização, relegando-a a uma posição secundária como uma mera ferramenta ilustrativa. Essa mudança impactou a educação básica, especialmente com o surgimento do Movimento da Matemática Moderna, que privilegiava abordagens mais abstratas e formalistas. Essa influência também se estendeu à formação de professores, levando</td></tr>
<tr><td>E participante 3, fora esse pensamento algébrico?</td><td>Tô tentando pensar em alguma coisa aqui.

Poderíamos começar pegando o 1 e multiplicando por zero. Mas o zero é o um somado com o simétrico dele.

$0 = 1 + (-1)$
$[1 + (-1)] \cdot 1 = 1 + (-1)$
$1 + (-1) \cdot 1 = 1 + (-1)$
$(-1) + 1 + (-1) \cdot 1 = (-1) + 1 + (-1)$
$0 + (-1) \cdot 1 = 0 + (-1)$
$(-1) \cdot 1 = -1$</td></tr>
<tr><td>Interessante! Você pensou de uma forma</td><td>Você poderia usar outra forma algébrica também e</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>algébrica, e se a gente pensasse daquela forma geométrica? Como isso ficaria? Utilizando a forma que a gente representou.</td>
<td>dizer que esse produto é igual a um x e dividir por 1 dos dois lados. Aí sai mais rápido do que eu fiz aqui [apontando para a demonstração no quadro].</td>
<td></td>
<td>a uma especialização excessiva e estanque, tanto em aspectos pedagógicos quanto específicos da Matemática.</td>
</tr>
<tr>
<td>O processo que o participante 3 trouxe, que é baseado nisso aqui [demonstração escrita no quadro], você já tá afirmando que $0 \times 1 = 0$.
Mas é verdadeiro que $0 \times 1 = 0$? Por que é verdadeiro?</td>
<td>É, tem que partir de algumas hipóteses aí ou conjecturas que já são, algumas proposições aí verdadeiras.

Aí dá para fazer de forma algébrica também.
[...]
Ah, eu esqueço um pouco que vocês não estão interessados na álgebra.</td>
<td rowspan="2">Possível obstáculo relacionado ao pensamento matemático sob a perspectiva cartesiana</td>
<td rowspan="2">A convicção arraigada do participante 3, possivelmente moldada por sua formação acadêmica influenciada pelo método cartesiano, é de que a verdade deriva de uma base axiomática. No entanto, essa visão, como sugerido por Velanes (2017), pode encontrar obstáculos ao considerar a Matemática e outras ciências como lidando apenas com fatos absolutos e inalteráveis. Nossa compreensão dos objetos é limitada pelas representações que utilizamos, implicando que temos acesso apenas a uma fração da realidade. Assim, a construção do conhecimento requer consensos e processos dinâmicos, em vez de regras inflexíveis. Essa perspectiva é desafiada quando o participante 3 se depara com um processo que introduz novas ideias, como o fator dilatador, pois ele tende a acreditar que a construção depende exclusivamente das verdades já estabelecidas.</td>
</tr>
<tr>
<td>Experimento Mental de (+3)×(-2).</td>
<td>Aí no caso o $+2$ seria o fator e o -1 o objeto?
[...]

Uai, gente!
[...]

Outra coisa que eu acho que ficou incoerente é que a gente mostrou que o -1 multiplicado por $+1$, ele dá o simétrico do $+1$, porém a gente...
[...]

Aí você criou uma coisa nova.
[...]

Ficou meio confuso o que é dilatador, o que é fator.</td>
</tr>
<tr>
<td>Revelação: O que dizer dos resultados encontrados na Compreensão anterior? [Neste caso, tem relação com a criação e exploração da regra de multiplicação de números inteiros por meio do Experimento]</td>
<td>Concluímos que este experimento é melhor entendido quando conceituamos, num produto, um dos elementos como objeto e o outro como fator.</td>
<td>Obstáculo não identificado</td>
<td></td>
</tr>
</table>

Fonte: Dados da pesquisa, 2023.

De acordo com Cruz (2018), a Matemática pode ser vista sob dois prismas distintos: o da formalização e o da intuição. No primeiro plano, a ênfase recai sobre a necessidade de demonstração, de forma que aquilo que não pode ser provado não é considerado válido. Cruz (2018) aborda o pensamento de Garbi (2010), segundo o qual uma verdade matemática, uma vez provada, permanece válida indefinidamente. Essa validade é alcançada por meio de um processo que envolve definições precisas, conceitos primitivos e postulados, utilizados como base para uma série de inferências lógicas.

Segundo Cruz (2018), Hilbert (1862-1943) defendia a axiomatização rigorosa como o alicerce fundamental da Matemática, eliminando a necessidade de confiar na intuição durante as demonstrações. Para tanto, o autor enfatiza que Hilbert formulou os axiomas de tal maneira que qualquer pessoa, mesmo sem compreender seu significado, pudesse aplicá-los de forma prática. Em outras palavras, bastaria seguir as regras estabelecidas para realizar operações geométricas. Além disso, esse enfoque adotado por Hilbert impulsionou a busca por uma espécie de "álgebra universal", na qual todo raciocínio matemático pudesse ser traduzido em termos de símbolos ou fórmulas (Cruz, 2018).

Por outro lado, no plano da intuição, destaca-se a relação entre o conhecimento matemático e os objetos. Entretanto, conforme observado por Cruz (2018), o ponto de inflexão entre a Matemática grega e a Matemática moderna reside na transição da geometria para a álgebra e análise no século XIX. O autor explica que a história dessa época é marcada pela progressiva substituição da abordagem geométrica pela formalização algébrica. Cruz (2018) destaca que, embora muitos matemáticos possam simplificar essa transição, atribuindo à geometria um papel de interpretação de certos aspectos da álgebra moderna, a realidade é mais complexa do que isso.

A marginalização da geometria se reflete até mesmo na minimização do caráter geométrico e intuitivo do livro "Os Elementos" de Euclides. Segundo Roque (2012), há debates sobre a suposta presença de uma álgebra geométrica na obra, uma ideia sugerida por matemáticos e historiadores desde o final do século XIX até meados do século XX. Para eles, as proposições do livro II dos "Elementos" seriam essencialmente "propriedades algébricas disfarçadas em uma linguagem geométrica" (Roque, 2012, p. 185). A autora discute a hipótese de Van der Waerden, que sugeria que essas proposições expressavam, na verdade, uma equivalência algébrica, indicando o início de um livro de álgebra redigido em forma geométrica.

Roque (2012) e Cruz (2018) destacam o posicionamento do romeno Sabetai Unguru, que enfatizou a dificuldade de interpretar os textos gregos usando a Matemática moderna. Ele argumentou que os gregos fundamentavam seus trabalhos em pressupostos específicos, palavras e diagramas com significados precisos, enquanto na era moderna esses elementos são dispensáveis. Segundo esses autores, não há indícios de que Euclides tenha utilizado propriedades algébricas nas demonstrações encontradas no livro II, pois são fundamentalmente geométricas. Esse entendimento levou os historiadores a evitarem traduzir os textos gregos para uma linguagem puramente algébrica, reconhecendo a singularidade e a importância da abordagem geométrica dessas obras (Cruz, 2018).

Assim, durante a evolução da história da Matemática, conforme analisado por Cruz (2018), percebe-se que o século XIX representou um momento crucial, marcando uma mudança significativa no pensamento matemático. Antes desse período, os matemáticos consideravam a geometria como o principal fundamento da Matemática. Até o século XVIII, conforme a análise de Cruz, era comum a prática de garantir as soluções de equações algébricas por meio de sua representação geométrica. Duarte (2007) reafirma esse contexto ao apontar que a Matemática era fundamentada na Geometria Euclidiana, considerada um dos conhecimentos mais confiáveis.

No entanto, a partir do ano de 1800, a perspectiva matemática começou a se transformar, uma vez que a álgebra e a análise assumiram uma importância crescente, desbancando a geometria de seu papel central. Isso se deu, em parte, devido à compreensão de que a existência de objetos não fazia mais sentido fora da teoria ou do discurso linguístico (Cruz, 2018). Nesse sentido, a álgebra e a análise passaram a ser consideradas as bases fundamentais sobre as quais a Matemática se construía, deslocando a geometria de sua posição de destaque.

Já no século XX, o embate entre geometria, estruturas algébricas e axiomatização na Matemática foi intensificado durante o Movimento da Matemática Moderna (MMM). Conforme as análises realizadas por Duarte (2007), o MMM foi caracterizado por um modo de pensar dominante que enfatizava a necessidade de demonstrações rigorosas e uma linguagem matemática unificada. Essa perspectiva sugeria que a prática matemática deveria seguir um conjunto específico de regras e convenções, o que, por sua vez, levou à suposição de que havia apenas uma maneira de fazer Matemática. Como resultado, a autora destaca que o papel do matemático foi muitas vezes reduzido ao de um mero observador.

O contexto da axiomatização e formalização da Matemática, que perpassou o MMM, reflete-se também nos currículos de formação de professores. Alves e Neto (2011) observam que, muitas vezes, o foco das formações recai apenas no passo a passo de demonstrações matemáticas, enquanto os modelos de inferências e a natureza da argumentação subjacente não recebem a devida atenção na formação do licenciando em Matemática. Eles ressaltam que a falta de discussão e questionamento sobre os fundamentos da argumentação matemática pode levar à percepção de que as escolhas feitas nesse tipo de raciocínio são baseadas unicamente na certeza matemática, refletindo uma visão absolutista, com verdades pré-estabelecidas e imutáveis.

Entretanto, Alves e Neto (2011) pontuam que, na formação do professor, deve-se considerar as diversas facetas do conhecimento matemático, pois a especialização excessiva e estanque dos formadores de professores, seja em aspectos pedagógicos ou específicos da Matemática, tende a limitar o diálogo interdisciplinar. Por um lado, a ênfase em uma abordagem formalista e absolutista limita a compreensão da natureza filosófica da Matemática. Por outro lado, a cristalização de práticas pedagógicas através de currículos rígidos nos cursos de pedagogia introduz teorias abstratas e generalizantes, que muitas vezes são difíceis para os alunos relacionarem com o conhecimento matemático presente na sala de aula.

Alves e Neto (2011) ressaltam que a formação de professores de Matemática não deve se limitar apenas a teorias pedagógicas ou filosóficas gerais, mas sim à sua dimensão específica. Eles argumentam que todo conhecimento matemático possui uma dimensão filosófica, por exemplo, enquanto alguns podem examinar a evolução dos conjuntos matemáticos de maneira estritamente matemática, outros podem adotar uma abordagem mais reflexiva, questionando aspectos filosóficos como: o que é um número natural, inteiro, racional ou real? No entanto, os autores observam que muitas das propriedades axiomáticas e questões filosóficas subjacentes são frequentemente negligenciadas nos cursos de formação de professores de Matemática.

Dessa forma, um currículo mais adequado para a formação de professores de Matemática deve abranger diversas perspectivas, sem favorecer uma em detrimento das outras. Essas perspectivas incluem, conforme Alves e Neto (2011), a epistemológica, que trata de como conhecemos o que existe; a filosófica, que aborda questões fundamentais sobre a natureza da Matemática; a didática, que se concentra nas práticas de ensino e aprendizagem; a sociológica, que considera o contexto social e cultural da Educação Matemática; a psicológica, que investiga como os indivíduos aprendem e ensinam Matemática; a ontológica, que se refere à natureza do que existe na Matemática; a axiológica, que diz respeito aos valores atribuídos à verdade do conhecimento matemático; e a lógica, que abrange os princípios fundamentais do raciocínio matemático.

Considerando o amplo cenário da transição da geometria para a álgebra e sua subsequente marginalização ao longo da história da Matemática, até mesmo sendo relegada a mera ilustração, identifica-se um desafio de natureza epistemológica no participante 3. Durante o desenvolvimento do Experimento Mental proposto, torna-se evidente sua inquietação diante de uma atividade que se baseia principalmente em conceitos geométricos. Com frequência, o participante recorre a um pensamento axiomático, buscando demonstrações formais para concluir suas inferências.

Além disso, ele demonstra confusão quando uma nova ideia é introduzida no Experimento Mental, como é o caso do fator dilatador, pois sua tendência é dominada por um pensamento axiomatizado, tornando difícil aceitar que as regras estabelecidas no início do Experimento possam ser modificadas, em vez de serem consideradas como estáticas. Essa inclinação em direção à formalização matemática e a constante hesitação em relação à intuição são, em grande parte, reforçadas pelos currículos de formação dos licenciandos em Matemática, os quais, como discutido, tendem a fragmentar o conhecimento matemático. Desse modo, pode-se observar também um obstáculo de natureza didática.

A maneira de pensar do participante 3, e de uma parte significativa da comunidade científica, está alinhada com o método científico proposto por Descartes (1596-1650). Este método enfatiza a estrutura da teoria matemática moderna e formalista, caracterizada pela presença de conceitos primitivos e derivados, axiomas (proposições aceitas sem necessidade de demonstração) e teoremas (proposições comprovadas por meio de demonstrações). Rosenfield (2009) destaca que a principal preocupação de Descartes era alcançar um conhecimento verdadeiro que fosse isento de erro e independente do contexto histórico. Ele propunha que a verdade deveria ser discernida exclusivamente pela razão, por meio de deduções lógicas, uma capacidade que a Matemática poderia proporcionar. Esse método, concebido pelo filósofo, deu origem ao pensamento cartesiano e marcou o surgimento da Filosofia Moderna (Rosenfield, 2009).

Os princípios fundamentais desse método, conforme Descartes (2009), incluem: (1) não aceitar como verdadeiro qualquer coisa que não seja clara e não permitir espaço para dúvidas; (2) decompor o problema em partes menores para uma análise mais detalhada; (3) organizar os pensamentos em uma progressão do mais simples ao mais complexo; e (4) realizar revisões gerais para garantir que nenhum aspecto seja negligenciado. Esses preceitos fundamentais estabelecidos por Descartes forneceram uma estrutura sólida para a investigação científica e influenciaram profundamente o desenvolvimento do pensamento filosófico e científico na era moderna.

Portanto, segundo a visão de Descartes, o ponto de partida na busca pelo conhecimento é encontrar algo que seja livre de erro ou dúvida, semelhante a um axioma na Matemática, a partir do qual o conhecimento pode ser construído. Para Descartes, a dúvida desempenha um papel fundamental na busca pela verdade, pois ele acredita que é por meio da dúvida que se pode alcançar a verdade de forma clara e incontestável. Assim, ele sustenta que o conhecimento deve ser submetido à dúvida até que se possa discernir com clareza o que é verdadeiro. É importante ressaltar que, de acordo com André (2022), o conhecimento, para Descartes, é construído através da intuição e da dedução. O autor destaca que essa intuição não é concebida no sentido empírico ou sensível, como produto da imaginação, mas sim como uma forma de inteligência pura que é alcançada à luz da razão. Por outro lado, a dedução consiste em tirar conclusões a partir de coisas que já são conhecidas.

Assim, é possível constatar que as concepções do participante 3 estão enraizadas no paradigma do método cartesiano, cuja busca pela verdade é fundamentada na dedução a partir de axiomas matemáticos. Essa abordagem, conforme indicado por Velanes (2017), pode apresentar obstáculos, uma vez que sugere que a Matemática lida exclusivamente com fatos absolutos e imutáveis. No entanto, como ressaltam os estudiosos, como Peirce, nossa compreensão dos objetos é mediada por suas representações, o que implica que tenhamos acesso apenas a uma parcela da realidade. Diante disso, torna-se imperativo construir o conhecimento por meio de consensos e processos dinâmicos, em vez de adotar regras rígidas e fixas.

A convicção profundamente enraizada no participante 3, possivelmente influenciada por sua formação acadêmica permeada pelo método cartesiano, é a de que a verdade está intrinsecamente ligada a uma base axiomática. No entanto, essa concepção é posta à prova quando ele se depara com um processo que introduz ideias novas ao que já havia sido estabelecido, pois ele tende a acreditar que a construção desse processo depende unicamente das verdades já estabelecidas. Contudo, a investigação realizada revela a possibilidade de uma nova crença: a de que, por meio de processos dinâmicos, alcançamos conhecimento e verdades que permanecem sempre incompletos.

A seguir, exploraremos os obstáculos didáticos encontrados no decorrer do Experimento Mental conduzido pelo participante 1.

5.1.2 Vivência com o Experimento Mental e Discussão sobre os Obstáculos Enfrentados pelo Participante 1

Apresentamos no Quadro 3 a síntese da análise dos obstáculos identificados no participante 1.

Quadro 3 – Análise dos dados produzidos pelo participante 1 inserido na licenciatura em Matemática da UFJF

Problema apresentado	Resposta do participante	Obstáculos percebidos	Produção de interpretantes por parte do pesquisador

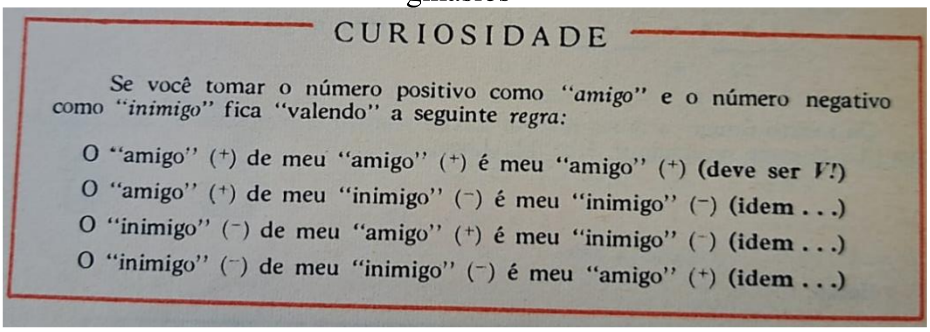
Se alguém perguntasse o porquê de (-1)×(-1) = +1, o que vocês responderiam para essa pessoa?	Quando eu aprendi na escola, a minha professora só colocou assim no quadro: “Na multiplicação, sinais iguais dá positivo; sinais diferentes, dá negativo”.	Obstáculo didático Obstáculo epistemológico	Possivelmente, o método de ensino utilizado envolveu a transmissão de uma regra, sem explorar sua explicação, contexto ou lógica subjacente, o que culminou em um aprendizado superficial e simplificado. A multiplicação de números negativos muitas vezes é percebida como uma regra memorizada, que é aceita sem aprofundamento. A história da matemática revela uma evolução gradual na compreensão dos números negativos, enfrentando desafios para justificar tal regra. Euler, por exemplo, afirmou que (-1)×(-1) só pode resultar em +1, porque (-1) × (+1) e (+1) × (-1) já resultariam em -1 (Glaser, 2010).
Convenceu essa regra?	Não sei explicar isso agora.	Obstáculo epistemológico e didático	O participante enfrenta dificuldade para justificar o resultado de (-1)×(-1), o que sugere uma barreira e uma lacuna em seu conhecimento. Essa questão tem sido alvo de debates entre matemáticos e educadores por séculos.
Na universidade você já viu alguma coisa relacionada?	Não, primeira vez.	Obstáculo didático	O participante manifesta não ter sido apresentado a explicações sobre a razão de (-1)×(-1) resultar em +1 durante sua trajetória educacional, o que sugere uma possível lacuna na abordagem didática desse tema.
Então nunca perguntaram por que (-1)×(-1) = +1 aqui? Na verdade, esse conhecimento foi o que: “ah, isso vocês já deveriam estar sabendo...”. Foi assim?	Porque na adição e na subtração de números inteiros têm a questão da reta numérica, então você pensa na reta. Mas na multiplicação, eu não estou pensando não.	Obstáculo didático	O participante parece não ter desenvolvido um entendimento que permita estabelecer uma ligação entre a reta numérica e o conceito de multiplicação de números inteiros, sugerindo possivelmente uma abordagem didática que não enfatizou de maneira abrangente essa interconexão.
O que dizer dos resultados encontrados na Compreensão anterior? [se refere a uma característica dos Experimentos Mentais. Neste caso, tem relação com a criação e exploração da regra de multiplicação de	Desde o princípio dos ensinos iniciais de Matemática, ouvimos que a ordem na multiplicação “não importa”, entretanto ao definirmos o objeto e o fator há uma ordem para podermos realizar a “comparação”, então foi uma revelação a questão de	Possível obstáculo psicológico	O participante revela surpresa [visível na gravação] ao fazer uma comparação entre o processo formulado durante o Experimento Mental e a abordagem que aprendeu durante sua formação, isto é, utilizando a regra. Essa surpresa surge da desvinculação da ideia de que o resultado só pode ser obtido por

números inteiros por meio do Experimento]	fator e produto. A ordem dos fatores não irá alterar o resultado, mas importam no processo.		meio de uma regra de sinais já estabelecida, em contraste com a criação de um processo mais amplo.
Experimento Mental de (+3)×(-2).	[...] e se eu escrever o $+3$ também como sendo 3 vezes 1, e aí o 3 seria o meu objeto e o 1 seria o meu fator. Pelo menos eu já teria dois fatores e dois objetos, aí eu poderia multiplicar objeto com objeto e fator com fator, aí vai dar o mesmo resultado. Pelo menos tô criando uma ordenzinha dos dois.	Obstáculo da metodologia	A seleção do objeto e do fator de simetria é fundamentada no entendimento do participante em relação ao Experimento Mental realizado anteriormente, com os fatores $+1$ e -1. A aplicação do Experimento Mental condicionou uma nova informação, fatores diferentes de $+1$ e -1, em um processo já consolidado, o que pode ser caracterizado como um obstáculo da metodologia.

Fonte: Dados da pesquisa, 2023.

Quando confrontado com a primeira questão da atividade proposta, isto é, “como você explicaria que $(-1) \times (-1) = +1?$", o participante 1 recorreu à regra ensinada por sua professora, exemplificando o conceito com o ditado "o inimigo do meu inimigo é meu amigo". Esse ditado mencionado remonta, pelo menos, à década de 70, como documentado no livro "Matemática: Curso Moderno para os ginásios", volume 2, da Companhia Editora Nacional, escrito por Oswaldo Sangiorgi. O livro apresenta, como curiosidade, a regra mencionada (Figura 20). É relevante notar que a década de 70 foi caracterizada pelo Movimento da Matemática Moderna, conforme destacado na análise anterior.

Figura 20: Ditado sobre as regras de sinais no livro “Matemática: Curso Moderno para os ginásios”


CURIOSIDADE

Se você tomar o número positivo como “*amigo*” e o número negativo como “*inimigo*” fica “valendo” a seguinte *regra:*

O “amigo” (+) de meu “amigo” (+) é meu “amigo” (+) **(deve ser V!)**
O “amigo” (+) de meu “inimigo” (−) é meu “inimigo” (−) **(idem . . .)**
O “inimigo” (−) de meu “amigo” (+) é meu “inimigo” (−) **(idem . . .)**
O “inimigo” (−) de meu “inimigo” (−) é meu “amigo” (+) **(idem . . .)**

Fonte: Sangiorgi (1971, p. 152)

Em um momento de evidente inquietação, o participante concentrou sua atenção no papel, demonstrando esforço para formular uma justificativa, pois, até então, essa questão não havia sido um desafio em sua trajetória acadêmica. Durante esse processo de reflexão, uma ideia que permeou seus pensamentos foi a tentativa de aplicar o conceito de potenciação. O participante incluiu na sua atividade escrita a expressão $(-1)^2 = (-1)(-1) = 1$, procurando estabelecer uma relação com potências para compreender a multiplicação de números negativos. No entanto, ele reconheceu que tinha dificuldades em justificar por que o resultado da potenciação deveria ser $+1$. Ele expressou sua perplexidade ao afirmar que "[...] *volto para a mesma coisa, porque se eu penso em potência, dá no mesmo [...]*".

Dessa forma, percebe-se que o participante 1 enfrenta desafios para articular suas ideias de forma coerente. A falta de uma explicação convincente, limitando-se à aceitação de uma regra, sugere a presença de obstáculos epistemológicos. Além disso, essa inquietação diante de um problema novo, não abordado em sua formação, pode revelar um obstáculo psicológico, indicando a desestabilização causada pela confrontação com uma situação desconhecida e desafiadora.

A base para a identificação dos obstáculos epistemológicos nas multiplicações de números inteiros fundamenta-se nas análises de Glaeser (2010), que discute a evolução da compreensão da regra dos sinais, um processo que se estendeu por mais de 1500 anos. Nesse estudo, o autor identificou seis obstáculos que influenciaram diversos matemáticos ao longo desse desenvolvimento, abordando diferentes aspectos relacionados ao entendimento dessa regra complexa.

Inicialmente, o primeiro obstáculo refere-se à dificuldade em lidar eficazmente com quantidades isoladas, evidenciando a incapacidade de manipular números negativos sem um contexto adequado. O segundo obstáculo aborda a complexidade de atribuir significado a essas quantidades isoladas, ressaltando a importância de estabelecer interpretações claras para os números negativos dentro do contexto matemático. O terceiro obstáculo apresenta desafios na unificação da representação da reta numérica, especialmente ao considerar a utilização de duas semirretas opostas, resultando em dificuldades na visualização e interpretação dos números negativos.

Além disso, o quarto obstáculo destaca a ambiguidade entre dois conceitos de zero: o zero absoluto e o zero de origem, marcado em uma reta orientada para facilitar a interpretação dos números negativos. A dificuldade em transcender o enfoque concreto dos números, explorada no quinto obstáculo, reflete o desafio em compreender e operar com números negativos de forma abstrata, sem recorrer a situações concretas como ponto de referência. Por fim, o sexto obstáculo aborda a busca por um modelo unificador capaz de abranger tanto a adição quanto a multiplicação, ressaltando a necessidade de uma estrutura matemática coesa e abrangente para lidar com números negativos.

O Quadro 4, apresentado por Glaeser (2010), tem como propósito evidenciar se os matemáticos conseguiram superar esses obstáculos ao longo do tempo. Nesse quadro, os resultados foram simbolizados por "+" quando a barreira foi ultrapassada e por "-" quando não foi superada, refletindo o progresso no entendimento da regra dos sinais e da multiplicação de números negativos. O estudo destaca que a compreensão desse conceito, desenvolvido ao longo de séculos, exigiu a superação de múltiplos obstáculos, incluindo os epistemológicos, didáticos, ontológicos e psicológicos.

Quadro 4 – Obstáculos sobre os números negativos enfrentados pelos matemáticos

OBSTÁCULOS / AUTORES	1	2	3	4	5	6
DIOFANTES	-					
SIMON STEVIN	+	-	-	-	-	-
RENÉ DESCARTES	+	?	-	?		
COLIN MACLAURIN	+	+	-	-	+	+
LEONARD EULER	+	+	+	?	-	-
JEAN D'ALEMBERT	+	-	-	-	-	-
LAZARE CARNOT	+	-	-	-	-	-
PIERRE DE LAPLACE	+	+	+	?	-	?
AUGUSTIN CAUCHY	+	+	-	-	+	?
HERMAN HANKEL	+	+	+	+	+	+

Fonte: Glaeser, 2010, p. 6.

Glaeser (2010) relata a narrativa de Henri Beyle (1783-1843), conforme apresentada em sua biografia, na qual ele descreve seu dilema diante da regra dos sinais ensinada por seu professor, o Sr. Chabert. Beyle expressava profunda perplexidade em relação ao motivo pelo qual a multiplicação de números negativos resultava em números positivos. Seu professor simplesmente afirmava que essa regra era uma convenção adotada, mas não oferecia uma explicação substancial.

Beyle, por sua vez, ficava intrigado, especialmente ao tentar relacionar essa regra com números concretos. Ele enfrentava o obstáculo identificado por Glaeser como o quinto, a dificuldade em transcender a perspectiva concreta dos números negativos. Um exemplo específico que o deixou perplexo foi quando considerou a situação de um homem com uma dívida de 10.000 francos, multiplicada por outra dívida de 500 francos. Essa multiplicação parecia desafiar sua intuição, pois ele não conseguia visualizar como o homem poderia eventualmente obter uma fortuna por meio de dívidas.

Por outro lado, Glaeser (2010) aponta que o matemático Leonhard Euler (1707-1783) tomou a iniciativa de justificar e explicar a regra dos sinais em um livro destinado a principiantes. Euler reconheceu a importância de esclarecer a lógica por trás dessa regra, para proporcionar uma compreensão mais sólida aos estudantes. Assim, ele usou o exemplo da dívida mencionado por Beyle como ponto de partida para sua explanação. Segundo Glaeser (2010), Euler argumentou que a multiplicação de uma dívida por um número positivo é facilmente compreensível, utilizando o exemplo das dívidas acumuladas. Por exemplo, três dívidas de um mesmo valor "a" resultariam em uma dívida total de $3a$, o que é representado como $b \times (-a) = -ab$.

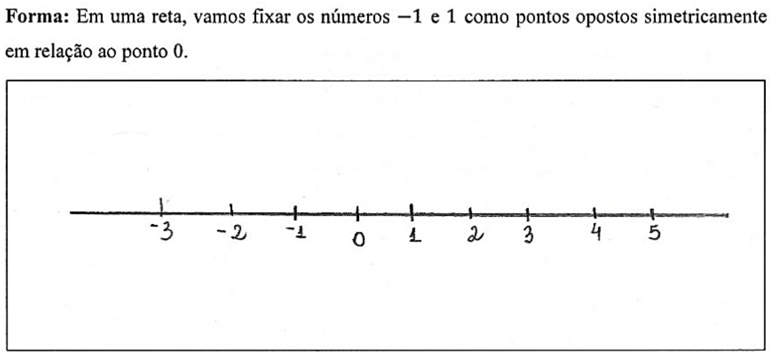
Aplicando a propriedade comutativa da multiplicação, Glaeser (2010) discute como Euler estendeu seu raciocínio para o caso de um número negativo multiplicado por um número positivo, chegando a $(-a) \times b = -ab$. Quanto à multiplicação de números negativos entre si, Euler abordou a escolha entre um resultado positivo e negativo. Ele raciocinou que a multiplicação de duas dívidas negativas deveria resultar em uma solução coerente com os resultados já obtidos entre as outras multiplicações de números positivos com negativos. Sendo assim, a alternativa de escolha entre $+ab$ e $-ab$, quando aplicada ao caso de $(-a) \times (-b)$, levou Euler a concluir que a única opção lógica era $(-a) \times (-b) = +ab$.

Glaeser (2010) ainda destaca que as contribuições de Hankel foram fundamentais para mudar esse paradigma. Hankel reconhecia que os números negativos não precisavam ser justificados por situações concretas, mas poderiam ser aceitos como construtos abstratos, logicamente operados dentro do sistema matemático. A perspectiva de Hankel representou uma virada na compreensão dos números negativos, abrindo caminho para um novo enfoque na Matemática e impulsionando o desenvolvimento do conhecimento nesse campo. Segundo o autor, essa abordagem revolucionária causou uma ruptura ideológica significativa, que perdurou até o final do século XIX.

Nesse contexto, é evidente que a construção conceitual da multiplicação envolvendo números negativos, especialmente a formulação da regra de sinais, é um obstáculo epistemológico de longa data. Conforme discutido no terceiro capítulo desta pesquisa, a identificação e análise desses obstáculos epistemológicos, em alinhamento com a abordagem proposta por Brousseau (1989), envolve uma sequência de etapas. Inicialmente, é necessário identificar os erros recorrentes cometidos pelos alunos, como a compreensão e justificação da regra de sinais. Em seguida, deve-se investigar os obstáculos com raízes profundas na história da Matemática, como evidenciado pelo trabalho de Glaeser (2010). O último estágio do processo é comparar os obstáculos históricos com aqueles que emergem no contexto da aprendizagem contemporânea, como observado nos resultados dos Experimentos Mentais.

Outro momento notável surgiu durante a característica Forma do Experimento Mental aplicado, na qual os participantes foram convidados a representar uma reta contendo pontos (números -1 e $+1$) simétricos em relação a um ponto central, que é o zero. Nesse contexto, o participante 1, ao contrário dos demais, estabeleceu uma conexão com a reta numérica que já conhecia. Ele apresentou uma reta abrangendo o intervalo de -3 a +5 (Figura 21), explicando que essa abordagem surgiu de uma intuição natural, pois considerou lógico ampliar a extensão da reta numérica. No entanto, ele também expressou estranheza, observando que sua escolha não foi baseada em parâmetros específicos, como estender a reta de -5 a +5.

Figura 21 – Reta representada pelo participante 1



Fonte: Dados da pesquisa, 2023.

Após a construção da reta, a discussão se voltou para as multiplicações $(+1) \cdot (-1)$ e $(-1) \cdot (+1)$, questionando se elas são iguais ou distintas no contexto do processo em construção. O participante 1 mostrou surpresa ao comparar essas multiplicações com o que aprendeu em sua formação, utilizando a regra (Figura 22). Na regra tradicional, não há distinção entre objeto e fator, e a ordem dos fatores na multiplicação não importa. A percepção arraigada de que o conhecimento matemático é absoluto e imutável, em que uma única regra é utilizada para encontrar a resposta, pode constituir um obstáculo psicológico para a formulação de novos processos. Essa visão fixa da Matemática cria barreiras, dificultando que os participantes concebam abordagens diferentes das que lhes foram ensinadas. Esse pensamento estático, fundamentado em axiomas rígidos, pode ser uma manifestação do pensamento cartesiano, que permeia a formação de professores de Matemática e até mesmo o pensamento cotidiano, como destacado por Velanes (2017).

Figura 22 – Descobertas e contradições apontadas pelo participante 1 ao final do Experimento Mental

Revelação: O que dizer dos resultados encontrados na compreensão anterior?

Sendo, o princípio dos ensinos iniciais de matemática, ouvimos que a ordem na multiplicação "não importa", entretanto ao definirmos o objeto e o fator há uma ordem para podermos realizar a "comparação", então foi uma revelação a questão de fator e produto. A ordem dos fatores não irá alterar o resultado, mas importam no processo.

Fonte: Dados da pesquisa, 2023.

Por fim, durante o desenvolvimento do exemplo $(+3) \times (-2)$, que ocorreu após o trabalho exclusivamente com os fatores de simetria $+1$ e -1, o participante 1 propôs uma reescrita alternativa utilizando a expressão $(+3)(+2)(-1)$. Nesse contexto, ele considerou o $+3$ e o $+2$ como objetos, enquanto o -1 era visto como um fator de simetria. A sugestão foi operar diretamente objeto com objeto, ou seja, entre o $+3$ e o $+2$, antes de aplicar o fator de simetria -1. Essa abordagem estava fundamentada na familiaridade do participante com processos e regras observados na primeira parte do Experimento.

No entanto, a discussão tomou um rumo diferente quando os demais participantes questionaram a lógica dessa proposta. Eles ressaltaram que, conforme a regra previamente construída, era necessário aplicar um fator ao objeto, pois, caso contrário, a operação não fazia sentido. Esse momento ilustra como a adaptação de conhecimentos prévios pode gerar obstáculos. Especificamente, a aplicação do Experimento Mental introduziu novas informações em um processo já consolidado. Assim, quando a metodologia dos Experimentos Mentais demanda a inclusão de novas ideias para avançar na atividade, isso pode ser visto como um obstáculo inerente à metodologia.

Dessa forma, a análise do Experimento Mental conduzido pelo participante 1 revela obstáculos matemáticos que podem surgir devido à metodologia empregada. A abordagem dos Experimentos Mentais frequentemente provoca contradições no pensamento dos participantes, demonstrando que a Matemática não é um campo estático ou absoluto, mas sim uma construção em constante evolução. Assim, o participante 1 foi levado a entender que o conhecimento matemático é influenciado por fatores contextuais e processuais, e não apenas por regras inflexíveis.

6. CONSIDERAÇÕES

Esta pesquisa, desenvolvida no programa de pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), investigou uma metodologia complementar ao ensino de Matemática, conhecida como Experimentos Mentais, na formação inicial de um grupo de seis licenciandos em Matemática da UFJF. A pesquisa foi fundamentada na concepção de que a Matemática é um processo semiótico. Conforme Peirce (CP 4.233), a Matemática é "o estudo do que é verdadeiro quanto ao estado de coisas hipotético". Esse estado hipotético é representado por meio do raciocínio diagramático, que é intrínseco aos Experimentos Mentais no âmbito da Educação Matemática.

Durante a investigação, nos orientamos pela seguinte questão: **Como a utilização dos Experimentos Mentais na Educação Matemática influencia a formação inicial de professores de Matemática?** Para responder a essa questão, identificamos, por meio dos signos produzidos pelos participantes durante o desenvolvimento das atividades propostas, obstáculos didáticos de origem epistemológica, didática, ontogênica e psicológica. Recorrendo aos pressupostos teóricos de Brousseau (2002) para essa análise, consideramos a teoria dos obstáculos didáticos um signo, ou seja, uma entidade que representa um objeto, seja ele físico ou abstrato, e provoca um efeito interpretativo que não é definitivo, conforme Peirce (2010). Dessa forma, a análise dos obstáculos didáticos exige a construção e reconstrução contínua de significados.

Ao analisar o Experimento Mental sobre a multiplicação de números inteiros aplicado aos professores em formação inicial, identificamos um obstáculo epistemológico e didático manifestado pelo participante 3, que tende a enfatizar demonstrações algébricas e abordagens axiomáticas para justificar que $(-1) \times (-1) = +1$. Discutimos que essa tendência pode ser atribuída à marginalização histórica da geometria em favor da álgebra e da análise matemática no século XIX, o que impactou a educação básica no século seguinte. Esse impacto foi intensificado pelo Movimento da Matemática Moderna, que influencia a formação de professores até os dias atuais, resultando em uma especialização excessiva e fragmentada, tanto em aspectos pedagógicos quanto nos específicos da Matemática pura.

Adicionalmente, consideramos relevante a possibilidade de um obstáculo relacionado ao pensamento matemático sob a perspectiva cartesiana, na qual a verdade é derivada de uma base axiomática. Isso é observado no participante 3, que demonstra uma crença de que a construção matemática depende exclusivamente das verdades já estabelecidas. Assim, a análise destaca como essas influências históricas e epistemológicas podem continuar a moldar a abordagem dos professores em formação inicial, sublinhando a necessidade de uma formação que integre diferentes perspectivas e metodologias no ensino da Matemática.

Por outro lado, identificamos que o conhecimento do participante 1 sobre a operação $(-1) \times (-1) = +1$ baseava-se na aplicação de uma regra estabelecida, documentada desde a década de 1970 no livro "Matemática: Curso Moderno para os ginásios". Dessa forma, identificamos tanto um obstáculo didático quanto um epistemológico, uma vez que a história da Matemática revela uma evolução gradual na compreensão dos números negativos, enfrentando desafios significativos para justificar tal regra. Além disso, ressaltamos um possível obstáculo psicológico devido à surpresa do participante com a desvinculação da ideia de que o resultado deve ser obtido exclusivamente por meio de uma regra de sinais pré-estabelecida, contrastando com a criação de um processo de construção flexível. Por fim, percebemos um obstáculo metodológico quando novas ideias relacionadas ao fator dilatador (abdução) foram introduzidas em um processo já consolidado, evidenciando a resistência do participante em integrar essas novas ideias ao seu entendimento.

A utilização desse enquadramento teórico permitiu-nos não apenas identificar e categorizar os obstáculos enfrentados pelos licenciandos, mas também compreender melhor como esses obstáculos influenciam a aprendizagem e a prática pedagógica. Os participantes perceberam que não precisavam buscar verdades axiomáticas para justificar por que $(-1) \times (-1) = +1$. Em vez disso, poderiam desenvolver seu próprio processo de raciocínio para alcançar essa resposta, mesmo que esse processo enfrentasse inconsistências ao longo de seu desenvolvimento.

Portanto, a metodologia dos Experimentos Mentais auxiliou os licenciandos a encontrarem contradições durante o processo investigativo, o que promoveu a busca por novas hipóteses ou a reafirmação de crenças já estabelecidas. Dessa maneira, essa abordagem incentivou uma atitude reflexiva e crítica, estimulando os participantes a questionarem e reformularem suas próprias ideias (crenças) e métodos.

REFERÊNCIAS

ANDRÉ, J. B. P. M. D. **Aprender e Ensinar com Descartes:** O Método Cartesiano como Inspiração para o Ensino da Filosofia. 2022. 226f. Tese (doutorado em Filosofia) - Faculdade de Letras, Universidade de Lisboa, Lisboa. Disponível em: https://repositorio.ul.pt/handle/10451/54551. Acesso em: 03 abr. 2024.

ARTIGUE, M. Épistémologie et didactique. **IREM de Paris**, 3, 1989, Cahier de DIDIREM, René Cori, 2-86612-096-5. hal-02138030

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática.** Curitiba: Ed. UFPR, 2007

ALVES, F. R. V.; BORGES NETO, H.. Filosofia da Matemática num curso de licenciatura: implicações para a formação do professor. **Conexões - Ciência e Tecnologia**, [S. l.], v. 6, n. 1, 2011. DOI: 10.21439/conexoes.v6i1.384. Disponível em: https://conexoes.ifce.edu.br/index.php/conexoes/article/view/384. Acesso em: 1 maio. 2024.

BACHELARD, G. **A formação do espírito científico:** contribuição para uma psicanálise do conhecimento. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.

BALDY, R.; DEVICHI, C.; CHATILLON, J. F. Developmental Effects in 2D Versus 3D Versions in Verticality and Horizontality Task. **Swiss Journal of Psychology**, v. 63, n. 2, p. 75-83, 2004. Dispinível em: https://psycnet.apa.org/record/2004-17516-001. Acesso em: 28 jul. 2023.

BEZERRA NETO, L.; BEZERRA, M. C. dos S. A importância do materialismo histórico na formação do educador do campo. **Revista HISTEDBR On-line**, Campinas, SP, v. 10, n. 38e, p. 251–272, 2012. DOI: 10.20396/rho.v10i38e.8639762. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/histedbr/article/view/8639762. Acesso em: 10 jul. 2023.

BICUDO, M. A. V. **Pesquisa qualitativa e pesquisa qualitativa segundo a abordagem fenomenológica**. In: Pesquisa qualitativa em Educação Matemática. Org: Fiorentini, D; GARNICA, A. V. M.; BICUDO, M. A. V., Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2019.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Portugal: Porto editora, 1994.

BONGIOVANNI, V. Historia: As duas maiores contribuições de Eudoxo de Cnido «a teoria das proporções e o método de exaustão». **UNIÓN - REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA**, v. 1, n. 2, 30 jun. 2005.

BROUSSEAU, G. P. Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. Nadine Bednarz, Catherine Garnier. Construction des savoirs Obstacles et Conflits, CIRADE Les éditions Agenced’Arc inc., p.41-63, 1989. hal-00516581v1

BROUSSEAU, G. P. **Theory of didactical situations in mathematics:** didactique des mathématiques, 1970 - 1990; ed. and translated by Nicolas Balacheff et al. (Dordrecht: Kluwer, 2002.

BROUSSEAU, G. P. Les obstacles epistemologiques et les problemes en mathematiques. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v. 4, n. 2, p. 165 - 198, 1983.

BROUSSEAU, G. P. Les obstacles épistémologiques, problèmes et ingénierie didactique. Guy Brousseau. La théorie des situations didactiques, La pensée sauvage, p.115-160, 1998, **Recherches en Didactiques des Mathématiques**. hal-00516595v2

BROWN, J. R. **The laboratory of the mind: thought experiments in the natural sciences**. Routledge: New York, 2011.

BRUM, W. P.; SILVA, S. de C. R. da. Obstáculos no ensino de matemática: o posicionamento de professores de matemática sobre a fonte de obstáculos durante a apresentação do tema probabilidade. **Itinerarius Reflectionis**, Goiânia, v. 11, n. 1, 2015. DOI: 10.5216/rir.v11i1.33356. Disponível em: https://revistas.ufj.edu.br/rir/article/view/33356. Acesso em: 27 jul. 2023.

CAMPOS, D. G. Raciocínio Matemático e Criação Poiética em Peirce. **COGNITIO ESTUDOS: Revista Eletrônica de Filosofia**, São Paulo, v. 4, n. 2, jul/dez, p. 81 - 92, 2007. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/cognitio/article/view/5755. Acesso em: 16 maio 2023.

CANOTILHO, L. M. L. **Perspectiva pictórica**. Portugal: Instituto Politécnico de Bragança, 2005.

CASSIRER, E. **Ensaio sobre o homem:** introdução a uma filosofia da cultura humana. 3. ed. Tradução Thomás Rosa Bueno. São Paulo: WMF Martins Fontes, 2021.

CHIAPPETTA, E. L. A Review of Piagetian Studies Relevant to Science Instruction at the Secondary and College Level. **Science Education**, v. 60, n. 2, p. 253-261, 1976.

COLL, C. et al. 2 ed. **Desenvolvimento psicológico e educação**. Porto Alegre: Artmed, 2007.

CORNU, B. **Limits**. In: Tall, D. (eds) Advanced Mathematical Thinking. Mathematics Education Library, v. 11. Springer, Dordrecht, 2002. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_10

CRUZ, W. J. da. **Experimentos Mentais na Educação Matemática:** uma analogia com provas matemáticas formais. Curitiba: Appris, 2018.

CRUZ, W. J. da. O raciocínio diagramático e os Experimentos Mentais numa perspectiva semiótica. **Educação Matemática em Revista**, Brasília, v. 24, n. 62, abr./jun. 2019.

CRUZ, W. J. da. Matemática é criação ou descoberta?. **UNIÓN - Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, v. 15, n. 57, p. 121-137, 2020a. Disponível em: https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/70. Acesso em: 02 jun. 2023.

CRUZ, W. J. da. Objetos e processos: aspectos complementares na multiplicação de número inteiros negativos. **Revista Eletrônica de Educação Matemática – REVEMAT**, Florianópolis, v. 15, p. 01-17, 2020b. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2020.e70984. Acesso em: 12 ago. 2023.

CRUZ, W. J. da. O uso dos Experimentos Mentais como possível metodologia de Ensino da Matemática: um olhar epistemológico. **Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVEMAT**, Florianópolis, v. 16, p. 01-26, jan./dez., 2021a. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/79205. Acesso em: 27 out. 2021.

CRUZ, W. J. O que é √(-1)?. **UNIÓN - REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA**, v. 17, n. 62, 17 jun. 2021b. Disponível em: https://www.revistaunion.org/index.php/UNION/article/view/261. Acesso em 21 maio 2024.

CRUZ, W. J. da. **Experimentos Mentais:** uma nova metodologia para o ensino de Matemática. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2022.

CRUZ, W. J. da. Por que √2 é irracional? Buscando explicações nos processos de experimentação mental. **Educação Matemática em Revista**, v. 28, n. 79, p. 1-15, 15 maio 2023. Disponível em:http://www.sbemrevista.com.br/revista/index.php/emr/article/view/3007. Acesso em 06 jun. 2023.

CRUZ, W. J. DA. Experimentos mentais como metodologia de ensino: perspectivas teóricas para a soma dos ângulos externos de um triângulo euclidiano. **Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, v. 14, n. 2, p. 1-15, 24 ago. 2024. Acesso em 29 ago. 2024.

CURY, H. N. Concepções e Crenças dos Professores de Matemática: pesquisas realizadas e significado dos termos utilizados. **Bolema**, v. 12, n. 13, 1999. Disponível em: https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10640. Acesso em 25 jul. 2023.

D’AMBROSIO, B. Formação de professores de matemática para o século XXI: o grande desafio. **Pró-Posições**. v. 4, n. 1 [10], p. 35-41. Campinas: F.E. – Unicamp, 1993. Disponível em: https://www.fe.unicamp.br/pf-fe/publicacao/1757/10-artigos-ambrosiobs.pdf. Acesso em 25 jul. 2023.

D'AMBROSIO, B. D.; LOPES, C. E. Insubordinação Criativa: um convite à reinvenção do educador matemático. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 29, n. 51, p. 1-17, abr. 2015. Disponível em: https://www.scielo.br/j/bolema/a/XZV4K4mPTfpHPRrCZBMHxLS/?lang=pt. Acesso em: 24 set. 2022.

D’AMORE, B. Epistemologia, Didática da Matemática e Práticas de Ensino. **Bolema**, Rio Claro, v. 20, n. 28, p. 179 -205, 2007a. Disponível em: https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/1537. Acesso em: 22 jul. 2023.

D’AMORE, B. **Elementos de Didática da Matemática**. São Paulo: Livraria da Física, 2007 b.

DANIELI, J. P.; NIEDERMAYER, I. C.. O método do materialismo histórico-dialético: apontamentos teóricos e sua contribuição para a educação. E-book VII CONEDU 2021 - Vol 03. Campina Grande: Realize Editora, 2022. Disponível em: https://editorarealize.com.br/artigo/visualizar/82254.Acesso em 06 jun. 2023.

DESCARTES, R. **Discurso do método**. Trad. Paulo Neves. Porto Alegre: L&PM, [1637] 2009.

DEVICHI, C.; MUNIER, V. About the concept of angle in elementary school: Misconceptions and teaching sequences. **The Journal of Mathematical Behavior**, Online, v. 32, n. 1, p. 1-19, 2013. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0732312312000491?via%3Dihub. Acesso em 28 jul. 2023.

DINIZ, M, I. de S. V. Uma Visão do ensino de matemática. **Revista Temas e Debates**, São Paulo, v. 4, n. 3, p. 27-30, 1991.

DUARTE, S. M. **Os impactos do modelo tradicional de ensino na transposição didática e no fracasso escolar.** 2018. Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade Fernando Pessoa, Porto, 2018. Disponível em: http://hdl.handle.net/10284/6624. Acesso em: 07 jul. 2022.

DUARTE, A. R. S. **Matemática e Educação Matemática:** a dinâmica de suas relações ao tempo do Movimento da Matemática Moderna no Brasil. 2007. 438 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11261. Acesso em: 27 abr. 2024.

DUROUX, A. La valeur absolue: difficultés majeures pour une notion mineure. **L'IREM de Bordeaux**, n. 3, p. 43-67, 1983.

FABBRICHESI, R. O pensamento icônico e diagramático na obra de Peirce. In: QUEIROZ, J.; MORAIS, L., (Org.). **A lógica de diagramas de Charles Sanders Peirce: implicações em ciência lógica e semiótica**. Juiz de Fora: Editora da UFJF, 2013, p. 17-48.

FERNANDES, S. M.et al. Experimentos mentais como uma forma de ludicidade no ensino superior. **Thaumazein**, Santa Maria, v. 12, n. 23, p. 45-53, 2019. Disponível em: https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/thaumazein/article/view/3032. Acesso em: 27 maio 2023.

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. **Zetetike**, Campinas, SP, v. 3, n. 1, 2009. DOI: 10.20396/zet.v3i4.8646877. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646877. Acesso em: 4 jun. 2023.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia:** saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra, 1997.

GAMOW, G. **One two three... infinity:** facts and speculations of science. New York: The Viking Press, 1961.

GLAESER, G. Epistemologia Dos Números Relativos. **Boletim GEPEM**, [S. l.], n. 57, 2010. Disponível em: https://periodicos.ufrrj.br/index.php/gepem/article/view/302. Acesso em: 13 ago. 2023.

GOMES, M. G. **Obstáculos na Aprendizagem Matemática:** identificação e busca de superação nos cursos de formação de professores das séries iniciais. 2006. 161f. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2006. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/89346. Acesso em: 26 jul. 2023.

GOMES, M. G. Obstáculos epistemológicos, obstáculos didáticos e o conhecimento Matemático nos cursos de formação de professores das séries iniciais do ensino fundamental. **Contrapontos**, v. 2, n. 6, p. 423-437, set./dez. 2002. Disponível em:https: //periodicos.univali.br/index.php/rc/article/view/181. Acesso em: 25 jul. 2023.

GUIMARÃES, J. L; de B.; JESUS, S. R. de. O mito da caverna e a concepção educativa no livro VII da república de platão. **Revista Cacto - Ciência, Arte, Comunicação em Transdisciplinaridade**, Online, v. 1, n. 2, 2021. Disponível em: https://revistas.ifsertaope.edu.br/index.php/cacto/article/view/281. Acesso em 29 maio 2023.

GUIMARÃES, R. R. Epistemologia dos experimentos mentais, argumentação e explicações científicas no ensino de Física e de Ciências. **Revista Brasileira de Ensino de Ciências e Matemática**, Passo Fundo, v. 4, edição especial, p. 1225-1241, 2021. Disponível em: http://seer.upf.br/index.php/rbecm/article/view/12909. Acesso em: 27 maio 2023.

HIRST, P. H. **O que é ensinar?**. In: POMBO, Olga (Org.). Cadernos de História e Filosofia da Educação: Educar/Ensinar. Tradução de Olga Pombo. Lisboa: Ed. Departamento de Educação da Faculdade de Ciências de Lisboa, 2001. Disponível em https://webpages.ciencias.ulisboa.pt/~ommartins/images/hfe/cadernos/ensinar/hirst.pdf. Acesso em 04 jun. 2023.

HOFFMANN, H. G. M. **Seeing problems, seeing solutions**. Abduction and diagrammatic reasoning in a theory of scientific discovery. Georgia Institute of Technology: School of Public Policy, 2006.

HOFFMANN, H. G. M. Cognição e pensamento diagramático. In: QUEIROZ, J.; MORAIS, L., (Org.). **A lógica de diagramas de Charles Sanders Peirce: implicações em ciência lógica e semiótica**. Juiz de Fora: Editora da UFJF, 2013, p. 105-137.

IGLIORI, S. B. C. A noção de “obstáculo epistemológico” e a educação matemática. In: **Educação matemática:** uma introdução. Machado, S. D. A. et al. (orgs.) São Paulo: EDUC, p. 89-114, 1999.

JAPIASSU, H. F. **Introdução ao pensamento epistemológico**. 4 ed. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves Editora S.A., 1986.

KANT, I. **Crítica à razão pura**. Tradução e notas Fernando Costa Mattos. 4. ed. Petrópolis: Vozes; Bragança Paulista SP: Universitária São Francisco, 2018.

KIKUCHI, L. M. O papel da linguagem científica na aprendizagem de Matemática. In: I Congreso Internacional de Enseanza de las Ciencias y la Matemática, 2011, Tandil, Buenos Aires. Actas del I Congreso Internacional de Enseanza de las Ciencias y la Matemática - ICIECyM. Tandil, Buenos Aires: Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, 2011. v. 1. p. 80-87. Disponível em: http://funes.uniandes.edu.co/20878/. Acesso em 28 jul. 2023.

KIKUCHI, L. M. **Obstáculos à aprendizagem de conceitos algébricos no ensino fundamental:** uma tentativa de aproximação entre os obstáculos epistemológicos e a teoria dos campos conceituais. 2012. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012. Disponível em https://teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-23102012-131046/pt-br.php. Acesso em: 28 jul. 2023.

KUBO, O. M.; BOTOMÉ, S. P. Ensino-aprendizagem: uma interação entre dois processos comportamentais. **Interação em Psicologia**, Curitiba, v. 5, dez. 2001. ISSN 1981-8076. Disponível em: https://revistas.ufpr.br/psicologia/article/view/3321/2665. Acesso em: 04 jun. 2023. doi:http://dx.doi.org/10.5380/psi.v5i1.3321.

KUHN, T. S. A function for Thought Experiments. In: _____. **The essential tension**. Chicago: University of Chicago, 1977. p. 240-265.

LAFUENTE, L. A. M. **Semiose: o interpretante e a interferência de Charler Sanders Peirce**. Dissertação (Mestrado em Filosofia) - Faculdade de Ciências Humanas, Letras e Artes, Universidade Federal da Paraíba. João Pessoa, p. 153. 2016.

LIBÂNEO, J. C. **Democratização da escola pública:** a pedagogia crítico-social dos conteúdos. 21. ed. São Paulo: Loyola, 2006.

LIMA, E. L. **Espaços Métricos**. 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

MAGRITE, R. **A Traição das Imagens.** 1929, óleo sobre tela, 60 cm x 81 cm. LACMA – Los Angeles County Museum of Art, Los Angeles. Disponível em: https://collections.lacma.org/node/239578. Acesso em 04 maio 2023.

MANFREDI, S. M. **Metodologia de Ensino - diferentes concepções (versão preliminar)**. Campinas: F.E./UNICAMP, 1993.

MARCONI, M. de A.; LAKATOS, E. M. **Fundamentos de metodologia científica**. 8 ed. São Paulo: Atlas, 2017.

MEDEIROS, A.; MEDEIROS, C. F. de. Einstein, a física dos brinquedos e o princípio da equivalência. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 22, n. 3, p. 299-315, dez. 2005. Disponível em: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5165378. Acesso em 28 maio 2023.

MEDEIROS, D. L. A. de. Tá Afim de uma Transformação Afim?. **Olímpiada Brasileira de Matemática**, 2021. Disponível em: https://www.obm.org.br/semana/24a-semana-olimpica/. Acesso em: 06 maio 2023.

MIGUEL, A. Reflexão acerca da Educação Matemática Contemporânea. **A educação matemática em revista**, v. 1, n. 2, p. 7-17, 1º sem. 1994.

MONTEIRO, L. C. S. **Semiótica da didática da matemática:** interpretações das interpretações das interpretações... Curitiba: Appris, 2021.

NEVES, J. L. **Pesquisa qualitativa:** características, usos e possibilidades. Caderno de pesquisas em administração, São Paulo, v. 1, n. 3, 1996.

NÖTH, W.; SANTAELLA, L. **Introdução à Semiótica.** São Paulo: Paulus, 2017.

NOVAINDA, D.; TURMUDI, T. Analisis Hambatan Belajar (Learning Obstacles) Dalam Pembelajaran Geometri: Literatur Review. **Jurnal Gantang**, v. 6, n. 2, p. 133-139, 2021. Disponível em https://ojs.umrah.ac.id/index.php/gantang/article/view/2866. Acesso em 26 jul. 2023.

NURJANAH, N.; JULIANA, A. Hambatan Didaktis Siswa SMP dalam Penyelesaian Masalah Geometri Berdasarkan Kemampuan Persepsi Ruang. **Jurnal Matematika Kreatif-Inovatif**, v. 1, n. 2, p. 236-244, 2020. Disponível em https://journal.unnes.ac.id/nju/index.php/kreano/article/view/26752. Acesso em 26 jul. 2023.

ORSTED, H. C. First Introduction to General Physics. In: ORSTED, H. C; ELVED, K; JACKSON, A. D. **Selected Scientific Works of Hans Christian Ørsted**. Princeton: Princeton University Press; 1998. p.282-309. Disponível em: https://doi.org/10.1515/9781400864850.282. Acesso em: 27 maio 2023.

OTTE, M. F. **A Realidade das Ideias:** uma perspectiva epistemológica para a Educação Matemática. Cuiabá: EdUFMT, 2012.

PAIAS, A. M. **Obstáculos no ensino e na aprendizagem do objeto matemático potência**. 2019. 308 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2019. Disponível em https://tede2.pucsp.br/handle/handle/22519. Acesso em: 26 jul. 2023.

PAIS, A. **Subtle is the lord:** The science and the life of Albert Einstein. Oxford University Press: New York, 2005.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática:** uma análise da influência francesa. 4 ed. Belo Horizonte: Autêntica Edutora, 2019.

PEIRCE, C. S. **Collect Papers**. C. HARTSHORNE; WEISS, P. (orgs.), v. 1-6 e BURKS A. W. (orgs.), v. 7-8. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1931-1958. [Obra citada como CP seguido pelo número do volume e número do parágrafo]

PEIRCE, C.S. **Semiótica**. Trad. José Teixeira Coelho Neto. 4 ed. São Paulo: Perspectiva, 2010.

PEREIRA, M. R. S. Considerações sobre a epistemologia dos experimentos mentais. **Conjectura: Filosofia e Educação**, Caxias do Sul, v. 20, n. 2, p. 181-197, set./dez. 2015.

Disponível em: http://www.ucs.br/etc/revistas/index.php/conjectura/article/view/3327. Acesso em: 27 maio 2023.

PIAGET, J. **Seis estudos de psicologia**. 24 ed. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1999.

PIAGET, J.; INHELDER, B. **The child's conception of space**. London: Routledge & Kegan Paul, 1956.

PIRES, M. F. de C. O materialismo histórico-dialético e a Educação. **Interface - Comunicação, Saúde, Educação**, v. 1, n. 1, p. 83-94, 1997. Disponível em: http://hdl.handle.net/11449/30353. Acesso em 04 jul. 2023.

PLATÃO. **A República**. Trad. Maria Helena da Rocha Pereira. 9. ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbbenkian, 2001.

POINCARÉ, H. Mathematical creation. **Resonance**, v. 5, n. 2, p. 85-94, Feb. 2000. Disponível em: https://paradise.caltech.edu/ist4/lectures/Poincare_Reflections.pdf. Acesso em: 17 jul. 2023.

POWELL, A. B.; FRANCISCO, J. M.; MAHER, C. A. Uma Abordagem à Análise de Dados de Vídeo para Investigar o Desenvolvimento das Idéias Matemáticas e do Raciocínio de Estudantes. **Bolema**, Rio Claro, v. 17, n. 21, maio 2004.

PRICLADNITZKY, P. Experimentos de pensamento e ficção científica. **Trans/Form/Ação**, Marília, v. 43, n. 3, p. 65-70, Jul./Set., 2020.

RAICIK, A. C.; PEDUZZI, L. O. Q. De Mach ao 'novo experimentalismo': um resgate histórico-epistemológico de experimentos de pensamento. **Revista Brasileira de História da Ciência**, v. 14, n. 2, p. 209-234, jul/dez 2021. Disponível em: https://rbhciencia.emnuvens.com.br/revista/article/view/153. Acesso em: 27 maio 2023.

ROQUE, T. **História da matemática:** uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ROSENFIELD, D. L. Vida e Obra. In: DESCARTES, RENÉ. **Discurso do Método**. Porto Alegre: L&PM, [1637] 2009, p. 5-31.

SANGIORGI, O. **Matemática:** curso moderno para o ginásio. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1971. v. 2.

SANTAELLA, L. **O método anticartesiano de C. S. Peirce**. São Paulo: UNESP, 2004.

SANTAELLA, L. **Semiótica aplicada**. 2. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2018.

SCHEFFLER, I. **A linguagem da educação**. Trad. Balthazar Barbosa Filho. São Paulo: Saraiva, edição da Universidade de São Paulo, 1974.

SCHUBRING, G. A Noção de Multiplicação: um "obstáculo" desconhecido na História da Matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 15, n. 18, set. 2002. Disponível em:

https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10562/6966. Acesso em: 23 jul. 2023.

SEVERINO, A. J. **Metodologia do trabalho científico**. 2 ed. São Paulo: Cortez, 2017.

SHAPIRO, S. **Filosofia da matemática**. Trad. Augusto J. Franco de Oliveira. Lisboa: Edições 70, 2000.

SIERPINSKA, A. **Understanding in Mathematics**. London: Falmer, 1994.

SIERPINSKA, A.; VIWEGIER, M. O powstawaniu przeszkod pistemologicznych zwiazanych z pojeciem nieskonczonosci u dzieci 10–12 i 14 letnich, Dydaktyka Matematyki, 13, p. 253–311, 1992.

SILVA, J. J. da. **Filosofias da matemática**. São Paulo: Editora UNESP, 2007.

SILVA, M. V. da et al. Do tradicionalismo às novas tendências: contribuições e reflexões. **Research, Society and Development**, [S. l.], v. 10, n. 12, p. e561101220827, 2021. Disponível em: https://rsdjournal.org/index.php/rsd/article/view/20827. Acesso em: 24 set. 2022.

STEELE, C. M. A threat in the air: How stereotypes shape intellectual identity and performance. **American Psychologist**, v. 52, n. 6, p. 613–629, 1997. Disponível em: https://doi.org/10.1037/0003-066X.52.6.613. Acesso em: 29 jul. 2023.

STJERNFELT, F. **Diagramas: Foco para uma epistemologia peirceana**. In: A lógica de diagramas de Charles Sanders Peirce: implicações em ciência lógica e semiótica. Org: Queiroz, J.; Morais, L., Juiz de Fora: Editora da UFJF, 2013, p. 49-81.

STUART, M. T.; FEHIGE, Y.; BROWN, J. R. **The Routledge Companion to ThoughtExperiments**. Routledge: New York, 2018.

TOBIAS, S. Math Anxiety: An Update. **NACADA Journal**, v. 10, n. 1, p. 47-50, 1990. Disponível em: https://meridian.allenpress.com/nacada-journal/article/10/1/47/33552/Math-Anxiety-An-Update. Acesso em: 29 jul. 2023.

VELANES, D. A crítica de Gaston Bachelard ao método cartesiano: o cartesianismo como um obstáculo epistemológico? **Revista Seara Filosófica**, n. 14, p. 1-19, 2017. Disponível em: https://periodicos.ufpel.edu.br/index.php/searafilosofica/article/view/10782. Acesso em: 03 jun. 2024.

ZAGNOLI, T. de P. **Uma análise do erro de um grupo de estudantes do Ensino Médio em uma escola de Juiz de Fora – MG sob a ótica sociocontextual.** 2017. 134f. Dissertação (mestrado profissional) ––Instituto de ciências exatas, Universidade Federal de Juiz de Juiz de Fora, Juiz de Fora. Disponível em: https://www2.ufjf.br/mestradoedumat/wp-content/uploads/sites/134/2011/05/Disserta%C3%A7%C3%A3o_Tiago_Zagnoli_Final.pdf. Acesso em: 17 jul. 2023.

APÊNDICE A – Multiplicação de números inteiros

Programa de Pós-graduação em Educação Matemática
Universidade Federal de Juiz de Fora

O intuito desta atividade é aplicar uma metodologia alternativa para o ensino de Matemática, denominada Experimentos Mentais. O tema escolhido é a multiplicação de números inteiros.

1. De acordo com os seus conhecimentos, como você explicaria que $(-1) \times (-1) = +1$?

____
____
____
____
____
____
____

2. Convidamos você a aplicar um Experimento Mental para buscarmos uma explicação para as multiplicações $(-1) \times (+1)$, $(+1) \times (-1)$ e $(-1) \times (-1)$.

Forma: Em uma reta, vamos fixar os números -1 e 1 como pontos opostos simetricamente em relação ao ponto 0.

Estrutura e Compreensão: Vamos considerar que multiplicar por (-1), que é um fator de simetria, é encontrar o simétrico do número (ponto), e multiplicar por $(+1)$ é encontrar o próprio número (ponto). Agora, investiguemos as multiplicações $(-1) \times (+1)$ e $(+1) \times (-1)$ e $(-1) \times (-1)$.

Dependência: Pense em qual universo do discurso ou campo teórico você desenvolveu a compreensão anterior.

____

____

Revelação: O que dizer dos resultados encontrados na compreensão anterior?

____

____

____

____

____

Comparação: Como podemos pensar no resultado da multiplicação de:

A. $(+3)$ por (-2)?

B. (-4) por (-2)?

APÊNDICE B – Transcrição da gravação em vídeo

Pesquisadores: Se alguém perguntasse o porquê de $(-1) \times (-1) = +1$, o que vocês responderiam para essa pessoa?

Pesquisadores: Como o conhecimento está no papel, primeiro vocês escrevem as ideias que têm sobre esse fato. Lembrando que não existe certo ou errado, existe o processo.

Participante 5: Eu não sei mesmo.

Pesquisadores: Como, participante 5? Repete, por favor.

Participante 5: Eu não sei como eu explicaria.

Pesquisadores: Como foi explicado para você?

Participante 5: Ah, regra, né? Eu não concordo com isso.

Pesquisadores: Decorar regra, né? Aquela o amigo do amigo, do inimigo. Não tem um negócio assim?

Participante 5: Tem. Sinais iguais, positivo; sinais diferentes, negativo.

Participante 1: O inimigo do meu inimigo é meu amigo. Quando eu era criança, meu pai falava isso.

Pesquisadores: Para mostrar a relação dos sinais, né? O inimigo do meu inimigo é meu amigo.

Participante 1: Quando eu aprendi na escola, a minha professora só colocou assim no quadro: "Na multiplicação, sinais iguais dá positivo; sinais diferentes, dá negativo".

Pesquisadores: Convenceu essa regra?

Participante 1: Não sei explicar isso agora.

Pesquisadores: Na universidade, você já viu alguma coisa relacionada?

Participante 1: Não, primeira vez.

Pesquisadores: Então nunca perguntaram por que $(-1) \times (-1) = +1$ aqui? Na verdade, esse conhecimento foi o que: "Ah, isso vocês já deveriam estar sabendo...". Foi assim?

Participante 1: Porque na adição e na subtração de números inteiros têm a questão da reta numérica, então você pensa na reta. Mas na multiplicação, eu não estou pensando não.

Pesquisadores: E você, participante 2? Está na mesma situação?

Participante 2: Desde sempre a gente aprendeu como uma regra. A gente precisa apresentar isso na semana que vem, na terça [se referindo a uma disciplina da Universidade].

Pesquisadores: E aí, participante 3? Você escreveu alguma coisa aí.

Participante 3: Ah, eu fiz uma demonstração, mas é muito algébrico.

Pesquisadores: E o que é muito algébrico que você fez aí?

Participante 3: Eu usei as propriedades algébricas de corpo. Anel, melhor dizendo, de forma geral, o corpo é um anel.

Participante 5: O problema é que a gente pensa que isso não é a melhor forma, pelo menos eu penso assim, de explicar. Porque tanto pela regra ou usar propriedades algébricas, quando a gente vai ensinar isso aqui, geralmente os alunos estão muito novos para. Pelo menos a forma que a gente conhece acho que não seria a melhor forma para ensinar, mas até então não tem outra. Isso é um problema, né?

Pesquisadores: E você, participante 4?

Participante 4: Eu tô acabando aqui.

Pesquisadores: E aí, participante 6?

Participante 6: Então, eu lembro que aqui, eu não sei se foi em cálculo 1, teve uma vez que a professora falou: "Ah, vocês aprenderam na escola assim, calcula a de dentro". Eu lembro muito que ela falou isso. Mas agora eu não lembro se ela falou isso dentro da, não se se foi função inversa. Foi alguma coisa assim, explicando isso. Igual quando ela explicou da função, que ensinava a gente a ligar? Quando a gente estava lá no prézinho, a gente ligava.

Pesquisadores: Quer dizer que tem uma coisa relacionada com construir uma regra aí, de trocar o sinal lá de dentro, talvez. Se o de fora é negativo, o de dentro modifica o número. Seriam umas coisas mais ou menos assim?

Participante 6: Não, assim seriam o que eles passam para a gente na educação básica, aqui ela chegou a explicar o porquê que a gente troca.

Pesquisadores: Aí você lembra de alguma coisa disso?

Participante 6: Não sei se é o inverso da multiplicação, não sei, eu não lembro agora.

Pesquisadores: Ok, ok! E você ia falar alguma coisa, participante 1?

Participante 1: Eu ia falar, mas eu voltei para o mesmo lugar que eu estava [escrevendo no papel].

Pesquisadores: Eu tô vendo que você está fazendo alguma coisa diferente aí.

Participante 1: Não, mas aí eu volto para a mesma coisa, porque se eu penso em potência, dá no mesmo, porque tem como saber que menos com menos vai ser mais.

Pesquisadores: Ah, entendi. Você pensou em trazer uma potência, por exemplo, $(-1)^2$.

Participante 1: Uhum, mas aí eu volto na mesma coisa. Eu quero sair do lugar que eu tô.

Pesquisadores: E você, participante 2? Avançou alguma coisa?

Participante 2: Não, mas eu tô tentando explicar aqui [olhando para o papel].

Pesquisadores: Mas o certo é que se a gente for pensar, muita coisa na matemática parece que não tem explicação, né? Sabe aquela coisa, falta explicação pra algo, né? Então o que que nos resta? Guarda essa regra. Pra que que eu tenho que guardar essa regra? Pra ver se ela vai resolver sua vida em algum momento, mas fica algo meio que sem explicação, sim. Na melhor, a gente fala sem significado. Talvez tem sentido porque você está fazendo contas, mas o significado disso fica perdido, né?

Participante 2: É, igual ao que a gente tava conversando na aula hoje cedo, que a gente quer que as crianças lá, de sei lá, sexto, sétimo, ano saibam isso, mas a gente não sabe explicar o porquê.

Pesquisadores: É um problema, né? E, participante 3, fora esse pensamento algébrico?

Participante 3: Tô tentando pensar em alguma coisa aqui.

Pesquisadores: E você, participante 4?

Participante 4: Vou ler [escreveu na folha]. Primeiramente, vamos pensar em $1 \times (-1)$. Como todo número multiplicado por l é igual a ele mesmo, podemos concluir que o resultado é igual a -1. Nesse sentido, podemos entender que multiplicar por -1 significa trocar o sinal do número, ou seja, tem o sentido de tomar o oposto do número. Isso é visto ao multiplicarmos (-1) por qualquer outro número positivo. Sabendo, então, que ao multiplicar por -1 tomamos o seu oposto, pode-se concluir que $(-1) \cdot (-1) = 1$.

Pesquisadores: Uma ideia interessante.

Participante 5: É melhor que usar a técnica.

Pesquisadores: Agora podemos começar a fazer o Experimento. Vamos usar aquelas características dos Experimentos que eu falei com vocês. A gente demarcou as características no Experimento para vocês saberem que elas aparecem, mas elas acontecem simultaneamente, sem se ter uma coisa rígida. A gente sempre vai começar com uma forma, uma representação particular daquele objeto. Então, poderíamos começar trazendo um pouco a ideia do participante 4, talvez usando uma reta que a gente pense os números -1 e 1 como pontos simétricos em relação a um ponto zero. Vamos começar fazendo essa representação então; tem um espaço aí no papel.

[pausa]

Pesquisadores: Vamos ver como eles fizeram, a forma que tentaram. É interessante, participante 1. Por que você pensou em fazer com esse tanto de valores aí? [representação de uma reta com vários números equidistantes, de -3 a 5].

Participante 1: Foi por impulso, acho que é natural fazer a reta grande. Depois que eu pensei...

Pesquisadores: E vocês? Pensaram em só marcar esses pontos mesmo [se referindo a -1, 0 e 1]?

Vários participantes: É!

Participante 1: E pior, a minha foi de -3 a 5, não tem parâmetro nenhum.

Pesquisadores: É um parâmetro que você fez, uma forma diferente que você fez.

Pesquisadores: Vamos seguir naquela ideia então. Vamos pensar que, ao multiplicar por -1, vamos encontrar um ponto simétrico, e quando a gente multiplica por $+1$, encontramos o mesmo número. Usando essa ideia, vamos considerar algumas multiplicações. A primeira que vamos investigar é $(-1) \times (+1)$. Como poderíamos usar essa ideia de pensar os pontos como números em uma reta nessa multiplicação?

Participante 3: Poderíamos começar pegando o 1 e multiplicando por zero. Mas o zero é o um somado com o simétrico dele.

Pesquisadores: Vamos anotar aqui no quadro:

$$0 \cdot 1 = 0$$
$$0 = 1 + (-1)$$
$$[1 + (-1)] \cdot 1 = 1 + (-1)$$
$$1 + (-1) \cdot 1 = 1 + (-1)$$
$$(-1) + 1 + (-1) \cdot 1 = (-1) + 1 + (-1)$$
$$0 + (-1) \cdot 1 = 0 + (-1)$$
$$(-1) \cdot 1 = -1$$

Pesquisadores: Interessante! Você pensou de uma forma algébrica. E se a gente pensasse daquela forma geométrica? Como isso ficaria? Utilizando a forma que a gente representou.

Participante 6: A forma da distância não dá, né?

Pesquisadores: Como você pensou?

Participante 6: Eu só lembrei que tem uma fórmula da distância que a gente usa. Tem a raiz quadrada, vocês sabem o que eu tô falando?

Participante 5: A raiz quadrada do primeiro termo ao quadrado mais o segundo ao quadrado, aí é $\sqrt{(-1)^2 + 1^2}$, aí seria a distância dos dois, né? Mas eu não sei como a gente vai usar isso.

Pesquisadores: E se tentássemos pensar em quando multiplicamos o -1 e encontramos o simétrico, da forma geométrica, e o $+1$ o mesmo número? Teríamos o -1 como fator ou o $+1$ como fator, então temos que decidir.

Participante 3: Você poderia usar outra forma algébrica também e dizer que esse produto é igual a um x e dividir por 1 dos dois lados. Aí sai mais rápido do que eu fiz aqui [apontando para a demonstração no quadro].

Pesquisadores: É, pensando na álgebra. Estamos pensando em um movimento geométrico de transformação. Você quer transformar o -1 no $+1$ e o $+1$ no -1. E esse objeto de transformação que você tá querendo fazer vai estar associado ao ponto de referência, que a gente chama de ponto de simetria, ou centro de simetria, e o fator que você vai aplicar a isso. Então, se você tá querendo transformar o $+1$ no -1, você tá querendo aplicar isso relacionado a qual centro de simetria?

Participante 3: O zero.

Pesquisadores: E qual fator de simetria que vai permitir você transformar o -1 no $+1$? Esse fator de simetria. Aí, esse fator de simetria pode ser, por exemplo, o próprio -1. É nesse processo que precisamos pensar, meu eixo de simetria e o meu fator de simetria. Aí, a partir daí, você constitui a regra, que é o que você está querendo fazer, né? O pensamento algébrico.

Pesquisadores: Você constitui um processo.

Pesquisadores: A essência toda é que eu preciso constituir, *a priori*, num processo abdutivo, a transformação de um elemento por meio de um fator que vai chegar no outro elemento. Esse elemento aqui é um objeto [apontando para a representação no quadro, o ponto -1], porque ele é um ponto da sua reta. Agora, quem é esse fator?

Participante 4: Ele é um fator que pega o simétrico, enquanto o 1 é o fator que mantém o próprio número.

Pesquisadores: Olha que importante o que o participante 4 falou. Você tem duas opções de fatores, qual é a mais adequada?

Pesquisadores: Entendeu?

Participante 4: O problema é que a gente sempre pensa as duas coisas como número, aí não faz sentido, como objeto. Agora, se a gente pensar uma das duas coisas como fator, faz total sentido.

Pesquisadores: Você chega à explicação de algo, né?

Participante 4: Isso, é! Agora se eu pensar nas duas coisas como objeto, não faz tanto sentido.

Pesquisadores: Como que eu aplico um objeto em outro objeto para gerar um terceiro objeto? Essa contribuição é importantíssima, porque é essa a percepção, né? Da diferença do objeto para o fator. Agora, tem problemas. Vamos ver aonde vamos chegar. Vamos na hipótese: pense no $(+1) \times (-1)$ e no $(-1) \times (+1)$. Lembrando que não é nada algébrico, estamos tentando em termos do objeto. Chegamos em objeto aplicado a um fator, chegando em um objeto. Pense nessas duas coisas e o que vocês acham: que isso aqui é $(+1) \times (-1) = (-1) \times (+1)$ ou $(+1) \times (-1) \neq (-1) \times (+1)$?

Participante 6: É diferente. O objeto do primeiro é $+1$ e o do segundo é -1.

Participante 1: Posso fazer uma pergunta?

Pesquisadores: Pode!

Participante 1: A gente que escolhe o fator? Quem que vai ser o fator? Isso aí então, a ordem não importa, é o que a minha interpretação mandar, é isso?

Pesquisadores: A gente viu que temos várias opções, então precisamos estabelecer uma delas para construir o processo. A gente pode estabelecer o primeiro número como objeto ou como fator, e o segundo também. Mas a gente precisa estabelecer quem que é o objeto e quem que é o fator.

Participante 1: Aí é pela ordem que aparece?

Pesquisadores: Você pode escolher.

Pesquisadores: Mas tem um porém: toda a consequência do trabalho vai estar associado a sua escolha.

Participante 4: É, porque eu não posso falar, por exemplo, se o primeiro ali é o objeto, o $+1$ é objeto, e o -1 é o fator, então acho que do outro lado -1 tinha que ser o objeto e o $+1$ tem que ser o fator, senão não faz sentido. Por exemplo, se eu estabeleci o primeiro número que eu tô multiplicando é o objeto e o segundo fator, do outro lado eu acho que também tem que ser, para ser coerente, né?

Participante 5: É, porque são processos diferentes, né? Enquanto no primeiro processo, se eu tomar os primeiros termos como objetos e o segundo como fatores, no primeiro eu tenho um processo que vai transformar o meu objeto no seu simétrico, e no outro caso eu tenho um processo que vai manter o meu objeto. Então são casos diferentes.

Pesquisadores: Quando que seria igual?

Participante 3: Se a igualdade fosse formada.

Pesquisadores: Ou seja, se gerarem?

Participante 3: O mesmo resultado. Ah, o mesmo objeto.

Pesquisadores: Em si a coisa já tem uma contradição. A.gora como a gente resolve essa contradição? Entendendo tudo isso que vocês trouxeram, a diferença entre objeto e fator, entre igualdade do resultado e igualdade do processo. Sabe aquela história que os fins justificam os meios? Aqui isso não vale, né? Os fins não justificam os meios, porque a gente tem que olhar tudo, e quando olhamos tudo, estamos no processo de complementaridade. É processos e objetos, por isso o título do artigo.

Pesquisadores: A gente já conseguiu o resultado que queríamos, a contradição foi posta e as observações foram feitas.

Pesquisadores: Mas agora, identificando as características que vimos no início da aula, começamos por uma forma, usando a representação de uma reta, um ponto central, -1 e $+1$ como pontos simétricos em relação ao ponto zero. Depois, a gente trouxe uma ideia nova, na Estrutura, quando pensamos os números como pontos simétricos em uma reta. E nas outras características, por exemplo, na Dependência, a gente conseguiu fazer isso por causa de alguns resultados da matemática. Então, essa representação que a gente fez foi baseada em qual campo da matemática? O que permitiu a gente construir isso? Construir a reta, pensar nos números como pontos simétricos, o que da matemática permitiu isso?

Participante 4: Geometria.

Pesquisadores: Que tipo de geometria?

Participante 3: Da geometria euclidiana.

Pesquisadores: Isso. A outra característica que vimos é a Revelação. Então construímos todo esse processo, essa representação, mas o que que isso quis dizer para gente? Será que teve alguma contradição, como a gente conversou? Será que descobrimos alguma coisa nova nesse processo?

Pesquisadores: Quando falamos alguma coisa nova, ela pode já existir, mas ela é nova no processo que foi feito, na atividade que foi feita.

Participante 3: Ah, esse negócio de objeto, de fator.

Participante 6: Se fosse uma multiplicação de 1×0, dava para representar; 0×1 não dá. Que é tipo ali [apontando para o quadro], que se tivesse colocado $(1) \times (-1)$, talvez a gente teria conseguido representar mais fácil do que $(-1) \times (+1)$.

Participante 4: E por que $-(-1) = 1$? Aí tem tudo a ver, o sinal está fazendo o que? Está operando, é simétrico ou é a orientação do número? É nesse sentido.

Participante 6: Ali a gente tá vendo que a ordem do fator não altera o resultado, né? Mas, representando, altera.

Pesquisadores: Esse é um ponto muito interessante que você está trazendo! A ordem dos fatores não altera o produto em relação a multiplicação usual. Essa multiplicação construída por meio do Experimento é usual ou não?

Pesquisadores: Eu insisto, e vocês discutiram isso aí. Estamos nessa de ser igual ou diferente. Faz muito sentido, quer dizer, para você entender $(-1) \times (-1) = +1$, a gente teve que construir uma referência, por isso que não é mais decorar regra. A sua referência está baseada em transformações geométricas em termos de representação. Então, nessa referência construída, essa coisa da ordem dos fatores, eu já não sei mais, o que você acha?

Participante 5: Porque isso que ela falou, da ordem dos fatores não interfere no resultado, é verdadeiro porque, quando a gente pensa nessa situação que a gente não tá estabelecendo quem é objeto e quem é fator, a gente volta para multiplicação usual. Mas, quando foca no processo e estabelece quem é objeto e quem é o fator, e aí a ordem dos fatores não vai importar no resultado, mas vai importar no processo que a gente tá fazendo. Temos duas situações, né?

Pesquisadores: E o que que isso nos leva a concluir então sobre a matemática com esse foco que você colocou agora?

Participante 5: Em relação a que?

Pesquisadores: A isso tudo, né? O que importa é o resultado, o processo ou tem que haver um conjunto?

Participante 5: É, os dois importam, não dá para tipo, pegar uma e deixar a outra, porque é o processo para levar a alguma coisa. Então, o resultado importa, mas também o processo importa, porque eu preciso do processo pra chegar a essa alguma coisa. Acho que os dois importam da mesma forma.

Pesquisadores: O processo que o participante 3 trouxe, que é baseado nisso aqui [demonstração escrita no quadro], você já tá afirmando que $0 \times 1 = 0$.

Participante 3: É, tem que partir de algumas hipóteses aí ou conjecturas que já são, algumas proposições aí verdadeiras.

Pesquisadores: Mas é verdadeiro que $0 \times 1 = 0$? Por que é verdadeiro? Antes de você responder, só vou falar a dinâmica do processo dessa metodologia: não é dar resposta, mas é gerar sempre questões pra gerar contradições, é fazer você entrar em contradição sempre com as suas ideias, até para você fortalecer as ideias que você tem ou até modificar uma ideia, talvez, que fosse um pouco mais palatável ou forte, ah, sei lá, o argumento que a gente pode tá usando.

Participante 3: Aí dá para fazer de forma algébrica também

Pesquisadores: Eu tô dizendo que a forma algébrica que você tá fazendo, você tá admitindo uma coisa que é, por enquanto, inexplicável. Eu posso entender que $2 \times 0 = 0 + 0 = 0$; agora, 0×2, como vou somar 2? Sei lá!

Participante 3: Aí a gente podia usar a distributividade de novo, mais um, zero, mais um, menos um, supõe que você não sabe o que é 0×2, faz a distributividade, você vai ter 2×1.

Participante 5: 2 vezes 2, né?

Participante 5: Meu Deus, não tem fim.

Pesquisadores: É infinito, né?

Participante 5: Você pensa uma coisa e precisa de outra.

Pesquisadores: O professor Otte sempre fala que a matemática tem um problema, que ela não consegue dar explicações no sentido desejado.

Participante 4: O que eu mais achei interessante é que, quando a gente vai explicar isso aí é para o sétimo ano, então nem aprende essa distributiva e essas coisas. Então, seguir por esse caminho é bem mais fácil, porque senão eles vão ter muito mais dúvida, se não vai entender.

Pesquisadores: Talvez aqui ele pode entender até mesmo como se fosse um jogo que ele precisa seguir a regra, mas tem hora que a regra não dá conta, né? Tem problemas na regra e tal...

Pesquisadores: Aí vocês podem escrever isso na folha, o que vocês descobriram, se teve alguma contradição...

[pausa]

Participante 3: Dá para fazer sem usar o zero. Se você fizer $1 \times 1 = 1$, aí você não precisa usar o zero.

Pesquisadores: Mas aí não seria mais uma questão de simetria.

Participante 3: Não, daria da mesma forma.

Pesquisadores: Com base no próprio 1?

Participante 3: Com o próprio 1, eu usei o zero ali porque ele é mais direto, mas dá para fazer com qualquer outro número. O 1 é o $2 + (-1)$.

Pesquisadores: Ah, tá! Você está tentando essa parte algébrica. Pensei que você estava pensando nas transformações.

Participante 3: Ah, eu esqueço um pouco que vocês não estão interessados na álgebra.

Pesquisadores: Não, estamos. É interessante esse pensamento algébrico nosso, e pensar que precisamos dar alguma explicação para os nossos alunos da educação básica, em especial. Fazer um Experimento, você está construindo de certa forma também um argumento algébrico. Isso aqui [se referindo a $(+1) \times (-1)$] $objeto \times fator = objeto$, só que não nasce da álgebra por ela mesma, nasce da experimentação do processo geométrico, que há um simétrico de um valor em relação a um eixo de simetria. Tem como argumentar o porquê constituímos essa forma algébrica, ela não nasceu assim do nada.

Pesquisadores: É uma coisa não fixa, não imposta, você tem a liberdade de escolher objeto e fator. E pela sua liberdade de escolha, você vai constituir o seu pensamento estrutural ou algébrico estrutural, que veio da intuição. Muito importante vocês terem isso em mente.

Pesquisadores: E pensando nessa forma do Experimento, podemos fazer mais algumas multiplicações. Vou colocar uma aqui no quadro como exemplo [escrita no quadro de $(+3) \times (-2)$].

Pesquisadores: Esse exemplo aí é para vocês tentarem construir por meio do Experimento.

Participante 3: Outro?

Pesquisadores: Nada algébrico assim, nada contra!

Participante 4: Primeira coisa que veio na minha cabeça é que o -2 é o objeto e a gente vai aplicar esse valor três vezes.-2, vou tirar 2 e 2 de novo, vai ficar -6.

Pesquisadores: Usar o 3 como fator.

Pesquisadores: Até então nossos fatores são 1 e -1.

Participante 4: Dessa forma que eu pensei, o -2 é objeto, aí o fator é o 3, que vai aplicar o -2 três vezes. Eu acho que é isso, eu acho!

Pesquisadores: Uma ideia.

Participante 5: Tô tentando pensar nesse caso de, por exemplo, $+1$ mantém seu objeto e o -1 inverte seu objeto. Aí eu tô tentando pensar o -2. Por exemplo, vamos colocar ele como fator, é porque eu não sei qual eu vou estabelecer como fator e objeto. Tô tentando estabelecer esse processo primeiro. Se a gente pensar $(-1) \times (+1)$, o -1 como objeto, então o $+3$ vai ser o nosso fator e vai ter que mexer com esse objeto de acordo com esse $+3$. Então eu vou manter o -2 três vezes, porque o $+1$ ele mantém aquele valor, mas ele mantém uma vez porque ele é um. Ali no caso eu vou manter aquele valor três vezes, porque ele é três. Ele manteria o -2 três vezes. Então eu vou manter o -2 uma vez, manter de novo e manter de novo, fica $-2-2-2$, -6.

Pesquisadores: Consegue representar isso na reta?

Participante 5: Não sei. Teríamos que partir do zero, que seria o nosso início, e mantê-lo três vezes, meio que somar esses três pedaços, essas três partes de -2.

Participantes 1 e 2: Acabamos pensando na mesma coisa, de só falar que o -2, pensar no 2 como objeto, -2 como objeto e o -1 como fator ainda. Aí o $+2$ como objeto, -1 como fator que vai ter esse -2, que é o objeto.

Participante 5: Abrir o -2 em 2 e -1?

Participante 1: É, já que o fator seria $+(-1)$ a gente pensou em escrever o -2 como sendo duas vezes o -1.

Participante 5: Teria que fazer primeiro o processo, né? $2 \times (-1)$ estão criando o -2, -1 é o fator. Disso aí, como o -1 inverte o nosso objeto, teríamos o -2.

Participante 3: Aí no caso o $+2$ seria o fator e o -1 o objeto?

Participante 1: Não, o fator seria o -1.

Participante 3: Uai, gente!

Participante 5: É, porque os dois é objeto. Porque ele é uma coisa nova, né? O fator a gente já sabe como que usa ele.

Pesquisadores: O 2 seria o objeto e o -1 o fator, né?

Participante 1: Que aí resultaria no simétrico do $+2$.

Pesquisadores: E aonde entra o 3 nessa história?

Participante 1: $(+3)(+2)(-1)$, como o 3 e o 2 seriam objetos, eu iria multiplicar os dois. E o fator eu saberia que é o simétrico do objeto.

Pesquisadores: Então você está trazendo uma nova situação, o encontro de dois objetos pode ser multiplicado, é isso?

Participante 1: Sim, porque os dois seriam positivos e eu acho que conheceria, né?

Pesquisadores: Ah, tá! Entendi. Então, se eu tenho objeto 3, objeto 2, como posso operar os dois objetos, então dá o objeto 6, aplicado ao fator -1, -6.

Participante 4: É uma boa forma, hein?

Participante 3: Então você vai multiplicar o objeto com o objeto?

Participante 5: Não faz sentido.

Participante 3: É, não faz mesmo não.

Participante 5: Porque algum deles tem que permanecer para o outro fazer o processo dele. Se objeto e objeto ficarem ali, quem vai fazer o que?

Pesquisadores: Tem uma contradição aí, ou precisamos entrar em um consenso ou não.

Participante 3: Outra coisa que eu acho que ficou incoerente é que a gente mostrou que o -1 multiplicado por $+1$, ele dá o simétrico do $+1$, porém a gente...

Pesquisadores: Não, -1 multiplicado por $+1$ é o simétrico de -1 em relação ao fator de simetria. Se o fator de simetria é o $+1$, todo ponto é simétrico a si mesmo.

Participante 3: Sim, mas...

Pesquisadores: Quando que um ponto pode ser simétrico do outro? Quando ele é aplicado ao fator $+1$. A menos que se constitua um novo processo, temos um novo Experimento.

Participante 4: -2 é um fator, que além de pegar o simétrico, ele dobra o número também. Ele é um fator que faz as duas coisas.

Pesquisadores: Como é um novo Experimento, você pode pensar em novas possibilidades. Você pode pensar, por exemplo, em um termo de dilatação.

Participante 5: É, que ele vai dobrar seu objeto.

Pesquisadores: É, dobrar, triplicar... Porque pega um pouco do que você falou, participante 1. O que você falou tá ótimo, você falou que o $+2$ é objeto e -1 é fator, para explicar o -2. Aí, esse $+3$ nesse processo funcionaria como o que?

Participante 1: Objeto.

Pesquisadores: Não, como a minha fonte de dilatação.

Participante 1: Ah, tá! Ou a gente poderia pensar assim: já que o -2 seria o meu fator, antes de tudo, lá no início $(+3) \times (-2)$, se eu coloco que o 3 é o meu objeto e o -2 é o meu fator.

Pesquisadores: Fator de dilatação?

Participante 1: Não, fator normal. Tô pensando na primeira forma, antes de chegar em que que você falou. A única coisa que eu tinha feito era pegar o -2 e escrever $(+2) \times (-1)$, com o $+2$ sendo meu objeto e o -1 sendo o meu fator. Já que vocês estão criando caso com a minha teoria, e se eu escrever o $+3$ também como sendo 3 vezes 1, e aí o 3 seria o meu objeto e o 1 seria o meu fator. Pelo menos eu já teria dois fatores e dois objetos, aí eu poderia multiplicar objeto com objeto e fator com fator, aí vai dar o mesmo resultado. Pelo menos tô criando uma ordenzinha dos dois.

Pesquisadores: Talvez você possa chamar o -2 de fator, e esse fator aqui ele é duplo. Ele vai ser um fator de dilatação e um fator de simetria. Nesse caso você pode pensar em $(+3) \times (-1) \times (2)$.

Participante 3: Aí você criou uma coisa nova.

Pesquisadores: É, o 3 continua sendo o objeto, o -1 o fator de simetria e o 2 o fator dilatador.

Participante 4: Agora, coloca $(-2) \times (-3)$ aí.

Pesquisadores: Ah, gostei disso, hein? Olha, $(-2) \times (-1) \times (3)$, o objeto é -2, fator de simetria -1 e o fator dilatador é o 3.

Participante 4: Desse jeito já resolve todos os problemas de multiplicação, né? Eu acho.

Participante 3: Aplica o processo de indução [risos].

Pesquisadores: O fator dilatador seria o fator de homotetia, estamos usando duas transformações: a simetria seguida de uma homotetia. Eu achei essa ideia legal, mas existem outras que podem ser construídas. Esse é o ponto que chamamos de Compreensão.

Pesquisadores: Isso, a gente criou um novo Experimento, um novo processo na característica Comparação.

Pesquisadores: Agora precisamos fazer mais de uma transformação. Vamos fazer duas transformações: a simetria e o fator dilatador. Agora, detalhe, nesse caso o fator dilatador tem duas situações. Coloca lá [no quadro] o $(-4) \times (+4)$ como exemplo. Nesse caso, da onde estamos extraindo o fator de simetria? É o do fator dilatador, né? Que hora é objeto e hora é fator.

Participante 3: Ficou meio confuso o que é dilatador e o que é fator.

Pesquisadores: O objeto sempre vai ser o primeiro, vamos combinar assim? O que queremos mostrar para vocês é que o desenvolvimento do conhecimento matemático ele não é fixo, mas é de uma ação de combinados. Depende desse combinado que você faz. Isso tudo tem um fundamento de você pensar a matemática como função social, das relações humanas da matemática. A metodologia não é neutra, tem fundamento no materialismo dialético, que trabalha nesse contexto de que as coisas são sempre negociadas. O processo de conhecimento é sempre negociado porque nenhuma representação que fazemos das coisas mostra sua essência. Se nenhuma mostra a essência, por que trabalhar com as representações? Porque não temos acesso a essa coisa. Algumas características e algumas situações desse objeto a gente vai conseguir perceber, outro a gente vai precisar construir e chegar em consenso. É assim que desenvolve conhecimento. Ora, o átomo não era divisível até pouco tempo, não é isso? Não que dizer que o conhecimento matemático é definitivo, ele não é uma verdade absoluto, é uma construção de ideias. Não existe uma regra única para te dar a resposta, o que existe é o processo que você vai construindo para te dar as respostas. E vai chegar em um determinado momento que você não vai precisar do processo, você vai direto porque pensando no processo desenvolvido eu já cheguei no resultado. É isso que queremos pensar, melhor do que ficar decorando as coisas, você parar com os seus alunos para pensar e formar um processo que seja coerente. Mas todo processo coerente tem incoerência nele também. Essa metodologia quer trabalhar as incoerências do processo, uma hora fator de simetria, outra de dilatação, é bom que seja, senão você acha que sempre as coisas vão funcionar direitinho.

[pausa para fazer o outro Experimento em seguida].

NOTAS DE FIM

[1] Mathematics is the study of what is true of hypothetical states of things. That is its essence and definition.

[2] Mathematics is the study of what is true of hypothetical states of things.

[3] [...] the collective total of all that is in any way or in any sense present to the mind, quite regardless of whether it orresponds to any real thing or not.

[4] Disponível em: http://www.oqueeoquee.com/wp-content/uploads/2013/07/calice-ou-rostos.jpg. Acesso em 16 maio de 2023.

[5] A crisis induced by the failure of expectation and followed by revolution is at the heart of the thought-experimental situations we have been examining. Conversely, thought experiment is one of the essential analytic tools which are deployed during crisis and which then help to promote basic conceptual reform.

[6] I was sitting in a chair in my patent office in Bern. Suddenly a thought struck me: if a man falls freely, he would not feel his weight. I was taken aback. The simple thought experiment made a deep impression on me. It was what led me to the theory of gravity.

[7] Disponível em: http://www.astro.iag.usp.br/~ronaldo/intrcosm/Glossario/PrincEquiv.html. Acesso em 28 maio 2023.

[8] Need we add that mathematicians themselves are not infallible?

[9] L'erreur n'est pas seulement l'effet de l'ignorance, de l'incertitude, du hasard que l'on croit dans les théories empiristes ou behavioristes de l'apprentissage, mais l'effet d'une connaissance antérieure, qui avait son intérêt, ses succès, mais qui, maintenant, se révèle fausse, ou simplement inadaptée. Les erreurs de ce type ne sont pas erratiques et imprévisibles, elles sont constituées en obstacles. Aussi bien dans le fonctionnement du maître que dans celui de l'élève, l'erreur est constitutive du sens de la connaissance acquise.

[10]... parts of a system of concepts, ways of thinking and beliefs and therefore they could not be removed or changed without injuring the whole system. [...] they were linked with beliefs about what knowledge is and what makes it valid.

[11] Organiser le franchissement d'un obstacle consistera à proposer une situation susceptible d'évoluer et de faire évoluer l'élève selon une dialectique convenable. Il s'agira, non pas de communiquer les informations qu'on veut enseigner, mais de trouver une situation dans laquelle elles sont les seules à être satisfaisantes ou optimales — parmi celles auxquelles elles s'opposent — pour obtenir un résultat dans lequel l'élève s'est investi.

[12] Obstacles of really epistemological origin are those from which one neither can nor should escape, because of their formative rôle in the knowledge being sought. They can he found in the history of the concepts themselves. This doesn't mean that we must amplify their effect or reproduce in the school context the historical conditions under which they were vanquished.