UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

Pós-Graduação em Educação Matemática

Mestrado Profissional em Educação Matemática

Janaína Lamas Santiago

Uma proposta de ensino de frações por meio de cálculos de segmentos:
desvendando o objeto por meio dos Experimentos Mentais

Juiz de Fora (MG)

Dezembro, 2024

Janaína Lamas Santiago

Uma proposta de ensino de frações por meio de cálculos de segmentos:

desvendando o objeto por meio dos Experimentos Mentais

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Orientador(a): Prof. Dr. Willian José da Cruz

Juiz de Fora (MG)

Dezembro, 2024

Janaína Lamas Santiago

Uma proposta de ensino de frações por meio de cálculos de segmentos: desvendando o objeto por meio dos Experimentos Mentais.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestra em Educação Matemática. Área de concentração: Educação Matemática.

Aprovada em 20 de dezembro de 2024.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Willian José da Cruz - Orientador

Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Arthur Belford Powell - Membro externo

Rutgers University

Prof. Dr. Adlai Ralph Detoni - Membro interno

Universidade Federal de Juiz de Fora

Juiz de Fora, 12/12/2024.

Documento assinado eletronicamente por **Arthur Belford Powell**, **Usuário Externo**, em 18/02/2025, às 17:01, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Willian Jose da Cruz**, **Coordenador(a) em exercício**, em 19/02/2025, às 07:23, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Adlai Ralph Detoni**, **Usuário Externo**, em 21/02/2025, às 12:17, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf (www2.ufjf.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **2155792** e o código CRC **8DE800F1**.

Ficha catalográfica elaborada através do programa de geração
automática da Biblioteca Universitária da UFJF,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Santiago, Janaína Lamas.
Uma proposta de ensino de frações por meio de cálculos de segmentos : desvendando o objeto por meio dos Experimentos Mentais / Janaína Lamas Santiago. -- 2024.
51 p.

Orientador: Willian José da Cruz
Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, 2024.

1. Frações. 2. Geometria. 3. Experimentos Mentais. 4. Semiótica. 5. Complementaridade. I. Cruz, Willian José da, orient. II. Título.

Dedico esta conquista à minha família, que sempre acreditou em mim e me deu suporte para que eu continuasse nesta jornada. Ao meu esposo pela paciência e apoio, aos amigos que estiveram ao meu lado, em especial a Leíse que por muito tempo segurou minha mão e não me deixou desistir. Por fim, ao meu orientador, cujo apoio e conhecimento foi fundamental para a conclusão deste trabalho.

RESUMO

Este texto faz parte do requisito básico para a defesa no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, ensejando a obtenção do grau de Mestre. A questão que baliza esse trabalho é: quais relações podem ser desenvolvidas no contraste entre o formal e o intuitivo no estudo das operações com frações no âmbito da educação básica? Os objetivos traçados para responder à questão de pesquisa são: i) entender as diferentes formas de conceituar frações no âmbito da educação básica; ii) fazer um paralelo entre os aspectos formais e intuitivos que estão presentes nos processos operatórios das frações; iii) desenvolver experimentos mentais que permitam uma melhor compreensão do tema proposto na pesquisa; iv) registrar as diferentes formas interpretativas e os significados produzidos na aplicação de tais experimentos na educação básica como uma metodologia alternativa de ensino. Na busca de alcançar tais objetivos, apresenta-se uma pesquisa qualitativa de caráter bibliográfico e explicativa, pertencente à linha de pesquisa Ensino e Aprendizagem com base nos estudos que buscam construir uma relação entre a Matemática e a linguagem, por meio da semiótica de Peirce, e adotando o princípio da complementaridade aplicado aos estudos semióticos, didáticos, históricos e epistemológicos da Matemática e ao desenvolvimento dos processos de experimentação mental. A partir dos estudos, elaboramos uma proposta didática para o ensino do conteúdo de fração, na qual utiliza-se os Experimentos Mentais como uma metodologia de ensino. A aplicação dessa metodologia alternativa de ensino para Matemática efetuou-se na realização das operações básicas com frações, por meio de segmentos, utilizando a geometria euclidiana como sistema de representação.

Palavras-Chave: Frações. Geometria. Experimentos Mentais. Semiótica. Complementaridade.

ABSTRACT

This text is part of the basic requirement for the defense in the Graduate Program in Mathematics Education, aiming to obtain the Master's degree. The central question of this work is: what relationships can be developed in the contrast between the formal and the intuitive in the study of operations with fractions in basic education? The objectives outlined to answer the research question are: i) to understand the different ways of conceptualizing fractions within basic education; ii) to draw a parallel between the formal and intuitive aspects present in the operational process of fractions; iii) to develop mental experiments that allow a better understanding of the proposed theme in the research; iv) to record the different interpretative forms and meanings produced during the application of these experiments in basic education as an alternative teaching methodology. In seeking to achieve these objectives, this study presents a qualitative, bibliographic, and explanatory research, belonging to the research line of Teaching and Learning, based on studies that aim to build a relationship between Mathematics and language through Peirce's semiotics, and adopting the principle of complementarity applied to semiotic, didactic, historical, and epistemological studies of Mathematics and the development of mental experimentation processes. Based on these studies, a didactic proposal for teaching fractions is developed, which uses Mental Experiments as a teaching methodology. The application of this alternative teaching methodology for Mathematics was carried out in the basic operations with fractions, using segments and employing Euclidean geometry as a system of representation.

Keys words: Fractions. Geometry. Mental Experiments. Semiotcs. Complementarity.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Esse trabalho apresenta uma pesquisa qualitativa de caráter bibliográfico e explicativo, pertencente à linha de pesquisa Ensino e Aprendizagem, baseada nos estudos da relação entre a Matemática e a linguagem, adotando o princípio da complementaridade entre os estudos semióticos, didáticos, históricos e epistemológicos da Matemática e o desenvolvimento dos processos de experimentação mental.

Segundo Severino, a pesquisa bibliográfica é feita "a partir dos registros disponíveis, decorrentes de pesquisas anteriores em documentos impressos como livros, artigos, teses etc." (2007, p.122), e a pesquisa explicativa tem como caráter analisar e registrar os fenômenos estudados com o intuito de identificar as suas causas, seja por meio da aplicação do método experimental, ou da interpretação possibilitada pelos métodos qualitativos.

A questão de investigação que conduziu esse trabalho foi: quais relações podem ser desenvolvidas no contraste entre o formal e o intuitivo no estudo das operações com frações no âmbito da educação básica?

Para tentar responder a essa questão de pesquisa, foram traçados, inicialmente, os seguintes objetivos.

i) Entender as diferentes formas de conceituar frações no âmbito da educação básica.

ii) Fazer um paralelo entre os aspectos formais e intuitivos que estão presentes nos processos operatórios das frações.

iii) Desenvolver experimentos mentais que permitam uma melhor compreensão do tema proposto na pesquisa.

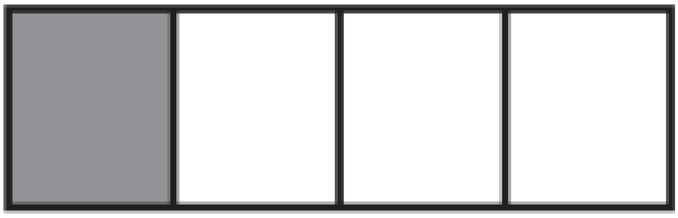
iv) Registrar as diferentes formas interpretativas e os significados produzidos na aplicação de tais experimentos na educação básica.

Essa investigação foi motivada pelo incômodo da percepção que se tem do ensino de frações, muitas vezes carregado pelo excesso de fórmulas ou regras e poucas vezes apresentando (ou até mesmo sustentando) uma relação contextual na qual possa ser desenvolvida compreensões acerca dos resultados dessas operações

A prática que se tem hoje em dia no ensino de Matemática, mostra que o professor utiliza representações para explicar, relacionar e apresentar propriedades e conceitos. Essas representações podem ser dadas de várias formas, como, por exemplo, em forma de esquema, desenho, tabela, gráfico, entre outros. E com o objeto matemático chamado fração não é diferente.

Para iniciar o conceito de fração o professor geralmente coloca como exemplo (simbólico) uma barra de chocolate dividida em 4 partes iguais em que uma dessas partes foi comida. Essa parte, ele denomina de fração da barra e a representa pelo ícone indicado na figura 1.

Figura 1: Fração de uma barra de chocolate



Fonte: Elaborada pela autora em 2019 no CorelDraw.

Em seguida, o professor utiliza a representação apresentada na figura 2 para indicar que esta fração representa um quarto de toda barra considerada anteriormente. Porém, cabe destacar que essa representação também poderia ser considerada três quarto da barra, que é o que sobrou da barra.

Figura 2 – Representação de uma fração

$$\frac{1}{4}$$

Fonte: Elaborada pela autora (2019).

Em relação a representação da figura 2, o professor explica que: a parte acima do traço, denominada numerador, representa a quantidade colorida ou a quantidade de partes da barra que se comeu, e a parte abaixo chama-se denominador e representa em quantas partes o inteiro, ou a barra de chocolate foi dividida.

Esta fração (figura 2) pode ser tratada como um número racional e desta forma, deixa de considerar a representação (figura 1) em forma de diagrama. Assim, na dinâmica do ensino e nos livros didáticos, o que mais se encontra é a apresentação dos métodos e/ou regras para determinar a soma, a subtração, a multiplicação e a divisão de frações, utilizando a fração como um número racional.

Cruz (2018b) considera que as coisas no mundo são essencialmente de dois tipos: objetos e símbolos, sendo que os “objetos possuem existência bem determinada, mas não têm sentido, os símbolos (signo) têm sentido, mas não têm existência própria” (Cruz, 2018b, p.21). Portanto, se apenas temos o conceito simbólico de fração (sem alguma referência explicitada ou considerada), não conseguimos criar um significado para tais objetos matemáticos, para além de algumas relações operatórias. Logo, talvez o estudante possa não compreender o que é fração.

Lins (2004) argumenta que, para os matemáticos, um objeto é definido de acordo com o seu interesse de estudo ou da forma que possa ajudar a estabelecer novas relações que esclareçam ou resolvam os problemas já postos, não cabendo uma discussão se esta definição corresponde bem ou não a algo fora da própria Matemática, na qual ele denominou *internalismo*. Esse mesmo autor continua argumentando que os objetos Matemáticos são *simbólicos*, pois quando se faz a definição, por exemplo, de grupo, não estamos preocupados com os elementos que pertencem a esse conjunto, mas sim com as propriedades. Assim, juntas, estas duas características "dão conta de muito do que se quer dizer quando se diz, ainda que informalmente, que a Matemática do matemático é 'teórica' ou 'abstrata' e de que, em sua des-familiaridade para o homem da rua, põe em movimento o processo de estranhamento." (Lins, 2004, p.96).

Dessa forma, Lins (2004) faz uma associação da Matemática com um monstro, o monstro que paralisa por não sabermos como funciona, de não sabermos o que é. Lins (2004) propõe a quebra dessa barreira, por meio de sete teses, sendo que em uma delas, o autor aborda a necessidade de aproximar o estudante do monstro, ou seja, que este passe a "conhecer" esse monstro.

Portanto, há necessidade de aproximar o estudante do objeto fração e de criar um contexto. Cruz (2018a), explica que:

> Dependendo do contexto, dá-se ao conceito uma formulação diferente, ou seja, a ideia é uma maneira diferente de enxergar e aplicar os conceitos. Peirce dizia que o signo é alguma coisa que representa algo para alguém. Nesse contexto, tem-se que o interpretante (ideia) é sempre uma nova representação. O que acontece no futuro está no interpretante, portanto não há a necessidade que o interpretante exista; é sempre uma possibilidade. (p.109).

Se a representação posta por esse conceito estiver em um sistema bem definido, é possível que por meio de experimentações faça-se revelações sobre o objeto e consequentemente aprende mais sobre ele.

Assim, em busca de alcançar os objetivos propostos, apresenta-se nesse texto, no capitulo 2, uma seção abordando as diferentes formas de representar uma fração e os significados produzidos pelos diferentes contextos utilizados em sala de aula, e uma outra seção, contendo os possíveis obstáculos epistemológicos criados pelos contextos produzidos ao abordar frações.

Com a finalidade de compreender como a representação se relaciona com o seu objeto, por intermédio de um interpretante, o capítulo 3 abordará a semiótica, sua história e a perspectiva semiótica de Peirce, que vai permitir buscar explicações sobre o que é signo, ícone, índice, símbolo, processo dedutivo, abdutivo e indutivo. E ainda trazer explicações sobre os diagramas e os Experimentos Mentais.

Além desses dois capítulos, no capítulo 4 abordar-se-á os Experimentos Mentais como uma nova metodologia de ensino, além de abordar as diferentes formas de complementaridade e apresentar um Experimento Mental como uma proposta didática para o ensino fração.

2 FRAÇÕES

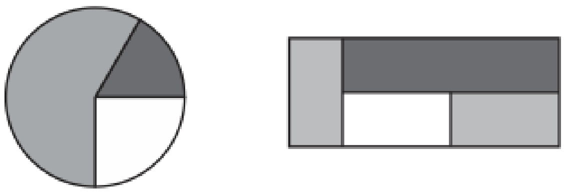
Na prática escolar, tem-se conhecimento de que os professores se utilizam de alguns exemplos para contextualizar o objeto fração. No entanto, essa contextualização vai se perdendo ao longo do percurso, restando apenas um conjunto de regras que são utilizadas para ensinar as operações com frações.

Nas duas seções que compõem esse capítulo, será abordado a significação produzida para a fração com a utilização desses contextos e os possíveis obstáculos epistemológicos ocasionados por eles.

2.1 Modelos e constructos de frações

As frações, segundo Van de Walle, Karp e Bay-Williams (2013, p. 292), podem ser representadas por meio de três modelos, a destacar: área, reta numérica ou segmentos e conjuntos. Ao ser representada por um modelo de área, o todo é a área total da região e as partes são áreas de mesma medida. Assim, nesse modelo, a fração é a relação entre a parte da área coberta e a área total. Observe na figura 3 dois exemplos de modelos de áreas.

Figura 3: Exemplos de modelo de área



Fonte: Elaborada pela autora em 2022 no CorelDraw.

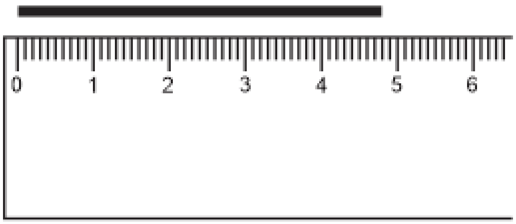
Na figura circular, tem-se $\frac{3}{4}$ do círculo destacado de cinza e no retângulo, $\frac{3}{5}$. Para trabalhar com esses modelos em sala de aula é interessante que as partes sejam manipuláveis, pois assim o estudante terá a possibilidade de verificar quando uma peça tem a mesma área da outra, ou quantas peças são necessárias para se obter outra área (Van de Walle; Karp; Bay-Williams, 2013). Por exemplo, na figura retangular, o retângulo cinza claro é a metade do cinza escuro, pois cabem dois retângulos cinza claro no cinza escuro, mas na figura circular essa relação não é tão óbvia, faz-se necessário mais uma partição[1], para poder compreender quantas vezes a parte cinza escuro cabe na parte cinza claro.

Já o modelo comprimento ou reta numérica está associado a um comprimento ou a uma distância. assim, o todo é dado pela unidade do comprimento ou da distância. A parte

[1] Partição: dividir em partes.

corresponde a comprimentos ou distâncias iguais. Logo, a fração representa o comprimento do que se quer medir em relação a unidade convencionada ou a distância de um ponto em relação ao ponto considerado a origem. Observe a figura 4.

Figura 4: Exemplo de modelo de comprimento.

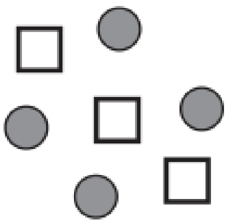


Fonte: Elaborada pela autora em 2022 no CorelDraw.

Nessa figura, a régua está dividida em centímetros e em milímetros. Assim, se a unidade tomada como referência é o centímetro, o segmento representado acima da régua mede $\frac{48}{10}$ do centímetro, agora se a unidade for o milímetro, o segmento mede 48 milímetros. Nesse exemplo, foi apresentado um segmento, mas poderia ter sido dois pontos. Se esse fosse o caso, a medida estaria relacionando a distância entre esses dois pontos, o que ainda, assim, faria necessário a escolha de uma unidade de medida. Já no caso de uma reta numérica, não há uma nomenclatura para unidade, mas há a convenção de uma unidade, na qual é nomeada de um, ou seja, de 0 à 1 tem-se uma unidade e entre 0 e 1 tem-se partes dessa unidade, ou seja, frações da unidade convencionada.

A fração ao ser representada como um conjunto, o todo passa a ser a quantidade de elementos do conjunto e a parte números iguais de objetos. Assim, a fração representa a quantidade do subconjunto relacionada com o todo. Na figura 5, é possível observar um exemplo de um modelo de conjunto.

Figura 5: Exemplo de modelo de conjunto.



Fonte: Elaborada pela autora em 2022 no CorelDraw.

Nesse conjunto $\frac{3}{7}$ são quadrados e $\frac{4}{7}$ são círculos e a relação entre quadrados e círculos é de $\frac{3}{4}$.

Além dos modelos, há também os significados gerados pelos contextos em que as frações são empregadas, na qual Kieren considera ter cinco majoritários. Berh, Lesh, Post e Silver (1983) chamam esses significados de constructos e concluem que são os mesmos cinco significados que Kieren considera majoritário: razão, quociente, operador, medida e parte todo.

A fração como razão é utilizada como sendo a parte de uma parte, como por exemplo, dizer que para cada 2 pastilhas de um produto deve-se acrescentar 3 xícaras de água, ou seja, a razão entre a quantidade de pastilhas do produto e a quantidade de água é de $\frac{2}{3}$.

A fração também pode ser utilizada para representar um quociente, ou seja, uma divisão. Afinal, $\frac{2}{3}$ é equivalente a $2 \div 3$ e ambos são equivalentes a 0,66666.... Assim, ao dividir igualmente dez balas para duas crianças, é possível representar a quantidade de bala que cada criança irá receber pela fração $\frac{10}{2}$.

Já a fração como operador indica uma transformação e geralmente pode ser vista no campo da álgebra (Berh; Lesh; Post; Silver, 1983). Um exemplo da fração como operador é quando se realiza a redução em $\frac{2}{3}$ de uma figura, pois as medidas unidimensionais dessa figura terão $\frac{2}{3}$ das medidas unidimensionais da figura original, ou seja, realiza-se a operação de $\frac{2}{3}$ da medida unidimensional da figura original para obter-se a medida unidimensional da figura reduzida.

A interpretação como parte e todo de um número racional depende diretamente da habilidade de particionar quantidades contínuas ou conjuntos discretos de objetos em parte iguais (Berh; Lesh; Post; Silver, 1983). Interpretação que muitas vezes é utilizada para introduzir o conceito de fração na escola.

Apesar dessa interpretação ser a mais utilizada em sala de aula, não foi partindo desse constructo[2] que surgiu a ideia de fração, e sim, com a ideia de medidas, o que ficará claro nos parágrafos seguintes.

Os números racionais surgiram com o advento da agricultura nas civilizações situadas nas regiões dos rios Nilo e Eufrates, como por exemplo, na civilização Egípcia (Powell, 2019). Esses números surgiram a partir da necessidade de medir terrenos, colheitas, sementes, e registrá-las para as classes dominantes coletar impostos (Clawson, 1994/2003; Stuik,

[2] Constructo: significados gerados pelos contextos em que as frações são empregadas.

1948/1967 apud Powell, 2019). “Para medir as distâncias da terra, os antigos agrimensores egípcios esticaram cordas nas quais o comprimento entre dois nós representava uma unidade de medida.” (Powell, 2019, p. 703). Então, bastava esticar uma corda em uma das dimensões do terreno e contar a quantidade de nós, e é essa quantidade que representava a medida do comprimento do terreno. Entretanto, o comprimento do terreno nem sempre era múltiplo da unidade de medida, logo, se fez necessário subdividir, o pedaço de corda entre dois nós, em “n” partes iguais, na qual essa parte, matematicamente, pode ser representada pelo símbolo $\frac{1}{\mathrm{n}}$. Assim, se o comprimento tiver “m” subunidades, então a medida do comprimento desse terreno será de $\mathrm{m}\cdot\frac{1}{\mathrm{n}}=\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}$.

Portanto, o constructo medida está associado em subdividir a unidade em partes e saber quantas subpartes da unidade tem ao longo do que se quer medir. Enquanto, o constructo parte todo está associado a definição formalista de fração, conforme será apresentado nos próximos parágrafos.

Os números racionais, apesar de não terem surgido no início do século XX, tiveram sua definição formulada sob a influência do formalismo, corrente filosófica que influenciou muitos matemáticos da época. Os matemáticos, que seguem essa corrente filosófica, acreditam que a matemática pode ser construída por meio de regras e manipulações de fórmula, sem buscar qualquer referência ao significado ou a contextos práticos (Powell, 2019).

A partir das ideias formalistas, a definição de números racionais foi formulada para atender às mesmas leis que orientam as operações dos números naturais, para então, poder receber a nomenclatura de número (Courant; Robbins, 2000), ou seja, as operações dos números racionais devem respeitar as leis da comutatividade e da associatividade tanto para a adição quanto para a multiplicação e, também, deve respeitar a lei da distributividade. Segundo Courant e Robins, essas regras “são estabelecidas por nossa própria definição, e não nos são impostas por outras necessidades que não seja as de consistência e utilidade para aplicações” (2000, p. 64).

A partir disso, os números racionais foram definidos como sendo uma razão ou um quociente de dois números inteiros, $\frac{a}{b}$, tal que a e b são inteiros e $b \neq 0$. Já as operações de adição e de multiplicação foram definidas respectivamente por $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+cb}{b\cdot d}$ e $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$, em que *a*, *b*, *c*, *d* são números inteiros e *b*, *d* diferentes de zero.

Como foi dito anteriormente, essa definição foi formulada com o intuito de atender apenas algumas leis, não retomando nenhum significado. Assim, essa concepção de fração pode deixar uma lacuna, apesar de ser importante, pois parte do conceito de fração é não numérica (Carraher, 1996). Contudo, ao fazer uma limitação pelo conceito matemático pode-se negligenciar o papel físico que a quantidade opera no significado do conceito de frações e consequentemente não explica a origem psicológica do conceito (Carraher, 1996). Entretanto, no ensino isso não ocorre, pois busca-se nos objetos do cotidiano, como, por exemplo, pizzas e chocolates, referências físicas de quantidades. Porém, essas referências ainda não podem ser suficientes para uma compreensão mais abrangente de frações.

2.2 Problemas no ensino

Os livros didáticos, bem como os professores, utilizam-se de contextos como pizzas e chocolates para abordar frações por fazer parte do cotidiano dos alunos, produzindo um significado de parte e todo para as frações. Ao utilizar esses contextos, os estudantes são levados a contar a quantidade de partes destacadas, utilizando o número cardinal obtido para representar no numerador e o total de elementos ou de partes que compõem o todo, no denominador. No entanto, alguns autores dissertam que este tipo de abordagem pode gerar alguns obstáculos epistemológicos, a destacar: a dificuldade que o estudante tem em compreender frações impróprias, pois eles não conseguem compreender como uma parte maior pode ser maior do que um todo, visto que, a eles são ensinados a associar frações à parte de um todo (Carraher, 1996). Outro obstáculo causado por esse tipo de abordagem, está associado ao fato de que os estudantes ignoram o significado proporcional embutido nas frações, pois a tarefa de contar induz os estudantes a se aterem aos números cardinais (Carraher, 1996).

Sobre esse último obstáculo, Powell (2019) explica que essa ênfase instrucional de abordar a fração, numerador e denominador, como sendo dois números distintos e o "símbolo bipartido" $\frac{a}{b}$ utilizado pela definição formalista, pode levar o estudante a concluir que $\frac{1}{3} < \frac{1}{4}$, pelo fato de 3 ser menor do que 4. Além disso, o estudante, também, pode concluir que para somar duas frações basta somar numerador com numerador e denominador com denominador, ou seja, $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1+1}{3+4} = \frac{2}{7}$. De acordo com Monteiro e Pinto "este erro é muito comum e persiste mesmo quando lhes é ensinado o algoritmo da adição" (2005, p. 90). Monteiro e Pinto (2005) acrescentam que nos números fracionários não é possível identificar o sucessor ou antecessor de um número como é feito nos números inteiros. Esses mesmos autores, também, apontam a dificuldade que os estudantes têm em compreender os resultados de multiplicação e divisão dos números, visto que, não é correto afirmar que, em uma multiplicação, o resultado sempre será maior do que os fatores e o resultado da divisão sempre será menor do que o dividendo, como ocorre com os números inteiros (Monteiro; Pinto, 2005).

Lamon (2001) afirma que o ensino de fração tem sido pautado em algoritmos de operações e regras que basicamente consistem em manipulações de expressões algébricas, mas falha em ajudar os estudantes a compreenderem os números racionais. Ou seja, saber operar com frações não significa que os conceitos subjacentes tenham sido compreendidos.

Lopes (2008) destaca que um problema grave relacionado ao ensino de fração é "a prescrição de regras e macetes para realizar operações" (p. 4). Além disso, ressalta que "a aprendizagem de fração não se dá com definições prontas, nomenclatura obsoleta e pseudo-problemas sobre pizzas e barras de chocolates. (p. 7)". Ou seja, operar só no formal é um problema e manter o ensino de fração utilizando pseudoproblemas, que são aqueles em que o contexto do problema é apenas uma roupagem para o que se quer calcular, deixam lacunas.

Portanto, é possível observar que representações que estimulem apenas a realização de contagens ou pseudoproblemas podem gerar algumas lacunas conceituais. E ao utilizar somente métodos formais para operar com frações, também, não é apropriado, pois saber operar não significa que os conceitos envolvidos foram compreendidos.

A partir disso, o intuito desse trabalho é apresentar uma proposta de ensino por meio do uso de Experimentos Mentais baseados em construções geométricas por meio das representações de segmentos. A base dos Experimentos Mentais está na consideração da Matemática como uma atividade semiótica, sob a perspectiva peirceana será apresentada no próximo capítulo.

3 A SEMIÓTICA

No capítulo anterior, foi possível observar as representações e os contextos criados com a finalidade de significar o objeto matemático fração e foi apresentado alguns problemas gerados por essas representações e pelos significados utilizados.

Com o intuito de compreender como uma representação se relaciona com o seu objeto por intermédio de um interpretante, será abordado nesse capítulo a semiótica que é a Ciência responsável por estudar essa relação.

Antes de entrar na perspectiva peirceana sobre a semiótica, será feita uma passagem sobre a história da semiótica com o intuito de compreender como foi a construção dessa Ciência.

3.1 História da semiótica

Platão no diálogo “Cratylus” discute a relação entre linguagem e ideias. Nesse diálogo, Hermógenes defende que os nomes e as linguagens são meramente convenções. Já Heráclito afirma que existe uma relação entre as coisas e seus nomes, acreditando, assim, que os nomes têm uma capacidade de mostrar a natureza da coisa. Sócrates, por sua vez, sustenta que existe uma semelhança entre a coisa e o nome e não uma identidade entre eles (Radford, 1998, p.277).

Em “Hiperurânio”, Platão escreve que os objetos matemáticos estão no campo das ideias e, assim, o que se vê na realidade são representações imperfeitas desses objetos. Ao agrupar as ideias de Platão, Pinilla; Iori; D’amore escrevem que os nomes, que também podem ser interpretados como signo linguístico,

> [...] são representações parciais incompletas, da verdadeira natureza das coisas e que o estudo dos nomes nada revela a respeito da natureza das coisas, uma vez que o mundo das ideias é nitidamente diferente e independente do mundo da experiência sensível e, portanto, de suas representações por meio de nomes.
>
> Os objetos ou conceitos matemáticos existem independentemente das atividades dos seres humanos, do tempo e da cultura, e não podem ser alcançados; somente podemos nos aproximar cada vez mais de tais objetos através de processos de conceituação (2015, p. 33).

Para Aristóteles, os objetos matemáticos não podem existir em um mundo separado e independente daqueles do mundo real, entretanto ele admite que esses objetos podem ser abstratos. Assim, para ele, os objetos matemáticos não são objetos concretos, mas identificados a partir de objetos concretos (Pinilla; Iori; D’Amore, 2015).

> Assim, diferentemente daquilo que sustenta Platão, os seres humanos têm, para Aristóteles, a possibilidade de acender aos objetos matemáticos, embora sejam objetos abstratos (Pinilla; Iori; D’Amore, 2015, p.35).

Na obra “De Interpretatione”, Aristóteles faz uma reflexão sobre a linguagem, mas se limita ao signo linguístico. Para ele os sons da voz são símbolos das afeições da alma e os signos escritos são símbolos dos sons da voz (Pinilla; Iori; D’Amore, 2015).

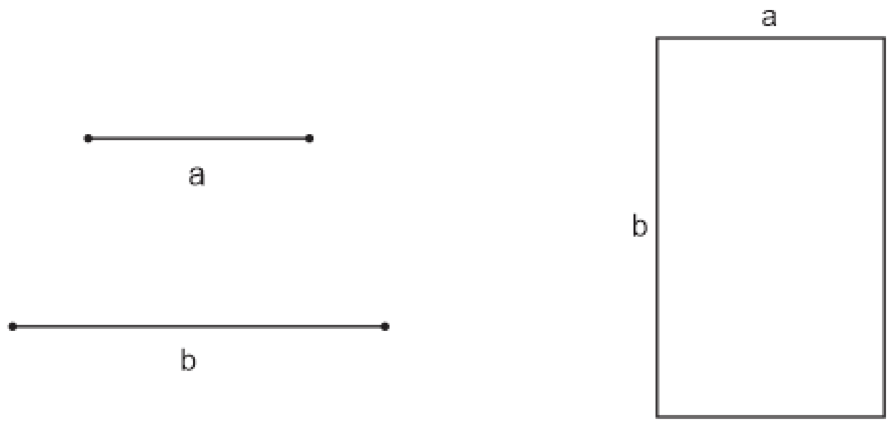
Traduzindo, “as afeições da alma são, para Aristóteles, imagens ou ícones das coisas, isto é, são ligadas às coisas por meio de uma relação (natural, não convencional) de semelhança” (Pinilla; Iori; D’Amore, 2015, p. 34). Já os sons da voz e as coisas não têm uma conexão direta, mas as afeições da alma e as coisas que elas representam são as mesmas para todos os seres humanos.

Os Estóicos, corrente filosófica criada por Zenão de Cítio, acreditavam que as coisas aconteciam por uma razão e que o ser humano interpretava os fenômenos naturais como um sinal de algo, sendo a linguagem responsável por estabelecer as relações e as conexões entre as coisas (Pinilla; Iori; D’Amore, 2015).

A escola Epicurista defendia que “a sensação produz uma imagem mental semelhante as coisas” (Pinilla; Iori; D’Amore, 2015, p. 40). Mas a sensação não permite reconhecer qualquer objeto, pois alguns dos objetos não são perceptíveis por meio dos sentidos e necessitam do uso de signos. Assim, é preciso obter um objeto conhecido para acessar um objeto que não é imediatamente acessível.

Na obra “Os Elementos de Euclides” é possível observar que as representações semióticas estão presentes por meio de uma gama de diagramas, os quais representam ideias ou formas como se fossem os próprios objetos. Valores numéricos passam a ser representados por segmentos, o produto de dois números, a e b, fica identificado pela área de um retângulo de lados a e b (figura 6) e assim em diante, temos uma matemática sendo construída por meio geométrico (Pinilla; Iori; D’Amore, 2015). Conforme representado na figura 6.

Figura 6: Produto entre dois números representados geometricamente.



Fonte: Elaborada pela autora em 2024 no CorelDraw.

Nos estudos de Agostinho de Hipona as teorias da linguagem e dos signos se fundem, pois a concepção de signo engloba também a palavra. Para ele, o signo está além do mundo sensível, pois faz com que na mente surja alguma coisa diferente (Pinilla; Iori; D'Amore, 2015). Além disso, ele acredita que o signo pode ser estabelecido ou expresso por meio de outros signos e que o objeto deve ser conhecido antes de ser representado por um signo.

Na Idade Média as definições de signo se aproximavam da definição utilizada por Agostinho de Hipona, porém há três vertentes: o realismo moderado, defendido por aqueles que concebiam o signo como aquilo que tem a capacidade de levar algo já conhecido a um conhecimento de algo oculto e existe uma correspondência natural ou convencional, não inferencial, entre signos e conceitos, em que os conceitos estão ligados às coisas mediante uma relação de semelhança (Pinilla; Iori; D'Amore, 2015). Assim, os conceitos são imagens das coisas através dos signos que manifestam os significados das coisas (Pinilla; Iori; D'Amore, 2015). A segunda corrente conhecida como nominalismo, acreditava que os universais não são entes reais, eles só passam a existir na mente humana após as coisas, como se fossem apenas nomes. E a terceira corrente, denominada conceitualismo, apoiava a ideia de que os universais não são entes reais, mas eles existem na mente que os produz.

Para René Descartes, todo "pensamento gira em torno da ideia de que a razão humana é, por si mesma, uma fonte de verdade superior à percepção e independente dela" (Pinilla; Iori; D'Amore, 2015, p.52). Ou seja, a mente humana produz conhecimento a partir da formulação de juízos e o sujeito pode alcançar diretamente apenas as representações do objeto.

Kant foi um dos estudiosos utilizados por Peirce para desenvolver sua teoria. Na sua obra "Crítica da razão pura", Kant assume que existem doze categorias do intelecto e que a mente modela a realidade por meio dessas categorias. E essa realidade, que tem como base as categorias do intelecto, é nomeada de fenômeno.

> Para Kant, o conhecimento é o resultado da interação direta entre o sujeito que aprende (as suas estruturas cognitivas) e os objetos da experiência sensível; em particular, é a adequação dos objetos da experiência (ou melhor, das impressões que os objetos da experiência produzem nos sentidos) à faculdade cognoscitiva do sujeito. (Pinilla; Iori; D'Amore, 2015, p.55)

Pinilla; Iori; D'Amore, (2015), ainda, explicam que o conhecimento, para Kant, se mostra como uma transformação ou reconstrução da realidade em que a base está na estrutura cognitiva do sujeito, enquanto as intuições são apresentações do objeto, que não são criadas espontaneamente pela mente, mas são dadas à mente por meio dos sentidos.

A partir da história da semiótica, além de perceber como foi a construção do estudo da linguagem até chegar a Peirce, é possível constatar, com base na história, que os conceitos matemáticos não são tão perceptíveis na mente, e por isto há a necessidade de representá-los por meio de diagramas.

3.2 A semiótica de Peirce

A Matemática, por ser contumazmente constituída pelas construções de diagramas, algébrico ou geométrico, e pelas investigações e relações que emergem nestas construções, pode ser considerada um tipo de atividade semiótica. Segundo Peirce apud Cruz "todo raciocínio matemático é diagramático e que todo o raciocínio necessário é raciocínio matemático, por mais simples que seja" (2024, p. 71).

A palavra semiótica origina-se da palavra Grega *"semeion"* que pode ser traduzida por "signo" (Santaella, 2007). Essa palavra para os gregos representava um fenômeno natural que por meio de uma relação de causa-efeito poderia se associar a outro fenômeno natural, como por exemplo, "se há fumaça então há fogo" (Pinilla; Iori; D'Amore, 2015, p. 28).

No entanto, para Peirce (2005), a semiótica é muito mais do que a representação de um fenômeno que é causado por outro. A semiótica é o estudo de como os signos de todos os tipos referem-se aos seus objetos por meio de uma ideia a qual é reconhecida pelo sujeito. Esse sujeito cria outros signos e interpretações do primeiro. (Cruz, 2018b).

Para o desenvolvimento de sua teoria, Peirce tomou como ponto de partida a experiência que se tem do mundo, partindo da observação detalhada dos próprios fenômenos, sendo que, para ele, fenômeno é qualquer coisa que esteja de algum modo e em qualquer sentido presente a mente (Cruz, 2018)

A fenomenologia peirceana que é os estudos dos fenômenos

> é, segundo Peirce, a descrição e a análise das experiências que estão em aberto para toda humanidade, cada dia e hora, em cada canto e esquina do nosso cotidiano. A fenomenologia peirceana começa, pois, no aberto, sem qualquer julgamento de qualquer espécie: a partir da experiência, livre dos pressupostos que, de antemão, dividiram os fenômenos em verdadeiros ou falsos, reais ou ilusórios, certos ou errados. (De Paula, 2021, p.105)

Peirce obteve, a partir das observações detalhadas dos seus próprios fenômenos, três categorias denominadas primeiridade, secundidade e terceiridade. A primeiridade está relacionada a primeira impressão, sendo algo menos racional, mais espontâneo e intuitivo, como a possibilidade, a qualidade, a originalidade, o sentimento. A secundidade diz respeito a capacidade de distinguir e discernir experiências, ação e reação, já a terceiridade envolve a capacidade de organizar e classificar em categorias, ou seja, a faculdade de generalizar, de dar continuidade, de obter um crescimento.

De acordo com Santaella (2005), a forma mais simples da terceiridade manifesta-se no signo que é qualquer coisa de qualquer espécie, que representa uma outra coisa, chamada de objeto do signo, e que produz um efeito interpretativo em uma mente real ou em potencial, efeito este que é chamado de interpretante do signo.

O efeito interpretativo gera um ciclo infinito entre signo, objeto e interpretante, pois o interpretante gera um novo signo que representa um novo objeto e que provocará uma nova interpretação e assim por diante. Desse modo, um signo é sempre traduzido por outro signo. Este ciclo infinito é conceituado por Cruz como epistemologia semiótica (2023).

Aqui é importante ressaltar que essa interpretação é um processo relacional criado na mente do intérprete, a partir de uma relação de representação que o signo mantém com seu objeto. O significado de um signo é outro signo que pode ser uma imagem mental, uma ação, uma palavra, um sentimento, uma ideia, entre outras possibilidades, pois, independente do que for, o que é criado na mente do interpretante por meio desse signo é outro signo que traduz o primeiro. Essa cadeia recebe o nome de semiose.

De Paula, 2021, explica que

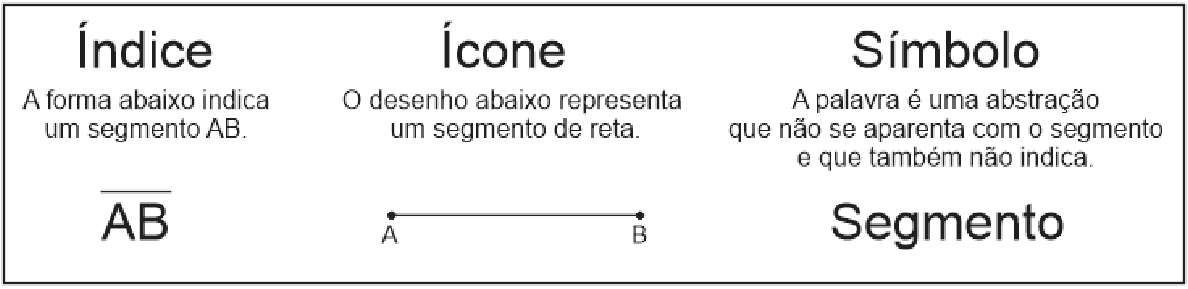
> (...) para conhecer e compreender qualquer coisa, a consciência produz um signo, ou seja, um pensamento como mediação irrecusável entre nós e os fenômenos. O ser humano só conhece o mundo porque de alguma forma, o representa e só interpreta essa representação, que Peirce denominou interpretante da primeira. Por isso, que o signo é uma coisa de cujo conhecimento depende daquilo que é representado por ele. Para conhecer e se conhecer, o ser humano se faz signo e só interpreta esses signos traduzindo-os em outros signos. (p. 108)

Tomando como base as relações que se apresentam no signo, Peirce (2005) classificou, respeitando sempre uma tríade, os possíveis tipos de signos. Porém, vamos nos ater, apenas, a tríade que relaciona o signo com o seu objeto, que é classificado como ícone, índice e símbolo.

O ícone é um signo diagramático que se assemelha ao objeto excitando sensações análogas na mente. “Índice é um signo o qual se refere ao objeto em virtude de ser realmente afetado por este objeto” (Cruz, 2018b, p.30). “O símbolo consiste exatamente em uma regra que determinará seu interpretante” (Peirce, 2005, p.71).

Observe o exemplo apresentado na figura 7.

Figura 7: Índice, ícone e símbolo



Fonte: Figura elaborada pela autora em 2020 no CorelDraw.

Nesse exemplo, o ícone utilizado para representar o segmento AB na figura 6, existe independente do objeto. No entanto, por meio da Primeiridade, ou seja, pelas qualidades que o objeto possui, uma relação sígnica pode ser ativada em um nível icônico. Assim, esse signo representa seu objeto, principalmente, por sua similaridade, não importando o seu modo de ser. Isso significa que ao ativar a relação sígnica, a representação da figura 3 se tornou um signo icônico do objeto segmento.

Agora, o índice permite particularizar o segmento ao nomeá-lo de AB, pois a existência do objeto, mesmo sem fornecer qualquer característica, geralmente, é utilizado para individualizar. Já o símbolo, está ligado a uma convenção ou a uma ideia da mente do interpretante em que cada um fará uma imagem mental de um segmento.

Além de estudar os fenômenos, Peirce também se dedicou ao estudo da lógica, sendo essa muito importante para o desenvolvimento de sua teoria, visto que, foi a partir da influência dela, que Peirce caracteriza um argumento como sendo "um signo que representa distintamente o interpretante, denominado de sua conclusão, que ele deve determinar" (Peirce, 2005, p. 29). Peirce também divide o argumento em três classes denominadas indução, abdução e dedução.

A dedução é "parte de uma hipótese, cuja verdade ou falsidade nada tem a ver com o raciocínio; e, naturalmente, suas conclusões são igualmente ideais." (Peirce, 2005, p.207). "A indução é a verificação experimental de uma teoria, em que, mesmo que, obtenha-se conclusões passíveis de erro, aplicações posteriores do mesmo método devem corrigir o erro (Peirce, 2005). Já a abdução é "o processo de formação de uma hipótese explanatória lógica. E é a única operação lógica que apresenta uma ideia nova (...)". (Peirce, 2005, p. 220).

Segundo Cruz (2019) e Hoffman (2006), esse conceito de abdução proposta por Peirce é inconsistente, pois o processo de formação de uma hipótese explanatória e uma nova ideia, são duas operações diferentes, visto que é possível formar uma hipótese explicativa sem gerar uma nova ideia. Cruz (2019) e Hoffman (2006), ainda, apontam que Peirce não deixa claro para quem a ideia seria nova, pois poderia ser nova para um indivíduo ou para uma civilização. Além disso, uma nova ideia pode ser "o resultado de uma reificação, isto é, algo que pode ser representado por um conceito singular, ou por um símbolo, ou poderia ser uma nova perspectiva sobre os mesmos dados como produzido por uma transformação teórica." (Cruz, 2019, p.16).

Com base em Peirce, Hoffmann (2006) apresenta por meio do quadro 1, a seguir, seis formas de abdução.

Quadro 1: Formas de abdução

	Se "ideia" significa algo que pode ser representado por um símbolo singular. (Com base na reificação)	Se "ideia" é sobre dados, ou sobre uma representação. (Transformação teórica)
Se uma explicação é possível, referindo-se a uma ideia já existente na mente.	Identificando abdução.	Mudança de forma.
Se criar uma ideia que é nova para o indivíduo, mas que já existe como parte do conhecimento de sua cultura.	Abdução reificação analógica.	Abdução teórica analógica.
Se criar uma ideia inteiramente nova.	Abdução Reificação Criativa.	Abdução teoria da criação.

Quadro: Elaborado por HOFFMANN (2006) traduzida por CRUZ (2019).

"Estas formas de abdução estão presentes no desenvolvimento do conhecimento matemático" (Cruz, 2019, p. 18). Otte e Barros (2013) explicam que em um processo de generalização utiliza-se de abstrações quando introduz objetos ideais. Essa generalização depende de uma simbolização, pois os símbolos permitem criar abstrações e possuem um caráter representativo consistente ou uma regra que será determinada pelo seu interpretante.

Otte e Barros (2013) expõem que em alguns casos de uma dedução formal, faz-se necessário uma introdução abdutiva de uma nova ideia que resulta em uma modificação do diagrama, implicando em uma conclusão mais ou menos óbvia.

A dedução conecta os processos abdutivos e intuitivos, por isso, não se pode afirmar que a Matemática é totalmente formal, mas constituída de experimentos mentais (Cruz, 2018b).

> Todo raciocínio dedutivo, mesmo um silogismo simples, envolve um elemento de observação. A saber, a dedução consiste em construir um ícone ou diagrama em que as relações entre suas partes devem apresentar uma analogia completa com aquelas partes do objeto do raciocínio, da experimentação sobre esta imagem na imaginação e da observação do

> resultado, de modo que se descubra relações desapercebidas e escondidas entre as partes (CP 3.363).

Isso significa que é a partir da dedução que se constrói um ícone que pode conter informações implícitas, descobertas por meio de experimentação. Porém, essa propriedade é exclusiva do ícone, visto que o índice é desprovido de qualidade e o símbolo, somente, se estiver inserido em algum contexto, sintaxe ou sistema. Logo, tanto o índice quanto o símbolo dependem de um ícone para produzir novos conhecimentos. Portanto, para tal propósito, faz-se necessário o emprego de ícones (Otte; Barros, 2013).

> Dado um signo convencional, ou outro signo geral de um objeto, para deduzir qualquer verdade além aquela que ele explicitamente significa, é necessário, em todos os casos, substituir este signo por um ícone. Esta capacidade de revelar verdades inesperadas é precisamente aquela em que consiste a utilidade da fórmula algébrica, de modo que o caráter icônico seja predominante (CP 2.279).

Dessa maneira, é importante buscar formalizações de caráter icônico que permite manipulações e que revelam verdades sobre seu objeto. Ao criar um ícone formado por partes inter-relacionadas e em que essas relações estejam sujeitas a uma mudança experimental, pode-se dizer que esse ícone é um diagrama.

> Um diagrama é um representamen que é predominantemente um ícone de relações auxiliado por convenções. Índices também são mais ou menos usados. Ele deveria ser elaborado sobre um sistema de representação perfeitamente consistente, fundado sobre uma ideia básica simples e facilmente inteligível. (CP 4.418).

Com isso, é possível afirmar que os diagramas são regidos pelas regras e convenções de um sistema de representações e são elas que direcionam a interpretação a ser feita, pois provêm os meios e delimita as possibilidades de construção e de manipulação de um diagrama. Dessa forma, “um ícone é governado por uma regra, isto é, por um símbolo” (Stjernfelt, 2013, p. 61).

Segundo De Paula

> (...) na abordagem semiótica, os sentidos das coisas são desenvolvidos nas relações sociais e não podem ser reduzidos completamente ao simples uso de símbolos, embora não sejam separáveis deles. Para essa abordagem, todo conhecimento é dinâmico, apesar de ser construído por meio de signos, implicando que nunca será final, completo e definido e os diagramas fornecem um contexto que ajuda a estabelecer referências e a indicar significados. (2021, p. 120)

De acordo com Hoffmann (2013) o pensamento diagramático facilita os processos de pensamentos, pois permite reduzir o custo cognitivo na solução de problemas, em tomadas de decisões e em conflitos de gerenciamento por meio de representações externas.

> É com meios diagramáticos que o uso operacional do ícone procede. Uma distinção deve ser mantida sobre a propriedade dos diagramas – de diagramas construídos com intenção explícita de experimentação e dotados de uma sintaxe explícita, ou precisa, de transformação, de um lado, e de outro, a classe mais compreensiva de desdobramentos diagramáticos a partir de ícones mais 'inocentes'. Em todo caso, esta característica definidora do diagrama, com regras seguras para revelar nova informação, é o que o torna a base dos experimentos mentais, variando do dia-a-dia rotineiro à invenção científica. (Stjernfelt, 2013, p. 67).

Portanto, os diagramas quando adotados em uma experimentação são modificados por meio de raciocínios dedutivos e abdutivos por meio de suas regras rígidas e características revelam novas informações.

Em consequência do que foi apresentado até o momento, o uso dos diagramas, base dos experimentos mentais, podem oferecer compreensões acerca do processo das operações com frações. Assim, no capítulo seguinte, será apresentado o Experimento Mental na Educação Matemática como sendo uma Metodologia de Ensino.

4 EXPERIMENTOS MENTAIS NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Como foi abordado no capítulo anterior, os experimentos mentais no campo da Educação Matemática é um tipo de diagrama que tem como objetivo revelar informações, a partir do uso de um sistema bem definido, que permite desfazer equívocos encontrados durante o processo de experimentação e, ainda, auxilia a pessoa que está realizando o experimento (sujeito) a aprender novos conceitos.

Baseado em Kuhn “a função de um experimento mental é auxiliar na eliminação de uma confusão prévia, obrigando o cientista a reconhecer contradições inerentes desde o início ao seu modo de pensar” (2011, 259), mas também, uma forma de ensinar ao cientista sobre os conceitos e sobre o mundo.

Cruz (2022a) expõe, que para o filósofo canadense James Robert Brown, os Experimentos Mentais criam conjecturas para explicar alguma teoria e, para entender a Matemática, por meio deles, é preciso assumir um certo tipo de platonismo para ter acesso aos objetos matemáticos.

Cruz (2018b) coloca, que para Ian Mueller, “Os Elementos de Euclides” utiliza um método axiomático, essência da Matemática Moderna, e que os diagramas desempenham um papel importante nos argumentos de Euclides, indicando o caráter experimental da geometria Euclidiana e auxiliando no julgamento da veracidade e da falsidade de uma afirmação geométrica.

Na perspectiva da Educação Matemática, os experimentos são formas utilizadas pelo sujeito para representar seus próprios pensamentos no desenvolvimento de um determinado conceito, como objeto considerado em uma dada atividade, usando como base representações que são ancoradas em um sistema de representação coerente (Cruz, 2018b; 2021). Segundo Cruz, os Experimentos Mentais é um “poderoso instrumento” que “auxilia no aprimoramento e na compreensão sobre a natureza do conhecimento matemático.” (p. 198, 2018). Além disso, ele coloca que os Experimentos Mentais resgatam “as experimentações, analogias e o uso de metáforas na aprendizagem Matemática, colocando o sujeito como agente produtor de seu próprio conhecimento, exaltando a criatividade.” (Cruz, 2020, p.132).

Outra teoria importante que auxilia na construção do experimento mental na perspectiva da Educação Matemática é a teoria da complementaridade. Assim, a seção que segue irá abordar um pouco do conceito de complementaridade e apresentar alguns conceitos complementares que surgem a partir do uso da aritmética e da geometria.

4.1 Complementaridade

O conceito de complementaridade está na relação do sujeito com objeto, na qual o sujeito a partir dos seus conhecimentos trata de integrar as informações obtidas a partir da passividade e espontaneidade do pensamento ao seu próprio sistema de conhecimentos e experiências, ou seja, por meio de uma atividade e operatividade do pensamento. (Otte, 1993). Note que, há uma estrutura distintamente bipartida nessa relação, que aparece "tanto no plano psicológico ou prático quanto em todas reflexões epistemológicas." (Otte, 1990, p.38, tradução nossa). É a dualidade dessa estrutura que recebe o nome de complementaridade.

Otte (1993) ressalta que a verdadeira complementaridade, não está atrelada a qualquer dualidade, pois nem o meio e nem o objeto pode ser determinado um sem o outro, mesmo que eles desempenhem, em determinado momento, um certo ato epistemológico individual. Otte (1993) explica que os meios linguísticos e as ferramentas e instrumentos experimentais só se efetivam como um meio de conhecimento quando conseguem produzir uma relação do sujeito para o objeto de conhecimento. Já sobre o objeto, Otte (1993) afirma que quando o sujeito não consegue produzir uma relação do objeto com algum meio, esse objeto não existe para o sujeito como sendo um objeto de conhecimento, isso implica, que o objeto não pode ser definido sem um meio, contudo, "o objeto do conhecimento não é totalmente subordinado ao meio." (p. 224)

Os diferentes significados compreendidos pelas frações são construídos pelas diferentes formas que o sujeito tem de relacionar esse objeto do conhecimento com diferentes meios. Com isso, o intuito é buscar realizar uma complementaridade entre o objeto do conhecimento com o meio, de forma que o sujeito possa pelo meio escolhido compreender melhor o objeto do conhecimento e que não gere problemas epistemológicos.

A complementaridade pode ser exposta de múltiplas maneiras, visto que:

> "todos os modelos, teoria, termos teóricos, etc. mostram uma complementaridade de objeto e método, de aspecto descritivos e construtivos de propriedades representacionais e instrumentais. O conhecimento é sempre ambiente e esquema de ação." (Otte, 1990, p.38, tradução nossa).

Os objetos empregados na aritmética têm origem na intuição, visto que o verdadeiro conceito de número aparece na aritmética, ou seja, o objeto da matemática dentro da aritmética se apresenta como uma construção (Bernays, 1985, apud Otte, 1990). Porém, ao colocar a ideia da totalidade do número, utiliza-se um certo platonismo[3]. Já na geometria essa relação inverte, a geometria surge de uma ideia platônica de espaço, ou seja, os objetos estão no campo das

---

[3] O platonismo acredita que a Matemática é formada por objetos do campo da ideia.

ideias, porém, os procedimentos de construção de figuras são pautados no intuicionismo[4]. (Bernays, 1985, apud Otte, 1990). A partir disso, é possível observar que apesar das diferenças o intuicionismo e o platonismo se complementam na geometria e na aritmética.

Assim, como há uma complementaridade entre o intuicionismo e o platonismo, também, é possível observar uma complementaridade entre a aritmética e a geometria, que "ao servirem uma à outra como campo de interpretação ou como aplicações pretendidas, estabeleceram um modo de geração de verdades matemáticas que tornou a matemática pura concebível." (Otte, 1990, p. 39, tradução nossa).

Além do intuicionismo e do platonismo, há também a Matemática sob a ótica do formalismo. A Matemática construída a partir de um pensamento formalista, considera que a utilização de figuras, diagramas ou mesmo imagem mentais não é matemático, assim esses elementos se tornam inadequados para um texto Matemático e, com isso, torna-se um texto formado por manipulações de símbolos sem significados. (Wielewski, 2008).

Porém, "esse estilo formalista penetrou gradualmente no ensino da Matemática" (Wielewski, 2008, p. 145). E essa linguagem formal fez com que o ensino passasse a ser feito por meio de um processo de aprendizagem de mecanização, ou seja, por meio de regras, que conduzem a uma certa possibilidade de erro ou de incompreensão. (Wielewski, 2008). E é esse tipo de prática que tem sido feita ao ensinar a operar com frações.

Na Matemática escolar utiliza-se tanto os sistemas de representação aritmético quanto o sistema de representação geométrico e, ambos, são essenciais para o ensino, contudo o caráter algébrico da Matemática escolar tradicionalmente cria muitas dificuldades. (Otte, 2012).

> A utilização da aritmética faz com que um argumento, como a generalização de uma propriedade perca, seu real significado. Isso porque destaca-se uma pequena e simples comprovação, a qual limita a extensão real da propriedade, que pode se tornar uma concepção que o aluno pode alcançar do que seja uma demonstração matemática. Embora, claramente, o argumento geométrico tenha suas limitações (nesse caso $a>0$ e $b>0$), ele ajuda a compreender a justificativa da propriedade, pois busca abarcar um número infinito de casos que, posteriormente, poderá ser generalizado para qualquer número real. (Wielewski, 2008, p. 117).

Na geometria, por exemplo, o conhecimento surge exatamente como concretização da atividade construtiva, e esta concretização, inversamente, torna-se meio, uma vez que, apenas "pela intuição adquirimos novos conhecimentos". (Otte, 1993, p. 273). Já em uma

[4] O intuicionismo acredita que os objetos matemáticos são construções humanas.

caracterização axiomática, os objetos são constituídos pelas definições implícitas do sistema de axiomas. (Otte, 1993, p. 275).

Além de uma complementaridade em relação aos conceitos, a geometria e aritmética se complementam em sua simbologia e em seu sistema de representação. Combinadas, elas servem como instrumentos e campos de interpretação e, assim, representam um modo de geração de pensamento matemático (Otte, 1990).

Dessa forma, para a construção do Experimento Mental, será utilizada a complementaridade entre a geometria e a aritmética, utilizando-se de um pensamento formal e intuitivo.

4.2 Experimentos mentais uma metodologia de ensino

Acreditar que a Matemática é uma atividade semiótica, significa que ela pode ser construída por meio de representações e experimentações. A partir dessa concepção, é possível afirmar que ela é construída por meio dos diagramas geométricos e/ou algébricos que possibilitam o desenvolvimento dos experimentos e verificação de resultados que ampliam as possibilidades de interpretações e significações. (Cruz, 2021; 2022a).

Assim, ao tomar a Matemática como uma atividade semiótica que pode ser desenvolvida por meio de Experimentos Mentais, abrem-se portas para novas possibilidades de interpretações e significações que aprimoram e auxiliam na compreensão do objeto matemático. Afinal, por meio dos processos dos Experimentos Mentais é possível criar fatos por intermédio das observações do desenvolvimento e das relações das ações de contrários do objeto matemático que é colocado em movimento (Cruz, 2023).

Os Experimentos Mentais é uma metodologia que se ancora na concepção histórico-dialética da educação. Essa metodologia é constituída por

> um conjunto de princípios e/ou diretrizes sócio-políticos, epistemológicos e psico-pedagógicos articulados a uma estratégia técnico-operacional capaz de reverter os princípios em passos e/ou procedimentos orgânicos e sequenciados, que sirvam para orientar o processo de ensino-aprendizagem em situações concretas. (Manfredi, 1993, p.5).

As reflexões que orientam a aplicação dos Experimentos Mentais estão baseadas em uma dimensão epistemológica que tem como diretrizes:

> como se produz o conhecimento, numa perspectiva dialética; à lógica inerente a esse processo; a quem produz esse conhecimento; às diferenças entre o chamado saber popular e o saber sistematizado; ao tipo de relações existentes entre as diferentes formas de conhecimento; à importância e o sentido da teoria, numa perspectiva de uma educação crítica e consciente; ao que

> significa dizer que o processo de produção de conhecimento possui um aporte individual e sócio cultural; o que todas estas questões têm a ver com o problema da escolha e organização dos conteúdos a serem trabalhados durante o processo de ensino-aprendizagem. (Manfredi, 1993, p.5).

No caso, essa metodologia está baseada na concepção de dialética com base no materialismo Histórico-dialético de que: a teoria (conhecimento) e a prática (ação) não se separam em nenhum momento (Gadotti, 1997). Segundo Gadotti, Marx considera que a teoria é um guia para ação, em que por meio da prática tem-se base para construção da teoria, afinal, é por meio do conhecimento obtido pela prática que ela é dialeticamente construída (1997).

A dialética na concepção materialista é pautada em quatro princípios. Primeiro, o princípio da totalidade, um elemento não pode ser analisado de forma isolada, deve ser considerado o contexto. Segundo é o princípio do movimento, a realidade é dinâmica e está sempre em movimento. Terceiro, o princípio da mudança, todas as coisas estão em um processo constante de desenvolvimento e transformação. Quarto, o princípio da contradição, existe contradição em si mesmo que gera conflitos internos.

Os objetos matemáticos, nos Experimentos Mentais, estão sob auspícios desses quatro princípios. Para compreender os objetos e/ou fenômenos é necessário empregar o princípio da totalidade, ou seja, elaborar sínteses a fim de compreender melhor a realidade em relação ao objeto e/ou ao fenômeno, pois são elas que permitem ao sujeito "descobrir uma estrutura significativa da realidade com que se defronta." (Konder, 2008, p.161) Essas sínteses, que no caso, é sobre um objeto na matemática, são feitas "por meio de representações particulares desse objeto, interagindo com outras possibilidades (abdução)." (Cruz, 2020, p. 3). Como o conhecimento está sempre em uma contínua transformação, observa-se o princípio do movimento e visto que há um acúmulo, lento, de mudanças quantitativas que produz uma mudança qualitativa (momento em que se descobre algo novo), têm-se o princípio da mudança. Por último, o princípio da contradição, nas quais unidades contraditórias intrínsecas possibilitam a transformação.

Para realizar uma análise seguindo os princípios dialéticos, é importante compreender em qual nível o conjunto de problemas que precisam ser resolvidos se encontram. Gadotti afirma que a dialética está dividida em três níveis: a dialética da natureza, a dialética da história e a dialética do conhecimento (1997). No caso, os Experimentos Mentais como uma Metodologia no ensino da matemática evidência o 3º nível, que é o da dialética do conhecimento. Afinal, nesse nível analisa-se o "resultado da interação constante entre os objetos a conhecer e a ação dos sujeitos que procuram compreendê-los." (Gadotti, 1997, 27).

A partir disso, o professor que considerar trabalhar com essa metodologia auxiliará os estudantes a construírem fatos sobre um determinado objeto da matemática, a partir do desenvolvimento contínuo do objeto matemático, dentro do próprio contexto da matemática, e das relações de seus contrários.

É importante que o professor, ao adotar uma metodologia, leve em consideração "o conhecimento do aluno, o conhecimento do conteúdo a ser ensinado, o papel social a que ele exerce e as perspectivas que ele assume." (Cruz, 2022b, p.7).

Os Experimentos Mentais podem ser categorizados como uma metodologia de ensino da Matemática porque é possível identificar algumas características durante sua aplicação. Essas características são nomeadas de: forma, estrutura, compreensão, dependência, revelação e comparação (Cruz, 2021; 2022a; 2022b). As características: forma, estrutura, compreensão e dependência são fundamentais, e, por isso, podem ser identificados em todas as aplicações, já a revelação e a comparação nem sempre poderão ser identificadas.

A forma é a conjectura, a hipótese e as suposições que são desenvolvidas em uma representação particular do objeto geral (Cruz, 2021; 2022a). Essa característica é fundamental no desenvolvimento da generalização, além de auxiliar a compreender a relação entre o signo e o objeto (Cruz, 2021). Para se obter uma generalização, faz-se necessário "entender um aspecto geral em um particular." (Cruz, 2021, p. 16).

Os Experimentos Mentais, por não possuírem uma estrutura rígida, permitem que novas ideias sejam introduzidas, criando-se, assim, uma síntese abdutiva (Cruz, 2021). Essa característica do Experimento Mental recebe o nome de estrutura.

A compreensão está no fato de se utilizar o processo dedutivo no desenvolvimento da experimentação mental (Cruz, 2021). Esse processo permite perceber relações que não são explicitamente apresentadas nos diagramas sendo expostas a partir dos processos dedutivos feitos por meio da experimentação.

A dependência é o sistema de representação e é ele que baliza a aplicação de novos conceitos e de objetos.

A revelação é a característica que os Experimentos Mentais têm em revelar contradições e de apresentar novas leis (Cruz, 2021).

A comparação está na possibilidade de se apresentar uma ideia, um conceito ou uma solução de forma diferente.

Baseando-se na complementaridade de geometria e aritmética, que permite realizar uma construção que busque a relação entre o formal e o intuitivo, possibilitando complementar a simbologia e o sistema de representação, foi desenvolvido um Experimento Mental que se baseia em um sistema geométrico euclidiano que tem como objetivo somar duas frações por meio de segmentos. Esse Experimento Mental fará parte do produto educacional que será proposto ao final da pesquisa e será apresentado na próxima seção.

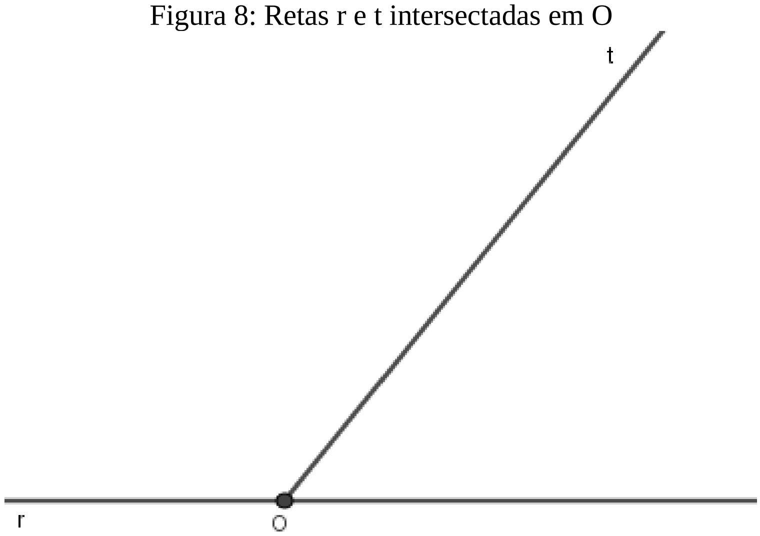
4.3 Operações com frações por meio de Experimentos Mentais: uma proposta didática para o ensino deste conteúdo

O objetivo desse Experimento Mental é somar duas frações. Como exemplo, serão consideradas as frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{2}$. Do ponto de vista semiótico, essas frações serão representadas como partes de segmentos de reta, a partir de um segmento considerado, o qual, será indicado por unidade. Este experimento será dividido em duas partes, a primeira tem como objetivo encontrar as frações como partes do segmento unidade e a segunda de desenvolver a soma.

<u>Forma</u>: Parte-se de uma hipótese ou suposição por meio de uma representação do objeto considerado.

- Considerar duas retas fixas, r e t, que intersectam em um ponto O.

Figura 8: Retas r e t intersectadas em O



Fonte: Elaborada pela autora em 2023 no Geogebra.

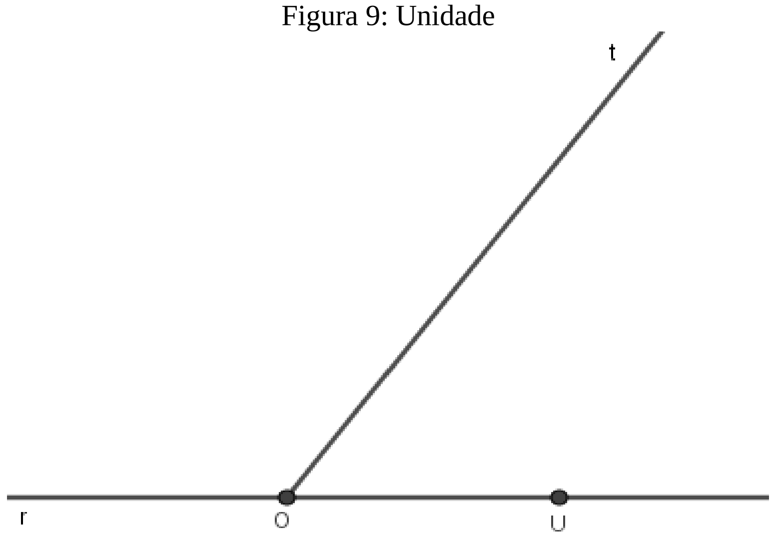
- Construir segmentos que tenham início em O e extremidades em um ponto sobre essas retas fixas e serão associadas frações a esses segmentos.
- O segmento que representa o 0 pode ser simbolicamente representado por:

$$OO = 0 \text{ ou } 0 = OO$$

- Escolher um ponto qualquer sobre a reta r e denomina-lo de U. Nomeá-lo de segmento OU de segmento 1 ou unidade, simbolicamente, representado por:

$$OU = 1$$

Figura 9: Unidade

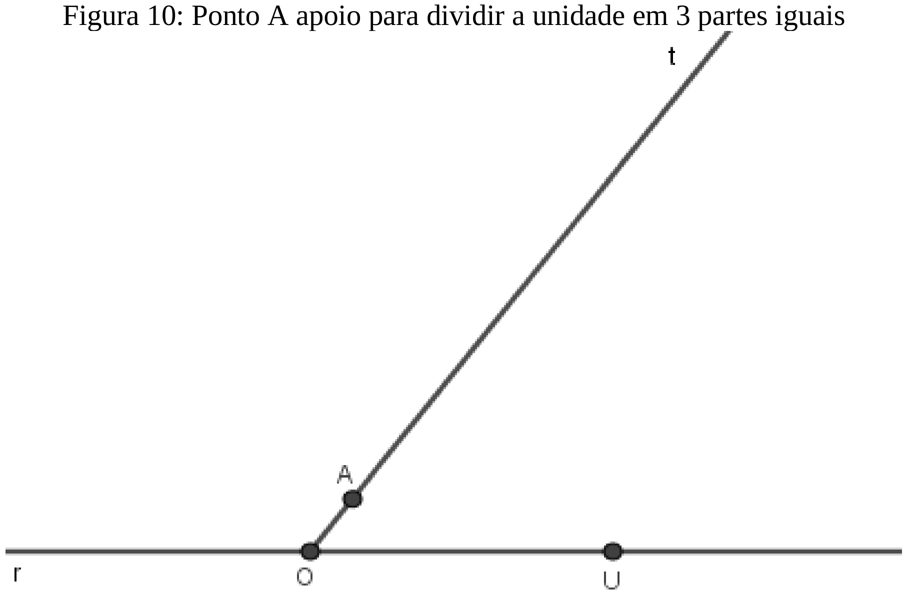


Fonte: Elaborada pela autora em 2023 no Geogebra.

<u>Estrutura</u>: Uma ideia nova que, ainda, não está contida nos dados do problema. É o processo abdutivo no desenvolvimento do Experimento.

- Marcar sobre a reta t um ponto A.

Figura 10: Ponto A apoio para dividir a unidade em 3 partes iguais



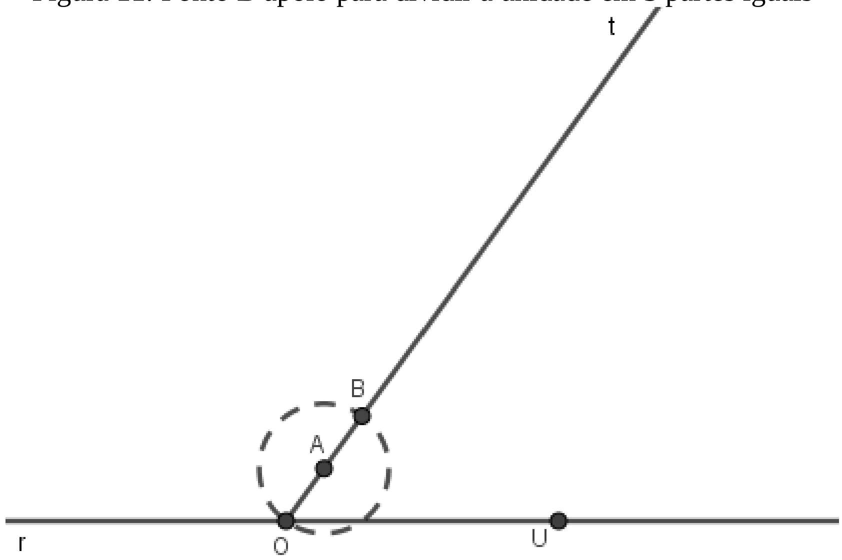
Fonte: Elaborada pela autora em 2023 no Geogebra.

<u>Compreensão e dependência</u> Neste momento, será desenvolvido um processo dedutivo para encontrar a Fração $\frac{1}{3}$, isto é, o segmento sobre a reta r que corresponderá a um terço da unidade considerada. O sistema de representação, neste caso, será a divisão de segmentos pela geometria euclidiana.

- Criar uma circunferência com centro em A de raio equivalente à medida do segmento OA e marcar o ponto B, interseção da circunferência com a semirreta t.

$$\left.\begin{array}{l} AB = OA \\ OB = OA + AB \end{array}\right\} OB = OA + OA \Rightarrow OB = 2 \times OA$$

Figura 11: Ponto B apoio para dividir a unidade em 3 partes iguais



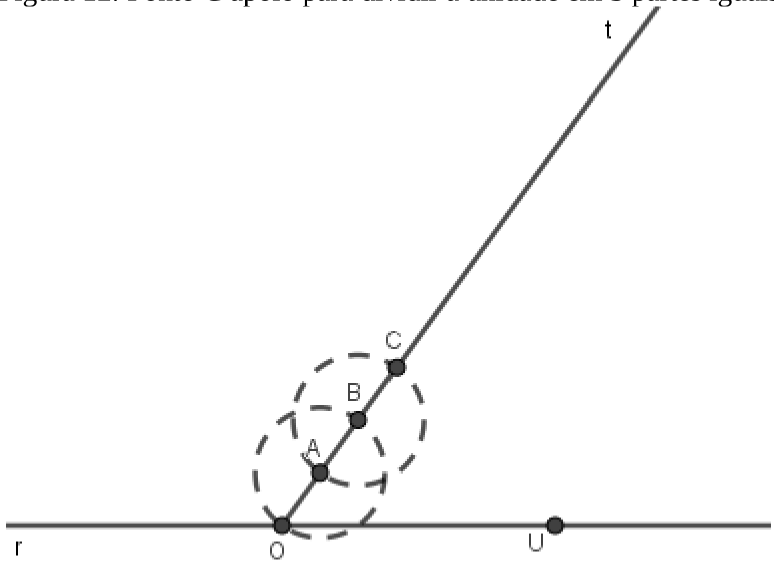
Fonte: Elaborada pela autora em 2023 no Geogebra.

- Criar uma nova circunferência com centro em B e raio equivalente à medida do segmento OA e marcar o ponto C, interseção da circunferência com a semirreta t.

$$\left.\begin{array}{l} BC = OA \\ OC = OB + BC \end{array}\right\} OC = OB + OA$$

Como $OB = 2 \times OA$ então $OC = 2 \times OA + OA \Rightarrow OC = 3 \times OA$

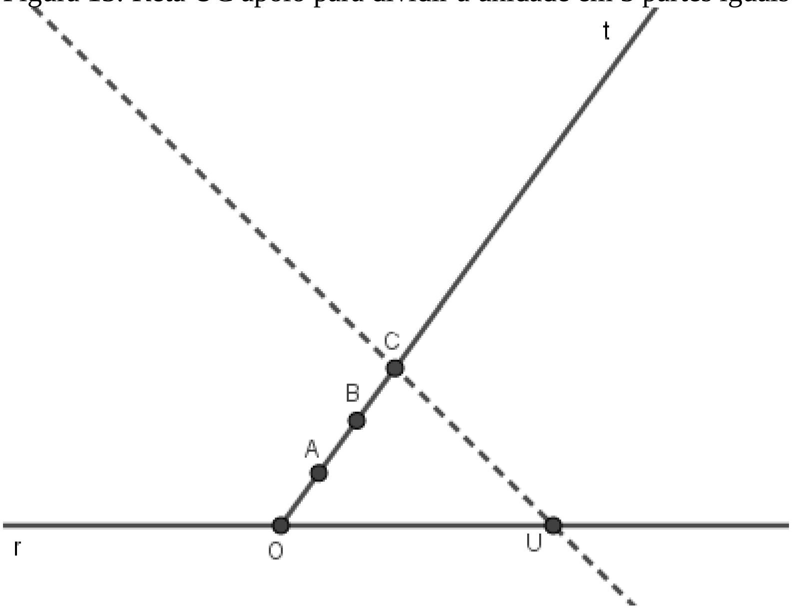
Figura 12: Ponto C apoio para dividir a unidade em 3 partes iguais



Fonte: Elaborada pela autora em 2023 no Geogebra.

- Agora, traçar uma reta passando pelos pontos U e C.

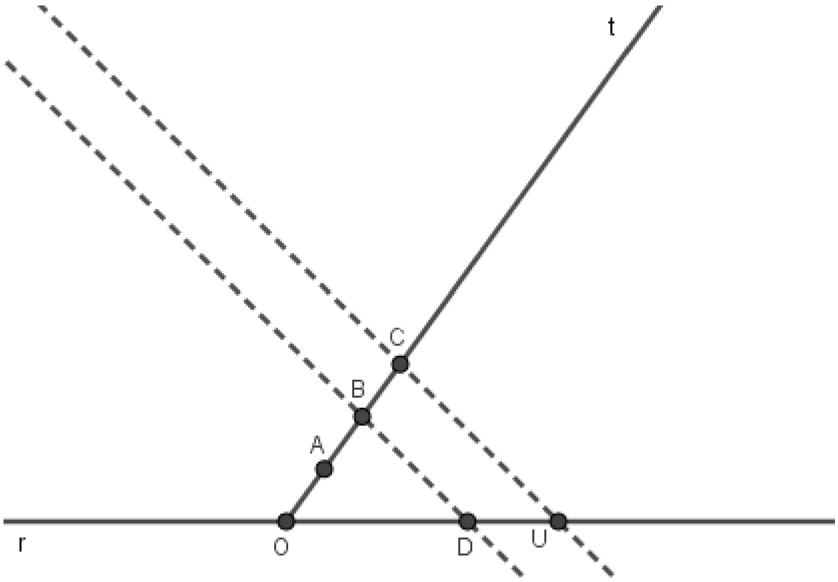
Figura 13: Reta UC apoio para dividir a unidade em 3 partes iguais



Fonte: Elaborada pela autora em 2023 no Geogebra.

- Traçar uma reta paralela à reta UC passando pelo ponto B e marcar o ponto de interseção D com a reta r.

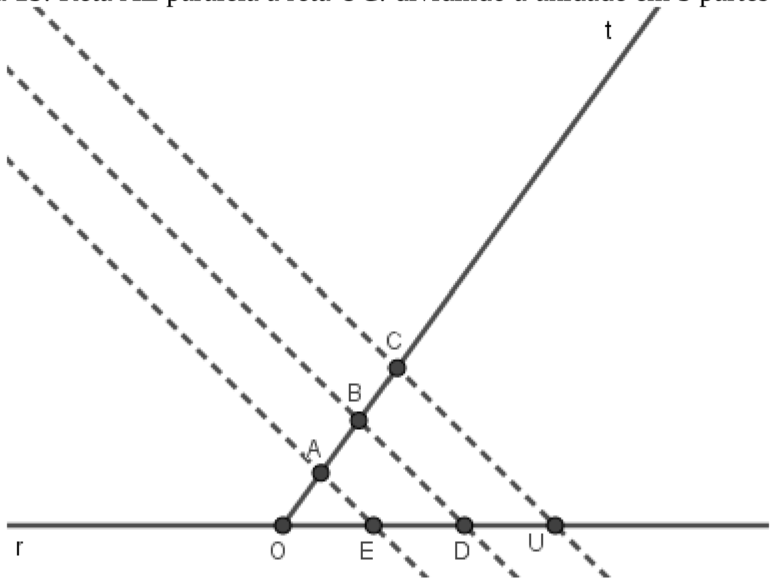
Figura 14: Reta BD paralela à reta UC: dividindo a unidade em 3 partes iguais



Fonte: Elaborada pela autora em 2023 no Geogebra.

- Traçar uma reta paralela à reta UC passando pelo ponto A e marcar o ponto de interseção E com a reta r.

Figura 15: Reta AE paralela à reta UC: dividindo a unidade em 3 partes iguais



Fonte: Elaborada pela autora em 2023 no Geogebra.

- Os triângulos OAE, OBD e OCU são semelhantes pelo caso ângulo, ângulo, pois eles possuem um ângulo em comum e pelo fato de $\overline{AE}$, $\overline{BD}$ e $\overline{CU}$ serem paralelos, os ângulos $O\hat{A}E$, $O\hat{B}D$ e $O\hat{C}U$ são correspondentes, ou seja, são congruentes. Assim:

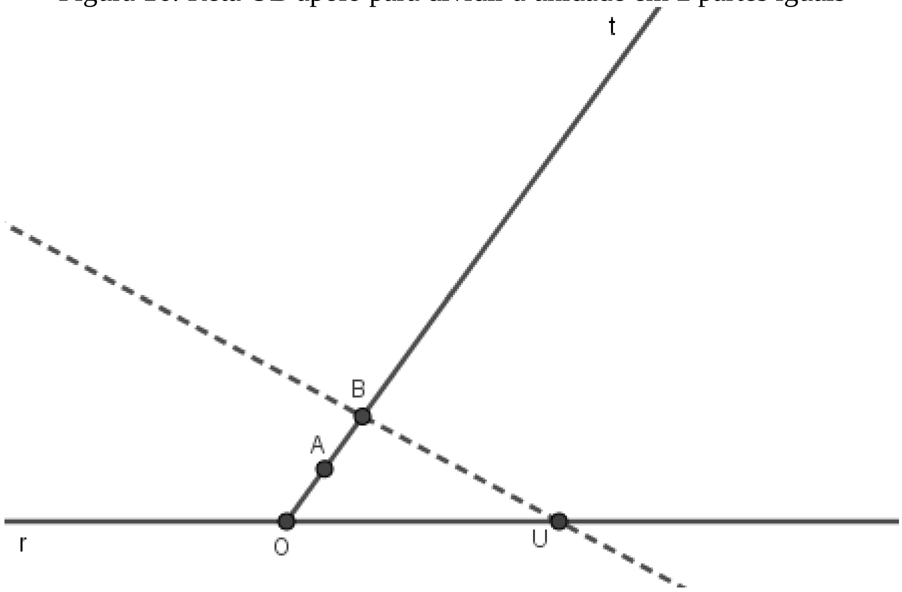
$$\frac{OE}{OA} = \frac{OU}{OC} = \frac{OD}{OB}$$

- Da igualdade $\frac{OE}{OA} = \frac{OU}{OC}$, tem-se que $OE = \frac{OU \times OA}{OC}$, como $OC = 3 \times OA$, então $OE = \frac{OU \times OA}{3 \times OA} = \frac{OU}{3} = \frac{1}{3} \times OU$, como $OU = 1$, $OE = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$.
- Da igualdade $\frac{OU}{OC} = \frac{OD}{OB}$, tem-se que $OD = \frac{OU \times OB}{OC}$, como $OC = 3 \times OA$ e $OB = 2 \times OA$, então $OD = \frac{OU \times 2 \times OA}{3 \times OA} = \frac{OU \times 2}{3} = \frac{2}{3} \times OU$, como $OU = 1$, $OD = \frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3}$.

<u>Compreensão e dependência</u>: Um novo processo dedutivo será desenvolvido para encontrar, dessa vez, a fração $\frac{3}{2}$, isto é, o segmento sobre a reta r que corresponderá a unidade mais um meio dela. O sistema de representação, neste caso, também será a divisão de segmentos pela geometria euclidiana.

- Começar traçando uma reta passando pelos pontos B e U.

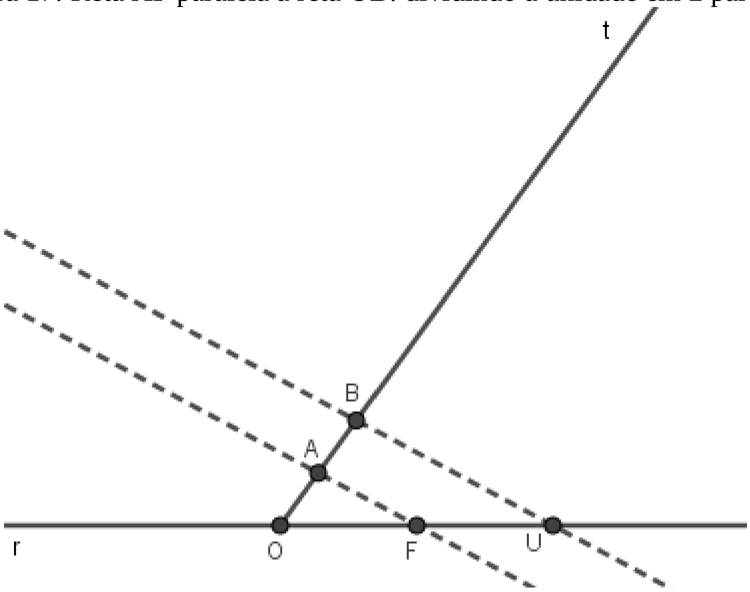
Figura 16: Reta UB apoio para dividir a unidade em 2 partes iguais



Fonte: Elaborada pela autora em 2023 no Geogebra.

- Em seguida, traçar uma reta paralela à reta BU, passando pelo ponto A e marcar o ponto F.

Figura 17: Reta AF paralela à reta UB: dividindo a unidade em 2 partes iguais



Fonte: Elaborada pela autora em 2023 no Geogebra.

- Os triângulos OAF e OBU são semelhantes pelo caso ângulo, ângulo, pois possuem um ângulo em comum e pelo fato de $\overline{AF}$ e $\overline{BU}$ serem paralelos, os ângulos OAF e OBU são correspondentes, ou seja, são congruentes. Assim:

$$\frac{OF}{OA} = \frac{OU}{OB}$$

- Dessa igualdade, tem-se que $OF = \dfrac{OU \times OA}{OB}$, como $OB = 2 \times OA,$ então:

$$OF = \frac{OU \times OA}{2 \times OA} = \frac{OU}{2} = \frac{1}{2} \times OU, \text{ como } OU = 1, \; OF = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}.$$

- Agora, traçar uma circunferência com centro no ponto U e de raio equivalente ao segmento OF, em seguida, marcar o ponto G de interseção com a reta r.

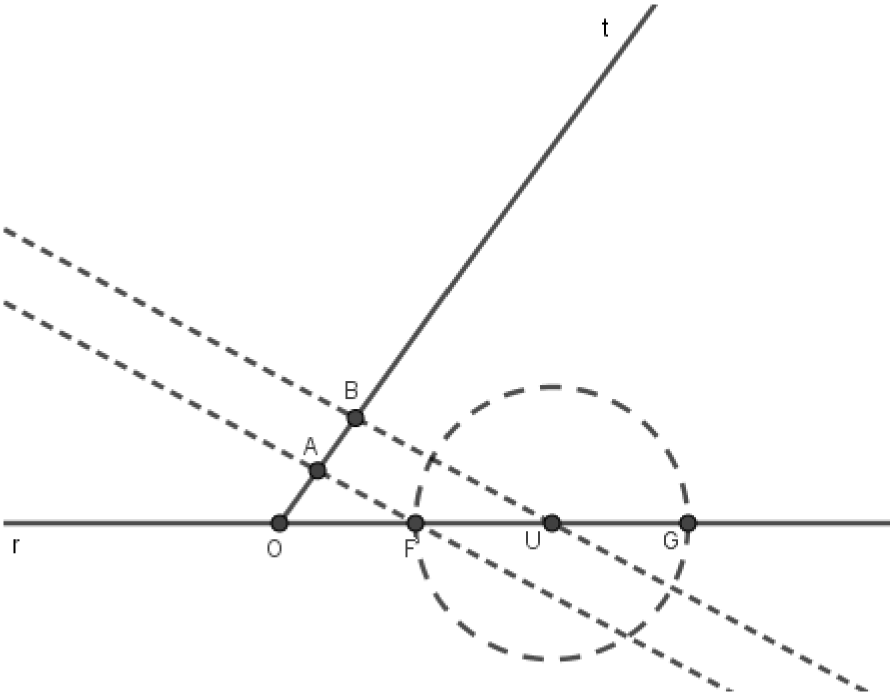
$$\left.\begin{array}{l} OF = FU \\ OU = OF + FU \end{array}\right\} OU = OF + OF \Rightarrow OU = 2 \cdot OF,$$

e

$$\left.\begin{array}{l} UG = OF \\ OU = 2 \cdot OF \\ OG = OU + UG \end{array}\right\} OG = 2 \cdot OF + OF \Rightarrow OG = 3 \cdot OF.$$

$$\text{Como, } OF = \frac{1}{2}, \text{ então } OU = 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{2} \text{ e } OG = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Figura 18: Segmento OG: fração $\frac{3}{2}$



Fonte: Elaborada pela autora em 2023 no Geogebra.

Revelação: Realizar descobertas ou contradições na forma de pensar. Na atividade em questão, algumas conclusões foram obtidas e foram feitas generalizações desses resultados.

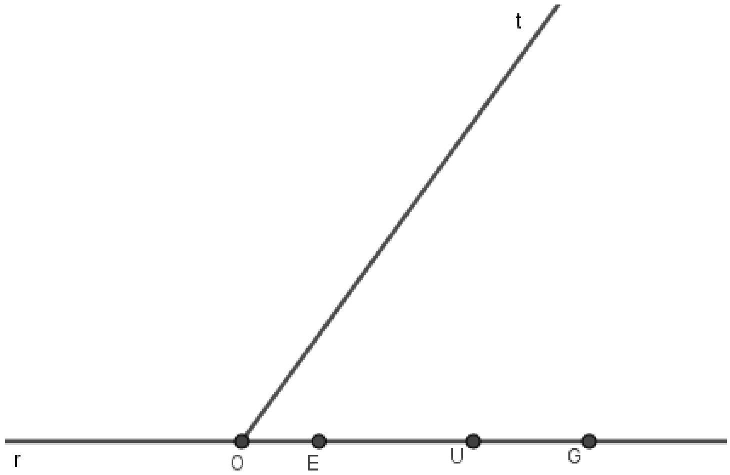
- Uma fração unitária, ou seja, que representa uma fração com numerador igual a 1, indicada por $\frac{1}{n}$, pode ser representada por um segmento que é uma parte da subdivisão em n partes da unidade, ou seja, a fração é uma subunidade da unidade considerada.

- Já uma fração não unitária indicada por $\frac{m}{n}$, pode ser representada por um segmento que é "m" partes da subdivisão da unidade em n partes.
- Visto que $OE = \frac{1}{3}$ e $OG = \frac{3}{2}$ então os segmentos OE e OG representam respectivamente as frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{2}$.

Continuando o Experimento, a segunda fase é desenvolver um processo para se chegar à soma das frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{2}$.

<u>Forma</u>: Tomar como hipótese a unidade e as frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{2}$ obtidas sobre a reta r no Experimento anterior e a reta t para auxiliar na construção.

Figura 19: Unidade, fração $\frac{1}{3}$ e fração $\frac{3}{2}$



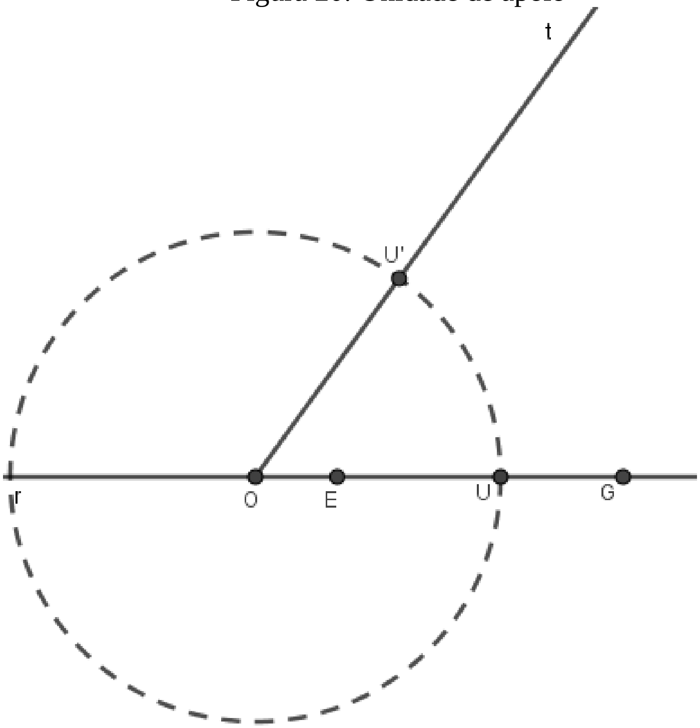
Fonte: Elaborada pela autora em 2023 no Geogebra.

<u>Estrutura</u>: Uma ideia nova surge, um pensamento abdutivo de traçar retas paralelas, circunferências, modificando o diagrama.

- Com o auxílio de uma circunferência centralizada no ponto O, criar um ponto U' sobre reta t, que equivalente ao segmento 1 ($\overline{OU}$), assim o segmento OU' pode ser representado simbolicamente por:

$$OU' = 1$$

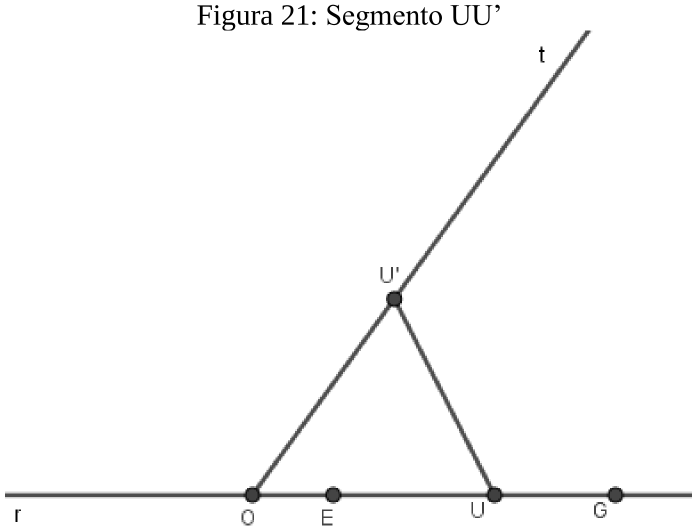
Figura 20: Unidade de apoio



Fonte: Elaborada pela autora em 2023 no Geogebra.

- Ligar os pontos U e U’, obtendo assim o segmento UU’.

Figura 21: Segmento UU’

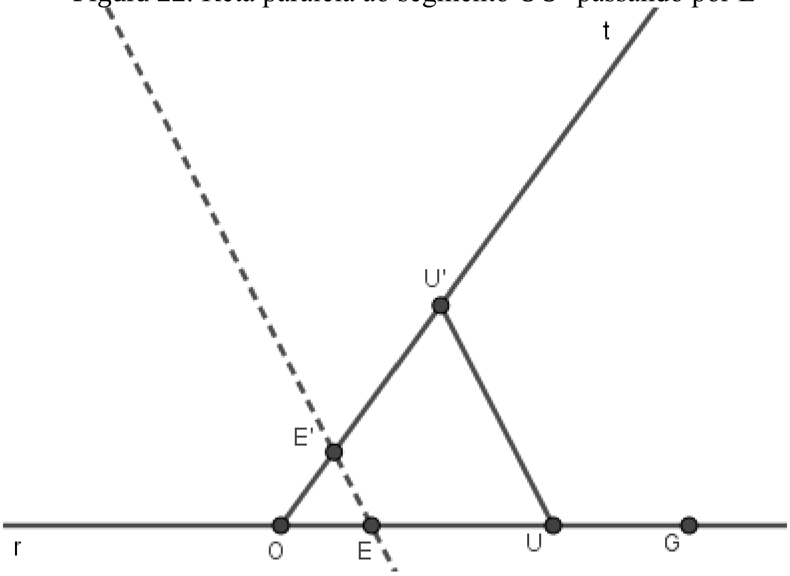


Fonte: Elaborada pela autora em 2023 no Geogebra.

Compreensão e Dependência: Início do processo dedutivo, por meio da geometria euclidiana, mais especificamente, levando em consideração o postulado das paralelas.

- Traçar uma reta paralela a UU’ passando pelo ponto E e marcar o ponto E’ de intersecção com a reta t.

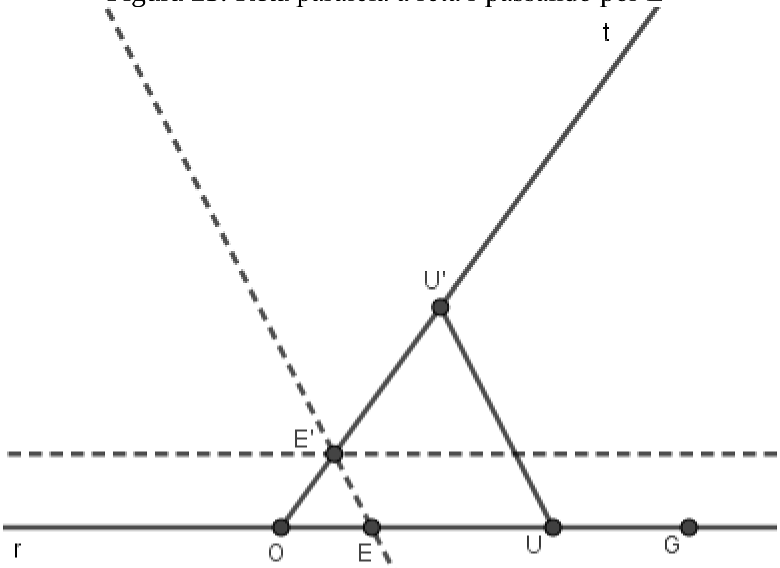
Figura 22: Reta paralela ao segmento UU’ passando por E



Fonte: Elaborada pela autora em 2023 no Geogebra.

- Por construção os triângulos OEE’ e OUU’ são semelhantes pelo caso ângulo, ângulo. Como $OU = 1$ e $OU' = 1$, então $OE = OE'$.
- Traçar uma reta paralela à reta r pelo ponto E’.

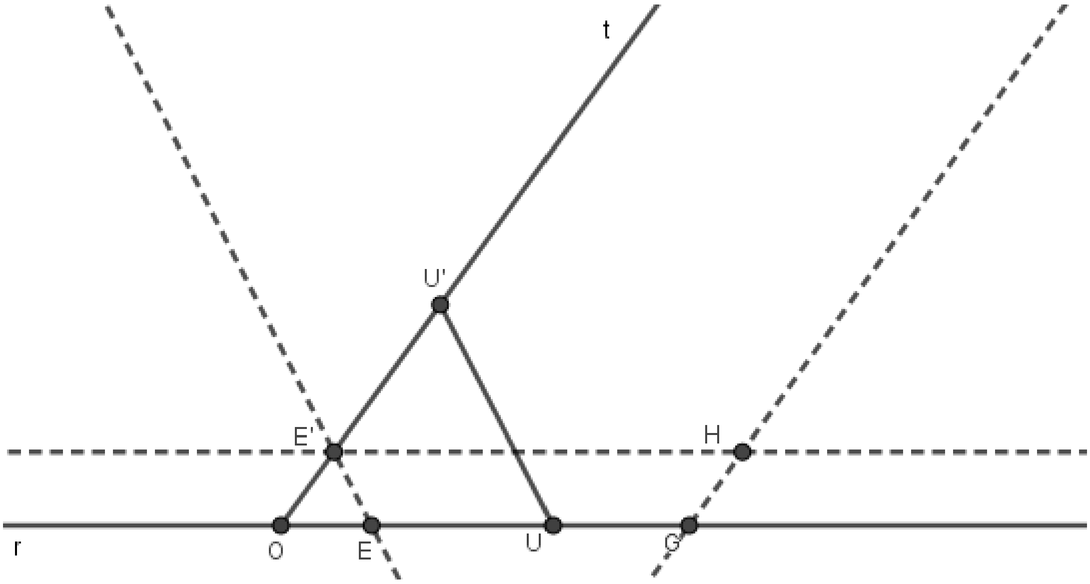
Figura 23: Reta paralela à reta r passando por E’



Fonte: Elaborada pela autora em 2023 no Geogebra.

- Traçar uma reta paralela à reta t passando pelo ponto G e marcar o ponto H onde essa reta e a reta traçada anteriormente se intersectam.

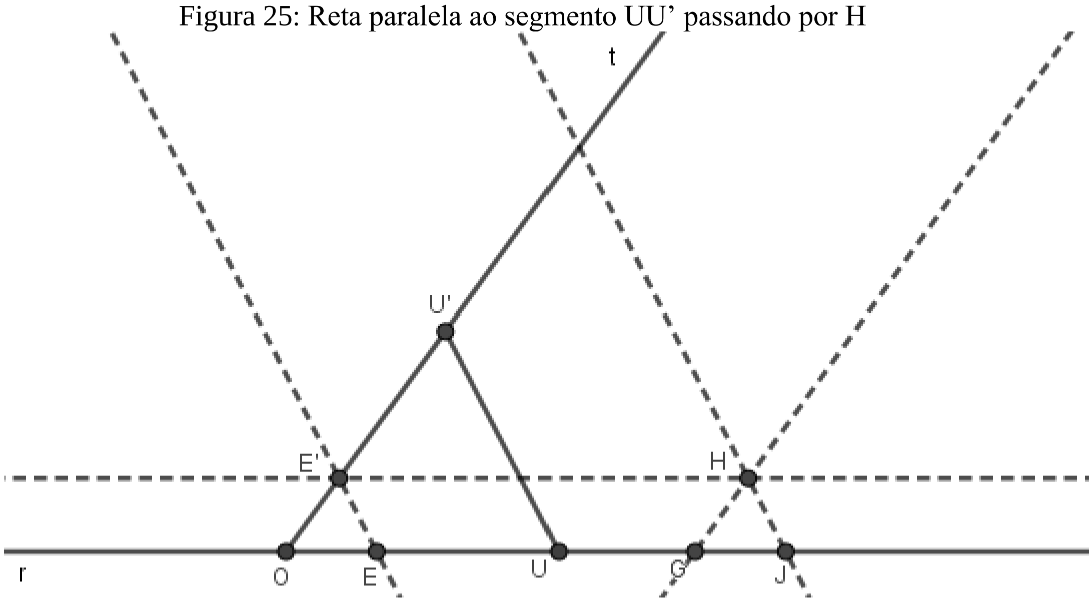
Figura 24: Reta paralela à reta t passando por G



Fonte: Elaborada pela autora em 2023 no Geogebra.

- Traçar uma reta paralela ao segmento UU' pelo ponto H e marcar o ponto de intersecção com a reta r.

Figura 25: Reta paralela ao segmento UU' passando por H



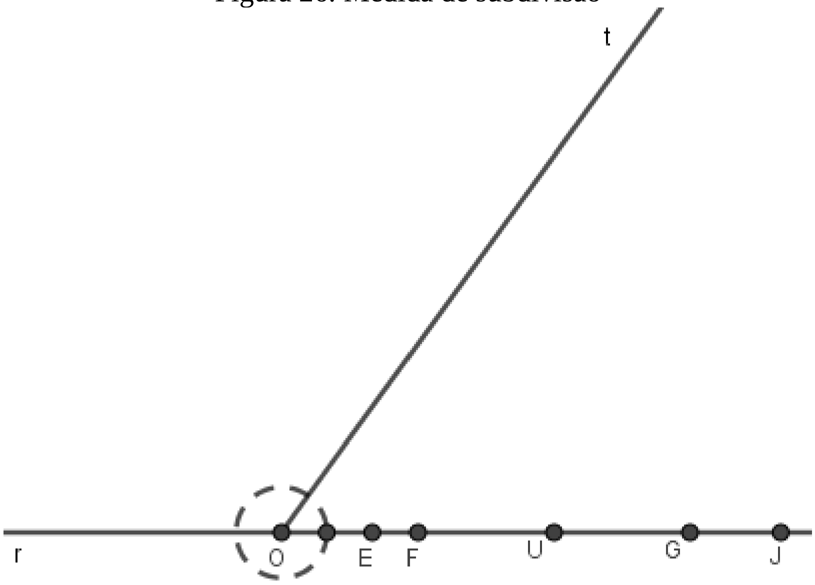
Fonte: Elaborada pela autora em 2023 no Geogebra.

- Note que por construção OG é paralelo a E'H e OE' é paralelo a GH, formando, assim, um paralelogramo OE'HG, então a fração OG é equivalente a E'H.
- Por construção EE' é paralelo a UU' e HJ é paralelo a UU', logo, EE' é paralelo a HJ, assim, EE'HJ é um paralelogramo, com isso, tem-se que E'H é equivalente a EJ.
- Como a fração OG é equivalente E'H e E'H é equivalente a EJ, então a fração OG é equivalente à EJ. Portanto, a fração OE mais a fração OG é igual a fração OJ.

<u>Revelação</u>: Por meio do processo abdutivo de tomar uma circunferência específica e por meio de realizações de alguns processos dedutivos, pode-se revelar quanto mede o segmento equivalente à soma das frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{2}$.

- Marcar um ponto sobre a reta r que represente uma fração que é a diferença entre as frações unitárias que deram origem às frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{2}$. Para isso, utilizar uma circunferência de raio igual à diferença entre as frações unitárias que deram origem às frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{2}$ com centro em O (Processo abdutivo).

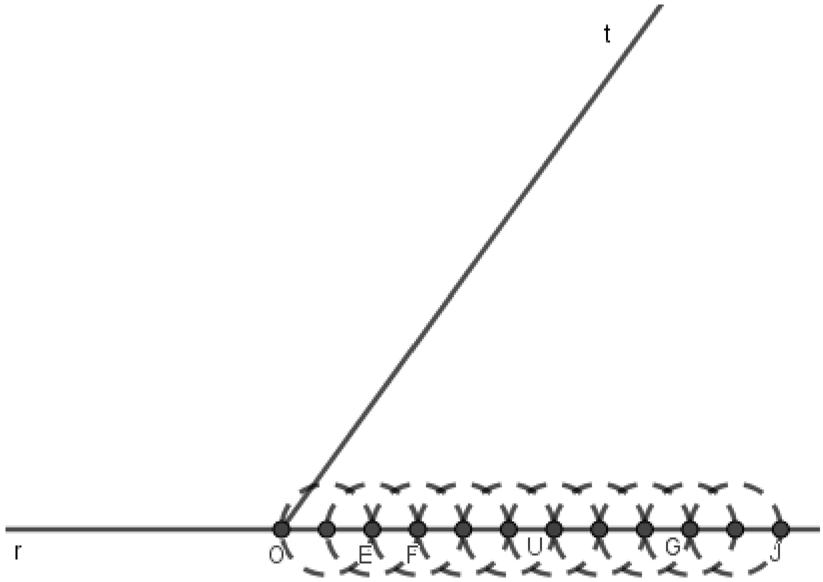
Figura 26: Medida de subdivisão



Fonte: Elaborada pela autora em 2023 no Geogebra.

- Por meio de um processo dedutivo, replicar circunferências de raio igual a diferença entre as frações unitárias que deram origem às frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{2}$ de forma a dividir todo o segmento OJ. Essa divisão deve ser feita por meio de pontos que são interseção da circunferência com a reta r. A primeira circunferência será centralizada no ponto marcado no passo anterior e as subsequentes nos próximos pontos até que a interseção da última circunferência seja o ponto J.

Figura 27: Soma fração $\frac{1}{3}$ e fração $\frac{3}{2}$



Fonte: Elaborada pela autora em 2023 no Geogebra.

- Note que o segmento unidade está dividido em 6 partes iguais, como a fração OE é composta por duas partes dessa, então, OE é $\frac{2}{6}$ da unidade OU. Já a fração OG é composta por 9 partes, logo OG é $\frac{9}{6}$ da unidade e a fração OJ é composta por 11 partes, ou seja, OJ e $\frac{11}{6}$ da unidade.
- Com isso, conclui-se que $OE + OG = OJ \therefore \frac{2}{6} + \frac{9}{6} = \frac{11}{6}$.

Comparação:

- As frações equivalentes representam a mesma parte do segmento 1.
- As frações são partes de subdivisões de unidades, que são subunidades dessa unidade. Assim, para que se obtenha o resultado da soma dessas frações é necessário que elas sejam representadas em uma mesma subunidade. Por exemplo: o milímetro e o centímetro são subunidades do metro, para que se possa somar centímetro com milímetro é necessário transformar um deles para que ambos estejam representados em uma mesma unidade. Na fração acontece a mesma coisa, ou seja, para somar duas frações é necessário que elas estejam representadas em uma mesma subdivisão da unidade considerada, assim, a transformação necessária para que elas estejam representadas em uma mesma subdivisão da unidade é obter frações que sejam equivalentes a elas, em outra subunidade da unidade considerada.

Portanto, essa é uma proposta de ambiente construtivo para operar com frações, dentro do próprio contexto da matemática. Esse ambiente foi criado com o intuito de enriquecer as práticas pedagógicas e facilitar o conhecimento de maneira mais dinâmica e servir de instrumento para que o estudante possa criar novos significados e interpretações.

Assim, a partir das ideias construídas nesse trabalho foi produzido um produto educacional, que contêm uma sequência de cinco atividades, conduzida pela complementaridade entre a geometria e a aritmética, utilizando o Experimento Mental como meio, a fim de se obter uma nova forma de entender as operações com frações e servir de apoio para o professor.

Em cada uma dessas atividades, foi proposto um Experimento Mental em que foi apresentado um passo a passo de construção e algumas perguntas que permite o estudante criar significados para as frações e para as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de frações.

CONSIDERAÇÕES

Durante essa pesquisa foi realizado um estudo teórico abordando a semiótica Peirciana com o intuito de compreender a relação entre as representações e o objeto fração mediado por um interpretante. Foi feito, também, um estudo sobre as diferentes formas de representação e contextos utilizados no ensino de frações. Como resultado dessa pesquisa compreendeu-se o conceito de complementaridade e desenvolveu-se uma forma de trabalhar frações e operações utilizando cálculo de segmentos.

Entendeu-se que há necessidade de criar um ambiente construtivo para compreender o significado das operações com frações, ou melhor, de se criar um contexto que possa construir a dialética entre o objeto do conhecimento (fração) e o sujeito cognoscente.

Para criação desse ambiente construtivo foi utilizado a complementaridade entre a Geometria e a Aritmética, pois poderiam auxiliar na compreensão do objeto do conhecimento (fração), visto que elas se complementam em sua simbologia e em seu sistema de representação e combinadas servem como instrumentos e campos de interpretação.

Ao considerar a Matemática como sendo uma atividade semiótica, nota-se a importância da utilização dos experimentos mentais, que tem como base o pensamento diagramático, que é o pilar da Matemática como uma atividade semiótica. A partir dessa compreensão, entende-se que os Experimentos Mentais como metodologia para sala de aula, pode auxiliar os estudantes a construírem fatos sobre um determinado objeto da matemática, a partir do desenvolvimento contínuo do objeto, dentro do próprio contexto da matemática e das relações de seus contrários.

A partir disso, foi sugerido a aplicação dos Experimentos Mentais no intuito de entender e/ou construir uma nova forma de desenvolver operações envolvendo frações, trazendo uma perspectiva inovadora de ensino.

Esse trabalho abre caminho para novas pesquisas em que uma delas pode buscar registrar as diferentes formas interpretativas e os significados gerados pela aplicação desses experimentos na Educação Básica.

REFERÊNCIAS

BEHR, M.; LESH, R.; POST, T.; SILVER E. (1983). Rational Number Concepts. In R. LESH & M. LANDAU (eds.), **Acquisition of Mathematics Concepts and Processes**, p. 91-125. New York: Academic Press.

CARRAHER, D. Lerning about fraction. In: STEFEE, l. Et al. (ed.). **Teories of mathematical lerning**. 1.ed, p. 241–265. New york: Routledge, 1996.

COURANT, R.; ROBBINS, H. **O que é matemática?** 1. ed. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2000.

CRUZ, W. J. A Hipótese dos Experimentos Mentais na Construção de Conceitos em Matemática. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, [*s. l.*], v. 11, n.12, p. 104-108, jun. 2018a. DOI: https://doi.org/10.17921/2176-5634.2018, v11n2p104-110. Disponível em: https://jieem.pgsskroton.com.br/article/view/4328. Acesso em: 7 jan. 2023.

CRUZ, W. J. Experimentos Mentais como metodologia de ensino por meio da perspectiva semiótica peirceana no âmbito do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UFJF. In: CRUZ, W.; RODRIGUES, C.; SILVA, A., (Org.). **Perspectivas de pesquisa e implicações no ensino e na aprendizagem de Matemática.** Juiz de Fora: Editora UFJF, 2024.

CRUZ, W. J. **Experimentos Mentais na Educação Matemática: Uma analogia com provas matemáticas formais**. 1. ed. Curitiba - PR: Appris, 2018b.

CRUZ, W. J. **Experimentos mentais: uma nova metodologia para o ensino de Matemática.** Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, Ltda., 2022a.

CRUZ, W. J. Matemática é criação ou descoberta? A importância dos experimentos mentais numa perspectiva semiótica. **Union: Revista Iberoamericana de Educação Matemática**, 2020.

CRUZ, W. J. DA. Por que raiz de $\sqrt{2}$ é irracional? Buscando explicações nos processos de experimentação mental. **Educação Matemática em Revista**, v. 28, n. 79, p. 1-15, 15 maio 2023.

CRUZ, W. J. O raciocínio diagramático e os experimentos mentais numa perspectiva semiótica. **Educação Matemática em Revista**, v. 24, n. 62, p. 6-28, Brasília, abr./jun. 2019.

CRUZ, W. J. ***O uso dos experimentos mentais como possível metodologia de ensino da matemática: um olhar epistemológico***. REVEMAT: Revista Eletrônica de matemática, [*s. l.*], 16, p. 1-26, 2021. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat. Acesso em: 7 jan. 2023.

CRUZ, W. J. Retângulo que não é retângulo? A aplicação dos experimentos mentais no Quadrilátero de Saccheri. **Revista Internacional De Pesquisa Em Educação Matemática**, [*s. l.*], v. 12, n. 4, p. 1-16, set. /dez. 2022b. DOI: https://doi.org/10.37001/ripem.v12i4.2920. Disponível em: http://www.sbemrevista.com.br/revista/index.php/ripem/article/view/2920. Acesso em: 7 jan. 2023.

DE PAULA, L. **Lady Welby, Charles Peirce e a relação entre a Linguagem Matemática**. 2021. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, 2021.

GADOTTI, M. **Concepção dialética da educação: um estudo introdutório.** 10. ed. São Paulo: Cortez, 1997.

HOFFMANN, M. H. G. **Seeing problems, seeing solutions. Abduction and diagrammatic reasoning in a theory of scientific discovery.** 2006.

HOFFMANN, M. H. G. Cognição e pensamento diagramático. In: QUEIROZ, J., MORAES, (Org) **A lógica de diagramas de Charles Sanders Peirce: Implicações em ciência cognitiva, lógica e semiótica.** L. Juiz de Fora: Editora da UFJF, 2013.

KONDER, L. **O que é dialética**. São Paulo : Brasiliense, 2008. (Coleção. **Primeiros Passos** : 23). 6a reimpr. da 28. ed. de 1981.

KUHN, T.S. **A tensão essencial.** São Paulo: Editora Unesp, 2011.

LAMON, S. Presenting and Representing: From Fractions to Rational Numbers. **The Roles of Representations in School Mathematics.** National Council of Teachers of Mathematics, 2001.

LINS, R. C. Matemática, monstros, significados e educação matemática. In: M. A. V. Bicudo, M. C. Borba. (Org.). **Educação Matemática: pesquisa em movimento.** São Paulo: Cortez Editora, 2004.

LOPES, A. J. O Que Nossos Alunos Podem Estar Deixando de Aprender Sobre Frações, Quando Tentamos lhes Ensinar Frações. **Bolema : Boletim de Educação Matemática**, v. 21, n. 31, p. 1-22. Rio Claro, 28 dez. 2008.

MANFREDI, S. M. **Metodologia de Ensino – diferentes concepções** (versão preliminar). Campinas: F.E./UNICAMP, 1993.

MONTEIRO, C.; PINTO, H. A Aprendizagem dos números racionais. **Quadrante**, [*s. l.*], v. 14, n. 1, p. 89-108, 2005.

OTTE, M. Arithmetic and Geometry: Some Remarks on the concept of complementary. **Study in Philosophy and Education,** v.10, p. 37-62. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1990.

OTTE, M. **O formal, o social e o subjetivo: uma introdução à filosofia e à didática da matemática.** Tradução: Raul Fernando Neto. São Paulo: Editora da Universidade Estadual Paulista, 1993.

OTTE, M. O Que é um Texto? (Parte 2). **Revista de Educação Pública**, *[S. l.]*, v. 18, n. 36, p. 49-69, 2012. DOI: 10.29286/rep.v18i36.519. Disponível em: https://periodicoscientificos.ufmt.br/ojs/index.php/educacaopublica/article/view/519. Acesso em: 7 jan. 2023.

OTTE, M., BARROS, L. G. X. A=B uma visão Peirceiana. In: QUEIROZ, J., MORAES, (Org) **A lógica de diagramas de Charles Sanders Peirce: Implicações em ciência cognitiva, lógica e semiótica.** L. Juiz de Fora: Editora da UFJF, 2013.

PEIRCE, C.S. **The Collected Papers od Charles S. Peirce**. Vols.I-VI [C. Hartshone, P. Weiss (Eds.). Cambridge, MA: Havard University, 1931-1935], Vols. VII-VIII [A. W. Burks (Ed.).

Cambridge, MA: Havard University, 1958], Obra citada por CP, seguido pelo número do volume e número do parágrafo

PEIRCE, C.S. (CP). **Semiótica**. Trad. Jose Teixeira Coelho Neto. 3.ed. São Paulo: Perspectiva, 2005.

PINILLA, M. I. F.; IORI, M.; D'AMORE, B. **Primeiros Elementos De Semiotica**. Traducao Maria Cristina Bonomi. São Paulo, SP: Livraria da Física, 2015.

POWELL, A. B. How does a fraction get its name? **Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática**, [*s. l.*], v. 3, n. 3, p. 700-713, dez. 2019. DOI https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2019.v.3.n.3.23846. Disponível em: http://e-revista.unioeste.br/index.php/rebecem/article/view/23846. Acesso em: 07 jan. 2023.

RADFORD, L. (1998) On Signs and Representations: A Cultural Account. **Scientia Paedagogica Experimentalis,** v.35, n.1, 277-302, 1998.

SANTAELLA, L. **O que é semiótica**. São Paulo: Brasiliense, 2007.

SANTAELLA, L. **Semiótica Aplicada**. 2.ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2005.

SEVERINO. A. J**. Metodologia do trabalho científico**. 23. ed. São Paulo: Cortez, 2007.

STJERNFELT, F. Diagramas: foco para uma epistemologia Peirciana. In: QUEIROZ, J., MORAES, (Org) **A lógica de diagramas de Charles Sanders Peirce: Implicações em ciência cognitiva, lógica e semiótica.** L. Juiz de Fora: Editora da UFJF, 2013.

WALLE, J. A. V.; KARP, K. S.; WILLIAMS, J. M. B. **Elementary and middle school Mathematics: teaching developmentally.** 8. ed. New Jersey: Pearson, 2013.

WIELEWSKI, S. A. **Pensamento instrumental e pensamento relacional na Educação Matemática.** 2008. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.