UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Kaio Cruz e Silva

Pensamento Proporcional na matemática escolar: a noção de razão

Juiz de Fora
2024

Kaio Cruz e Silva

Pensamento Proporcional na matemática escolar: a noção de razão

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.
Área de concentração: Educação Matemática.

Orientadora: Profa. Dr.ª Rosana de Oliveira

Coorientador: Prof. Dr. Amarildo Melchiades Silva

Juiz de Fora

2024

Kaio Cruz e Silva

Pensamento proporcional na Matemática escolar: a noção de razão.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós- graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação Matemática. Área de concentração: Educação Matemática.

Aprovada em 26 de setembro de 2024.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Rosana de Oliveira - Orientadora

Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Alexandre Krüger Zocolotti - Membro externo

Instituto Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. Amarildo Melchiades da Silva - Membro interno

Universidade Federal de Juiz de Fora

Juiz de Fora, 25/09/2024.

Documento assinado eletronicamente por Alexandre Krüger Zocolotti, Usuário Externo, em 25/10/2024, às 09:44, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por Rosana de Oliveira, Usuário Externo, em 25/10/2024, às 12:08, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf (www2.ufjf.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador 2004859 e o código CRC A1A990D5.

Ficha catalográfica elaborada através do programa de geração
automática da Biblioteca Universitária da UFJF,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Silva, Kaio Cruz e.
Pensamento Proporcional na matemática escolar : a noção de razão / Kaio Cruz e Silva. -- .
103 f.

Orientadora: Rosana de Oliveira
Coorientador: Amarildo Melchiades Silva
Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, 2024.

1. Educação Matemática. 2. Modelo dos Campos Semânticos. 3. Ensino e Aprendizagem. 4. Noção de Razão. 5. Educação Matemática. I. Oliveira, Rosana de, orient. II. Silva, Amarildo Melchiades, coorient. III. Título

RESUMO

Esta pesquisa tem como objetivo investigar a produção de um conjunto de tarefas sobre a noção de razão, referenciadas teorica e metodologicamente, para estudantes do Ensino Fundamental, de modo que promova o processo de desenvolvimento do pensamento proporcional. O estudo insere-se no Programa de Investigação intitulado como “Programa Linsiano”, em que uma de suas diretrizes, ao qual este trabalho se vincula, é a investigação de uma reestruturação da matemática escolar fundamentada em modos de produção de significados. A pesquisa caracteriza-se como uma abordagem qualitativa de investigação, que foi desenvolvida utilizando uma pesquisa de campo, fundamentada pelo Modelo dos Campos Semânticos. Enquanto projeto de desenvolvimento associado à pesquisa, foi produzido um produto educacional constituído por uma sequencia didática sobre a noção de razão para uso na sala de aula de matemática.

Palavras-chave: Educação Matemática. Modelo dos Campos Semânticos. Ensino e Aprendizagem. Noção de razão. Matemática Escolar.

ABSTRACT

The present research aims to investigate the production of a set of tasks on the notion of reason, theoretically and methodologically referenced, for elementary school students, in a way that promotes the process of developing proportional thinking. This research is part of the Research Program entitled “Linsiano Program”, in which one of its guidelines, to which this work is part, is the investigation of a restructuring of school mathematics based on modes of production of meanings. The research is characterized as a qualitative research approach, which was developed using field research, based on the Semantic Fields Model. As a development project associated with research, an educational product was produced consisting of a didactic sequence on reason for use in the mathematics classroom.

Keywords: Mathematics Education. Model of Semantic Fields. School Mathematics.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
MCS	Modelo dos Campos Semântico
NIDEEN	Núcleo de Investigação, Divulgação e Estudos em Educação Matemática
PPGEM	Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática UFJF
UFJF	Universidade Federal de Juiz de Fora
ZDP	Zona de Desenvolvimento Proximal

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Esta pesquisa surge do interesse em refletir sobre questões que ocorrem na sala de aula de matemática, uma vez que, no primeiro contato com a sala de aula, não mais como aluno, mas como estagiário, constatei[1] que minha visão como estagiário era diferente da que eu tinha como aluno. E que, naquele espaço, existiam relações sociais, humanas e estruturais que permeavam aquele ambiente, as quais influenciavam diretamente no processo de ensino e aprendizagem daquelas pessoas. No entanto, tais fatos fugiam ao meu controle ou à minha compreensão como potencial docente.

A relação entre professores e alunos que presenciei, como observador, em salas de aula, era uma visão tradicional estabelecida a partir da transmissão de informações, onde o aluno era mero receptor (acumulador de informações). A resolução de exercícios era baseada em respostas certas ou consideradas erradas. Não se vislumbrava nada mais além do que isso.

Por isso, comecei a refletir qual papel desempenharia na posição de professor, pois a relação que ali estava posta não funcionava, visto que os alunos alegavam não entender ou não saber, sendo meros reprodutores do que era ensinado através do treino. Logo, decidi que faria diferente: não sei se melhor, mas tentaria fazer algo que funcionasse de forma efetiva; contudo, esse movimento não é algo fácil. Logo, cheguei à conclusão de que mudanças deveriam ocorrer, fossem em mim, enquanto profissional, na minha formação, na sala de aula ou na escola.

Dessa forma, iniciei um movimento na busca por mudanças, na minha formação, ingressando no Programa Profissional de Pós-graduação em Educação Matemática (PPGEM) e participando de um grupo de pesquisa, o Núcleo de Investigação, Divulgação e Estudos em Educação Matemática (NIDEEM), em que professores estavam estudando um referencial teórico, que poderia nos auxiliar em sala de aula, denominado Modelo dos Campos Semânticos (MCS).

O Modelo dos Campos Semânticos (MCS) tem como foco o processo de ensino e aprendizagem na sala de aula de matemática, o que nos ajuda a compreender as relações humanas existentes no espaço escolar. Em seguida, durante o mestrado, ingressei no Programa de Investigação intitulado “Programa Linsiano”, em homenagem ao educador matemático Rômulo Campos Lins (1955-2017).

---

[1] Faz-se oportuno esclarecer que, embora se tenha optado nesta pesquisa pela voz de discurso representada pelo plural impessoal, converterei a escrita para a 1ª pessoa do singular quando houver referência à minha trajetória profissional, bem como a aspectos da pesquisa que registrem maior grau de pessoalidade.

Este projeto possui duas frentes de pesquisas: Matemática Escolar e Formação de Professores. No caso, o foco desta pesquisa é a Matemática Escolar. O objetivo desta frente é investigar uma reestruturação da matemática escolar, uma vez que o que está posto não tem sido efetivo no âmbito Ensino Fundamental, com a intenção de educar, matematicamente, estudantes na Educação Básica. O projeto de pesquisa em tela, que estamos desenvolvendo e que apresentaremos para esta dissertação, é um subprojeto de pesquisa deste macroprojeto.

Nossa parte, no Programa Linsiano, será participar da construção de um dos modos de pensar em matemática, denominado de Pensamento Proporcional, o qual, se considerarmos o ensino da matemática tradicional, está relacionado aos conceitos de razão, taxa, proporção. Assim, nosso projeto aborda a noção de razão (um objeto a ser constituído pelos alunos do ensino fundamental anos finais).

Em nossa avaliação inicial, constatamos que este é um tema com o qual os alunos têm pouco contato. E, naquilo que estudam, o ensino é direcionado para as definições e exemplos baseados apenas em cálculos, ou seja, reduzem todo o ensino ao treino e a técnicas que não ajudam no desenvolvimento de um pensamento proporcional.

O Pensamento Proporcional, na perspectiva da noção de razão, é um assunto de suma importância, uma vez que este possui interseção com o pensamento aritmético. No entanto, temos observado até então que há uma redução de razão ao pensamento algébrico. Porém, o Pensamento Proporcional é um modo de pensar que não se restringe a um modo apenas de operar (pensar), pois faz interseções com o pensamento estatístico, geométrico e aritmético.

No nosso caso, olharemos para o Pensamento Proporcional na perspectiva do pensamento aritmético, pois trataremos da noção de razão. No capítulo 1, abordamos o Pensamento Proporcional, apresentando a perspectiva de diversos pesquisadores sobre o que seria o Pensamento Proporcional e quais contribuições ele poderá trazer para o processo de ensino e aprendizagem. Para isso, foram analisadas situações postas em vigência, no atual modelo de ensino de tais tópicos, bem como foram analisados os livros didáticos que são utilizados em sala de aula a fim de que, em seguida, seja apresentada a nossa proposta de ensino e investigação do tema proposto.

No capítulo 2, apresentamos uma Revisão da Literatura com as respectivas pesquisas, investigações e leituras realizadas sobre o assunto em questão. Entretanto, constatamos que há poucos trabalhos relacionados à ideia de razão, e os poucos encontrados são direcionados à noção de proporção. Sendo assim, temos como objetivo investigar a noção de razão como instrumento que propicie o Pensamento Proporcional.

Já no capítulo 3, trazemos o Referencial Teórico e Metodológico, ou seja, a sustentação, fundamentação e orientação das ações desta pesquisa, que se dará através do MCS. Por meio deste, será elaborado, analisado e investigado um conjunto de tarefas, que constituirá o produto educacional.

No capítulo 4, descrevemos o caminho traçado ao longo da pesquisa, com respectivos métodos e ações realizadas, de maneira que fundamente os objetivos da pesquisa.

Por sua vez, no último capítulo, apresentamos as possíveis produções de significados dadas pelos alunos para as tarefas que serão propostas, as quais constituirão o produto educacional desta pesquisa com as respectivas leituras que serão realizadas seguindo as premissas do MCS.

Destarte, esperamos que o trabalho possa contribuir para o processo de ensino e aprendizagem de razão de modo que potencialize e amplie a produção de significados dos alunos para que ocorram neste espaço a interação e aprendizagem desses.

2 PENSAMENTO PROPORCIONAL

Neste capítulo, abordamos a importância do Pensamento Proporcional e a noção de razão, bem como a maneira por meio da qual alguns estudiosos visualizam e interpretam tal modo de pensar com suas respectivas implicações nos cotidianos. Além disso, será observado o modo como tal objeto é constituído no ambiente escolar e seus modos de produção de significado. Para isso, analisamos materiais que fazem parte do cotidiano da sala de aula, tais como livros didáticos, que serão analisados apartir do que temos hoje para, mais adiante, apresentarmos nossa contraproposta.

2.1 CONCEPÇÕES DE PENSAMENTO PROPORCIONAL EM MATEMÁTICA

Nesta seção, apresentamos as respectivas concepções acerca do Pensamento Proporcional. Para isso, detalhamos o que trazem alguns livros e pesquisadores da educação matemática acerca do tema, bem como algumas concepções de educadores matemáticos, para que, assim, possamos analisar o modo com o qual tal modo de pensar é desenvolvido e se o mesmo ocorre através da noção de razão.

De acordo com Lamon (1999 *apud* Walle, 2009, p. 384, grifo no original), "[...] estima-se que mais da metade da população adulta [nos Estados Unidos] não pode ser considerada pensador proporcional (Lamon 1999). Isso significa que não adquirimos os hábitos e habilidades de raciocínio proporcional simplesmente crescendo".

Destarte, trouxemos tal reflexão para nossa pesquisa: será que a população brasileira pensa de modo proporcional? Tal questionamento fomenta este estudo com suas respectivas implicações. Sendo assim, iremos pensar nessa forma de raciocinar a partir do que temos presenciado e visualizado no processo de ensino e aprendizagem dos alunos brasileiros.

Ademais, Lamon (1999) recorda que o processo do desenvolvimento do Pensamento Proporcional não está ligado ao desenvolvimento associado à idade. A autora explicita que o simples fato de crescer não implica o desenvolvimento desse pensamento. Dessa forma, nos distanciamos daquela ideia de em qual idade o pensamento proporcional estará desenvolvido, ou da visão de quanto mais tarde pensar ou trabalhar tal modo, melhor. Sendo assim, acreditamos que o desenvolvimento deste possa acontecer ou ser aguçado no que Vygotsky denomina Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP). Nesse contexto, temos que desenvolver tarefas que promovam a atuação do aluno na ZDP.

Segundo Carraher (2003), o Pensamento Proporcional é formado pelas ideias de razão e proporção. Além disso, esta ideia foi considerada pelo autor, sendo uma das bases para o pensamento algébrico. No livro *As ideias da álgebra*, escrito e organizado por Coxford e Shulte (1995), no capítulo 8, intitulado como *A proporcionalidade e o desenvolvimento de noções pré-álgebra*, Post, Behr e Lesh (1995) observam:

> O raciocínio e o conhecimento algébricos muitas vezes envolvem modos diferentes de representação. Tabelas, gráficos, símbolos (equações, desenhos e diagramas) são maneiras importantes pelas quais se podem representar as ideias algébricas. A capacidade de criar e compreender traduções desses modos e de um para outro é um elemento essencial de competência matemática em todas as áreas, e não apenas em álgebra. As situações proporcionais e os raciocínios que as acompanham fornecem um excelente veículo para ilustrar essas associações multiformes (Post; Behr; Lesh, 1995 *apud* Coxford; Shulte, 1995, p. 92)

Ou seja, os autores acreditam que Pensamento Proporcional tenha interseção com outros modos de pensar. No entanto, nesta passagem, refrem-se apenas ao algébrico.

De acordo com Lins e Gimenez (1997) no livro *Perspectiva em aritmética e algébra para o século XX e XXI*, o Pensamento Proporcional é assim definido:

> Chamamos pensamento proporcional aquele que corresponde a uma estrutura de comparação entre partes ou entre todos, ou entre as partes e um todo, ou como um esquema instrumental que resolve algumas situações especiais de comparação em forma multiplicativa ou aditiva. Alguns autores consideram que existem tipos de problemas que, implicitamente, levam consigo esse tipo de pensamento, e são: comparações, razões e conversões(também chamadas trocas de unidade), inclusão hierarquica e combinações. Em cada caso pode-se ter como incógnita qualquer um dos elementos ou um total. O pensamento proporcional associa-se normalmente às operações de multiplicação e divisão (Lins; Gimenez, 1997, p. 52).

De acordo com Walle (2009), definir o Pensamento Proporcional não é uma tarefa fácil, pois esse processo carrega características qualitativas e quantitativas. Para o autor, as pessoas que pensam proporcionalmente possuem as seguintes características:

> Possuem um senso de covariação. Isto é, eles compreendem relações em que duas quantidades variam juntas e são capazes de perceber como a variação de uma coincide com a variação da outra.
> Reconhecem relações proporcionais como distintas de relações não proporcionais em contextos do mundo real.

> Desenvolvem uma ampla variedade de estratégias para resolver proporções ou comparar razões, a maioria baseadas em estratégias informais em vez de algoritmos prescritos.
> Compreendem razões como entidades distintas representando uma relação diferente das quantidades que elas comparam (Walle, 2009, p. 384).

Como recorda Walle (2009), o qualitativo desperta no estudante o caráter analítico e crítico. Ou seja, ele analisa, produz hipóteses, experimenta seus respectivos raciocínios, o que produz uma pluralidade de ideias e modos de produzir tal conceito.

Essas são algumas das características que, enquanto professores, tentamos ou desejamos despertar em nossos alunos, pois constituem elementos que a vida em sociedade lhes cobra ou espera, uma vez que esperamos que a matemática escolar desperte nesses estudantes atributos que lhes possibilitem viver, pensar, refletir de forma crítica sobre e para o mundo.

Já as características quantitativas existem para entender, interpretar, comparar e refletir sobre a relação que está ocorrendo ou sendo produzida no interior da atividade proposta. Os números geralmente representam algo, não somente a resposta final de um exercício. Logo, ambas são complementares, uma necessita da outra para que ambas produzam algo

Nossa participação no projeto de pesquisa citado diz respeito a investigar o Pensamento Proporcional a partir da noção de razão. Nossa proposta é que tal objeto comece a aparecer ou ser discutido no 6º ano do Ensino Fundamental anos finais.

O tema tratado nesta dissertação é permeado de bastante relevância. Inclusive, alguns dos autores citados no início desta seção referenciam de algum modo as respectivas perspectivas na matemática escolar, quais sejam: 1) parte-todo, que seria analisar comparações de uma parte de um todo; 2) parte-parte, que seria a parte da parte de um todo; 3) taxa, a qual seria a comparação parte-todo e parte-parte, porém com grandezas distintas; 4) senso de covariação, que corresponderia à análise do crescimento ou decrescimento de uma situação.

Durante o processo de análise sobre como é trabalhado o obejeto razão, observamos que esse é um assunto com o qual os alunos têm pouco contato, ou, se o tem, é por um curto espaço de tempo, o que não lhes permite compreender as relações existentes.

Nos materiais analisados, quando o tema em questão era abordado, o tópico era pouco discutido e rapidamente era direcionado à ideia de proporcionalidade e aos cálculos. Ou seja, não se tinha uma ideia do que era razão, e dessa forma, não se trabalha esse conceito. Ou seja, resume-se razão a proporção, esquecem ou não entendem o que é a noção de razão. Como afirma Walle (2009), uma forma de entender razão seria:

> Uma razão é um número que relaciona duas quantidades ou medidas dentro de uma dada situação ou medidas dentro de uma dada situação através de uma relação multiplicativa (em contraste com uma relação de diferença ou aditiva). Uma razão pode ser aplicada a outra situação onde os valores relativos das quantidades ou medidas sejam os mesmos na primeira situação (Smith, 2002). (Walle, 2009, p. 383, grifo no original).

Neste trecho, o autor define o que é razão. Ou seja, é o quociente dos números que medem essas grandezas, que Walle (2009) reconhece como medidas, em uma mesma unidade. Sendo assim, calculamos a razão com o objetivo de comparar duas grandezas para que possamos analisar, pois nessa perspectiva não teremos apenas números, pois esses dizem mais do que apenas isso.

No entanto, é necessário reafirmar que tal definição faz parte do final do processo, pois, como pontua Walle (2009, p. 384), "[...] O uso prematuro de regras encoraja os estudantes a aplicar regras sem pensar e, desse modo, a habilidade de raciocinar proporcionalmente não se desenvolve".

Nessa direção, Smith (2002, p. 15, grifo no original) reforça o argumento de Walle ao afirmar que "[...] O desafio central no desenvolvimento da capacidade dos estudantes para pensar com razões (a pensar proporcionalmente) é ensinar ideias [e não regras] e conter o caminho rápido para a computação".

2.2 O PENSAMENTO PROPORCIONAL NO LIVRO DIDÁTICO DE MATEMÁTICA

No ensino tradicional vigente, o livro didático ocupa uma posição central no que é ensinado de matemática nas escolas (ou no Ensino Fundamental). Como os alunos compram seu livro ou a escola pública escolhe e adota um livro para os estudantes, os governos municipais e estaduais compram as coleções para uso em sala de aula. Com isso, acabam determinando quais conteúdos são ensinados e como são ensinados.

Por esse motivo, a análise do livro didático é importante para entendermos como ocorre o ensino de temas que constituem o Pensamento Proporcional.

Porém, como sabemos, os livros didáticos diferem muito pouco em sua estrutura, pois, para serem aprovados, é necessária uma padronização que condiciona sua aceitação. Com isso em mente, faremos a análise de um livro didático que expressa a nosso ver a proposta de todos eles.

Na coleção de quatro volumes intitulado *Araribá mais matemática: Matemática (2018)*, os autores Mara Regina Garcia Gay e Willian Raphael Silva apresentam os temas que discutem o Pensamento Proporcional para o 7º ano no capítulo 11 denominado “Proporção”, trazendo explicações que abordam os seguintes temas descritos no sumário:

- Razão;
- Proporção;
- Grandezas e medidas em nosso cotidiano;
- Grandezas diretamente proporcionais;
- Grandezas Inversamente proporcionais;
- Regra de três;
- Porcentagem;
- Juros simples.

Observamos que, ao serem introduzidos, os itens de cada subcapítulo ocorrem em uma estrutura que se repete ao longo do material didático. Este traz situações que são consideradas próximas aos alunos com o intuito de diminuir a distância do estudante para o centro da conversa. No entanto, todo esse processo é direcionado de acordo com a perspectiva do que o autor acha que os discentes irão pensar ou produzir. Ou seja, são materiais que propõem a situação e, em seguida, respondem conforme o modo de pensar de quem produz o material, sem pensar que existem outros modos de pensar ou construir tais ideias.

Os autores do livro analisado iniciam com o subcapítulo 1. Neste, pretendem trabalhar o conceito de razão atrvés de dados colhidos com relação às copas do mundo de futebol, com os respectivos quadros de medalha de cada seleção, de 1930 a 2014:

Figura 1 – Quadro de medalhas 1

Fonte: Gay e Silva (2018, p. 262).

Figura 2 – Quadro de medalhas 2

Fonte: Gay e Silva (2018, p. 262).

Em seguida, os autores explanam que, para se comparar qual seleção obteve mais vitórias ou outros aspectos, torna-se necessário utilizar a divisão, que será chamada neste caso por razão. Neste momento, é realizado um acordo com o estudante de que, quando houver divisão, estaremos utilizando a razão.

Destarte, propõem algumas falas de uma professora para seus alunos conforme disposto na ilustração a seguir:

Figura 3 – Falas de uma professora

Fonte: Gay e Silva (2018, p. 262).

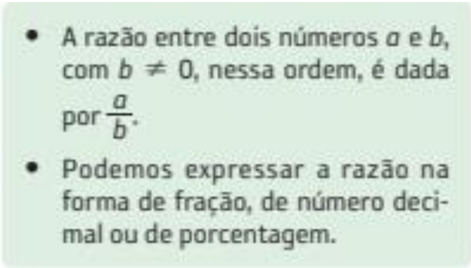
Em um primeiro momento, os autores ressaltam a importância da divisão como instrumento de comparação das razões. Porém, no segundo balão, a professora traz a abordagem de razão enquanto fração. Inclusive, apresenta a fração irredutível, que é equivalente à apresentada inicialmente, como se fosse algo direto ou trivial.

Ao analisar este início, podemos observar que a ideia de razão é apresentada sob a perspectiva da divisão e da fração. Ou seja, em uma página do livro, foram apresentados dois modos de olhar para razão, sem uma preocupação quanto à quantidade de informação a qual estava sendo apresentada a um estudante de 12 anos. Além dessas apresentações, é realizado um comentário de quantos por cento de jogos o Brasil ganhou, mas como foi realizada essa passagem? Qual é a ligação entre divisão, fração e porcentagem com razão?

Notamos que, na primeira página, foram apresentados diversos modos de operar e visualizar razão, objeto principal desta seção. Será que este excesso de informação e situações seriam somente mais uma informação para esses adolescentes? Acreditamos que foram realizadas algumas passagens ao longo de uma página, que não são triviais. Ao analisar a proposta deste livro, constatamos que o fato de relacionar fração com divisão não é algo simplório, muito menos fração com porcentagem.

Destarte, os autores definem o que é razão da seguinte forma:

Figura 4 – Definição de razão pelo autor


- A razão entre dois números a e b, com $b \neq 0$, nessa ordem, é dada por $\frac{a}{b}$.
- Podemos expressar a razão na forma de fração, de número decimal ou de porcentagem.

Fonte: Gay e Silva (2018, p. 262).

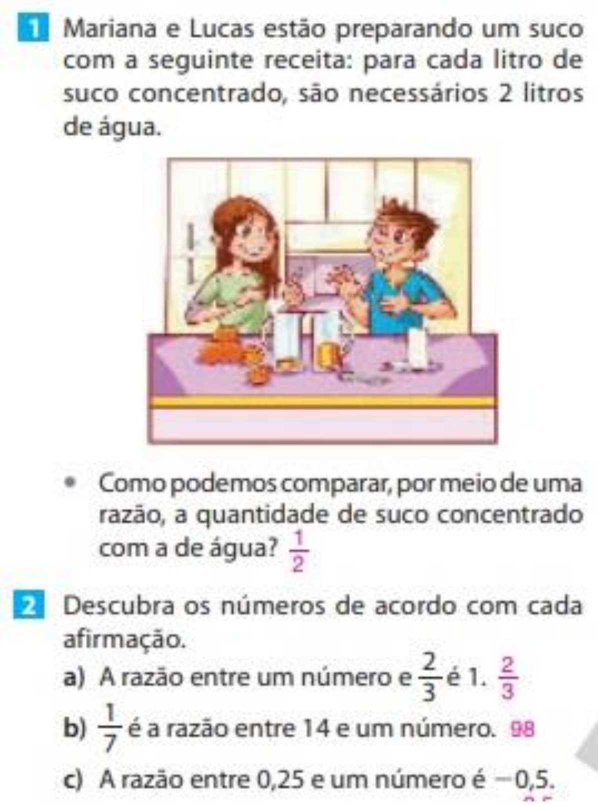
Na página seguinte, foi proposta uma situação sobre a qual uma aluna faz uma reflexão conforme verificamos na ilustração a seguir:

Figura 5 – Pensamento da estudante

Fonte: Gay e Silva (2018, p. 262).

Neste caso, o que está escrito na cor rosa seria o que se espera do aluno ao pensar na questão proposta. Assim, os autores encerram toda a discussão acerca do conceito de razão. Em apenas duas páginas, foram abordados assuntos sem que haja um tempo de assimilação. Alguns dos conteúdos são considerados os famosos "calcanhares de Aquiles" no processo de ensino e aprendizagem de matemática na educação básica. Em seguida, os autores apresentam 8 (oito) exercícios, partindo do pressuposto que o estudante compreendeu tudo que foi trabalhado:

Figura 6 – Exercícios propostos pelo autor - primeira seção – parte 1



1 Mariana e Lucas estão preparando um suco com a seguinte receita: para cada litro de suco concentrado, são necessários 2 litros de água.

- Como podemos comparar, por meio de uma razão, a quantidade de suco concentrado com a de água? $\frac{1}{2}$

2 Descubra os números de acordo com cada afirmação.

a) A razão entre um número e $\frac{2}{3}$ é 1. $\frac{2}{3}$

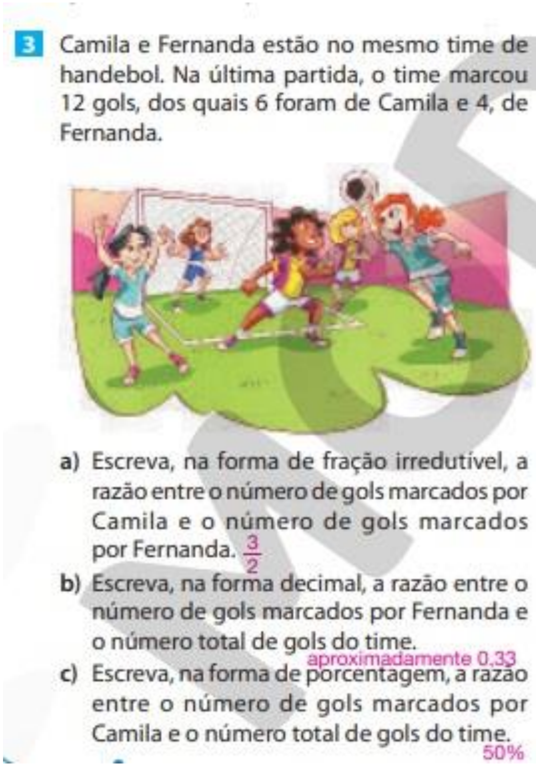
b) $\frac{1}{7}$ é a razão entre 14 e um número. 98

c) A razão entre 0,25 e um número é $-0{,}5$.

Fonte: Gay e Silva (2018, p. 264).

O primeiro exercício é uma tentativa de buscar uma situação cotidiana. Contudo, no fim da atividade, pede-se que o aluno identifique a razão. Acreditamos que a pergunta final esgota todas as possibilidades de possíveis respostas ou hipóteses as quais os alunos possam construir. Já o segundo exercício é técnico: após as explanações do livro, é solicitado que o leitor identifique a razão de um determinado número. Ocorre que, do exercício anterior para esse, foi modificado o modo como é tratado e abordado o assunto:

Figura 7 – Exercícios propostos pelo autor - primeira seção – parte 2


3 Camila e Fernanda estão no mesmo time de handebol. Na última partida, o time marcou 12 gols, dos quais 6 foram de Camila e 4, de Fernanda.

a) Escreva, na forma de fração irredutível, a razão entre o número de gols marcados por Camila e o número de gols marcados por Fernanda. $\frac{3}{2}$

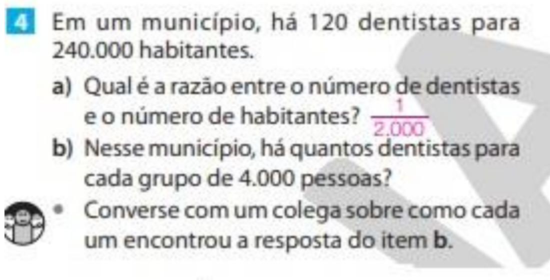
b) Escreva, na forma decimal, a razão entre o número de gols marcados por Fernanda e o número total de gols do time. aproximadamente 0,33

c) Escreva, na forma de porcentagem, a razão entre o número de gols marcados por Camila e o número total de gols do time. 50%

Fonte: Gay e Silva (2018, p. 264).

A atividade acima é bastante interessante e convidativa ao aluno. No entanto, quando as questões são encaminhadas ao estudante, esse momento torna-se algo mecânico e que reduz as possíveis discussões, bem como o surgimento de possíveis modos de produção de significados. Nesta proposta, a cada item, o discente olha para razão por uma perspectiva: fração (irredutível), decimal e porcentagem:

Figura 8 -Exercícios propostos pelo autor - primeira seção – parte 3



4 Em um município, há 120 dentistas para 240.000 habitantes.

a) Qual é a razão entre o número de dentistas e o número de habitantes? $\frac{1}{2.000}$

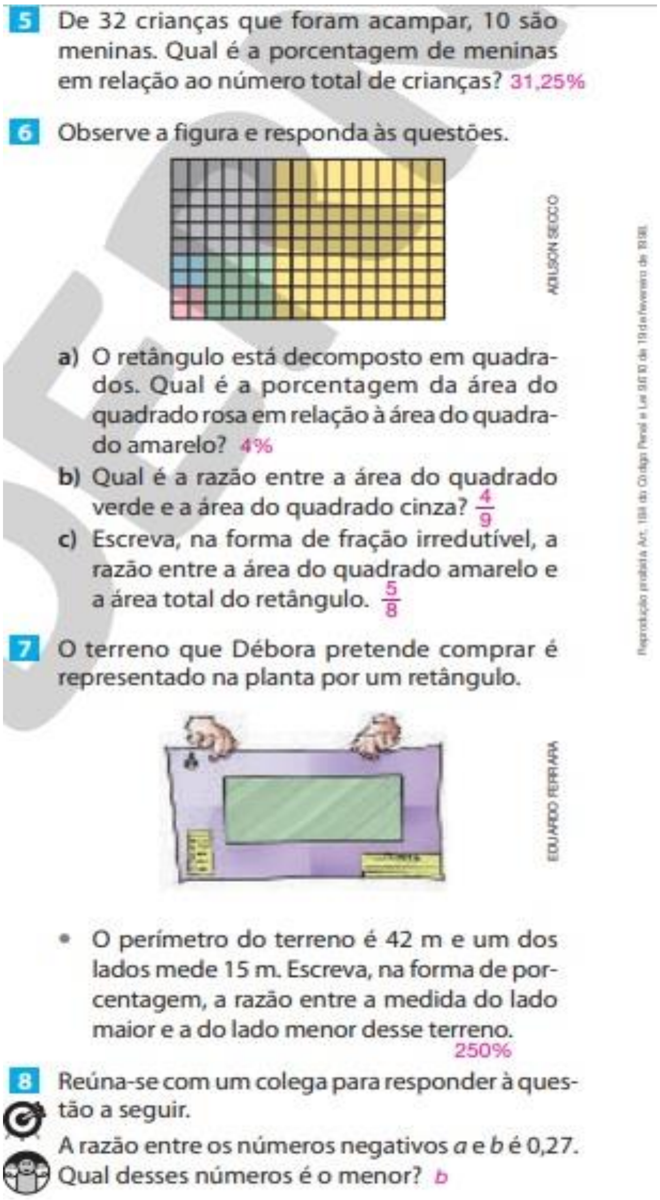
b) Nesse município, há quantos dentistas para cada grupo de 4.000 pessoas?

• Converse com um colega sobre como cada um encontrou a resposta do item **b**.

Fonte: Gay e Silva (2018, p. 264).

Este exercício está presente nas nossas tarefas, porém foram feitas algumas modificações com relação ao conteúdo de modo que o aluno pudesse resolver de modo mais aberto e com o qual tivesse mais facilidade ou afinidade:

Figura 9 – Exercícios propostos pelo autor - primeira seção – parte 4



5 De 32 crianças que foram acampar, 10 são meninas. Qual é a porcentagem de meninas em relação ao número total de crianças? 31,25%

6 Observe a figura e responda às questões.

ADILSON SECCO

a) O retângulo está decomposto em quadrados. Qual é a porcentagem da área do quadrado rosa em relação à área do quadrado amarelo? 4%

b) Qual é a razão entre a área do quadrado verde e a área do quadrado cinza? $\frac{4}{9}$

c) Escreva, na forma de fração irredutível, a razão entre a área do quadrado amarelo e a área total do retângulo. $\frac{5}{8}$

7 O terreno que Débora pretende comprar é representado na planta por um retângulo.

EDUARDO FERRARA

- O perímetro do terreno é 42 m e um dos lados mede 15 m. Escreva, na forma de porcentagem, a razão entre a medida do lado maior e a do lado menor desse terreno. 250%

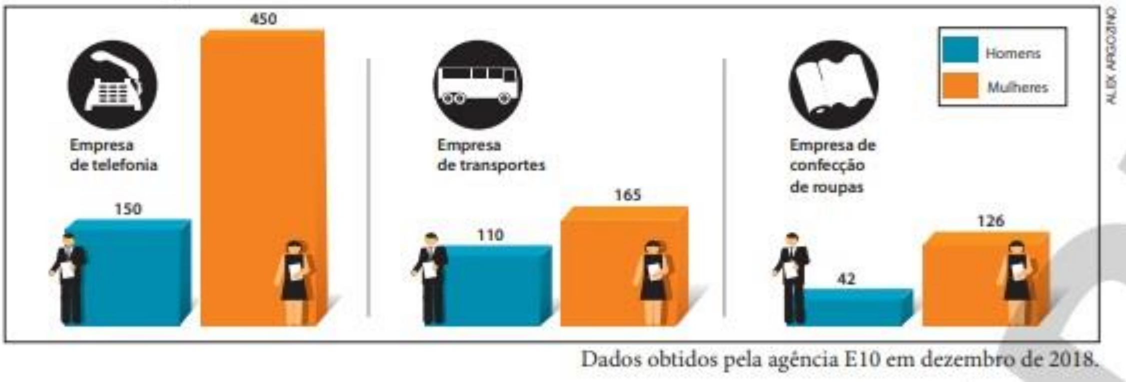
8 Reúna-se com um colega para responder à questão a seguir.

A razão entre os números negativos *a* e *b* é 0,27. Qual desses números é o menor? *b*

Fonte: Gay e Silva (2018, p. 264).

No subcapítulo 2, os autores se propõem a trabalhar proporção. Para isso, trazem a comparação entre o número de homens e mulheres que trabalham em alguns setores de serviço, porém esse é um assunto que, para um estudante de 12 anos de idade, não é convidativo. Talvez alguns deles nem se sintam atraidos ou convidados a pensar a respeito. Ou seja, o material é escrito para adolescentes, mas não é analisado ou projetado de modo que os atraia a consumir ou pensar sobre tais questões:

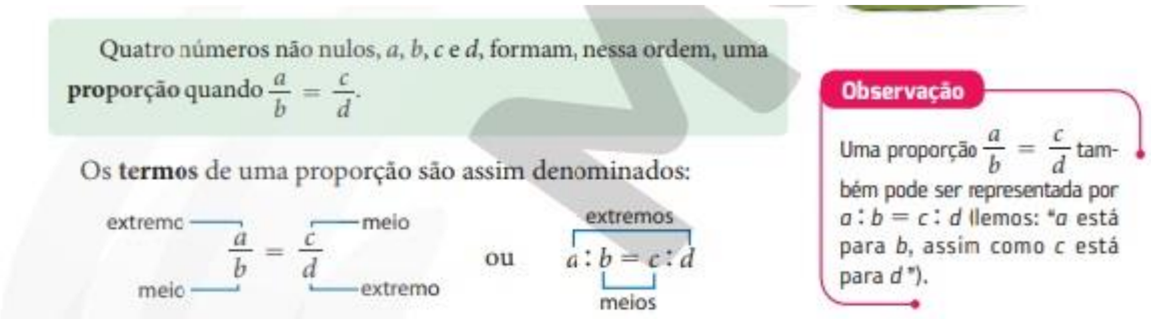
Figura 10 – Dados estatísticos



Fonte: Gay e Silva (2018, p. 267).

Como se observa, foram escolhidas razões iguais entre as comparações obtidas nos setores de serviço para que se pudesse introduzir a discussão de proporção. Em seguida, é apresentada a definiçao, trazida inclusive como observação de um modo de representar a razão. Ou seja, o novo modo simbólico surge ao se trabalhar proporção:

Figura 11 – Definição de proporção pelo autor



Fonte: Gay e Silva (2018, p. 265).

Em seguida, os autores trazem alguns exemplos com relação à propriedade fundamental das proporções. Nesta seção, apresentam diversas formas de manipular a definição que foi descrita na página anterior. Assim, formalizam a definição do que chamamos de propriedade fundamental da proporção:

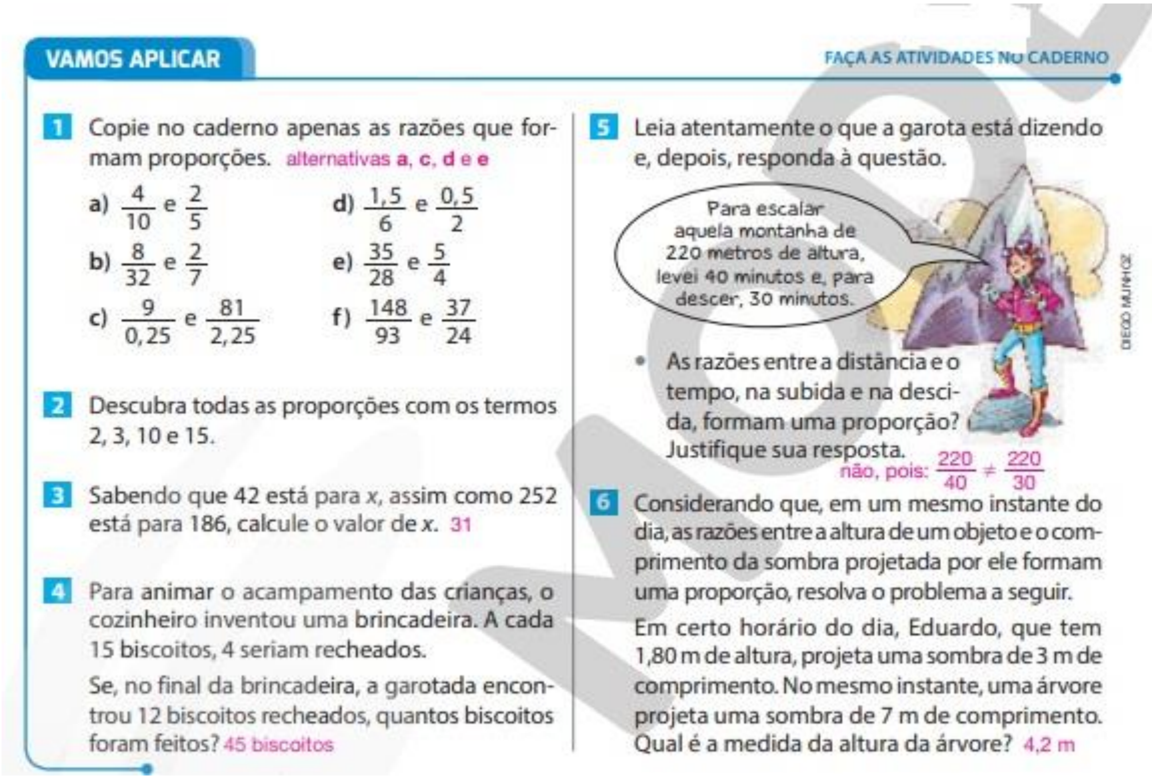
Figura 12 – Propriedade da proporção

Em toda proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios. Ou seja, dados os números a, b, c e d não nulos, com $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, temos: $a \cdot d = b \cdot c$

Gay e Silva (2018, p. 267).

Após esses materiais, trazem uma sequencia de 6 (seis) exercícios, que podem ser analisados e observados na imagem a seguir:

Figura 13 – Exercícios propostos pelos autores envolvendo proporção



VAMOS APLICAR

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Copie no caderno apenas as razões que formam proporções. alternativas **a**, **c**, **d** e **e**

a) $\frac{4}{10}$ e $\frac{2}{5}$
b) $\frac{8}{32}$ e $\frac{2}{7}$
c) $\frac{9}{0,25}$ e $\frac{81}{2,25}$
d) $\frac{1,5}{6}$ e $\frac{0,5}{2}$
e) $\frac{35}{28}$ e $\frac{5}{4}$
f) $\frac{148}{93}$ e $\frac{37}{24}$

2 Descubra todas as proporções com os termos 2, 3, 10 e 15.

3 Sabendo que 42 está para *x*, assim como 252 está para 186, calcule o valor de *x*. 31

4 Para animar o acampamento das crianças, o cozinheiro inventou uma brincadeira. A cada 15 biscoitos, 4 seriam recheados.

Se, no final da brincadeira, a garotada encontrou 12 biscoitos recheados, quantos biscoitos foram feitos? 45 biscoitos

5 Leia atentamente o que a garota está dizendo e, depois, responda à questão.

- As razões entre a distância e o tempo, na subida e na descida, formam uma proporção? Justifique sua resposta. não, pois: $\frac{220}{40} \neq \frac{220}{30}$

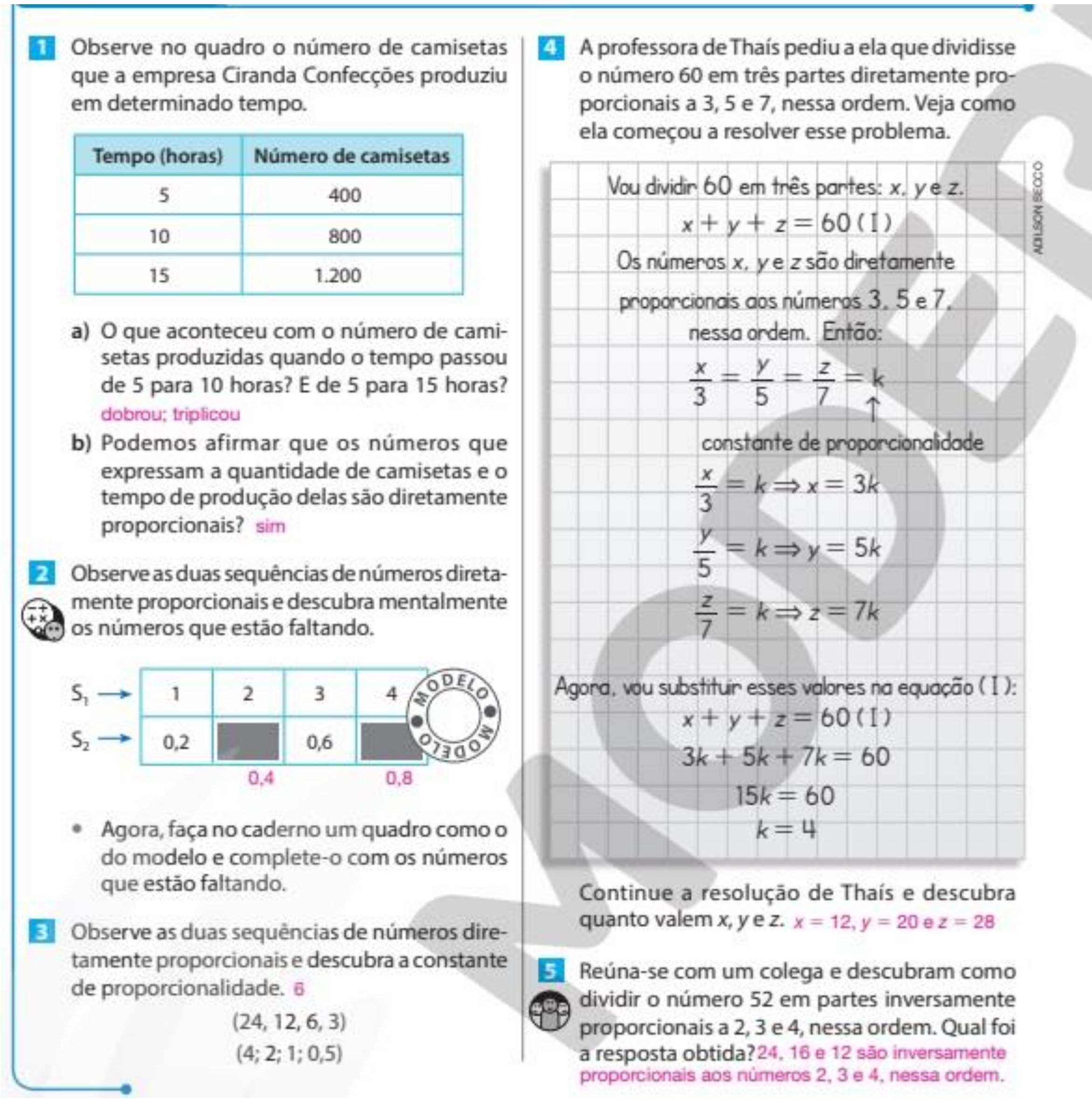
6 Considerando que, em um mesmo instante do dia, as razões entre a altura de um objeto e o comprimento da sombra projetada por ele formam uma proporção, resolva o problema a seguir.

Em certo horário do dia, Eduardo, que tem 1,80 m de altura, projeta uma sombra de 3 m de comprimento. No mesmo instante, uma árvore projeta uma sombra de 7 m de comprimento. Qual é a medida da altura da árvore? 4,2 m

Fonte: Gay e Silva (2018, p. 265).

Para concluir esta seção, são detalhadas situações para iniciar a discussão acerca de sequências diretamente proporcionais e inversamente proporcionais. Para isso, os professores que assinam a obra analisada utilizaram situações para descrever o modo de pensar proporcionalmente, porém não apresentam nenhuma situação para ilustrar o segundo caso. Trazem apenas dados numéricos para ilustrar tal contexto, apresentando a definição dos dois modos, e, em sequência, uma lista de 5 (cinco) exercícios:

Figura 14 – Exercícios propostos pelo autor envolvendo sequências diretamente e inversamente 1



1 Observe no quadro o número de camisetas que a empresa Ciranda Confecções produziu em determinado tempo.

Tempo (horas)	Número de camisetas
5	400
10	800
15	1.200

a) O que aconteceu com o número de camisetas produzidas quando o tempo passou de 5 para 10 horas? E de 5 para 15 horas? dobrou; triplicou

b) Podemos afirmar que os números que expressam a quantidade de camisetas e o tempo de produção delas são diretamente proporcionais? sim

2 Observe as duas sequências de números diretamente proporcionais e descubra mentalmente os números que estão faltando.

$S_1 \rightarrow$	1	2	3	4
$S_2 \rightarrow$	0,2	0,4	0,6	0,8

- Agora, faça no caderno um quadro como o do modelo e complete-o com os números que estão faltando.

3 Observe as duas sequências de números diretamente proporcionais e descubra a constante de proporcionalidade. 6

(24, 12, 6, 3)

(4; 2; 1; 0,5)

4 A professora de Thaís pediu a ela que dividisse o número 60 em três partes diretamente proporcionais a 3, 5 e 7, nessa ordem. Veja como ela começou a resolver esse problema.

Vou dividir 60 em três partes: x, y e z.

$$x + y + z = 60 \ (\mathrm{I})$$

Os números x, y e z são diretamente proporcionais aos números 3, 5 e 7, nessa ordem. Então:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{7} = k$$

constante de proporcionalidade

$$\frac{x}{3} = k \Rightarrow x = 3k$$

$$\frac{y}{5} = k \Rightarrow y = 5k$$

$$\frac{z}{7} = k \Rightarrow z = 7k$$

Agora, vou substituir esses valores na equação (I):

$$x + y + z = 60 \ (\mathrm{I})$$

$$3k + 5k + 7k = 60$$

$$15k = 60$$

$$k = 4$$

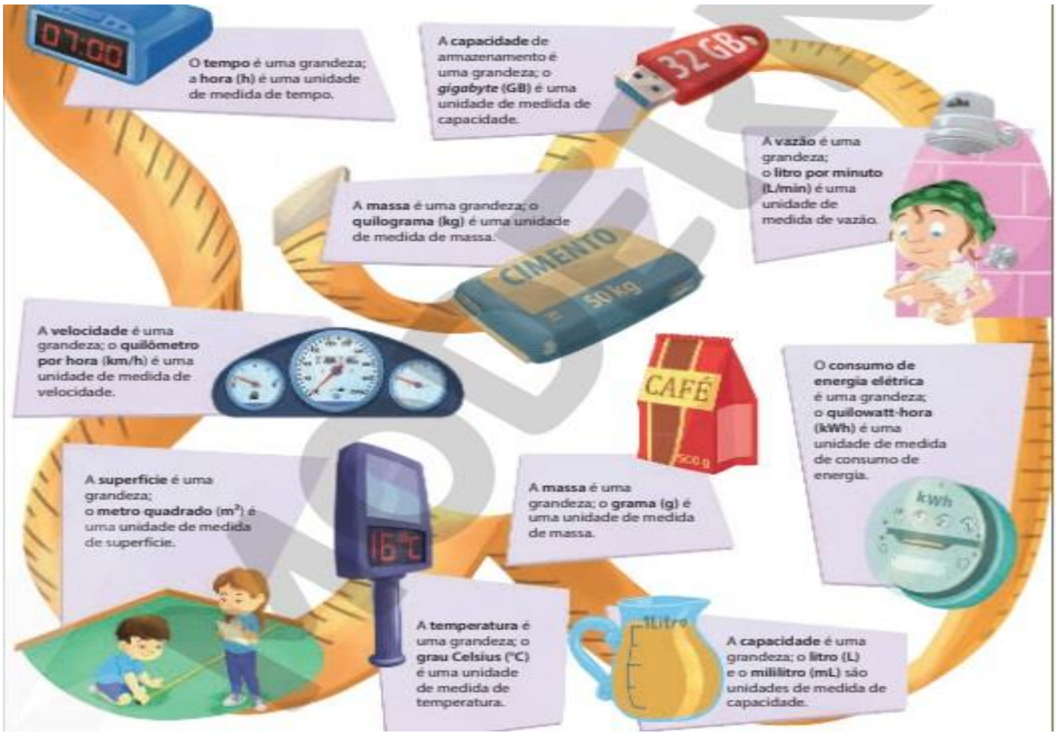
Continue a resolução de Thaís e descubra quanto valem x, y e z. $x = 12$, $y = 20$ e $z = 28$

5 Reúna-se com um colega e descubram como dividir o número 52 em partes inversamente proporcionais a 2, 3 e 4, nessa ordem. Qual foi a resposta obtida? 24, 16 e 12 são inversamente proporcionais aos números 2, 3 e 4, nessa ordem.

Fonte: Gay e Silva (2018, p. 269).

No subcapítulo número 3, são apresentadas as grandezas e medidas, com respectiva contextualização de algumas situações, conforme trazido na ilustração a seguir:

Figura 15 – Grandezas e medidas 1



Fonte: Gay e Silva (2018, p. 270).

Nos dois subcapítulos seguintes, os professores que assinam o livro didático analisado trabalham grandezas diretamente e inversamente proporcionais. Para isso, fazem uso de situações para ilustrar tais situações – no exemplo em questão, utilizam o recurso de tabelas para resolução e visualização dos problemas. No caso, são exibidos os primeiros exemplos dos dois subcapítulos, seguidos das respectivas resoluções:

Figura 16 – Situações com exercícios sobre grandezas diretamente proporcionais – 1

Situação 1

Um funcionário de uma indústria automobilística decidiu testar se a velocidade indicada no velocímetro de um automóvel era precisa. Para isso, verificou a distância percorrida pelo veículo durante 1 minuto, mantendo a mesma velocidade média. Primeiro, ele manteve a velocidade média do veículo em 60 km/h e registrou a distância percorrida em 1 minuto. Em seguida, testou outras velocidades. Veja os resultados do teste no quadro abaixo.

Velocidade média (km/h)	60	120	30	90
Distância percorrida em 1 minuto (km)	1	2	0,5	1,5

Observe que a razão entre o valor da velocidade média e o valor correspondente à distância percorrida será sempre a mesma:

$$\frac{60}{1} = \frac{120}{2} = \frac{30}{0,5} = \frac{90}{1,5} = \ldots = 60$$

Nesse caso, podemos dizer que as grandezas velocidade média e distância percorrida são **diretamente proporcionais**.

Duas grandezas são **diretamente proporcionais** quando variam sempre na mesma razão. Ou seja, duas grandezas são diretamente proporcionais quando, se o valor de uma dobra, o valor da outra também dobra; se é reduzido pela metade o valor de uma, o valor da outra também se reduz pela metade; e assim por diante.

Gay e Silva (2018, p. 270).

Figura 17– Situações com exercícios sobre grandezas diretamente proporcionais – 2

Situação 1

No quadro abaixo, está representado o tempo gasto por uma moto para percorrer certa distância variando a velocidade média.

Velocidade média (km/h)	30	60	15	7,5
Tempo (h)	2	1	4	8

A razão entre o valor da velocidade média e o inverso do valor correspondente ao tempo gasto é sempre a mesma:

$$\frac{30}{\frac{1}{2}} = \frac{60}{\frac{1}{1}} = \frac{15}{\frac{1}{4}} = \frac{7,5}{\frac{1}{8}} = 60$$

Nesse caso, podemos dizer que as grandezas velocidade média e tempo são **inversamente proporcionais**.

Duas grandezas são inversamente proporcionais quando uma varia sempre na razão inversa da outra. Ou seja, duas grandezas são inversamente proporcionais se, quando o valor de uma dobra, o valor da outra se reduz pela metade; se o valor de uma é dividido por 3, o valor da outra é multiplicado por 3; e assim por diante.

Fonte: Gay e Silva (2018, p. 274).

Neste contexto específico, pensamos se não seria mais produtivo expor as respectivas tabelas sem a resolução ou então a situação sem a solução. Os alunos seriam convidados a refletir, traçar respectivos modos de entender ou produzir seus significados com relação ao assunto, inclusive seriam instigados a identificar as diferenças entre os dois modos de operar, sem configurar algo direcionado.

No subcapítulo seguinte, é apresentado o conceito de regra de três como modo prático de resolver problemas diretamente e inversamente proporcionais. Este capítulo poderia talvez ser desenvolvido em um novo capítulo, sendo que tais ideias já foram trabalhadas nos subcapítulos anteriores. Mas nele foram apresentadas duas situações para ilustrar os dois tipos de proporção e, em seguida, uma sequência de exercícios.

No penúltimo capítulo, foi desenvolvido o assunto porcentagem com a exposição do seguinte exemplo:

Figura 18 – Situações envolvendo porcentagem – 1

7. Porcentagem

Deixe que os alunos resolvam em duplas a questão sobre o desconto na promoção do detergente, para que haja uma discussão sobre estratégias de cálculo. Depois de um tempo, peça a algumas duplas que exponham suas resoluções.

Quando fazemos compras, é muito comum encontrarmos promoções em que se oferecem descontos na aquisição de certas quantidades de produtos. Para verificar se uma promoção é vantajosa, podemos calcular a porcentagem de desconto. Observe a situação a seguir.

Paula e Caio foram ao mercado, gostaram de uma promoção que viram e compraram 5 detergentes pelo preço de 4. Ou seja, 1 dos 5 detergentes saiu de graça.

De quanto foi o desconto, em porcentagem, oferecido nessa promoção? de 20% ⓐ

Fonte: Gay e Silva (2018, p. 279).

Nesse sentido, os autores apresentam uma definição para a situação proposta:

Figura 19 – Definição dada pelo autor para porcentagem

Taxa percentual ou **porcentagem** é a razão entre um número p e 100, que indicamos por $\frac{p}{100}$ ou $p\%$.

Observação

A expressão "por cento" vem do latim *per centum*, que significa "divisão por 100".

Fonte: Gay e Silva (2018, p. 279).

Em sequência, descrevem diferentes modos de resolver atividades que envolvam porcentagem.

Para tanto, apresentaram a seguinte situação: “Uma loja de brinquedos estabeleceu a meta de vender mais 950 bicicletas por mês. No mês passado, a loja vendeu 25% das 5100 bicicletas que estavam no estoque. A meta do mês foi atingida?” (Gay; Silva, 2018, p. 279):

Figura 19 – Alguns modos de resolver porcentagem – 1

Fonte: Gay e Silva (2018, p. 280).

Na última unidade do capítulo em questão, os professores responsáveis pela obra analisada abordam o tema Juros Simples. Em duas páginas, apresentam e discutem o referido assunto, utilizando exemplos como principal modo de atingir ao aluno. Será que esses exemplos são de fatos exemplares? Acreditamos que alguns deles não sejam próximos ao cotidiano desses alunos, tais como a diferença entre capital e montante, dentre outros. A ilustração a seguir descreve o exemplo introdutório:

Figura 20 – Juros simples

8. Juro simples

Pagamento à vista e pagamento a prazo

Acompanhe a situação abaixo.

Raul quer comprar uma televisão. A loja oferece duas formas de pagamento: R$ 930,00 à vista ou em 8 parcelas de R$ 139,50.

Por que o preço a prazo (R$ 1.116,00) é maior que o preço à vista (R$ 930,00)?

Nessa situação, o preço a prazo é maior porque é cobrado **juro** (remuneração pelo parcelamento da dívida) sobre o preço à vista.

Vamos calcular o juro cobrado pelo parcelamento dessa dívida:

$$R\$\ 1.116{,}00 - R\$\ 930{,}00 = R\$\ 186{,}00$$

Portanto, se Raul comprar a televisão a prazo, pagará R$ 186,00 de juro.

Para encontrar a porcentagem de juro, podemos fazer:

$$\frac{186}{930} = 0{,}2 = 20\%$$

O juro (R$ 186,00) corresponde a 20% do preço à vista (R$ 930,00).

Dividindo 20% por 8 (número de parcelas), obtemos 2,5%, que é a **taxa de juro ao mês** no sistema de **juro simples**.

Neste capítulo, estudaremos apenas situações que envolvem o sistema de juro simples.

Fonte: Gay e Silva (2018, p. 282).

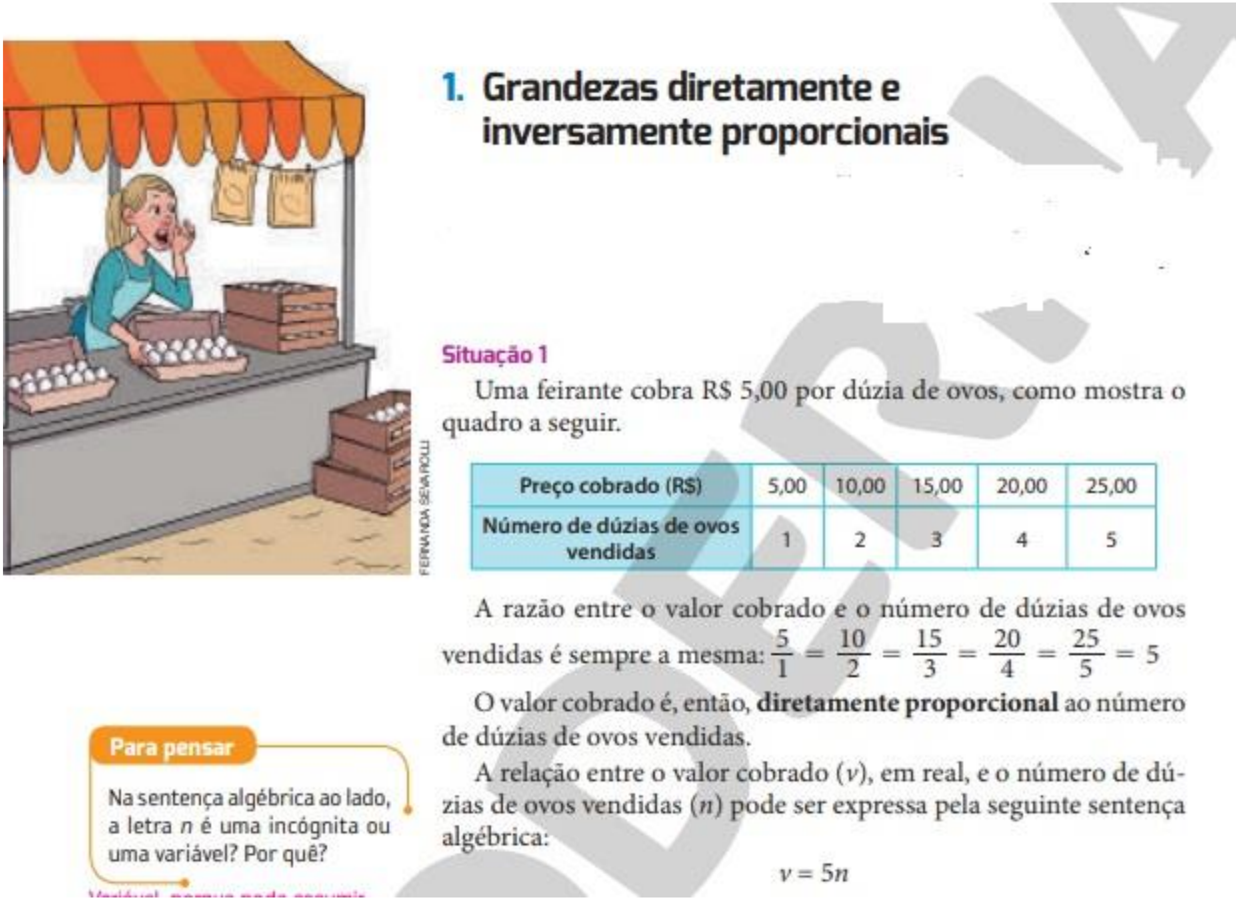
Em seguida, os autores apresentam uma lista com 7 (sete) exercícios. No fim do capítulo, são apresentadas atividades complementares, que são ideias que envolvem todo o capítulo.

Na coleção seguinte (8º ano), apresentam, no capítulo 10, o tópico “proporcionalidade entre grandezas”, que aborda os seguuntes temas descritos no sumário:

- Grandezas diretamente e inversamente proporcionais;
- Situações em que não há proporcionalidade;
- Representação no plano cartesiano da relação entre grandezas.

No primeiro subcapítulo, os autores afirmam que os assuntos que serão desenvolvidos na referida seção já foram discutidos em edições anteriores. Assim, afirmam as possíveis relação que podem ser expressas por meio de sentenças algébricas. No intuíto de ilustrar o que havia sido falado anteriormente, trazem os seguintes cenários, classifiando a primeira como diretamente proporcional e a outra como inversamente proporcional:

Figura 21 – Situação envolvendo grandezas 1



1. Grandezas diretamente e inversamente proporcionais

Situação 1

Uma feirante cobra R$ 5,00 por dúzia de ovos, como mostra o quadro a seguir.

Preço cobrado (R$)	5,00	10,00	15,00	20,00	25,00
Número de dúzias de ovos vendidas	1	2	3	4	5

A razão entre o valor cobrado e o número de dúzias de ovos vendidas é sempre a mesma: $\frac{5}{1} = \frac{10}{2} = \frac{15}{3} = \frac{20}{4} = \frac{25}{5} = 5$

O valor cobrado é, então, **diretamente proporcional** ao número de dúzias de ovos vendidas.

A relação entre o valor cobrado (v), em real, e o número de dúzias de ovos vendidas (n) pode ser expressa pela seguinte sentença algébrica:

$$v = 5n$$

Para pensar

Na sentença algébrica ao lado, a letra *n* é uma incógnita ou uma variável? Por quê?

FERNANDA SEVAROLLI

Fonte: Gay e Silva (2018, p. 252).

Figura 22 – Situação envolvendo grandezas 2

Recorde

A razão entre a distância percorrida por um corpo móvel e o tempo que esse corpo gasta para percorrê-la é definida como **velocidade média**.

Situação 2

Observe no quadro abaixo a relação entre o tempo gasto por um motociclista para percorrer uma distância e a velocidade média com que ele percorre essa distância.

	$\times 3$	$:2$	$:2$	
Velocidade média (km/h)	40	120	60	30
Tempo (h)	6	2	4	8
	$:3$	$\times 2$	$\times 2$	

A razão entre o valor da velocidade média e o inverso do valor correspondente ao tempo gasto é sempre a mesma:

$$\frac{40}{\frac{1}{6}} = \frac{120}{\frac{1}{2}} = \frac{60}{\frac{1}{4}} = \frac{30}{\frac{1}{8}} = 240$$

Fonte: Gay e Silva (2018, p. 252).

Figura 23 – Conclusão do autor 1

Então, podemos dizer que as grandezas velocidade média e tempo são **inversamente proporcionais**.

A relação entre velocidade média (v) e o tempo (t) pode ser expressa pela seguinte sentença algébrica:

$$v = \frac{240}{t}$$

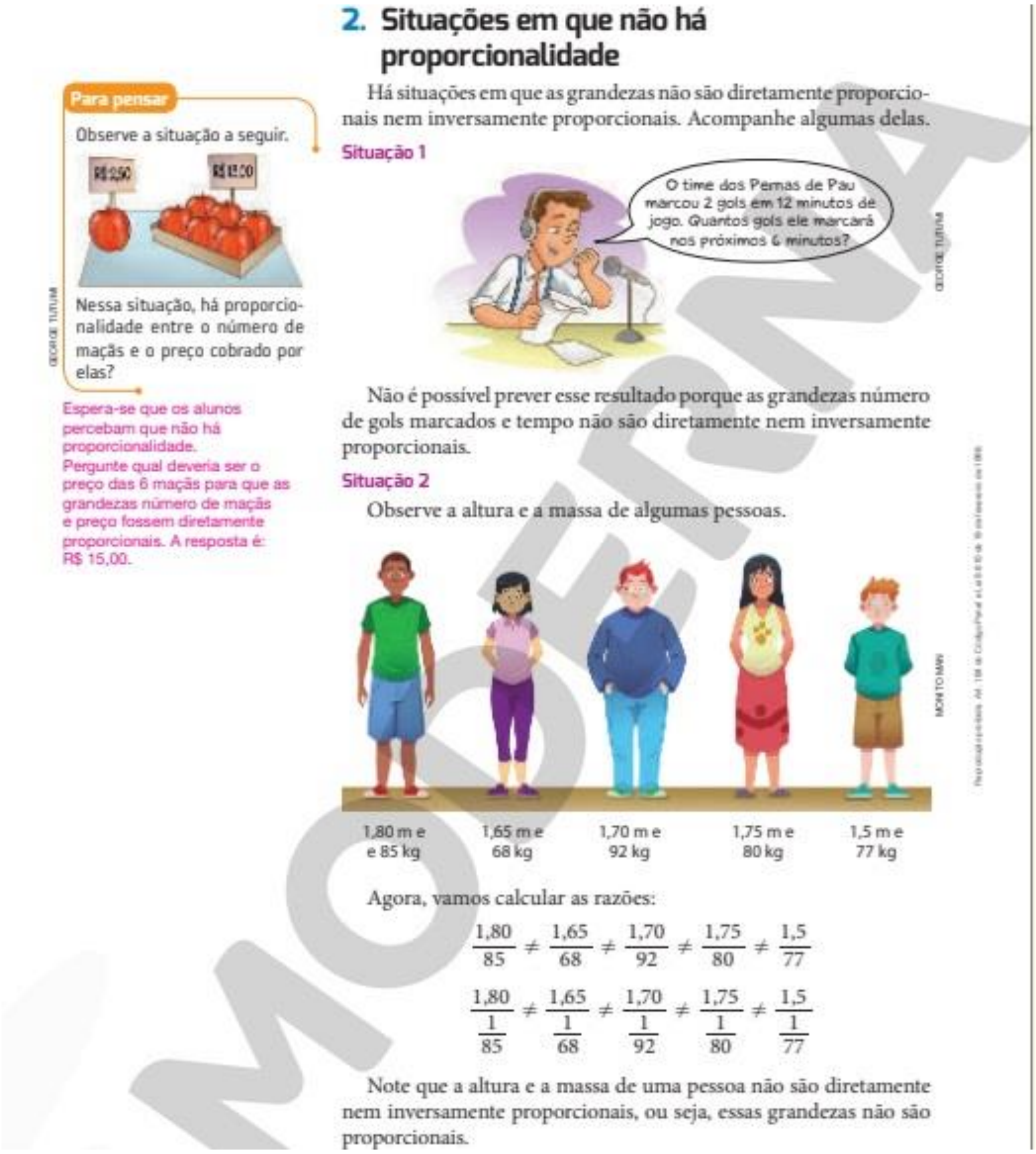
Para fazer

Utilize a sentença ao lado para descobrir a velocidade média do motociclista sabendo que ele levou 3 horas para percorrer a mesma distância.

Fonte: Gay e Silva (2018, p. 252).

Destarte, os autores apresentam uma lista com 6 (seis) exercícios do assunto desenvolvido anteriormente. No segundo subcapítulo, explicam situações que não são proporcionais atráves da descrição de alguns contextos:

Figura 24 – Situações não proporcionais 1



Para pensar

Observe a situação a seguir.

Nessa situação, há proporcionalidade entre o número de maçãs e o preço cobrado por elas?

Espera-se que os alunos percebam que não há proporcionalidade. Pergunte qual deveria ser o preço das 6 maçãs para que as grandezas número de maçãs e preço fossem diretamente proporcionais. A resposta é: R$ 15,00.

2. Situações em que não há proporcionalidade

Há situações em que as grandezas não são diretamente proporcionais nem inversamente proporcionais. Acompanhe algumas delas.

Situação 1

Não é possível prever esse resultado porque as grandezas número de gols marcados e tempo não são diretamente nem inversamente proporcionais.

Situação 2

Observe a altura e a massa de algumas pessoas.

Agora, vamos calcular as razões:

$$\frac{1,80}{85} \neq \frac{1,65}{68} \neq \frac{1,70}{92} \neq \frac{1,75}{80} \neq \frac{1,5}{77}$$

$$\frac{1,80}{\frac{1}{85}} \neq \frac{1,65}{\frac{1}{68}} \neq \frac{1,70}{\frac{1}{92}} \neq \frac{1,75}{\frac{1}{80}} \neq \frac{1,5}{\frac{1}{77}}$$

Note que a altura e a massa de uma pessoa não são diretamente nem inversamente proporcionais, ou seja, essas grandezas não são proporcionais.

Fonte: Gay e Silva (2018, p. 254).

Neste capítulo, é abordado um assunto importante: os casos que não são proporcionais. Isso porque as questões de matemática presentes na escola, em geral, são as bem comportadas. ou seja, somente os casos proporcionais. Os casos que não são não entram em discussão na escola. Curiosamente, após a apresentação deste subcapítulo, é contextualizado outro subcapítulo, o que difere dos demais, geralmente seguidos de exercícios de fixação.

No último subcapítulo, é trabalhada a relação entre duas grandezas atraves do plano cartesiano. Para isso, os autores utilizaram as tabelas como um possivel recurso, interligando ao primeiro subcapítulo, que aborda sentenças algébricas, como mostra a situação inicial:

Figura 25 – Situações e suas covariações 1

Situação 1

Considere um quadrado de lado de medida maior que ou igual a 1. O perímetro desse quadrado é diretamente proporcional à medida do lado correspondente. Veja no quadro abaixo como essas grandezas se relacionam.

PERÍMETRO DO QUADRADO DE ACORDO COM A MEDIDA DO LADO				
Medida do lado do quadrado (cm)	1	2	2,5	4
Perímetro (cm)	4	8	10	16

Podemos considerar que a medida do lado do quadrado e o perímetro correspondente formam um par ordenado. Nesse caso, o primeiro número do par ordenado indica a medida do lado e o segundo, o perímetro correspondente. No sistema cartesiano ao lado, os pares ordenados do quadro estão representados por pontos.

Note que os pontos representados no plano cartesiano ao lado estão alinhados. Como a medida do lado do quadrado pode assumir qualquer valor real maior ou igual a 1, o gráfico que representa a relação entre essas grandezas será uma linha contínua que parte do par ordenado (1, 4), passa pelo par ordenado (2, 8) e continua infinitamente.

Para pensar

Qual é a sentença algébrica que expressa a relação entre o perímetro (y) do quadrado e a medida do lado correspondente (x), ambos em centímetro?

$y = 4x$, em que x pode ser qualquer número real maior ou igual a 1.

Fonte: Gay e Silva (2018, p. 255).

Para finalizar o capítulo, é apresentada uma lista de atividades. Após a análise das duas edições, notamos que toda a seção é introduzida por algumas situações-problema, as quais os autores consideram contextualizadas. Mas, neste caso, elas são contextualizadas para quem? Ademais, notamos que essas situações são diretas e apresentam as respectivas definições sem que haja uma possível discussão ou motivação a fim de solucionar os respectivos problemas propostos. Como fechamento da seção, para cada assunto trabalhado, os autores trazem uma lista de exercícios que apontam para direções diferentes ou simplesmente modificam a linguagem desenvolvida ao longo do subcapítulo. Por fim, demarcamos que a nossa proposta se difere da proposta dos livros didáticos.

2.3 PREPARANDO O TERRENO DA PESQUISA

Este estudo é parte integrante de um programa acadêmico intitulado Programa Linsiano de Investigação. Entre os trabalhos desenvolvidos no âmbito da proposta, está o projeto de pesquisa intitulado *Educação Matemática Escolar no Século XXI: a formação de estudantes e* *professores da Educação Básica*.

Neste projeto, o currículo é construído a partir de modos de pensar de tal maneira que o pensamento matemático se constitui em um conjunto de modos de pensar, a saber: pensamento aritmético, algébrico, geométrico, estatístico, pensamento proporcional, pensamento lógico e pensamento financeiro (Silva; Oliveira; Bastos, 2024, p. 99)

Na ótica de Silva e Oliveira (2024), no caso particular do Pensamento Proporcional, este se apresenta como transversal aos modos de pensar descritos no parágrafo anterior. No nosso caso particular de investigação envolvendo razão, ele interseciona o pensamento aritmético na sua totalidade.

Walle (2009) define que o Pensamento Proporcional carrega consigo o que denonima de ideias importantes, a saber:

> *1.* Uma razão é uma comparação *multiplicativa* entre duas quantidades ou medidas. Uma marco-chaveno seu desenvolvimento é a habilidade de um estudante começara pensar sobre uma razão como uma entidade própria, diferente das duas medidas que a compuseram.
> *2.* As razões e proporções envolvem comparações multiplicativas em vez de aditivas. Razões iguais resultam da multiplicação ou divisão e não da adição ou subtração.
> *3.* O pensamento proporcional é desenvolvido por atividades que envolvem comparar e determinar equivalência de razões e resolver proporções em uma ampla variedade de contextos e situações baseadas em resolução de problemas sem recurso à regras (Walle, 2009, p. 382, grifo no original)

No mesmo estudo, o autor determina que tal modo de pensar entrelaça alguns tópicos do currículo das séries finais, Ensino Funamental II e Ensino Médio. Todavia, nesta dissertação, apresentaremos os assuntos que guardam alguma relação com a noção de razão. O primeiro deles é o conceito de fração. Ao serem determinadas frações equivalentes no processo multiplicativo, os respectivos numeradores e denominadores passam por multiplicações com o intuito de encontrar suas respectivas razões. Além disso, Walle (2009) relaciona a ideia de parte-todo como um modo de se apresentar tal situação. Por fim, conlcui que as frações são um modo de exibir razão.

Já o segundo conceito, Walle (2009) intitula como álgebra. Destarte, o autor a relaciona a respectivas mudanças e variações, ou seja, esta variação é marcada pela razão, a qual define da seguinte forma:

> Uma razão é um número que relaciona duas quantidades ou medidas dentro de uma dada situação através de uma relação multiplicativa (em contraste com uma relação de diferença ou aditiva). Uma razão pode ser aplicada a outra situação onde os valores relativos das quantidades ou medidas sejam os mesmos que na primeira situação (Smith, 2002). As razões aparecem em uma variedade de contextos diferentes. Parte do raciocínio proporcional é a habilidade de reconhecer razões nesses vários ambientes. Para o estudante que está apenas começando a desenvolver uma compreenssão de razão, ambientes ou contextos diferentes podem perfeitamente parecerem ideias diferentes embora elas sejam essencialmente as mesmas de um ponto de vista de matemática (Walle, 2009, p. 383, grifo no original).

Na concepção do nosso referencial teórico, propor ao estudante variados contextos possibilita que ele produza seus respectivos significados de modo próprio, com suas possiveis justificações para o objeto.

De acordo com Walle (2009), razão pode ser vista em quatro perspectivas. No contexto desta dissertação, serão apresentadas duas; outra será apresentada na perspectiva geometrica; e a última na pesquisa de Alves e Silva acerca do conceito de taxa[2]. Ainda sobre o conceito de razão, o autor traz a seguinte reflexão:

> As razões podem expressar comparações de uma parte a um todo, por exemplo, a relação entre o número de meninas em uma turma e o número de alunos. Como as frações também são razões da parte inteira, segue que toda fração também é uma razão. Da mesma maneira, as porcentagem são razões, e de fato, as porcentagens são algumas vezes usadas para expressar razões (...) .
>
> Uma relação também pode expressar uma parte de um todo à outra parte do mesmo todo. Por exemplo, o número de meninas na turma pode ser comparado ao número de meninos. Para outros exemplos, considere a comparação entre Democratas e Republicanos (partidos políticos) ou amendoins e doces de caju. (...) (Walle, 2009, p. 383, grifo no original).

No próximo capítulo, apresentamos a revisão da literatura que fundamenta teoricamente este trabalho. Neste caso, analisamos livros que trazem estudos de tarefas de alunos que guardam relação com o tema desta pesquisa.

[2] ALVES, Taynara Schincariol; SILVA, Amarildo. A noção de taxa e o pensamento proporcional na matemática escolar. **Anais (...).** Lisboa: Universidade Nova de Lisboa, 2024.

3 REVISÃO DA LITERATURA

Neste capítulo, buscamos identificar as pesquisas desenvolvidas sobre o Pensamento Proporcional relacionadas ao tema razão que podem nos trazer informações relevantes para o desenvolvimento de nosso estudo. Para isso, utilizamos também livros que trazem tarefas voltados aos alunos. Porém, tal procura não se realizou de forma aleatória e partiu de algumas tomadas de decisão de cunho metodológico, que podem ser descritas da seguinte maneira:

(i) Nossa busca foi efetivada considerando nosso referencial teórico – o Modelo dos Campos Semânticos – e a sua relação com a Teoria Histórico-Cultural. Partindo desse pressuposto, procuramos por pesquisas que tenham alinhamento teórico com nossos referenciais de estudo;
(ii) Para efeito de análise de artigos científicos, dissertações e teses em Educação Matemática, delimitamos um período específico para a busca de pesquisas desenvolvidas, com retorno de 20 anos – de 1994 a 2023;
(iii) Focamos nossa atenção em dissertações e teses das áreas de Educação Matemática tanto em programas profissionais da área de ensino quanto acadêmicos, bem como em livros nos quais identificarmos como sendo resultados de pesquisas sobre o tema (alguns deles ligados à Psicologia Cognitiva);
(iv) Nosso interesse está centrado na discussão do Pensamento Proporcional quanto ao que esse conceito tem de "interseção" com o pensamento aritmético. Com isso, queremos sugerir que o Pensamento Proporcional também encontra sua interseção com o pensamento geométrico e estatístico, por exemplo, porém esse tópico não será parte de nosso interesse de investigação;
(v) As palavras-chave para a busca que empreendemos foram: ensino e aprendizagem; razão e matemática escolar no ensino fundamental.

A característica do nosso projeto, que envolve pesquisa e desenvolvimento de um produto educacional, nos leva a incluir na busca não apenas pesquisas que nos apresente informações teóricas, mas também a proposição de sequências didáticas que podem nos orientar na produção de novas tarefas para a sala de aula.

Tais pesquisas foram realizadas em alguns repositórios, revistas e livros. Entre esses, citamos o Boletim GEPEM, ZETETIQUE, Bolema, Scielo e Repositório de Dissertações UFJF, além do livro "Ensinando Frações e Razões para Compreenssão: conhecimento essencial de conteúdo e estratégias de ensino para professores” .

No decorrer da pesquisa, utilizamos palavras-chave como: “ensino de razão” , “razão” e “pensamento proporcional”. É importante salientar que tivemos dificuldades em encontrar materiais que abordassem Pensamento Proporcional, mais precisamente na perspectiva da noção de razão, pois, conforme já mencionado, quando encontrávamos possíveis materiais sobre o referido tema, estes logo escapavam do assunto interessado e tomavam outras discussões, tais como proporção por exemplo.

Pelas questões explicitadas no parágrafo anterior, temos alguns autores como base teórica. No entanto, divergimos quanto a alguns aspectos relativamente ao ponto de vista proposto por estes. O tópico “Pensamento Proporcional: noção de razão” é um tema de bastante relevância. Através desta pesquisa, esperamos contribuir para a evolução do pensamento proporcional, no âmbito da sala de aula, através da noção de razão.

3.1 LEITURAS

Nesta seção, tratamos da leitura de dois artigos, uma dissertação e dois livros. No caso, os livros indicam trabalhos com estudos sobre o tema investigado. Logo, nós os utilizamos como revisão, visto que nos mostraram algo sobre e nos fizeram tomar alguns posicionamentos no decorrer da nossa investigação e aplicação dos respectivos produtos educacionais. Embora possuissem abordagens distintas, contribuíram de algum modo para nossa pesquisa.

O primeiro artigo, intitulado “Compreensão do Conceito de Razão por Futuros Educadores e Professores dos Primeiros Anos de Escolaridade” (2015), de José Antônio Fernandes e Laurinda Leite, traz consigo uma investigação que visa a estudar o entendimento de estudantes, futuros professores dos primeiros anos de escolaridade de uma faculdade do norte de Portugal. Ao longo do texto, são aplicados questionários abertos para que se tenha algum instrumento de avaliação. Por fim, notamos que os estudantes possuem alguns déficits ao tratar razão, pois se acredita que haja domínio no processo de cálculo dos problemas propostos. No entanto, não se tem um conceito estruturado ou sólido sobre o assunto apresentado.

Sendo assim, torna-se necessário pensar como a matemática escolar trata esse conteúdo. A esse respeito, Schliemann e Carraher (1993) trazem a seguinte reflexão:

> Razão e proporção são conceitos extremamente ricos que surgem nos mais diversos contextos da vida: na compra e venda, na construção civil, no desenho gráfico, em todos os ramos de atividade da ciência tecnologia. Muitas das variáveis fundamentais da ciência são expressas como razões: km/hora,

> densidade etc. Além disso, estes conceitos estão relacionados a muitos outros conceitos matemáticos, como fração (comum e decimal), função linear, inclinação do gráfico de uma função, probabilidade, taxas, porcentagens etc. Entretanto, com ensinadas na escola, razão e proporção que parecem ser extremamente limitados (Schliemann; Carraher, 1993, p. 15).

Logo, os autores trazem a informação da diferença do ensino de razão na perspectiva da matemática escolar e da matemática da rua. Embora seja um objeto de extrema importância, nos questionamos o porquê de tantos déficits como resultado da pesquisa do primeiro artigo. Para Schliemann e Carraher (1993), o aluno, quando exposto a diversas situações e contextos que o convidem a refletir, pensar ou discutir sobre relações proporcionais, consegue compreender melhor os conceitos. Conforme defendem, algumas vezes, no ensino de matemática, existe um reducionismo a manipulações de símbolos e representações, porém não há uma comprenssão do que se está fazendo, das simbologias e estratégias utilizadas, o que justifica os respectivos resultados obtidos no primeiro artigo.

Destarte, com o intuito de encurtar ou aproximar os respectivos estudantes do assunto, foi proposto o contexto de transação comercial para introduzir a discussão quanto ao tema. Para tanto, foi utilizada uma tabela, com duas colunas, cada uma correspondendo a uma variável:

Figura 26 – Tabela 1

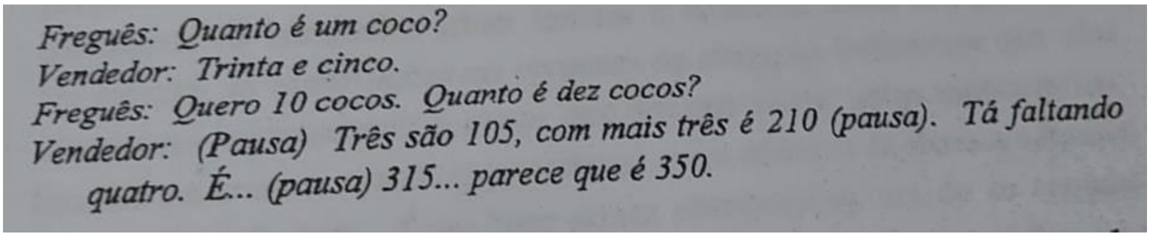
Número de itens	Preço a pagar
1	5
2	10
3	15
4	20
5	25
6	x

Fonte: Schliemann e Carraher (1993, p. 17).

Os autores propõem uma análise da tabela exposta. Sendo assim, observamos que há um aumento de cada linha da tabela e que a relação entre as duas variáveis (número de itens e preço a pagar) é uma relação multiplicativa. Em seguida, explanam um exemplo no qual a relação é de cunho multiplicativo, contudo o personagem em questão o soluciona de modo aditivo. Nesta passagem, pretendem demarcar a diferença entre a relação multiplicativa e aditiva.

Em seguida, Schliemann e Carraher (1993) trazem uma situação no cotidiano de um jovem vendedor de coco com o objeivo de identificar o modo pelo qual este operava. Ou seja, como ele lidava com problemas de seu cotidiano em que o raciocínio proporcional se fazia presente. Na ilustração a seguir, dispõe-se a imagem da situação proposta:

Figura 27 – Diálogo de um vendedor



Freguês: Quanto é um coco?
Vendedor: Trinta e cinco.
Freguês: Quero 10 cocos. Quanto é dez cocos?
Vendedor: (Pausa) Três são 105, com mais três é 210 (pausa). Tá faltando quatro. É... (pausa) 315... parece que é 350.

Fonte: Schliemann e Carraher (1993, p. 17).

Esse tipo de atividade é um espelho de exercícios que propiciam o desenvolvimento do Pensamento Proporcional, pois o garoto do exemplo trazido pelos autores operou de forma legítima e própria, embora tenha utilizado a adição como instrumento de resolução e feito uso da proporcionalidade.

De acordo com Vergaud (1983), ao resolver problemas de multiplicação ou de divisão, estamos lidando com relações proporcionais, mesmo que não tenhamos conhecimentos explicitos desse conceito. E isto é o que o pequeno vendedor de cocos estava fazendo.

No entanto, é necessário demarcar que existirão problemas aos quais o modo aditivo não é eficaz para solucionar questões que envolvam o raciocínio proporcional. Sendo assim, torna-se necessário refletir sobre a questão: como e quando será possível solucionar um exercícios de modo aditivo? Esta é uma situação que será respondida ao longo desta dissertação.

Outra leitura realizada foi a do livro *Teaching Fractions and Ration for Understanding*, de autoria de Lamon (2012), cujo conteúdo aborda o ensino de fração de modo que atinja a compreensão dos números racionais.Com o tempo, espera-se que seja adquirido o que foi denominado como raciocinio proporcioanal. Assim, analisamos o referido livro, pois utilizava o termo “pensamento proporcional”, o qual era objeto de nossa busca inicial.

Para discutir tais temas, a autora lançou mão de algumas atividades, frutos de pesquisa e investigação sobre o assunto, que já haviam sido aplicadas a alunos, com seus respectivos modos de pensar e resolver, talvez com o intuito de constituir algo norteador para possíveis professores interessados no processo de ensino e aprendizagem do conteúdo e possiveis estudos para formação de docentes e eventuais formuladores de currículos.

Nesse sentido, Lamon (2012) traz a seguinte definição para raciocínio proporcional:

> For the purposes of this book, proportional reasoning will refer to the ability to scale up and down in appropriate situations and to supply justifications for assertions made about relationships in situations involving simple direct proportions and inverse proportions. In colloquial terms, proportional reasoning is reasoning up and down in situations in which there exists an invariant (constant) relationship between two quantities that are linked and varying together. As the word reasoning implies, it requires argumentation and explanation beyond the use of symbols $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (Lamon, 2012, p. 3).

Nesta passagem, a autora considera como raciocinio proporcional a capacidade de diminuir e aumentar no caso em que essas variações se dão entre duas quantidades (modo pelo qual os americanos se referem ao que conhecemos nos textos brasileiros como grandeza). Essas relações estão ligadas entre si de modo que, quando uma modifica, a outra também modifica de forma precisa com a primeira quantidade, sendo que existe ainda uma terceira quantidade que não varia. No entanto, afirmar que duas quantidades diminuem ou amentam não implica no fato de ambas serem proporcionais.

Destarte, Lamon (2012) apresenta a constante de proporcionalidade por meio das relações diretamente proporcionais,. É uma função linear, expressa pela forma y=kx, onde "k" representa a constante citada anteriormente. Ou seja, desta relação, temos que as quantidades variam de mesmo modo, tal como ilustrado na tabela a seguir:

Figura 28 – Tabela da constante de proporcionalidade

# of stacked wooden cubes	1	2	3	4	5	6
Height of the stack in inches	3	6	9	12	15	18

Fonte: Lamon e Susan (2012, p. 3).

Note-se que o número do cubo de madeiras aumenta e concomitantemente a altura das pilhas aumenta na mesma proporção. Ademais, se tomarmos as relações número de cubos e de madeiras empilhadas, quocientada pelo altura da pilha em polegadas, temos:

$$k=\frac{\textit{Número de cubos empilhados}}{\textit{Altura da pilha em polegadas}}=\frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{3}{9}=\frac{4}{12}=\frac{5}{15}=\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$$

Ou seja, há a constante de proporcionalidade, que, nesta situação, foi $\frac{1}{3}$. O contexto exposto acima é o que chamamos de relações diretamente proporcionais. No caso em que a constante for inversamente proporcional, será obtida através da forma y= $k.\frac{1}{x}$. Logo, temos que k=yx. Lamon (2012) considera a constante de proporcionalidade como elemento de bastante importância durante a análise. Contudo, de acordo com as perspectivas de suas pesquisas, tal fator é abandonado ou esquecido durante o ensino. Essa questão nos convidou a consderar sobre como desenvolver um modo de pensar que propcie e/ou convide o aluno a pensar sobre questões dessa natureza.

O fator k não seria um valor fixo para toda e qualquer situação. No caso, este modifica de acordo com o problema exposto em relações consideradas proporcionais. Além disso, a autora ressalta que esse fator não aparece de forma explícita. Geralmente, ele está explícito no problema, ou seja, cabe à pessoa que o estiver resolvendo identificar se é ou não. Sendo assim, acreditamos que identificar essa constante exija alguns testes, suposições e análise da situação proposta.

A constante de proporcionalidade de uma função linear, famoso k, pode ser interpretada de forma geométrica como a declividade do gráfico que tal função descreve. Este determina a inclinação da reta com relação ao eixo x. Tal constante é denominada como coeficiente angular da reta descrita pela função linear y= kx, sendo de tal importância que é conhecida ainda como taxa de variação dos valores no eixo y, eixo das ordenadas, quocientado pela variação dos seus valores equivalentes ao anterior em relação ao eixo das abscissas, o x. Dessa forma, conclui-se que, dados quaisquer dois pontos dessa reta, é possivel obter a constante k.

Nesse sentido, Lamon (2012) trouxe o fator escala. Este foi o nome dado a um fator que multiplica alguma quantidade. Ou seja, a ideia é a mesma que a proposta com relação ao fator k. No entanto, a interpretação de tal fator é de origem geométrica, isto é, a discussão girará em torno de encolher, ampliar, reduzir ou aumentar alguma figura ou dimensão de forma proporcional. Atráves desse modo de análise, perpassa-se sobre conceitos e discussões importantes relacionadas a similaridades, semelhanças.

Para introduzir tais discussões, a autora trouxe como exemplo o desenho de um barco em uma imagem, e, em outra, o barco reduzido, onde suas propriedades não foram conservadas. Em outra ilustração, apresentou um barco pequeno e outro grande, onde suas proporiedades foram conservadas. Através dos dois exemplos, pretende-se que os alunos concluam que o primeiro exemplo não se trata de uma proporção, enquanto o segundo sim, pois todas as suas dimensões foram preservadas, o que nos permite classificá-los como semelhantes. Tal atividade traz consigo a palavra semelhança, que, empregada, no dia a dia, é diferente da empregada na matemática.

Acompanhando esta linha, Lamon (2012) realça que o raciocínio proporcional é mais que um processo técnico ou mecanizado. É um processo de análise, identificação, descoberta, que consiste em apresentar e informar evidências que afirmem que a relação existente no interior da atividade é de caráter proporcional. Ou seja, trata-se de um processo que exige de nós caracteristicas investigativas, uma interpretação da tarefa para além dos números, pois tal modo de operar requer uma análise das relações existentes entre as quantidades e de como estas se comportam. Nesse sentido, a autora caracteriza que, ao resolver tais atividades, o aluno deve considerar sua respectiva experiência e bom senso para distinguir situações onde as quantidades compartilham uma relação daquelas que não compartilham.

De modo geral, dificilmente pensamos nos casos em que as situações não funcionam, ou nos casos imperfeitos. Por essa razão, torna-se necessário, durante o processo de análise, a avaliação. No caso, identificar se tal ativadade é proporcional ou não faz-se de bastante importância, pois em boa parte dos estudos parte-se do pressuposto de que a atividade é proporcinal. Entretanto, em nosso cotidiano, temos situações que não se comportam de modo proporcional, como o crescimento de uma planta, seres humanos, entre outras. Praticar esse tipo de exercício desenvolve no ser um olhar crítico e analítico. Como pontua Lamon (2012), esse tipo de análise deve ocorrer antes da inserção de ferramentas e instruções simbólicas.

Caso a atividade seja de cunho proporcional, no interior do desenvolvimento dela, a pessoa que estiver resolvendo irá identificar se as duas quantidades estão ligadas entre si e se irão modificar, esta é denominada como covariação. E a terceira é o que foi denominado como invariante, que não muda. No caso, seria a constante de proporcionalidade. Esta, de acordo com a autora, seria um possível modo para resolver atividades que envolvam proporção.

Ademais, Lamon (2012) traz neste texto alguns elementos referentes ao processo de ensino e aprendizagem de crianças e suas respectivas relações com o raciocínio proporcional. Para isso, propõe momentos de discussão sobre quantidades que covariam nos quais os alunos sejam ouvidos, pois, conforme lembra a autora, as crianças possuem experiências e conhecimentos intuitivos, o que, diante de sua concepção, faz parte do processo de aquisição de tal raciocínio.

Lamon (2012) carrega consigo algumas marcas de origem Piagetiana, pois propõe que os alunos discutam relações entre quantidades em situações operacionais do mundo real. Ou seja, a autora acredita que a criança possa imaginar ou operar no mundo das ideias, bem como defende que a primeira compreensão de proporção acontece de modo visual, quando pensamos nos tamanhos, distâncias, entre outros aspectos. Assim, sugere que, ao ensinar, seria interessante abordar ideias de situações visuais que remetem a tal discussão, tais como esticar, encolher, distorcer, se está ou não dentro de uma proporção, dentre outros.

Mais adiante, Lamon (2012) traz algumas atividades para discutir as relações com as crianças. Uma proposta é composta por 36 fichas, sendo 24 pretas e 12 brancas. Nesse sentido, solicita que os estudantes dividam as fichas em 3 grupos, de modo que os números de fichas brancas e pretas sejam os mesmos em cada um. Em seguida, solicita que eles reorganizem. Na sequência, sugere que se subdividam em 4 grupos, onde os subgrupos tenham as mesmas quantidades de fichas, preservando as respectivas quantidades. Assim, a autora traz algumas discussões para com os alunos, arguindo-lhes quais foram as mudanças obtidas no primeiro modo e outras questões.

Outra proposta apresentada foi a Tira de Cusinaire. Essa atividade passou por várias adaptações conforme a necessidade e contexto escolar. Por esse motivo, será apresentada a proposta no livro. Em geral, são madeiras ou plásticos coloridos, de característica tridimentsional. A Tira de Cuisenaire tem comprimento graduado de 1 cm (branco), de 3 cm (vermelha), 2 cm (verde), de 5 cm (amarela), a 10 cm (laranja). Seus comprimentos têm as mesmas proporiedades dos números. Nesta análise, o fato de as hastes serem tridimensionais não é importante.

Logo, postas as tiras diante de uma criança, o objetivo é que o aluno possa, através da manipulação e testes, chegar à conclusão de que uma tira vermelha e uma tira verde (3+ 2) têm o mesmo comprimento que a amarela, e que uma haste laranja tem o mesmo comprimento que duas vezes a haste amarela. De acordo com Lamon (2012), trata-se de um modelo interessante para trabalhar modelos proporcionais, pois o estudante faz uso do modo comparativo ao pensar quantas hastes são necessárias para se ter o comprimento de outra haste, sendo essa uma poderosa forma de analisar respectivas equivalências e outras questões. Além disso, a autora acredita que a comparação seja uma pujante ferramenta para o desenvolvimento do raciocínio proporcional.

Entretanto, Lamon (2012) aponta algumas ressavlvas a respeito da utilização de materiais concretos na sala de aula de matemática, pois acredita que a utilização de métodos não deve ser o único e nem mesmo que seja o suficiente para solucionar as dificuldades em desenvolver um raciocínio. Sendo assim, a autora defende que o professor tem de decidir ou analisar qual será a duração do processo de execussão e análise de tal proposta, iniciando na criança o pensamento multiplicativo. Destarte, sugere respectivos cursos para que os discentes aprendam a utilizar as ferramentas e entendam seu respectivo funcioanamento. Caso o contrário, é possível que se perca tempo, pois haverá uma preocupação com a ferramenta, e, por consequência, pode ser que ocorra um esquecimento da matemática envolvida nesse tramite. Por fim, Lamon (2012) ressalta que toda ferramenta possui uma limitação, ou seja, a ferramenta não pode ser utilizada como uma única estratégia de ensino, ou ser considerada como a salvadora dos problemas que envolvem o processo de ensino e aprendizagem.

No entanto, nossa pesquisa admite um posicionamento diferente daquele da autora em alguns pontos, uma vez que carregamos concepções Vygotskianas. Ou seja, acreditamos que o ato de aprender é uma tarefa da cognição. Isso significa que, através de tarefas e atividades, é possivel desenvolver o cognitivo do aluno, pois, a partir destas, o aluno pode desenvolver estruturas que lhe possibilite a pensar e falar sobre o objeto.

A seguir, trazemos na Tabela 1 a relação dos respectvios trabalhos consultados:

Tabela 1 – Dissertações produzidas pelo PPGEM da UFJF

Título	Ano	Autor(a)/Orientador(a)
Razão como taxa: Uma proposta de ensino para a sala de aula de matemática	2012	Profa. Marilia Rios de Paula / Prof. Dr. Amarildo Melchiades
Uma abordagem ecológica envolvendo proporcionalidade na educação básica	2016	Profa. Dayane Cristina Rocha Tinoco / Profa. Dra. Chang Kuo Rodrigues

Fonte: elaborado pelo autor.

Na dissertação intitulada como “Razão como taxa: Uma proposta de ensino para a sala de aula de matemática”, de Marília Rios de Paula (2012), a pesquisadora-autora mostra a inquietação de uma professora da educação básica em investigar sobre o ensino de razão como taxa. Para tanto, foram feitos os diferentes modos de se apresentar razão: fração, parte-todo, medida, quociente, razão e operador, visto que o foco dessa pesquisa era o ensino de razão enquanto taxa. Porém, foi frisado pela autora, pela sua experiência com a sala de aula, que os alunos possuem dificuldades com o tema fração. Por esse motivo, Paula (2012) faz uma apresentação minuciosa e detalhada a esse respeito. Logo, a pesquisadora-autora visou a elaborar materiais que servissem como um objeto norteador aos colegas de profissão para que estes conhecessem e pudessem desenvolver atividades dessa natureza. Tendo como seu referencial teórico metodológico o Modelo dos Campos Semânticos (MCS), a autora produziu, enquanto produto educacional, alguns modelos de tarefas. Em seguida, aplicou o produto por ela desenvolvido. Nesse sentido, Paula (2012) fez uma descrição do processo de execução das tarefas em suas turmas, fazendo inclusive recortes de alguns diálogos que ocorreram no contexto que, na sua visão, correspondeu a um momento de discussão e produção de significados dos alunos, o que possibilitou uma reflexão e interação entre os envolvidos. Destarte, a pesquisadora-autora conclui que o tema proposto passa desapercebido pelos alunos. Ademais, sua proposta foi diferente, pois observou que os estudantes queriam apenas achar a resolução, o que não foi idealizado na elaboração de suas atividades.

No livro do Walle (2009), *Matemática no ensino fundamental formação de professores e aplicação em sala de aula*, o autor destinou um capítulo para discutir o conceito de "raciocínio proporcional". Conforme postulado na obra do refeido pesquisadador, as ideias essenciais do raciocínio proporcional são: razões e proporções, que compreendem comparações multiplicativas,. Essa forma de pensar é desenvolvida através de atividades que envolvam a comparação e a razão enquanto uma comparação de caráter multiplicativo entre o que o autor chamou de quantidade.

No próximo capítulo, apresentamos o referencial teórico sob cujas bases esta pesquisa e investigação foi realizada, sustentando e fundamentando nosso estudo acerca do Pensamento Proporcional: a noção de razão.

4 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo, o qual se estrutura dividido em duas partes, apresentamos os nossos posicionamentos teóricos e fazemos a proposição de nosso problema de pesquisa. Na primeira parte, apresentamos o Modelo dos Campos Semânticos, teorização utilizada para a leitura dos significados dos alunos. Na sequência, finalizamos detalhando nosso problema da pesquisa.

4.1 O MODELO DOS CAMPOS SEMÂNTICOS

A pesquisa tomará como referencial teórico o Modelo dos Campos Semânticos (MCS), elaborado pelo educador matemático Romulo Campos Lins, e a Teoria Histórico-Cultural – em particular, alguns constructos teóricos dos psicólogos russos Vigotski e Leontiev.

De acordo com o MCS, o conhecimento é entendido como "[...] uma crença - algo que o sujeito acredita e expressa, e que se caracteriza, portanto, como uma afirmação – junto com o que o sujeito considera ser uma justificação para sua crença-afirmação" (Lins, 1993, p .86, grifos no original). Segundo o MCS, a crença, afirmação e a justificação são componentes do conhecimento.

Apesar de não ser necessária, a justificação, neste caso, ocoore com a crença e a afirmação, ou seja, o sujeito acreditar não é o suficiente. Sendo assim, ele tem que justificar aquilo que acredita. No entanto, o modelo propõe que somos todos diferentes pela perspectiva do desenvolvimento cognitivo. Logo, temos que, para uma mesma crença-afirmação, podem ser apresentadas diferentes justificações, ou seja, os conhecimentos serão distintos. Destarte, através das justificações, o professor terá elementos que lhe possibilitem entender e analisar o pensamento do aluno. Além disso, o MCS apresenta elementos que permitem entender e visualizar alguns processos que ocorrem na sala de aula. Ele dá espaço de fala e escuta para o aluno, ou seja, o professor deixa de ser o detentor da fala. De acordo com Silva (2022), na obra intitulada *Modelo dos Campos Semânticos: um modelo epistemológico em Educação Matemática*, conhecimento é definido da seguinte forma:

> Indicamos desta forma que o conhecimento é algo do domínio da enunciação – e que, portanto, todo conhecimento tem um sujeito – e não do domínio do enunciado; podemos também expressar este fato dizendo que conhecimento é do domínio da fala, e não do texto. Desde este ponto de vista, a Matemática é um texto, e não conhecimento, tem-se conhecimento apenas na medida em que as pessoas se dispõe a enunciar este texto. A um conhecimento que fala a partir desse texto – a Matemática – chamaremos, naturalmente, de conhecimento matemático (Silva, 2022, p. 30).

O processo de produção de significados é denominado como Campos Semânticos. Essa produção ocorre no interior de atividades. A noção de atividade para Leontiev é explicada por Oliveira (1995, p. 96) ao afirmar que "[...] As atividades humanas são consideradas por Leontiev como formas de reação do homem com o mundo, dirigidas por motivos, por fins a serem alcançados. A ideia de atividade envolve a noção de que o homem orientasse por objetivos, por meio de ações planejadas".

De acordo com o modelo, o campo semântico desempenha o papel de estabelecer relações entre "produção de conhecimento", "significado", "conhecimento", "produção de significado" e objeto (Oliveira, 1995, p. 18).

Nas palavras de Lins (1994b, p. 30), "[...] significado é a relação que se estabelece entre uma crença-afirmação e uma justificação para ela no momento da enunciação". Através deste, pressupõe-se a produção de conhecimento.

Já produção de significados é tudo aquilo que o aluno pode "falar" sobre o objeto. No entanto, para Lins, falar não era o simples fato de comunicar mediante a palavras. Dessa forma, Silva (2003, p. 9) apresentou uma reformulação do que fora proposto por Lins ao "[...] dizer que um sujeito produziu significado é dizer que ele produziu ações enunciativas a respeito de um objeto no interior de uma atividade". Ou seja, ações enunciativas seria considerar qualquer gesto escrito, seja ele falado, sinalizado e linguagem corporal.

Consequentemente, esse tipo de interação ocorre no decorrer da atividade. O que Lins trata como observar o processo em ação significa que o professor participa do processo como observador no intuito de entender o modo de operar do seu aluno para que, em seguida, possa propor tarefas ou mediações que propiciem novas produções de significados para seus respectivos alunos.

De acordo com o MCS, o processo comunicativo é composto por 3 elementos: autor, texto e leitor. Nesse sentido Silva (2022, p. 93) define cada elemento:

> [...] O autor é aquele que, no processo, produz a enunciação: um professor em uma aula expositivo-explicativa, um artista plástico expondo seus trabalhos ou um escritor apresentando sua obra. O leitor é aquele que, no processo, se propõe a produzir significados para o resíduo das enunciações como, por exemplo, o aluno que, assistindo a uma aula expositiva e explicativa, busca entender o que o professor diz; um crítico de arte, que analisa a obra de um artista plástico; ou uma pessoa que, lendo um romance, busca entender a história do autor. Já o texto, é entendido como qualquer resíduo de enunciação para o qual o leitor produza algum significado [...] (Silva, 2022, p. 93).

De acordo com Lins (1999), o autor é quem produz uma enunciação. E este fala sempre na direção de um leitor que é composto pelo autor:

> Quando o autor fala, ele sempre fala para alguém. Porém, por mais que um autor esteja diante de uma platéia, este alguém não corresponde a indivíduos, pessoas nessa platéia e, sim, ao leitor que o autor constitui: é para este ‘um leitor’ que ‘o autor’ fala (Lins, 1999, p. 81, grifos no original).

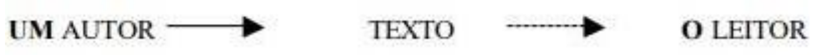
Ou seja, o interlocutor não é um ser biológico, mas sim cognitivo. O encontro do resíduo de enunciação com o interlocutor ocorre do seguinte modo:

> O sujeito cognitivo se encontra com o que acredita ser um resíduo de enunciação, isto é, algo que acredita que foi dito por alguém (um autor). Isto coloca uma demanda de produção de significado para aquele algo, demanda que é atendida (esperançosamente) pela produção de significado de o autor em que se tornou o leitor. O autor-leitor fala na direção de um autor que aquele constitui; o um autor é o interlocutor (um ser cognitivo). (Lins, 2012, p. 19, grifos no original).

Nesse sentido, a imagem a seguir representa o processo de comunicação segundo o MCS:

Neste esquema, o símbolo em pontilhado indica que “transmissão” deve acontecer na direção de alguém, o interlocutor, que é considerado um ser cognitivo.

Conforme afirma Lins (1999, p. 81, grifos no original), “[...] na perspectiva do leitor, ele “[...] sempre constitui um autor, e é em relação ao que este ‘um autor’ diria que o leitor produz significado para o resíduo de enunciação, e que neste momento se constitui (ou transforma) em texto. A figura seguinte descreve o referido esquema:



Na próxima imagem, temos a representação do novo esquema, no qual Lins destaca a visão tradicional de comunicação como transmissão de uma mensagem, do emissor ao receptor.

A sensação psicológica de comunicação efetiva a que Lins se refere pode ser ilustrada pela sobreposição dos dois últimos esquemas, o que geraria um terceiro esquema em que os tracejados desapareceriam. Esse novo esquema corresponderia à visão tradicional de comunicação como transmissão de uma mensagem do emissor ao receptor:

O AUTOR → TEXTO → O LEITOR

O entendimento da comunicação efetiva, que é aquela que ocorre de forma integral, é considerada uma sensação psicológica. Segundo Lins (2012), conseguimos nos entender pelo que ele denominou como espaço comunicativo, o que altera a concepção de comunicação tradicional:

> No MCS, a noção de comunicação é substituída pela noção de espaço comunicativo, que é um processo de interação no qual (dizer isto, para o MCS é redundante) interlocutores são compartilhados. Numa inversão conceitual, "comunicação" não corresponde mais a algo do tipo "duas pessoas falando uma para a outra", e sim a "dois sujeitos cognitivos falando na direção de um mesmo interlocutor" (Lins, 2012, p. 24, grifos no original).

Ou seja, conforme prevê o MCS, o espaço comunicativo ocorre através de uma interação. A comunicação ocorre quando dois sujeitos cognitivos falam na mesma direção, ou seja, não é considerada a simples ação de falar.

O processo de estranhamento, de acordo com o MCS, ocorre durante o processo de interação entre os membros participantes (aluno e professor), que pode possibilitar um momento formativo. Nesse sentido, "[...] A partir desse e nesse estranhamento, que se dá de maneira particular por cada aluno, podem ser produzidas as diferenças. Sendo assim, não fazem sentido prescrições e moldes fecha" (Oliveira, 2011, p. 38). Ou seja, durante esse processo, o estudante realiza suas produções de significado à respeito do objeto. Dessa forma, o professor, através de sua escuta e leitura, poderá possibilitar aos membros uma discussão à cerca do objeto.

Além de tais fatores, esse processo pode levar o estudante ao estágio de paralisia, ou de dificuldade. Conforme define o MCS, a dificuldade deve ser entendida de dois modos. O primeiro é o obstáculo Epistemológico, que ocorre quando um estudante, que opera no que chamamos de campo semântico, tem os seus respectivos modos de operar funcionando na situação. Porém, por alguma condição, ele não consegue resolver outras situações da mesma forma. Um contexto que exemplifica tal modo seria o fato de o estudante operar bem a multiplicação entre dois ou três algarismos, mas, por pouca facilidade com cálculos, não consegue resolver a questão.

O segundo modo de entender a dificuldade é o que denominamos Limite Epistemológico. Este ocorre quando um aluno opera dentro de um campo semântico, porém o seu modo de operar não suprirá outras situações ou procedimentos que poderão surgir em situações semelhantes. Um exemplo seria o contexto em que, ao introduzir os números negativos, os professores recorrem ao dinheiro para fazer uma analogia com as operações de adição e subtração nos números inteiros. No entanto, quando se adentra na multiplicação, tal analogia cai por terra, pois o seu modo de operar "não funciona".

Durante o processo, o educador, no espaço comunicativo construído, poderá possibilitar que se busque compreender a dificuldade do estudante:

> Não sei como você é; preciso saber. Não sei também onde você está (sei apenas que está em algum lugar); preciso saber onde você está para que eu possa ir até lá falar com você e para que possamos nos entender, e negociar um projeto no qual eu gostaria que estivesse presente a perspectiva de você ir a novos lugares (Silva, 2022, p. 125).

Neste movimento, o professor poderá, através de uma interação, descobrir onde e como seu aluno está operando para que, assim, possa atuar no que Vygotsky denomina Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP).

Destarte, apresentamos nesta seção o MCS, o qual constitui um referencial teórico que pode ser realizado na sala de aula, auxiliando com que o professor leia o aluno pelo que ele tem e, através dessa leitura, proponha atividades e discussões que impulsionem suas produções de significado. Ou seja, é um que processo que ocorre em ação como postula Lins.

4.2 O PROBLEMA DE PESQUISA

Nesta seção, tratamos da motivação e origem desta pesquisa com a contextualização das respectivas justificativas que nos trouxeram aqui. Sendo assim, buscamos investigar a produção de uma sequência didática, fundamentada teoricamente para o ensino de razão no Ensino Fundamental II.

Nosso propósito de estudo consiste em investigar a produção de um conjunto de tarefas, referenciadas teoricamente pelas premissas do MCS, sobre a noção de razão como parte do processo de estimular e potencializar nos estudantes o desenvolvimento do Pensamento Proporcional.

Com nossa afirmação anterior de que as tarefas se fundamentam nas premissas do MCS, queremos sugerir que estas devem, em conjunto, promover e potencializar a produção de significados dos estudantes sobre o que vem a ser a noção de razão e como ela é parte do Pensamento Proporcional. Nesse sentido, este conjunto de tarefas se constituirá em uma sequência didática que representará o produto educacional.

No capítulo a seguir, discorremos acerca da pesquisa empreendida e os instrumentos metodológicos utilizados em nosso estudo, em consonância com os quais procuramos nos pautar.

5 METODOLOGIA

Neste capítulo, cuja estrutura se divide em duas seções, apresentamos os posicionamentos metodológicos que orientam nossa investigação de tarefas que propiciem o Pensamento Proporcional e a noção de razão.

5.1 CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA

Esta pesquisa caracteriza-se como de cunho qualitativo. Pautados nos escritos de Bogdan e Biklen (2013), podemos classificar as pesquisas qualitativas da seguinte forma:

> 1) Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal. 2) A investigação qualitativa é descritiva. Os dados recolhidos são em forma de palavras ou imagens e não de números. 3) Os investigadores interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos. 4) Os investigadores tendem a analisar os seus dados de forma indutiva. Não recolhem dados ou provas com o objetivo de confirmar ou infirmar hipóteses construídas previamente. 5) O significado é de importância vital na abordagem qualitativa. Os investigadores que fazem uso deste tipo de abordagem estão interessados no modo como diferentes pessoas dão sentido às suas vidas (Bogdan; Biklen, 2013, p. 47-51).

Através da abordagem qualitativa, abandonamos a perspectiva quantitativa, uma vez que não é nosso foco saber a quantidade de pessoas ou de respostas que tivemos. Quando nos propomos a trabalhar com significados, nos interessa o que de fato ocorre com o indivíduo, seus gestos, justificativas, e, por isso, "[...] tudo tem potencial para constituir uma pista que nos permita estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do nosso objeto de estudo" (Bogdan; Biklen, 2013, p. 49).

Nossa pesquisa desenvolveu-se em uma escola pública com alunos do Ensino Fundamental, mais especificamente do 7 º ano. Ademais, trata-se de uma proposta diferenciada daquela que se tem no cotidiano desees estudantes, o que pode tornar a realização e o desenvolvimento da atividade mais difíceis.

Pela justificativa trazida no parágrafo anterior, pretendemos convidar grupos menores de alunos para desenvolver a pesquisa. A atividade foi realizada no contraturno, de modo que cada discente terá que responder as próprias tarefas por escrito. Em seguida, propusemos um momento de discussão e interação com o material entre os alunos para, posteriormente, recolhermos e analisarmos as respectivas respostas. Para tanto, levamos em conta as relações sociais presentes no espaço escolar, uma vez que esta pesquisa possui caráter qualitativo. Sendo assim, devemos levar em conta os elementos e situações que circundam a investigação em tela.

Durante o processo de execução das tarefas, pretendemos colher as produções de significado para aquelas, sem juízo de valor, ou seja, não há apontamento de certo ou errado. Vale considerar que, neste ponto, constarão, além das falas, possíveis gestos e atitudes que sejam consideradas importantes para a pesquisa. Além disso, por meio da coleta de dados, objetivamos avaliar as tarefas a partir dos significados produzidos no interior destas.

No processo de coleta de dados, utitlizamos o texto escrito dos estudantes, bem como o diário de anotações, com as respectivas interpretações e observações do pesquisador.

Em seguida, buscamos utilizar o recurso da videografia durante a aplicação das tarefas com o objetivo de sermos fidedignos ao que possa surgir e ocorrer, uma vez que algumas situações passam desapercebidas ou caem em esquecimento. Após utilizar tais métodos, analisamos toda a situação para que, assim, possa ser feita uma avaliação acerca das tarefas produzidas sobre as respectivas produções de significado que surgiram, de modo que se contribua para a reflexão sobre a produção de tarefas e que se promova o Pensamento Proporcional.

5.2 LEITURA EPISTEMOLÓGICA

Nesta seção, trazemos nossos embasamentos teóricos para análise e investigação das respectivas tarefas. De acordo com o MCS, trata-se de uma etapa importante observar o sujeito no interior de uma atividade, pois se torna possível, no ato de observar, entender as produções de significado e os motivos pelos quais os alunos falam o que falam. Esse ato é chamado de leitura positiva.

O que Lins denomina como leitura positiva seria a leitura do discente pelo que ele pode e sabe falar, e não pela falta. Ou seja, o aluno será analisado pelo que ele tem a falar, e não pelo que se espera que ele saiba.

Esse tipo de visão não carrega consigo juízo de valor. Com tal raciocínio, o autor explana o seguinte: “[...] ao invés de apenas caracterizar o erro, a falta, eu queria mostrar que existe ali a possibilidade e a necessidade do que hoje chamo de uma leitura positiva do que o aluno fez/disse, que consiste em saber do que, de que objetos, ele estava efetivamente falando” (Lins, 2002, p. 18).

Ou seja, não há certo ou errado, o que é levado em conta ou observado são os respectivos modos de operar. Nesse sentido, procura-se entender os possíveis modos de operar do aluno.

5.3 A PRODUÇÃO DE TAREFAS

As tarefas sobre a noção de razão, tema de nosso estudo, foram elaboradas pensando em aplicá-las em uma turma do 6º ano do Ensino Fundamental II com o objetivo de dar continuidade ao desenvolvimento do Pensamento Proporcional no ensino fundamental, iniciado com a pesquisa de Fernandes (2024) em nosso grupo de pesquisa e, posteriormente ao nosso trabalho, seguido pelas pesquisas de Alves (2024) acerca da noção de taxa; bem como de Pedrosa (2024) sobre a noção de proporção; e de Sinai (2024) sobre grandezas diretamente e inversamente proporcionais, finalizando tal desenvolvimento no 9º ano.

Nessas pesquisas, nossa proposta diverge daquelas que constam nos livros didáticos, que iniciam a discussão do tema razão através de um exemplo introdutório seguido de uma definição matemática do seguinte tipo: “[...] Dados dois números x e y, com y diferente de zero, a **razão** de x para y pode ser indicada pela fração x/y ou pelo quociente x: y. Nesta razão, lê-se: x está para y” (Balestri; Rosa Neto, 2012, p. 178).

A partir dessa definição, os autores de livros didáticos apresentam uma lista variada de exercícios para treino e fixação das ideias. Em sentido contrário a essa perspectiva de ensino, nossa proposta parte de um rol de tarefas que, em conjunto, pretendem auxiliar no processo de produção de significados para razão a partir da observação e reflexão dos alunos para a relação existente entre as grandezas envolvidas para o desenvolvimento do Pensamento Proporcional.

O conjunto de tarefas foi desenvolvido em nosso grupo de pesquisa sob a coordenação do Prof. Dr. Amarildo Melchiades da Silva e testado internamente quanto às suas potencialidades antes de serem levadas para as entrevistas com os estudantes.

Metodologicamente, o conjunto de tarefas foi produzido para ser aplicado em grupos com objetivos específicos. O primeiro grupo de tarefas foi denominado de tarefas disparadoras no sentido de que, com elas, inicia-se o processo produção de significados dos alunos para o que eles constituirão, no final, como o objeto razão.

A primeira tarefa do **Grupo 1** tem o seguinte enunciado:

> ***Tarefa 1***
>
> *Na turma A de uma escola existem 15 meninas e 20 meninos. Produza afirmações verdadeiras que informem a relação entre o número total de estudantes, o número de meninas e o número de meninos nesta sala de*

aula.

Como os alunos serão inseridos em um novo modo de produção de significados, que envolve uma nova maneira de operar segundo uma lógica específica, não temos expectativa que eles operem tomando o quociente entre o número total de estudantes, o número de meninas e o número de meninos.

Experiências feitas por professores, discentes da disciplina Pensamento Comparativo em Matemática do PPGEM, que levaram esta tarefa para suas salas de aula, obtiveram respostas como as seguintes:

- Têm 5 meninos a mais que meninas;
- Tem menos meninas;
- A sala é desigual;
- A turma tem 35 alunos;
- Um número é par o outro é ímpar;
- O 15 e o 20 fazem parte da tabuada de 5;
- 15, 20 e 35 são múltiplos de 5.

De acordo com a pergunta formulada, todas as respostas são verdadeiras, e isto será comunicado à turma. E poderemos fazer uma leitura de cada uma das respostas deles, bem como usar da estratégia de perguntar para alguns por que disseram o que disseram de modo a entender a lógica que usaram para dar aquela resposta.

Após toda a discussão, nosso objetivo é inserir uma informação nova, sugerindo a eles que fizessem os seguintes cálculos:

$$\frac{número\ de\ meninas}{número\ de\ total\ de\ estudantes} =$$

$$\frac{número\ de\ meninos}{número\ total\ de\ estudantes} =$$

$$\frac{número\ de\ meninas}{número\ de\ meninos} =$$

$$\frac{número\ de\ meninos}{número\ de\ meninas} =$$

A expectativa é que essa possibilidade se torne objeto de atenção dos alunos, que passarão a fazer as contas e com auxílio do professor e/ou pesquisador chegarão às seguintes respostas:

$$\frac{número\ de\ meninas}{número\ de\ total\ de\ estudantes} = \frac{15}{35} = \frac{15:5}{35:5} = \frac{3}{7} \longrightarrow (3:7)$$

$$\frac{número\ de\ meninos}{número\ total\ de\ estudantes} = \frac{20}{35} = \frac{20:5}{35:5} = \frac{4}{7} \longrightarrow (4:7)$$

$$\frac{número\ de\ meninas}{número\ de\ meninos} = \frac{15}{20} = \frac{15:5}{20:5} = \frac{3}{4} \longrightarrow (3:4)$$

$$\frac{número\ de\ meninos}{número\ de\ meninas} = \frac{20}{15} = \frac{20:5}{15:5} = \frac{4}{3} \longrightarrow (4:3)$$

Porém, não temos expectativa que todos os estudantes façam a leitura do resultado considerando tantos para quantos. Destarte, a proposta é abrir uma discussão de como analisar a resposta que foi encontrada.

Neste momento, sugerimos uma nova intervenção do professor para apresentar uma leitura da letra (a) a fim de que os discentes considerem aquele jeito de ler os números encontrados nos seguintes termos:

> *Os números querem dizer que na turma A, a cada 7 estudantes, 3 são meninas ou que existem 3 meninas a cada grupo de 7 estudantes.*

Após esta explicação, pedimos a eles que tentem explicar o que quer dizer os resultados nas outras letras. A expectativa é que sejam ditas afirmações como:

(b) Nesta sala de aula, há 4 meninos para cada 7 estudantes; a cada 7 estudantes, 4 são meninos;

(c) Na turma A, tem-se 3 meninas para 4 meninos; ou, a cada grupo de 7 alunos, 3 são meninas e 4 são meninos;

(d) Na sala de aula tem 4 meninas para 3 meninas ou a cada grupo de 7 alunos, 4 são meninos e 3 são meninas.

Após a análise da turma, podemos questioná-los ainda se as letras (c) e (d) nos informam a mesma coisa a ponto de podermos excluir uma delas nos próximos problemas.

Na sequência, discutimos com os estudantes a possibilidade de introduzir uma nova notação a qual todos vão usar para ajudar a pensar sobre o assunto e apresentamos a proposta:

$$\frac{\textit{número de meninas}}{\textit{número de total de estudantes}} = \frac{15}{35} = \frac{15:5}{35:5} = \frac{3}{7} \longrightarrow (3:7)$$

$$\frac{\textit{número de meninos}}{\textit{número total de estudantes}} = \frac{20}{35} = \frac{20:5}{35:5} = \frac{4}{7} \longrightarrow (4:7)$$

$$\frac{\textit{número de meninas}}{\textit{número de meninos}} = \frac{15}{20} = \frac{15:5}{20:5} = \frac{3}{4} \longrightarrow (3:4)$$

$$\frac{\textit{número de meninos}}{\textit{número de meninas}} = \frac{20}{15} = \frac{20:5}{15:5} = \frac{4}{3} \longrightarrow (4:3)$$

As duas tarefas seguintes têm o objetivo de observar o quanto os discentes internalizaram (no sentido proposto por Vigotski) da discussão anterior em relação à nova maneira de operar e segundo uma lógica das operações específicas. Por esse motivo, mantivemos a mesma "estrutura" da tarefa anterior nas duas tarefas seguintes.

Tarefa 2

Na turma B há 14 meninos e 21 meninas. Produza afirmações verdadeiras que informe, nessa sala de aula:

(a) A relação entre o número de meninas e o número total de estudantes;
(b) A relação entre o número de meninos e o número total de estudantes;
(c) A relação entre o número de meninas e o número de meninos.

Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

A resolução do professor, que poderá ser apresentada à turma após toda a discussão, como proposta de fechamento das falas é:

O total de estudantes na turma B é 14 meninos + 21 meninas = 35 estudantes

$$\frac{\textit{número de meninas}}{\textit{número de estudantes}} = \frac{21}{35} = \frac{21:7}{35:7} = \frac{3}{5} \longrightarrow (3:5)$$

Análise*: A cada 5 estudantes 3 são meninas*

$$\frac{número\ de\ meninos}{total\ de\ estudantes} = \frac{14}{35} = \frac{2}{5} \longrightarrow (2{:}5)$$

Análise*: A cada 5 estudantes 2 são meninos*

$$\frac{número\ de\ meninas}{número\ de\ meninos} = \frac{21}{14} = \frac{3}{2} \longrightarrow (3{:}\ 2)$$

Análise*: Nesta sala de aula tem-se 3 meninas para cada 2 meninos ou a cada grupo de 5 alunos, 3 são meninas e 2 são meninos.*

Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

Tarefa 3

Na turma C há 36 estudantes dos quais 18 são meninas. Produza afirmações verdadeiras que informe nessa sala de aula:
(a) A relação entre o número de meninas e o número total de estudantes.
(b) A relação entre o número de meninos e o número total de estudantes.
(c) A relação entre o número de meninos e o número de meninas.

Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

A resolução do professor, que poderá ser apresentada à turma após toda a discussão,como proposta de fechamento das falas, é seguinte:

A turma C tem 36 estudantes e 18 meninas; logo, o número de meninos = 36 estudantes -18 meninas = 18 meninos

$$\frac{número\ de\ meninas}{número\ de\ estudantes} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \longrightarrow (1{:}2)$$

$$\frac{número\ de\ meninos}{número\ de\ estudantes} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \longrightarrow (1{:}2)$$

Análise*: Numa turma de 36 alunos, metade são meninas e metade são meninos*

$$\frac{número\ de\ meninas}{número\ de\ meninos} = \frac{18}{18} = \frac{1}{1} \longrightarrow (1\ {:}1)$$

Análise*: Nesta sala de aula, tem-se 1 menina para cada menino.*

Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

Após discutir as três tarefas, introduziremos mais um elemento novo à discussão para observar que alteração pode acontecer quando uma nova informação é incorporada à produção de significados dos alunos, que são as noções de *parte-todo* e *parte-parte*:

Tarefa 4

Vamos olhar novamente para as contas que fizemos nas tarefas 1, 2 e 3. Tem uma coisa que vocês não observaram e que a gente deveria discutir. Então perguntamos:

Quando falamos de total de estudantes de uma turma e o número de meninas e meninos; quem é o todo e quais são as partes, nas turmas A, B e C?
Quando vocês fizeram as contas:

$$\frac{número\ de\ meninas}{número\ de\ total\ de\ estudantes}$$

$$\frac{número\ de\ meninos}{número\ total\ de\ estudantes}$$

$$\frac{número\ de\ meninas}{número\ de\ meninos}$$

$$\frac{número\ de\ meninos}{número\ de\ meninas}$$

Em quais casos temos uma relação parte-todo e em quais casos temos uma relação parte/parte?

Você conseguiria fazer um desenho da tarefa 1 indicando um todo e como seria as partes dentro do todo?

Nesta letra C nosso objetivo é chegar com a turma em um esboço do tipo:
Notação*: H: meninos M: meninas*

Todo: 35

HHHH *MMM*	*HHHH* *MMM*	*HHHH* *MMM*	*HHHH* *MMM*	*HHHH* *MMM*

5 partes

Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

Assim, passaremos a observar o quanto essa ideia será colocada em operação nas tarefas seguintes.

As sessões de entrevistas com o(a) s aluno(a)s permitirão entender melhor o que de nossas expectativas pode se confirmar, já que, da perspectiva do MCS, não temos a intenção de antecipar o que acontecerá nas entrevistas clínicas nem na sala de aula, pois nossa leitura é posterior as suas enunciações.

Passamos agora às tarefas **do Grupo 2**, cujo objetivo é continuar explorando a noção de razão, sem ainda defini-la, em diferentes contextos:

> ***Tarefa 1***
>
> *Uma cidade com 120.000 habitantes possui 30.000 habitantes na faixa de 50 a 60 anos e 5.000 com 60 anos ou mais. Qual é a relação entre:*
> *o número de habitantes na faixa de 50 a 60 anos e o número total de habitantes?*
>
> *O número de habitantes com 60 anos ou mais e o número total de habitantes?*
>
> *O número de habitantes na faixa de 50 a 60 anos e o número de habitantes com 60 anos ou mais?*
>
> *o número de habitantes com 60 anos ou mais e o número de habitantes na faixa de 50 a 60 anos?*
>
> *Em todos os casos, diga o que informa os resultados encontrados*.
>
> Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

A resposta do professor seria:

$$\frac{n^{\underline{o}}\ habitantes\ na\ faixa\ de\ 50\ a\ 60}{número\ total\ de\ hab.} = \frac{30.000}{120.000} = \frac{1}{4} \longrightarrow (1{:}4)$$

Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

O que as contas informam é que, na cidade, temos que, a cada 4 habitantes, 1 está na faixa dos 50 a 60 anos:

$$\frac{n^{\underline{o}}\ habitantes\ com\ 60\ e\ mais}{número\ total\ de\ hab.} = \frac{5.000}{120.000} = \frac{1}{24} \longrightarrow (1{:}24)$$

Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

O resultado nos diz que, na cidade, temos que, a cada 24 habitantes, 1 está com 60 anos ou mais; ou que existe um habitante com 60 anos ou mais em um grupo de 24 habitantes:

$$\frac{nº\ habitantes\ na\ faixa\ de\ 50\ a\ 60}{nº\ habitantes\ de\ 60\ ou\ mais.} = \frac{30.000}{5.000} = \frac{6}{1} \longrightarrow (6:1)$$

Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

Os resultados encontrados nos dizem que o número de habitantes da cidade na faixa de 50 a 60 anos é 6 vezes maior do que o de habitantes de 60 anos ou mais. Ou podemos também afirmar que, para cada habitante com 60 anos ou mais, há na cidade 6 habitantes na faixa de 50 a 60 anos.

Tarefa 2
Em uma cidade de 240.000 habitantes, existem 120 dentistas e 480 médicos para atender a população.

a) Qual é a relação de números de habitantes por dentista na cidade? E de número de habitantes por médico?
b) Nessa cidade há quantos dentistas para cada 8.000 habitantes?
c) Numa pequena cidade de 6.000 habitantes existem 4 dentistas e 6 médicos para atender a população. Esta cidade está melhor servida de dentistas e médicos que a cidade de 240 mil habitantes?

Tarefa 3

Em sua festa de aniversário, Lucas convidou 20 amigos do time de Vôlei. Sua mãe pretende servir suco da região onde mora. Para calcular o número de garrafas que deve comprar, Lucas verificou que cada garrafa de suco tem a capacidade 2000 ml e cada copo descartável da festa tem a capacidade de 250 ml. Quantas garrafas de suco sua mãe deverá comprar para garantir que todos os convidados tomem 4 copos de suco cada?

Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

Tarefa 1 – Em busca de uma definição
Texto para leitura e discussão

Em matemática, tem-se o hábito de dar nome às suas coisas para podermos nos referir a elas quando precisarmos. Por exemplo, falamos de fração, número natural, triângulo e assim todo mundo sabe do que se trata. A partir de agora, vamos dar dois nomes para as coisas que estamos usando nas nossas tarefas até este momento.
Recordamos que, nas tarefas anteriores, tomamos várias vezes quociente, isto é, fizemos cálculos como estes:

$$\frac{n^{\underline{o}}\ de\ meninas}{n^{\underline{o}}\ total\ de\ estudantes},$$

$$\frac{n^{\underline{o}}\ habitantes\ com\ 60\ e\ mais}{número\ total\ de\ hab.}$$

*Assim, número de meninas, número total de estudantes, número de habitantes, temperatura, entre outros, são chamados de **grandeza** ou **quantidade**.*
Logo, definimos grandeza ou quantidade da seguinte forma:

***Grandeza** ou **Quantidade** é tudo aquilo que pode ser medido, contado, usando números para isso.*

*Além disso, pedimos a vocês que calculassem várias relações em várias tarefas: a relação entre o número de meninas e o número de estudantes; a relação entre o número de dentistas e o número de habitantes de uma cidade. Neste caso, como essa relação é feita de um jeito especial porque ela nos dá informações importantes, usamos chamar esta relação de **RAZÃO**. Mas agora deixaremos para você definir o que é razão.*
Com essas informações, vocês devem:

-*Exibir 5 exemplos de coisas que são grandezas;*

-*Definir com suas palavras o que é razão.*

Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

Nossa expectativa é que os estudantes tentarão apresentar exemplos e formular uma definição em que, após ser discutida por todos, o(a) professor (a) os auxiliará a concluir a definição.

O que queremos verificar nesta tarefa é se, ao final do processo, a noção de grandeza e razão vai parecer mais natural para eles do que quando o professor apresenta uma definição pronta para a turma.

Por sua vez, as tarefas do **Grupo 4** têm como objetivo inverter o sentido da pergunta. Em vez de pedirmos aos alunos para analisar a relação de grandezas para informar “tantos para quantos”, apresentamos a conclusão no sentido de buscar os valores das grandezas que satisfazem a razão:

Tarefa 1

*Numa classe de 32 alunos, a **razão** entre o número de meninas e número de* *meninos é de 3/5. Quantas são as meninas?*

Tarefa 2

Numa classe de 36 alunos, a **razão** *entre o número de meninos e número total de alunos é de 3/4. Quantas são as meninas?*

Fonte: Arquivos da esquisa do autor.

Já as tarefas do **Grupo 5** visam a introduzir mais um objeto na discussão em sala de aula sobre razões entre grandezas: a noção de porcentagem, entendida também como uma razão.

Tarefa 1

Alice estava olhando o álbum de fotografias de sua família e observou que das 80 fotos colocadas lá, 32 são coloridas. Lembrando das nossas aulas, ela então perguntou: - qual a relação entre o número de fotos coloridas para o total de fotos do álbum?

Ela então apresentou a seguinte resolução para nos mostrar:

A razão entre o número de fotos coloridas pelo total de fotos é:

$$\frac{número\ de\ fotos\ coloridas}{número\ total\ de\ fotos} = \frac{32}{80} = \frac{32{:}8}{80{:}8} = \frac{4{:}2}{10{:}2} = \frac{2}{5}$$

Logo, concluímos que, a cada 5 fotos, duas são coloridas.

Uma outra pergunta que podemos fazer sobre esta situação apresentada por Alice é: como podemos interpretar de uma outra maneira o fato de que temos 32 fotos coloridas em um total de 80 fotos? Esta pergunta muitas vezes será feita a vocês da seguinte maneira: qual é a porcentagem de fotos coloridas? Mas o que é mesmo porcentagem?

Para responder a esta outra pergunta, vamos refazer as contas acima da seguinte maneira:

$$\frac{número\ de\ fotos\ coloridas}{número\ total\ de\ fotos} = \frac{32}{80} = \frac{32{:}8}{80{:}8} = \frac{4x10}{10x10} = \frac{40}{100}$$

E, em matemática, decidiu-se que toda vez que o denominador for 100 em uma fração podemos usar uma notação expressa pelo símbolo % acompanhando do numerador, que neste caso é 40. Dessa forma, escrevemos:

$$\frac{número\ de\ fotos\ coloridas}{número\ total\ de\ fotos} = \frac{32}{80} = \frac{32{:}8}{80{:}8} = \frac{4x10}{10x10} = \frac{40}{100} = 40\%$$

Podemos também fazer as contas assim:

$$\frac{número\ de\ fotos\ coloridas}{número\ total\ de\ fotos} = \frac{32}{80} = 0,4 = \frac{40}{100} = 40\%$$

Que se lê: de um total de 80 fotos, que em porcentagens representa 100% das fotos, 40% (32 fotos) são coloridas.

Assim, para saber qual a porcentagem das fotos em preto e branco fazemos 100% - 40% = 60%.

Podemos verificar isso observando que 80 fotos – 32 fotos = 48 fotos (60% de todas as 80 fotos).

De fato, as contas nos informam a mesma coisa:

$$\frac{número\ de\ fotos\ preta\ e\ branca}{número\ total\ de\ fotos} = \frac{48}{80} = \frac{48:8}{80:8} = \frac{6}{10} = \frac{6x10}{10x10} = \frac{60}{100} = 60\%$$

Com base no que você acabou de ler responda:

Você concorda com a afirmação da Alice que conclui, depois de fazer as contas que a cada 5 fotos, duas são coloridas?

Você pode explicar com suas palavras o que entendeu do que é porcentagem?

O que você pode dizer desta razão: $\frac{número\ de\ fotos\ coloridas}{número\ de\ fotos\ em\ preto\ e\ branco} =\ ?$

Você pode usar porcentagem no cálculo desta razão? Por quê?

Tarefa 2

Uma escola planeja fazer uma festa junina e cada turma vai dançar uma quadrilha para decidir qual será a melhor grupo de dança da escola. Como para dançar quadrilha é preciso formar casais a coordenadora precisa saber a relação entre o número de meninos e meninas de cada sala. Ela então resolveu fazer um levantamento preliminar em três turmas de 7º Ano. Vamos ajudá-la a entender a relação entre o número de estudantes, o número de alunas e o número de alunos em cada turma para cada uma das três situações seguintes:
Na turma A, existem 15 meninas e 20 meninos. Produza afirmações verdadeiras que informem a relação entre o número de estudantes, o número de meninas e o número de meninos nessa sala de aula.

Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

Nesta primeira situação, a fala dos alunos é livre, e eles podem dizer o que quiserem. A expectativa inicial é que eles não digam muito na direção de encaminhar a resolução do problema. Caso isso ocorra, o professor fará a intervenção de modo a sugerir à turma que tomar o quociente pode dar boas informações e, partir daí, discutir o resultado obtido e como é possível fazer uma leitura do valor encontrado.

A segunda e a terceira situações pretendem aprofundar a discussão iniciada com a situação anterior e verificar o que foi internalizado na discussão anterior. São elas:

> *Na turma B, há 14 meninos e 21 meninas. Produza afirmações verdadeiras que informem a relação entre o número de estudantes, o número de meninas e o número de meninos nessa sala de aula.*
>
> *Na turma C, há 36 estudantes dos quais 18 são meninas. Produza afirmações verdadeiras que informem a relação entre o número de estudantes, o número de meninas e o número de meninos nessa sala de aula.*
>
> Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

Após uma longa discussão com a turma observando o que eles podem dizer e como vão incorporando a noção de tomar o quociente e para fazer a leitura "tantos para quantos", será introduzida a noção de todo-parte e parte-parte, bem como a noção de leitura da relação todo-parte pela via da porcentagem.

Em geral, essas tarefas foram extraídas dos livros didáticos, porém com uma estrutura diferente daquelas propostas pelos autores. Aqui, os estudantes são estimulados a falar, sem ainda fazer uso de uma definição ou da palavra razão.

A proposta que se seguirá é a de que o estudante, ao final de toda discussão, tente chegar a uma caracterização de razão, construída a partir de sua vivência com as diferentes tarefas.

6 A PESQUISA DE CAMPO

A pesquisa de campo foi desenvolvida em uma Escola Municipal, localizada no munícipio de Juiz de Fora, na zona leste do município. Os participantes foram alunos do 7º ano do Ensino Fundamental, com idades entre 12 e 13 anos.

O convite foi direcionado para todos os estudantes do 7º ano em uma das turmas da escola. Nesse sentido, apenas 5 alunos demonstraram interesse e apresentaram as respectivas autorizações dos responsáveis para participarem da pesquisa.

As tarefas foram desenvolvidas em 5 encontros presenciais, dentro do ambiente escolar, em que o pesquisador foi o proponente das tarefas aplicadas ao grupo. Os encontros ocorreram na sala de laboratório de informática nos seguintes dias: 28/05, 06/06, 11/06, 18/06 e 20/6 de 2024.

No primeiro encontro, o pesquisador retomou a discussão de que naquele espaço não havia juízo de valor. Ou seja, não havia certo e errado na resolução das tarefas: ele estava naquele ambiente para ouví-los. Ademais, explicou que, em caso de dúvida, era só chamar que seriam auxiliados por ele. Em seguida, foi solicitado aos alunos que estes escolhessem seus nomes fictícios para que não pudessem ser identificados quando fosse publicada a pesquisa, tendo sido definidos sem nenhuma interferência do pesquisador. Os seguintes pseudônimos foram escolhidos: Léo Jardim, Léo Pereira, Pérola, Neymar e Cristiano Ronaldo (CR7).

Em seguida, apresentamos aos discentes a primeira tarefa, entendida por nós como potencialmente dispadora do processo de produção de seus significados, pois, através da sua aplicação, introduzimos os estudantes na discussão da temática. O intuito é apresentar uma tarefa inicial aberta para que consigamos compreender e identificar o que podem dizer ou para que direção eles falam:

Figura 29 – Apresentação da Tarefa 1

Na turma A de uma escola existem 15 meninas e 20 meninos. Produza afirmações verdadeiras que informe a relação entre o número total de estudantes, o número de meninas e o número de meninos nesta sala de aula.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Por se tratar de uma dinâmica diferente daquela que acontece, em geral, nas salas de aula, notamos que os alunos apresentaram dificuldades em falar/escrever o que entendiam sobre a discussão proposta, uma vez que tinham receio de responder errado ou mencionar situações que não tinham relação com a atividade. Destarte, enquanto os estudantes desenvolviam o processo, foi realizada a seguinte intervenção:

> *Pesq: Alunos, escrevam o que entendem ao ler a situação proposta, não há certo ou errado. Quero saber o que entendem.*
>
> *CR7: O que é para fazer ? Conta?*
>
> Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

A fala deste aprendiz nos convida à seguinte reflexão: todas as atividades e questões que foram propostas a este envolvendo matemática, terminam em "contas". Os discentes não refletem ou avaliam as respectivas questões ou situações as quais são propostas: existe uma preocupação em achar a resposta "certa". Dessa forma, consideramos que um dos motivos da dificuldade na realização desta primeira tarefa estava ligado ao modo com o qual eles estavam habituados a trabalhar.

Tal fato reforça nossa teoria de que essa dinâmica deve fazer parte da rotina dos estudantes desde o início de seu processo, pois, uma vez familiarizado com tais propostas, os estudantes não sentirão tanta diferença[3]:

> *Léo Pereira: Professor, pode fazer as contas na folha?*
>
> *Pesq: Sim.*
>
> *Pérola: Eu fiz as contas fora do espaço e apaguei. Porque fica muito feio.*
>
> *Pesq: Fica não! É importante entender como vocês pensam, tenta colocar as contas dentro do retângulo.*
>
> *Pérola: Mas vou fazer separado, porque só contas maiores que deixo.*
>
> *Pesq: Ok!*
>
> Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

[3] Nas transcrições das falas, vamos adotar as seguintes convenções: a) Chamamos de pesq o pesquisador; b) Reticências indicam pausa prolongada.

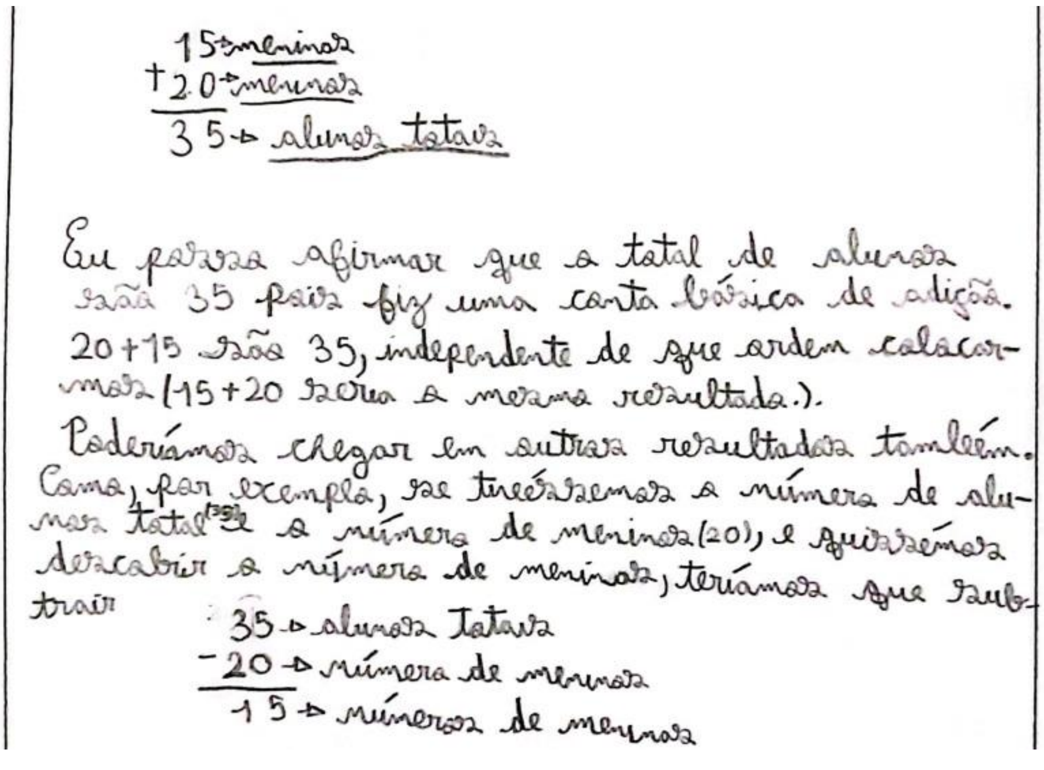
Uma especulação que podemos fazer a partir do resíduo de enunciação de Pérola é que,na visão da discente, “contas pequenas” não necessitam ser registradas por se constituirem em uma estipulação local.

Neste momento, obtive a evidência de que contas “grandes” são tidas pela aluna como registro importante a ser feito. Por outro lado, aquelas que os discentes consideram faceis não são necessárias.

Ao iniciarem o processo de escrita, a primeira coisa que os alunos identificaram foi o total de alunos da sala. Dois estudantes não tinham exibido no papel como chegaram àquele resultado. Assim, o pesquisador os questionou como haviam chegado a tal conclusão, pois houve por parte dele uma necessidade de indagá-los a fim de entender o que estavam dizendo, pois os discentes eram bem sucintos.

Após provacações realizadas pelo pesquisador no intuito de que os aprendizes escrevessem ou falassem mais, a aluna Pérola, apresentou a seguinte resposta:

Figura 30 - Tarefa 1 - aluna Pérola


15 → meninos
+20 → meninas
35 → alunos totais

Eu posso afirmar que o total de alunos são 35 pois fiz uma conta básica de adição. 20+15 são 35, independente de que ordem colocarmos (15+20 seria o mesmo resultado.).
Poderíamos chegar em outros resultados também. Como, por exemplo, se tivéssemos o número de alunos total (35) e o número de meninas (20), e quiséssemos descobrir o número de meninos, teríamos que subtrair

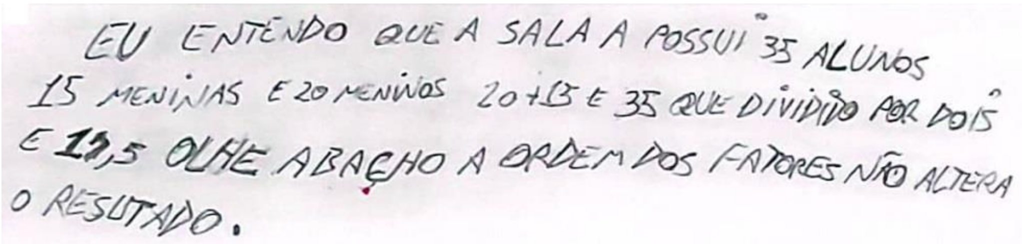
35 → alunos totais
−20 → número de meninas
15 → números de meninos

Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

Nesta tarefa, a estudante sugere que a ordem da adição de meninas e meninos não altera o resultado (a operação da adição é comutativa). Inclusive, afirma que a ordem do fator não altera o resultado. Ademais, exibiu que, caso tenha o total de alunos e o número de meninos ou meninas, é possível descobrir o outro através da subtração.

Destarte, propusemos aos estudantes que apresentassem para os demais como haviam resolvido a tarefa. Então, um aluno – Leo Jardim – foi o primeiro a compartilhar:

Figura 31 – Tarefa 1 – aluno Léo Jardim


EU ENTENDO QUE A SALA A POSSUI 35 ALUNOS
15 MENINAS E 20 MENINOS 20+15 E 35 QUE DIVIDIDO POR DOIS
E 17,5 OLHE ABAÇHO A ORDEM DOS FATORES NÃO ALTERA
O RESULTADO.

Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

Após a leitura do aluno, outro discente questionou:

Neymar: Você dividiu por 2?

CR7: Ele queria que a sala tivesse o mesmo número de meninos e de meninas.

Léo Pereira: Mas tem como dividir uma pessoa no meio?

Léo Jardim: Nossa! Eu ia ter que dividir uma pessoa no meio.

Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

Neste momento, existem várias situações importantes a serem observadas. A primeira delas é que o aluno dividiu por 2 na tentativa de igualar o número de meninos e meninas. A segunda é que o quociente é um número decimal, e quando a questão foi levada para discussão, os estudantes se questionaram se havia como “dividir uma pessoa ao meio”. Nessa passagem, os discentes fizeram uma análise da situação em questão. No entanto, o aluno prendeu sua atenção à busca pela mesma quantidade de meninos e meninas Esse tipo de discussão enriquece o processo e demonstra a importância da interação entre os estudantes e com o professor.

A discussão da tarefa 1 é finalizada quando o pesquisador reafirma que todas as justificativas produzidas pelos alunos eram corretas. Logo, propõe que os alunos façam uso de algumas relações, utilizando a primeira tarefa como foco. Essa proposta foi realizada em conjunto, onde os educandos expunham suas opiniões. A última ação realizada nessa atividade foi, uma negociação a qual partiu do pesquisador de como seria lido e escrito. Ou seja: a introdução da notação (a : b) (a está para b). Em seguida, foi realizada a leitura de cada item proposto na referida tarefa.

Na continuação, apresentamos a tarefa 2 aos alunos:

Figura 32 – Apresentação da Tarefa 2

> *Na turma B há 14 meninos e 21 meninas. Produza afirmações verdadeiras que informe, nessa sala de aula:*
>
> *(a) A relação entre o número de meninas e o número total de estudantes;*
>
> *(b) A relação entre o número de meninos e o número total de estudantes;*
>
> *(c) A relação entre o número de meninas e o número de meninos*

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na tarefa 2, os discentes identificaram que a quantidade de alunos nesta turma era a mesma que da atividade anterior. No entanto, o número de meninos e meninas era distinto da atividade anterior. Os estudantes tiveram dificuldade em realizar a tarefa, pois não haviam identificado o que era para ser realizado,. Assim, foi esclarecido que era para eles estabelecerem as razões que haviam sido discutidas.

Ao ler a tarefa, Neymar diz em voz alta: "*A relação entre o número de estudantes e o números de meninas*". E faz o seguinte questionamento, que vai envolver os colegas na discussão:

> *Neymar: Professor, estou achando estranho, porque a relação anterior fala: "A relação entre número de meninas e o e o número total de estudantes". Nesse caso mudou a ordem. Vai fazer diferença?*
>
> *Pesq: O que vocês acham?*
>
> *CR7: Neste caso, vai ficar* $\frac{35}{21}$*. Se for do seu jeito vai ficar* $\frac{21}{35}$*.*
>
> *Léo Pereira: Achei o segundo melhor.*

Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

Neste caso, os estudantes optaram por utilizar o segundo modo por serem familiarizados com este, pois já haviam tido um contato em momentos anteriores. Logo, o primeiro modo não produzia sentido algum para aqueles alunos. Tal situação produziu uma discussão interessante a cerca de fração e sua ideia de parte-todo e parte-parte.

Em seguida, um aluno questionou se havia divisão nas atividades, porque, na sua concepção, não sabia realizar tal operação. Então, o aplicador respondeu que não havia necessidade de se preocupar, pois caminhariam juntos naquela dinâmica. Ademais, até aquele momento, ninguém havia ficado para trás.

Destarte, o pesquisador começou a atender os estudantes de forma individual. Logo, começamos a identificar que o processo de simplificação não era algo natural, assim como constatamos que seria necessária a realização de uma intervenção e ajuda para que os discentes seguissem tal direção. No entanto, não obtivemos sucesso nessa tentativa. Sendo assim, optamos passsar para a próxima tarefa no intuito de visualizar se tais ideias partiriam deles. Os estudantes não conseguiram desenvolver a notação nessa atividade. Segundo eles, os números eram grandes.

Essa ficha de trabalho foi realizada no segundo encontro, pois não tivemos tempo hábil de desenvolver as três atividades propostas. Na tarefa 3, os alunos identificaram com facilidade que o número de meninos e meninas era o mesmo. Ademais, constatamos que haviam internalizado as respectivas relações estabelecidas na ficha. Como já estavam familiarizados, foi proposto a eles uma tentativa de simplificar. Logo, uma estudante fez o seguinte questionamento:

Pérola: Como descobrimos por qual número dividir?

Pesq: Vamos pensar juntas na tarefa anterior?

Todos:Sim!

Neymar: Dá para dividir 21 por 7.

Léo Pereira: 7 x 5 =35.

Pérola: Então dá para dividir 35 por 7, que dá 5.

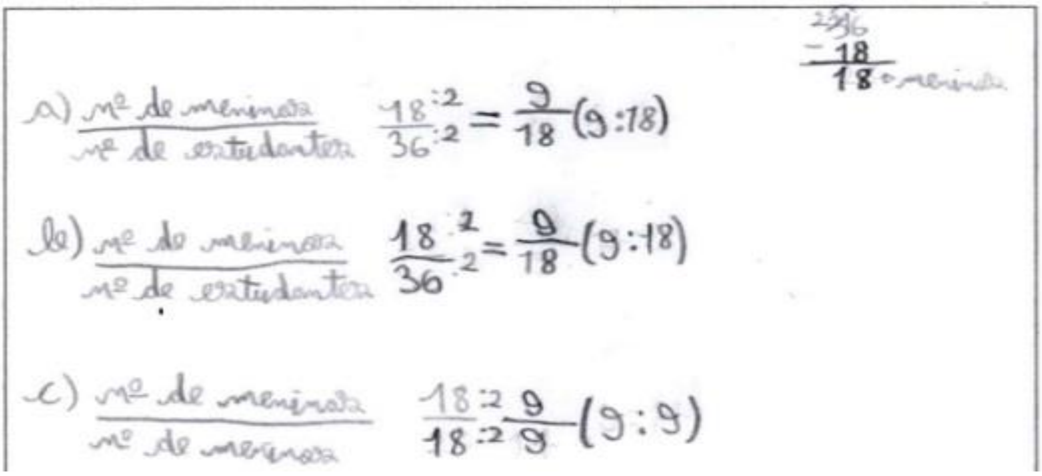
CR7: Lembro que tem algum negócio de múltiplo.

Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

Ao tomar a decisão de retornar no material anterior, o pesquisador convidou os estudantes a pensar em conjunto, e diferentes significados foram compartilhados e complementados. O aluno que sabia que “7 x 5=35 constituiu seu modo próprio de resolver a divisão. Segundo as suas palavras, a multiplicação o auxiliaria.

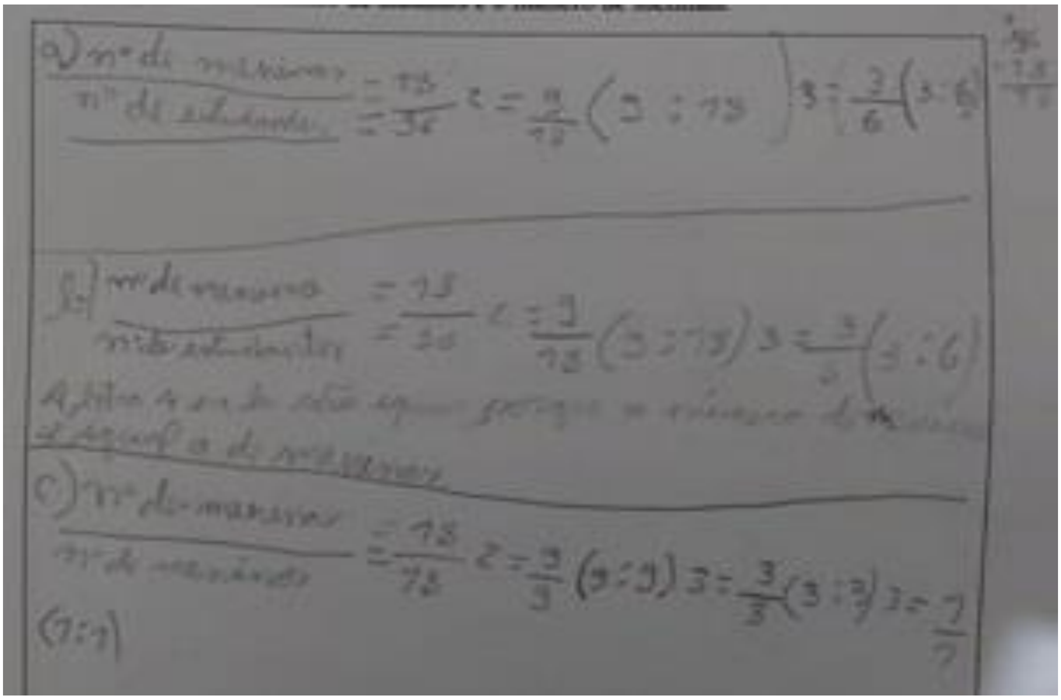
Logo em seguida, o pesquisador solicitou que os estudantes pensassem na tarefa 3 após as discussões. Depois de a realizarem, podemos observar que cada aluno resolveu de um modo:

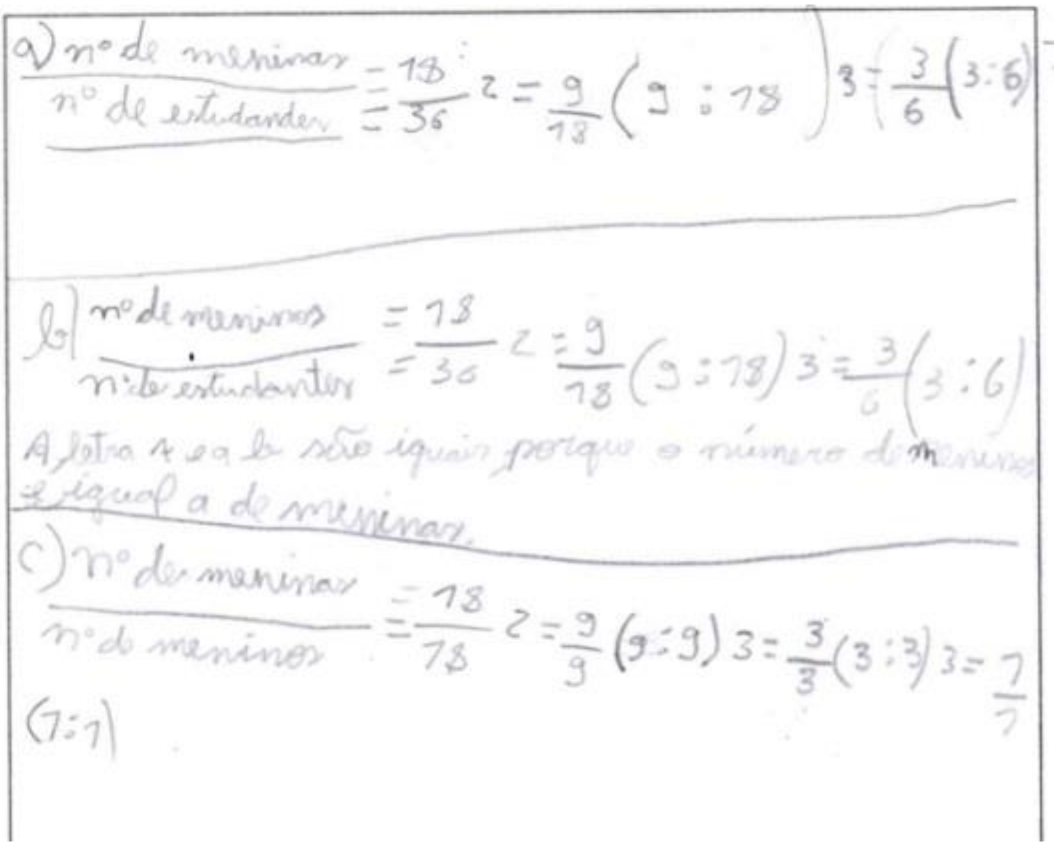
Figura 33 – Tarefa 3 – aluna Pérola 1



Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

Figura 34 – Tarefa 3 – aluno CR7 1





Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

Os dois alunos produziram significados na mesma direção, inclusive consideraram mais fácil pensar nessa tarefa utilizando a notação que lhes foi apresentada. Ambos alegaram que faziam para ler melhor, pois entendiam o que estava sendo feito.

Contudo, o primeiro adquiriu o que denominamos obstáculo epistemológico. Neste caso, o discente produz seus significados na direção da qual queremos. Porém, por alguma questão, o aluno não chega ao que desejamos. Na primeira imagem, identificamos que isso ocorre pela falta de afinidade com o processo de divisão, uma vez que podemos observar que os números divisiveis por 2 são facilmente identificados. Quando não são estes, temos essas situações.

Já o segundo aluno também obteve o obstáculo epistemológico. No entanto, o conseguiu dar um passo a mais. Além disso, identificou que as relações propostas pelos itens a e b eram iguais. E, no último item, simplificou de modo que ficasse (1: 1). Assim, um dos discentes verbalizou:

Léo Jardim: A cada 2 alunos, eu tenho 1 menina e 1 menino.

Assim, outro aluno fez o seguinte questionamento:

CR7: Professor, era possivel simplificar por 18 desde o inicio? Por que não falou?

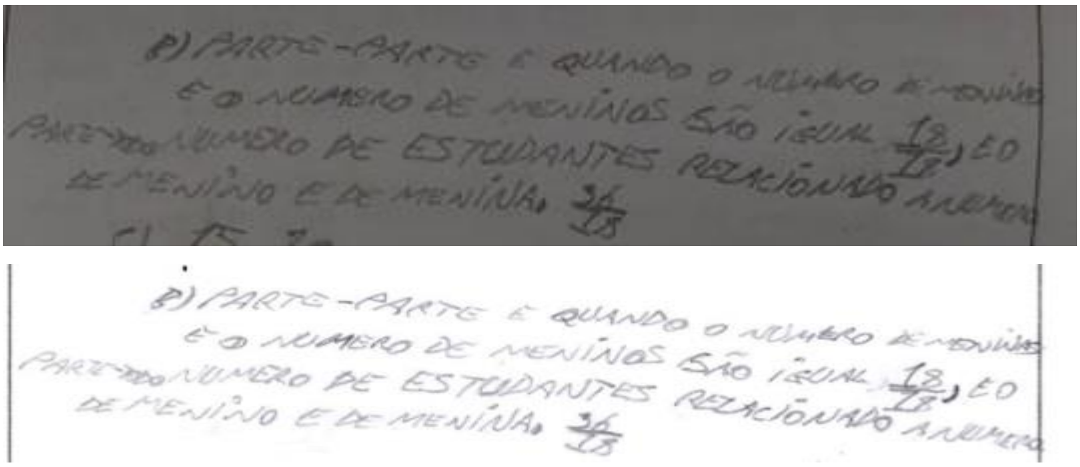
Pesq: O barato da coisa é descobrir, tentar, experimentar....olha que legal você mesmo descobriu isso, sem nenhuma "ajuda".

Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

Em seguida, o pesquisador apresentou seu respectivo modo de pensar as tarefas 2 e 3. Alguns alunos apontaram, durante o processo de simplificação, o não entendimento de por que tais números foram selecionados. Como estávamos fazendo um trabalho colaborativo e solidário, os próprios aprendizes que haviam entendido explicaram por que aqueles números foram escolhidos. Vale ressaltar que eles utilizaram a multiplicação como recurso principal de resolução.

Destarte, apresentamos a tarefa 4 conforme disposto na ilustração a seguir. Nela, os alunos identificaram com facilidade as relações de parte-todo, quem era todo e quais eram as partes. Porém, quando lhes foi solicitado que apresentassem exemplos de parte-parte, apresentaram a tarefa 3 $\frac{número\ de\ meninos}{núemros\ de\ meninas} = \frac{18}{18}$. Ao observar a seguinte justificação:

Figura 35 – Tarefa 4 – aluno Léo Jardim 1



Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

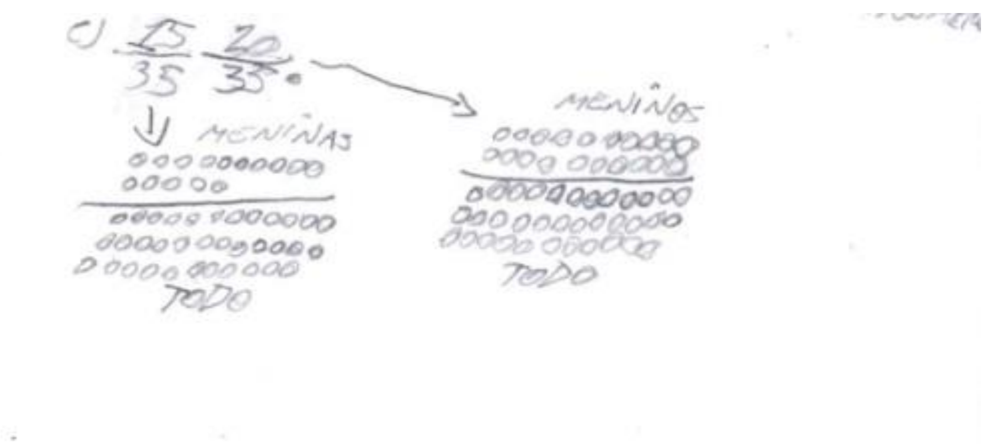
Após analisar esta resposta, observamos que os estudantes associaram a noção de parte-parte à ideia de números iguais, o que não era nosso objetivo. Destarte, o pesquisador fez uma intervenção externando o seguinte questionamento:

> *Pesq: Existem outros exemplos de parte-parte nessas tarefas? Deem uma olhada.*

Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

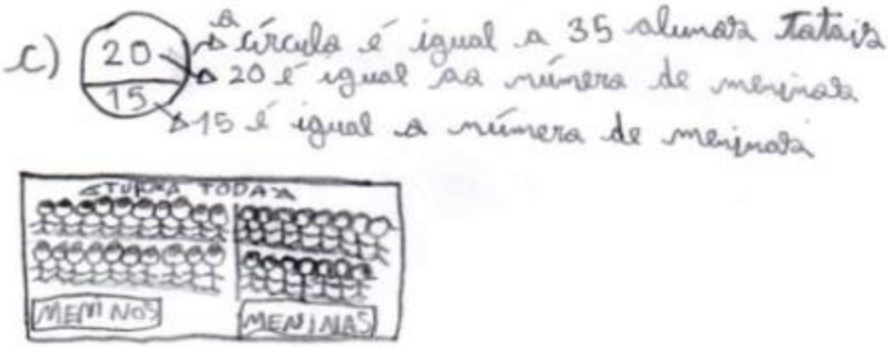
No entanto, os alunos não deram importância a tal situação e se encaminharam para o item c. Nessa atividade, alguns perguntaram o que queriamos que eles desenhassem. Assim, refrizamos que era o que eles queriam e consideravam que era:

Figura 36 – Tarefa 4, Item C – aluno Léo Jardim 1



Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

Figura 37 – Tarefa 4, Item C – aluna Pérola 1



Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

O primeiro aluno representou no desenho a relação do número de meninos pelo total de estudantes em uma imagem e, na outra, o número de meninas pelo total de estudantes. Já o segundo discente, na mesma imagem, representou ambos. São desenhos diferentes, mas que dizem quais significados esses alunos porduziram ao longo destas tarefas. Porém, os outros 3 estudantes não quiseram desenhar, pois se sentiam desconfortàveis ou não haviam entendido a proposta.

Por fim, o pesquisador retornou a questão de parte-parte, apresentando seus respectivos modos de conceber essa noção. Alguns alunos entenderam o conceito trabalhado. Assim, nos encaminhamos para as tarefas do segundo grupo.

A tarefa 1 causou estranhamento aos alunos, pois eles alegaram que os números (dados) das atividades eram grandes e pensavam que não iriam conseguir resolver. Rapidamente, os conseguiram estabelecer as relações que lhes eram solicitadas, ou seja, o processo já havia sido internalizado. No entanto, identificaram que existia uma necessidade de simplificação, porém alegaram que não sabiam.

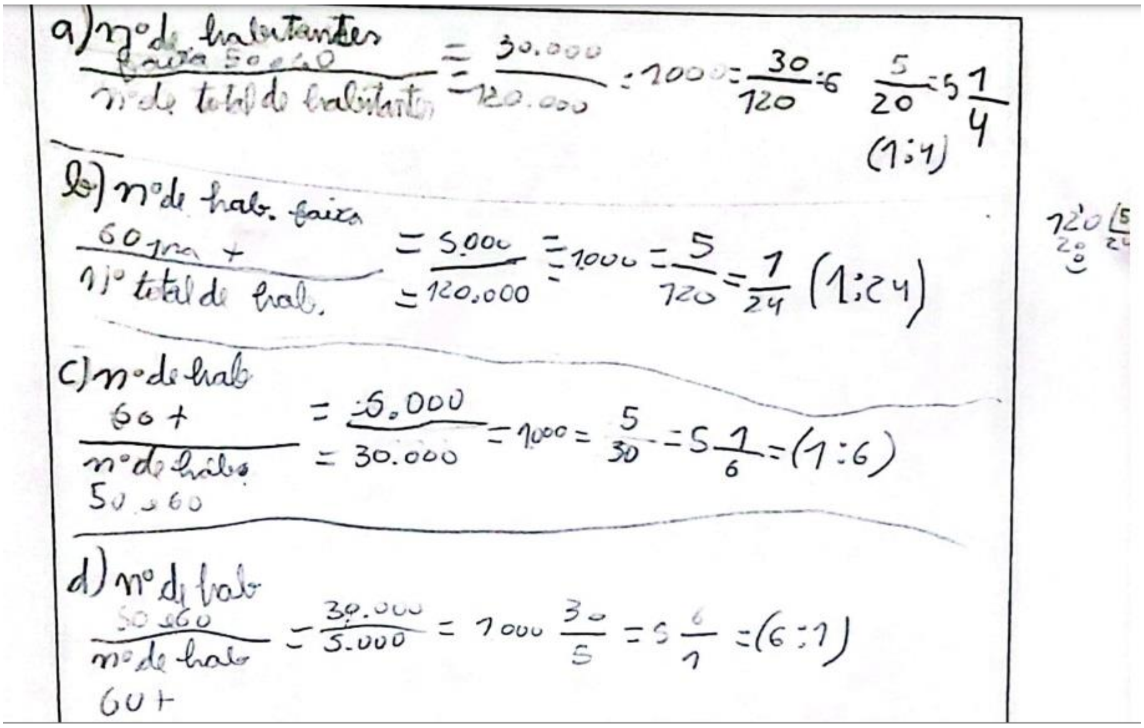
Nesse sentido, o aluno CR7 demonstrou incômodo desde o início com a grandeza do número, registrado inclusive em sua fala:

> *CR7; Deve ter um jeito mais fácil de resolver esta atividade, não é possível.Vou acabar dividindo por 1000.*
>
> *Pesq: Tenta ué!*

Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

O discente, então, iniciou o processo de tentativa. Após um certo tempo, afirmou que era possível, porém percebemos que ele não exibiu o seu modo de pensar, apenas sinalizou:

Figura 38 – Tarefa 2 do Grupo 2 – aluno CR7



Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

Outra estudante começou a pensar o mesmo que o colega. Porém, ela sabia que existia alguma coisa de “cortar o zero de cima e de baixo”. Assim, direcionou a seguinte questão:

> *Pérola: Professor, por que posso cortar os zeros?*
>
> *Pesq: Pode? Por quê?*
>
> *Pérola: Então eu sei que pode, mas não sei o porquê. Me explica?*

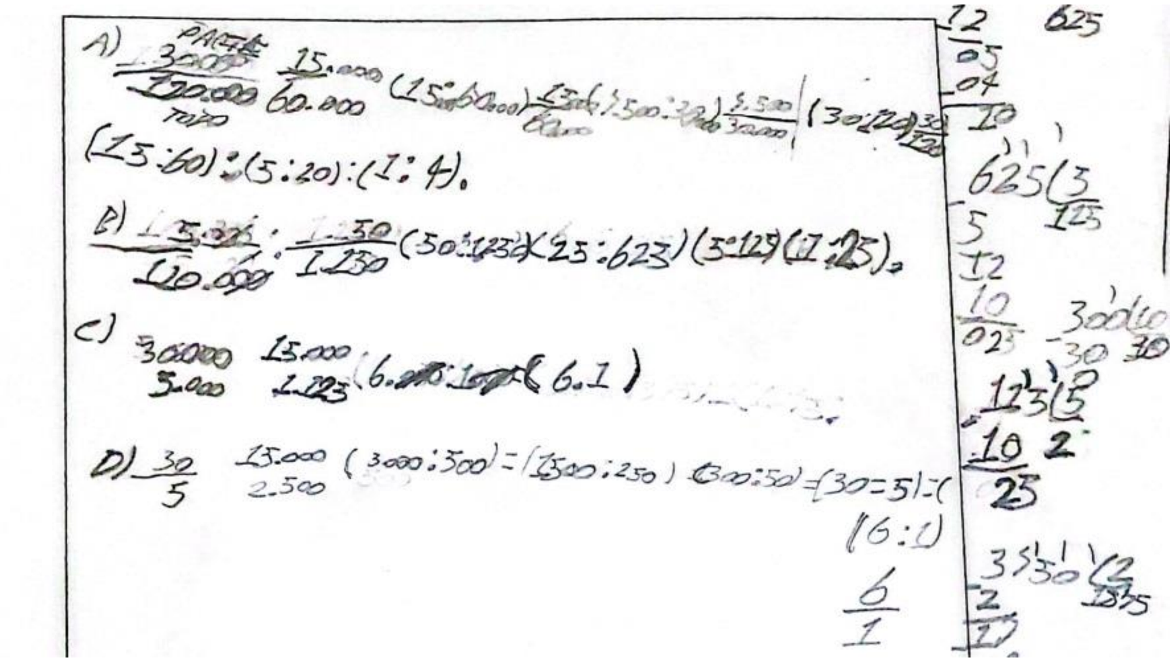
Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

Como pesquisador, não sabíamos qual caminho tomar por ser uma escolha difícil. Explicaríamos para a aluna e ceifaríamos o processo de investigação e descoberta dela? Ou a deixaríamos sem resposta ou motivação para solucionar tal questão? Nesse momento, demarcamos a importância do papel do pesquisador no processo de ensino e apredizagem, de modo que este possua uma escuta ativa, sem juízo de valor, e possa ler os alunos no interior das atividades com suas respectivas produções de significados.

Outro discente optou por realizar o processo de simplificação de outro modo, pois este era legítimo, e o referido aluno alegou obter confiança.

Além disso, após o primeiro item, os alunos começaram a discutir e explicar suas resoluções. O discente que resolveu o item anterior sem utilizar o método de divisão na base 10, no item b, resolveu utilizando tal método. Destarte, o estudante internalizou o processo de simplificação na base 10:

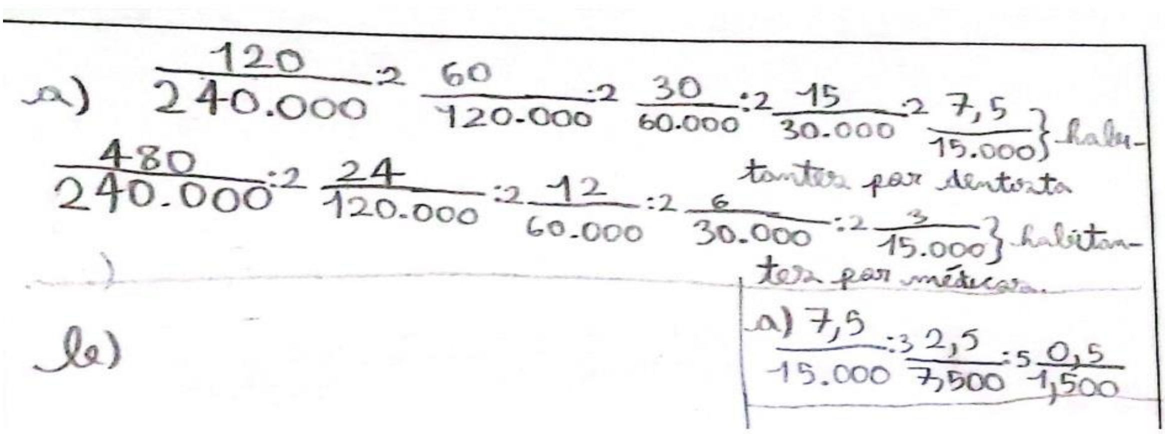
Figura 39 – Tarefa 2 do Grupo 2 – aluno Léo Jardim



Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

Na tarefa 2, uma aluna apresentou o seguinte modo de desenvolver:

Figura 40 – Tarefa 2 do Grupo 2 – aluna Pérola



Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

Observamos que a discente utilizou, em todo o processo, a simplificação por 2. O pesquisador lhe perguntou por que ela optou por esse número da tabuada, de modo que ela respondeu:

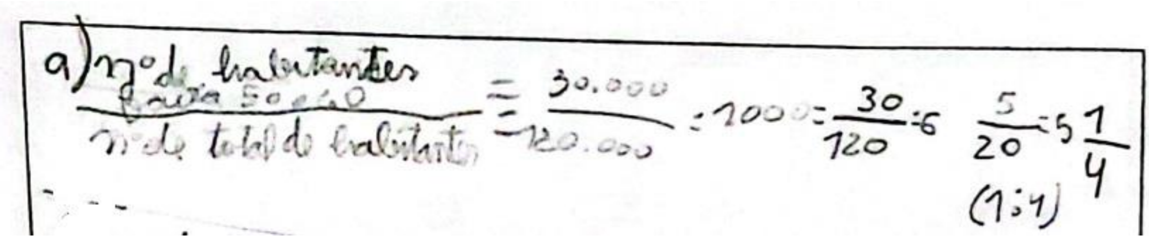
> *Pérola: Porque eu sei o que é metade.*
>
> *Pesq: Ahhh sim.. Mas por que* $\frac{7,5}{15000}$ *você simplificou por 3?*
>
> *Pérola: Porque aí eu sei resolver.*

Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

Ou seja, nos resíduos de enunciação dessa aluna, ela evidenciou que, em suas produções de significado, aplicar números considerados grandes é “aceitável”, pois conhece o modo operatório e conhece o conceito de metade. Tal associação a permite associar a divisão por 2.

Nesta mesma tarefa, outro estudante apresentou a forma de operar a seguir:

Figura 41 – Tarefa 1 do Grupo 2 – aluno CR7

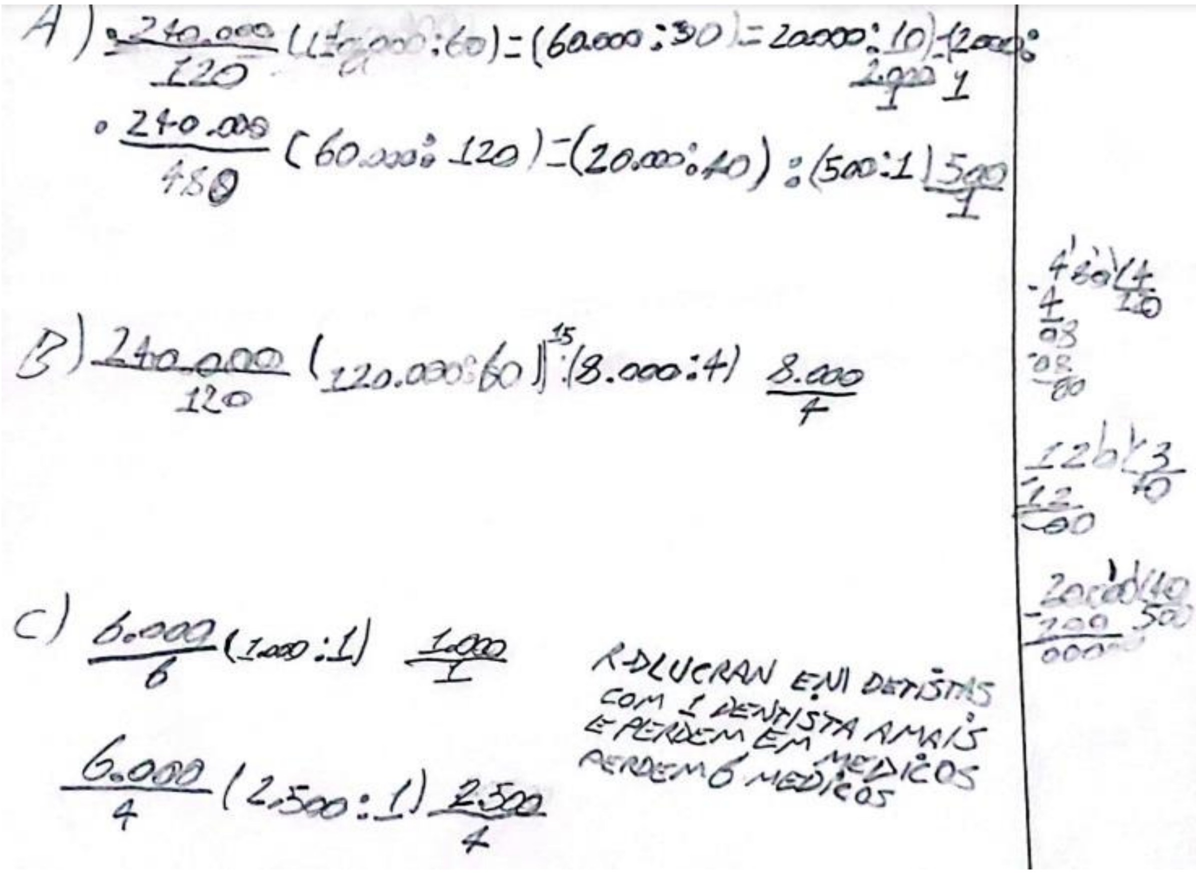


Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

Esse mesmo aluno, que na aula anterior havia questionado sobre a divisão na base 10, demonstrou ter internalizado tal modo de operar, pois, nessa fase, realizou uma divisão desse mesmo modo.

Outro estudante produziu o seguinte significado:

Figura 42 – Tarefa 2 do Grupo 2 – aluno Léo Jardim



Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

Nessa tarefa, analisamos que o estudante adotou a notação que foi combinada entre os discentes. Ou seja, aquele modo de escrever produziu um sentido para esse aluno, que, em alguns momentos, retornava à notação de fração. Sendo assim, consideramos que ele está com os dois modos presente em suas operações. É importante salientar que o estudante, ao concluir a atividade, identificou que o modo com o qual tinha escrito era $\frac{todo}{parte}$, porém não tínhamos tempo hábil. Logo, o educando foi orientado a deixar do jeito que estava, pois já possuíamos a sinalização por parte dele de que havia ocorrido uma confusão

No item c, os alunos apresentaram dficuldade em entender o que a atividade pedia. Sendo assim, apenas dois discentes conseguiram compreender a proposta da atividade, que era comparar qual cidade era mais bem atendida em dentista por habitante e médico por habitante.

No entanto, um aluno que se encontrava inerte no desenrolar da atividade fez o seguinte questionamento:

Léo Pereira: Professor, pode usar calculadora?

Pesq: Por que?

Léo Pereira: Porque eu acho mais fácil.

Pesq: Vamos tentar sem a cálculadora?? Se continuar dificil você me avisa.

Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

Neste momento, acreditamos que o discente se encontrava diante de uma situação, a qual ele próprio havia identificado, em que necessitaria de um suporte. Porém, nos questionamos sobre quando aceitar recursos como calculadora como instrumento de investigação e tentativa? Enquanto pesquisador e aplicador, nos vimos em um lugar no qual não sabíamos o que responder.

Contudo, dois alunos concluiram que a cidade com 6.000 habitantes era mais bem atendida por dentistas e a de 240.000 habitantes era mais bem atendida por médicos. No entanto, os discentes alegaram inicialmente que a cidade com menos habitantes seria a que atenderia melhor a população, pois, segundo eles, o número total de habitantes era maior. Mas ambos resolveram conferir tal afirmação após o questionamento do pesquisador.

Em seguida, os estudantes começaram suas respectivas atividades. O aluno CR7 apresentou o seu raciocínio e convenceu aos demais colegas:

CR7: Olha só, na primeira cidade, o número de dentista é (24000:1,2), a cada 24000 pessoas tem 1,2 dentista. Na outra cidade (1500:1), a cada 1500 pessoas temos 1 dentista. É melhor para nós a segunda cidade porque temos mais dentistas que pessoas.

Léo Jardim: Mas peraí... na primeira cidade o meu deu (2000:1) a cada 2000 habitantes, temos 1 dentista. Olha só como fiz...

CR7: Nossa! Errei conta...

Pérola: Mas mesmo assim vai dá certo!

Neymar: Verdade.

Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

Os alunos apresentaram dificuldade em identificar que, em relação à quantidade de dentistas por habitante, é 6.000. Já para a quantidade de médicos por habitante é 240.000. Sendo assim, essa atividade lhes possibilitou experimentar e propor hipóteses sobre a tarefa proposta.

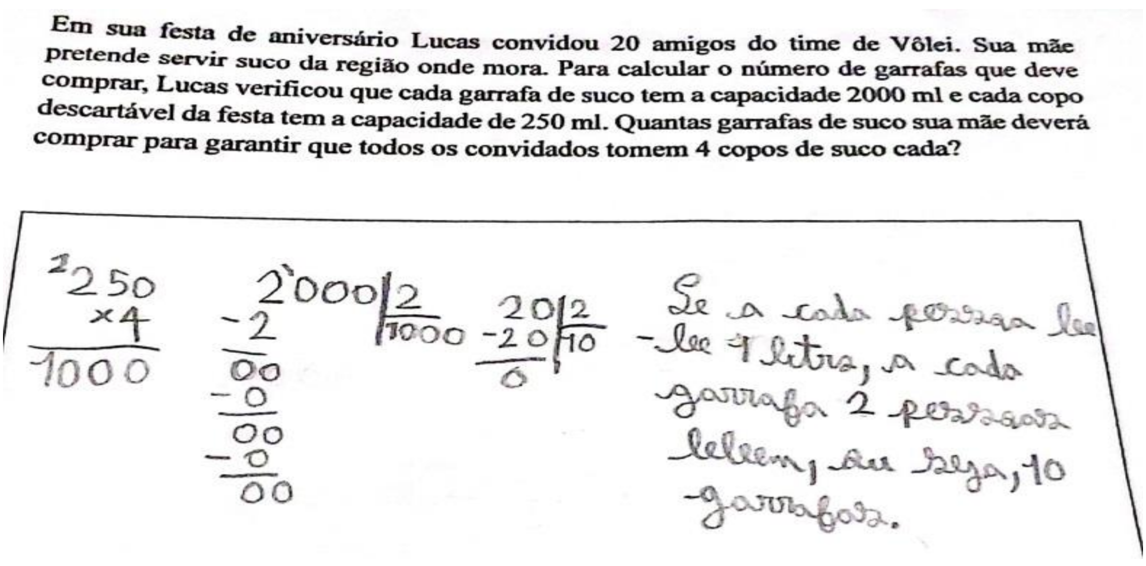
Ademais, permitiu aos educandos, no desenvolvimento da atividade, compartilhar seus respectivos modos de resolver. No momento da resolução, todos colaboraram e compartilharam suas respectivas noções acerca do que estava sendo proposto. Esse ambiente de interatividade e discussão é um ambiente rico em produção de significados, fato que encontra eco no dizer de Roberto Baldino de que matemática se aprende falando e se ensina ouvindo. Além disso, concluímos que o discente que estava com dificuldade e solicitando o uso de calculadora compreendeu a explicação do colega. Os alunos ficaram envolvidos nesta tarefa e levaram praticamente duas aulas para concluirem as duas primeiras tarefas.

A tarefa 3 foi realizada no quarto encontro, pois os estudantes não conseguiram realizar as atividades propostas por grupo. Ademais, o aluno Léo Jardim não havia comparecido ao último encontro, então entregamos as tarefas propostas para que ele as concluísse em casa. Porém, o educando se debruçava sobre as tarefas nos horários vagos.

Ao começarem a ler a tarefa, um estudante questionou se o número de participantes da festa eram 20 ou 21 pessoas. Assim, pedimos que explicassem o porquê ou como chegou a tal conclusão. O discente justificou que, no enunciado, é dito que Lucas convidou 20 amigos, mas ele, como aniversariante, também participaria; então, seriam 21 pessoas. Assim, foi explicado ao estudante que ele tinha liberdade de resolver do jeito que entendia melhor, de que modo que optou por considerar 20 pessoas, pois alegou que ficaria mais fácil de resolver as contas.

Em seguida, observamos os modos através dos quais os estudantes pensaram e desenvolveram suas ideias:

Figura 43 – Tarefa 3 do Grupo 2 – aluna Pérola



Em sua festa de aniversário Lucas convidou 20 amigos do time de Vôlei. Sua mãe pretende servir suco da região onde mora. Para calcular o número de garrafas que deve comprar, Lucas verificou que cada garrafa de suco tem a capacidade 2000 ml e cada copo descartável da festa tem a capacidade de 250 ml. Quantas garrafas de suco sua mãe deverá comprar para garantir que todos os convidados tomem 4 copos de suco cada?

$250 \times 4 = 1000$

$2000 \div 2 = 1000$

$20 \div 2 = 10$

Se a cada pessoa bebe 1 litro, a cada garrafa 2 pessoas bebem, ou seja, 10 garrafas.

Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

No interior dessa atividade, observamos algumas situações. A explicação da estudante para sua respectiva resolução é legítima por ter pensado da forma como expressou seu raciocínio e, assim, chegado ao que se queria.

Já o aluno CR7, após ler e ficar falando em voz baixa (raciocinando), respondeu o seguinte:

CR7: Vai precisar de 10 garrafas.

Pesq: Como chegou a esta conclusão?

CR7: Está certo uai?

Pesquisador: Quero entender como vc pensou....

CR7: Cada pessoa vai beber 1 litro de refrigerante, então vou precisar de 20 litros. Aí, cada 2 pessoas vai beber uma garrafa. Ou seja, vou precisar de 10 garrafas só!

Pesquisador: Huuuuum, legal! Escreve isso que me falou.

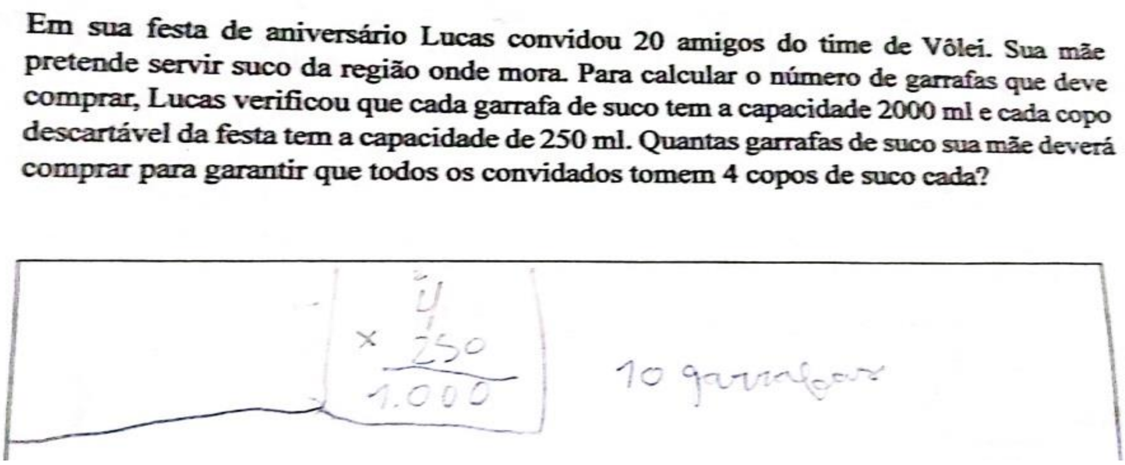
CR7: Não sei. Vou fazer do jeito que sei.

Pesquisador: Ok! Está ótimo!

Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

Na ilustração abaixo, dispomos o que o estudante registrou em sua atividade:

Figura 44 – Tarefa 3 do Grupo 2 – aluno CR7



Em sua festa de aniversário Lucas convidou 20 amigos do time de Vôlei. Sua mãe pretende servir suco da região onde mora. Para calcular o número de garrafas que deve comprar, Lucas verificou que cada garrafa de suco tem a capacidade 2000 ml e cada copo descartável da festa tem a capacidade de 250 ml. Quantas garrafas de suco sua mãe deverá comprar para garantir que todos os convidados tomem 4 copos de suco cada?

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times\ 250 \\ \hline 1.000 \end{array}$$

10 garrafas

Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

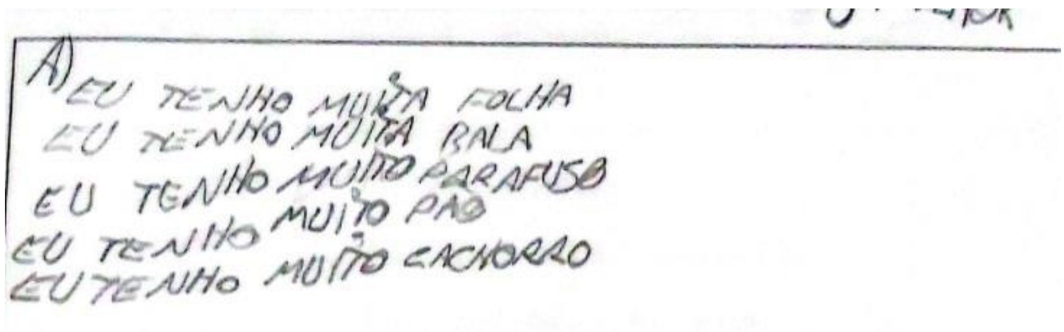
Para concluir essa tarefa, o aplicador exibiu a sua resolução para os demais estudantes. Neste momento, os discentes concluíram que a ideia era a mesma, apenas alguns caminhos eram diferentes. Mas o que mais lhes trouxe incômodo foram as respectivas justificações, pois não eram apresentados somente números, e sim o que cada um representava no interior daquela atividade. Uma aluna chegou a falar que esse modo era mais fácil para alguém que não sabia resolver a atividade. A seguir, apresentamos o método de resolução do pesquisador.

Neste mesmo encontro, iniciamos a discussão do grupo 3, tarefa 1. Durante a aplicação, constatamos que os estudantes estavam esgotados e cansados. Logo, estavam bem dispersos. Então, resolvemos que o pesquisador leria a tarefa com o intuíto de captar-lhes a atenção. Ressaltamos que tal atitude resolveu a questão da falta de concentração.

Notamos que o texto em questão esclareceu, de forma bem elucidativa e direcionada, a uma criança de 12 anos, de modo que os discentes entenderam a ideia de grandeza, tanto que utilizaram os respectivos exemplos que se fazem presentes em seus cotidianos. No entanto, analisamos que associaram grandezas a números, pois, ao longo do material, relacionaram grandeza com quantidade. Nas ilustrações abaixo, trazemos os respectivos exemplos relativamente ao seguinte enunciado:

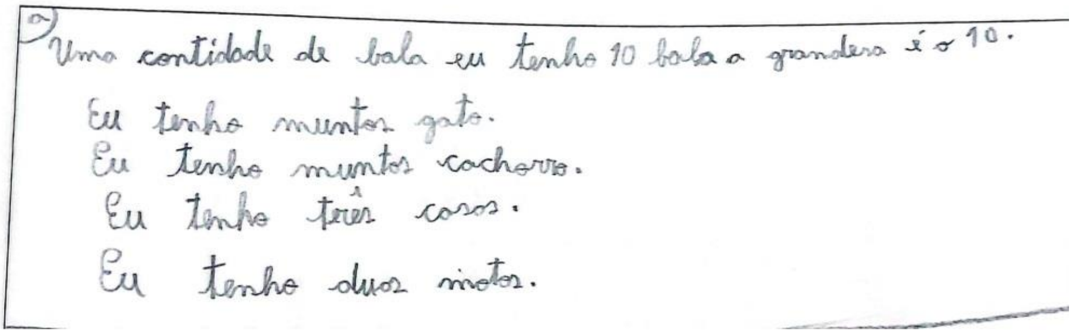
> *Com estas informações, vocês devem:*
>
> *Exibir 5 exemplos de coisas que são grandezas.*

Figura 45 – Tarefa 1 do Grupo 3 – aluno Léo Jardim



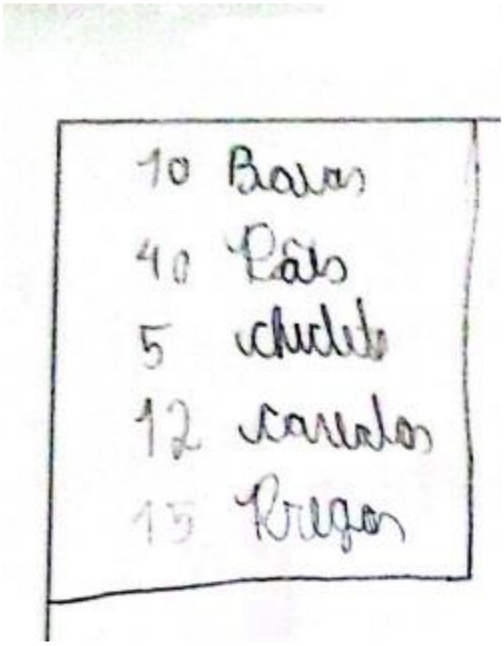
Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

Figura 46 – Tarefa 1 do Grupo 3 – aluno Neymar Jr.



Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

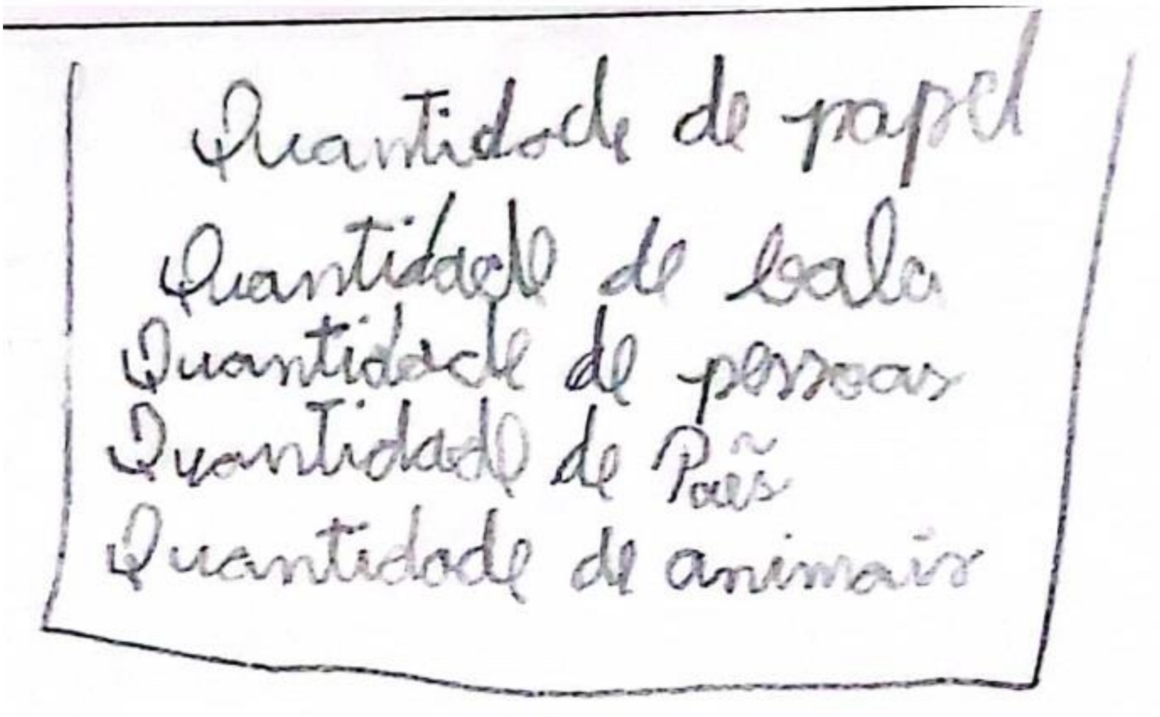
Figura 47 – Tarefa 1 do Grupo 3 – aluno Léo Pereira



Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

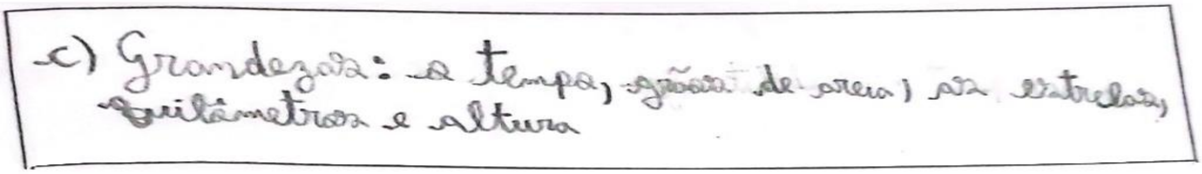
Já os demais estudantes entenderam a tarefa do seguinte modo:

Figura 48 – Tarefa 1 do Grupo 7 – aluno CR7



Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

Figura 49 – Tarefa 1 – Item B do Grupo 3 – aluna Pérola



Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

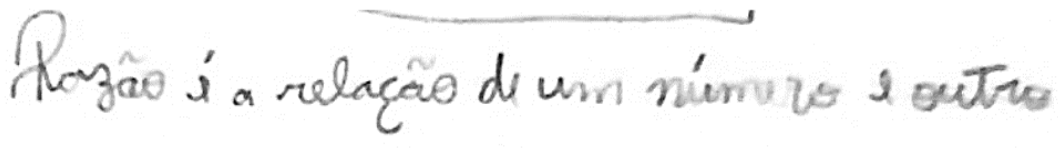
No momento em que os alunos apresentaram suas respectivas produções de significado acerca dessa tarefa, um deles fez o seguinte questionamento:

> *Neymar: Peraí.... grandeza não é o número ou quantidade de algo?*
>
> *Pérola: Acho que não... na verdade é o que acompanha o número. Exemplo: duas casas, a grandeza é a casa. Olha no texto: “* ***Grandeza*** *ou* ***Quantidade*** *é tudo aquilo que pode ser medido, contado, usando números para isso.”*
>
> *Léo Pereira: Entendi! Os números acompanham...*

Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

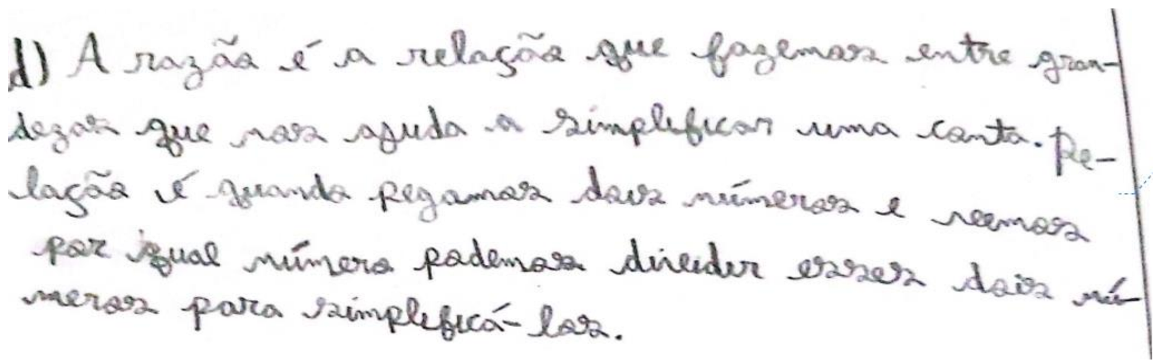
No segundo item desta tarefa, os alunos foram convidados a escreverem com suas palavras o que era razão. Então surgiram as seguintes respostas:

Figura 50 – O que CR7 entende por razão – 1


Razão é a relação de um número e outro

Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

Figura 51 – O que Pérola entende por razão – 1


1) A razão é a relação que fazemos entre grandezas que nos ajuda a simplificar uma conta. Relação é quando pegamos dois números e vemos por igual número podemos dividir esses dois números para simplificá-los.

Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

Os demais estudantes desenvolveram o raciocínio na mesma direção das duas resoluções expostas nos exemplos anteriores. Assim, o professor exibiu com suas palavras, no quadro, sua definição para razão: *Razão é o quociente (resultado) de uma divisão entre dois números, onde o resultado serve para medir ou contar. Ou seja, ao tomarmos razão, comparamos elementos de uma mesma grandeza*.

Logo, os alunos começaram a trazer dúvidas e questionamentos :

Léo Jardim: Então, se eu dividi dois dois números, a resposta final é a razão?

Pesq: Sim, mas...

CR7: Tem que falar da mesma coisa...

Neymar: Como assim?

CR7: Se tiver falando de bala, nao pode está falando de pessoas. Certo?
Pesq: O que acharam da justificativa do CR7?

Pérola: Ta certa! Olha o final do que está escrito no quadro:" ....comparamos elementos de mesma grandeza"

Pesq: Mais algum questionamento?

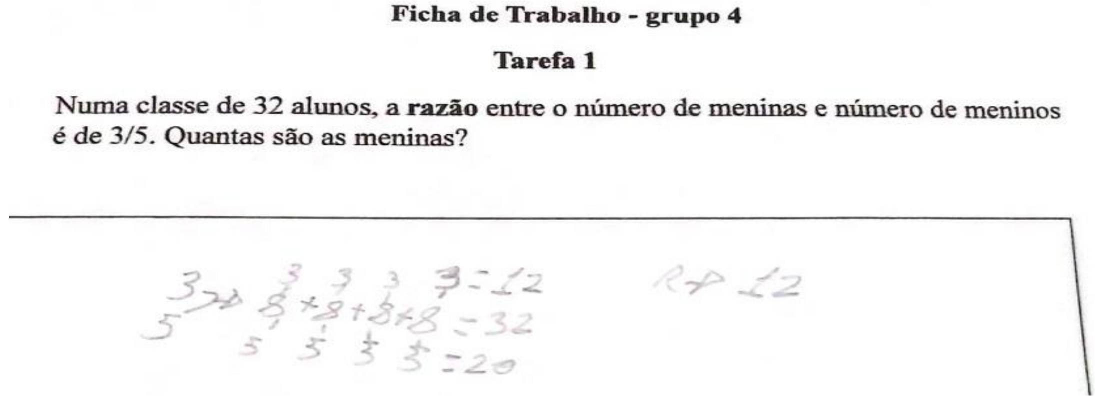
Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

Após a pergunta derradeira, notamos que todos os estudantes aparentavam um certo cansaço. Em seguida, nos questionaram quando acabariam as aplicações das atividades, pois estavam cansados. Alguns justificaram que as atividades eram diferentes do que estavam acostumados a realizar na sala de aula. Isso porque, de acordo com os discentes, o aplicador só explicava quando eles já tinham resolvido os exercícios.

Após este momento de escuta, sentimos a necessidade de diminuir a quantidade de encontros. Por isso, resolvemos manter a proposta inicial de 5 encontros, porém tínhamos apenas 1 encontro agendado e, ainda, as tarefas dos grupos 4 e 5. Dessa forma, decidimos entregar as atividades do Grupo 4 para que resolvessem em casa, de modo que, no encontro seguinte, discutiríamos tais tarefas.

No último encontro, iniciamos recolhendo as tarefas que os discentes levaram para casa. Nessa atividade, observamos que tivemos poucos elementos para analisar, pois, durante o processo de leitura, análise e desenvolvimento da atividade, os estudantes falam, gesticulam. Nesses momentos, nós, como pesquisadores, colhemos resíduos de enunciações, atráves da fala, que não são anotados pelo estudante na folha. Acreditamos que tal proposta possa ter perdido alguns desses elementos, contudo ainda assim colhemos resíduos de enunciação questionando os modos com os quais os discentes operaram:

Figura 51 – Tarefa 1, item B, do Grupo 4 – aluno Neymar Jr.



Ficha de Trabalho - grupo 4

Tarefa 1

Numa classe de 32 alunos, a **razão** entre o número de meninas e número de meninos é de 3/5. Quantas são as meninas?

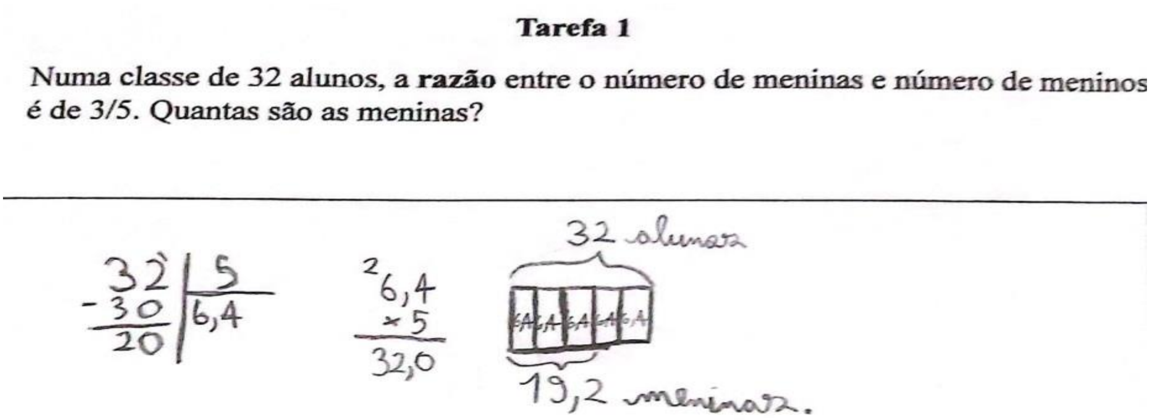
3 3 3 3 = 12   R: 12
3/5 = 8 + 8 + 8 + 8 = 32
5 5 5 5 = 20

Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

Nessa tarefa, alguns alunos justificaram e contribuíram com os demais no sentido de que, se a relação é de número de meninas pelo número de meninos, tem-se que são 8 alunos, pois fizeram a operação (3 meninas + 5 meninos). Como nessa turma há 32 alunos ao todo, estes somaram 8 até que chegassem ao resultado de 32. Os discentes afirmaram que a turma foi dividida em 4 grupos de 8. Como cada grupo tem 3 meninas e são 4 grupos, tem-se nessa turma um total de 12 meninas.

Porém, a discente Pérola havia produzido um siginificado diferente. Para tanto, trazemos a seguir sua tarefa e sua justificativa:

Figura 52 – Tarefa 1 do Grupo 4 – aluna Pérola



Tarefa 1

Numa classe de 32 alunos, a razão entre o número de meninas e número de meninos é de 3/5. Quantas são as meninas?

Pérola: Primeiro, dividi 32 por 5, para descobrir quantas meninas tinham, pois a cada 5 grupos, 3 tinham meninas. Como o resultado foi, 6,4, peguei esse valor e multipliquei por 3. O resultado desta conta é o número de meninas nesta sala, que 19,2.

Neymar: Uai, mas existe quantidade de meninas quebradas?

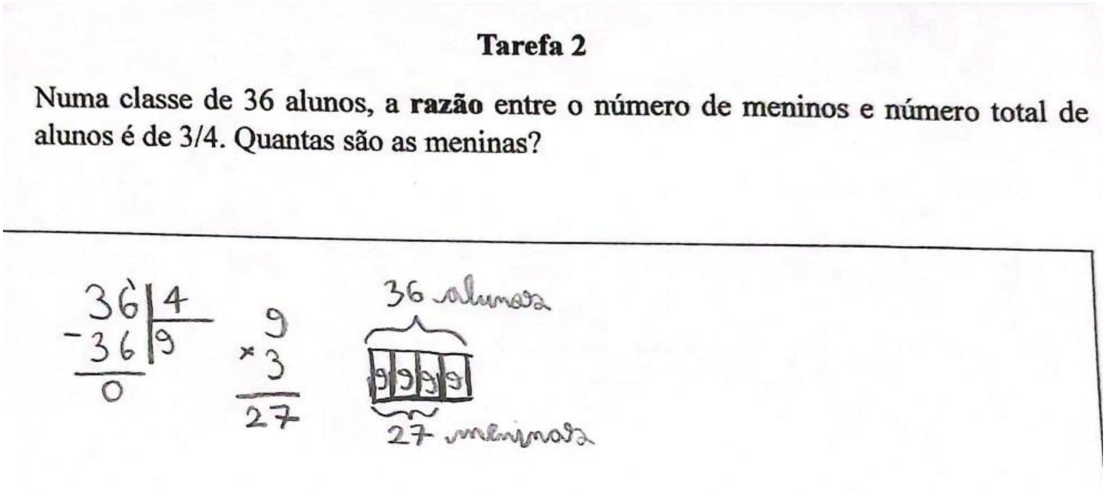
Léo Jardim: Não! Você raciocinou difeente de nós, Pérola!

Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

Nesta tarefa, podemos observar que Pérola estava operando em direção contrária à dos demais colegas e do que era pedido no exercício. No entanto, durante a discussão proposta em sala, a aluna pôde compreender a diferença do seu modo de operar para o outro. Através desse espaço, ela entendeu seu respectivo direcionamento.

Na tarefa 2, Pérola resolveu da seguinte forma:

Figura 53 – Tarefa 2 do Grupo 4 - aluna Pérola

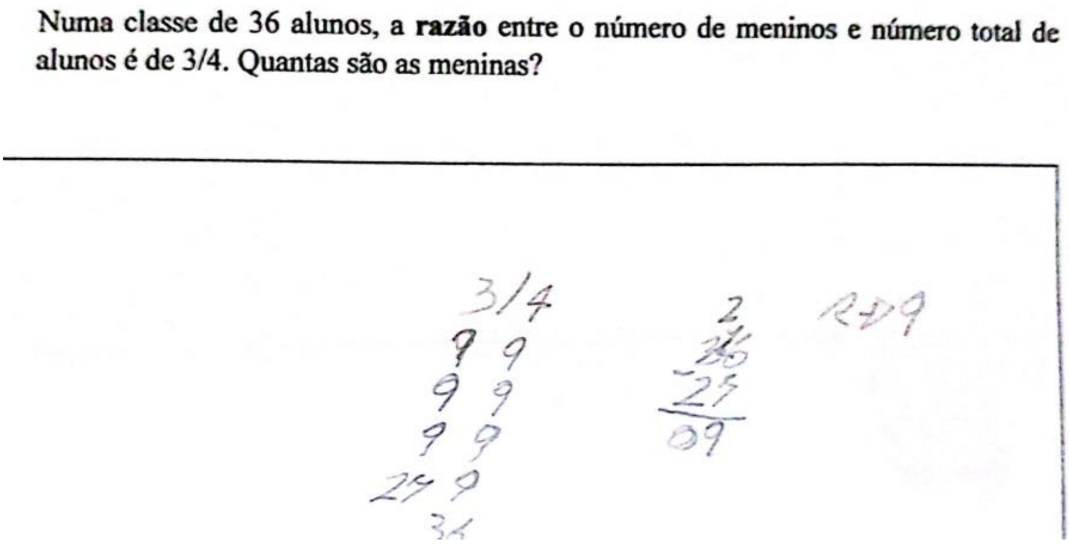

Tarefa 2

Numa classe de 36 alunos, a **razão** entre o número de meninos e número total de alunos é de 3/4. Quantas são as meninas?

Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

Por sua vez, outro discente resolveu conforme disposto a seguir:

Figura 54 – Tarefa 2 do Grupo 4 - aluno Léo Pereira


Numa classe de 36 alunos, a **razão** entre o número de meninos e número total de alunos é de 3/4. Quantas são as meninas?

Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

Observamos que a estudante utilizou o desenho como recurso de resolução e explicação, pois dividiu 36 alunos por 4, o que resultou em 9. E, em seguida, multiplicou 9 por 3 para descobrir a quantidade de meninas existentes nessa turma. Já o outro aluno alegou que sabia que 9 x 4 = 36, então ele somou 9 por 4 vezes. E chegou à conlclusão de que $\frac{3}{4}$ de 36 eram 27, porém queria descobrir o número de meninas. Então, subtraiu o total da quantidade de meninos, que resultou em 9.

Durante o espaço de compartilhamento de ideias, a primeira aluna fez o seguinte questionamento:

> *Pérola: Por que o seu número de meninas de meninas é 9?*
>
> *Léo Jardim: Porque o número de meninos é $\frac{3}{4}$ do total, que é 27 meninos.*
>
> *Pérola: Nossa! Confundi as informações.*

Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

Em seguida, entregamos aos alunos a tarefa 1 do grupo 5. Assim que começaram a analisar a terafa, pediram auxílio para fazer a leitura. Após a atividade do grupo 3, observamos que os estudantes tinham dificuldade em ler materiais, ou seja, perdiam a atenção com muita facilidade, ou então nem começavam a desenvolver as respectivas atividades. Então, lemos a atividade para eles no intuito de acompanhá-los.

Os educandos tiveram dificuldade em resolver tais atividades. Dois alunos, apresentaram todo o raciocínio de modo oral:

> *Léo Jardim: Olha só, conferimos todos os cálculos e a Alice realizou tudo de forma correta. Então, a menina está certa, a cada 5 fotos, 2 são coloridas.*

Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

O pesquisador realizou outra leitura do material, pois os discentes solicitaram. Então, estes disseram que nunca estudaram porcentagem, mas já haviam ouvido falar. Dessa forma, refrizamos a importância da leitura. Após esse momento, um aluno fez o seguinte questionamento:

> *Léo Jardim: Professor, se eu pegar uma bala e dividir ao meio, vou ter 50 % da bala, que é a memsa coisa que metade.*
>
> *Pesq: É um começo.*

Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

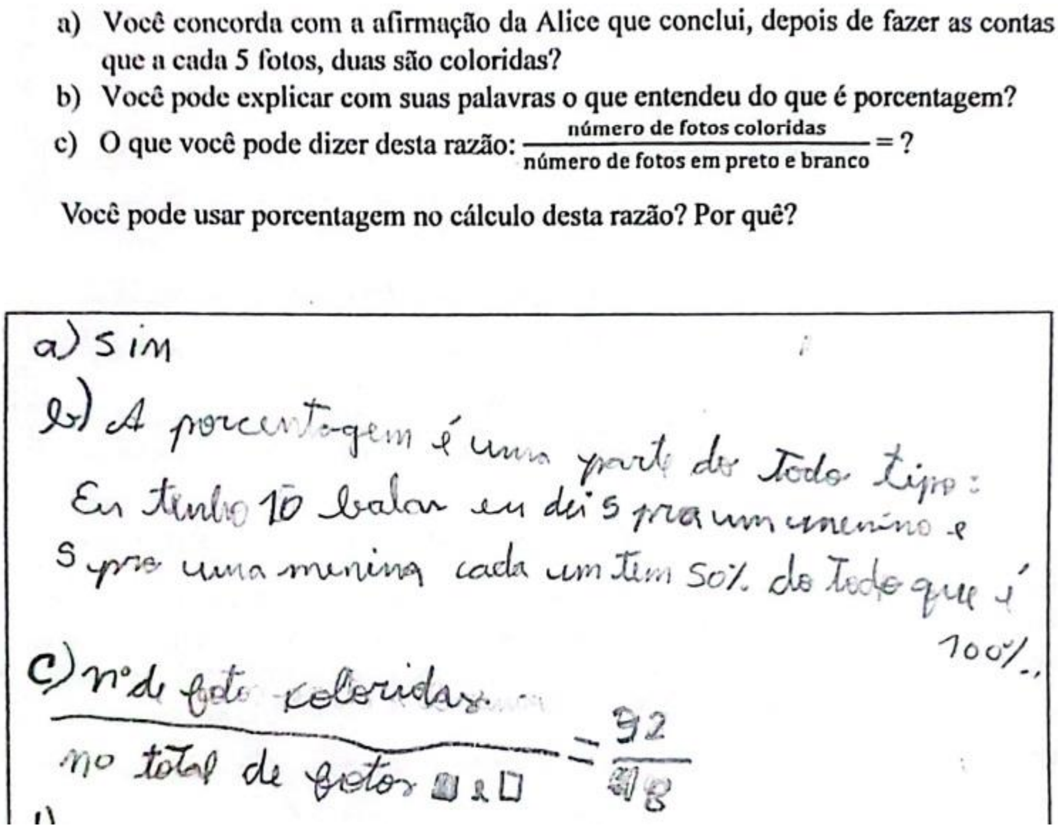
Após essa afirmação, os discentes foram tentando descobrir o que era porcentagem pela etimologia da palavra. Em dado momento, um aluno sugeriu a ideia de “por cento”. Em seguida, outro estudante chegou à conclusão “por 100”. Logo, estavam conversando na direção da atividade, porém não conseguiram chegar até ela.

Nesse sentido, a estudante chegou à seguinte conclusão:

Pérola: 100% é o todo. A porcentagem seria uma parte desse todo?

Nas ilustrações a seguir, apresentamos algumas das referidas tarefas desenvolvidas com os discentes:

Figura 55 – Tarefa 1 do Grupo 5 – aluno Cristiano Ronaldo



a) Você concorda com a afirmação da Alice que conclui, depois de fazer as contas que a cada 5 fotos, duas são coloridas?
b) Você pode explicar com suas palavras o que entendeu do que é porcentagem?
c) O que você pode dizer desta razão: $\frac{\text{número de fotos coloridas}}{\text{número de fotos em preto e branco}} = ?$

Você pode usar porcentagem no cálculo desta razão? Por quê?

a) sim
b) A porcentagem é uma parte do todo tipo:
Eu tenho 10 balas eu dei 5 pra um menino e 5 pro uma menina cada um tem 50% do todo que é 100%.
c) $\frac{\text{nº de foto coloridas}}{\text{no total de fotos}} = \frac{32}{[illegible]8}$

Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

Figura 56 – Tarefa 1 do Grupo 5 – aluna Pérola

Com base no que você acabou de ler responda:

a) Você concorda com a afirmação da Alice que conclui, depois de fazer as contas que a cada 5 fotos, duas são coloridas?
b) Você pode explicar com suas palavras o que entendeu do que é porcentagem?
c) O que você pode dizer desta razão: $\frac{\text{número de fotos coloridas}}{\text{número de fotos em preto e branco}} = ?$
d) Você pode usar porcentagem no cálculo desta razão? Por quê?

a) Sim.

b) Porcentagem é a representação do numerador, já que 32 (fotos coloridas) é igual a 40%, e 48 (fotos preto e branco) é igual a 60%. 32 mais 48 é igual a 80 (número de fotos total), que também representa 100%. Ou seja, porcentagem é uma parte do todo.

c) É uma razão que se relaciona com o número total de fotos, que também mostra que a cada 4 fotos coloridas, 6 são preto e branco.

d) Sim, porque é uma forma de simplificar a conta.

Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

Então, o sino bateu. Neste momento, ficou uma dúvida se haveria ou não mais um encontro. Sendo assim, optamos encerrar neste encontro, pois era o que havíamos combiando com os estudantes. Após analisar essa tarefa, notamos que eles entenderam a proposta de letra a, mas ficaram em dúvida em várias questoes. Por exemplo, no item b, os discentes exemplificavam o que era porcentagem e suas ideias, porém não associavam ao que foi discutido ao longo do texto; no item c, pensaram que era para ser feito o que foi realizado nas tarefas do primeiro grupo. Além disso, não sabemos se por falta de tempo ou outras questões, os alunos não associaram a razão apresentada à porcentagem.

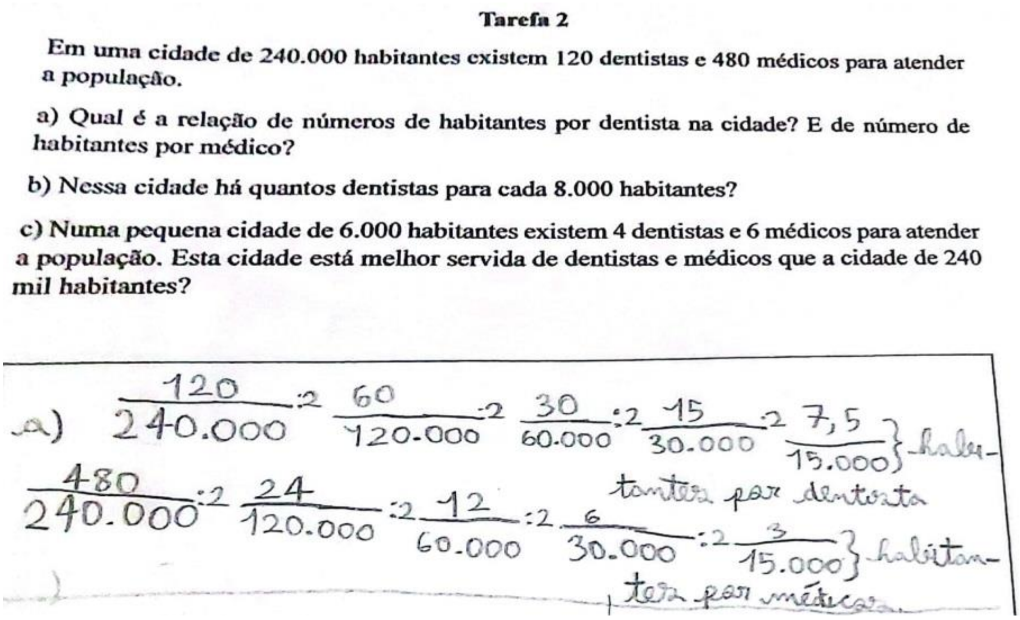
6.1 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Após todo o processo das produções de significados constituídos pelo alunos, temos que os estudantes possuem facilidade em verbalizar o que pensam oralmente, pois dessa maneira se sentem mais confiantes e justificam seus respectivos modos de pensar e realizar as tarefas. Porém, quando solicitamos que formalizem esses pensamentos por meio da escrita, eles não conseguem expressar a mesma ideia.

Quando compartilhávamos nossos exercícios, a maioria dos alunos nos questionava se somente a conta era suficiente. Então, começamos a apresentar a eles a importância de escrevermos de um modo mais detalhado para que o nosso colega ou outra pessoa que vá ler entenda o que está escrito. Observamos que, ao longo do processo, a aluna Pérola começou a descrever seu raciocínio.

Ademais, notamos que alguns alunos criaram modos próprios de operar, tal como demonstrado na ilustração a seguir:

Figura 57 – Algumas curiosidades - 1



Tarefa 2

Em uma cidade de 240.000 habitantes existem 120 dentistas e 480 médicos para atender a população.

a) Qual é a relação de números de habitantes por dentista na cidade? E de número de habitantes por médico?

b) Nessa cidade há quantos dentistas para cada 8.000 habitantes?

c) Numa pequena cidade de 6.000 habitantes existem 4 dentistas e 6 médicos para atender a população. Esta cidade está melhor servida de dentistas e médicos que a cidade de 240 mil habitantes?

a) $\frac{120}{240.000} :2 \ \frac{60}{120.000} :2 \ \frac{30}{60.000} :2 \ \frac{15}{30.000} :2 \ \frac{7,5}{15.000}$ } habitantes por dentista

$\frac{480}{240.000} :2 \ \frac{24}{120.000} :2 \ \frac{12}{60.000} :2 \ \frac{6}{30.000} :2 \ \frac{3}{15.000}$ } habitantes por médicos

Fonte: Arquivos da pesquisa do autor.

Nesse sentido, percebemos que a aluna divide por 2,. No entanto, não está "dividindo por 2 em cima e embaixo é só um 2". Este foi um modo próprio qua a discente utilizou para representar a simplificação de frações.

Ao longo da aplicação, observamos que, na matemática escolar, existem diversas produções de significado para uma mesma tarefa. Tal situação nos coloca diante do fato de que não existe um modo único de pensar ou resolver na matemática. Durante as aplicações, tentávamos reforçar nos estudantes, que foram educados matematicamente a olhar o certo ou errado, a importância de termos ideias distintas e que estas podem nos levar ao mesmo lugar.

As tarefas do grupo 1 e a primeira da tarefa do grupo 2 foram as que levaram mais tempo, pois eram tarefas diferentes das que estavam acostumados a realizar, tanto que alguns nos questionavam "quais contas devo fazer aqui?". No entanto, reafirmávamos que a tarefa era aberta e que deveriam responder o que considerassem pertinente. Após a Tarefa do 2 do Grupo 2[4], notamos que os estudantes estavam mais familiarizados com a dinâmica que estávamos propondo. Porém, em alguns momentos, demonstravam cansaço ou desinteresse.

Contudo, temos que ressaltar a importância de educar os estudantes desde pequenos a dinâmicas como estas, pois o processo poderia acontecer de outra forma. No terceiro encontro, eles estavam começando a entender a dinâmica. Além disso, o ambiente no qual os encontros ocorriam era uma sala composta por balcões, onde os alunos sentavam um de frente para o outro. Logo, a organização da sala influnciou em vários momentos da dinâmica.

Ao analisar a dinâmica que ocorreu na Tarefa 3 do Grupo 2, observamos que os estudantes se encontravam bem familiarizados com aquele tipo de atividade. Inclusive, um deles comentou que tal conta tem de ser realizada para as "sociais" em sua casa, que são encontros de jovens e adolescentes.

Ainda no âmbito das tarefas, os estudantes discutiram sobre mililitros (ml) e litros (l). Ademais, questionaram o enunciado e optaram por solucionar do modo que julgavam mais fácil. Neste momento, os alunos exerceram seus devidos direitos. Como não havia nada definido, definiram por si mesmos: "vou tomar o caminho que melhor me convém".

O papel do pesquisador não ocorreu de modo natural, uma vez que, em alguns momentos, os discentes realizavam questionamentos, cujas respostas se encontravam na ponta da lingua. Nesse contexto, tentávamos "engolir" as respostas e lhes respondíamos com outra pergunta. Tal movimento não é natural para o estudante, muito menos para o pesquisador – que é um professor de matemática – , pois estamos acostumados a trabalhar com as respostas prontas e direcionadas. Assim, quando devolvíamos a pergunta, notávamos o incômodo dos estudantes com tal postura, que exige do pesquisador confiança e crença no processo de mediação porposto por Vygotsky.

---

[4] Momento vivenciado no terceiro encontro.

Após essa experiência, chegamos à conclusão de que a sala de aula nos diz muito. E, quando diz, não é ouvida. Para isso, é necessário exercer um papel diferente do que estamos acostumados a ouvir de nossos alunos, de forma receptiva e solidária, no intuito de ajudá-los, mas sem entregar a resposta pronta, pois, desse modo, não estamos ensinando nada além de chegar na resposta certa.

Nossas tarefas são completamente diferentes do que os livros didáticos examinados propõem nos capítulos que analisamos. Nossa proposta é colocar o estudante diante de diversas tarefas, com variados contextos e objetivos, de modo que eles produzam significados para o objeto em questão.

Nossa observação ao longo da pesquisa de campo evidenciou que os participantes da pesquisa se expressavam melhor oralmente do que quando apresentavam o registro escrito da resolução da tarefa. Essa informação local, restrita a um grupo de alunos, sugere a atenção que devemos ter para este fato e a maneira que devemos enfrentá-lo, isto é, a importãncia de trabalhar a escrita matemática com os estudantes em sala de aula. Como exemplo, recordamos os estudos do pesquisador Arthur Belford Powell sobre escrita matemática.

Um instrumento poderoso de reflexão sobre o pensamento é a escrita. Há quase quatro décadas, Bruner (1968, p. 112) afirmou que tanto a escrita como a matemática eram "[...] dispositivos de ordenação de pensamento sobre coisas pensamentos sobre pensamentos".

Observamos também, que na posição de pesquisador, a minha não intervenção pode ter limitado a internalização de alguns modos de significados dos alunos, ao passo que, numa sala de aula real, a ajuda poderia atuar em suas zonas de desenvolvimento proximal – como proposto por Vygotsky –, servindo de andaime para eles, no sentido discutido por Bruner (1997, p. 79).

Ademais, a pesquisa de campo sugeriu que, além de introduzir os alunos em novos modos de consituir objetos, novos modos de operar e suas lógicas, também devemos nos preocupar, em sala de aula, em retomar repetidas vezes as discussões que o ensino tradicional insiste em assumir que um determinado assunto, como já foi ensinado, já é sabido pelo aluno. Como exmpelo, podemos citar a simplificação de fraçoes de modo a identificar a fração irredutível e como se chega ao cálculo de porcentagem e quando ele é necessário.

Por fim, passar por todo o percurso do mestrado profissional em educação matemática agregou sobremaneira para o meu processo formativo como professor. Nesse processo, adquiri uma escuta sensível e ativa para com os meus alunos. Além disso, cheguei à conclusão de que devemos despertar nos nossos discentes as realizações das tarefas através de modos criativos e próprios.

O referencial teórico que estudei e apliquei ao longo de todo essa trajetória acadêmica contribuiu para entender o papel do professor mediante uma sala de aula, bem como para perceber que o processo de ensino e aprendizagem ocorre através da interação. Após vivenciar, ler e estudar todo o processo, acredito que a minha sala de aula não será mais a mesma.

REFERÊNCIAS

BALDINO, R. R. **Assimilação Solidária.** Grupo de Pesquisa-Ação em Educação Matemática. Unesp: Rio Claro, 2001.

BALESTRI, R; ROSA NETO, E. **Matemática nos dias de hoje.** São Paulo: Leya Brasil, 2012.

BOGDAN, R; BIKLEN, S **Investigação Qualitativa em Educação:** uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 2013.

BRUNER, J. S. **Realidade Mental, mundos possíveis.** Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

BRUNER, J. S. **Toward a theory of instruction**. Nova York: W. W. Norton, 1968.

CARRAHER, D. Relações entre Razão, divisão e Medida. In: SCHLIEMANN, A. CARRAHER, D. (org.) **A Compreensão de conceitos aritméticos – Ensino e Pesquisa.** 2. Campinas (SP): Papirus, 2003.

GAY, M. R. G; SILVA, W. R. **Araribá mais matemática:** Matemática. 5. ed. São Paulo: Moderna, 2018. (Livro do Mestre)..

LAMON, S. J. **Teaching fractions and ratios for understanding:** essential knowledge and instructional strategies for teachers. New York: Routledge Taylor & Francis Group, 1999.

LAMON, S. J. **Teaching fractions and ratios for understanding:** essential knowledge and instructional strategies for teachers. New York: Routledge Taylor & Francis Group, 2012.

LINS, R. C. Epistemologia, História e Educação Matemática: tornando mais sólidas as bases da pesquisa. **Revista de Educação Matemática**, Campinas, ano 1, n. 1, p. 75-91, set. 1993.

LINS, R. C *et al.* Of course, IR 3 is blue!Developing an approach to turn a mathematics course into a mathematics education course. In: Proceedings of the Second International Conference on the Teaching of Mathematics, Heronissos, Crete, Greece, jul, 2002, 1 CD-Rom.

LINS, R. C. O Modelo dos campos semânticos: estabelecimentos e notas de teorizações. In: Angelo, C.L. et al. (orgs.). **Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática:** 20 anos de história. São Paulo: Midiograf, 2012.

LINS, R. C. O Modelo Teórico dos Campos semânticos: Uma análise epistemológica da álgebra e do pensamento algébrico. **Revista Dynamis**, Blumenau, v.1, n. 7, p. 29-39, abr./jun. 1994.

LINS, R. C; Gimenez, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus, 1997. (Coleção perspectivas em Educação Matemática).

LINS, R. C. Por que discutir teoria do conhecimento é relevante para a Educação Matemática. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática:** concepções e perspectivas. São Paulo: Editora da UNESP, 1999. p. 75-94.

LURIA, A. R. *et al.* **Psicologia e Pedagogia:** Bases psicológicas da aprendizagem e do desenvolvimento. São Paulo: Centauro, 2003.

MOLL, L. C. **Vygotsky e a educação:** implicações pedagógicas da psicologia sócio-histórica. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

OLIVEIRA, M. K. **Vygotsky:** aprendizado e desenvolvimento um processo histórico. 2. ed. São Paulo: Scipione, 1995.

OLIVEIRA, V. C. A. Uma leitura sobre formação continuada de professores de matemática fundamentada em uma categoria da vida cotidiana. 2011. 655f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) _ UNESP, Programa de Pós-gradação em Educação Matemática, Campus de Rio Claro, Rio Claro, 2011.

PAULA, M. R. **Razão como taxa:** uma proposta de ensino para a sala de aula de matemática. 2012. 79f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) _ Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2012.

POST, T. R.; BEHR, M. J.; LESH, R. A proporcionalidade e o desenvolvimento de noções pré-álgebra. COXFORD, A. F. SHULTE, Albert P. **As ideias da álgebra.** São Paulo: Atual, 1995.

POWELL, A; BAIRRAL, M. **A escrita e o pensamento matemático interações e potencialidades. Campinas: Papirus, 2006.**

SCHLIEMANN, A. L; CARRAHER, D. Razões e proporções na vida diária e na escola. In: SCHLIEMANN et al. (Org.). **Estudos em Psicologia da Educação Matemática.** Recife: UFPE, 1993. p. 13-37.

SCHLIEMANN, A. L. D. e outros. **Estudos em Psicologia da Educação Matemática.** Recife: Ed. Universitária da UFPE, 1993.

SILVA, A. M. **O Modelo dos Campos Semânticos – Um Modelo Epistemológico em Educação Matemática.** Rio de Janeiro: Ed. Ciência Moderna. 2022.

SILVA, A. M; OLIVEIRA, V. C. A; ALMEIDA, V. R. O Modelo dos Campos Semânticos: teorização e desdobramentos para a pesquisa e para o ensino. In: MAGINA, S. M. P; LAUTERT, S. L; SPINILLO, A. G. (Orgs.). **Processos cognitivos e Linguísticos na Educação Matemática.** Brasília, DF: SBEM Nacional, 2022.

SILVA, A. M.; BASTOS, Ronaldo R; OLIVEIRA, R. Educação Matemática Escolar no século XXI: a formação de estudantes e professores da educação básica. In: SILVA, A. M; RODRIGUES, C. K; CRUZ, W. J. (Orgs.). **Programa de Pós-graduação em Educação Matemática:** perspectiva de pesquisa e implicações no ensino e na aprendizagem de matemática. Juiz de Fora: Editora da UFJF, 2024. p. 92-109.

SMITH, J.P. Development of students'knowledge of fractions and ratios. In: Litwiller, B.; Bright, G. (Eds.). **Making Sense of Fractions, Ratios and Proportions:** 2002 Yearbook. 2

ed. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics , 2002. p. 3-17.

SPINILLO, A. G. Proporções nas séries iniciais do primeiro grau. In: SCHLIEMANN, A. D *et al.* **Estudos em Psicologia da Educação Matemática.** 2. ed. Recife: Ed. Universitária da UFPE, 1997.

VERGNAUD, G. (1983). Multiplicative structures. In: LESH, R; LANDAU; M. (Eds.) **Acquisition of mathematics concepts and processes**. New York, NY: Academic Press. (pp. 127-124).

VYGOTSKY, L. S**. Pensamento e linguagem.** São Paulo: Martins Fontes, 1993.

VIGOTSKII, L. S; LURIA, A. R; LEONTIEV, A. N. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem.** 7. ed. São Paulo: Ícone, 2001.

VYGOTSKY, L. S. Aprendizagem e desenvolvimento intelectual na idade escolar. In: LURIA, A. R. *et al.* **Psicologia e Pedagogia:** Bases psicológicas da aprendizagem e do desenvolvimento. São Paulo: Centauro, 2003.

WALLE, J. A. V. **Matemática no ensino fundamental:** Formação de professores e aplicações em sala de aula. 6. ed. Porto Alegre; Penso Editora, 2009.