

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PRODUTO EDUCACIONAL

**UMA PROPOSTA DE APRENDIZAGEM DOS NÚMEROS REAIS POR MEIO DE
EXPERIMENTOS MENTAIS**

Arthur da Silva Moraes

Willian José da Cruz

Juiz de Fora
2023



Este trabalho está licenciado com uma Licença [Creative Commons – Atribuição – NãoComercial 4.0 Internacional](http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

```
<a rel="license" href="http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/"></a><br />Este trabalho está licenciado com uma Licença <a rel="license" href="http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/">Creative Commons -
```

APRESENTAÇÃO

O produto educacional apresentado, foi elaborado a partir da dissertação de Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, cuja pesquisa é intitulada “Uma Análise dos Números Reais em Livros Didáticos por meio de Pistas Semióticas”, defendida no ano de 2023.

Para Beillerot (2001), uma pesquisa se configura a partir de três condições necessárias, sendo elas: a produção de novos conhecimentos, ter uma metodologia rigorosa e estar disponível para acesso de forma pública. Portanto, ter um caminho bem estruturado é o ideal para cumprir os objetivos da pesquisa para viabilizar a melhor forma de ensino e aprendizagem, com aporte teórico bem fundamentado para, por fim, disseminar o conhecimento produzido afim de colaborar com a democratização da educação.

A dissertação foi planejada com o objetivo de buscar novas possibilidades metodológicas para o ensino e a aprendizagem de números reais através de seus diversos conceitos e definições, na busca dos variados significados que podem ser dados a este objeto, embasado na Semiótica de Peirce para o tratamento deste objeto e a Complementaridade de Otte como suporte para entender o processo semiótico que ocorre entre o meio e os objetos de conhecimento, principalmente no que se refere a ideia de ter os Experimentos Mentais como uma proposta de metodologia.

Este produto educacional é constituído por uma sequência de atividades didáticas a serem aplicadas como uma possibilidade de suporte ao professor e, neste sentido, convidamos todos a tentarem desenvolvê-las. Ao final da sequência, vocês terão a oportunidade de verificar a resolução de algumas atividades por meio da perspectiva do autor, pois a mesma poderá auxiliar você, professor, disposto a aprender e pensar na perspectiva metodológica dos experimentos mentais.

Utilizamos como suporte para os Experimentos Mentais o software de Matemática Dinâmica *Geogebra*, porém, todas as atividades aqui propostas podem ser também realizadas utilizando materiais como folha de papel A4, lápis, borracha, régua e compasso. Esperamos que você – professor, aluno e leitor – consiga utilizar este material com bastante sabedoria.

Um abraço!

ÍNDICE

EXPERIMENTOS MENTAIS.....	5
ATIVIDADE 1	13
ATIVIDADE 2	15
ATIVIDADE 3	17
ATIVIDADE 4	18
ATIVIDADE 5	19
ATIVIDADE 6	21
ATIVIDADE 7	23
SUGESTÃO DE RESOLUÇÃO DE ALGUMAS ATIVIDADES BASEADAS NA CONCEPÇÃO DO AUTOR	24
REFERÊNCIAS.....	43

EXPERIMENTOS MENTAIS

É desafiador pensar em uma descrição específica do que é a matemática propriamente dita, afinal, sempre surgem perguntas e uma das principais é: a matemática é um conhecimento de quê? Segundo Silva (2007), a matemática é fonte constante de questionamentos, que perpassam seus limites e requerem um contexto filosófico para serem adequadamente tratados, pois existem questões que estão além dos seus domínios, sendo estas as questões metodológicas, epistemológicas e ontológicas, que só podem ser objetos de reflexões filosóficas.

Desde que iniciado este estudo sobre números reais, entendemos que é necessário estudar acerca da produção do conhecimento matemático. Uma das possibilidades sustentadas por pesquisadores que são as principais referências teóricas deste trabalho, como Peirce, Otte e Cruz, para o entendimento e produção do conhecimento matemático, é a utilização do pensamento abduutivo e do raciocínio diagramático.

A matemática pode ser estudada de maneira dual onde procuramos entender seus aspectos internos e externos na produção de saber, assim como pelas questões relacionadas à natureza dos seus objetos, às experiências, ao seu rigor, às verdades e às direções filosóficas que buscam analisar a mesma enquanto fenômeno social e cultural.

Nosso conhecimento surge de duas fontes: da receptividade das impressões ou da espontaneidade dos conceitos. A receptividade das impressões acontece quando um objeto nos é dado, já a segunda fonte acontece quando o objeto dado é pensado em conexão com a representação que é apresentada. “Essa é a dinâmica do ciclo hermenêutico perceptivo, associar algo novo a um sistema de conhecimentos que já possuímos, para adquirirmos conhecimento sobre esse algo” (CRUZ, 2019, p.117). A respeito da forma intuitiva de pensamento é importante considerar que

Se a intuição tiver que se guiar pela natureza dos objetos, não vejo como deles se poderia conhecer algo a priori; se, pelo contrário, o objeto (como objeto dos sentidos) se guiar pela natureza da nossa faculdade de intuição, posso perfeitamente representar essa possibilidade (KANT, 2001, p.46).

Kant dizia que existem certos juízos que são indispensáveis a todo conhecimento, e classificou-os como analíticos ou sintéticos, e a priori ou a posteriori (SILVA, 2007). Os juízos analíticos de Kant são, de forma simplória, aqueles que dependem unicamente do seu significado para ter um valor de verdade. Por sintético, entendem-se aqueles juízos que não são analíticos, ou seja, não contidos no conceito original de forma implícita, como, por exemplo, afirmar que “a bola é redonda” é uma maneira analítica de juízo, pois ser redonda está concernente à existência da bola. Já “a bola é brilhante”, é um juízo sintético porque diz sobre a bola algo além do que está contido no conceito original, da mesma forma que uma afirmação empírica, ou seja, baseado na observação e na experiência.

Este pequeno exemplo visa mostrar que juízos analíticos costumam cair na trivialidade, pois a característica principal do objeto “bola” lhe é necessária para se avaliar o valor de verdade, ou seja, de ser redonda. O que a tornará verdadeira, será a confrontação com o mundo, não apenas o significado implícito.

Além disso, a ideia de ser um juízo a priori ou a posteriori é basicamente o que Kant distingue como os conhecimentos puro e empírico. O conhecimento a priori (ou puro) é aquele que independe de uma experiência para a sua existência e está ligado à abstração. Enquanto o que chamamos de a posteriori, trata-se de um conhecimento que só acontece após a experiência, sendo empírico.

Inicialmente, para Kant, esses juízos a priori deveriam ser vistos como necessários e universais, e tinham de ser verdadeiros antes de qualquer experiência, sendo constituídos somente pelo uso da razão (STRATHEN, 1997).

Mas em relação à matemática, como podemos entendê-la? Ela é uma descoberta ou uma invenção? Ela é analítica ou sintética? Na perspectiva da concepção idealista, a realidade matemática é condicionada pelas construções que determinam esta realidade, ou seja, são humanamente inventáveis, e existem apenas por conta do pensamento de um criador. Já na perspectiva do realismo, o universo matemático é autônomo, seus objetos têm realidade e propriedades próprias que independem de um sujeito, que somente a descobre.

Na realidade do professor, tanto o realismo quanto o idealismo, embora estejam em posições contrárias e até extremas, são simultâneos. A matemática pode ser vista como uma revelação ou uma passagem do concreto para o abstrato, mas também pode ser aplicável ao mundo físico, mesmo partindo de algo considerado

inteiramente abstrato. Por isso, para Becker “O conhecimento matemático depende das percepções e não pode ser puramente intelectual” (BECKER, 1965, p.170). Segundo Ferreira (2007, p.14), para Kant os juízos matemáticos são extensivos, ou seja, informam algo de novo. Retornando a questões referentes aos juízos analíticos ou sintéticos a priori, o autor analisa que os juízos aritméticos são, para Kant, considerados sintéticos a priori.

Estes juízos, para Kant, serão suficientemente válidos quando o objeto se dá no mundo dos fenômenos, logo, poderão ser concebidos diferentemente daquilo que não se dá nem no tempo e nem no espaço. Os objetos da metafísica – Deus, alma, liberdade – são transcendentais e não pertencem ao mundo fenomenal, e estão além da nossa capacidade cognitiva, sendo concebidos de forma apriorística. Para Kant, podemos conceber, mas não podemos reconhecer objetos da metafísica e, com isso, o autor entende que existe em nós um conceito que é puro e ao mesmo tempo sintético sobre Deus e sua existência, e existe sobre os juízos sintéticos a priori da matemática e física, muito embora os objetos da matemática e física sejam perceptíveis no mundo natural, dos fenômenos.

Podemos definir esta abordagem como um quase-empirismo. Esta abordagem procura descrever e caracterizar a matemática, partindo das práticas reais dos matemáticos.

Lakatos¹ (1974) enfatiza que a ciência está fundamentada na experiência e na observação empírica, e que a razão deve ser usada para interpretar e analisar essas observações. Ele argumenta que a experiência é crucial para a formação do conhecimento científico, mas que a razão é necessária para avaliar e interpretar essas experiências. Portanto, a ciência, enquanto teoria deveria, ser utilizada para explicar fenômenos, obedecendo a uma estrutura lógica que permite serem feitas inferências sobre o mundo natural, a fim de avaliar com base em sua capacidade de explicar e prever observações empíricas, sendo um empreendimento racional e fundamentado nestas observações. Por outro lado, Lakatos (1974) determina a existência de uma pseudociência, sendo aquela que não segue os mesmos critérios de validação empírica e racional da ciência, e pode ser, muitas vezes, baseada em crenças

¹ Outro trabalho importante de Lakatos é "Provas e Refutações" (1976), onde ele apresenta uma abordagem histórica e filosófica da evolução do conhecimento científico, mostrando como as teorias científicas são testadas e modificadas ao longo do tempo. Nessa obra, ele enfatiza a importância da experiência na avaliação das teorias científicas, mas também reconhece o papel da razão na formação do conhecimento científico.

infundadas, afirmações não testáveis e evidências anedóticas ou pessoais, logo, sendo uma atividade irracional e não científica, que não segue os critérios de validação empírica e racional.

A abordagem quase-empirista na matemática reconhece que a matemática é baseada em axiomas e deduções, mas enfatiza a importância da experiência empírica e da intuição matemática na construção e desenvolvimento de novas teorias e conceitos matemáticos. Essa abordagem reconhece que muitas vezes as ideias e teorias matemáticas surgem a partir de problemas práticos do mundo real ou da observação empírica de padrões e relações matemáticas. Este quase-empirismo destaca que a matemática constitui uma atividade humana, individual e social, dialogando entre pessoas que visam resolver problemas. Estes produtos matemáticos podem se modificar à medida que surgem novos desafios e significados, na mudança de padrões de rigorosidade, logo, é por meio de uma discussão crítica de ideias sobre os objetos matemáticos que existe a possibilidade de reconhecer novos saberes, concepções etc.

Estas “coisas” matemáticas, que são os objetos, são apresentadas a nós na medida que se transformam em percepções graças à intuição empírica. Na matemática, por exemplo, “muito embora os conceitos puros do entendimento mesmo aplicados a intuições a priori, nos proporcionam conhecimentos na medida em que estas intuições, e portanto também os e conceitos de entendimento podem ser aplicados a intuições empíricas” (KANT, 2001, p. 173).

Logo, entendemos que por meio somente da intuição pura não se categoriza nenhum conhecimento, mas por meio da aplicação à intuição empírica a perspectiva de possibilidade de conhecimento é outra, propiciando o conhecimento empírico, ou seja, a experiência. A abordagem quase-empirista na matemática também reconhece a importância da lógica e da dedução na construção do conhecimento matemático. Os axiomas e as deduções matemáticas são fundamentais para estabelecer a validade e a consistência das teorias e conceitos matemáticos, e a abordagem quase-empirista não nega isso.

Os Experimentos Mentais se fundamentam destes processos de análise de conceitos sintéticos para suas atividades supostas. Cruz (2018, p. 164) define os “experimentos mentais como formas que o sujeito tem para colocar seu próprio pensamento em um determinado contexto, como um objeto de consideração e por

meio de uma representação”. Tais Experimentos, em Educação Matemática, passam por um processo de estruturação, onde o sujeito cognoscente desenvolve um sistema de atividades supostas afim de criar hipóteses, questionar, inferir e validar aquilo que ele está querendo provar. Para Cruz (2019, p. 24) “o pensamento intuitivo desempenha um papel importante na aplicação desses experimentos”, mas é preciso ir além da intuição para desenvolvê-lo.

Segundo Cruz (2019, p. 24) “No experimento mental, cria-se a possibilidade de construção da referência à base de um pensamento especulativo. Não é uma simples intuição, mas uma experiência à base de um contexto teórico, um pensamento abduativo, um passo intermediário”.

A matemática é uma atividade semiótica e ela acontece por meio da construção de diagramas, além das observações das relações encontradas nesta construção e não pela análise dos significados dos conceitos matemáticos. A exemplo, linguagem em matemática pode ser caracterizada de duas formas: a geométrica e a algébrica. “Elas são características complementares, que refletem diretamente da complementaridade existente na Matemática como ciência, numa relação entre os conceitos de contínuo e discreto, entre a Geometria e a Álgebra” (BARROS; FRANÇA, 2018, p. 3).

A semiótica, como meio de representar os pensamentos gerando significados, vai trazer, junto aos experimentos mentais, a construção das possíveis relações entre os aspectos intuitivos e formais que o interpretante possa utilizar no raciocínio diagramático. Entende-se que, para que estes diagramas (algébricos ou geométricos) tenham sentido, eles precisam de um sistema de representação bem definido, que seja coerente. O sistema de representação é o universo de discurso, e ele é importante porque permite que sejam comunicados ideias e resultados de maneira precisa e consistente. A definição clara e precisa de termos matemáticos e o seu contexto no universo do discurso são fundamentais para a compreensão e resolução de problemas matemáticos. Além disso, a escolha do universo do discurso em um problema matemático pode influenciar as soluções possíveis e as abordagens a serem tomadas. Por exemplo, ao resolver um problema de geometria, a escolha do universo do discurso pode levar a diferentes tipos de argumentos e técnicas de resolução.

No que tange ao trabalho, a busca por utilizar experimentos mentais – que é o que comporá nosso produto educacional –, é a de fazer pensar novas formas de atividades: que supõem, têm hipóteses, contemplem deduções e induções, apresentem novas ideias (abdução) a fim de trazer a evolução das ideias anteriores, utilizando argumentos e conhecimentos que são válidos para a comunidade científica. As hipóteses matemáticas que desencadeiam do pensamento abdutivo, não ocorrem de forma sola, pois, além de serem necessários aspectos relacionais entre as partes, estabelecendo um processo dedutivo dentro do estudo dos signos, necessitam também de indução pois nem a matemática como ciência de observação e de medidas escapa do raciocínio indutivo.

Os Experimentos Mentais são desenvolvidos seguindo características essenciais para este processo, e para Cruz (2021), estas constituem a heurística condicionante para considerar tais processos como uma possível metodologia para o ensino de matemática. “Essas características são nomeadas como: Forma, Estrutura, Compreensão, Dependência, Revelação e Comparação” (CRUZ, 2021, p. 32).

Desta forma, cada característica da Metodologia dos Experimentos Mentais tem um objetivo, e elas podem acontecer individualmente ou simultaneamente. Verificaremos como se dá o processo de desenvolvimento de cada característica:

Forma: segundo Cruz (2022, p. 33), a forma “tem o significado de atividades supostas.” Ou seja, os experimentos mentais são baseados em atividades supostas, logo, elas partem de conjecturas e hipóteses que são desenvolvidas em uma representação particular de um objeto geral (CRUZ, 2022).

A forma é o processo de generalização do pensamento, logo, parte de um processo cognitivo da mente em potencial ou real que precisa significar esta atividade suposta, portanto é desenvolvida a partir de uma generalização que é direcionada a uma epistemologia matemática do ponto de vista semiótico, por meio da relação de signos e objetos.

Estrutura: Cruz (2021) diz que em cada experimento mental, muitas coisas são implicitamente assumidas, ou seja, estes não têm uma estrutura rígida. Assim sendo, aplica-se a síntese abdutiva, que é a introdução de novas ideias que não estavam no problema, atividade ou prova, a fim de permitir que estes sejam

solucionados. No pensamento matemático formal, há a necessidade de se fazer tudo explicitamente e de ter condições necessárias e suficientes para de fato provar o que queremos, logo, a síntese abdução busca dar ênfase ao que a mente é obrigada a fazer de forma inteligível, indo além das representações.

Compreensão: Cruz (2021) escreve que a compreensão é o que, nos Experimentos Mentais, combina experiências e conhecimentos que “devem seguir uma lógica de considerações heurísticas com deduções e cálculos formais quando necessários. É o processo dedutivo no desenvolvimento da experimentação mental” (CRUZ, 2022, p. 34).

Como dedução, baseados no pensamento de Peirce (2005), entende-se o modo de raciocínio que investiga o estado de informações que foram postas na premissa, e que também está ligado ao raciocínio diagramático, percepção, relação do estado das coisas que estão nesta premissa. Estas podem estar implicitamente colocadas, de forma que a dedução seja capaz de concluir a necessidade de sua utilização para uma possível verdade no que se está estudando.

Dependência: Os experimentos mentais dependem de um conhecimento, obviamente, e também de argumentos que sejam comuns e aceitos pela comunidade científica, mesmo que não sejam estritamente lógicos (CRUZ, 2021).

Logo, segundo Cruz (2022, p. 35), “este processo nos possibilita compreender que para aprender coisas novas, não se pode apenas contar com as relações dos conceitos e a coerência que a teoria traz, mas de que as aplicações destes conceitos ou dos objetos é na complementaridade entre teorias e fatos”.

Revelação: A revelação mostra que existem contradições no nosso próprio sistema de conhecimento. “Muitas vezes, porém, novas leis são descobertas desta maneira. Se existem apenas duas possibilidades e uma delas é falsa, a outra deve ser verdadeira. É claro, a nova teoria também é apenas uma teoria e não a verdade absoluta” (CRUZ, 2021, p. 17).

Os Experimentos Mentais têm a capacidade de revelar um desajuste no aparato conceitual tradicional, permitindo ao experimentador ou ao cientista utilizar seus conhecimentos da mesma forma que utilizava antes, por outro

lado, esses experimentos mostram contradições e/ou confusões lógicas no desenvolvimento da dada atividade, provas e/ou problema apresentado. (CRUZ, 2021, p. 17-18).

Comparação: é nesta característica que podemos “afirmar que é possível comparar o conhecimento com outras possibilidades de solução em uma dada atividade, prova ou problema. Nós muitas vezes ganhamos novos conhecimentos quando algo que já foi dito uma vez é dito mais de uma vez de um modo novo” (CRUZ, 2022, p. 37).

Portanto, o intuito das atividades propostas neste material é aplicar os Experimentos Mentais como uma nova metodologia alternativa para o ensino de Matemática.

ATIVIDADE 1

Dados dois números reais a e b , desenvolva um experimento mental onde podemos verificar a soma $a + b$.

Primeira Parte

Forma: Tome um segmento de reta horizontal AB , denominada r e um segmento AC oblíquo a r a qual chamaremos de reta s . A é o ponto de interseção de r e s . Considere, simbolicamente, $A = 0$.

Estrutura: Tome dois pontos, D e D' sobre as retas r e s respectivamente, formando assim os segmentos \overline{AD} e $\overline{AD'}$, de forma que $\overline{AD} = 1 \text{ u.c.} = \overline{AD'}$.

Compreensão: Trace um segmento que intercepte os pontos D e D' e identifique qual medida este segmento representa.

Dependência: Sobre as retas r e s , determine dois pontos E e E' , de forma que ao interceptar estes pontos, $\overline{EE'} \parallel \overline{DD'}$.

Revelação: O que dizer dos resultados encontrados na compreensão anterior?

Segunda Parte

Forma: Determine um ponto F qualquer na reta r , de forma que $AE = a$ e $AF = b$. Seguiremos fazendo a soma destes segmentos através de retas paralelas.

Estrutura: Conduza uma paralela à reta s até o ponto F , a qual denominaremos t . E conduza, em seguida, uma paralela à reta r interceptada por D' , a qual denominaremos de u .

Compreensão e Dependência: Busque relações que envolvem as partes da figura construída no intuito de encontrar uma relação geral que envolva os segmentos \overline{AE} e \overline{AF} com as retas t e u .

Revelação: Quais relações você utilizou para determinar a soma dos segmentos a e b?

Comparação: Verifique se há outras formas de desenvolver esta atividade, além da que utilizou e compare-as. Há contradições?

ATIVIDADE 2

Dados dois números reais a e b , desenvolva um experimento mental onde podemos verificar a relação do produto $a \times b$.

Primeira Parte

Forma: Tome um segmento de reta horizontal denominada r e um segmento $\overline{AC} = 1$ u.c. coincidente à r .

Estrutura: Trace uma reta s secante a r , onde A é o ponto de interseção de r e s . Agora, trace um segmento de reta $\overline{AD} = a$, coincidente à r e um segmento $\overline{AE} = b$ coincidente à s .

Compreensão: Meça os segmentos \overline{AD} e \overline{AE} e faça a operação de multiplicação.

Dependência: Pense em qual universo do discurso ou campo teórico você desenvolveu a compreensão anterior.

Revelação: O que dizer dos resultados encontrados na compreensão anterior?

Segunda Parte

Estrutura: Trace uma reta intersectando o ponto C e o ponto E, e, em seguida, trace uma reta paralela à CE que passe pelo ponto D.

Compreensão: Busque relações que envolvem as partes da figura construída no intuito de encontrar uma relação geral que envolva os segmentos AC e AE.

Dependência: Pense em qual universo do discurso ou campo teórico você desenvolveu a compreensão anterior.

Revelação: Compare os resultados da primeira parte com os resultados da segunda parte e escreva uma conclusão. Há alguma contradição?

Comparação: Verifique se há outras formas de desenvolver esta atividade, além da que utilizou.

ATIVIDADE 3

A partir das considerações desenvolvidas na **ATIVIDADE 2**, busque as possibilidades de resolução para as atividades seguintes, descrevendo cada etapa por meio da Metodologia de Experimentos Mentais:

a) $a < 0$ e $b < 0 \in R \Rightarrow a \cdot b > 0 \in R$

b) $a < 0$ e $b > 0 \in R \Rightarrow a \cdot b < 0 \in R$

c) $a > 0$ e $b < 0 \in R \Rightarrow a \cdot b < 0 \in R$

Revelação: O que dizer dos resultados encontrados na compreensão anterior?

Comparação: Verifique se há outras formas de desenvolver esta atividade, além da que utilizou.

ATIVIDADE 4

A partir das considerações desenvolvidas na **ATIVIDADE 2**, busque as possibilidades de resolução para a seguinte atividade, descrevendo cada etapa da Metodologia de Experimentos Mentais:

- 1) Dados dois números reais a e b , desenvolva um experimento mental onde pode ser verificado o quociente b/a . (Sugestão: Considere $\frac{a}{b} = a + \frac{1}{b}$)

Revelação: O que dizer dos resultados encontrados na compreensão anterior?

Comparação: Verifique se há outras formas de desenvolver esta atividade, além da que utilizou.

ATIVIDADE 5

1) Responda da forma que você conhece, o que é $\sqrt{4}$?

2) Responda da forma que você conhece, o que é $\sqrt{2}$?

3) Convidamos você a aplicar um Experimento Mental para pensarmos em algumas relações que podem envolver a $\sqrt{2}$.

Primeira parte

Forma: Considere um segmento AB de comprimento 1 (u.c) e um segmento adjacente BC de comprimento 2 (u.c). (use o Geogebra para auxiliar).

Estrutura: Descreva uma semicircunferência de diâmetro AC e por B, trace uma perpendicular a AC, até encontrar a semicircunferência em um ponto que pode ser indicado por D.

Compreensão: Meça o segmento BD construído e indique o resultado com 2, 3, 5, 10 e 15 casas decimais.

Dependência: Pense em qual universo do discurso ou campo teórico você desenvolveu a compreensão anterior.

Revelação: O que dizer dos resultados encontrados na compreensão anterior?

Segunda parte

Estrutura: Una os pontos A , D e C e identifique a figura construída, classificando-a.

Compreensão: Busque relações que envolvem as partes da figura construída no intuito de encontrar uma relação geral que envolva o segmento BD .

Dependência: Pense em qual universo do discurso ou campo teórico você desenvolveu a compreensão anterior.

Revelação: Compare os resultados da primeira parte com os resultados da segunda parte e escreva uma conclusão. Há alguma contradição?

Comparação: Vamos contar uma história sobre a representação decimal da raiz quadrada de 2.

ATIVIDADE 6

1) Responda da forma que você conhece, o que é $\sqrt{4}$? E $\sqrt{9}$?

2) Responda da forma que você conhece, o que é $\sqrt{3}$? E $\sqrt{7}$?

3) Convidamos você a aplicar um Experimento Mental para pensarmos em algumas relações que podem envolver a soma de raízes quadradas não exatas.

Primeira Parte

Forma: Considere um segmento \overline{AB} de comprimento 1 *u. c.* e um segmento adjacente \overline{BC} de comprimento 3 *u. c.*

Estrutura: Descreva uma semicircunferência de diâmetro AC e por B , trace uma perpendicular a AC , até encontrar a semicircunferência em um ponto que pode ser indicado por D .

Compreensão: Meça o segmento AD construído e indique o resultado com 2, 3, 5, 10 e 15 casas decimais.

Dependência: Pense em qual universo do discurso ou campo teórico você desenvolveu a compreensão anterior.

Revelação: O que dizer dos resultados encontrados na compreensão anterior?

Comparação: Repita este processo do experimento considerando o segmento $AB = 7 u. c.$

Segunda Parte

4) Se somarmos $\sqrt{4}$ à $\sqrt{9}$, qual resultado obteremos? E se somarmos $\sqrt{3}$ e $\sqrt{7}$?

Revelação: Verifique se é possível determinar estas somas através do experimento mental desenvolvido anteriormente. O que dizer dos resultados encontrados na compreensão anterior?

Comparação: Verifique se há outras formas de desenvolver esta atividade, além da que utilizou.

ATIVIDADE 7

1) Responda, como você conhece o número $\frac{7}{9}$?

2) Responda da forma que você conhece, o que é $\sqrt{2}$?

3) Se efetuarmos a operação $\frac{7}{9} + \sqrt{2}$, teremos um número racional ou irracional?

4) Determine um experimento cuja soma possa ser demonstrada, de forma que possamos verificar a racionalidade ou irracionalidade desta operação.

Revelação: Verifique se é possível determinar estas somas através do experimento mental desenvolvido anteriormente. O que dizer dos resultados encontrados na compreensão anterior?

Comparação: Verifique se há outras formas de desenvolver esta atividade, além da que utilizou.

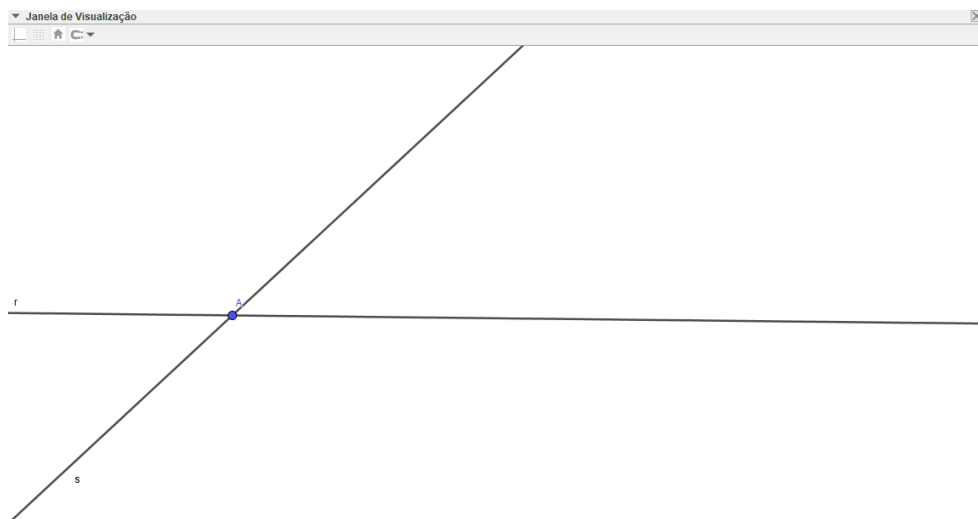
**SUGESTÃO DE RESOLUÇÃO DE
ALGUMAS ATIVIDADES BASEADAS NA
CONCEPÇÃO DO AUTOR**

ATIVIDADE 1 – Soma de dois números a e $b \in \mathbb{R}$.

Primeira Parte

Forma: Tome um segmento de reta horizontal AB , denominada r e um segmento AC oblíquo a r a qual chamaremos de reta s . A é o ponto de intersecção de r e s . Considere, simbolicamente, $A = 0$.

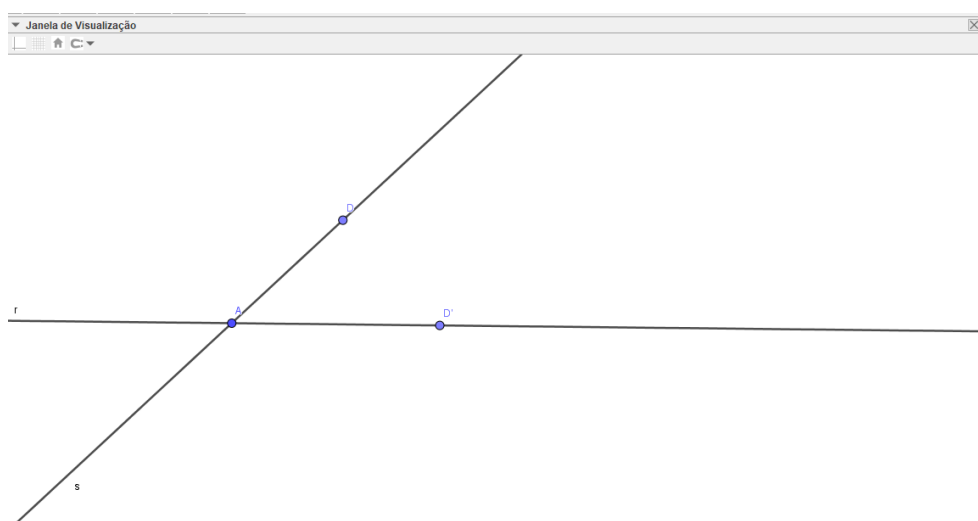
Figura 1 – Segmentos r e s intersectados pelo ponto A



Fonte: (O AUTOR, 2022)

Estrutura: Tome dois pontos, D e D' sobre as retas r e s respectivamente, formando assim os segmentos \overline{AD} e \overline{AD}' , de forma que $\overline{AD} = 1 u.c. = \overline{AD}'$.

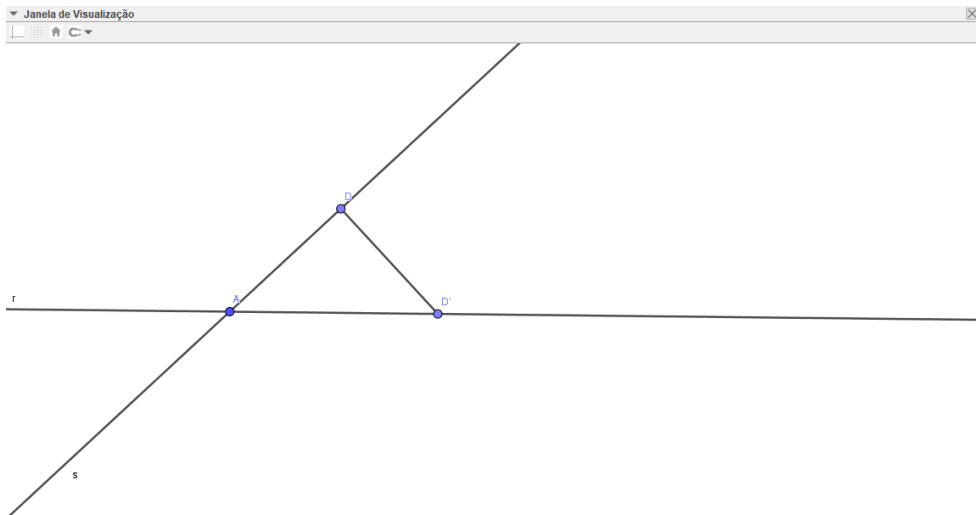
Figura 2 – Pontos D e D' nas retas r e s



Fonte: (O AUTOR, 2022)

Compreensão: Trace um segmento que intercepte os pontos D e D' e identifique qual medida este segmento representa.

Figura 3 – Segmento DD'

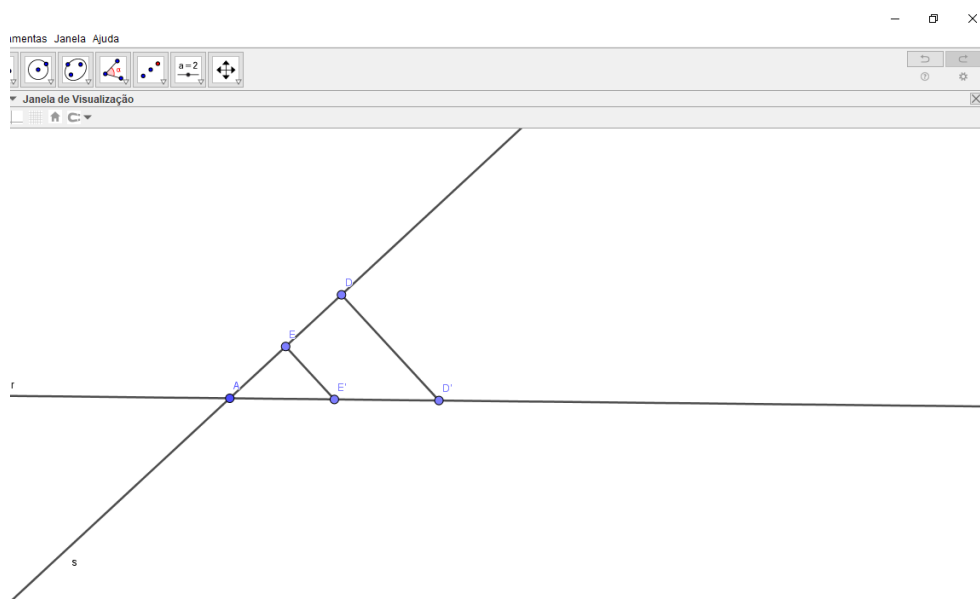


Fonte: (O AUTOR, 2022)

Como $\overline{AD} = 1 \text{ u. c.} = \overline{AD'}$, temos que $\overline{DD'}$ é o *segmento unidade*.

Dependência: Sobre as retas r e s , determine dois pontos E e E' , de forma que ao interceptar estes pontos, $\overline{EE'} \parallel \overline{DD'}$.

Figura 4 – Reta EE' paralela a DD'



Fonte: (O AUTOR, 2022)

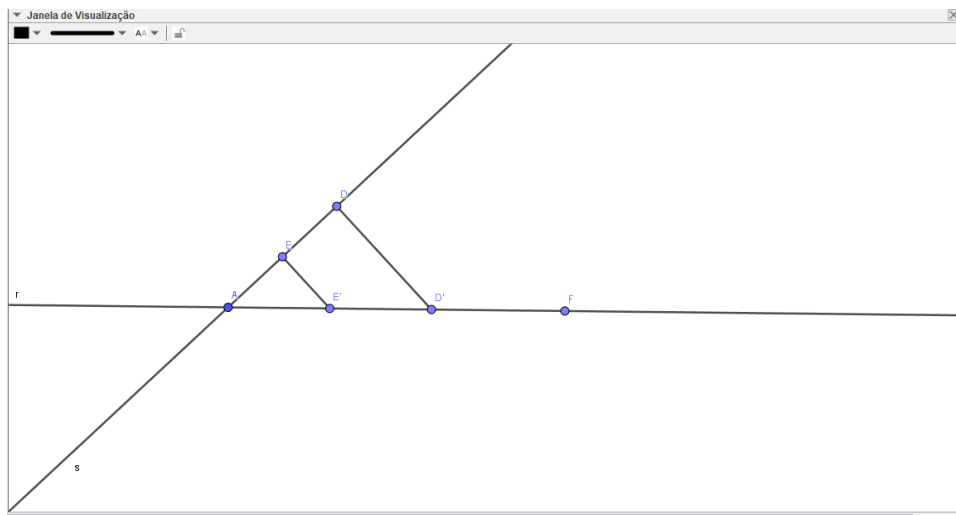
Revelação: O que dizer dos resultados encontrados na compreensão anterior?

Podemos perceber que $\overline{EE'}$ é paralelo a $\overline{DD'}$ – o nosso segmento unidade – e, portanto, os segmentos \overline{AE} e $\overline{AE'}$ são iguais, ou seja. $\overline{AE} = \overline{AE'}$ ou $\overline{AE'} = \overline{AE}$.

Segunda Parte

Forma: Determine um ponto F qualquer na reta r , de forma que $\overline{AE} = a$ e $\overline{AF} = b$. Seguiremos fazendo a soma destes segmentos através de retas paralelas.

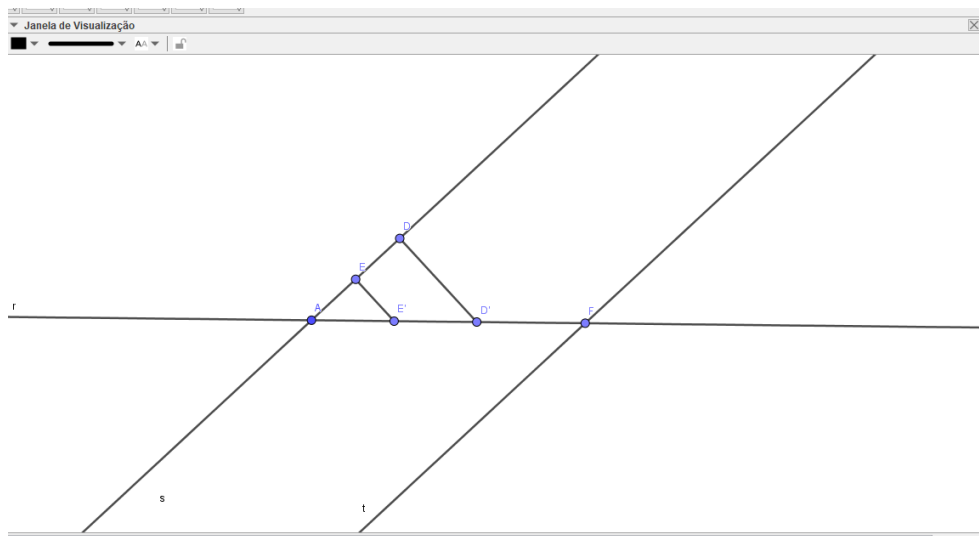
Figura 5 – Ponto F na reta r



Fonte: (O AUTOR, 2022)

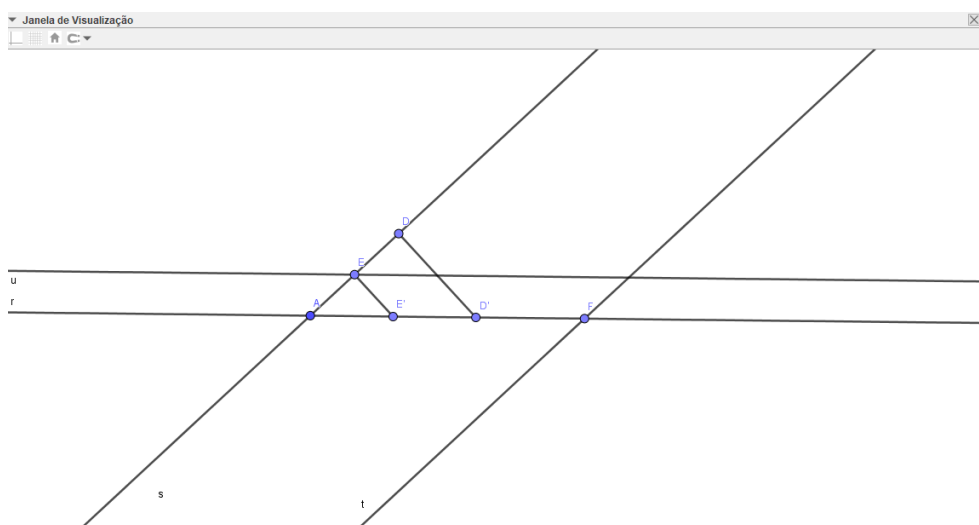
Estrutura: Conduza uma paralela à reta s até o ponto F , a qual denominaremos t . E conduza, em seguida, uma paralela à reta r interceptada por E , a qual denominaremos de u .

Figura 6 – Reta t paralela à reta s passando pelo ponto F



Fonte: (O AUTOR, 2022)

Figura 7 – Reta u paralela à reta r, passando pelo ponto E

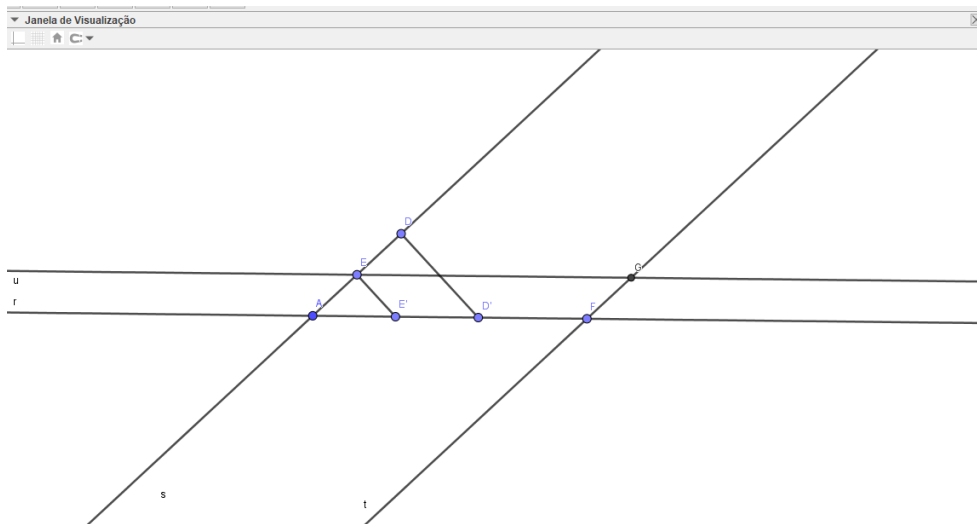


Fonte: (O AUTOR, 2022)

Compreensão e Dependência: Busque relações que envolvem as partes da figura construída no intuito de encontrar uma relação geral que envolva os segmentos \overline{AE} e \overline{AF} com as retas t e u .

As retas t e u se interceptam no ponto G , como na figura abaixo

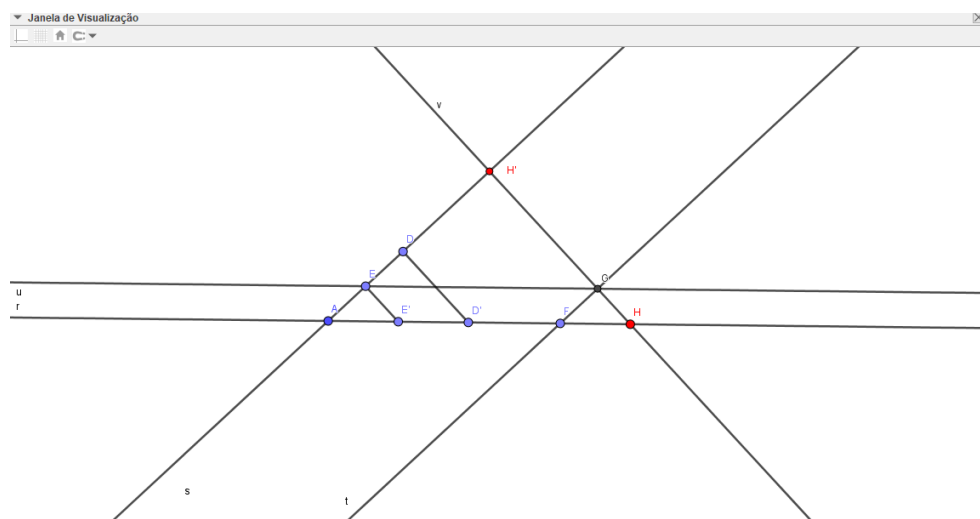
Figura 8 – Intersecção entre as retas t e u no ponto G



Fonte: (O AUTOR, 2022)

Portanto, se percorrermos com uma reta paralela à $\overline{EE'}$, a qual chamaremos de v , até o ponto de intersecção das retas t e u – o ponto G – encontramos na intersecção das retas r e v um ponto H , e na intersecção das retas s e v um ponto H'

Figura 9 – Reta paralela a EE'



Fonte: (O AUTOR, 2022)

Podemos considerar que $AH = AH' = c$, representando a soma dos segmentos $AE = a$ e $AF = b$, o que, algebricamente é representado por

$$c = a + b \text{ ou } a + b = c$$

Revelação: Quais relações você utilizou para determinar a soma dos segmentos a e b?

R: Utilizamos o Teorema de Desargues. Este teorema diz que quando dois triângulos estão num plano, de tal modo que cada dois lados correspondentes são paralelos entre si, então as retas de ligação dos vértices correspondentes passam por um mesmo ponto ou são paralelas entre si, e reciprocamente, quando dois triângulos estão num plano de tal modo que as retas que ligam os vértices correspondentes passam por um plano ou são paralelas entre si, e quando, além disso, dois pares de lados correspondentes dos triângulos são paralelos, então os terceiros lados dos dois triângulos também são paralelos entre si.

Portanto, “Poder-se-á obter a soma de dois segmentos, de uma maneira mais geral. O ponto C, que dá a soma $a + b$, sobre aquela reta em que estão A e B, é independente da escolha do segmento-unidade, inicialmente fixado, ou seja, obtém o ponto C por meio de construções, sem considerar o segmento-unidade” (CRUZ, 2022, p. 67).

Comparação: Verifique se há outras formas de desenvolver esta atividade, além da que utilizou e compare-as. Há contradições?

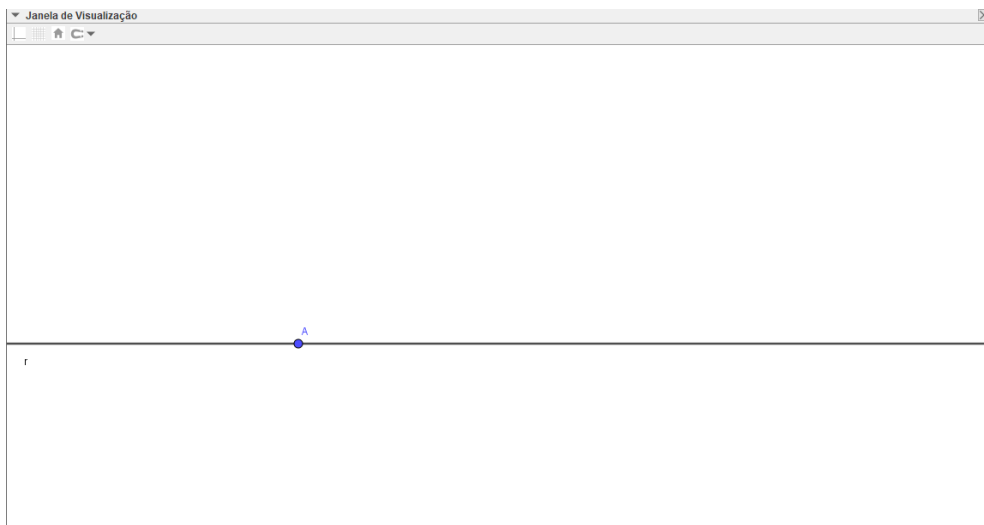
Deixamos esta parte da atividade para o leitor desenvolver.

ATIVIDADE 2 – Multiplicação de dois números a e $b \in \mathbb{R}$.

Primeira Parte

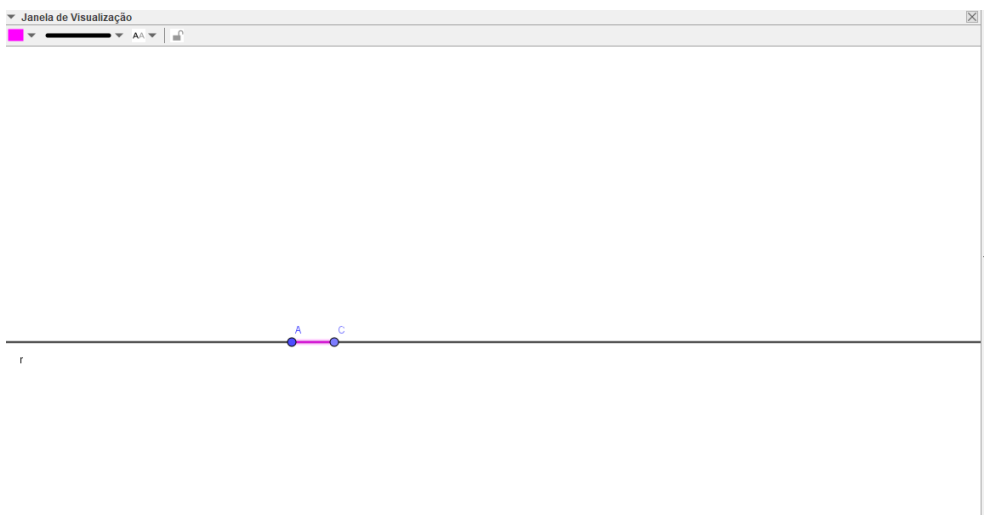
Forma: Tome uma reta horizontal denominada r e um segmento $\overline{AC} = 1 u.c.$ coincidente à r .

Figura 10 – Reta horizontal r



Fonte: (O AUTOR, 2022)

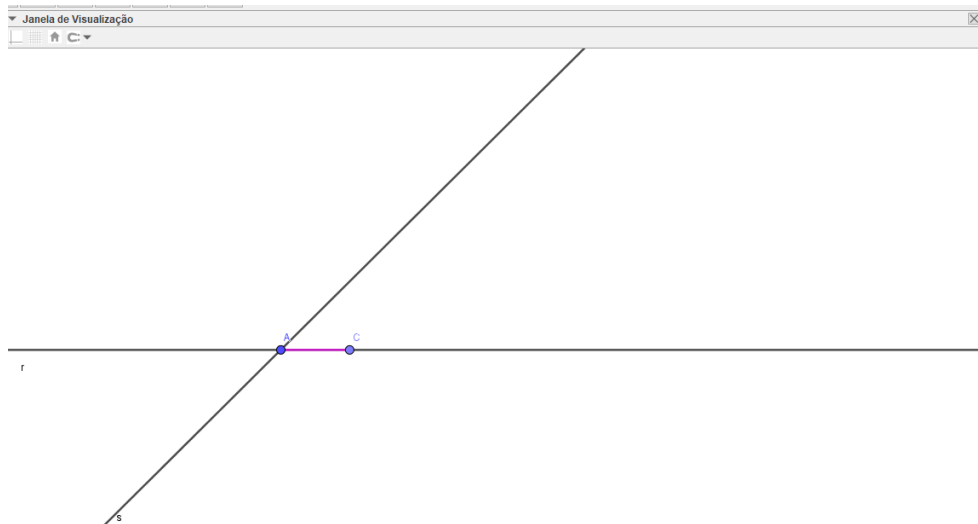
Figura 11 – Segmento $AC = 1 u.c.$



Fonte: (O AUTOR, 2022)

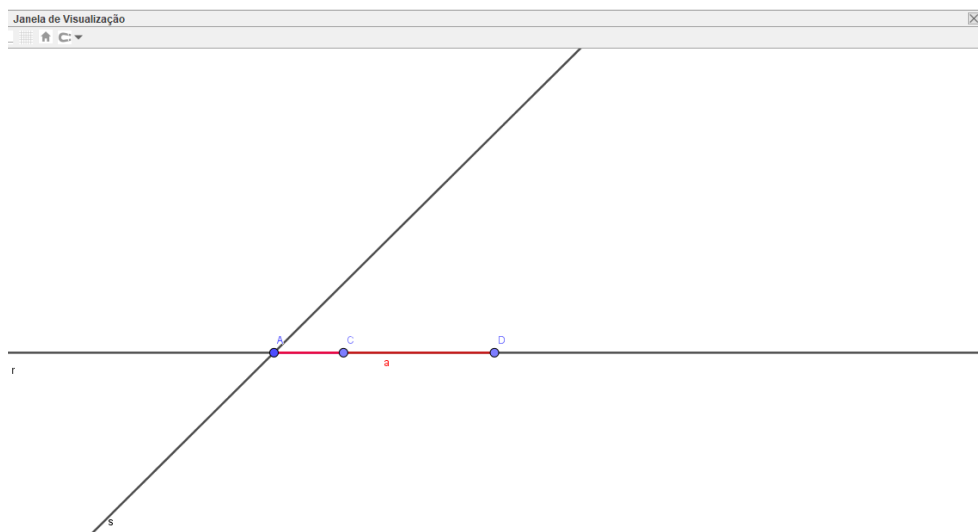
Estrutura: Trace uma reta s secante a r , onde A é o ponto de interseção de r e s . Agora, trace um segmento de reta $\overline{AD} = a$, coincidente à r e um segmento $\overline{AE} = b$ coincidente à s .

Figura 12 – Reta s secante à r



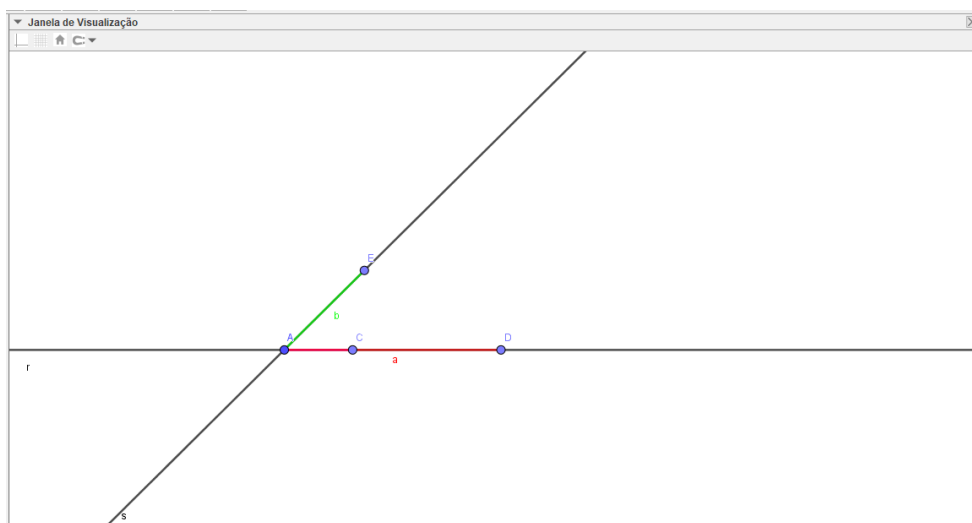
Fonte: (O AUTOR, 2022)

Figura 13 – Segmento de reta $AD = a$ coincidente à r



Fonte: (O AUTOR, 2022)

Figura 14 – Segmento de reta $AE = b$ coincidente à s .

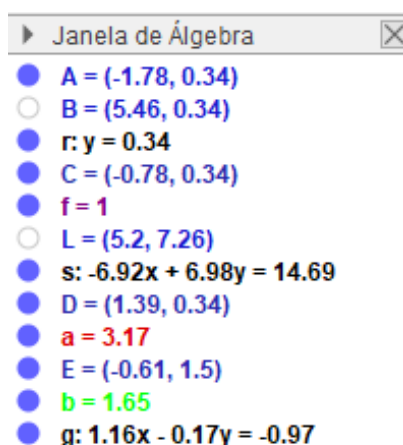


Fonte: (O AUTOR, 2022)

Compreensão: Meça os segmentos \overline{AD} e \overline{AE} e faça a operação de multiplicação.

Neste exemplo, tomamos $a > 0$ e $b > 0 \in R$. Numericamente, $a = 3,17$ e $b = 1,65$, como mostra a figura abaixo:

Figura 15 – Valores numéricos dos segmentos a e b.



Fonte: (O AUTOR, 2022)

Portanto, $a \cdot b = 3,17 \cdot 1,65 = 5,23$.

Dependência: Pense em qual universo do discurso ou campo teórico você desenvolveu a compreensão anterior.

R: A compreensão foi feita através da ideia de medir, onde os segmentos passam a ser significados como números.

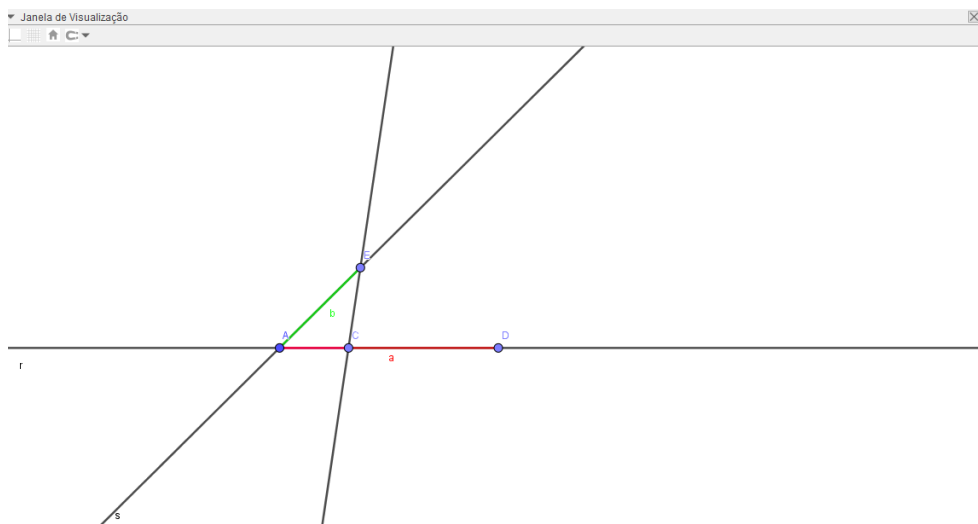
Revelação: O que dizer dos resultados encontrados na compreensão anterior?

R: Ocorreu uma algebrização da geometria, onde entende-se que, multiplicando os dois números encontrados na mudança de significado aplicada aos segmentos a e b , através de propriedades presentes na pista semiótica de corpo ordenado completo, conseguimos idealizar a medida do segmento $a \cdot b$

Segunda Parte

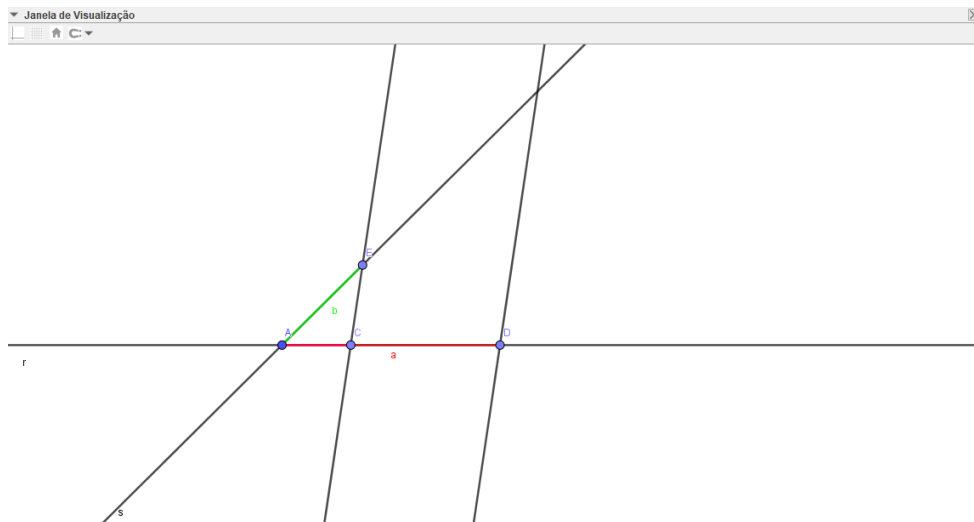
Estrutura: Trace uma reta interceptando o ponto C e o ponto E , e, em seguida, trace uma reta paralela à \overline{CE} que passe pelo ponto D .

Figura 17 - Reta que passa pelos pontos C e E



Fonte: (O AUTOR, 2022)

Figura 18 – Reta paralela à reta que intercepta CE e passa pelo ponto D .



Fonte: (O AUTOR, 2022)

Compreensão, Dependência e Revelação: Busque relações que envolvem as partes da figura construída no intuito de encontrar uma relação geral que envolva os segmentos AC e AE .

R: Pondo um ponto F na interseção da reta s com a reta paralela à CE que passa por D temos que os triângulos ACE e ADF são semelhantes, e seus segmentos são proporcionais vistos na perspectiva do Teorema de Tales.

O Teorema de Tales afirma que um feixe de retas paralelas determina, em duas transversais quaisquer, segmentos proporcionais, ou seja, se temos duas retas paralelas “cortadas” por duas transversais, os segmentos formados por essa interseção são proporcionais. Portanto, temos que

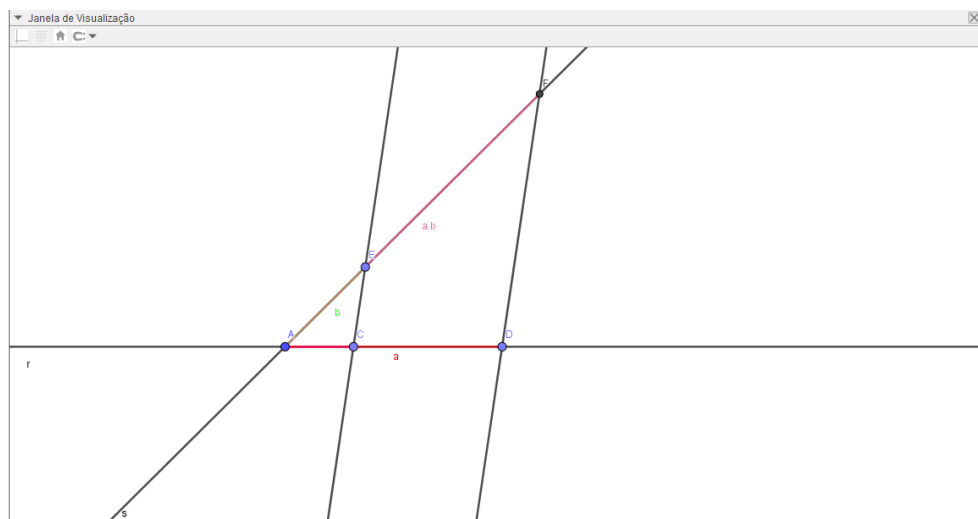
$$\frac{\overline{AF}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}$$

E como $\overline{AC} = 1 \text{ u.c.}$, temos então que

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AD}}{1} \Rightarrow \overline{AF} \cdot 1 = \overline{AE} \cdot \overline{AD} \Rightarrow \overline{AF} = \overline{AE} \cdot \overline{AD} \Rightarrow \overline{AF} = \overline{AE} \cdot \overline{AD}$$

■

Figura 19 – Relação entre os segmentos a e b através do Teorema de Tales



Fonte: (O AUTOR, 2022)

Comparação: Verifique se há outras formas de desenvolver esta atividade, além da que utilizou.

R: Os resultados são exatamente os mesmos obtidos quando se utiliza a representação algébrica dos segmentos a e b . Uma observação importante: Tomamos o ponto $A = 0$, e os segmentos das retas r e s interceptadas por A seguindo os sentidos de vertical para cima e horizontal para a direita como partes positivas destas retas.

Se tomarmos toda a esquerda de r como uma coleção de números negativos, assim como toda a vertical para baixo de s como uma coleção de números negativos – representados como segmentos – é fácil ver que

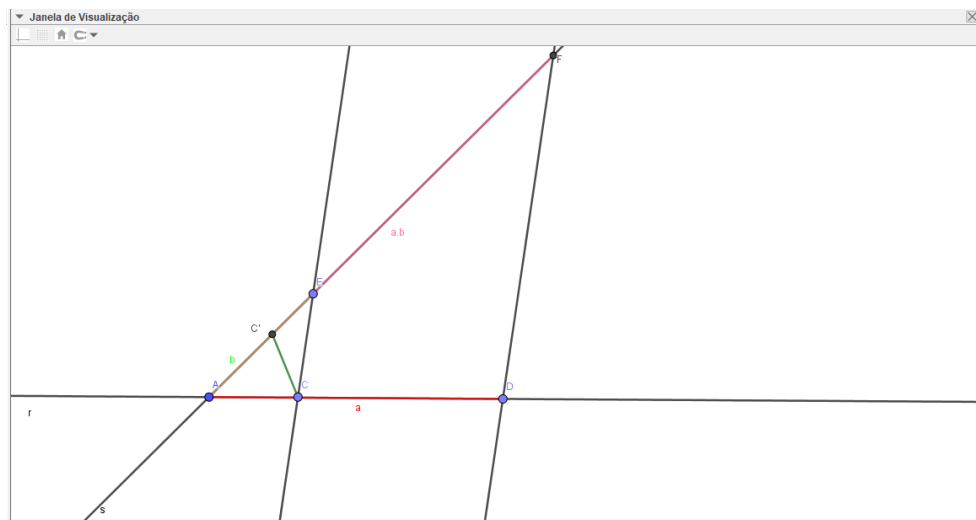
Se $a < 0$ e $b > 0 \in R$, então $a \cdot b = -a \cdot b = -(a \cdot b) = -ab$

ATIVIDADE 4 – Construção do segmento $\frac{a}{b}$

Forma, Estrutura, Compreensão e Dependência: Utilizaremos como auxílio a construção feita na Atividade 2, donde encontramos, por meio de experimentos mentais, o produto $a \times b$.

Comparação: Sobre a reta s , oblíqua à reta r , marque um ponto C' , de forma que $\overline{AC'} = 1 u.c = \overline{AC}$. Além disso, una os pontos CC' , criando assim o segmento unidade.

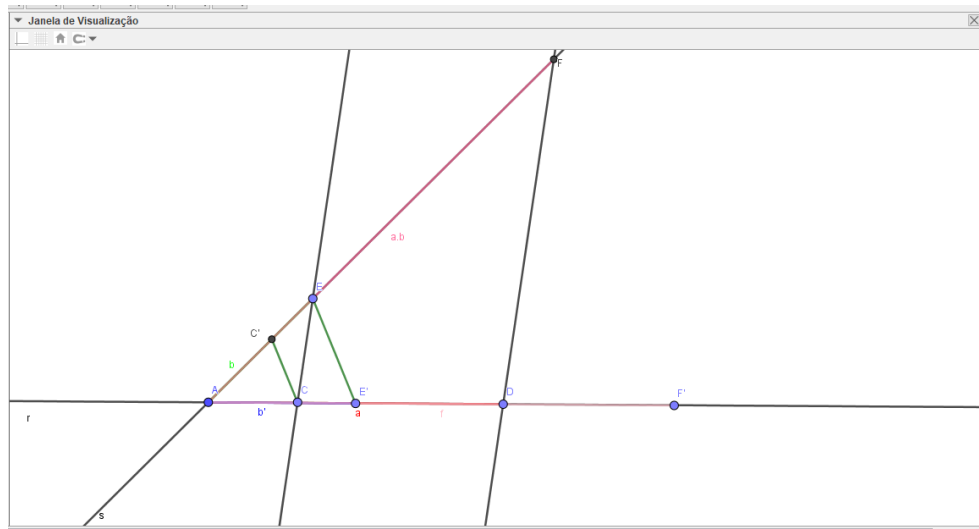
Figura 20 – Construção do segmento $\overline{CC'}$



Fonte: (O AUTOR, 2023)

Trace agora os segmentos $\overline{AE'} = b = \overline{AE}$ e $\overline{AF'} = a \cdot b = \overline{AF}$ sobre a reta r .
Trace um segmento paralelo à $\overline{CC'}$ sobre os pontos E e E' .

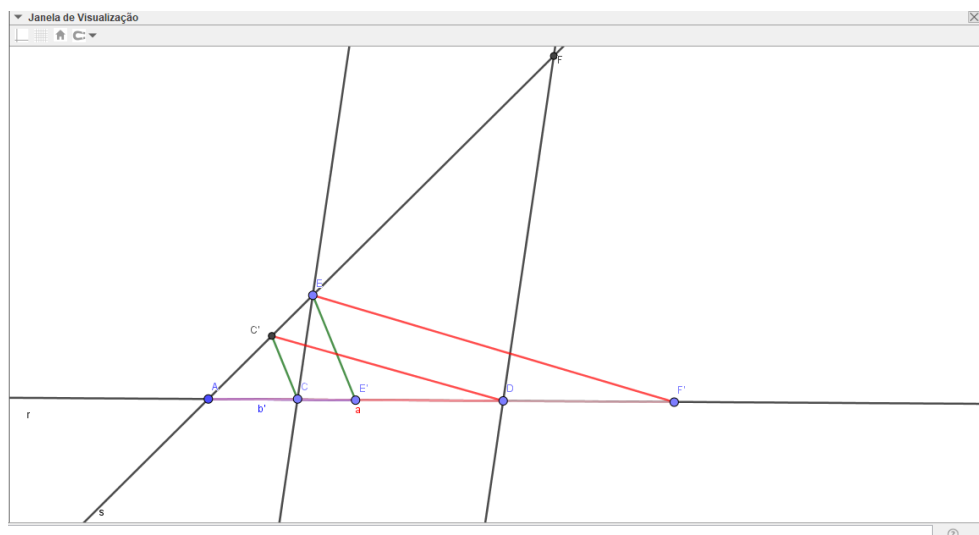
Figura 21 – Segmentos $\overline{CC'}$ e $\overline{EE'}$



Fonte: (O AUTOR, 2023)

Traçando segmentos que partem de C' a D e de E a F' , teremos então, justificados pelo Teorema de Desargues, levando estes triângulos a terem lados correspondentes, logo, a medida $\overline{AF'} = a \times b$.

Figura 22 – Multiplicação de a por b

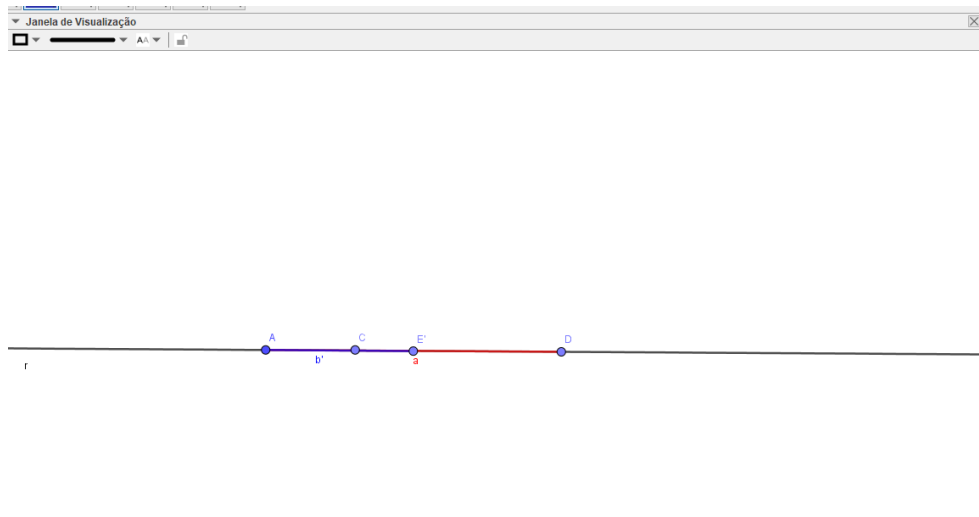


Fonte: (O AUTOR, 2023)

Revelação: Agora, busquemos compreender como encontrar maneiras de demonstrar o segmento $\frac{a}{b}$ por meio do experimento acima. Utilizaremos somente a

reta r , e os pontos presentes nela, visto que estes são suficientes por serem semelhantes aqueles da reta s , portanto, iniciaremos a partir desta perspectiva:

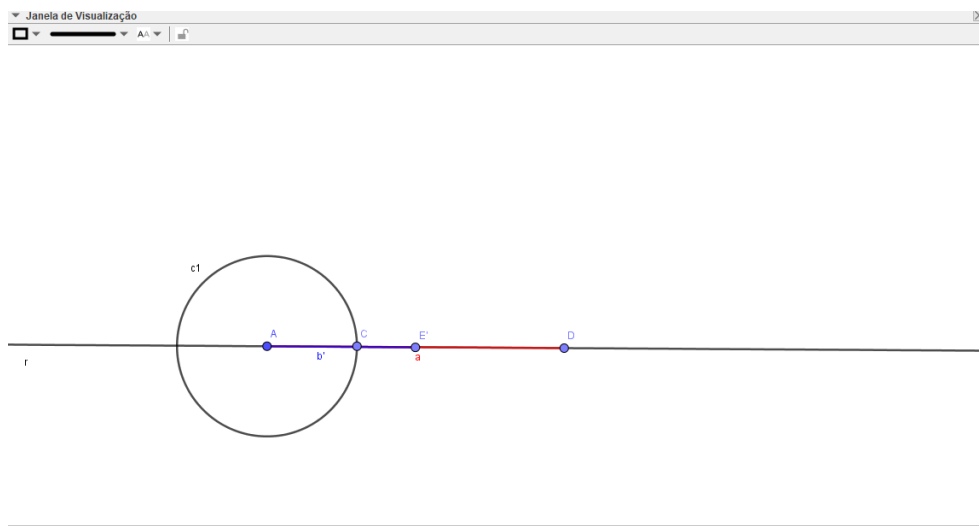
Figura 23 – Reta R com os segmentos AC , AD e AE'



Fonte: (O AUTOR, 2023)

Tomemos uma circunferência c_1 cujo seu centro seja A e raio $R = 1 u.c. = AC$.

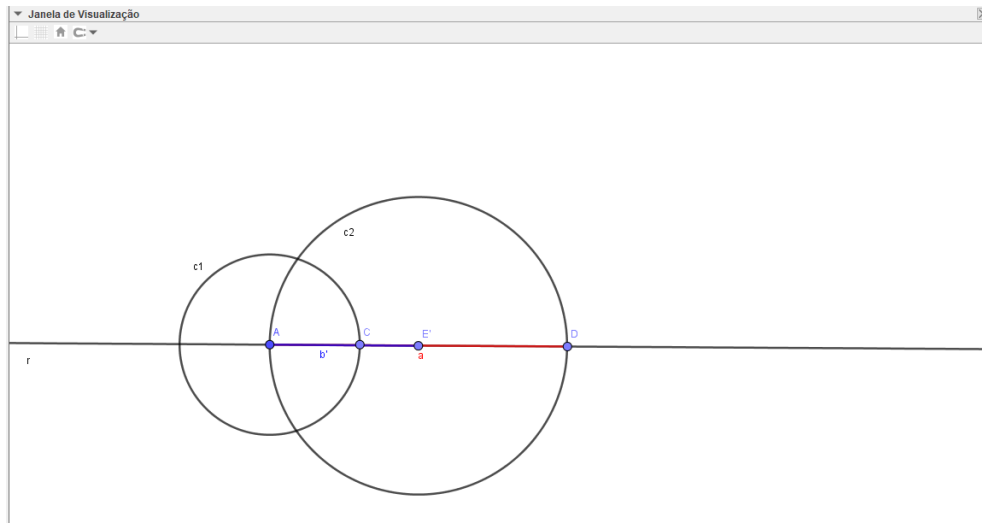
Figura 24 – Circunferência c_1



Fonte: (O AUTOR, 2023)

Em seguida, tome uma circunferência c_2 , onde A é um de seus pontos e seu diâmetro é $\overline{AD} = a$.

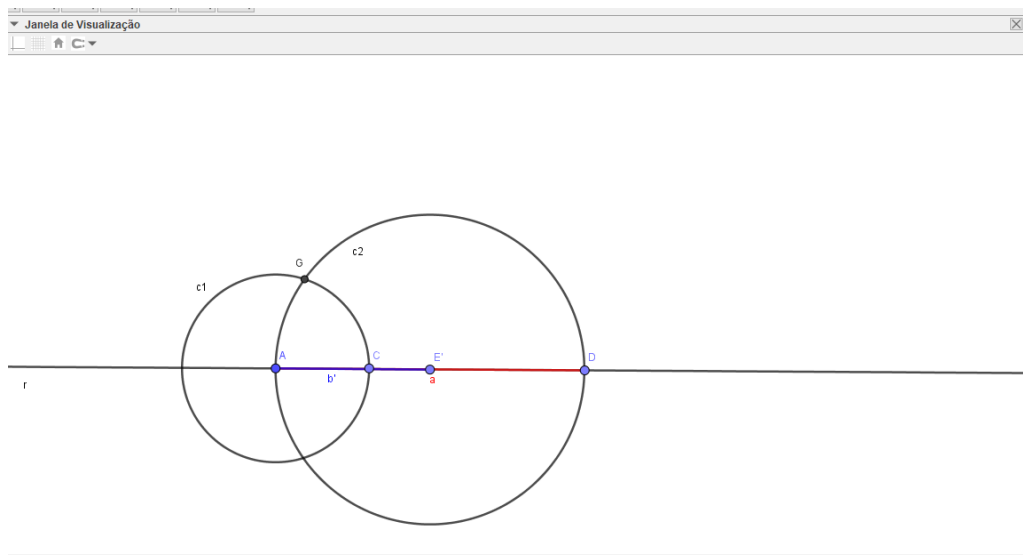
Figura 25 – Circunferência c_2



Fonte: (O AUTOR, 2023)

Tome o ponto G , onde este será o ponto de intersecção das circunferências c_1 e c_2 .

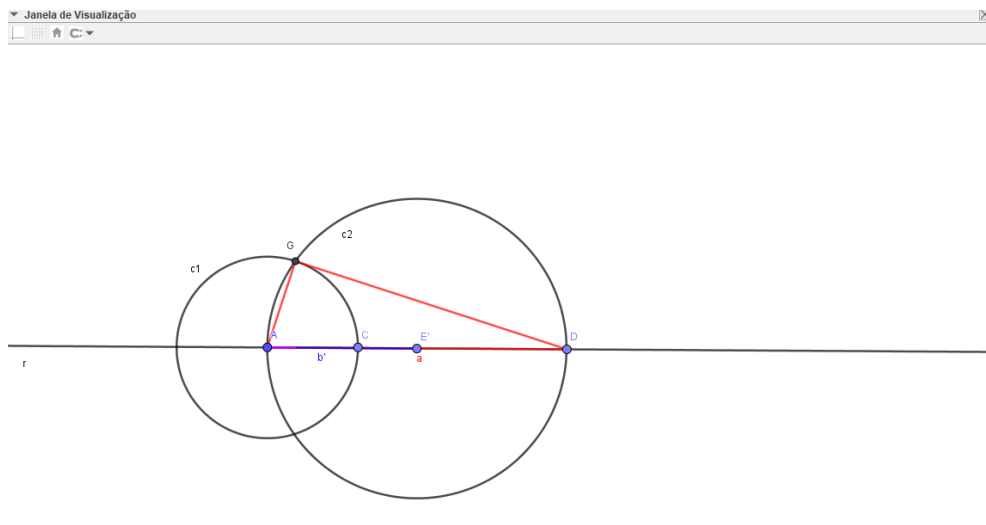
Figura 26 – Intersecção G das circunferências c_1 e c_2 .



Fonte: (O AUTOR, 2023)

Tracemos dois segmentos, de G até A , e de G até D , formando assim, o triângulo ADG .

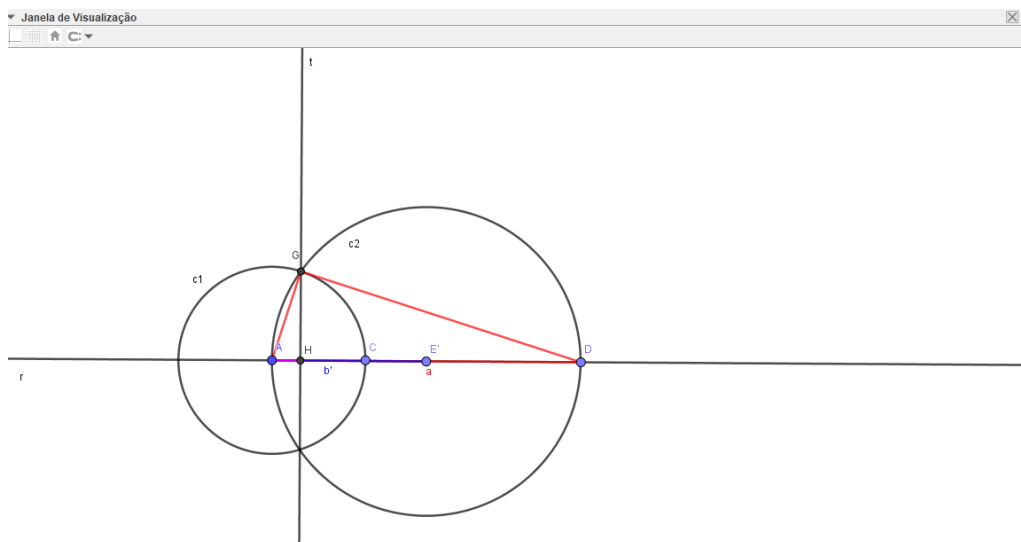
Figura 27 – Triângulo ADG



Fonte: (O AUTOR, 2023)

Traçaremos uma reta perpendicular à reta r que passe pelo ponto G , que nos dará a altura do triângulo ADG .

Figura 28 – Altura GH do triângulo ADG



Fonte: (O AUTOR, 2023)

\overline{GH} é, então, a altura do triângulo ADG .

Através das relações métricas do triângulo, podemos verificar que

$$(\overline{AG})^2 = \overline{AH} \times \overline{AD}$$

Como $\overline{AD} = b$, então podemos dizer que $(\overline{AG})^2 = \overline{AH} \times b$. Sabemos também que $\overline{AG} = R = 1 \text{ u. c.}$, portanto, passamos a ter $1^2 = \overline{AH} \times b$ e então $\overline{AH} = \frac{1}{a}$. Logo, temos que $(\overline{AG})^2 = \overline{AH} \times \overline{AD} \Leftrightarrow 1^2 = \overline{AH} \times b \Leftrightarrow \overline{AH} = \frac{1}{a} = a^{-1}$. Logo, temos que o segmento $\frac{b}{a} = \frac{1}{a} \times b = a^{-1} \times b$.

REFERÊNCIAS

BARROS, L. G. X., FRANÇA, S. M. (2018). A complementaridade entre criação e descoberta na construção do conhecimento matemático. **Caminhos da Educação Matemática em Revista**, v. X, p 40-46, 2018. Disponível em: <https://fatecpg.edu.br/revista/index.php/ps/article/view/53>. Acesso em 14 abr. 2021.

BECKER, O. **O pensamento matemático**. São Paulo: Herder, 1965

BEILLEROT, J. (2001). **A “pesquisa”**: esboço de uma análise. In M. André (Ed.), *O papel da pesquisa na formação e na prática dos professores* (p. 71-90). Campinas: Papirus.

CRUZ, W. J. **Experimentos Mentais na Educação Matemática**: uma analogia com provas matemáticas formais / Willian José da Cruz. – 1. ed. – Curitiba: Appris, 2018. 211 p.: 23cm (Ensino de Ciências)

CRUZ, W. J. O Que É Um Texto De Matemática No Livro Didático? reflexões teóricas. **Coinspiração** -: Revista de professores que Ensinam Matemática, Barra do Bugres, v. 2, n. 1, p. 113-126, 30 jun. 2019. Semestral. Disponível em: <https://sbemmatogrosso.com.br/publicacoes/index.php/coinspiracao/article/view/64/57>. Acesso em: 03 maio 2022.

CRUZ, Willian José. O uso dos experimentos mentais como possível metodologia de ensino da matemática: um olhar epistemológico. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Santa Catarina, v. 16, p. 1-26, 28 maio 2021. Universidade Federal de Santa Catarina. <http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2021.e79205>.

CRUZ, W. J. **Experimentos Mentais**: uma nova metodologia para o ensino de matemática. 127 p. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2022.

KANT, I. **Crítica da Razão Pura**. 5. ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2001. 694 p. Tradução: Manuela Pinto dos Santos.

SILVA, J. J. **Filosofias da matemática**. São Paulo: Editora UNESP, 2007.

STRATHEN, Paul. **Kant (1724 - 1804)**: em 90 minutos. Rio e Janeiro: Jorge Zahar, 1997. 43 p. Tradução: Maria Helena Geordane.