

UNIVERSIDADE
FEDERAL DE JUIZ DE FORA



PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Leíse Santos Vieira
Willian José da Cruz

Produto educacional:

**Conjunto de tarefas para o ensino de Continuidade de Funções utilizando
Experimentos Mentais a partir da noção de Complementaridade**

Juiz de Fora

2022



Este trabalho está licenciado com uma Licença [Creative Commons – Atribuição – NãoComercial 4.0 Internacional](http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

```
<a rel="license" href="http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/"></a><br />Este trabalho está licenciado com uma Licença <a rel="license" href="http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/">Creative Commons - Atribuição-NãoComercial 4.0 Internacional</a>.
```

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Retas d e f	11
Figura 2 – Pontos Px , F , V e a reta g	12
Figura 3 – Circunferência c	12
Figura 4 – Curva.....	12
Figura 5 – Propriedade da curva.....	13
Figura 6 - Propriedade de áreas.....	15
Figura 7 – Propriedade de áreas.....	15
Figura 8 – Propriedade de áreas.....	16
Figura 9 – Áreas.....	17
Figura 10 – Eixos orientados.....	18
Figura 11 – Coordenadas dos pontos.....	19
Figura 12 – Parábola na construção geométrica e como função.....	21
Figura 13 – Bissetriz de FPC	22
Figura 14 – Teorema de Poncelet.....	23
Figura 15 – Teorema de Poncelet.....	23
Figura 16 – Teorema de Poncelet.....	24
Figura 17 – Teorema de Poncelet.....	25
Figura 18 – Teorema de Poncelet.....	25
Figura 19 – Segmento de reta e Mediatriz.....	27
Figura 20 – Pontos F e F'	27
Figura 21 – Pontos B e B'	28
Figura 22 – Segmentos e ponto P	28
Figura 23 – Pontos P e P'	28
Figura 24 – Curva.....	29
Figura 25 – Propriedade da curva.....	30
Figura 26 – Demonstração.....	31
Figura 27 – Curva.....	32
Figura 28 – Eixos orientados.....	32
Figura 29 – Coordenadas.....	33
Figura 30 – Coordenadas dos pontos.....	33
Figura 31 – Reta tangente.....	35
Figura 32 – Reta bissetriz.....	36
Figura 33 – Diagrama.....	38

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	6
Conceitos e ideias	7
Semiótica na matemática:.....	7
Experimentos Mentais.....	8
Continuidade de funções	8
Princípio da Continuidade de Cauchy.....	9
Princípio da Continuidade de Poncelet.....	9
PARÁBOLA	11
ATIVIDADE 1:	11
PASSOS PARA CONSTRUÇÃO:.....	11
OBSERVANDO PROPRIEDADES.....	12
RESPONDA ÀS QUESTÕES:	13
POSSIBILIDADE DE DISCUSSÕES.....	13
ATIVIDADE 2:	15
PASSOS PARA CONSTRUÇÃO:.....	15
RESPONDA ÀS QUESTÕES:	16
POSSIBILIDADE DE DISCUSSÕES.....	16
ATIVIDADE 3:	18
PASSOS PARA CONSTRUÇÃO:.....	18
RESPONDA ÀS QUESTÕES:	18
POSSIBILIDADE DE DISCUSSÕES.....	19
ATIVIDADE 4:	22
PASSOS PARA CONSTRUÇÃO:.....	22
PASSOS PARA CONSTRUÇÃO:.....	23
POSSIBILIDADE DE DISCUSSÕES.....	24
ELIPSE.....	27
ATIVIDADE 1:	27
PASSOS PARA CONSTRUÇÃO:.....	27
RESPONDA ÀS QUESTÕES:	29
POSSIBILIDADE DE DISCUSSÕES.....	29
ATIVIDADE 2:	32
PASSOS PARA CONSTRUÇÃO:.....	32
RESPONDA ÀS QUESTÕES:	33
POSSIBILIDADE DE DISCUSSÕES.....	33
ATIVIDADE 3:	35

RESPONDA ÀS QUESTÕES:	35
POSSIBILIDADE DE DISCUSSÕES	35
UMA NOÇÃO TOPOLÓGICA	37
CONCLUSÃO	39
REFERÊNCIAS	41
APÊNDICE — DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA	42

INTRODUÇÃO

Esse produto educacional faz parte do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UFJF, para obtenção do título de mestre em educação matemática. Propomos com esse trabalho apresentar um conjunto de tarefas para servir de apoio e suporte para aulas relacionadas ao conceito de continuidade de funções. Esperamos que seja de grande valia para professores e alunos que estudam matemática ao que tange a abordagem de funções e da continuidade de funções e que essa sequência de tarefas proporcione uma nova perspectiva relacionada a esses conceitos, especialmente para a formação de professores de matemática.

Para a confecção e elaboração desse produto, utilizamos os aspectos teóricos da mediação Semiótica Peirciana e a aplicação de Experimentos Mentais para a compreensão da ideia de continuidade por uma abordagem pela complementaridade entre intuição e conceito; intuição e lógica, utilizando os pensamentos de Poncelet e Cauchy.

O público alvo das atividades é amplo podendo ser aplicado desde alunos do ensino médio da educação básica a alunos de cálculo. E, principalmente, servir como um ótimo aliado para formação de professores.

Essa sequência de atividades tem por objetivo auxiliar no desenvolvimento do conceito de continuidade, principalmente, na formação de professores de matemática. Apresenta-se como uma nova abordagem para o estudo desse conceito, ampliando e complementando as aplicações desse tema que é essencial na formação dos professores. Faremos a comparação entre as concepções de Poncelet e Cauchy, conduzindo o aluno para uma complementaridade entre as duas perspectivas, de maneira que o aluno perceba uma ligação entre esses dois conceitos, fazendo uma ponte entre uma abordagem geométrica e uma abordagem algébrica/ aritmética.

Para realização de algumas atividades é necessário a introdução do conceito de continuidade pela concepção de Poncelet e pela concepção de Cauchy. Dessa forma, deixaremos uma breve discussão na seção “conceitos e ideias” para nortear as atividades que virão a seguir. O leitor que tiver maior interesse pode ainda, consultar nossa dissertação em que esses assuntos foram explorados com maiores detalhes.

CONCEITOS E IDEIAS

SEMIÓTICA NA MATEMÁTICA:

Nesta seção apresentaremos um breve resumo do referencial teórico que orientou nossas reflexões ao longo da investigação.

No desenvolvimento da história, destacamos que a semiótica sempre esteve presente como formas de questionar, representar e significar. Segundo Santaella (2002) é possível notar uma preocupação com os problemas de linguagem desde o mundo grego que nos leva a considerar uma semiótica implícita com investigações sobre a natureza dos signos e uma semiótica explícita, a ciência propriamente dita.

A fenomenologia, segundo Santaella (2002), fornece as fundações para as ciências normativas, das quais a lógica faz parte. A lógica é a “ciência das leis necessárias para o pensamento e das condições para se atingir a verdade” (SANTAELLA, 2002, p. 3), é o estudo do raciocínio correto. Peirce descobriu que o pensamento carece de signos para o seu desenvolvimento. Vem dessa descoberta a concepção peirciana da lógica para a semiótica.

Cruz (2019) disserta que o pensamento efetiva-se por intermédio de sinais, o que justifica uma abordagem semiótica para os processos de ensino e aprendizagem da matemática nos diversos níveis (ensinos fundamental, médio e superior). A busca pela compreensão de como se processa o conhecimento motivou e envolveu diversos filósofos e de diferentes épocas.

Segundo Cruz (2018), toda prova matemática tem um elemento de generalização, sugerindo que pode haver uma conexão entre os Experimentos Mentais e os métodos formais de provas. De forma que a aplicação dos Experimentos Mentais no ensino e na aprendizagem perpassa pela compreensão da matemática por intermédio de um processo semiótico.

Na matemática, os símbolos resultam da consideração dela como uma linguagem e dessa forma, são indispensáveis. O matemático representa tudo por meio dos símbolos.

De acordo com Cruz (2015), Peirce afirma que o raciocínio matemático procede da construção de todas as formas e tipos de diagramas e da experimentação deles (Experimentos Mentais). Esses diagramas são considerados signos usados referencialmente (ícones) e atributivamente (índices).

EXPERIMENTOS MENTAIS

Para Otte (2011), os diagramas de Euclides podem ser interpretados de duas maneiras distintas, porém complementares. Em uma, a proposição a ser provada, é referente a uma totalidade já definida e diz algo sobre cada um deles. Enquanto na outra interpretação, a frase tem um caráter mais condicional, pois essa totalidade não é suposta. Assim, ele afirma que o raciocínio diagramático euclidiano poderia ser descrito em termos da noção de “experimento do pensamento”, pois ele envolve um pensamento físico idealizado, mas que pode ser representado por diagramas.

A aplicação dos Experimentos Mentais está associada ao desenvolvimento do raciocínio diagramático, buscando a generalidade. Ambos têm o papel de desenvolver métodos para facilitar a abdução, que segundo Peirce é “o processo de formação de uma hipótese explanatória. A única operação lógica que apresenta uma ideia nova” (PEIRCE, 2005, p. 220).

Segundo Cruz (2018), Peirce define raciocínio diagramático como processo em três etapas: construção de uma representação, experimentação dessa construção e observação dos resultados, o que torna esse método muito interessante para o nosso processo de pesquisa.

Para Cruz (2018), os Experimentos Mentais são a forma de representar os pensamentos visando o objetivo de entender a coerência do próprio conceito e a possibilidade de aplicação do mesmo. Ou seja, é a forma, desempenhada pelo sujeito que possui a capacidade de conhecer, de expor seu próprio pensamento, utilizando como objeto de consideração um contexto bem definido, por intermédio de uma representação. Permitindo o uso da intuição, combinando experiências e conhecimentos.

Os Experimentos Mentais, baseados num sistema de atividades supostas (síntese abdutiva), permitem o uso da intuição, combinando experiências e conhecimentos e seguindo uma lógica de considerações heurísticas. Além de deduções lógicas e cálculos formais, e também cálculos não estritamente formais. A matemática por essa consideração é compreendida como uma atividade, ou seja, uma construção.

CONTINUIDADE DE FUNÇÕES

No estudo das funções, um conceito muito importante é o conceito de continuidade. A continuidade de funções como conhecemos hoje é a continuidade de Cauchy — Weierstraas. Cauchy foi quem introduziu o conceito formal de continuidade local. Para ele a ideia de continuidade sempre está associada à função. Só existe na função, no corpo das funções.

Porém, há outra definição, por uma perspectiva diferente e não tão conhecida é a definição de Poncelet. Ele define o princípio da continuidade, como manter uma propriedade invariante, partindo de um contínuo de ideias. A ideia de Poncelet é que “as propriedades geométricas que se aplicam a uma configuração particular vão (salvo as mudanças de sinais que correspondem às mudanças de posição) continuar a se aplicar as figuras correlativas que diz “todos os estados reais e absolutos de um mesmo sistema que se transforma por graus insensíveis” (CHAVES; GRIMBERG, 2014, p. 100).

PRINCÍPIO DA CONTINUIDADE DE CAUCHY

Seja f uma função real definida num subconjunto D contido em \mathbb{R} e seja a um ponto pertencente a D . Diz-se que a função f é contínua em a se e só se, qualquer que seja o número positivo δ existir um número ε , também positivo, tal que, sempre que x seja um ponto pertencente a D e verificar a condição $|x - a| < \varepsilon$, se tenha $|f(x) - f(a)| < \delta$. Ou mais simplesmente $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

PRINCÍPIO DA CONTINUIDADE DE PONCELET

Se uma figura tem como característica de uma dessas propriedades que denominamos de posição, quando as partes que a compõem têm uma disposição particular, esta figura goza ainda da mesma propriedade, qualquer que seja a maneira geral com a qual se tenha invertido a ordem ou a disposição das figuras (CHAVES; GRIMBERG, 2014, p. 94).

Para Chaves e Grimberg (2014), Poncelet em suas publicações utiliza de uma maneira engenhosa para solucionar problemas. Alguns deles são classificados como o que chamamos hoje de geometria projetiva. Inspirado em Charles — Julien Brianchon, Poncelet conduz sua intuição sobre o princípio da continuidade e desenvolve o método da Projeção Central.

A ideia de continuidade para Poncelet, segundo Chaves e Grimberg (2014), está relacionada com as propriedades geométricas invariantes que as curvas apresentam.

Chaves e Grimberg (2014) argumentam que essas relações são coerentes em uma aplicação real no sistema. “É bem claro que, na visão de Poncelet, não é uma questão de aplicar o princípio de continuidade de qualquer propriedade. Ele define o objeto da geometria como o estudo “das propriedades dos corpos em relação as suas áreas ou de suas configurações”” (PONCELET, 1818 apud CHAVES; GRIMBERG, 2014, p.100).

Como exemplo, vamos adotar a dinâmica dos Experimentos Mentais, que por meio de um conjunto de informações buscam uma melhor representação para construir nossos objetos, algumas curvas muito manipuladas no ensino de cálculo. Compreendemos que a partir da ótica da complementaridade é possível compreender mais profundamente esse conceito tão fascinante.

Sugerimos aqui a construção de duas curvas: a parábola e a elipse, adotando a dinâmica dos Experimentos Mentais que por meio de um conjunto de informações buscam uma melhor representação para construir o objeto em questão, duas curvas muito manipuladas no ensino de cálculo.

Para a construção, utilizamos um software que permite trabalhar geometria plana, em particular o GeoGebra, porém o leitor pode escolher o software de sua preferência ou, ainda, régua e compasso.

PARÁBOLA

ATIVIDADE 1:

Essa primeira atividade tem por objetivo trabalhar as propriedades da parábola como o lugar geométrico dos pontos que apresentam a mesma distância do foco e da reta diretriz, por meio da construção geométrica.

Para isso, propomos um roteiro com a construção da curva utilizando o software GeoGebra e sugerimos algumas questões norteadoras para o direcionamento do aluno. Sugerimos ao professor, que ao acompanhar os alunos na realização das tarefas, os motive a observarem os principais elementos utilizados na construção: os pontos P, P_1, P_x, F, V e D , as retas d, g e f , e a circunferência c . Cada um desses elementos possui um papel importante na atividade.

Uma observação importante é que, nos casos em que o aluno considera o ponto P_x abaixo da reta d , a circunferência c não terá pontos de interseção com a reta g . Entretanto, o professor pode orientar ao aluno que utilize a ferramenta de “interseção de dois objetos” do GeoGebra e, em seguida, movimentar o Ponto P_x .

Essa atividade e as demais são perfeitamente adaptáveis para serem realizadas utilizando régua e compasso, se o professor achar pertinente. Além disso, ela também pode ser adaptada para alunos do ensino médio para introdução ao conceito de função e continuidade ou fixação dos conteúdos.

Vamos construir uma curva (*algo me diz que você já a conhece!*) seguindo dos passos dados e por meio desse experimento responder às questões seguintes.

PASSOS PARA CONSTRUÇÃO:

Utilizando um software para desenhos geométricos (essa atividade também pode ser realizada utilizando régua e compasso), construa uma reta d e sobre ela marque o ponto D . Na ferramenta de retas, escolha a reta perpendicular e selecione o ponto D e a reta d . Então, construímos uma reta — que chamamos de f — perpendicular à d , passando por D .

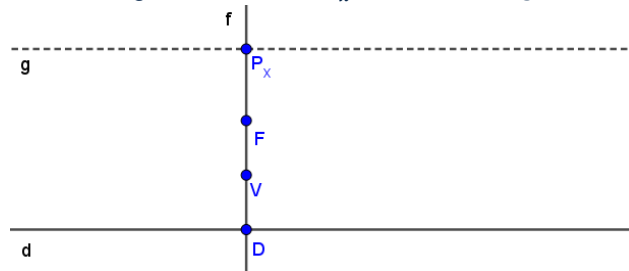
Figura 1 – Retas d e f



Sobre f , coloque um ponto qualquer e nomeie-o de F e encontre o ponto médio do segmento \overline{FD} , ele será o ponto V . Ainda, sobre f , coloque um outro ponto qualquer, nomeando-o de (P_x) .

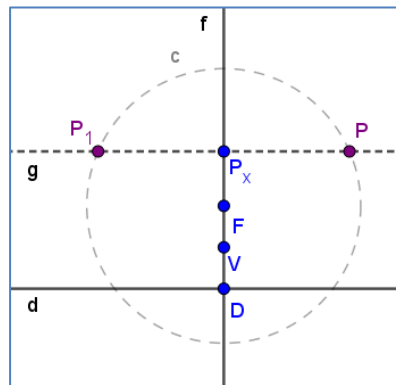
Por P_x trace uma reta g paralela à d .

Figura 2 – Pontos P_x, F, V e a reta g



Com ajuda do compasso, construa uma circunferência com centro em F e raio $\overline{P_xD}$, a circunferência c e identifique os pontos de intercessão de c e g (P e P_1).

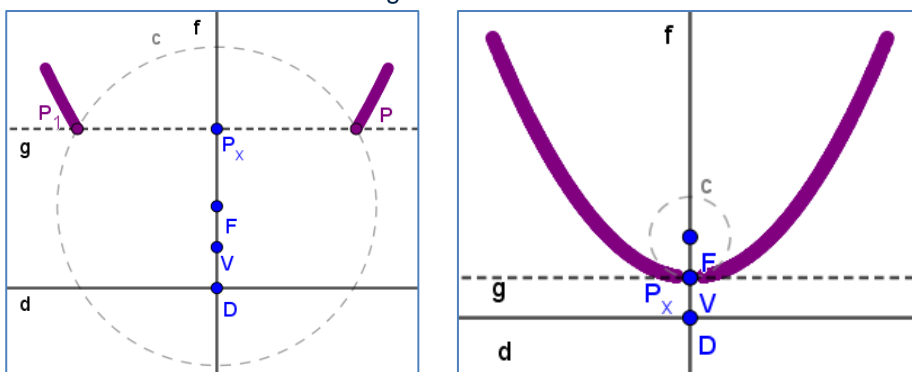
Figura 3 – Circunferência c



OBSERVANDO PROPRIEDADES

Com o botão direito do mouse, habilite o rastro de P e P_1 e mova o ponto P_x sobre a reta f , observe a construção de uma curva.

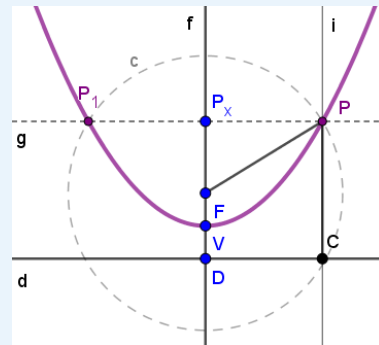
Figura 4 – Curva



RESPONDA ÀS QUESTÕES:

1. Esta curva construída tem alguma familiaridade com curvas que você já estudou? Que nome tem esta curva?
2. Qual a função que representa essa curva?
3. Tente encontrar a distância do ponto F ao ponto P dessa curva e também a distância do ponto P à reta d . Que relação pode ser observada neste experimento?
4. Todos os pontos desta curva estão sob esta propriedade? Podemos dizer então que há continuidade nesta curva? Justifique.

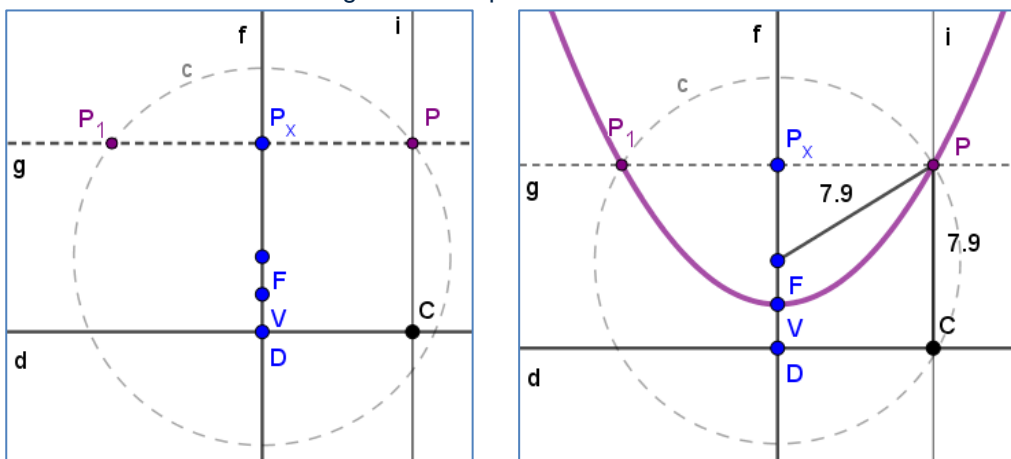
DICA:



POSSIBILIDADE DE DISCUSSÕES

Podemos observar uma propriedade dessa curva a partir da construção ao calcularmos as distâncias de P à F (\overline{PF}) e de P à d (\overline{PC}).

Figura 5 – Propriedade da curva



Observe que a distância de P à reta d (\overline{PC}) é igual à distância de P a F (\overline{PF}), independentemente da localização do ponto P .

Essa observação das distâncias $\overline{PC} = \overline{PF}$ constitui um lugar geométrico: “uma sucessão de pontos ou de linhas que gozam de uma propriedade comum” (CARVALHO, 2005, p. 21). Isto é, esta curva é o lugar geométrico dos pontos P que atendem à seguinte conclusão: qualquer que seja F e d nas condições dadas, a distância de P a F é igual à distância de P à d , isto é, possuem a mesma medida. Dessa forma, a parábola é o lugar geométrico dos pontos de um plano que apresentam a mesma distância de um ponto (foco) e de uma reta (diretriz) (CARVALHO, 2005, p. 228).

A propriedade de que se $P = P_1 = P_x = V$, os segmentos \overline{PF} e \overline{PC} serão iguais (congruentes), indica que todos os pontos da curva formada têm esta propriedade. Ou seja, são equidistantes do foco (F) e da reta diretriz (d), constituindo assim o lugar geométrico da nossa curva.

Dessa forma, a curva que chamamos parábola é contínua, numa interpretação do conceito de continuidade de Poncelet, pois mantém a mesma propriedade para quaisquer de seus pontos. Por isto, construímos um lugar geométrico de pontos que apresentam esta mesma propriedade para todos (invariante). Em uma perspectiva semiótica, temos nesse ponto, um avanço, trazendo uma situação mais geral e abrangente.

ATIVIDADE 2:

O objetivo dessa segunda atividade é que o aluno identifique que a área do retângulo e do quadrado que serão construídos são iguais, para todos os pontos pertencentes à parábola. Essa é uma importante propriedade que motivou a escolha do nome dessa cônica. Além disso, esperamos que o aluno consiga relacionar essa propriedade com a definição da continuidade de Poncelet.

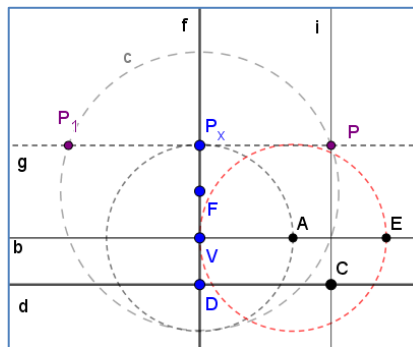
Há uma outra propriedade que envolve a ideia de áreas. Vamos construir, juntos, esta propriedade.

PASSOS PARA CONSTRUÇÃO:

Por V trace uma reta b paralela à d e com ajuda do compasso, faça uma circunferência de raio \overline{DF} e centro V e marque o ponto de intercessão entre a circunferência e a reta b (Ponto A na imagem).

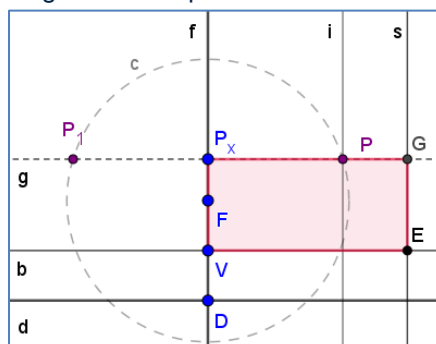
Novamente com o compasso faça agora a circunferência de raio \overline{DF} e centro A . Marque um ponto na intercessão entre essa circunferência e a reta b (ponto E).

Figura 6 - Propriedade de áreas



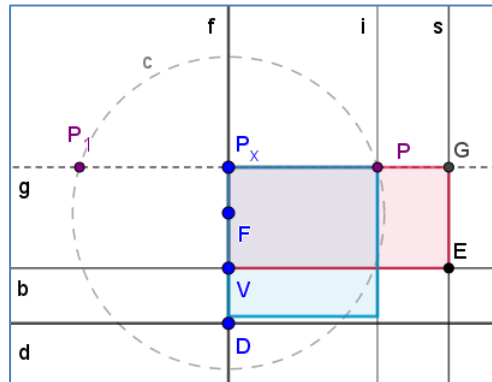
Por E , faça uma reta s perpendicular à d e marque o ponto G na intercessão de g e s . Em seguida, construa, com a ferramenta de polígonos, o retângulo EGP_xV .

Figura 7 – Propriedade de áreas



Construa também, um quadrado de lado $\overline{PP_x}$ sobre a reta f .

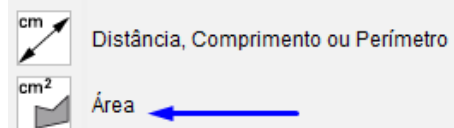
Figura 8 – Propriedade de áreas



Se o quadrado não ficar sobre a reta f , selecione os pontos na ordem contrária!

Calcule a área do retângulo e do quadrado que você construiu.

Mova novamente o ponto P_x sobre a reta f .



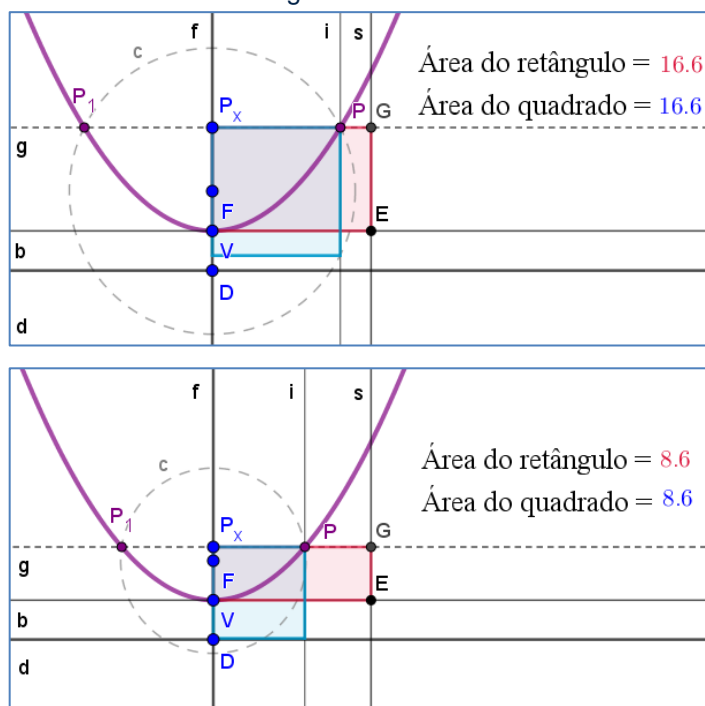
RESPONDA ÀS QUESTÕES:

5. Qual a relação que pode existir entre as áreas do quadrado e do retângulo? Justifique.
6. O nome dessa curva poderia ter algum motivo no envolvimento com áreas?
7. Podemos representar esta curva por meio de uma equação? Como podemos fazer isto?
8. Tente encontrar uma relação da área do retângulo em função de seus lados: $\overline{VP_x}$ e \overline{EF} e uma relação da área do quadrado em função de seu lado $\overline{PP_x}$.
9. O que você encontrou quando compara essas duas relações?
10. Como passar desta equação para a representação funcional, isto é, como podemos identificar esta curva ou parte dela por meio de uma função?
11. Esta função que construímos é contínua? Explique sua resposta.
12. Quais dos dois aspectos da continuidade estão presentes nesta atividade?

POSSIBILIDADE DE DISCUSSÕES

Calculando a área de ambos percebemos que, a área do retângulo e a área do quadrado são iguais, para todos os pontos pertencentes à parábola.

Figura 9 – Áreas



Por essa propriedade também podemos concluir que a parábola é uma curva contínua, pois essa propriedade se mantém a mesma por todos os pontos pertencentes a ela (invariante). Agora, vamos aos cálculos. Área do retângulo é dada por:

$$A_r = 2\overline{DF} \cdot \overline{VP_x}$$

Já a área do quadrado é:

$$A_Q = \overline{PP_x}^2$$

Como podemos verificar que as áreas são iguais, então,

$$\overline{PP_x}^2 = 2\overline{DF} \cdot \overline{VP}$$

Essa, é uma das curvas que podem ser obtidas por meio de secções cônicas. O nome parábola fora aplicado a ela, segundo Boyer & Merzbach (2012), pela primeira vez por Apolônio, que introduziu os nomes elipse, hipérbole e parábola para as secções cônicas.

A palavra parábola (uma colocação ao lado ou comparação) não indicava nem excesso nem deficiência. Apolônio aplicou estas palavras num contexto novo, como nomes para as seções planas. A equação familiar moderna para a parábola com vértice na origem e $y^2 = lx$ (onde l é o latus rectum ou parâmetro, agora frequentemente representado por $2p$, ou ocasionalmente por $4p$). Isso é, a parábola tem a propriedade que não importando qual ponto sobre a curva se escolha, o quadrado sobre a ordenada é precisamente igual ao retângulo sobre a abscissa x e o parâmetro l (BOYER; MERZBACH, 2012, p. 114).

ATIVIDADE 3:

Na atividade 3 o principal objetivo é algebrizar a curva em termos analíticos para que cada elemento tenha uma localização no plano cartesiano e assim, corresponder a parábola à uma representação algébrica, funcional.

Já pensou se os eixos orientados estivessem nessa atividade? Então, você poderia ter essa curva da forma que já a viu outras vezes!

PASSOS PARA CONSTRUÇÃO:

Construa a curva utilizando a ferramenta do GeoGebra de construção da Parábola, selecionando inicialmente o foco (F) e em seguida, a reta diretriz (d).

Sobre a curva, colocaremos eixos orientados – o plano cartesiano – de forma que V coincida com a origem O. Sobrepondo em b o eixo das abscissas (x) e em f, o eixo das ordenadas (y). Para isso, utilize a ferramenta de vetor para criar o vetor x e o vetor y, como na figura abaixo.

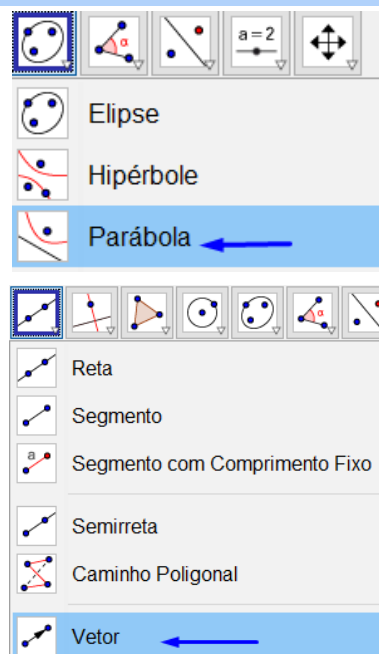
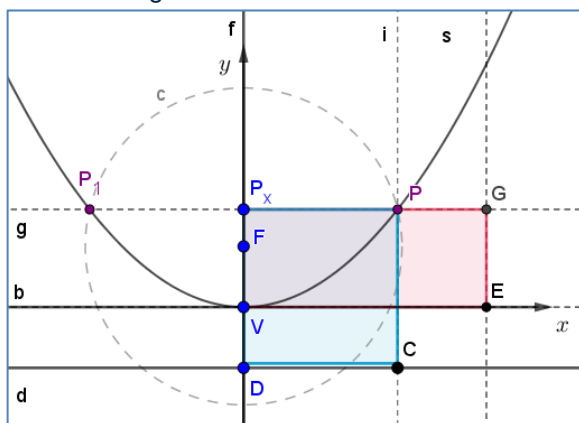


Figura 10 – Eixos orientados



RESPONDA ÀS QUESTÕES:

13. Sendo significado o ponto P de coordenadas (x, y) , o ponto V $(0, 0)$ para o ponto P coordenadas (x, y) , V $(0, 0)$ e o ponto F $(0, c)$, quais seriam as coordenadas dos pontos P_x , D, P_1 e C?

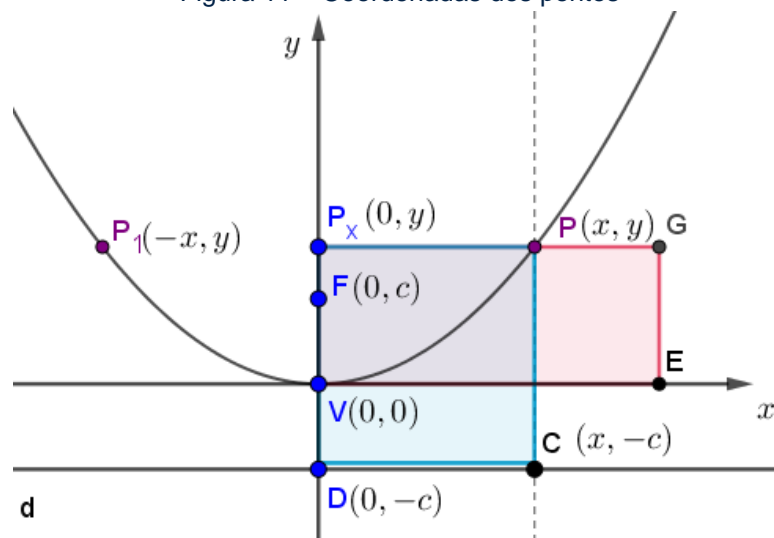
14. O que dizer sobre (os comprimentos) dos segmentos: PP_x , VP_x e DF .
15. Tente encontrar a área do retângulo e do quadrado em termos de x e y .
16. Qual a relação entre as duas áreas? Justifique.
17. Sugerimos fazer $2c = p$. É possível observar alguma semelhança com a equação da parábola?

POSSIBILIDADE DE DISCUSSÕES

Para pensarmos na continuidade desta curva em termos analíticos, temos que algebrizar a curva, isto é, escrever uma função que representa partes desta curva num dado intervalo. Para isso, sobre nossa curva, colocaremos eixos orientados – o plano cartesiano – de forma que V coincida com a origem O . Sobrepondo em f , o eixo das abscissas (x) e em b , o eixo das ordenadas (y). (A partir desse ponto ocultaremos alguns elementos utilizados na construção da curva para melhor visualização).

Considere que F esteja a uma distância c de V e que P tenha coordenadas (x, y) quaisquer. Então, as coordenadas dos pontos da curva são: $P(x, y)$, $C(-c, y)$, $D(-c, 0)$, $V(0, 0)$, $F(c, 0)$ e $P_x(x, 0)$.

Figura 11 – Coordenadas dos pontos



Agora, cada ponto, tem uma localização em outro sistema – o sistema cartesiano. Uma observação a ser feita é que na geometria sintética, ponto não possui localização, não é necessário localizá-lo num eixo, porém analiticamente cada ponto tem seu lugar específico.

Dessa maneira, temos $\overline{PP_x} = x$, $\overline{VP} = y$ e $\overline{DF} = 2c$. Como $\overline{PP_x}^2 = 2\overline{DF} \cdot \overline{VP}$, concluímos que $x^2 = 2 \cdot 2c \cdot y \Rightarrow x^2 = 4cy \Rightarrow y = \frac{1}{4c}x^2$. Tomando o parâmetro $p = 2c$, $x^2 = 2py$ ou $y = \frac{1}{2p}x^2$

Esta última expressão é a equação algébrica da curva que é o novo objeto a ser considerado, que a partir desse momento transformou nosso objeto passando por algumas transformações em sua representação, isto é, temos um novo objeto. Os pontos passam a ter características diferentes, sendo representados por pares ordenados.

Assim na concepção de Cauchy, a curva chamada parábola tem a seguinte representação funcional: $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Aqui o objeto foi reificado! Em termos de continuidade, devemos discutir a possibilidade de todos os pontos no intervalo do domínio constituir uma imagem e estas representarem os limites da função em cada um desses pontos. Isto é, de acordo com a definição Cauchyana: seja f uma função real definida num subconjunto D contido em \mathbb{R} e seja a um ponto pertencente a D . Diz-se que a função f é contínua em a se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Assim, considerando a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, então f é contínua.

Demonstração: De fato, seja $x_0 \in \mathbb{R}$, então $x_0 \in D(f)$. Temos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} [a(x_0)^2 + bx_0 + c] = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} a(x_0)^2 + \lim_{x \rightarrow x_0} b(x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} c = \\ &= a(x_0)^2 + bx_0 + c = f(x_0). \end{aligned}$$

Portanto, f é contínua em x_0 . Logo, contínua em \mathbb{R} . ■

Esta é a definição formal para Cauchy. A continuidade neste caso não está baseada na curva em si, mas na função. Essa definição está sob um jogo de argumentos, discute um conjunto de relações que aplicados à equação gera um resultado.

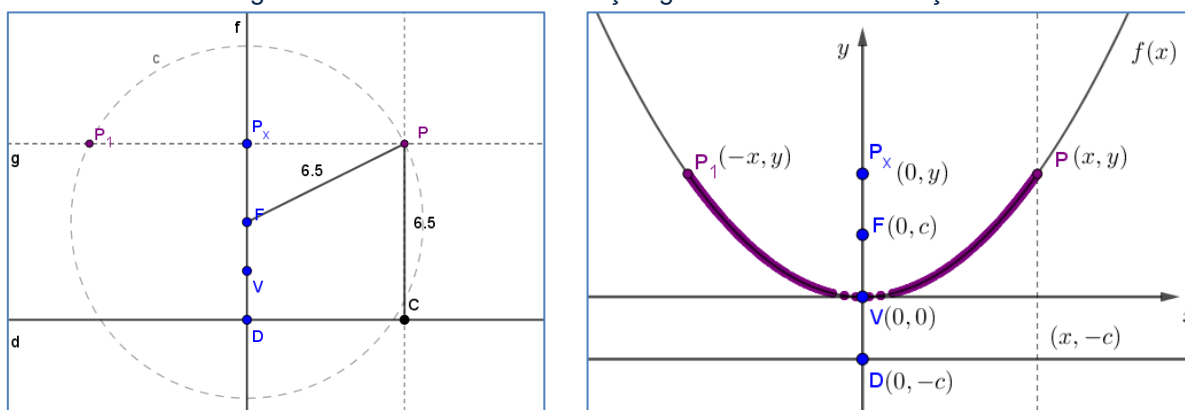
Para Courant e Robbins, “de uma forma geral dizemos que uma curva é contínua, se seu gráfico for uma curva ininterrupta” (COURANT; ROBBINS, 2000, p. 344). Na perspectiva de Cauchy, não é necessário trabalhar sobre o gráfico para

construir a ideia de continuidade. Por meio dessa definição, não é possível discutir se o gráfico é ou não uma curva sem interrupções.

Mas para Poncelet, a continuidade nesse caso irá acontecer, pois todos os pontos dessa curva possuem a mesma propriedade. Assim, a continuidade saiu de um campo intensional, para um campo extensional. Esse campo extensional ganha um impulso da intuição, pois não é preciso limitar somente a isso, podemos estendê-lo a qualquer outra curva.

No campo formal não é possível perceber a continuidade, pois ela não é sobre a curva ininterrupta, mas sobre uma fórmula. É uma relação lógica, mecânica. O teorema de Poncelet baseia-se em que, se uma curva é ininterrupta em qualquer ponto, ela pode ser linearizada. Isto é, Poncelet permite visualizar a curva definindo a continuidade com tangente, fazendo uso da intuição agregada a conceitos, já Cauchy abre mão da representação e da intuição para ganhar certo controle sobre a curva. Esta é a complementaridade: um busca a continuidade na figura e o outro na estrutura funcional.

Figura 12 – Parábola na construção geométrica e como função



Como passar de uma concepção para outra? Pois se a propriedade é válida para todos os pontos, há um contínuo posto aí como acreditava Poncelet. Mas para Cauchy é outra coisa.

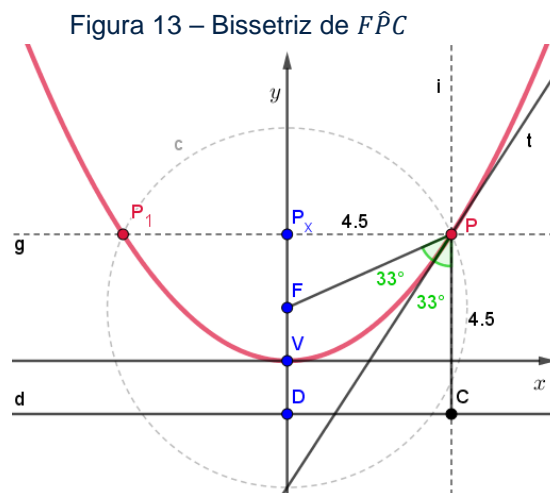
ATIVIDADE 4:

O objetivo da atividade 4 é relacionar as duas perspectivas, sintética e algébrica, da curva. Para isso, utilizaremos a demonstração do teorema de Poncelet sobre as tangentes, relacionando a continuidade da função com a curva, para possibilitar ao aluno fazer uma ponte entre a curva e a função.

Há uma outra propriedade que podemos construir nesta curva, que envolve o teorema de Poncelet sobre as tangentes.

PASSOS PARA CONSTRUÇÃO:

Para analisarmos, utilizando a ferramenta de reta bissetriz do GeoGebra, trace a bissetriz t do ângulo $F\hat{P}C$.



Ao observarmos a reta t , podemos perceber que a mesma é a reta tangente à curva, passando por P . Essa conclusão é conhecida como Teorema de Poncelet sobre as tangentes. Vejamos ela a seguir.

Teorema de Poncelet: Dado uma parábola γ de foco F e um ponto P pertencente a mesma, as bissetrizes dos ângulos formados pelo raio vetor (segmento de reta que une um ponto da parábola a um de seus focos) e pela reta perpendicular à diretriz d que passa por P são as retas tangente e normal a parábola em P .

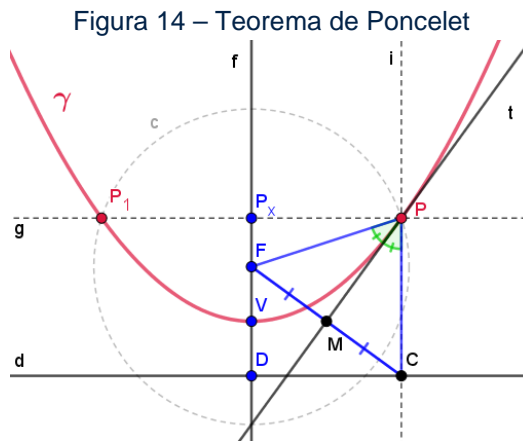
Como atividade, faremos um Experimento Mental desse teorema utilizando o GeoGebra, por meio dos passos a seguir.

PASSOS PARA CONSTRUÇÃO:

Construa o triângulo ΔFPC e utilize as construções anteriores para mostrar que esse triângulo é isósceles.

Qual é a base do triângulo ΔFPC ?

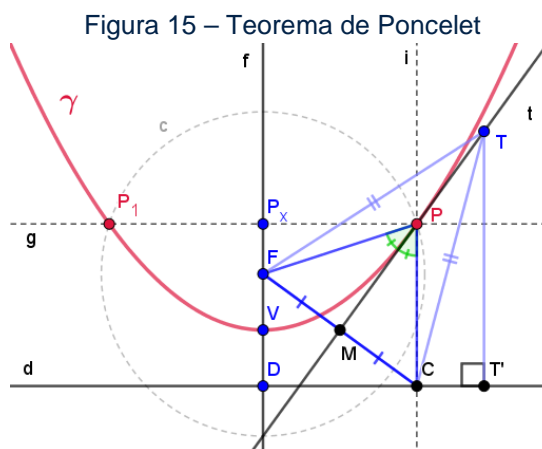
Marque o ponto de interseção da reta bissetriz t e o segmento \overline{CF} , o chamaremos de M .



Por que t é a mediatriz de \overline{CF} ?

Conclua que os triângulos ΔFPM e ΔCPM são congruentes e que o ponto M , é o ponto médio de \overline{CF} , indicando o caso de congruência.

Considere um ponto $T \neq P$ em t . Mostre que todo ponto $T \in t, P \neq T$ é exterior à parábola, ou seja, que a distância de T a F é maior que a distância de T à reta diretriz d .



Conclua que a reta t é uma tangente.

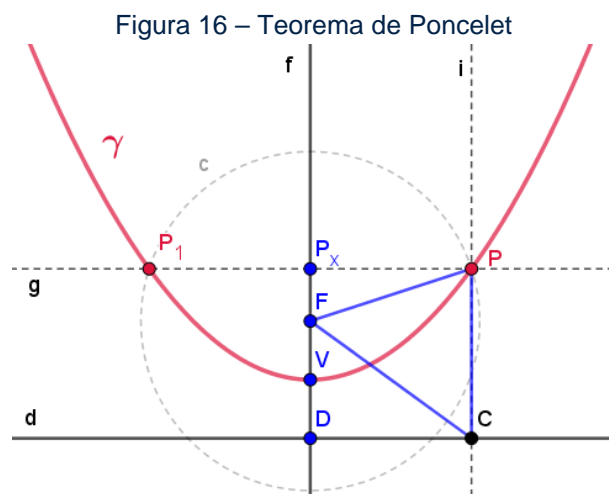
Faça a verificação para a reta normal, observando que ela será a bissetriz do ângulo suplementar de $F\hat{P}C$.

POSSIBILIDADE DE DISCUSSÕES

A demonstração desse teorema permite o aluno percorrer um caminho construtivo e que faz uma associação entre as ideias de Poncelet e Cauchy. Nessa seção faremos a demonstração completa com algumas observações para que, você professor, possa discutir com os alunos em sala de aula.

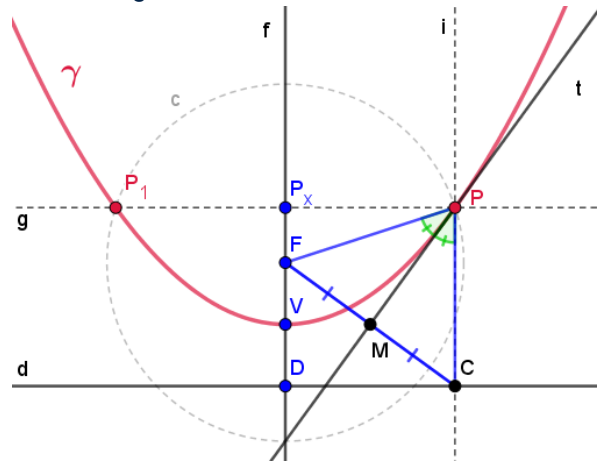
Teorema de Poncelet: Dado uma parábola γ de foco F e um ponto P pertencente à mesma, as bissetrizes dos ângulos formados pelo raio vetor (segmento de reta que une um ponto da parábola a um de seus focos) e pela reta perpendicular à diretriz d que passa por P são as retas tangente e normal a parábola em P .

Seja o ponto C , a projeção ortogonal do ponto P em d , como podemos observar através da construção da parábola. Assim, \overline{CP} é ortogonal à d em C e o triângulo ΔFPC é isósceles de base \overline{CF} , pois P pertence à parábola, de forma que as medidas de \overline{FP} e \overline{CP} são congruentes pela definição de lugar geométrico da parábola discutida anteriormente.



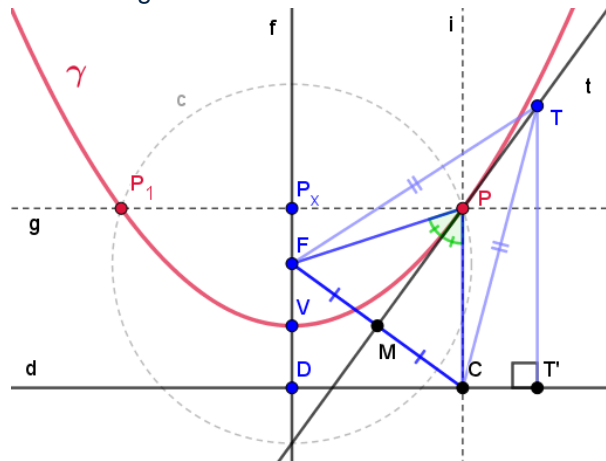
Considere a bissetriz t do ângulo \widehat{CPF} e M , o ponto de interseção de t e o segmento \overline{CF} . Consequentemente, t é a mediatriz de \overline{CF} , os triângulos ΔFPM e ΔCPM são congruentes (*A. L. A.*) e o ponto M , é o ponto médio de \overline{CF} .

Figura 17 – Teorema de Poncelet



Considere um ponto $T \neq P$ em t e seja T' a projeção ortogonal de T em d . Como t é mediatriz de \overline{CF} , as medidas de $\overline{CT'}$ e $\overline{FT'}$ são congruentes; além disso, $\overline{FT} = \overline{CT} > \overline{TT'}$, pois $\Delta CTT'$ é retângulo em T' com \overline{CT} sendo a hipotenusa e $\overline{TT'}$ um dos catetos. Assim sendo, a distância de T a F é maior que a distância de T a T' . Isto é, T' é exterior à parábola.

Figura 18 – Teorema de Poncelet



Portanto todo ponto $T \in t, P \neq T$ é exterior à parábola. Por conseguinte, a reta t é uma tangente. Para a reta normal, basta observarmos que esta, será a bissetriz do ângulo suplementar de \widehat{CPF} .

A continuidade de uma função num ponto de seu domínio relaciona-se com a derivabilidade dessa função a partir de uma propriedade importante, a existência de reta tangente ao gráfico nesse mesmo ponto. O Teorema forma que trata desse ponto, em termos algébricos, afirma que se f é derivável num ponto x_0 de seu domínio,

então f é contínua em x_0 . A demonstração deste teorema pode ser vista nos apêndices deste produto.

Se uma função dada é derivável a cada ponto compreendido no seu domínio, isto quer dizer que podemos traçar uma reta tangente a cada ponto ao longo da curva e logo ela é contínua. Foi justamente isto que Poncelet fez. Traçou uma reta tangente a cada ponto da curva.

Mas é claro que podemos ter funções contínuas não deriváveis, talvez este seja o ponto de corte sobre as ideias Poncelet. Foi isto que causou estranheza a Cauchy. Este aspecto intuitivo pode não ser aplicável a todas as curvas e/ou funções. Ou pode ser extremamente trabalhoso. Temos aqui então que recíproca desse teorema anterior é falsa. Existem funções contínuas em x_0 , porém não deriváveis em x_0 , como é o caso da função modular. Dessa forma, a existência de reta tangente ao gráfico de uma função num ponto de seu domínio acarreta necessariamente na continuidade da função nesse ponto.

O objeto não é mais a curva e sim a função. Esta passagem que os alunos de cálculo não têm a oportunidade de entender. As extensões exigem outras formas de pensar, outros meios.

ELIPSE

ATIVIDADE 1:

Essa atividade tem como foco o estudo da Elipse e suas propriedades geométricas. Assim como na parábola, reconhecer a Elipse como o lugar geométrico de pontos que possuem uma determinada propriedade.

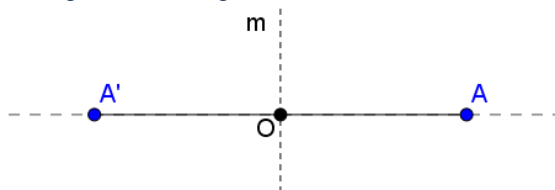
A seguir propomos o roteiro de construção da curva e sugestões de questões que podem ser trabalhadas com os alunos.

Vamos construir outra curva, também conhecida, seguindo dos passos dados e por meio desse experimento responder as questões seguintes.

PASSOS PARA CONSTRUÇÃO:

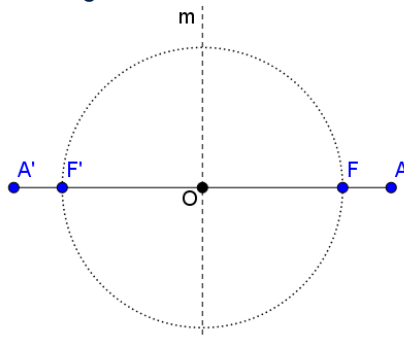
No GeoGebra, construa uma reta auxiliar e sobre ela, um segmento $\overline{A'A}$. Em seguida, construa a reta mediatriz, m , de $\overline{A'A}$ e marque o ponto O na interseção do segmento $\overline{A'A}$ e sua mediatriz m , como na figura abaixo.

Figura 19 – Segmento de reta e Mediatriz



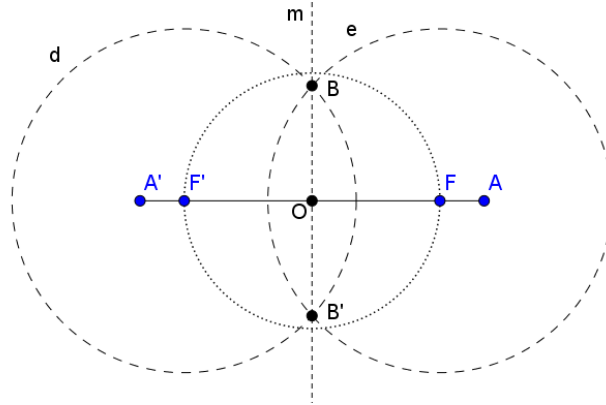
Sobre $\overline{A'A}$ marque um ponto F e com a ajuda de uma circunferência auxiliar de centro O e raio \overline{OF} , marque o ponto F' na interseção de c e $\overline{A'A}$.

Figura 20 – Pontos F e F'



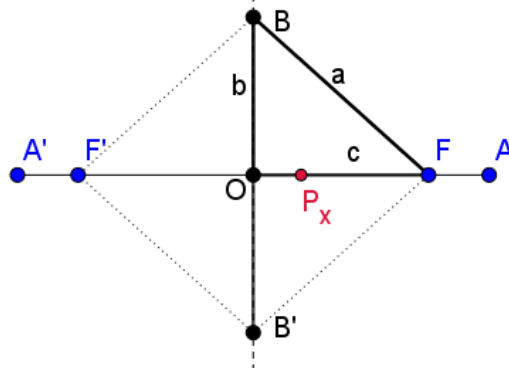
Construa duas circunferências: d de centro F' e raio $\overline{A'O}$ e e de centro F e raio \overline{OA} . Marque os pontos de interseção B e B' . Observe que ambos estão sobre a reta mediatriz.

Figura 21 – Pontos B e B'



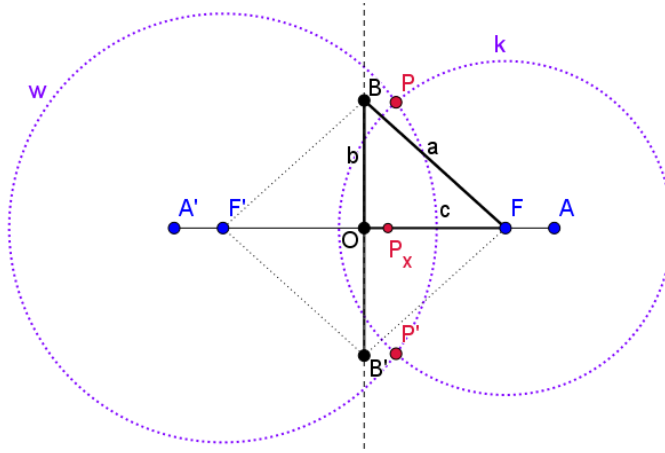
Construa os segmentos $\overline{BB'}$, \overline{BF} , $\overline{BF'}$, $\overline{B'F}$, $\overline{B'F'}$, \overline{OB} e $\overline{OB'}$. Chamaremos de a, b e c , os segmentos \overline{BF} , \overline{OB} e \overline{OF} respectivamente. Marque um ponto P_x qualquer sobre $\overline{A'A}$.

Figura 22 – Segmentos e ponto P



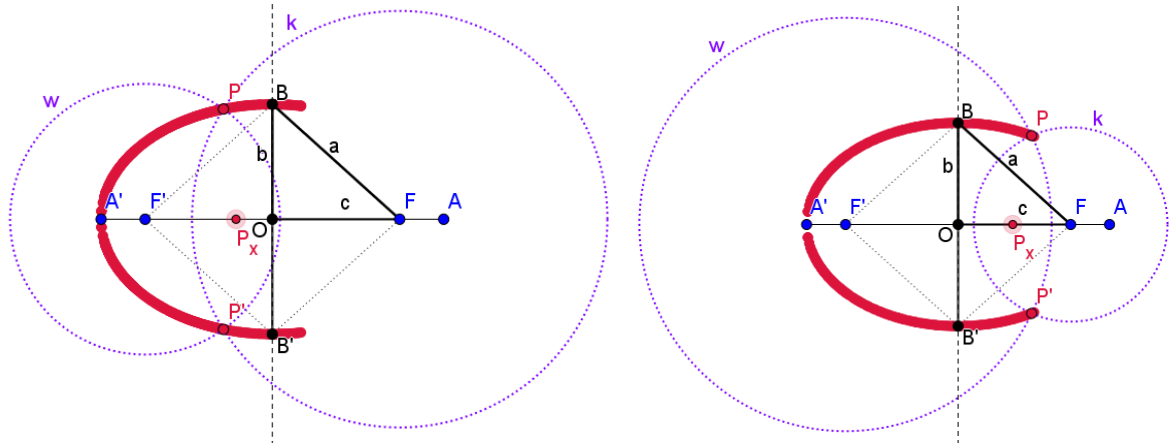
Construa as circunferências k : de centro F e raio $\overline{P_xA}$ e w : de centro F' e raio $\overline{A'P_x}$. Marque e habilite o rastro dos pontos P e P' nas interseções de k e w .

Figura 23 – Pontos P e P'



Movendo o ponto P sobre $\overline{A'A}$ podemos observar a construção da curva.

Figura 24 – Curva



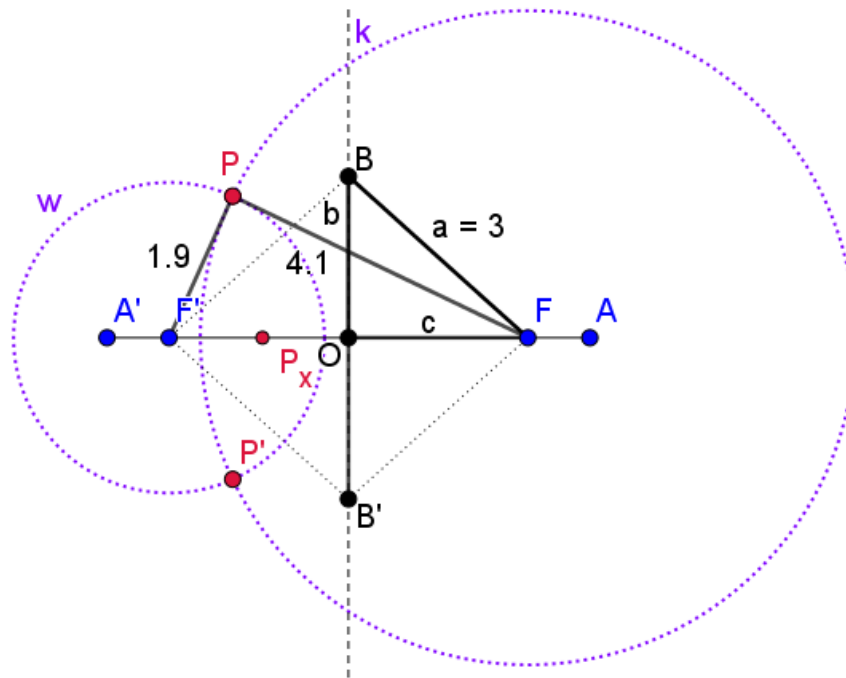
RESPONDA ÀS QUESTÕES:

1. Esta curva construída tem alguma familiaridade com curvas que você já estudou? Que nome tem esta curva?
2. Qual seria a equação algébrica que representa essa curva?
3. Tente encontrar a soma das distâncias do ponto P aos pontos F e F' e a medida do segmento a . Que relação pode ser observada neste experimento?
4. Todos os pontos desta curva estão sob esta propriedade? Podemos dizer então que há continuidade nesta curva?
5. Qual dos dois aspectos da continuidade apresentados está presente nesta atividade?
6. Como passar desta equação para a representação funcional, isto é, como podemos identificar esta curva ou parte dela por meio de uma função?

POSSIBILIDADE DE DISCUSSÕES

Podemos observar uma propriedade dessa curva, a partir da construção, ao calcularmos as distâncias de P à F (\overline{PF}) e de P à F' ($\overline{F'P}$), comparando-a com a medida do segmento a .

Figura 25 – Propriedade da curva



Observe que a soma das distâncias \overline{PF} e $\overline{P'F}$ é igual ao dobro da distância de B à F ($\overline{BF} = a$), independentemente da localização do ponto P .

Essa observação das distâncias ($d(P, F) + d(P, F') = 2 \cdot d(B, F)$) constitui um lugar geométrico. Isto é, esta curva é o lugar geométrico dos pontos P que atendem à seguinte conclusão: Elipse é uma curva plana fechada e simétrica, na qual é constante a soma das distâncias de cada um de seus pontos a dois pontos situados no interior do plano por ela limitada.

Dessa forma, a conclusão que $d(P, F) + d(P, F') = 2 \cdot d(B, F)$, indica que todos os pontos da curva formada têm esta propriedade. Ou seja, “os pontos cuja soma das distâncias a dois pontos fixos F e F' é constante”, constituindo assim o lugar geométrico da nossa curva.

Espera-se que o estudante conclua essa propriedade a partir da observação do objeto construído por ele. O professor pode motivá-lo a observar essas medidas em diversas localizações para o ponto P_x , para que ele perceba, através da experimentação.

A partir disso, é possível mostrar aos alunos utilizando uma prova geométrica e construtiva, como faremos a seguir.

Podemos observar que \overline{PF} tem medida igual ao raio da circunferência k (r_k) e $\overline{P'F}$ tem medida igual ao raio da circunferência w (r_w). Pois F e F' são os centros

dessas circunferências. Além disso, o raio da circunferência k é igual a medida do seguimento P_xA (por construção), isso é,

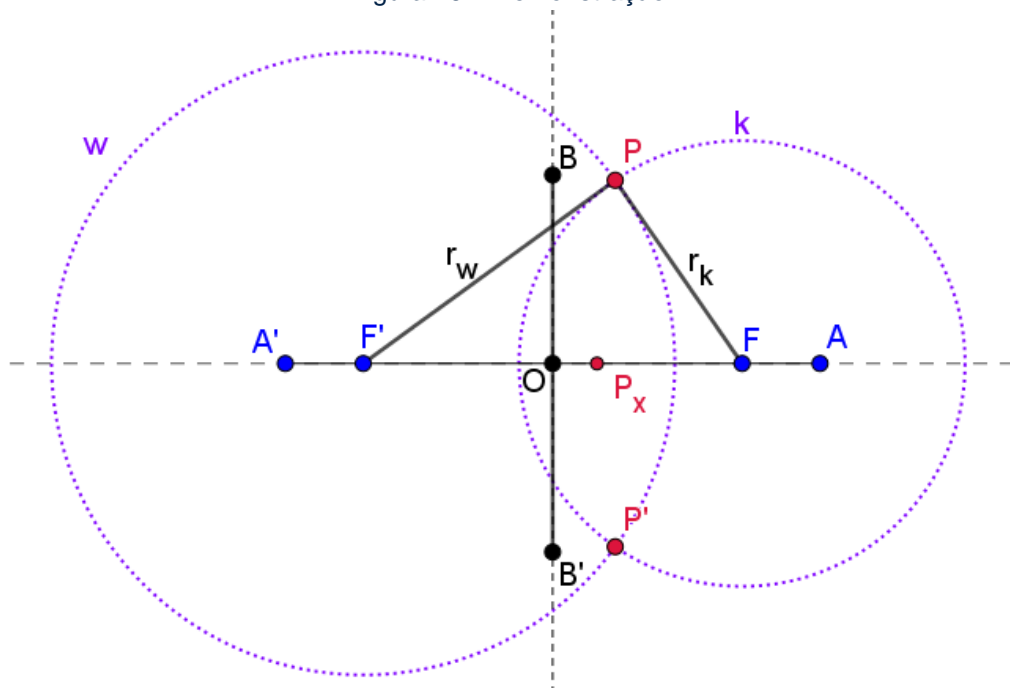
$$r_k = \overline{P_xA}.$$

Analogamente, o raio da circunferência w é igual a medida do seguimento $A'P_x$ (por construção), isso é,

$$r_w = \overline{A'P_x}.$$

Somando $\overline{F'P}$ e \overline{PF} temos $r_w + r_k = \overline{A'P_x} + \overline{P_xA} = \overline{A'A}$, que por sua vez tem medida igual a $2\overline{AO}$. Dessa forma, temos $\overline{F'P} + \overline{PF} = \overline{A'A} = 2\overline{AO}$.

Figura 26 – Demonstração



Por outro lado, também por construção, podemos observar que a medida do segmento $\overline{BF} = a$ é igual à \overline{OA} (B pertence à circunferência de centro F e raio \overline{OA}).

Portanto, podemos concluir que $\overline{F'P} + \overline{PF} = 2\overline{OA} = 2\overline{BF} = 2a$, isso é,

$$d(P, F) + d(P, F') = 2 \cdot d(B, F).$$

Logo, a curva que chamamos elipse é contínua, numa interpretação do conceito de continuidade de Poncelet, pois mantém a mesma propriedade para quaisquer de seus pontos. Por isto, construímos um lugar geométrico de pontos que apresentam esta mesma propriedade para todos (invariante). Em uma perspectiva semiótica, temos nesse ponto, um avanço, trazendo uma situação mais geral e abrangente.

ATIVIDADE 2:

O objetivo dessa atividade é direcionar o aluno para fazermos a conversão do campo geométrico para o campo analítico e utilizar definição de lugar geométrico da elipse ($PF + PF' = 2a$) para encontrar a equação, e por consequência, a função que relaciona as coordenadas dos pontos que pertencem à elipse.

Nessa atividade, colocaremos, sobre a curva, os eixos orientados.

PASSOS PARA CONSTRUÇÃO:

Inicialmente, construa a curva utilizando a ferramenta do GeoGebra de construção da Elipse, selecionando primeiramente os focos (F e F') e em seguida, o ponto P .

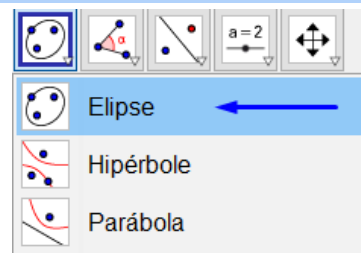
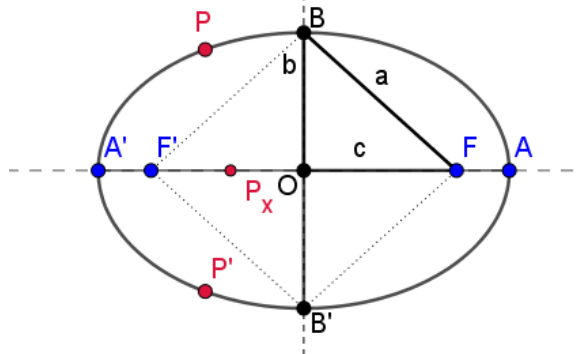
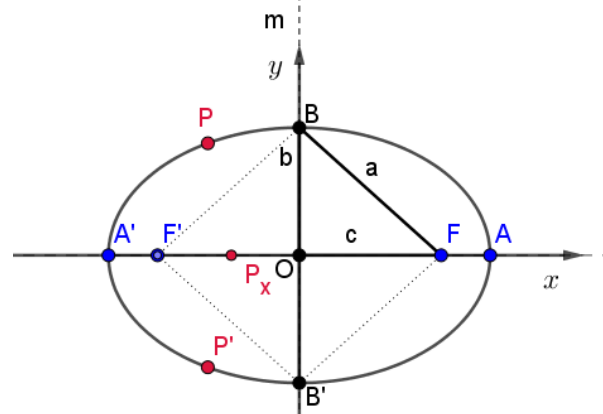


Figura 27 – Curva



Sobre a curva, colocaremos eixos orientados – o plano cartesiano – de forma que O coincida com a origem. Sobrepondo em $\overline{A'A}$ o eixo das abscissas (x) e em $\overline{B'B}$, o eixo das ordenadas (y). Para isso, utilize a ferramenta “vetor” para criar os vetores x e y , como na figura abaixo.

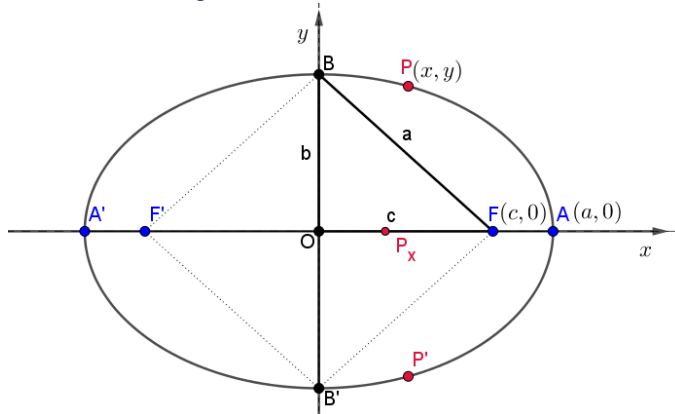
Figura 28 – Eixos orientados



RESPONDA ÀS QUESTÕES:

7. Definindo para o ponto P coordenadas (x, y) , $A(a, 0)$, $B(0, b)$ e o ponto $F(c, 0)$, quais serão as coordenadas dos demais pontos?

Figura 29 – Coordenadas

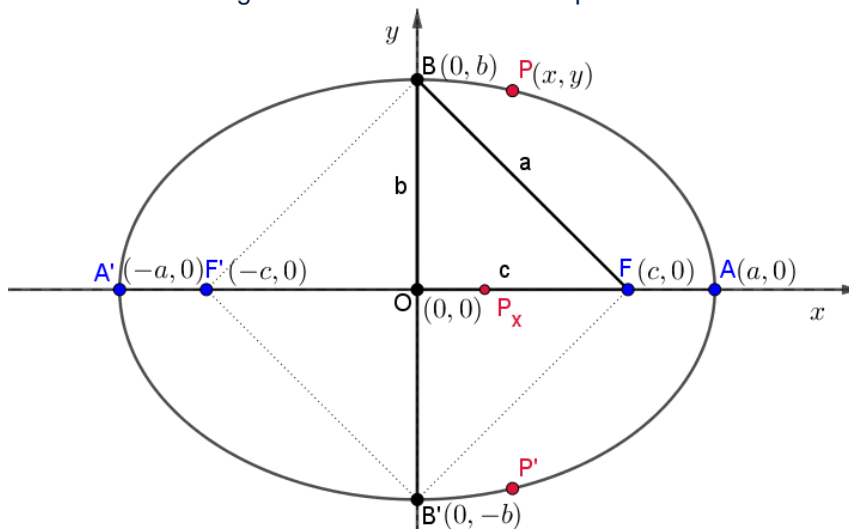


5. Determine a medida, em termos de x e y , dos segmentos: \overline{PF} , $\overline{PF'}$ e \overline{BF} .
6. Descreva a relação entre essas medidas que você encontrou na atividade anterior em termos de x e y ?
7. É possível observar alguma semelhança com a equação da elipse?

POSSIBILIDADE DE DISCUSSÕES

Após inserir os eixos coordenados, ao considerarmos um ponto qualquer $P(x, y)$ sobre a elipse e assumindo que os focos F' e F possuem coordenadas $(-c, 0)$ e $(c, 0)$ respectivamente, as coordenadas dos pontos da curva serão: $O(0,0)$, $P(x, y)$, $A(a, 0)$, $B(0, b)$, $F(c, 0)$, $P'(x, -y)$, $A'(-a, 0)$, $B'(0, -b)$, $F'(-c, 0)$, como indicado na figura abaixo.

Figura 30 – Coordenadas dos pontos



Como visto anteriormente, sabemos que $d(P, F) + d(P, F') = 2 \cdot d(B, F)$. A partir disso, podemos construir a equação reduzida da elipse. Pois temos

$$d(P, F) = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

$$d(P, F') = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

$$d(B, F) = \sqrt{(0 - c)^2 + b^2} = \sqrt{c^2 + b^2} = a$$

Logo, $\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$. Elevando ambos os termos da igualdade ao quadrado, expandindo e simplificando chegamos a $(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2$.

Isto é, $a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = a^2 - cx$. Novamente, elevando os dois termos ao quadrado, expandindo e fatorando em termos de x^2 e y^2 . Obtemos a equação $x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$.

Considerando $b^2 = a^2 - c^2$ e por fim, dividindo a equação por a^2b^2 obtemos a equação reduzida da elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Observe que se um ponto $P(x, y)$ pertence à elipse, então os pontos $(-x, y)$, $(x, -y)$, $(-x, -y)$ também pertencem a ela. Dessa forma, para estudarmos a equação em termos funcionais, basta restringirmos a elipse ao primeiro quadrante do sistema de coordenadas e a refletirmos, posteriormente, sobre os eixos Ox e Oy . A partir da equação da elipse, isolando y , obtemos:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

Assim, podemos chegar à função:

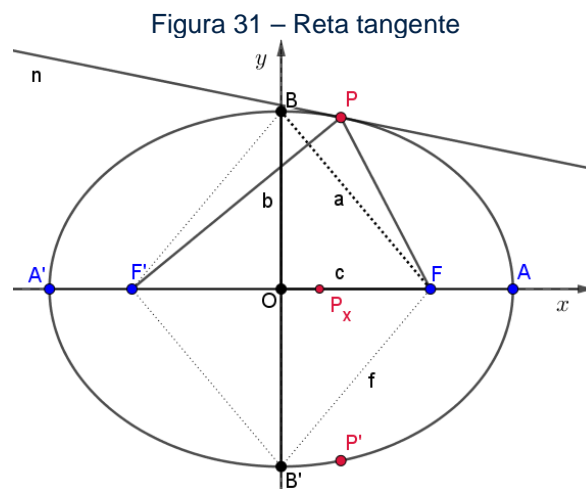
$$\begin{aligned} f: [0, a] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}. \end{aligned}$$

Dessa forma, podemos relacionar a curva, inicialmente construída utilizando a geometria sintética com a representação funcional da curva que representa a elipse. Esse é um caminho para que possamos relacionar ambas as concepções, Poncelet e Cauchy, uma vez que temos duas representações para o mesmo objeto.

ATIVIDADE 3:

Nessa atividade, o objetivo é relacionar, assim como na parábola, as duas perspectivas, sintética e algébrica, da curva. Novamente, utilizaremos o teorema de Poncelet sobre as tangentes, relacionando a continuidade da função com a curva, para possibilitar ao aluno fazer uma ponte entre as suas perspectivas de continuidades.

Construa a reta n tangente à elipse no ponto P .



Em seguida, construa a reta j passando por F' e P e também o segmento \overline{FP} . Calcule a medida dos ângulos formados entre as retas n e j e a medida do ângulo formado entre a reta n e o segmento \overline{FP} .

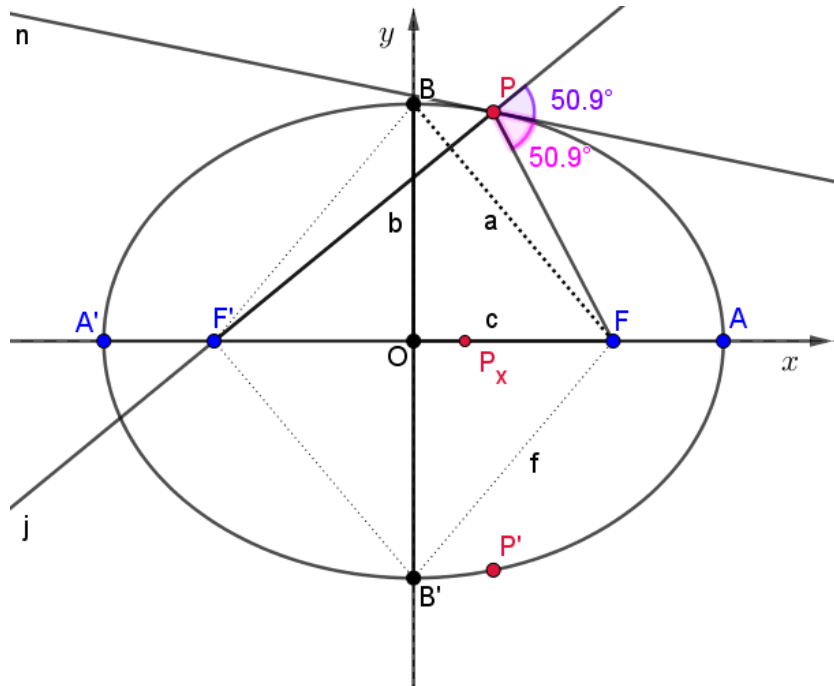
RESPONDA ÀS QUESTÕES:

8. O que você pode observar em relação às medidas dos ângulos calculados?
9. E em relação à reta n , o que podemos concluir?
10. Podemos afirmar que essa curva é contínua pelas concepções de Poncelet e de Cauchy?

POSSIBILIDADE DE DISCUSSÕES

Nesse ponto, observamos que a tangente n é a bissetriz do ângulo formado entre o segmento de reta \overline{FP} e a reta j .

Figura 32 – Reta bissetriz



Dessa forma, podemos afirmar que a elipse é uma curva contínua a partir da definição de Poncelet, pois ela mantém uma propriedade invariante: a reta n , passando por P é a bissetriz do ângulo formado pelo o seguimento \overline{FP} e a reta que passa por F' e P . A continuidade mostrada da bissetriz se confere em Poncelet pela reta tangente. E é isso que a relaciona com a continuidade de Cauchy, pois podemos verificar, mesmo restringindo uma parte da curva para se transformar em função, que em todo ponto existe uma tangente nas condições dadas, isto é, a curva é diferenciável, portanto, contínua. Uma vez que, toda função derivável ou diferenciável é contínua no ponto.

Analisamos o conceito de continuidade de Poncelet, muito ligado a geometria sintética. Fazendo a passagem para Cauchy, mostrando a complementaridade. Segundo D'Ambrósio (1975), entre as características da noção de limite, uma das mais importantes é o fato de que ele descreve o comportamento da função ao redor de um ponto, pertencente ou não ao domínio dessa função. Isto é, nas proximidades desse ponto, na sua vizinhança. Quando falamos desse estar próximo, estamos tratando da estrutura chamada Topologia. Nesse sentido, podemos trabalhar o conceito de continuidade, em relação a funções, também num conceito topológico.

Na concepção de Cauchy observamos o fato de que não precisamos representar graficamente uma função para saber se é ou não contínua. Entretanto, podemos apresentar a continuidade de função, também, da seguinte forma:

Seja f uma função real definida num subconjunto D contido em \mathbb{R} e seja a um ponto pertencente a D . Diz-se que a função f é contínua em a se e só se, qualquer que seja o número positivo δ existir um número ε , também positivo, tal que, sempre que x seja um ponto pertencente a D e verificar a condição $|x - a| < \varepsilon$, se tenha $|f(x) - f(a)| < \delta$.

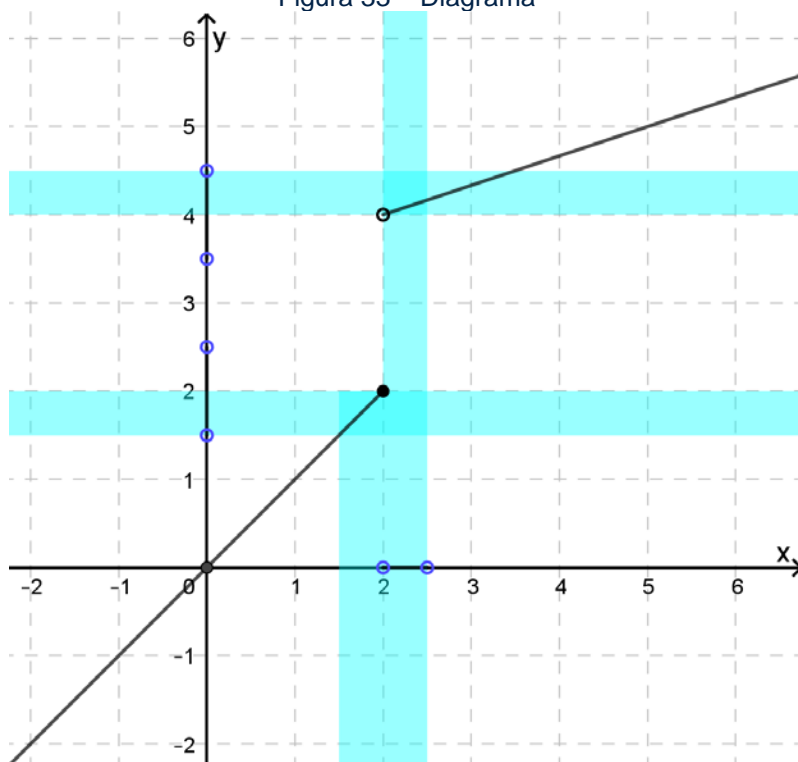
Neste caso, o diagrama é fundamental para tomada de ações e análise. A semântica aqui exige uma representação.

Por exemplo, vamos analisar a continuidade da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x; & x \leq 2 \\ \frac{x+10}{3}; & x > 2 \end{cases}, \text{ em } x = 2.$$

Pela primeira definição de continuidade $\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)\right)$, não vamos encontrar a necessidade de construir o diagrama e desenvolver estudos sobre ele. Já na definição topológica, esta construção se torna necessária. Note que estamos buscando intervalos abertos em torno da imagem $f(2) = 2$, que é imagem de algum intervalo aberto em torno de $x = 2$.

Figura 33 – Diagrama



No diagrama, é fácil perceber que indo de um lado para outro de 2, o comportamento da função muda, sua imagem apresenta um “buraco”. Não há uma continuidade na função, pois há intervalos em torno de $f(2) = 2$, isto é, na sua vizinhança, que não é imagem de algum intervalo em torno de $x = 2$.

De uma forma geral, uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua se a pré-imagem de qualquer intervalo aberto for uma união de intervalos abertos (ou o conjunto vazio). Esta é uma definição topológica.

Expressando em termos topológicos o conceito de limite, o conceito de continuidade fica apresentado automaticamente também em termos topológicos, pois a continuidade depende da noção de limite. O que estamos querendo com isto é dizer que o pensamento matemático não se encerra, ou seja, a base deste pensamento está na continuação da atividade.

Matemática não é lógica, pois temos sempre que construir conceitos. A evolução do conceito de continuidade, por exemplo, passou de propriedades da geometria, para um conceito algébrico e agora topológico. A matemática só foi traduzida para lógica, no intuito de ensiná-la em grande escala na sociedade.

CONCLUSÃO

Como falamos inicialmente, as atividades desse produto, podem ser adaptadas aos diferentes níveis de ensino. Para cada etapa de ensino ao qual o professor deseja aplicar, será necessário adaptar os níveis de aplicação, explorando os diferentes níveis conceituais. Por exemplo, nos anos finais do ensino fundamental o professor poderá explorar os diagramas e a dinâmica dos gráficos para trabalhar com os alunos a introdução às funções e também a construção e identificação de lugares geométricos. Outra possibilidade, no ensino médio, é a adaptação no estudo de funções, curvas e das cônicas. O professor pode explorar a construção da curva como função e como lugar geométrico, pode aplicar a complementaridade entre as diferentes representações e fazer a passagem da curva para um objeto algébrico, a função. Omitindo alguns conceitos mais complexos que serão melhor compreendidos em cursos de cálculo ou na formação de professores.

Destacamos ainda, a complementaridade entre a geometria e a aritmética aplicada ao conceito de continuidade de função. Otte (1990) afirma que o conhecimento não é algo absoluto, com uma estrutura fixa, de maneira que o concreto e o abstrato mudam continuamente de lugar. Definir um conceito é antes de qualquer coisa o desenvolver. Cada conceito tem, no contexto de seu desenvolvimento, diversas interpretações em diferentes contextos. Particularmente, em nosso caso, o conceito de continuidade muda dentro das duas perspectivas que estamos mostrando. Não é algo rígido, mas sim complementar.

Precisamos adotar um ponto de vista relacional para a interpretação do problema proposto “que confere aos objetos e às relações entre os objetos um status ontológico igual” (OTTE, 1990, p. 56–57, tradução nossa). Isso se faz necessário por conta do caráter duplo da função como um modelo de movimento, pois o aspecto contínuo do movimento não contradiz a perspectiva discreta.

Por meio das atividades apresentadas, dois pontos de vista diferentes são possíveis agora. A abordagem construtiva, parte do pressuposto que todos os objetos (pontos geométricos) são diferentes e, a partir desse pressuposto, tentamos construir todos os conceitos (continuidade) e todo o conhecimento. A abordagem construtiva visa identificar as propriedades invariantes em cada ponto, de forma que nenhum movimento é possível. A abordagem conceitual, ao contrário, tenta estabelecer a diferença de objetos por meio de conceitos. Em nossa abordagem, a perspectiva

construtiva, parte da diferença e da descrição, enquanto a abordagem conceitual mostra a existência de um ponto fixo individual. No entanto, não é capaz de identificá-lo sem a ajuda de cálculos construtivos. Isso nos leva a uma complementaridade no conceito de continuidade de funções.

Acreditamos que, é no processo complementar entre Experimentos Mentais e as definições formais na construção do pensamento sobre o conceito de continuidade, que o conhecimento matemático avança. Esta complementaridade se torna mais dinâmica por meio da observação possibilitada pela utilização de tecnologias digitais, como os softwares de geometria dinâmica, a destacar o GeoGebra. Esses softwares permitem termos uma visão e percepção da transformação do diagrama, oportunizando alcançar o conhecimento que surge a partir do sujeito, do objeto e da relação entre eles. O diagrama associado às tecnologias digitais muda a nossa relação com a semiótica e a relação entre meio e objeto, permitindo uma nova complementaridade de objeto e método nos aspectos construtivos.

Não se trata de identificar qual das concepções é a melhor, mas como Otte afirma em outro exemplo, mas que cabe aqui em nosso contexto, “as diferenças psicológicas das duas soluções diferentes são em menor importância. São apenas questões de gosto e estilo e, na verdade, exigem os mesmos tipos de capacidades cognitivas” (OTTE, 1990, p. 59, tradução nossa). Assim, nossa abordagem visa enfatizar os aspectos simétricos entre os conceitos de continuidade de Cauchy e Poncelet. “Complementaridade significa apenas diferença e relação simultaneamente” (OTTE, 1990, p. 60, tradução nossa).

Nosso objetivo com esse trabalho foi evidenciar esta complementaridade, identificando analogias que possam servir de base a uma nova proposta de ensino deste conteúdo. Implementando o uso de Experimentos Mentais como suporte para o desenvolvimento complementar deste conceito nas aulas de cálculo. De forma a ofertar um instrumento que possa ser reflexivo nesse processo. Contribuindo com um olhar, sob o aspecto construtivo, que a continuidade nos permite. Possibilitando professores e alunos construir significados para a continuidade a partir de lentes diferentes, mas de forma que ambas se complementem.

REFERÊNCIAS

- BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da matemática**. Tradução: Helena Castro. 3ª ed. São Paulo: Blucher, 2012.
- CARVALHO, B. DE A. **Desenho Geométrico**. 3ª ed. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 2005.
- CHAVES, J. A.; GRIMBERG, G. E. O Tratado Sobre As Propriedades Projetivas Das Figuras De Jean- Victor Poncelet: Elementos De Uma Gênese. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 14, n. 28, p. 85–106, 2014.
- COURANT, R.; ROBBINS, H. **O que é Matemática?** Tradução: Adalberto da Silva Brito. Rio de Janeiro: Ciência Moderna LTDA, 2000.
- CRUZ, W. J. DA. **Experimentos mentais e provas matemáticas formais**. São Paulo, SP: UNIVERSIDADE ANHANGUERA DE SÃO PAULO, 2015.
- CRUZ, W. J. DA. **Experimentos Mentais na Educação Matemática: Uma analogia com provas matemáticas formais**. 1ª ed. Curitiba - PR: Appris, 2018.
- CRUZ, W. J. DA. A semiótica e os experimentos mentais no ensino e na aprendizagem em matemática. **XIII ENEM**, n. jun, 2019.
- D'AMBRÓSIO, U. **Cálculo e Introdução à Análise**. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1975.
- OTTE, M. Space, complementarity, and “diagrammatic reasoning”. **Semiotica**, v. 2011, n. 186, p. 275–296, 2011.
- OTTE, M. F. Arithmetic and geometry: Some Remarks on the Concept of Complementarity. **Studies in Philosophy and Education**, n. 10, p. 37–62, 1990.
- PEIRCE, C. S. **Semiótica**. Tradução: José Teixeira Coelho. 3ª ed. São Paulo: Perspectiva, 2005.
- SANTAELLA, L. **Semiótica Aplicada**. 1ª ed. São Paulo, SP: Cengage Learning, 2002.

Se f é derivável num ponto x_0 de seu domínio, então f é contínua em x_0 .

Demonstração: Observe que $f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$. Aplicando-se

o limite quando $x \rightarrow x_0$ temos:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0).$$

Se f é derivável, então existe o limite $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, o qual é $f'(x_0)$. Assim,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

Portanto, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ o que define a continuidade de f nesse ponto.

■