O LaPEM-v

(LABORATÓRIO VIRTUAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA)

APRESENTAÇÃO E DICAS DE UTILIZAÇÃO NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA

BEATRIZ OLIVEIRA DOS SANTOS
MARCO ANTÔNIO ESCHER

| MATERIAIS | ATIVIDADES | JOGOS | CURSOS |

SUMÁRIO

MATERIAIS

ATIVIDADES

BIBLIOTECA

JOGOS

CURSOS

USANDO O LINK ABAIXO É POSSÍVEL VISUALIZAR ESTE ARQUIVO EM FORMATO DE REVISTA

https://www.flipsnack.com/belindasalles/produtoeducacional.html

APRESENTAÇÃO

Este é um material desenvolvido para divulgar o Laboratório Virtual de Pesquisa em Educação Matemática (LaPEM-v). O laboratório virtual é resultado de uma mistura entre as ideias de um laboratório (físico) com o uso das tecnologias. Assim, este laboratório virtual é inspirado no Laboratório de Ciências e Educação Matemática (LaCEM), da Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), ou seja, grande parte dos materiais e atividades que o compõem é a virtualização dos materiais e atividades que estão disponíveis no LaCEM.

A materialização desse laboratório e outras reflexões sobre o tema são parte de uma pesquisa vinculada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UFJF, cujo título da pesquisa desenvolvida é “As Relações Pedagógico-Metodológicas Vivenciadas entre Professores que Ensinam Matemática em um Laboratório Virtual”, que buscou analisar as contribuições do laboratório virtual para a formação continuada de professores que ensinam matemática.

O LaPEM-v pode ser acessado através do link <http://lapem-v.ice.ufjf.br/>.

Neste material, você encontrará como o LaPEM-v é composto (no dia de hoje, pois com certeza ele terá alterações e aprimoramentos, e ainda exemplos de atividades ali depositadas).

Acredita-se que ele poderá ser uma ótima alternativa para os professores apresentarem possibilidades para que seus alunos possam ser ativos no processo de ensino e aprendizagem, assim como todos que o visitarem possam também conhecer a Matemática de uma forma divertida.

Seja bem-vindo(a)!

COMO E QUANDO SURGIU O LaPEM-v

O LaPEM-v é um ambiente de pesquisa e desenvolvimento de atividades, materiais virtualmente manipuláveis e jogos, combinando a praticidade da tecnologia e a importância dos materiais concretos no processo de ensino e aprendizagem de Matemática. Além disso, o site disponibiliza vídeos e textos para consulta. O conteúdo do site é inspirado no Laboratório de Ciências e Educação Matemática (LaCEM) do Centro de Ciências/UFJF.

O LaCEM registra o início de suas atividades no dia 25 de abril de 2018, mas a ideia de um laboratório virtual que pudesse simular ações que são feitas em materiais didáticos conhecidos e outros objetos concretos surgiu durante a elaboração do projeto apresentado na seleção do mestrado.

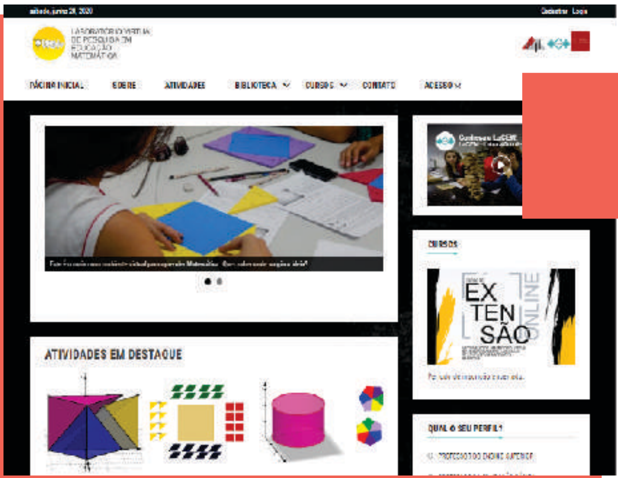
Devido ao envolvimento para a construção e organização do LaCEM, juntamente com o Grupo de Pesquisa do mestrado, é que se optou por escolhê-lo como laboratório inspirador para as atividades do LaPEM-v.

Como poucas escolas/universidades possuem laboratórios, muitas vezes, a depender da localização do professor, o deslocamento até o laboratório físico é inviável. Este laboratório virtual é uma mistura entre a ideia de um laboratório físico e as tecnologias, ou seja, os recursos do laboratório são virtualizados e poderá ser acessado por um endereço eletrônico.

O ambiente virtual é mais um recurso para o processo de ensino e aprendizagem. Os materiais disponíveis já estão sendo desenvolvidos e testados em algumas salas de aula. Em relato de experiência, percebe-se que os alunos se sentem mais motivados na forma como a aula está sendo conduzida quando são utilizados os materiais do laboratório virtual.

O QUE ENCONTRAR NO LaPEM-v

No laboratório virtual, encontram-se vários
recursos, como a página inicial,
biblioteca, cursos, atividades,
materiais, enquete, jogos e fórum de discussão.
Alguns desses recursos
são organizados em páginas *web* e
plugins.

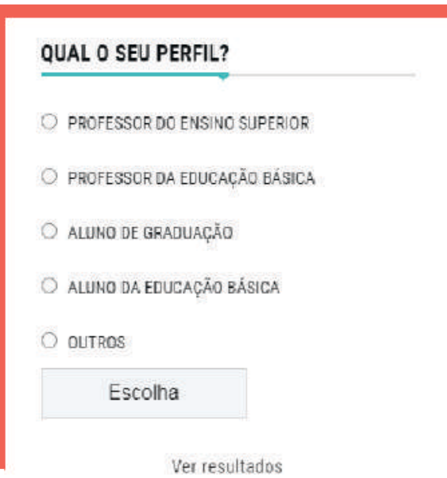


PÁGINA INICIAL

A Página Inicial é usada para uma apresentação geral do laboratório virtual. A barra central direciona o usuário para as páginas SOBRE, ATIVIDADES, MATERIAIS, CURSOS, BIBLIOTECA e CONTATO. Também nela, encontram-se duas *slidebar*: uma que é utilizada para divulgar informações relevantes e outra que é uma exposição de atividades que estão em destaque no laboratório virtual.

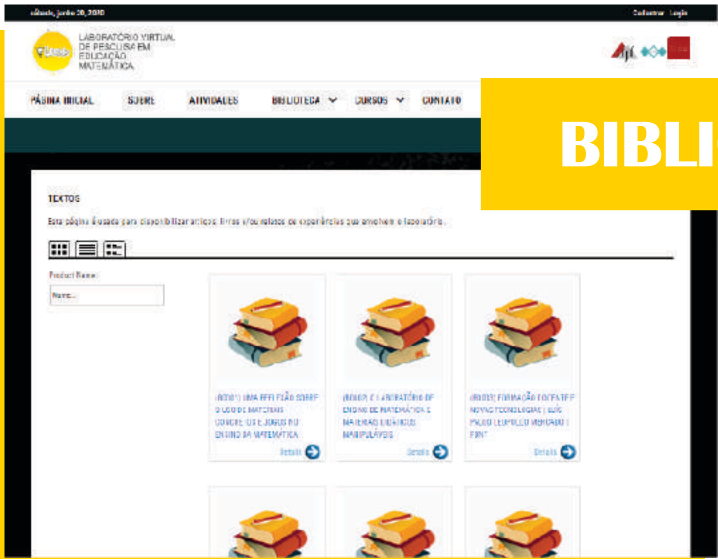
Já na barra lateral direita, encontram-se um vídeo de atividades que acontecem no Laboratório de Ciências e Educação Matemática (LaCEM) e uma enquete para identificar o perfil dos usuários. E, acima, existem três logomarcas que são *links* para o site da UFJF, do LaCEM e do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEM).

ENQUETES



O objetivo de colocar enquetes no Laboratório Virtual está relacionado ao interesse de coletar informações sobre os usuários do *site*. Atualmente, há uma enquete na lateral direita da PÁGINA INICIAL. Esta enquete foi inserida para identificar o perfil dos usuários que acessam o *site*. Como possíveis perfis, as opções são: Professor de Graduação; Professor da Educação Básica; Aluno de Graduação; Aluno da Educação Básica.

Pretende-se inserir outras enquetes e, posteriormente, divulgar o resultado dos dados coletados em determinados períodos.



BIBLIOTECA VIRTUAL

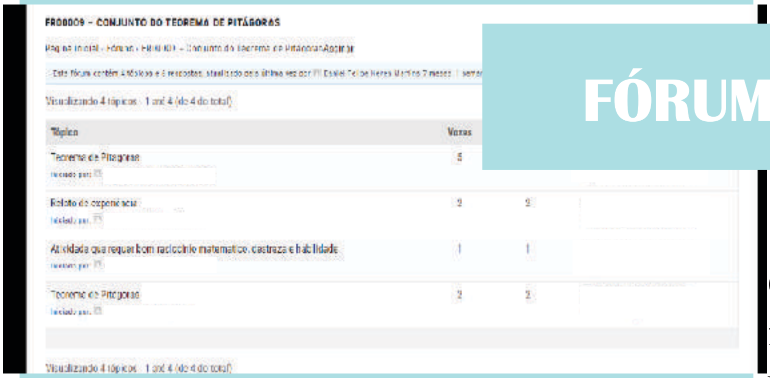
A página composta por uma coleção de livros, artigos e relatos de experiências foi denominada Biblioteca Virtual. O objetivo deste local é disponibilizar documentos que contribuam para a aquisição de conhecimento sobre o uso de laboratórios, materiais didáticos, tecnologias, manipulação de objetos etc.

Para acessar a biblioteca virtual, basta clicar no *link* que está na barra central do *site*.

CURSOS

A página de divulgação de cursos é um espaço reservado aos professores interessados em conhecer e discutir, de forma compartilhada, com outros professores, o laboratório virtual e seus recursos. O formato dos minicursos promovidos poderá ser presencial ou semipresencial e eles serão organizados em numeração e tema.

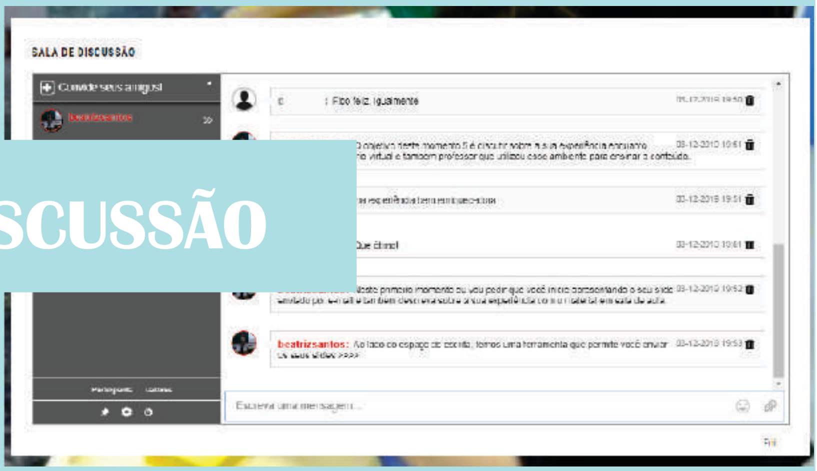
Para participar dos minicursos, será necessário que os usuários façam um cadastro anteriormente.



FÓRUM DE DISCUSSÃO

O Fórum de Discussões é uma ferramenta a ser usada como um local onde os professores relatem suas experiências em sala de aula quando usaram uma determinada atividade. O intuito de disponibilizar este momento está relacionado ao interesse em obter o *feedback* das experiências e sugestões de melhorias para a atividade.

Para o usuário participar das discussões, ele precisa fazer um cadastro no *site* anteriormente. O *link* para cada fórum encontra-se na atividade que a ele está relacionada.



SALA DE DISCUSSÃO

As Salas de Discussão são usadas para os participantes se encontrarem em momentos síncronos. Nelas, os usuários podem enviar mensagens de textos, *emoticons* (para uma comunicação paralinguística), enviar anexos (fotos e outros arquivos), iniciar um bate-papo particular e visualizar quem está *online*.

ATIVIDADES

Assim como para os materiais e jogos, haverá um link para o usuário acessar as atividades. Devido à possibilidade de duas ou mais atividades usarem o mesmo material optou-se por nomear e numerar cada uma delas. Para facilitar a busca pela atividade, o usuário poderá usar o código, nome ou conteúdo.

Nesta parte do texto, será feito o detalhamento de quatro das vinte e sete atividades que fazem parte do LaPEM-v quando da produção deste material.

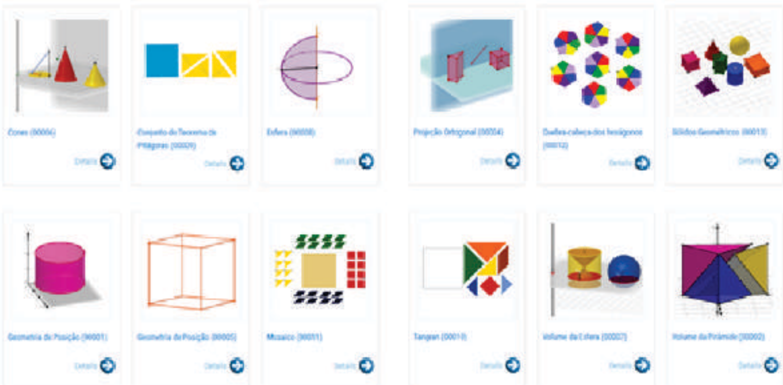
De um modo geral, em todas as atividades há:

1. um arquivo texto com instruções (ou questões) que o aluno poderá imprimir (recomendado) ou abrir em uma aba diferente da janela de manipulação virtual;
2. um arquivo texto com orientações e sugestões para o professor;
3. um ambiente de manipulação;
4. um espaço para discussão sobre a experiência com os materiais da atividade (fórum).

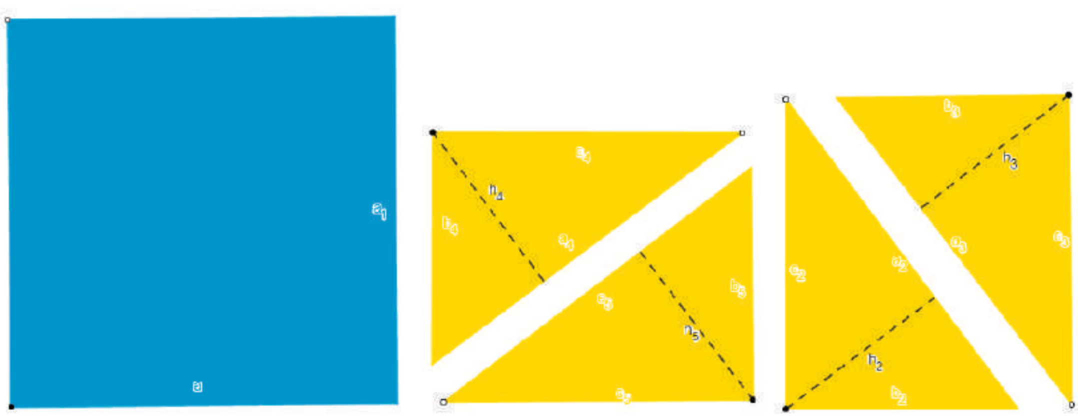
Atualmente, o laboratório virtual possui 16 atividades, são elas: Cones, Conjunto do Teorema de Pitágoras, Esfera, Geometria de Posição I, Geometria de Posição II, Mosaico, Pirâmides Semelhantes, Prismas (definição, elementos e classificação), Prismas (Área Total), Projeção Ortogonal, Quebra-cabeça dos Hexágonos, Sólidos Geométricos, Tangran, Volume da Esfera, Volume da Pirâmide e Volume de um Sólido.

As atividades aqui apresentadas como exemplo serão:

- Conjunto do Teorema de Pitágoras;
- Poliedros (convexos e não convexos) e Relação de Euler;
- Volume de sólidos;
- Função do 2° Grau: coeficientes.



CONJUNTO TEOREMA DE PITÁGORAS



O conjunto é usado para mostrar a validade do Teorema de Pitágoras usando a ideia de área de figuras num ambiente de geometria dinâmica. Na janela de manipulação, o usuário se depara com quatro triângulos congruentes (de medidas a, b e c) e 1 quadrado (de medidas a). Partindo do pressuposto que ele saiba calcular a área de figuras, pedir que ele faça o cálculo da área de todas as figuras disponibilizadas. Ao final, o usuário é desafiado a formar um quadrado com as cinco peças e, em seguida, calcular a área desse quadrado maior (usar propriedade distributiva), como a área da segunda situação é construída com os mesmos materiais, elas são congruentes. Ao resolver a expressão algébrica, o usuário chegará à expressão do Teorema de Pitágoras.
Os materiais de orientação para o aluno e para o professor podem ser acessados em <http://lapem-v.ice.ufjf.br/?page_id=47&SingleProduct=1>.

TEOREMA DE PITÁGORAS
(A00009)

Veja que nesta janela de manipulação tem um quadrado (azul) e 4 triângulos (amarelos). Nesta atividade iremos usar o conhecimento de cálculo de área de figuras planas para mostrar o Teorema de Pitágoras.

Um quadrado pode ser definido como uma figura geométrica formada por quadro segmentos (chamados lados) e ângulos congruentes. Já o triângulo é uma figura, também geométrica, formada por três segmentos de reta.

Na história Pitágoras foi um importante matemático e filósofo grego devido as várias descobertas ao longo de sua vida. Quanto ao teorema, ele afirma que o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos, ou seja, que $a^2 = b^2 + c^2$ (considerando a hipotenusa e b, c os catetos).

É possível chegar nesse resultado calculando áreas e para isso, você precisa relembrar como calcular a área de:

- um quadrado: __________________ - um triângulo: __________________

Você se lembra da resolução de um trinômio do quadrado perfeito? Porque iremos precisar desse conhecimento.

Vamos ao que interessa!

Vou pedir que você forme um quadrado usando todas as peças do ambiente de manipulação. Conseguiu?______________.

Agora, você calcula a área desse quadrado que acabou de formar. Qual foi o resultado da área que calculou? ___________________________.

Depois que calcular a área desse quadrado maior, vou pedir que você faça o cálculo da área de cada uma das figuras do ambiente de manipulação.

ÁREA DO QUADRADO AZUL: ____

ÁREA DO TRIÂNGULO AMARELO (1): ____

ÁREA DO TRIÂNGULO AMARELO (2): ____

ÁREA DO TRIÂNGULO AMARELO (3): ____

ÁREA DO TRIÂNGULO AMARELO (4): ____

Você percebe que a soma das áreas de todas as figuras é igual a área do quadrado maior? ____

Vou pedir que você expresse a sua ideia matematicamente: ____

Se percebeu (manipulando os objetos virtuais) que as áreas são iguais, resolva a equação de modo que se obtenha $a^2 = b^2 + c^2$.

Sendo assim, usando o conhecimento de área de uma figura plana, mostramos que é válida a definição do Teorema de Pitágoras.

TEOREMA DE PITÁGORAS
(P00009)

Professor, esta é apenas uma sugestão de como usar os materiais do LaPEM-v para discutir Projeção Ortogonal, você tem liberdade de fazer alterações se achar necessário. Além disso, gostaria de convidá-lo a participar do nosso espaço de discussões sobre as experiências com as atividades. Lembrando que esta atividade é planejada para metade de 1 aula (com 50 minutos cada).

Na janela de manipulação virtual encontra-se um quadrado e quatro triângulos retângulos. Nesta atividade, inicialmente relate um pouco sobre Pitágoras e o Teorema de Pitágoras. Porque a ideia é mostrar que $a^2 = b^2 + c^2$ usando o conhecimento de área.

Após falar sobre ele e o teorema, é interessante que questione os alunos como que calcula a área das figuras planas que estão no ambiente de manipulação. E também, verificar se eles lembram como resolver um trinômio do quadrado perfeito.

Em seguida, pedir que os alunos formem um quadrado utilizando todas as peças do ambiente de manipulação. Dê um tempo para que eles tentem bastante até uma boa parte da turma conseguir. E depois que eles formarem o quadrado, solicite-os a calcular a área desse quadrado que acabou de formar usando as informações contidas no material (a, b, c).

Veja se todos conseguiram calcular!

Agora, eles precisam calcular a área de cada uma das figuras, ou seja, do quadrado menor e dos quatro triângulos.

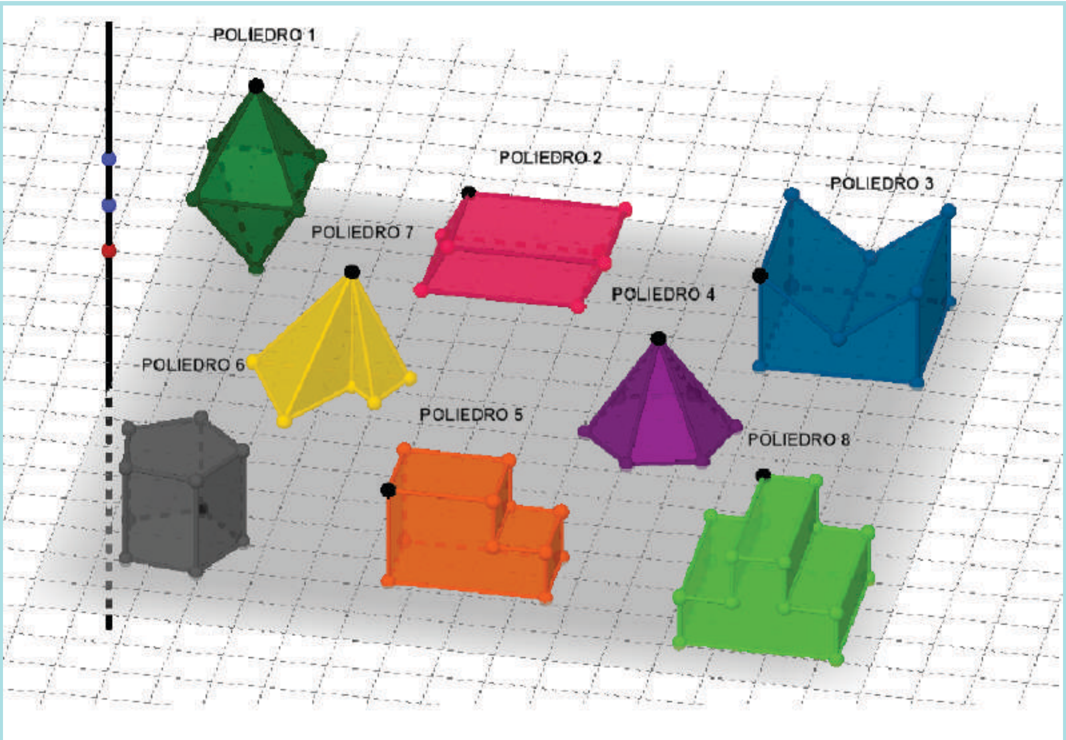
Quando finalizarem, pergunte-os se conseguem perceber que a soma das áreas de todas as figuras é igual a área do quadrado maior. Se a resposta for positiva, peça que eles expressem isso matematicamente. Em seguida, eles precisam manipular até encontrar $a^2 = b^2 + c^2$.

Enfim, por meio do cálculo de área mostrou para eles que é válida a definição do Teorema de Pitágoras.

SUGESTÃO:

Antes de levar a atividade para sala de aula utilize o material do aluno para experienciar a manipulação virtual dos materiais.

POLIEDROS (CONVEXOS E NÃO CONVEXOS) E RELAÇÃO DE EULER



Esta atividade é usada quando se pretende compreender a diferença entre poliedros convexos e não convexos. No ambiente de manipulação, encontram-se oito poliedros diferentes e um dos objetivos é compreender a definição de cada tipo de poliedro manipulando um plano que é paralelo ao plano da base deles. Em seguida, iniciando uma discussão sobre a quantidade de arestas, vértices e faces, o usuário irá verificar para qual dos tipos de poliedros a Relação de Euler é sempre válida.

Os materiais de orientação para o aluno e para o professor podem ser acessados em <http://lapem-v.ice.ufjf.br/?page_id=47&SingleProduct=24>.

POLIEDROS CONVEXOS, NÃO CONVEXOS E RELAÇÃO DE EULER (A00017)

Nesta janela de manipulação encontra-se 8 poliedros. Caso tenha interesse, pode mover os sólidos com a ferramenta mouse ( ), selecione o ponto preto e arraste. O ponto vermelho será usado para mover o plano paralelo a face que é base dos sólidos.

Esta atividade propõe discutir a diferença entre poliedros convexos e poliedros não convexos. Em seguida, será verificada a validade da Relação de Euler.

Observe os poliedros 2, 5, 6 e 8. Usando o mouse ( ) selecione o ponto vermelho e mova-o até o primeiro ponto azul (A_1).

- O que você consegue perceber comparando a seleção das faces do poliedro 2 e 5? ____.

Agora, mova o ponto vermelho até o segundo ponto azul (B_1).

- O que percebe em relação aos poliedros 6 e 8? ________________________________.

Quando você moveu o plano paralelo até os determinados pontos, nota-se que a intercessão dele com o sólido é uma das faces. Este mesmo plano, em cada situação, deixa algumas faces dos poliedros 5 e 8 em semiespaços opostos (semiespaço é uma parte do espaço que foi divido pelo plano). Quanto aos poliedros 2 e 6, isso não ocorre, as outras faces do sólido sempre estão no mesmo semiespaço. A partir das observações, temos que os **poliedros convexos** são aqueles em que qualquer plano que contenha uma face deixa as demais faces no mesmo semiespaço. E os **poliedros não convexos** são aqueles que se um plano que contém uma das faces não deixa as demais faces do sólido no mesmo semiespaço.

Usando a tabela abaixo, escreva nos respectivos lugares os poliedros convexos e os poliedros não convexos. Em seguida, faça a contagem do número de vértices (V), arestas (A) e faces (F).

POLIEDROS CONVEXOS	V	A	F

POLIEDROS NÃO CONVEXOS	V	A	F

Nesta etapa da atividade, usaremos os conceitos vistos acima para verificar a relação de Euler. O matemático e suíço Leonhard Euler (1707-1783) mostrou a relação entre os vértices, as arestas e as faces de um poliedro. Segundo ele,

V-A+F=2

A partir dos dados coletados, verifique se essa relação é válida para qualquer poliedro, convexos ou não convexo.

POLIEDROS CONVEXOS	V – A + F

POLIEDROS CONVEXOS	V - A + F

A Relação de Euler é válida para todos os poliedros ______________________ (convexos/não convexos).

Elabore um enunciado que afirma as observações sobre os poliedros e a relação de Euler:____

____

____.

POLIEDROS CONVEXOS, NÃO CONVEXOS E RELAÇÃO DE EULER
(P00017)

Professor, esta é apenas uma sugestão de como usar os materiais do LaPEM-v para desenvolvimento do raciocínio lógico, você tem liberdade de fazer as alterações se achar necessário. Além disso, gostaria de convidá-lo a participar do nosso espaço de discussões sobre as experiências com as atividades.

Esta atividade propõe identificar os poliedros convexos e/ou não convexos. Perceba que existem oito poliedros no ambiente de manipulação.

Antes de iniciar a atividade sugerimos enfatizar que existe um espaço paralelo à face inferior de todos os poliedros e ele pode ser movido usando o ponto vermelho. Em seguida, mova o ponto até o primeiro ponto azul (A_1) e pergunte a turma o que eles conseguem perceber ao comparar as faces selecionadas do poliedro 2 e 5. Em um mesmo processo, mova o ponto vermelho até o segundo ponto azul (B_1) fazendo a mesma pergunta, porém analise os poliedros 6 e 8.

Consequentemente os alunos irão perceber que existe uma relação com as faces selecionadas dos poliedros 2 e 6, como também dos poliedros 5 e 8. Neste momento apresente uma definição mais formal dessa relação. Porque, sabe-se que os **poliedros convexos** são aqueles em que qualquer plano que contenha uma face deixa as demais faces no mesmo semiespaço. E o **poliedro não convexo** é aquele que existe um plano que contém uma face, mas deixa as demais faces em outros semiespaços opostos.

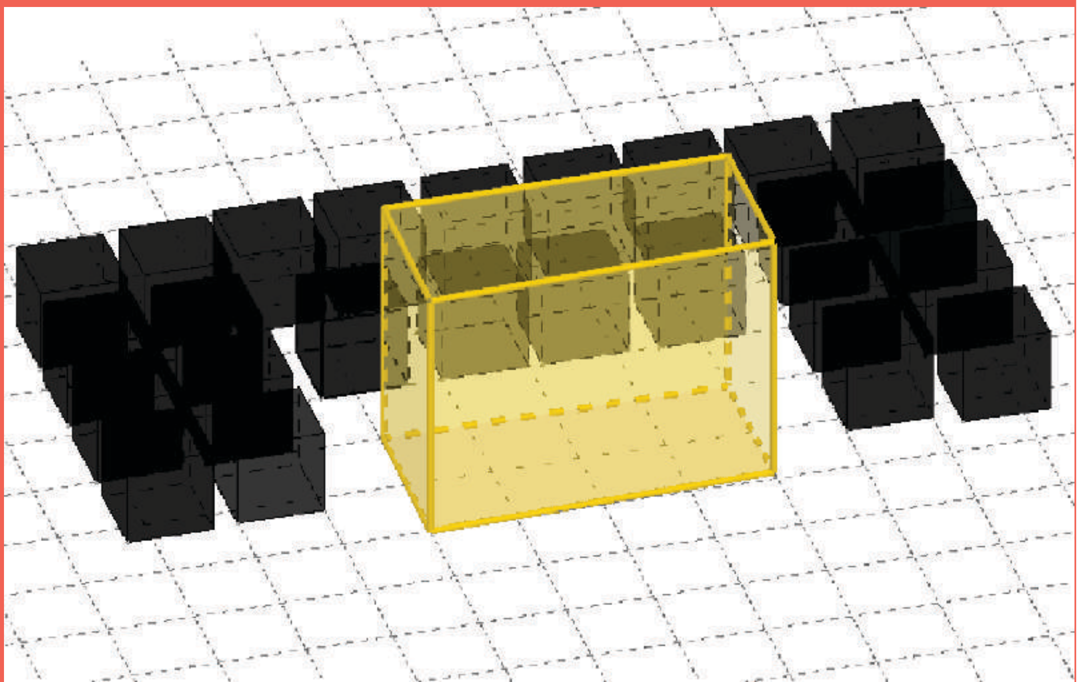
Depois, pedir que os alunos (usando uma tabela) organizem a quantidade de vértices e arestas. Em seguida, fale um pouco sobre a **Relação de Euler** e pede que eles verifiquem se ela é válida a partir da fórmula $V - C + F = 2$. Porque, com isso eles irão perceber que a relação de Euler é válida para todos os poliedros convexos e para alguns não convexos.

Por fim, pode solicitar que eles façam um pequeno enunciado que afirma as observações sobre os poliedros e a relação de Euler.

SUGESTÃO:

Antes de levar a atividade para sala de aula utilize o material do aluno para experienciar a manipulação virtual dos materiais.

VOLUME DE SÓLIDOS



Esta atividade inicia com a definição de capacidade, ou seja, um questionamento de quantos cubos cabem dentro de uma caixa. A ideia de capacidade está relacionada com o volume. O usuário é convidado a colocar, de forma organizada, todos os cubos dentro da caixa e contar quantos couberam até preencher. Em uma discussão, ele percebe que a quantidade que cabe dentro da caixa está relacionada com a quantidade que cabe no fundo multiplicada pela quantidade que cabe se empilhar de cima para baixo.
Os materiais de orientação para o aluno e para o professor podem ser acessados em <http://lapem-v.ice.ufjf.br/?page_id=47&SingleProduct=23>.

VOLUME DE UM SÓLIDO
(A00016)

Nesta janela de manipulação encontra-se um paralelepípedo (que nos remete a uma caixa) e alguns cubos. Para mover os cubos usando a ferramenta mouse ( ) você precisa clicar uma vez no vértice inferior esquerdo do cubo e com isso verá um comando de setas que direciona para frente, trás e lados ( ) e se clicar mais de uma vez sobre este vértice irá ver um comando de setas direcionando para cima ou para baixo ( ).

Quando estamos falando de volume nos referimos a capacidade que um sólido comporta. Mas podemos chegar ao conceito de que volume é a medida da região do espaço limitada por uma superfície. Se eu perguntar quantos cubos cabem dentro do paralelepípedo, você saberia responder? ___________.

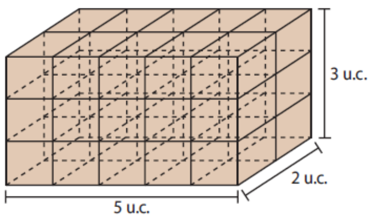
Você pode usar o mouse para mover todos os cubos para dentro do paralelepípedo e assim me responder. Quantos cubos cabem dentro dele?____________________.

Gostaria de saber se existe outra forma de determinar a quantidade de cubos que cabem no interior do sólido? __________________.

O que você pensou? ____.

Observe uma representação semelhante ao que há no ambiente de manipulação.

Dentro deste sólido cabem 30 cubos unitários e por isso dizemos que o volume dele é $30(u.c)^3$.



Considerando a medida da largura, comprimento e altura, o volume pode ser obtido ao calcular

$$(5\ u.c.).(2\ u.c.).(3\ u.c.) = 30(u.c.)^3$$

Conhecendo as três dimensões a, b e c de um paralelepípedo, o seu volume pode ser dado por

$$V = a.b.c$$

Percebe-se que $a.b$ é a área da base (A_b) e c a medida da altura (h), então o volume é

$$V = A_b.h$$

VOLUME DE UM SÓLIDO
(P00016)

Professor, esta é apenas uma sugestão de como usar os materiais do LaPEM-v para desenvolvimento do raciocínio lógico, você tem liberdade de fazer as alterações se achar necessário. Além disso, gostaria de convidá-lo a participar do nosso espaço de discussões sobre as experiências com as atividades.

Nesta atividade pretende-se introduzir a ideia do cálculo de volume dos sólidos geométricos e para isto foi colocado um paralelepípedo e vários cubos no ambiente de manipulação. É relevante relacionar a ideia de volume com a capacidade e em seguida questionar o aluno sobre a quantidade de cubos unitários que cabem dentro do paralelepípedo. Enquanto eles pensam, você vai preenchendo o sólido com os cubos fazendo uma contagem de um por um.

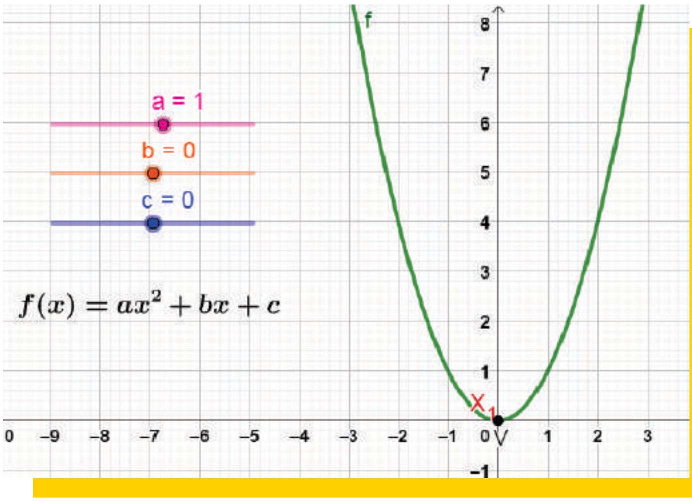
Após resposta, pergunte aos alunos se existe outra forma de determinar a quantidade de cubos que cabem dentro do sólido. Talvez alguns irão responder que é só multiplicar a quantidade que cabe em baixo (área da base) com a quantidade que cabe na altura.

Por fim, relacionar esta multiplicação falando sobre o cálculo usando a ideia de área da base e altura do sólido.

SUGESTÃO:

Antes de levar a atividade para sala de aula utilize o material do aluno para experienciar a manipulação virtual dos materiais.

FUNÇÃO DO 2° GRAU



Esta atividade inicia com a definição da função do segundo grau, que é apresentada no início do material, assim como os coeficientes que fazem parte da lei geral. Em seguida, são dados valores para os coeficientes e é preciso manipular os controles deslizantes do ambiente de manipulação para visualizar o gráfico. A partir da manipulação dos controles deslizantes e analisando o gráfico no ambiente de manipulação, o usuário pode chegar a compreender como a concavidade da parábola modifica de acordo com o sinal de um dos coeficientes, o ponto que a parábola intercepta o eixo y, e também se ela intercepta no ramo crescente ou decrescente, assim, ele percebe a modificação do gráfico de acordo com o valor dos outros coeficientes.

Apresentando a fórmula de Bhaskara e considerando o valor de Δ (delta), é possível visualizar e compreender quando a função irá interceptar o eixo x em dois pontos, um ponto ou em nenhum ponto. Em seguida, é apresentado como determinar o valor do vértice da parábola, e também perceber se o valor de y do ponto é o valor máximo ou o valor mínimo. Por fim, usando todo o conhecimento adquirido com os experimentos acima, o usuário faz um estudo sobre o momento em que uma parábola cresce ou decresce.

Os materiais de orientação para o aluno e para o professor podem ser acessados em <http://lapem-v.ice.ufjf.br/?page_id=47&SingleProduct=27>.

FUNÇÃO DO 2° GRAU – Etapa 1
(A00020)

Uma função do segundo grau é uma função que o gráfico é uma parábola como está visualizando no ambiente de manipulação virtual. No ambiente também possui três controles deslizantes que são usados para variar os coeficientes em 1 unidade. O controle deslizante **a** (na cor rosa) é usado quando se pretende variar o coeficiente x^2, o **b** (na cor laranja) que serve para variar o coeficiente de x e o **c** (na cor azul). Já os pontos vermelhos são para identificar quando o gráfico da função intercepta o eixo x, o ponto azul é para identificar quando o gráfico intercepta o eixo y e o ponto preto identifica o vértice da parábola.
Definindo, a função do segundo grau é qualquer função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por uma lei da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ em que $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.
Agora, iremos analisar as mudanças que ocorrem no gráfico da função quando variamos os valores de a, b e c.
No ambiente de manipulação temos que a lei da função do gráfico é $f(x) = x^2$, porque $a = 1$, $b = 0$ e $c = 0$.

Agora, determine no ambiente a função $f(x) = x^2 - 3x - 1$. Assim, $a =$ ___ , $b =$ ___ e $c =$ ___.
Determine a função $f(x) =$ ___________. Sendo $a = 1$, $b = -5$ e $c = 6$.
$f(x) =$ ___________. Sendo $a = -1$, $b = -3$ e $c = -1$.
$f(x) =$ ___________. Sendo $a = -4$, $b = 0$ e $c = 1$.

Observe que houve uma mudança no gráfico quando alteramos o sinal de a, porque os outros valores mantêm. Isso acontece porque se a positivo ($a > 0$) dizemos que o gráfico da função tem concavidade para cima e se a é negativo ($a < 0$)o gráfico da função tem concavidade para baixo.
Abaixo escreva leis que definem funções com gráficos que tem:

Concavidade para cima	Concavidade para baixo
_______________________________	_______________________________
_______________________________	_______________________________

O que acontece com o gráfico da função se $a = 0$?_______________________________________.
Vejamos agora as mudanças que ocorrem quando alteramos o sinal de b.
Coloque o valor de a sendo 1 e o valor de c igual a 2, depois observe as mudanças a partir do ponto azul. Quanto ao valor de b coloque 5, em seguida $b = 0$ e $b = -5$.
No primeiro valor atribuído a b ($b > 0$), a parábola intercepta o $eixo\ y$ no ramo crescente ou decrescente? ___________________________.
Quando $b = 0$, a parábola intercepta o $eixo\ y$ no vértice.
Já quanto ao segundo valor ($b < 0$), a parábola intercepta o $eixo\ y$ no ramo crescente ou decrescente? ___________________________.

Elabore um pequeno texto sobre o que observou com relação a variação do coeficiente b.
____
____

Sejam as funções $f(x) = x^2 - 5x + 3$ e $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$. Você consegue perceber que o valor de y do ponto que a função intercepta o eixo y é o mesmo que o valor de c da lei da função? _____.
Agora, determine a lei de duas funções, uma que o gráfico intercepte o eixo y em $(0, -2)$ e outra em $(0,4)$:

_________________________   _________________________

FUNÇÃO DO 2° GRAU – Etapa 2
(A00020)

As raízes de uma função são identificadas pelo momento em que o gráfico intercepta o $eixo\ x$, ou seja, pelos pontos vermelhos, x_1e x_2. Quando o gráfico intercepta o $eixo\ x$, temos que $y = 0$. Logo, $f(x) = 0$. Por se tratar uma função do segundo grau, como solução de $f(x) = 0$ serão encontrados dois valores para x e eles podem ser iguais, diferentes ou até podem não existir e isso depende dos valores que encontrar para Δ.

Para calcular o valor de cada uma das raízes, você poderá usar a fórmula de Bhaskara apresentada abaixo.

$$\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

O valor de Δ é identificado a partir de $b^2 - 4.a.c$, ou seja, $\Delta = b^2 - 4.a.c$.

Quando o valor Δ é negativo

Nota-se que no conjunto dos números reais não existe a raiz quadrada de um valor negativo (exemplo: $\sqrt{-3}$). Sendo assim, as funções não terão raízes se $\Delta < 0$. Observe o gráfico de $f(x) = x^2 - 2x + 3$, percebe que esta função não tem raiz?____. Porque você não vê os pontos vermelhos. A partir da função dada, o valor de $\Delta =$ ____. O mesmo acontece quando $g(x) = -2x^2 + x - 1$. Qual é o valor de Δ? ___.

Quando o valor Δ é nulo

As funções que determinam um valor de $\Delta = 0$ possuem uma raiz real. Observe no ambiente de manipulação virtual o comportamento da função $h(x) = x^2 + 2x + 1$, só tem um ponto vermelho. Calcule o valor de Δ. Ele é igual a zero? _____. Agora, manipulando os controles deslizantes de a, b e c, determine a lei de uma função que tem apenas uma única raiz real:______________________________.

Quando o valor Δ é positivo

No ambiente de manipulação determine o gráfico de uma função com duas raízes reais e distintas:_____________________. Qual é o valor de Δ?____________. O valor de Δ é positivo, negativo ou nulo?_______________. Quando uma função determina o valor de $\Delta > 0$, significa que ela vai apresentar duas raízes reais e distintas, veja para $t(x) = x^2 - 5x + 6$.

Em seguida, você irá preencher a tabela com a representação de um gráfico de acordo o valor de a e Δ.

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$	________________	________________	 ________________
$a < 0$	________________	________________	________________

FUNÇÃO DO 2° GRAU – Etapa 3
(A00020)

No ambiente de manipulação virtual encontra-se o ponto V, este ponto é denominado o vértice da parábola e a partir dele é possível identificar alguns comportamentos da função.

Conhecendo os coeficientes da lei da função, as coordenadas do vértice, $V(x_v, y_v)$, podem ser calculadas de acordo as seguintes expressões.

$$\boldsymbol{x_v = -\frac{b}{2a}} \qquad \boldsymbol{y_v = -\frac{\Delta}{4a}}$$

Seja $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Qual é o valor das raízes? $x_1 =$ ____, $x_2 =$ ____. E o valor do x_v? ________.

$g(x) = -3x^2 + 6x$. Qual é o valor d x_v? ______. Qual é o valor das raízes? $x_1 =$ ____, $x_2 =$ ____.

É possível identificar uma relação entre a distância de x_1 e x_v, com a distância x_2 e x_v? Relate sobre isso.

____
____.

O x_v é a média aritmética das raízes da função quadrática, se existirem. Mas, independente da existência das raízes, a partir do valor do vértice é possível determinar um eixo de simetria da parábola. Assim como, o y_v determina o valor máximo ou o valor mínimo da parábola.

Seja $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Qual é o valor do y_v? ________. Você consegue perceber que não há nenhum outro valor y relacionado com algum x que seja menor do que y_v?________.

$g(x) = -3x^2 + 6x$. Qual é o valor d x_v? ______. Você consegue perceber que não há nenhum outro valor y relacionado com algum x que seja maior do que y_v?________.

Uma função tem um valor máximo ou um valor mínimo a depender da concavidade da parábola, ou seja:

- Se $a > 0$, temos que y_v é o valor mínimo.
- Se $a < 0$, temos que y_v é o valor máximo.

Agora, usando os controles deslizantes determine funções que possuem:

Valor máximo	Valor mínimo
______________________________	______________________________
______________________________	______________________________

A função quadrática ora é crescente e ora é decrescente e esta análise pode ser feita a partir do vértice. Sabe-se que:

- A função está crescendo se $x_1 < x_2$ e $f(x_1) < f(x_2)$
- A função está decrescendo se $x_1 < x_2$ e $f(x_1) > f(x_2)$

Observe no ambiente de manipulação a função $f(x) = x^2 - 2x - 3$. No intervalo $]-\infty, 1[$ a função está ________________ e no intervalo $]1, +\infty[$ a função está ________________ .

Dê o exemplo de outra função que tem o mesmo comportamento, primeiro decresce e depois cresce:______________________________.

Agora, veja a função $g(x) = -3x^2 - 6x$. No intervalo $]-\infty, -1[$ a função está crescendo e no intervalo $]-1, +\infty[$ a função está decrescendo.

FUNÇÃO DO 2° GRAU
(P00020)

Professor, esta é apenas uma sugestão de como usar os materiais do LaPEM-v para desenvolvimento do raciocínio lógico, você tem liberdade de fazer as alterações se achar necessário. Além disso, gostaria de convidá-lo a participar do nosso espaço de discussões sobre as experiências com as atividades.

ETAPA 1

Inicialmente falar dos controles deslizantes, ou seja, que a é o coeficiente de x^2, b de x e o c. A ideia é que eles compreendam que cada um dos coeficientes influencia no modo como a função irá comportar. Também, falar que os pontos vermelhos identificam quando o gráfico intercepta o eixo x, o ponto azul identifica a intercessão com o eixo y e o ponto preto identifica o vértice da parábola.

Após definir a função do segundo grau comece a analisar o comportamento do gráfico da função quando variamos o valor a. Sendo assim, determine no ambiente de manipulação uma função de lei $f(x) = x^2 - 3x - 1$ e solicite que os alunos identifiquem o valor de a, b e c desta função. Faça o mesmo com a função em que $a = -1$, $b = -3$ e $c = -1$.

Agora discuta sobre a função em que o gráfico possui concavidade para cima e para baixo com relação ao sinal de a. Depois, solicite que os alunos deem o exemplo de leis de funções com concavidade para cima ou para baixo.

O segundo passo é analisar as mudanças quando alteramos o valor de b. Então fixe o valor de a, sendo $a = 1$ e $c = 2$. Quanto ao valor de b coloque 5 e depois coloque -5. Então, pergunte os alunos quais as mudanças eles perceberam observando o comportamento da função após o ponto azul.

Por fim, verifique se eles notam que o valor de c é o mesmo valor de y do ponto em que o gráfico intercepta o eixo y, para isso tenha como exemplo as funções $f(x) = x^2 - 5x + 3$ e $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$. Em seguida, pede que eles determinem a lei de duas funções, uma que o gráfico intercepte o eixo y em $(0, -2)$ e outra em $(0,4)$.

ETAPA 2

A fórmula de bhaskara é um dos métodos mais utilizados na escola para determinar as raízes de uma função do 2°grau. As raízes podem ser facilmente identificadas pelos pontos vermelhos x_1 e x_2. Após apresentar a fórmula de bhaskara para os alunos, enfatizem sobre o valor de Δ, porque é através dele que será determinado a quantidade de raízes que a função possui. Assim, mostre-os que $\Delta = b^2 - 4.a.c$.

Sabe-se que para calcular o valor x precisamos encontrar a $\sqrt{\Delta}$, mas não existe a raiz quadrada de um valor negativo no conjunto dos números reais e é por este motivo que podemos dizer que quando o valor de Δ é negativo o gráfico da função não irá apresentar as raízes (identificada pelos pontos vermelhos), após falar sobre isso, mostre-os como exemplo a função $f(x) = x^2 - 2x + 3$ e pede que eles calculem o valor de Δ. Depois apresente outro, $g(x) = -2x^2 + x - 1$.

Em seguida, apresente uma função que $\Delta = 0$ e pede que eles identifiquem quantas raízes a função tem, um exemplo $h(x) = x^2 + 2x + 1$ e determinem o valor de Δ. Veja, eles irão dizer que o valor de delta é nulo e que a função possui uma raiz real

Por fim, solicite que algum dos alunos defina uma função qualquer com duas raízes reais distintas, fazendo a manipulação com os controles deslizantes. Em seguida, pedir que els a partir do valor do coeficiente calcule o valor de Δ. Depois, mostre-os a sua análise a partir da função $t(x) = x^2 - 5x + 6$.

Ao final, solicite que eles construam uma tabela com o comportamento da função de acordo o valor de a e de Δ.

ETAPA 3

O vértice da parábola é um ponto significantes para a construção e entendimento do gráfico da função, ele é determinado a partir do coeficiente que podem ser identificados na lei da função. Primeiro, apresente aos alunos a lei que determinar o valor de x e y do vértice (V).

Em seguida, apresente duas funções, $f(x) = x^2 - 2x - 3$ e $g(x) = -3x^2 + 6x$, com isso, pedir que eles determine o valor das raízes e o valor do x do ponto V. Depois, questione-os sobre a relação entre a distância cada uma das raízes e do x do vértice.

Os alunos irão fazer a análise sobre o que estão observando, mas em seguida é necessário que conclua sobre o x_v ser a média aritmética das raízes. Também, a partir do vértice é possível determinar um eixo de simetria da parábola.

Usando as mesmas funções solicite que os alunos determinem o valor de y do vértice de cada uma delas e quando estiver mostrando estas funções apresente os seguintes questionamentos:

- Dado $f(x)$ você consegue perceber que não há nenhum outro valor y relacionado com algum x que seja menor do que y_v?________.
- Dado $g(x) = -3x^2 + 6x$. Qual é o valor d x_v?______. Você consegue perceber que não há nenhum outro valor y relacionado com algum x que seja maior do que y_v?________.

Em seguida, conclua que uma função tem um valor máximo ou um valor mínimo a depender da concavidade da parábola. Assim, se $a > 0$, temos que y_v é o valor mínimo. Ou se $a < 0$, temos que y_v é o valor máximo. Também, solicite que os alunos determinem duas funções que possuem valor máximo e duas funções que possuem valor mínimo.

A função quadrática ora é crescente e ora é decrescente e esta análise poderá ser realizada a partir do vértice. Sendo assim, retome o conceito de crescimento e decrescimento, para que em seguida os alunos analisem o crescimento e decrescimento da função $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Questione os alunos do intervalo em que ela decresce (em $x < 1$) e cresce (em $x > 1$). Em seguida pedir que eles indiquem uma função que tem o mesmo comportamento, decresce e depois cresce.

Por fim, finaliza com uma função que primeiro cresce e depois decresce, fazendo os comentários sobre a $g(x) = -3x^2 - 6x$.

SUGESTÃO:
Antes de levar a atividade para sala de aula utilize o material do aluno para experienciar a manipulação virtual dos materiais.

O LaPEM-v NA ESCOLA

O Laboratório Virtual foi criado para a coleta de dados de uma pesquisa vinculada ao PPGEM/UFJF. Mas, antes de oferecer o curso online para a formação continuada dos professores que ensinam Matemática, para coletar os dados, eu criei e utilizei algumas das atividades com alunos do Instituto Federal de Ensino, Ciências e Tecnologia do Sudeste de Minas Gerais – *campus* Juiz de Fora.

Em cada turma, a atividade e o uso do LaPEM-v foi diferente.

No 1° ano do curso técnico em Eletromecânica integrado com o Ensino Médio, o Laboratório Virtual foi usado como auxiliador durante o processo de ensino e aprendizagem de Matemática. Eu o usei com o *Datashow* para explorar o conteúdo da Função Exponencial (00019). Mostrei o gráfico e a relação que havia entre ele e os coeficientes na medida da explicação. A manipulação dos coeficientes e a visualização do gráfico, como mencionado pelos alunos, ajudaram bastante em sua compreensão quanto ao comportamento do gráfico.

No 2° ano do curso técnico em Mecânica integrado com o Ensino Médio, o Laboratório Virtual foi usado como o ambiente em que os alunos faziam a atividade em grupo, sobre Geometria de Posição (00001), fora da sala de aula. A partir dessa experiência, eles criaram um material concreto para apresentar para a turma. O resultado foi importante, porque, como eles mesmos relataram, fazer esta atividade no ambiente virtual ajudou bastante na hora de construir o material concreto. Além disso, foi muito mais fácil para eles compreender os postulados e proposições.

No 2° ano do curso técnico em Informática integrado com o Ensino Médio, os alunos foram convidados a fazer as atividades usando os computadores disponíveis no Laboratório de Ensino de Matemática da instituição. A experiência no ambiente de manipulação com a atividade que fala sobre a Relação de Euler (00017), de acordo os alunos, ajudou muito no entendimento do conteúdo, porque era possível rotacionar e mover o sólido para determinar a contagem dos vértices, arestas e faces. No quadro, não é possível fazer este movimento, o que para eles poderia dificultar a compreensão da Relação de Euler.

O uso do LaPEM-v em sala de aula foi uma experiência relevante para todos os envolvidos no processo de ensino e aprendizagem, tanto alunos quanto professor. Existem diversos motivos que podem influenciar o professor a usá-lo na sala de aula, dos quais posso citar a praticidade e a dinâmica das atividades.

OBSERVAÇÕES

OBSERVAÇÕES

LAPEM-V

BEATRIZ OLIVEIRA DOS SANTOS

Atualmente é professora substituta no Núcleo de Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Sudeste de Minas Gerais - Campus Juiz de Fora. Mestre em Educação Matemática peloo Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática na Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF. Graduada no Curso de Licenciatura em Matemática pela Universidade do Estado da Bahia - UNEB, Campus X. Coordenadora do LaPEM-v (Laboratório Virtual de Pesquisa em Educação Matemática) e integrante da equipe do Laboratório de Ciências e Educação Matemática (LaCEM). Atuou como bolsista do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação á Docência - PIBID, exercendo as atividades do projeto no Instituto Federal Baiano - IF Baiano.

MARCO ANTONIO ESCHER

Possui graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho - UNESP (Rio Claro) (1992), mestrado em Educação Matemática (1999) e doutorado em Educação Matemática (2011) ambos pela UNESP. Atualmente é efetivo da Universidade Federal de Juiz de Fora/MG, prof. Associado 1, membro do corpo docente do Programa de Pós Graduação em Educação Matemática (UFJF), atual vice-coordenador do PPGEM e membro do Conselho do Centro de Ciências - UFJF. Coordenador do LaCEM - Laboratório de Ciências e Educação Matemática (Centro de Ciências - UFJF) e do LaPEM-v (Laboratório Virtual de Pesquisa em Educação Matemática). Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Educação Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: Educação Matemática, Tecnologias de Informação e Comunicação, paradigma indiciário, Feiras de Matemática, materiais didáticos manipuláveis, Laboratórios de Educação Matemática, aprendizagem em espaços não formais e Formação Continuada de professores que ensinam Matemática. Atua como parecerista em revistas da área, e como consultor na Capes para a área de Ensino. Coordenador do projeto PIBID - Matemática - PROGRAD - UFJF.