

# Por que desenvolver o Pensamento Algébrico desde os Anos Iniciais?

$$20 + 5 + 10 = \square + 10$$

$$35 + 2 = 10 + \square + 2$$

$$38 = \square + 18$$

$$30 + 2 = \square + 12$$

$$45 = \square + 20$$

$$\square + 36 = 47$$

$$16 + 1 = \square + 7$$

$$60 = 53 + \square$$

Isabela Magalhães Kirchmair  
Maria Cristina Araújo de Oliveira



Este trabalho está licenciado com uma Licença [Creative Commons – Atribuição – NãoComercial 4.0 Internacional](http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

```
<a rel="license" href="http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/"></a><br />Este trabalho está licenciado com uma Licença <a rel="license" href="http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/">Creative Commons - Atribuição-NãoComercial 4.0 Internacional</a>.
```



# A Revista

A revista, destinada a vocês, professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, centramos a “conversa” na pertinência e nas possibilidades de iniciar o desenvolvimento do *Pensamento Algébrico* com as crianças.

O assunto emerge a partir de um estudo histórico sobre os saberes profissionais para ensinar matemática às crianças, que nos levou a problematizar a preocupação acerca do desenvolvimento do *Pensamento Algébrico* como uma herança do Movimento da Matemática Moderna.



## Mas o que estamos chamando de PENSAMENTO ALGÉBRICO?

O Pensamento Algébrico está presente quando buscamos identificar regularidades, padrões ou propriedades recursivas, sejam elas expressas em sequências numéricas, padrões geométricos ou mesmo relações entre características e propriedades de entes algébricos ou geométricos.

### Exemplos de sequências

Ⓒ \* \* Ⓒ Ⓒ \* \* Ⓒ Ⓒ \* \* Ⓒ Ⓒ \* \* Ⓒ ...

A 1 1 A 1 1 A 1 1 A 1 1 ...

vermelho, amarelo, verde, vermelho, amarelo, verde, vermelho, amarelo, verde, ...

1, 3, 5, 7, 9, 11, ...

Nesse exemplo podemos ver como o professor pode explorar sequências de diversas formas: sequências com desenhos, letras e números, palavras e sequência numérica.

Fonte: Álgebra no Ensino Básico, 2009

## Mas o que estamos chamando de PENSAMENTO ALGÉBRICO?

Por meio dele é possível expressar e resolver problemas usando diferentes representações.

### Exemplo de um problema

Eva e Rui tinham a mesma quantia de dinheiro no bolso. Foram a uma loja comprar cadernos escolares iguais. Quando saíram, cada um tinha na mão o que a figura apresenta. Determina o preço de um caderno.



Nesse problema, o aluno deve fazer uma comparação entre a situação de Eva e Rui. Inicialmente eles tinham a mesma quantia e depois da compra Rui possuía um caderno e 2,75 euros, e Eva dois cadernos e 1,25 euros. O aluno pode por comparação fazer equivaler 1 caderno de Eva a 1,25 euros de Rui. Ou ainda, representar essa comparação através de uma sentença matemática.

Fonte: Álgebra no Ensino Básico, 2009

Ele inclui também a capacidade de interpretação e manipulação de símbolos, que deve ser trabalhada gradualmente ao longo da Educação Básica. Dessa forma, o pensamento algébrico difere da álgebra, que é um dos ramos da matemática.

## Mas o que estamos chamando de PENSAMENTO ALGÉBRICO?

Para Ponte, Branco e Matos (2009),

Pensamento Algébrico é algo que se manifesta quando, através de conjecturas e argumentos, se estabelecem generalizações sobre dados e relações matemáticas, expressas através de linguagens cada vez mais formais. Este processo de generalização pode ocorrer com base na Aritmética, na Geometria, em situações de modelação matemática e, em última instância, em qualquer conceito matemático leccionado desde os primeiros anos de escolaridade. (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, pág. 9)



## Algumas características do Pensamento Algébrico:

- X A compreensão de padrões e sequências, como no exemplo:



(o conjunto que se repete é formado por três elementos: quadrado vermelho, retângulo não quadrado azul, quadrado vermelho)

Fonte: Álgebra no Ensino Básico, 2009

Nesse exemplo pode ser solicitado ao aluno que descreva como a sequência continua, ou seja, que identifique o padrão quanto às formas e às cores.

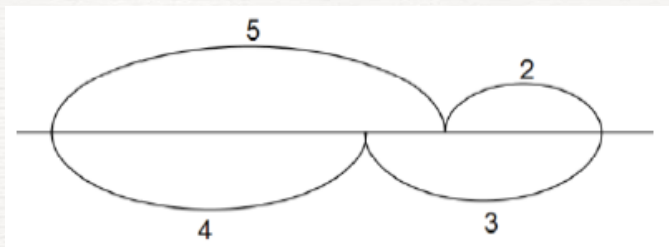
## Algumas características do Pensamento Algébrico:

- X A compreensão da utilização do sinal de igual como equivalência, como nos exemplos:

“Família do 7”:  $7 + 0 = 6 + 1 = 5 + 2 = 4 + 3 = 3 + 4 = 2 + 5 = 1 + 6 = 0 + 7$

Fonte: Álgebra no Ensino Básico, 2009

Ou ainda utilizando um esquema com o uso da reta não graduada;



Fonte: Álgebra no Ensino Básico, 2009

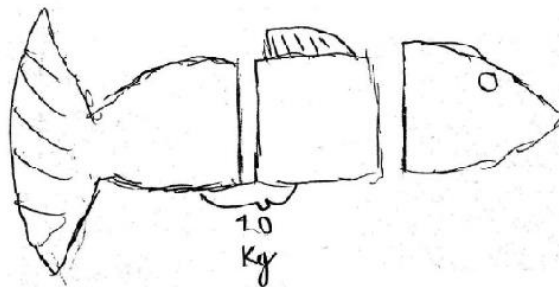
Usando a ideia de reta não graduada, o aluno pode explorar diferentes decomposições para obter, por exemplo, a soma 7. No exemplo ao lado a situação pode ser também representada por uma sentença que expressa a igualdade  $5 + 2 = 4 + 3$ .



## Algumas características do Pensamento Algébrico:

- X A compreensão da utilização de símbolos ou mesmo de representações esquemáticas pode auxiliar no processo de construção de sentido para o uso dos símbolos algébricos. O exemplo a seguir ilustra uma situação preliminar, no contexto de esquema:

Dois terços de um peixe pesam 10 quilos.  
Quanto pesa o peixe ao todo?  
Mostre com desenhos.



$$\begin{array}{r} 10 \\ + 5 \\ \hline 15 \text{ Kg} \end{array}$$

R= O peixe ao todo pesa 15 Kg.

Para descobrir o peso total do peixe, o aluno desenhou o peixe, dividindo-o em três partes, mostrando através de uma chave que duas partes do peixe pesam 10 quilos. Com isso, ele percebe que uma parte pesa 5 quilos, e por fim realiza a soma para encontrar o peso do peixe.

A importância de se trabalhar com o Pensamento Algébrico nos Anos Iniciais se deve à possibilidade de propiciar ao aluno compreender o que está por trás das operações matemáticas, das suas representações, de seus algoritmos; de modo a superar a simples memorização.

Esse tema, com outra abordagem, foi muito valorizado no Movimento da Matemática Moderna, e desde então, com modificações ao longo do tempo, ele está presente no currículo de matemática dos anos iniciais.



# Mas, o que foi o Movimento da Matemática Moderna?

- O Movimento da Matemática Moderna surgiu no Brasil na década de 1960. Com o cenário de crescimento das indústrias e crescimento demográfico aumentou a demanda pela escolarização e com isso houve uma necessidade de um ensino mais moderno.
- Para o Ensino Primário o movimento defendeu que o aluno deveria participar ativamente na construção do conhecimento. Uma forma seria a utilização de materiais manipuláveis. A experimentação e a aprendizagem por descoberta também foram propostas desse Movimento.



- 
- Alguns conteúdos que o MMM enfatizou foram a linguagem de conjuntos, noções topológicas, transformações geométricas e o pensamento algébrico. (OLIVEIRA, M. C. A.; SILVA, M. C. L.; VALENTE, W. R. (Ed.).
  - Porém, o pensamento algébrico na atualidade possui outros delineamentos, com propostas diferentes. Veremos isso adiante.







## ATIVIDADE 1



— Levar a classe à visualização da situação descrita, registrando em linguagem matemática.

- Carlos está fazendo uma coleção de selos; já possui alguns e ganhou 75 de seu padrinho. Quando foi colá-los no álbum, 17 se estragaram, ficando ainda com 150. Quantos selos possuía?

(Usar um símbolo para a quantidade desconhecida).

$\square$  → quantidade de selos que Carlos possuía (desconhecida);

75 → número de selos que Carlos ganhou de seu padrinho;

17 → número de selos que se estragaram;

150 → selos que ficaram.

Armar a sentença:

$$\bullet \quad (\square + 75) - 17 = 150$$

Fonte: Plano Experimental da Delegacia Regional de Ensino de Juiz de Fora, 1972

Nessa atividade, presente no capítulo “Adição e Subtração”, vemos que através de um problema, a criança deve descobrir o valor desconhecido. Para isso, deve associar as informações do problema com os símbolos matemáticos, e notar através dessas informações quem é o valor desconhecido, e dessa forma armar a sentença. Além disso, é sugerido ao professor que estimule os alunos a utilizarem um símbolo para esse valor desconhecido.



## ATIVIDADE 2



Ex.: Marcelo comprou 5 canetas esferográficas por Cr\$ 7,85. Marcos quer comprar 2 iguais a de Marcelo. Quanto gastará?

— Levar o aluno a visualizar a situação descrita:

Marcelo comprou quantas esferográficas?  
Quanto custou?  
Sabemos o preço de cada esferográfica?  
Não, sabemos apenas o que este preço *multiplicado* por 5 dá o preço total que ele pagou.

Como vamos registrar?

$$5 \times \square = \text{Cr\$ } 7,85$$

— Que termo desta multiplicação está faltando?  
— Que operação podemos fazer para descobri-lo?  
— Como vamos registrar esta solução que apresentaram?

$$\square = \text{Cr\$ } 7,85 : 5$$

Fonte: Plano Experimental da Delegacia Regional de Ensino de Juiz de Fora, 1972

Assim como na atividade anterior, nessa atividade presente no capítulo “Sistema Monetário”, vemos que através do problema, a criança deve descobrir o valor desconhecido.

Nessas atividades, o pensamento algébrico foi incentivado através de problemas em abordagens diferentes que mobilizam operações e situações próximas ao cotidiano das crianças.



## ATIVIDADE 2



Ex.: Marcelo comprou 5 canetas esferográficas por Cr\$ 7,85. Marcos quer comprar 2 iguais a de Marcelo. Quanto gastará?

— Levar o aluno a visualizar a situação descrita:

Marcelo comprou quantas esferográficas?  
Quanto custou?  
Sabemos o preço de cada esferográfica?  
Não, sabemos apenas o que este preço *multiplicado* por 5 dá o preço total que ele pagou.

Como vamos registrar?

$$5 \times \square = \text{Cr\$ } 7,85$$

— Que termo desta multiplicação está faltando?  
— Que operação podemos fazer para descobri-lo?  
— Como vamos registrar esta solução que apresentaram?

$$\square = \text{Cr\$ } 7,85 : 5$$

Fonte: Plano Experimental da Delegacia Regional de Ensino de Juiz de Fora, 1972

Mas, nessa atividade, além da situação problema, notamos que há algumas perguntas que o professor deve ir fazendo ao aluno para que ele possa armar uma sentença para descobrir o valor de cada caneta inicialmente. Conhecendo esse valor, o aluno dá prosseguimento à resolução do problema.



---

Consta do Plano Experimental, uma bibliografia que possivelmente foi utilizada pelas autoras como referência para a elaboração do Plano.

Várias obras são representativas do Movimento da Matemática Moderna, como *Curso Moderno de Matemática para Escola Elementar*, 1968, de Liberman e outras.

Dessas obras, vamos apresentar a seguir algumas atividades que permitem observar de que forma comparecia a evocação ao pensamento algébrico.

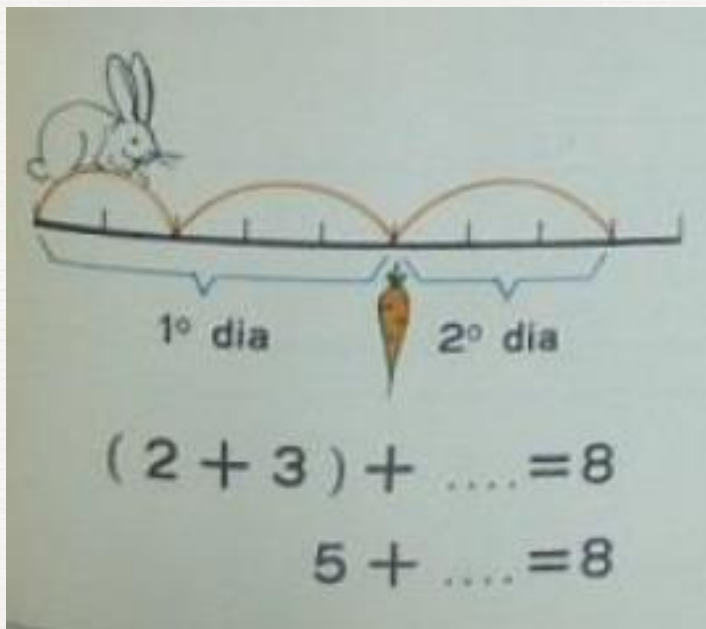


- ADDAMS, Sam & Shipp, Donald — Developing Arithmetic Concepts and Skills
- ADLER, Irving — Desenvolvimento Mental e a Arte de Ensinar (Apostila — CREPJP — DAP Belo Horizonte)
- BRANDÃO, Marcius — Matemática — Conceituação Moderna — Editora do Brasil — S. Paulo — 1968
- BRUECKNER, Leo J. — Using Number — The New Discovering Numbers
- BRUNER, Jerome S. — O Processo da Educação — Cia. Editora Nacional — S. Paulo — 1968
- BRUNER, Jerome S. — Uma Nova Teoria da Aprendizagem — Editora Bloch — Rio de Janeiro — 1969
- DIENES, Z. & Golding, E. W. — Lógica e Jogos Lógicos — Conjuntos, Números e Potências — Exploração do Espaço — Editora Herder — S. Paulo — 1969
- DIENES, Z. P. — A Matemática Moderna no Ensino Primário — Livros Horizonte — Lisboa
- GROSSNICKLE, Foster & Brueckner, Leo — How to Make Arithmetic Meaningful John Winston Co. — Philadelphia — 1953
- MAGALHÃES, M. Tereza Barbosa & Castro, Vanda Maria de — O Ensino do Sistema Monetário na Escola Elementar — A Grafiquinha Editora Belo Horizonte
- MARQUES, Angel Diego — Didática das Matemáticas Elementares — Distribuidora Livros Escolares — Rio de Janeiro — 1967
- OZORIO, Norma Cunha & outras — Vamos Aprender Matemática? — Guia do Professor — Editora Ao Livro Técnico — Rio de Janeiro — 1967
- PORTO, Rizza de Araújo — Ver, Sentir, Descobrir Aritmética — Editora Nacional de Direito — Rio de Janeiro — 1967
- PORTO, Rizza de Araújo — Frações na Escola Elementar — PABBAEE — Belo Horizonte — 1964
- REVUZ, André — Matemática Moderna — Matemática Viva — Livros Horizonte — Lisboa
- MOLINA, Lety e Vicente Rico, Aurora — Criança, Geometria, Aritmética — Para Curso Primário e Escola Normal — Vol. I e II — Edição Tabajara
- LIBERMAN, M. Perelberg & outras — Curso Moderno de Matemática para Escola Elementar — III volume — Cia. Editora Nacional — 1968
- CUNHA, Osório Norma & outras — Vamos Aprender Matemática — Vol. III — Editora ao Livro Técnico — S.A. — 1969



- As atividades a seguir foram retiradas de um livro que foi elaborado na época do MMM, o próprio nome “Curso Moderno de Matemática Escolar Elementar” explicita o comprometimento das autores com esse Movimento.
- Esse livro está presente na bibliografia do *Plano Experimental de Juiz de Fora*, de 1972.

### ATIVIDADE 3



Nessa atividade, a criança precisa completar o valor que falta, associando com o desenho dos pulos do coelho. Vemos uma introdução ao pensamento algébrico, na medida em que ela deve encontrar um valor desconhecido.

Fonte: Curso Moderno de Matemática  
Escolar Elementar Volume II, 1968

## ATIVIDADE 4

### Completar

$$9 + \square = 10 + 2$$

$$5 + 8 + 2 = 5 + \square$$

$$6 + 2 + 5 = \square + 5$$

$$7 + 3 = \square + 0$$

Fonte: Curso Moderno de Matemática  
Escolar Elementar Volume II, 1968

### Complete

$$20 + 5 + 10 = \square + 10$$

$$45 = \square + 20$$

$$35 + 2 = 10 + \square + 2$$

$$\square + 36 = 47$$

$$38 = \square + 18$$

$$16 + 1 = \square + 7$$



$$30 + 2 = \square + 12$$

$$60 = 53 + \square$$

Já nessas atividades, a criança também precisa descobrir o valor que falta, agora sem um desenho para auxiliar na tarefa.

## ATIVIDADE 5

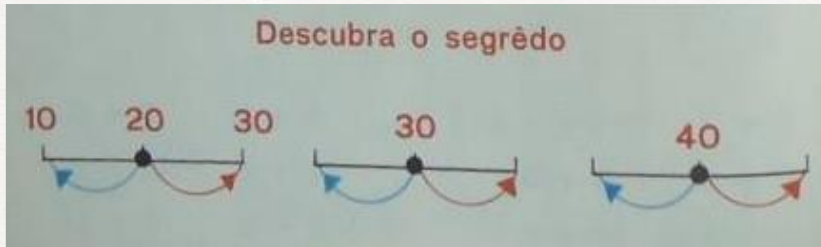
Vamos formar grupos com o mesmo número de objetos e arranjá-los em **linhas** e colunas

			
$2 + 2 + 2 = \dots \times 2$		$3 + 3 + 3 + 3 + 3 = \dots \times 3$	

Fonte: Curso Moderno de Matemática  
Escolar Elementar Volume II, 1968

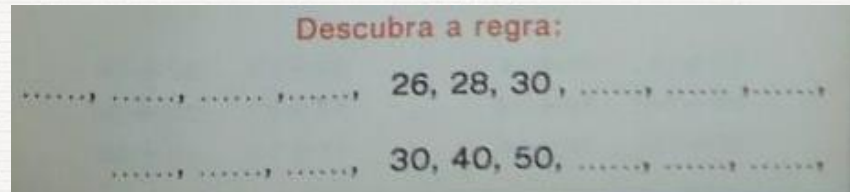
Nessa atividade, o objetivo também é descobrir os valores desconhecidos fazendo uma associação com os objetos. Nesse momento já havia sido introduzida a multiplicação. O trabalho concomitante entre os números e as figuras também permite explorar a multiplicação numa perspectiva geométrica.

## ATIVIDADE 6



Fonte: Curso Moderno de Matemática Escolar  
Elementar Volume II, 1968

Nessas atividades, o objetivo é que a criança descubra o segredo, ou seja, a lei de formação da sequência. Assim, ela completa os valores que faltam de acordo com o segredo que descobriu.



Assim como o *Plano Experimental da Delegacia Regional de Ensino de Juiz de Fora*, de 1972, orientou as práticas escolares na época, temos na atualidade vigente para o município de Juiz de Fora a *Proposta Curricular de Matemática (PCMJF)*, de 2012.

Esse documento é a referência curricular para as escolas de Juiz de Fora e contém orientações aos professores para o trabalho com a matemática do Ensino Fundamental.

Veremos adiante algumas orientações e atividades sugeridas para o desenvolvimento do Pensamento Algébrico.



## ATIVIDADE 7

Pensar um número:   
 Somar 10  + 10  
 Subtrair 10  + 10 - 10 =

Ou, no segundo exemplo:

Pensar um número   
 Multiplicar por 6  x 6  
 Dividir por 2  x 6 : 2  
 Dividir o resultado por 3 ((  x 6 ) : 2) : 3 =

Nessa primeira atividade, o professor pede que o aluno pense em um número. Em seguida o professor orienta que some 10 ao número pensado, e depois subtraia 10, chegando então ao número que o aluno pensou. No segundo exemplo o objetivo é o mesmo do anterior, porém envolvendo multiplicação e divisão.

Fonte: Proposta Curricular de Matemática de Juiz de Fora, 2012

Essa atividade, retirada da Proposta Curricular foi sugerida por Ponte, Branco e Matos (2009). A PCMJF enfatiza que essa é uma atividade entre as várias sugeridas por esses autores, e que o professor pode buscar por mais atividades semelhantes em *Álgebra no Ensino Básico, 2009*, dos autores Ponte, Branco e Matos. Com isso mostraremos a seguir algumas atividades que Ponte, Branco e Matos (2009) sugerem.



## ATIVIDADE 8

*Exemplo 1 – Igualdade de expressões numéricas.* Os alunos devem trabalhar sequências de expressões numéricas com o intuito de encontrarem relações numéricas, reforçando o significado de equivalência do sinal de igual. Eis diversas expressões numéricas que se podem propor:

$$11 + \square = 26$$

$$11 + 15 = \square + 11$$

$$11 + 15 = 12 + \square$$

$$11 + 15 = \square + 16$$

$$11 + 15 = \square + 17$$

$$\square = 15 + 11$$

$$11 + \square = 11 + 15$$

$$14 + \square = 11 + 15$$

$$\square + 12 = 11 + 15$$

$$\square + 13 = 11 + 15$$

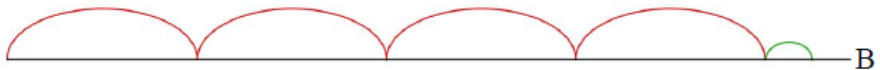
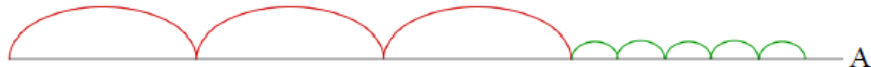
Fonte: Álgebra no Ensino Básico, 2009

Nessa atividade, com a intenção de encontrar relações numéricas, o aluno deve descobrir o valor desconhecido.

E ainda, podemos notar uma semelhança com as atividades 1 e 2 retiradas do Plano Experimental de 1972, nas quais o aluno também deveria descobrir o valor desconhecido.

## ATIVIDADE 9

Numa actividade de Educação Física, o professor propôs aos seus alunos realizar dois tipos diferentes de percurso sobre uma linha com o mesmo comprimento, um constituído por saltos (todos com o mesmo comprimento) e outro por passos (também todos com o mesmo comprimento). A Anabela fez o percurso A e a Beatriz fez o percurso B:



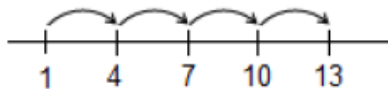
A quantos passos corresponde todo o percurso?

Nessa actividade, para o aluno descobrir quantos passos possui o percurso, ele precisa identificar quantos passos equivalem a um salto.

Fonte: Álgebra no Ensino Básico, 2009

## ATIVIDADE 10

*Utilização da recta numérica.* É natural que surjam outras sequências de números e a generalização a fazer pode ter por base a sua representação numa recta numérica. Por exemplo, pode pedir-se aos alunos que descrevam o que observam em situações como a da figura:



Fonte: Álgebra no Ensino Básico, 2009

Nessa atividade, o aluno precisa descobrir como essa sequência foi formada, ou seja, qual é a lei de formação dela. Perceber que os novos números são obtidos somando 3 que pode ser descrito de diversas formas pelas crianças.

Vimos que na época do MMM a Álgebra teve um protagonismo que se traduziu numa introdução desde o ensino primário, denominação dos Anos Iniciais na época, do que denominamos hoje Pensamento Algébrico.


Por meio das atividades apresentadas observamos as propostas recomendadas aos professores para abordar esse assunto.

E ainda, vimos também como o assunto continua sendo relevante nos dias atuais.

O Pensamento Algébrico trabalhado nos dias atuais pode ser visto como uma permanência em relação ao MMM, com reconfigurações que decorrem da historicidade do contexto educacional, escolar.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 
- JUIZ DE FORA. (1972). **Plano Experimental da Delegacia Regional de Ensino de Juiz de Fora.**
  - JUIZ DE FORA. (2012). **Proposta Curricular de Matemática.**
  - LIBERMAN, M.; et. al.; **Curso Moderno de Matemática Escolar Elementar Volume II.** 1968.
  - OLIVEIRA, M. C. A.; SILVA, M. C. L.; VALENTE, W. R. (Ed.). **O Movimento da Matemática Moderna: história de uma revolução curricular.** Editora UFJF, 2011.
  - PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no ensino básico.** 2009.
  - RIBEIRO, A. J.; CURY, H. N. **Álgebra para a formação do professor: explorando os conceitos de equação e de função.** Autêntica, 2018.
  - SILVA, E. P. Aspectos do pensamento algébrico e da linguagem manifestados por estudantes do 6º ano em um experimento de ensino. **Londrina: Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática), Universidade Estadual de Londrina, 2013.**