

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PRODUTO EDUCACIONAL

SEMELHANÇA: ATIVIDADES COM MANIPULAÇÕES HOMOTÉTICAS

Elias da Costa Abreu

Adlai Ralph Detoni

JUIZ DE FORA - MG

Março, 2021



Este trabalho está licenciado com uma Licença [Creative Commons – Atribuição – NãoComercial 4.0 Internacional](http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

```
<a rel="license" href="http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/"></a><br />Este trabalho está licenciado com uma Licença <a rel="license" href="http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/">Creative Commons - Atribuição-NãoComercial 4.0 Internacional</a>.
```

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática
Mestrado Profissional em Educação Matemática

Elias da Costa Abreu

**SEMELHANÇA: ATIVIDADES COM MANIPULAÇÕES
HOMOTÉTICAS**

Orientador: Prof. Dr. Adlai Ralph Detoni

•
Produto Educacional apresentado ao Programa de Mestrado em Educação Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática. Área de concentração: Educação Matemática.

JUIZ DE FORA (MG)

Março, 2021

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Sequência para aplicação das atividades	20
---------------------------------------------------------	----

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Transformação por homotetia	12
Figura 2: Geoplano	15
Figura 3: Raiado	18
Figura 4: Triângulos inscritos homotéticos	27
Figura 5: Raiado	30

SUMÁRIO

1 APRESENTAÇÃO.....	7
2 SEMELHANÇA DE FIGURAS PLANAS.....	8
3 MATERIAIS MANIPULÁVEIS	13
4 APRESENTAÇÃO DAS ATIVIDADES	18
4.1 DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES E APLICAÇÃO	19
4.2 ATIVIDADES NO GEOPLANO	20
Atividade 1- Entendendo Homologias	20
Atividade 2 - Explorando triângulos	21
Atividade 3 - Explorando trapézios.....	21
Atividade 4- Construindo quadriláteros semelhantes.....	21
Atividade 2 – Explorando triângulos	23
4.3 ATIVIDADES NO GEOGEBRA.....	26
4.4 ATIVIDADES NO RAIADO	30
5 – CONSIDERAÇÕES SOBRE AS ATIVIDADES.....	32
6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	34

1 APRESENTAÇÃO

Este Produto Educacional é fruto de uma Dissertação apresentada no Mestrado Profissional em Educação Matemática¹, intitulada “Semelhança com Manipulações Homotéticas” e tem por objetivo propor atividades voltadas para se trabalhar com Geometria dentro do tema de semelhança.

Visando a alcançar tal intento, elaboramos atividades abertas tendo a transformação geométrica de homotetia como fundo para constituição do conceito de semelhança e aplicamos na Pesquisa de Campo da mencionada Dissertação com discentes do 9º ano do Ensino Fundamental de uma Escola Pública situada no Município de Paty do Alferes/RJ. Ressaltamos que a citada aplicação ocorreu mediante utilização de três materiais manipulativos: Geoplano, Geogebra e Raiado.

Este Produto estrutura uma sequência didática que pode ser utilizada nos anos finais do Ensino Fundamental ou no Ensino Médio com o suporte dos recursos didáticos supracitados. Nossa proposta é sugerir possibilidades alternativas para a constituição do conhecimento mediante adoção de uma nova abordagem epistemológica para a Geometria que viabilize abertura de caminhos para novas práticas escolares.

Ao pensar o contexto de aplicação dessa proposta, deixamos a sugestão de uma sequência que pode ser pensada para trabalhar alternativamente ao curso das atividades mais regulares da Geometria em sala de aula, independente, mesmo que junto no tempo da programação didática.

Palavras-chave: Educação Matemática. Geometria das Transformações. Homotetia. Semelhança. Materiais Manipulativos.

¹ Este Mestrado permite, em seu site, livre acesso de dissertações defendidas.

2 SEMELHANÇA DE FIGURAS PLANAS

Entendemos ser pertinente compreender de que forma os pesquisadores se expõem sobre a temática semelhança de figuras planas. Desta forma, realizamos uma revisão de literatura sobre o citado tema, objeto de investigação.

2.1 PESQUISAS QUE TRATAM DO TEMA INVESTIGADO

Dentre os autores encontrados, que abordam o tema semelhança de figuras planas, destacamos Maciel (2004) que elaborou a pesquisa intitulada: “O conceito de Semelhança: Uma proposta de ensino”. Em suas considerações, a mencionada pesquisadora apresenta o intuito de sua investigação, que entre outros aspectos, era o de: “... analisar as dificuldades enfrentadas na formação do conceito de semelhança por alunos do 1º ano do Ensino Médio... (Maciel, 2004, p. 16).

No que se refere aos aspectos metodológicos envolvendo o ensino de semelhança, Maciel (2004, p. 70) afirma que: “A maneira como se tem ensinado semelhança de figuras planas e a forma com essa propriedade vem sendo apresentada nos livros didáticos pode proporcionar aos alunos a aquisição de uma concepção limitada do conceito.”

Com relação a isso, essa autora afirma que em alguns casos os conceitos vinculados à citada temática são explorados isoladamente.

(...) percebemos que os conceitos de proporção, propriedades de figuras planas geométricas, homotetia, ampliação (redução) e semelhança, quando trabalhados, são, em alguns casos, de maneira estanque, sem que se realizem atividades que promovam a percepção, por parte do aluno, de relações entre esses conceitos, (...). (MACIEL, 2004, p. 70)

Maciel (2004) enfatiza também que os sujeitos de sua pesquisa apresentavam dificuldades em estabelecer relações entre o tema semelhança e a realidade nos quais estavam inseridos. Segundo a pesquisadora, uma das razões que contribui para tal fato encontrava-se numa metodologia de ensino desprovida de caráter interdisciplinar:

A falta de articulação entre conteúdos dentro da própria Matemática e a ausência de conexões entre um mesmo tema abordado em diferentes contextos contribuem para uma visão fragmentada, em que não existe relações entre os conteúdos nem destes com a realidade. Um exemplo, em Geometria, é a semelhança de triângulos, abordada em Matemática e em formações de sombras e imagens em Ótica Geométrica, na Física, conteúdos esses trabalhados sem nenhuma relação. (MACIEL, 2004, p. 67)

Pereira & Pereira (2016) apresentam um diagnóstico dos processos de ensino e de aprendizagem da citada temática tendo como referência a opinião de discentes. Os pesquisadores ressaltam que:

(...) os dados revelaram que existem alguns tópicos neste conteúdo que precisam de uma maior atenção no momento de seu ensino, principalmente no que se refere às questões contextualizadas que envolvam triângulos semelhantes dispostos de diferentes formas e o cálculo de distâncias inacessíveis. (PEREIRA; PEREIRA, 2016, p. 7)

Nossas experiências em sala de aula nos levam a refletir sobre a plausibilidade das considerações supracitadas. Percebo que considerável quantitativo de discentes não compreende satisfatoriamente o conceito de proporcionalidade. Entendo que tal lacuna acaba por contribuir por levá-los a conjecturar que a congruência é uma condição indispensável para o estabelecimento da ideia de semelhança.

Entendemos que todos os pesquisadores mencionados nesta seção corroboram o fato de que levar o aluno a compreender o conceito de semelhança de figuras planas não é uma tarefa simples. A revisão de literatura realizada levou-nos a entender também que a constatação de dificuldades relacionadas aos processos de ensino e de aprendizagem do conceito de semelhança de figuras planas sinaliza uma espécie de demanda quanto à realização de mais investigações abordando tal temática. Tal entendimento incentivou-nos a elaborarmos uma sequência didática como proposta metodológica voltada para o ensino e aprendizagem do assunto semelhança a qual será apresentada neste Produto Educacional.

2.2 GEOMETRIA DAS TRANSFORMAÇÕES

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) sugere a utilização de uma metodologia de ensino alicerçada nas transformações geométricas visando também à implementação de um “aspecto funcional” ao estudo da Geometria. Sendo assim, consideramos necessário descrever algumas considerações concernentes à Geometria das Transformações.

Lage (2008, p. 27) apresenta a ideia de transformação da seguinte forma: “A ideia da transformação geométrica no plano é simples; cada ponto será associado a um novo ponto no plano a partir de uma regra a ser seguida”.

No que se refere à relevância de uma prática de ensino pautada no conceito de transformações geométricas, Catunda, et. al. (1990) expressaram-se da seguinte forma:

Usar transformações geométricas no ensino de Geometria é uma recomendação centenária.

Em 1872, no seu trabalho “Introdução ao estudo da Geometria, baseado no conceito de transformações”, Felix Klein afirmava que o conceito de transformação desempenha um vasto papel coordenador e simplificador no estudo de Geometria (CATUNDA, et. al., 1990, p. 13)

Já Andrade (2005, p. 16) ressalta o dinamismo que a Geometria das Transformações pode proporcionar aos processos de ensino e de aprendizagem: “Dentre os diversos conteúdos de Geometria, a ênfase nas transformações possibilita o ensino desta disciplina de forma dinâmica, fazendo com que se observem as regularidades e propriedades geométricas”. Neste aspecto, vale ressaltar que a possibilidade de proporcionar dinamismo ao ensino de Geometria foi um dos fatores que nos levou a considerar a Geometria das Transformações como campo de nossa investigação.

Detoni (2019) apresenta argumentos que apontam positivamente para a habitação em softwares que se constituem em ambientes dinâmicos e as características epistemológicas e metodológicas que acompanham propostas de trabalho com as Transformações no Plano. Escudado em pesquisas realizadas, mostra a proximidade geométrica entre os verbos transformar e movimentar.

Ainda com relação ao dinamismo que pode ser articulado nas aulas de Matemática mediante a exploração do conceito das transformações geométricas, Silva & Pietropaolo (2014) expressaram-se da seguinte maneira:

As Transformações Geométricas constituem um conteúdo indispensável para o desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos, pois permite explorar conceitos e propriedades da Geometria, por meio da experimentação e do movimento. (SILVA; PIETROPAOLO, 2014, p. 301)

Enfatizando a relevância da adoção de uma prática de ensino que considere a utilização das transformações geométricas, a BNCC afirma que:

É importante, também, considerar (...) no estudo da Geometria: as transformações geométricas, sobretudo as simetrias. As ideias matemáticas fundamentais associadas a essa temática são, principalmente, construção, representação e interdependência. (BNCC, 2017, p.271)

Concordando para o que está citado acima, no entanto ressalvamos que a ênfase apenas na simetria representa desperdício de esforços, se o caso é de trabalhar metodologicamente com as transformações em sua ideia mais geral. Podemos entender essa ênfase no texto dado a referência que o estudo da simetria tem, mesmo quando ela é trabalhada sem estar no espírito geral das transformações.

2.3 CONCEITOS DE SEMELHANÇA E HOMOTETIA

Entendemos ser pertinente enfatizarmos algumas considerações concernentes aos conceitos de semelhança e homotetia.

Ribeiro (2010) ao definir o conceito de semelhança expressou-se da seguinte forma:

Para que dois ou mais polígonos com a mesma quantidade de lados sejam semelhantes, é necessário que satisfaçam, simultaneamente, as seguintes condições:

- As medidas dos lados correspondentes devem ser proporcionais;
- As medidas dos ângulos correspondentes devem ser iguais;

A razão entre a medida do lado de um polígono e a medida do lado correspondente de outro polígono é chamada de **razão de semelhança**. (RIBEIRO, 2010, p. 312)

Moise & Downs (1971, apud Lima 2016) ressaltam que o conceito de semelhança:

(...) parte da ideia de proporcionalidade, na qual duas figuras geométricas, no caso poligonais, possuem exatamente a mesma forma, sem contudo, possuírem necessariamente as mesmas medidas. O termo “forma”, nesse contexto, refere-se às propriedades geométricas que essas figuras têm em comum: uma escala entre as medidas dos lados e a congruência de seus ângulos internos. Escala, neste caso, diz respeito à razão de semelhança entre as propriedades das figuras em questão. (MOISE; DOWNS, 1971 apud LIMA 2016, p. 23)

No que se refere ao conceito de homotetia, Gimenes (2014) resalta que esta transformação geométrica:

(...) é um dos processos para realizar a mudança de tamanho da figura que mantém os atributos de figuras semelhantes, pois leva uma figura a outra, ampliada ou reduzida, mantendo a medida dos ângulos internos e modificando apenas a medida dos lados de forma proporcional. (GIMENES, 2014, p. 44-45)

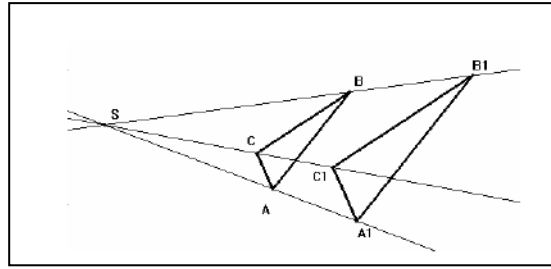


Figura 1: Transformação por homotetia
Fonte: Andrade (2005)

Acima, vemos ilustrado uma configuração mais usual para figuras dispostas homoteticamente, em que o ponto 's', chamado centro de homotetia, pode ser visto criando a figura $A_1B_1C_1$ a partir da figura ABC , num exemplo de homotetia direta.. A 'razão de homotetia' implicitamente presente pode ser lida na razão das medidas dos 'raios de homotetia' SA_1 e SA . Complementamos lembrando que se pode transformar a mesma figura ABC , também com centro em 's', em outras que estarão em semirretas opostas às que vemos na figura, com origem em 's'. Estas seriam transformações ditas homotetias inversas.

No que se refere à utilização do conceito de homotetia como método geométrico, Andrade (2005) ressalta que ao fazer uso didático de tal objeto, o professor de matemática pode propiciar meios para vincular a geometria a outras áreas que compõem o conhecimento matemático.

No Ensino Fundamental, é válido ressaltar o estudo das transformações por homotetia. Elas constituem um caso particular de semelhança em que os lados correspondentes são paralelos. Nelas, o aluno pode desenvolver o conceito de semelhança e congruência. O estudo da homotetia possibilita ao educando explorar as grandezas lineares e angulares, como também os números e razões numéricas. Dessa forma, o conteúdo interliga o bloco espaço e forma com os números e operações e grandezas e medidas. (ANDRADE, 2005, p. 16).

Ressaltamos ainda que segundo linha de pensamento supracitada, corroborando com a intenção principal de nossa proposta, a homotetia pode permitir ao aluno “desenvolver o conceito de semelhança”. Entendemos que tais considerações de alguma forma robustecem a viabilidade da presente investigação.

De modo próximo, GIMENES (2014) estabelece uma relação entre os conceitos de semelhança e homotetia. A pesquisadora ressalta que na citada transformação geométrica:

(...) é possível verificar as propriedades fundamentais de semelhança por meio da redução e da ampliação de figuras e reconhecê-las como figura semelhante à figura original, ao identificar seus elementos variantes, a medida dos lados, e invariante, a medida dos ângulos. (GIMENES, 2014, p.40)

As considerações de GIMENES (2014) remetem à proposta da investigação realizada. Propomos a utilização de recursos didáticos que viabilizem manipulações homotéticas de modo que a transformação geométrica de homotetia possa contribuir na compreensão do conceito de semelhança. A percepção da congruência dos ângulos internos correspondentes de figuras homotéticas também deve estar no foco das atenções.

3 MATERIAIS MANIPULÁVEIS

Entendemos que um dos desafios do professor de Matemática, da atualidade, ainda é o de fazer uso de recursos didáticos que reduzam o grau de abstração dos conceitos geométricos, facilitando assim a compreensão dos mesmos por parte dos educandos. Porém, ampliamos o sentido das manipulações para além de serem oportunidades de experimentação teórica, considerando que na ação delas os alunos podem desenvolver raciocínios próprios de quem lida com o espaço diretamente.

Nesses aspectos, Ventura (2013) utilizando como referência os Princípios e as Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2007) ressalta que:

(...) desde o início dos primeiros anos, os alunos deverão desenvolver capacidades de visualização, através de experiências concretas, com vários objetos geométricos e através da utilização de tecnologias. Estes precisam de aprender a alterar, quer física, quer mentalmente, a posição, a orientação e a dimensão dos objetos. Devem compreender propriedades das figuras geométricas, no plano e no espaço, desenvolver a visualização e o raciocínio e ser capazes de o usar, bem como resolver problemas, comunicar e raciocinar matematicamente, em situações que envolvam contextos geométricos. No estudo deste tema são essenciais materiais de desenho, materiais manipuláveis – geoplano, tangrans, peças poligonais encaixáveis e outros. (NCTM, 2007, apud VENTURA, 2013, p. 3).

Dentre os vários recursos à disposição dos educadores para a dinamização dos processos de ensino e de aprendizagem destacam-se os materiais manipuláveis. Ao utilizar tais ferramentas, o educador promove a instauração de um ambiente favorável ao desenvolvimento da criatividade. Neste aspecto, Machado (2005, p. 1) enfatiza que: “num ambiente de manipulação e investigação, o aluno encontra condições para produzir o conceito, produzir conhecimento, experimentar combinações, expressar-se livremente, desenvolver a criatividade, resolver problemas, ampliar sua noção do mundo”.

Amâncio (2013) ressalta que a manipulação de figuras pode contribuir significativamente no desenvolvimento do pensamento geométrico:

Manipular figuras é muito diferente de vê-las desenhadas. A possibilidade de movimento, aliada ao tato e à visão contribuem para a formação de imagens mentais. Atividades como construir, medir, desenhar, compor e decompor, comparar e classificar figuras geométricas são importantes para o desenvolvimento do pensamento geométrico. (AMANCIO, 2013, p. 62)

Pensamos que os materiais manipuláveis podem trazer às práticas geométricas escolares um modo de dinamizar o tratamento didático, dando alternativa a um desenvolvimento apenas cursivo ao euclidianismo que funda a Geometria. Catunda et. al (1990), em semelhante linha de raciocínio, apresentam o caráter estático do modelo geométrico proposto por Euclides como um dos problemas do ensino de Geometria:

A Geometria de Euclides foi desenvolvida por ele e por seus continuadores de uma maneira estática. Isto quer dizer que as figuras são apresentadas e descritas como resultados de observação.

Só depois é que se consideram as transformações dessas figuras. Se o ensino da Geometria começa a partir das transformações (o que já poderá ser feito na escola primária, através de jogos) a Geometria adquirirá um aspecto dinâmico por que as figuras passarão a ser construídas por meio dessas transformações. (CATUNDA et. al., 1990, p. 11)

Apresentamos, a seguir, ferramentas que viabilizam a exploração de propriedades geométricas de modo interativo, em consonância com as considerações de Catunda et. al (1990) e de Santos (2012).

3.1 GEOPLANO

O geoplano pode ser entendido como um recurso didático que consiste em um tabuleiro com formato quadrado, retangular ou circular, composto por uma certa quantidade de pregos (ou pinos), os quais destinam-se a sustentar atilhos elásticos (popularmente, elásticos de dinheiro). Amâncio (2013, p. 63) destaca que utilizando esse recurso, o aluno: “... pode construir e desfazer, alterar suas construções facilmente, favorecendo a exploração de figuras geométricas”.

Ainda com relação aos benéficos da utilização do geoplano em sala de aula, Barros & Rocha (2004) ressaltam que ao utilizar o mencionado recurso didático, o professor de matemática proporciona meios para que a Geometria não seja explorada de modo mecânico, ancorado exclusivamente no uso de fórmulas:

O Geoplano entra como um excelente recurso, onde o professor pode fazer a construção do conhecimento, fazendo com que o aluno consiga trabalhar o mesmo conteúdo em diversos contextos, desenvolvendo assim o seu raciocínio, e não somente de forma mecânica onde decoram fórmulas e apenas sabem aplicá-las em problemas já conhecidos. (BARROS; ROCHA, 2004, p. 2)

Compactuamos com as considerações de Barros & Rocha (2004) no que se refere ao dinamismo que o geoplano pode imprimir ao ensino de Geometria. Ressaltamos também que a citada ferramenta pode viabilizar, em um mesmo espaço visual e manipulativo, a exploração de importantes transformações geométricas tais como rotação e translação. Consideramos que tal recurso didático é imediatamente afim com a pesquisa de objetos geométricos, possibilitando, por exemplo, a exploração dos conceitos de área e perímetro de modo mais abrangente.

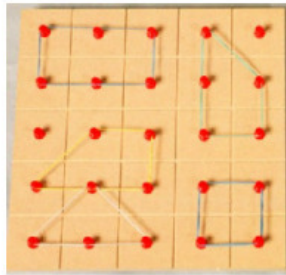


Figura 2: Geoplano
Fonte: Schons (2008)

Considerando o grau de dinamismo do referido recurso didático, selecionamos o mesmo como ferramenta, com intuito de analisar a constituição do conceito de semelhança por intermédio da interação com polígonos homotéticos.

3.2 TECNOLOGIAS DE BASE INFORMÁTICA E O USO DO GEOGEBRA

Uma das etapas de nossa pesquisa ampliou a busca de recursos didáticos que viabilizassem a constituição do conceito de semelhança de figuras de modo dinâmico e interativo. Dentre as várias ferramentas a dispor do educador, encontram-se também os recursos tecnológicos fornecidos pela informática.

Junto à emergência da tecnologia informática aparecem reflexões sobre a ideia de interação que está voltada pelas oportunidades que o ambiente virtual oferece em termos de desdobramentos pedagógicos pelas suas ferramentas. Para Ribeiro (2010), além de proporcionar dinamismo e interatividade, a utilização de novas tecnologias pode conferir ao ato de aprender maior criatividade e efetividade:

A meta é tornar a aprendizagem (...) mais estimulante, criativa e efetiva a partir do gerenciamento de novas situações de aprendizagem, (...). O importante é planejar atividades que favoreçam o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, do espírito crítico, da criatividade e da tomada de decisão em situações complexas. Além disso, as tecnologias podem atuar como dinamizadoras das relações humanas e das interações, que fazem da sala de aula um ambiente propício ao trabalho colaborativo. (RIBEIRO, 2010, p. 328)

Entendemos também que a utilização de recursos tecnológicos nas atividades que trazemos pode conceder aos alunos a oportunidade de ter um olhar diferenciado para um mesmo objeto, o que de alguma forma pode contribuir na constituição do conceito de semelhança de figuras planas.

Ainda com relação à metodologia de ensino e a utilização de computadores, Penteado (2000, apud Oliveira, 2017) ressalta que tais ferramentas podem conferir ao discente um novo papel que transcende o de um mero receptor de informações:

(...) em metodologias que envolvem atividades investigativas e o uso de computadores, o professor não é mais o detentor único do conhecimento, o aluno é mais responsável por seu conhecimento, e o ensino não é mais um processo de instrução. A aprendizagem pode ser alcançada por um processo de constituição. (PENTEADO, 2000, apud OLIVEIRA, 2017, p. 20)

Compactuamos com as considerações de Penteado (2010) ao Utilizarmos recursos didáticos e atividades investigativas que propiciam o alcance da aprendizagem do conceito de semelhança por intermédio da constituição de conceitos geométricos a partir de ações dialogadas.

Em semelhante linha de raciocínio, Lima (2016) define o Geogebra como uma ferramenta que pode contribuir na exploração de propriedades matemáticas:

Logo, por meio do dinamismo oferecido pelo software, por conta das simulações que executa e exibe ao usuário, em conjunto com uma estratégia didática, o mesmo pode se constituir em um instrumento útil na exploração, experimentação e visualização de propriedades matemáticas... (LIMA, 2016, p. 49)

Além de contribuir para a implantação de um ambiente didático favorável à busca de soluções mediante interação mútua, o mencionado software pode contribuir para também para que a temática semelhança seja abordada de modo dinâmico evidenciando relevantes conceitos geométricos tais como: homologia, paralelismo e razão de semelhança.

No que se refere à exploração de figura homotéticas em ambientes virtuais de aprendizagem, GIMENES (2014) ressalta que:

“... a transformação geométrica homotetia, construída dinamicamente em um *software* de geometria, pode produzir uma situação geométrica rica de relações (...).Ao ampliar homoteticamente figuras geométricas, o aluno tem a oportunidade de visualizar a mudança de tamanho destas figuras (...), mantendo a medida dos ângulos internos e modificando a medida dos lados de forma proporcional. (GIMENES, 2014, p. 43)

Compactuamos com a linha de pensamento supracitada, uma vez que a utilização de softwares no ensino de Geometria pode viabilizar novas formas de interação facilitando a visualização de relevantes propriedades geométricas de modo mais nítido e imediato.

As considerações supracitadas corroboram nossa linha de pensamento no sentido de que o uso de recursos tecnológicos pode imprimir considerável grau de dinamismo ao ensino de Geometria por potencializar em um mesmo ambiente várias formas de movimento.

3.3 RAIADO

Propomos, a partir de nossa iniciativa, a utilização de uma estatura metálica, a qual denominamos Raiado, composta por (03) três varetas (medindo aproximadamente 30 cm cada), soldadas as 3 no mesmo ponto, que desde já nos referiremos como ponto 0. Visando a um trabalho em geometria plana, elas serão coplanares. Com utilização de pinos para fixar atilhos elásticos, tais varetas serão graduadas cada uma a partir desse zero, de 1 em 1 cm, de modo unidirecional. As angulações entre varetas são definidas aleatoriamente, evitando-se qualquer regularidade ou notabilidade, conforme a figura abaixo:



Figura 3: Raiado
Fonte: Arquivo do Autor

Tal estrutura viabiliza a construção de triângulos homotéticos por intermédio de elásticos apoiados nos pinos fixados nas varetas.

No que se refere à importância de analisarmos a postura dos discentes frente aos recursos didáticos a serem utilizados, Carvalho (1990, p.7) ressalta que: “Na manipulação do material didático a ênfase não está sobre os objetos e sim sobre as operações que com eles se realizam”.

Ainda com relação ao exposto, Detoni & Pinheiro (2015, apud OLIVEIRA, 2017, p. 27) defendem a utilização de recursos didáticos que viabilizem uma renovação de cunho epistemológico ao ensino de Geometria. No entendimento dos mencionados pesquisadores é “pertinente pensar novas possibilidades de tratamento didático (...) que trariam valores epistemológicos renovados para uma alternativa pedagógica para a geometria”, querendo eles enfatizarem, também, que manipulações, especialmente realizadas em grupo, fazem aparecer ou ressaltar aspectos dos objetos e relações geométricos que podem ser organizados em direção a novos valores de conhecimento.

4 APRESENTAÇÃO DAS ATIVIDADES

Nas pesquisas em que preparamos as atividades de nossa proposta ~~foi~~ nos empenhamos em elaborar atividades abertas em consonância com o pensamento fenomenológico, linha filosófica que busca respeitar as vivências e individualidades dos alunos.

Além oportunizar a constituição do conceito de semelhança por intermédio da manipulação de figuras homotéticas, as atividades deveriam apresentar caráter exploratório e investigativo, bem como estarem alinhadas aos recursos didáticos que intentávamos utilizar considerando suas especificidades.

O nosso intuito é propor atividades abertas que também oportunizem a instauração de um ambiente didático com abertura para um aluno ouvir os outros considerando suas manifestações orais e gestuais.

4.1 DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES E APLICAÇÃO

Narramos aqui um pouco de nossa experiência de pesquisa, quando estudamos a aplicação das atividades. Acreditamos que essa narração possa contribuir para novas e distintas aplicações.

Em um primeiro momento oportunizamos que os alunos realizassem atividades preliminares objetivando que os mesmos pudessem “praticar” a homotetia nos diferentes recursos didáticos. Acreditamos que tal passo foi importante para intensificar o grau de familiarização dos discentes em relação aos materiais manipulativos empregados.

A parte inicial das atividades aplicadas teve por objeto revisar alguns conceitos geométricos relacionados ao conceito de semelhança, tais como homologia e proporcionalidade. Desta forma, propomos utilizar uma série evolutiva quanto ao grau de complexidade conceitual, e até procedimental, nas atividades objetivando analisar a constituição do conceito de semelhança estando em atividades com figuras homotéticas.

As atividades propostas poderão ser desenvolvidas na sala de aula ou em uma sala de recursos, como um laboratório. Em nossa pesquisa, verificamos que as atividades apresentam considerável potencial para constituição de um ambiente pedagógico favorável a produção de conhecimento se exploradas de modo coletivo. Desta forma, sugerimos que as mesmas sejam exploradas com os discentes dispostos em grupos. Cabe ressaltar que no momento da aplicação das atividades, o Grupo deve eleger um integrante para registrar no material impresso as reflexões suscitadas.

A tabela a seguir relaciona a sequência da aplicação das questões a seus respectivos materiais manipulativos.

Tabela 1: Sequência para aplicação das atividades

Etapas para Aplicação	Material Manipulativo
Primeira Sequência	Geoplano
Segunda Sequência	Geogebra
Terceira Sequência	Raiado

4.2 ATIVIDADES NO GEOPLANO

Apresentamos a primeira parte da sequência de atividades a serem desenvolvidas no geoplano. O mencionado recurso didático permite a exploração de relevantes conceitos geométricos tais como: paralelismo, perímetro, área, ângulo, homotetia, proporcionalidade e rotação.

Conforme já exposto, intuímos que a utilização do Geoplano possibilita uma nova abordagem epistemológica ao ensino de Geometria. Entendemos que a construção de polígonos mediante o uso de elásticos pode contribuir na compreensão de relevantes propriedades geométricas de modo mais abrangente.

Para iniciar as atividades no Geoplano, sugerimos que o educador disponibilize previamente os seguintes itens:

- a) Geoplano
- b) Atilhos elásticos (elástico de dinheiro)
- c) Versão impressa da lista de atividades contendo as questões abertas

Atividade 1- Entendendo Homologias

Nessa atividade, com o geoplano, propomos a utilização de elásticos envolvendo a construção de triângulos retângulos semelhantes.

Enfatizamos que essa atividade relaciona-se aos seguintes elementos e conceitos: Lados correspondentes, paralelismo, perímetro, ângulo, homotetia e proporcionalidade.

Entendemos ser relevante que as atividades propostas apresentem algumas ações preliminares para colocar os participantes em um nível de compreensão geométrica que permita avançar com mais segurança conceitual.

No que se refere aos objetivos da ação proposta, intentamos, com o suporte do geoplano, levar o aluno a manusear figuras semelhantes viabilizando, desta forma, que o mesmo compreenda com mais nitidez o conceito de lados homólogos de duas figuras semelhantes para que, a partir de tal entendimento, a temática razão de semelhança possa ser constituída.

As atividades exploradas no geoplano devem ser encaminhadas aos alunos em uma versão impressa, oportunizando que as ações desenvolvidas no citado recurso didático possam ser registradas pelos discentes no momento da realização das mesmas.

Atividade 2 - Explorando triângulos

Nessa atividade, propomos a utilização de elásticos oportunizando a construção de triângulos semelhantes.

Cabe ressaltar que a presente atividade está relacionada aos seguintes conceitos: Lados correspondentes, paralelismo, ângulo, área, homotetia e proporcionalidade.

Atividade 3 - Explorando trapézios

Nessa atividade propomos a utilização de elásticos oportunizando a construção de trapézios semelhantes.

A presente atividade está relacionada com os seguintes conceitos: Lados correspondentes, paralelismo, ângulo, área, homotetia e proporcionalidade.

Ressaltamos ainda que nesta etapa exploramos novamente o conceito razão de semelhança objetivando que haja mais consistência quanto à constituição do mesmo.

Atividade 4- Construindo quadriláteros semelhantes

Nesta Atividade propomos a utilização de elásticos oportunizando a construção de quadriláteros semelhantes.

A presente atividade está relacionada com os seguintes conceitos: Lados correspondentes, paralelismo, ângulo, homotetia, rotação e proporcionalidade.

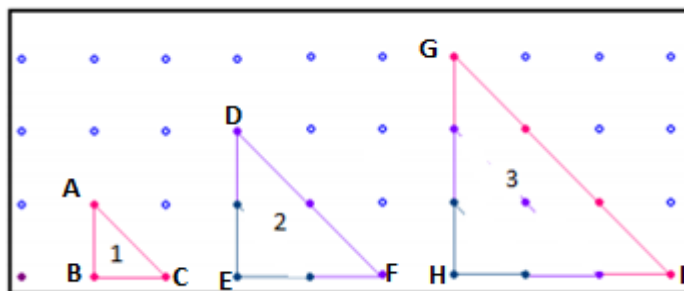
O desenvolvimento desta atividade exigirá dos sujeitos um envolvimento mais profundo em termo de compreensão geométrica uma vez que a mesma relaciona-se também ao conceito de rotação.

Conforme já exposto, exploramos também a transformação geométrica rotação, objetivando ampliar a constituição da temática semelhança de figuras planas.

Quadro 1: Atividades no Geoplano

Atividade 1 – Entendendo Homologias

1- Utilizando elásticos, construa 2 (dois) triângulos que possam ser ditos bem parecidos com o triângulo 1 (conforme a figura), mas que apresentem tamanhos diferentes:



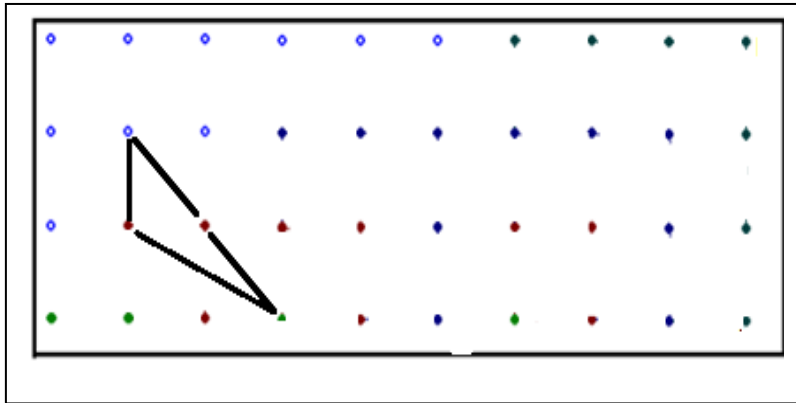
Fonte: Machado (2013) adaptado

2) Desenvolvimento de tarefas:

- a) Observando os triângulos construídos, vamos escrever o que podemos observar quando comparamos um com o outro.
- b) Vamos registrar o que podemos observar no que se refere às relações entre seus lados e seus ângulos.
- c) Vamos observar o que podemos observar no que se refere às relações entre seus ângulos internos.

Atividade 2 – Explorando triângulos

1- Utilizando elásticos, construa 1 (um) triângulo ampliado que pode ser dito bem parecido com o triângulo abaixo (conforme a figura), mas que apresenta razão de semelhança 2:

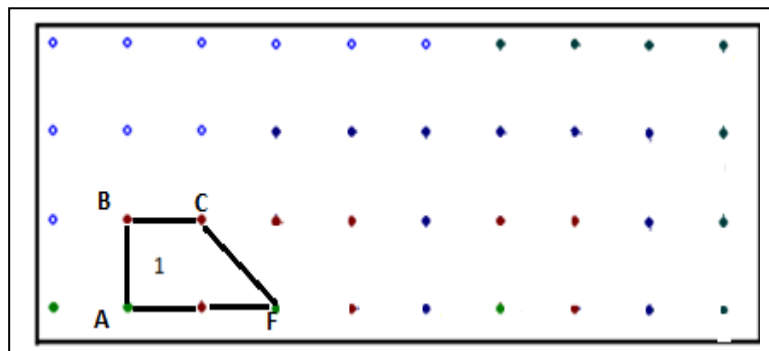


Fonte: O autor

- Vamos escrever o que podemos observar no que se refere às relações entre os lados desses triângulos
- Vamos escrever o que podemos observar no que se refere às relações entre os ângulos internos desses triângulos.

Atividade 3 – Explorando trapézios

1- Utilizando elásticos, construa um trapézio ampliado que possa ser ditos bem parecidos com o trapézio 1 (apresentado na figura abaixo), mantendo a razão de semelhança 2:



Fonte: O autor

2) Desenvolvimento de tarefas:

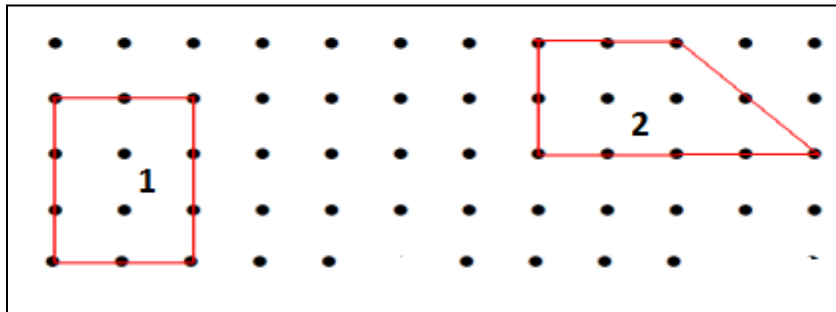
a) Vamos escrever o que podemos observar quando comparamos os trapézios um com o outro.

b) Vamos escrever o que podemos observar no que se refere às relações entre os lados desses trapézios

c) Vamos escrever o que podemos observar no que se refere às relações entre os ângulos internos desses trapézios

Atividade 4 – Construindo quadriláteros semelhantes

1 - Observe os polígonos abaixo:



Fonte: Silva & Attie (2010) adaptado

Utilizando elásticos, construa os polígonos mantendo as mesmas dimensões e formato representados nas figuras acima.

2 – Construa com elásticos dois polígonos (que denominaremos polígono 3 e polígono 4) reduzidos que podem ser ditos bem parecidos com os polígonos 1 e 2 mantendo a razão de semelhança $\frac{1}{2}$.

- a) Vamos registrar o que podemos observar quando comparamos o retângulo representado pelo polígono 1 (original) e o retângulo que você construiu representado pelo polígono 3 (reduzido).

- b) Vamos registrar o que podemos observar quando comparamos o trapézio representado pelo polígono 2 (original) e o trapézio que você construiu representado pelo polígono 4 (reduzido).

3 – Considere novamente o retângulo representado pelo polígono 1. Agora, construa com outro elástico um polígono (que denominaremos 5) que pode ser dito bem parecido com o polígono 1 e que apresente uma rotação de 90° .

Vamos registrar o que podemos observar quando comparamos o retângulo representado pelo polígono 1 (original) e o retângulo representado pelo polígono 5.

4 – Construa no geoplano novamente o trapézio representado pelo polígono 2 (original). Agora construa com outro elástico um trapézio (que denominaremos 6) que pode ser dito bem parecido ao polígono 2 e que apresente uma rotação de 90° .

Vamos registrar o que podemos observar quando comparamos o trapézio representado pelo polígono 2 com o trapézio representado pelo polígono 6.

4.3 ATIVIDADES NO GEOGEBRA

Para realização dessa etapa, sugerimos a utilização do laboratório de informática como ambiente didático de investigação. Caso não seja possível a disponibilização de tal espaço, o educador pode utilizar a sala de aula e providenciar, de modo prévio, um notebook com geogebra instalado bem como um projetor multimídia com foco na lousa (oportunizando que todos visualizassem ações de modo mais nítido).

É necessário que o educador disponibilize cópias do material impresso com as questões a serem desenvolvidas em etapas, e em seguida oriente os alunos a se organizarem

para decidirem a ordem da participação na realização das atividades no que tange à interação no notebook.

Atividade 1: Construção de Triângulos inscritos Homotéticos

Na pesquisa de campo realizada, o Geogebra oportunizou que os sujeitos explorassem o conceito de homotetia por intermédio da construção de triângulos semelhantes. Para realização dessa etapa, propomos a utilização da construção geométrica apresentada na figura abaixo:

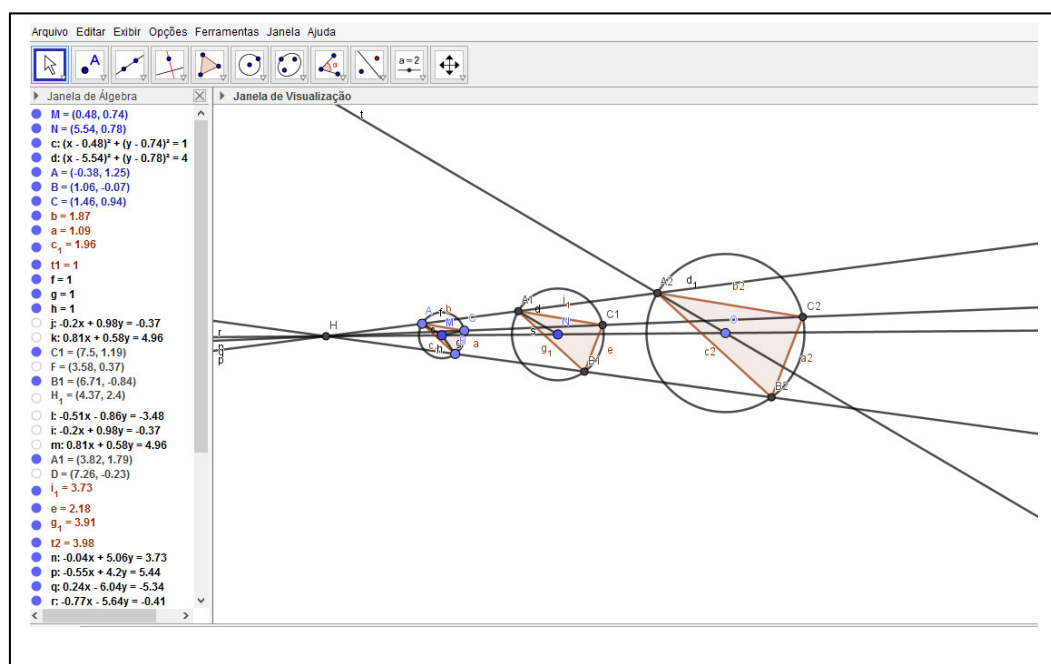


Figura 4: Triângulos inscritos homotéticos

Fonte: arquivo do autor

Essa atividade relaciona-se aos seguintes conceitos: Lados correspondentes, paralelismo, área, ângulo, homotetia, eixo de homotetia e proporcionalidade.

No que se refere aos objetivos da ação proposta, intentamos que os educandos construam figuras homotéticas, que possam viabilizar a constituição do conceito de semelhança de figuras.

Vale acrescentar que as atividades a serem exploradas no geogebra foram elaboradas com intuito de viabilizar o protagonismo dos discentes no desenvolvimento das ações.

Para realização desta etapa, o educador deve disponibilizar, de modo prévio, notebooks ou computadores com o software geogebra já instalado. Caso não seja possível a disponibilização de vários computadores, sugerimos a utilização de um notebook com

geogebra instalado, bem como um projetor multimídia com foco na lousa (oportunizando que todos os componentes do Grupo possam visualizar as ações de modo mais nítido).

Será necessária também a disponibilização de versões impressas do material impresso abaixo, com as questões a serem desenvolvidas em etapas.

Atividade 1 – Construção de Triângulos inscritos homotéticos

PRIMEIRA ETAPA

- a) Construa uma circunferência com raio 1 e centro M.
- b) Marque 3 pontos aleatórios A,B e C (sugere-se espaçados) pertencentes à circunferência.
- c) Construa o triângulo ABC inscrito na circunferência² de centro M.
- d) Construa os 3 segmentos correspondentes aos raios MA, MB e MC

SEGUNDA ETAPA

- e) Marque um ponto N em qualquer lugar “fora” da primeira circunferência
- f) Construa uma segunda circunferência de centro N e raio 2.
- g) Trace 3 retas paralelas que interceptem o ponto N, uma a cada raio MA, MB e MC (pertencentes à primeira circunferência)
- h) Marque os pontos DEF e construa na segunda circunferência o triângulo DEF que pode ser dito bem parecido ao triângulo ABC.

Vamos registrar o que há em comum entre os dois triângulos construídos

- 1) Identifique no canto esquerdo da tela, os valores dos segmentos AB e DE, BC e EF, AC e DF e calcule as razões (divisões) descritas abaixo:

$$AB / DE =$$

$$BC / EF =$$

$$AC / DF =$$

² Ao dizer aqui simplesmente ‘circunferência’, estamos querendo significar ‘circunferência de círculo’.

2) O que podemos afirmar quando comparamos as 3 razões calculadas acima ?

TERCEIRA ETAPA

- i) Trace a reta que liga os pontos M e N
- j) Trace a reta que liga os pontos A e D
- k) Marque o ponto H formado pela intersecção (encontro) das retas MN e AD.

3) Em sua opinião as retas BE e CF também interceptarão o ponto H, ou seja, passarão pelo ponto H? Justifique

4) Construa as retas BE e CF e verifique se a resposta ao item 3 está de fato correta.

QUARTA ETAPA

- l) Marque aleatoriamente um ponto O na reta MN
- m) Construa na segunda circunferência o segmento DN.
- n) Construa uma reta paralela ao segmento DN que passe pelo ponto O
- o) Marque o ponto I (formado pela intersecção das retas AD e OI)
- p) Construa uma terceira circunferência tendo OI como raio da mesma
- q) Identifique e marque nesta circunferência o ponto G (pertencente a reta BE) bem como o ponto J (pertencente a reta CF).
- r) Construa o terceiro círculo IGJ

5) Vamos registrar o que há em comum entre o triângulo IGJ e os outros dois triângulos construídos anteriormente.

4.4 ATIVIDADES NO RAIADO

Agora propomos a utilização do Raiado para construção de triângulos semelhantes com elásticos coloridos. Cabe ressaltar que tal atividade está relacionada aos seguintes elementos e conceitos: Lados correspondentes, paralelismo, ângulos e homotetia.

Como já caracterizamos o Raiado é constituído com 3 varas metálicas graduadas de forma unidirecional que se interceptam em um ponto conforme a figura abaixo³. As varas metálicas devem ser identificadas da seguinte forma: Raio I, Raio II e Raio III.

Para realização desta etapa, o educador deve disponibilizar previamente o Raiado, os elásticos bem como cópias do material impresso para que todos possam acompanhar o desenvolvimento das ações.



Figura 5: Raiado
Fonte: Arquivo do autor

³ O Raiado pode ser construído em material mais simples. Por exemplo, pode ser feito a partir de uma placa de madeira (facilitando pôr os preguinhos da graduação) na qual seriam desenhados os três raios. A partir do encontro dos raios, a graduação pode ser feita nos dois sentidos, em cada raio. Pode-se, também, fazer Raiados com mais de três raios, para se explorar polígonos de mais lados. Ainda, pode-se fazer Raiados em que os raios não são coplanares, ampliando-se a homotetia para o espaço tridimensional.

Quadro 2: Atividades no Raiado

Atividade 1 – Ação no Raiado

Desenvolvimento de atividades

- 1 – Observe a figura abaixo que representa dois triângulos construídos no Raiado.



Fonte: O autor

Movimente o elástico que forma o triângulo 2 de modo a formar um novo triângulo que possa ser ditos bem parecido ao triângulo menor.

Observando os triângulos responda.

- a) Há alguma razão de semelhança entre os polígonos. Em caso afirmativo determine o valor desta razão.

- b) Registre o que mais podemos observar quando comparamos os dois triângulos.

- 2 - Construa com elástico um Triângulo 1 com os seguintes vértices.

Raio I (Ponto 4 cm)

Raio II (Ponto 6 cm)

Raio III (Ponto 4 cm).

- a) Construa agora com elástico um Triângulo 2 que possa ser dito bem parecido com o Triângulo 1 mantendo a razão de semelhança 2.

- b) Utilizando outro elástico, construa um triângulo 3, que possa ser dito bem parecido com o Triângulo 1, mantendo razão de semelhança 3.

- c) Vamos registrar abaixo o que podemos observar quando comparamos os três triângulos

5 – CONSIDERAÇÕES SOBRE AS ATIVIDADES

A sequência de atividades proposta, entendemos, pode viabilizar a constituição de um horizonte de produção de significados geométricos no qual o conhecimento se faça em vários aspectos, além de uma apreensão e conceitos oportunizados numa sessão didática. Nossa Pesquisa evidenciou que o conceito de semelhança, alvo principal da investigação que originou este Produto Educacional, se fez junto com o homotético, ou seja, a citada transformação geométrica viabilizou a implementação de uma metodologia que acolheu as manifestações dos sujeitos e oportunizou a constituição do tema objeto de investigação.

O principal, consideramos, é oportunizar ao estudante a experiência em várias situações envolvendo significados de semelhança (imagens, movimentos, relações aritméticas). Nem sempre será imediatamente mensurável o sucesso desse empreendimento, mas os resultados de nossa pesquisa mostram uma potencial permanência desses significados com os estudantes que praticaram a homotetia, sendo, portanto, um aprendizado significativo, não fugaz.

Reforçamos a importância de que essas atividades devem ser realizadas em grupo. Fica interessante, também, ideia de a atividade com geogebra ser feita a partir de uma só

máquina, que pode ser operada pelos próprios alunos, e acompanhada por todos mediante o uso de mídia de projeção.

Entendemos que as atividades elaboradas possam contribuir no processo de ensino e de aprendizagem da temática semelhança, tendo a homotetia como referência. A mencionada transformação geométrica pode viabilizar o estabelecimento de relações entre os polígonos construídos, bem como a exploração concomitante de relevantes conceitos interligados ao citado tema tais como paralelismo, razão de semelhança e homologia.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMÂNCIO, R. A. **O Desenvolvimento do pensamento:** Trabalhando polígonos especialmente quadriláteros. 2013. 182 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2013.

ANDRADE, L. V. X. **Avaliação dos efeitos de uma sequência didática na concepção de ensino-aprendizagem e na construção do conceito de homotetia em licenciados de Matemática.** 2005. 149 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências) – Departamento de Educação, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2005.

BARROS, A. L. S.; ROCHA C. A. O uso do Geoplano como material didático nas aulas de geometria. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife. Anais do VIII ENEM. Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 2004.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018

CARVALHO, D. L. de: **Metodologia do Ensino de Matemática.** São Paulo: Cortez, 1990.

CATUNDA, O. et al. **As transformações geométricas e o ensino da Geometria.** Salvador: Centro Editorial e Didático da UFBA, 1990.

DETONI, A. R. - APONTAMENTOS DA IMPORTÂNCIA DE UM AMBIENTE DINÂMICO PARA PRÁTICAS GEOMÉTRICAS. Educação Matemática sem Fronteiras, v. 1, p. 77-95, 2019.

DETONI, A. R.; PINHEIRO, J. M. L. – **Direções para uma Filosofia Geométrica das Transformações.** VI SIPEM – Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. 2015.

GIMENES, S. S. **Contribuições de atividades de investigação e exploração com o computador na produção de conhecimento acerca do assunto semelhança.** 2014. 148 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Instituto Federal do Espírito Santo, 2014.

LIMA, N. S. **Investigações em Geometria Plana com Interfaces Digitais: Um estudo sobre Homotetia.** 2016. 118 f. (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016.

MACHADO, Rosa Maria. **Minicurso - explorando o geoplano**. In: II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática. Disponível em: <<http://www.bienasbm.ufba.br/M11.pdf>>. Acesso em: 23/09/2019.

MACIEL, A. C. **O conceito de Semelhança**: Uma proposta de Ensino. 2004. 261 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

MOISE, E. E.; DOWNS, F. L. **Geometria Moderna**. São Paulo: Edgard Blucher, 1971

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. (Tradução portuguesa do original de 2000). Lisboa: APM.

OLIVEIRA, D. B. S. **A constituição de conhecimento colaborado em geometria das transformações com ferramentas dinâmicas**. 2017. 169 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2017.

PENTEADO, M. G. Possibilidade para a formação de professores de Matemática. In: PENTEADO, M. G.; BORBA, M. (Orgs.). **A informática em ação**: formação de professores, pesquisa e extensão. São Paulo: Olhos D'Água, 2000. p. 23-34.

PEREIRA, S. R. F.; PEREIRA M. F. F. **O ensino de Semelhança de triângulos na opinião dos alunos**. XII ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática. 2016

RIBEIRO, Jackson. **Matemática: Ciência, Linguagem e Tecnologia**. 1. Ed. São Paulo: Scipione, 2010.

SANTOS, M. T. Semelhança de Triângulos e Geometria Dinâmica – O trabalho em Grupo na Aprendizagem de conceitos. 2012. 130 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

SCHONS, L. M. B: O Geoplano como recurso didático para aprendizagem de conceitos e aplicações de triângulos e quadriláteros / Liane Maria de Brum Schons. – 2008

SILVA, J. C. D.; PIETROPAOLO, R. C. Um Estudo sobre as contribuições de Felix Kline para a Introdução das Transformações Geométricas nos Currículos Prescritos de Matemática do Ensino Fundamental. **Perspectivas da Educação Matemática** – UFMS – v. 7, n. 14 – 2014

VENTURA, S. R. R. **O geoplano na resolução de tarefas envolvendo os conceitos de área e perímetro:** um estudo no 2º Ciclo do ensino básico. 2013. 152 f. Dissertação (Mestrado em Educação.) – Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2013.