

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA**  
**INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS**  
**Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática**  
**Mestrado Profissional em Educação Matemática**

**SEMELHANÇA COM MANIPULAÇÕES HOMOTÉTICAS**

**Elias da Costa Abreu**

JUIZ DE FORA (MG)

Março, 2021

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA**  
**INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS**  
**Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática**  
**Mestrado Profissional em Educação Matemática**

**Elias da Costa Abreu**

**SEMELHANÇA COM MANIPULAÇÕES HOMOTÉTICAS**

**Orientador: Prof. Dr. Adlai Ralph Detoni**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado em Educação Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática. Área de concentração: Educação Matemática.

JUIZ DE FORA (MG)

Março, 2021

Abreu, Elias da Costa.

Semelhança com manipulações homotéticas / Elias da Costa  
Abreu. -- 2021.

151 f. : il.

Orientador: Adlai Ralph Detoni

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de  
Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de  
Pós-Graduação em Educação Matemática, 2021.

1. Educação Matemática. 2. Semelhança. 3. Homotetia. 4.  
Materiais Manipulativos. 5. Fenomenologia. I. Detoni, Adlai Ralph,  
orient. II. Título.

**Elias da Costa Abreu**

**“Semelhança com manipulações homotéticas”**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação Matemática. Área de concentração: Educação Matemática.

Aprovada em 19 de março de 2021

**BANCA EXAMINADORA**



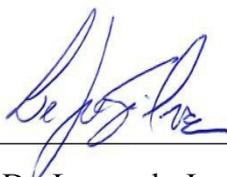
---

Prof. Dr. Adlai Ralph Detoni - Orientador  
Universidade Federal de Juiz de Fora



---

Prof. Dr. Flávio de Souza Coelho  
Colégio Militar de Juiz de Fora



---

Prof. Dr. Leonardo José da Silva  
Universidade Federal de Juiz de Fora

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por me conceder o fôlego de vida bem como as condições necessárias para realização dessa pesquisa.

Ao Professor Adlai, por sua atenção, companheirismo e empenho demonstrados em todo o processo de orientação dessa investigação.

À minha esposa Fabiana, pelo seu apoio constante e compreensão.

Aos meus filhos Daniel e Davi por contribuírem, de alguma forma, na realização da presente investigação.

Ao meu irmão Samuel, pelo suporte que contribuiu para que eu assistisse às aulas presenciais do Mestrado.

Aos meus pais Zaqueu e Sebastiana pelo incentivo. Ressalto minha gratidão pelo empenho do meu pai na fabricação do Raiado, instrumento idealizado pelo Orientador e utilizado na Pesquisa de Campo.

Aos sujeitos da pesquisa, pelo comprometimento e seriedade demonstrados na realização das atividades propostas.

Aos membros da banca de qualificação e de defesa pela contribuição no desenvolvimento dessa pesquisa.

Aos colegas do Mestrado pelo apoio e companheirismo.

E, a todos que, mesmo não mencionados aqui, de algum modo contribuíram para que os objetivos propostos fossem alcançados.

“Grandes coisas fez o Senhor por nós,  
e por isso, estamos alegres”.  
(Salmo 126:3)

## **RESUMO**

Essa pesquisa investigou de que modo o conceito de semelhança é constituído por intermédio de uma metodologia de cunho investigativo com base na transformação geométrica de homotetia. Neste propósito, fomos a campo buscando compreender, sob o crivo da Fenomenologia, como discentes que cursavam o 9º ano do Ensino Fundamental vivenciariam uma sequência de atividades abertas frente a materiais manipulativos. Os resultados obtidos foram categorizados em grupos de convergências e sugerem possibilidades alternativas para a constituição do conhecimento mediante adoção de uma nova abordagem epistemológica para a Geometria que abre caminhos para novas práticas escolares. Evidenciou-se também que a transformação geométrica de homotetia mostrou-se eficaz na constituição de um ambiente didático-pedagógico favorável à produção do conhecimento ao oportunizar o fazer geométrico de modo coletivo.

Palavras-chave: Educação Matemática. Geometria das Transformações. Homotetia. Semelhança. Materiais Manipulativos. Fenomenologia

## **ABSTRACT**

This research investigated how the concept of similarity is constituted using an investigative methodology based on the geometric transformation of homothety. In this regard, we went to the field seeking to understand, under the scrutiny of Phenomenology, how students who were in the 9th grade of elementary school would experience a sequence of open activities facing manipulative materials. The results obtained were categorized into convergence groups and suggest alternative possibilities for the constitution of knowledge through the adoption of a new epistemological approach to Geometry that opens the way for new school practices. It was also evident that the geometric transformation of homothety proved to be effective in the constitution of a didactic-pedagogical environment favorable to the production of knowledge by providing the opportunity to do geometric work collectively.

Keywords: Mathematics Education. Geometry of Transformations. Homothety. Similarity. Manipulative Materials. Phenomenology

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Transformação por homotetia .....	31
Figura 2: Geoplano .....	37
Figura 3: Raiado .....	41
Figura 4: Triângulos inscritos homotéticos .....	56
Figura 5: Raiado .....	59

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Cronograma da realização das Atividades.....	63
Tabela 2: Análise Ideográfica das Atividades no Geoplano.....	66
Tabela 3: Análise Ideográfica das Atividades no Geogebra.....	87
Tabela 4: Análise Ideográfica das Atividades no Raiado.....	109
Tabela 5: Convergência da Geometria .....	126
Tabela 6: Convergência do Pedagógico .....	128
Tabela 7: Convergência do Didático .....	129

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Ação no Geoplano (Atividade 1).....	50
Quadro 2: Ação no Geoplano (Atividade 2).....	51
Quadro 3: Ação no Geoplano (Atividade 3).....	52
Quadro 4: Ação no Geoplano (Atividade 4).....	54
Quadro 5: Ação no Geogebra (Atividade 1).....	57
Quadro 6: Ações no Raiado (Atividade 1 e 2).....	60
Quadro 7: Desenvolvimento das Atividades (Geoplano).....	82
Quadro 8: Desenvolvimento das Atividades (Geogebra).....	107
Quadro 9: Desenvolvimento das Atividades (Raiado).....	123

## SUMÁRIO

1 CONSIDERAÇÕES E JUSTIFICATIVAS QUE PERMEIAM A INVESTIGAÇÃO .....	10
2 GEOMETRIA ESCOLAR: PANORAMA DO ENSINO DE GEOMETRIA .....	15
3 TEMA PARA PESQUISA: SEMELHANÇA DE FIGURAS PLANAS.....	22
3.2.1 Aspectos Históricos.....	26
3.2.2 Felix Klein e o Programa de Erlanger .....	29
3.3 CONCEITOS DE SEMELHANÇA E HOMOTETIA.....	30
4 MATERIAIS MANIPULÁVEIS .....	34
4.1 GEOPLANO .....	36
4.2 TECNOLOGIAS DE BASE INFORMÁTICA E O USO DO GEOGEBRA .....	38
4.3 RAIADO .....	41
5 PESQUISA DE CAMPO .....	44
5.1 O CAMPO E OS SUJEITOS DA PESQUISA DA PESQUISA.....	45
5.3 DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES .....	47
5.4 ATIVIDADES NO GEOPLANO .....	48
Atividade 5.4.1 Entendendo Homologias .....	49
Atividade 5.4.2 Explorando triângulos .....	51
Atividade 5.4.2 – Explorando triângulos .....	51
Atividade 5.4.3 Explorando trapézios .....	52
Atividade 5.4.4 Construindo quadriláteros semelhantes .....	53
5.5 ATIVIDADES NO GEOGEBRA .....	55
5.5.1 Construção de Triângulos inscritos Homotéticos.....	56
5.6 ATIVIDADES NO RAIADO .....	59
5.7 CENÁRIO DOS ENCONTROS.....	62
6 APRESENTAÇÃO, INTERPRETAÇÃO E ANÁLISE IDEOGRÁFICA DOS DADOS ...	64
7 A ANÁLISE NOMOTÉTICA.....	125

8 ASPECTOS TRANSCENDENTES RELACIONADOS À INVESTIGAÇÃO .....	143
9 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	146

## 1 CONSIDERAÇÕES E JUSTIFICATIVAS QUE PERMEIAM A INVESTIGAÇÃO

No ano de 2004, ingressei no Curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Severino Sombra em Vassouras /RJ. A experiência de vivenciar a Educação Superior foi algo desafiador e ao mesmo tempo surpreendente. Pude perceber o quanto deveria me empenhar no cursar das disciplinas, visando administrar bem o tempo para ter êxito nos estudos e no trabalho.

A vida acadêmica oportunizou-me conhecer importantes pesquisadores bem como suas respectivas considerações em relação ao processo de ensino e de aprendizagem. Dentre eles, destaco Vigotsky e Paulo Freire. Todavia, ressalto que poucas propostas de ensino nos foram apresentadas no sentido de aplicação de tais metodologias em sala de aula, que pudessem enfatizar o despertar do pensamento crítico. Creio que surgiu, daí, um dos meus incômodos que justifica a propositura de um Projeto de estudo e pesquisa.

Em meados do ano de 2008 fui convidado a lecionar em uma turma de 1º ano do Ensino Médio. Tal experiência foi de suma importância na minha formação profissional. Percebi o quanto é complexa a função de educador, no sentido de aproximar o conhecimento acadêmico ao universo de saber dos educandos. Com leituras atuais, reflito sobre essas experiências passadas e, com relação à relevante e complexa função do professor, destaco as considerações de BICUDO (2005):

Ser professor é preocupar-se com o ser do aluno, tentando auxiliá-lo a conhecer algo que ele, professor, já conhece e que julga importante que o aluno venha a conhecer, também. Esse já conhece tem o sentido de que o professor é alguém que já possui pelo menos algum domínio sobre a área de conhecimento, objeto do seu ensino. Não possui o significado de que o professor domine completamente tal área e que não esteja em situação de abrir-se a novos conhecimentos (BICUDO, 2005, p. 48)

Em 2009 fui empossado como Professor de Matemática nos seguintes Órgãos: SEEDUC-RJ (Secretaria Estadual de Educação) e Prefeitura Municipal de Paty do Alferes. Durante esses 11 anos em sala de aula, sempre tive como preocupação dar continuidade aos meus estudos visando aperfeiçoar minha prática docente. Desta forma, no ano de 2010 ingressei no curso de especialização em Novas Tecnologias no Ensino de Matemática pela Universidade Federal Fluminense (UFF/RJ). Passei a conhecer alguns recursos didáticos que podem auxiliar o educador no processo de ensino e de aprendizagem de Geometria. Percebi

também que a utilização de ambientes virtuais de aprendizagem pode proporcionar considerável grau de dinamismo à prática de ensino.

Mesmo após concluir um curso de especialização, ainda percebia a necessidade de buscar atualizar-me e aperfeiçoar minha prática docente. Ainda com relação à referida necessidade, ressalto uma relevante linha de pensamento defendida por D'Ambrósio (1996):

O professor que insistir no seu papel de fonte e transmissão de conhecimento está fadado a ser dispensado pelos alunos, pela escola e pela sociedade em geral. O novo papel do professor será o de gerenciar, de facilitar o processo de aprendizagem e, naturalmente, de interagir com o aluno na produção crítica de novos conhecimentos, e isso é essencialmente o que justifica a pesquisa. (D'AMBRÓSIO, 1996, p. 80)

Acredito que a busca do alvo supracitado “novo papel do professor” aliado ao conhecimento adquirido na especialização referente à possibilidade de utilização de novas ferramentas para dinamização do ensino são fatores que me levaram a refletir ainda mais sobre minha prática docente. Tal reflexão intensificou ainda mais o incômodo pessoal citado anteriormente.

De alguma forma, o mencionado incômodo marcou meus anos de docência no período compreendido entre 2011 e 2017. Impulsionado também pelo mesmo, sempre quando possível, buscava meios de levar meus alunos para o Laboratório de Informática visando implementar novas alternativas a minha prática docente.

Constatei também, nesse ínterim, que os discentes tinham considerável grau de dificuldade no estudo de Geometria Plana. Conceitos como área, perímetro, proporcionalidade e semelhança muitas vezes eram apresentados nos livros didáticos de modo superficial. Tais constatações fizeram-me perceber que havia uma necessidade de dar continuidade a minha formação.

As dificuldades encontradas pelos meus alunos na compreensão de conceitos geométricos, bem como o já mencionado incômodo pessoal, dentre outros aspectos, levaram-me a participar, em 2017, do Processo Seletivo do Programa de Pós Graduação da UFJF para ingresso no Mestrado Profissional em Educação Matemática.

Ao ingressar em 2018 no Mestrado Profissional passei a participar do Grupo de Estudos sob Orientação do Prof. Dr. Adlai R. Detoni. As reflexões suscitadas no citado Grupo

viabilizaram o início de minha pesquisa. Pude externar aspectos de minha experiência profissional em sala de aula, bem como a percepção das dificuldades encontradas pelos meus alunos no que tange à compreensão de conceitos geométricos. Concluí que o incômodo pessoal identificado anteriormente, me motivava a realizar uma pesquisa no Mestrado Profissional tendo a Geometria como área de minha Investigação.

A escolha da mencionada área de conhecimento justifica-se, também, tendo em vista que a Geometria pode ser usada em sala de aula como uma ferramenta para facilitar a compreensão de conceitos matemáticos em geral. Tal linha de pensamento é defendida por Lorenzato (1995). O citado pesquisador enfatiza a eficiência do uso da Geometria no sentido de proporcionar ao educando uma espécie de “tradução” dos conceitos aritméticos e algébricos:

A Geometria é a mais eficiente conexão didático-pedagógica que a Matemática possui: ela se interliga com a Aritmética e com a Álgebra porque os objetos e relações dela correspondem aos das outras; assim sendo, conceito, propriedades e questões aritméticas ou algébricas podem ser classificados pela Geometria, que realiza uma verdadeira tradução para o aprendiz. (LORENZATO, 1995, p. 6).

As considerações de Vieira, Paulo e Allevato (2013) corroboram o exposto acima. Os referidos autores expressam a relevância do ensino de Geometria para o desenvolvimento de diversas habilidades:

O ensino da Geometria na matemática escolar desempenha um papel importante, pois a compreensão da geometria implica o desenvolvimento da percepção espacial, da capacidade de observar o que está ao redor e de perceber a natureza das formas. Permite, ainda, o desenvolvimento de uma série de habilidades, tais como as capacidades de descrever, de representar, de medir e de dimensionar objetos presente na vida cotidiana. (VIEIRA; PAULO; ALLEVATO, 2013, p. 617)

Pavanello (2004) descreve significativas contribuições que a Geometria pode proporcionar à formação discente:

Além do desenvolvimento da percepção espacial, Pavanello (2004) destaca outras contribuições que a geometria pode dar à formação do aluno como o desenvolvimento das capacidades de intuir, levantar hipóteses, antecipar o que pode acontecer, abstrair, generalizar e projetar. Essas capacidades conferem ao pensamento geométrico uma peculiaridade única, e são fundamentais no processo de formação do aluno. (PAVANELLO, 2004 apud VIEIRA; PAULO; ALLEVATO, 2013, p. 617)

Definida a área de Investigação, passamos a refletir no Grupo de Estudo de que maneira poderíamos delimitar o tema a ser pesquisado. Passamos também a considerar ferramentas que possibilitariam uma nova abordagem epistemológica ao Ensino de Geometria. Dentre os recursos didáticos sugeridos, destacou-se o Geoplano, por ser condizente à nova proposta de ensino desejada.

Cogitamos a possibilidade de utilizar, na pesquisa de campo, o software Geogebra com o intuito de investigar como ocorre o processo de aprendizagem em programas pertinentes a ambientes virtuais de aprendizagem.

De certa forma, tais indicações nos auxiliaram a definir o âmbito de exploração, em vista do vasto campo geométrico. Após alguns meses, percebemos que a GEOMETRIA DAS TRANSFORMAÇÕES atenderia aos nossos anseios, uma vez que tal área viabilizaria a utilização dos recursos didáticos que planejávamos.

Em nosso Grupo de Estudo, sempre consideramos a sala de aula como referência para nossas reflexões. Sendo assim, com base também na minha experiência profissional, avançamos um pouco mais na delimitação temática e definimos o tema *semelhança* como objeto a ser pesquisado.

No entanto, havia pontos que ainda necessitavam de serem considerados:

- a) De que maneira exploraríamos a referida temática na pesquisa em curso?
- b) Como a GEOMETRIA DAS TRANSFORMAÇÕES poderia nos auxiliar?
- c) Além do Geoplano e Geogebra, haveria outros recursos que também se alinhariam à exploração da temática *semelhança* com uma nova abordagem epistemológica?

Tais indagações foram muito relevantes e nortearam nossas ações. Após vários momentos de reflexão, chegamos a um consenso sobre a viabilidade de utilizarmos a transformação geométrica de homotetia como referência central para nossa investigação. Desta forma, chegamos a um questionamento preliminar que mais tarde seria lapidado: De que modo a transformação geométrica de homotetia poderia contribuir na compreensão do conceito de *semelhança*?

Definimos também quais instrumentos iríamos utilizar na Pesquisa de Campo: Geogebra e Geoplano. Além dessas ferramentas, o Orientador sugeriu a fabricação e utilização de um novo recurso didático que, assim como o Geoplano, também se alinhava à construção de polígonos homotéticos mediante o uso de elásticos. Após nos certificarmos sobre a viabilidade da fabricação do mesmo, decidimos considerá-lo como recurso didático a ser utilizado. Denominamos tal ferramenta de RAIADO. Cabe ressaltar que o citado

instrumento foi fabricado pelo meu pai, Sr. Zaqueu Abreu, com base nas instruções do Orientador. Faremos uma descrição mais detalhada do mencionado instrumento no Capítulo 4 desta Pesquisa.

Em resumo, colocamos como objetivos principais deste estudo e pesquisa a compreensão de como trabalhar homotetia como fundo para constituição de semelhança e elaborar uma sequência de atividades na forma de Produto Educacional tendo como parâmetro a implementação de uma nova abordagem epistemológica para a constituição de conceitos geométricos.

## 2 GEOMETRIA ESCOLAR: PANORAMA DO ENSINO DE GEOMETRIA

Para obtermos uma melhor compreensão da atual situação do Ensino de Geometria em nosso país, realizamos uma pesquisa bibliográfica objetivando construir um panorama do mesmo.

O primeiro passo visando alcançar o alvo supracitado foi o de pesquisarmos como a Geometria estrutura-se nos PCN bem como na BNCC. Vale acrescentar que procuramos também identificar de que modo os mencionados documentos se expõem quanto às temáticas vinculadas ao objeto de nossa investigação: transformações geométricas e semelhança.

Nos PCN, os conceitos matemáticos subdividem-se em quatro eixos: Números e Operações, Grandezas e Medidas, Tratamento da Informação e Espaço e Forma. Nesta pesquisa, iremos considerar apenas o eixo Espaço e Forma uma vez que o mesmo se atém ao ensino de Geometria, objeto da análise em pauta.

A mencionada divisão esta descrita nas considerações abaixo:

Atualmente há consenso a fim de que os currículos de matemática para o ensino fundamental deva contemplar o estudo dos números e das operações (no campo da Aritmética e da Álgebra), o estudo do espaço e das formas (no campo da Geometria), e o estudo das grandezas e medidas ( que permite interligações entre os campos da Aritmética, da Álgebra e da Geometria e de outros campos do conhecimento). (BRASIL, 1998, p. 49)

No que se refere ao Ensino de Geometria, os PCN apresentam uma categorização por ciclos. Tendo em vista que a presente investigação está voltada para o segundo segmento do Ensino Fundamental, descreveremos de que maneira o Ensino de Geometria estrutura-se nos PCN para o 3º ciclo (6º e 7º ano) e 4º ciclo (8º e 9º ano):

Os principais procedimentos elencados nos PCN para o 3º ciclo de escolaridade (eixo Espaço e Forma) são:

- Transformação de uma figura no plano por meio de reflexões, translações e rotações e identificação de medidas que permanecem invariantes nessas transformações (medidas dos lados, dos ângulos, da superfície).
- Ampliação e redução de figuras planas segundo uma razão e identificação dos elementos que não se alteram (medidas de ângulos) e dos que se modificam (medidas dos lados, do perímetro e da área).
- Quantificação e estabelecimento de relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e de pirâmides, da relação desse número com o polígono da base e identificação de algumas propriedades, que caracterizam cada um desses sólidos, em função desses números.

- Construção da noção de ângulo associada à idéia de mudança de direção e pelo seu reconhecimento em figuras planas.
- Verificação de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$  (BRASIL, 1998, p. 73)

Uma das propostas descritas nos PCN consiste no desenvolvimento das ideias de ampliação e redução de figuras planas. Neste aspecto, os PCN descrevem o objetivo de levar o aluno a perceber elementos que “não se alteram” bem como elementos “que se modificam”. Desta forma, enfatizamos que para obtermos uma compreensão mais ampla das propriedades de tais elementos, utilizaremos como referência o modelo geométrico proposto no Programa de Erlanger elaborado pelo matemático alemão Felix Klein do qual faremos menção posteriormente.

Já os principais procedimentos descritos nos PCN para o ensino de Geometria do 4º ciclo de escolaridade (8º e 9º ano) são descritos no referido documento da seguinte forma:

- Identificação de ângulos congruentes, complementares e suplementares em feixes de retas paralelas cortadas por retas transversais.
- Desenvolvimento do conceito de congruência de figuras planas a partir de transformações (reflexões em retas, translações, rotações e composições destas), identificando as medidas invariantes (dos lados, dos ângulos, da superfície).
- Verificar propriedades de triângulos e quadriláteros pelo reconhecimento dos casos de congruência de triângulos.
- Desenvolvimento da noção de semelhança de figuras planas a partir de ampliações ou reduções, identificando as medidas que não se alteram (ângulos) e as que se modificam (dos lados, da superfície e perímetro).
- Verificações experimentais, aplicações e demonstração do teorema de Pitágoras. (BRASIL, 1998, p. 88)

Conforme já exposto, nosso intuito era o de identificar de que modo a temática semelhança estava inserida no PCN. Analisando a citação supracitada, podemos perceber que o PCN já recomendava que a aula de Geometria deveria também levar o aluno a compreender os conceitos de paralelismo e congruência, os quais vinculam-se ao tema objeto de nossa investigação. Ressaltamos ainda que a proposta de desenvolver a “noção de semelhança de figuras planas a partir de ampliações ou reduções...” condiz com nossas aspirações para realização da futura pesquisa de campo, as quais serão descritas posteriormente.

No tocante à estruturação do Currículo de Matemática, pesquisamos também de que modo o Ensino de Geometria é contemplado na Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

A BNCC foi implantada segundo Resolução CNE/CP nº 2 publicada em 22 de Dezembro de 2017 objetivando, entre outros aspectos:

(...) fundamentar a concepção, formulação, implementação, avaliação e revisão dos currículos, e consequentemente das propostas pedagógicas das instituições escolares, contribuindo, desse modo, para a articulação e coordenação de políticas e ações educacionais desenvolvidas em âmbito federal, estadual, distrital e municipal (...) (Resolução CNE/CP Nº 2, 2017, p. 5)

Com relação ao prazo para implantação da Base, a Resolução (CNE/CP Nº 2, 2017, p. 11) ressalta que: “A adequação dos currículos à BNCC<sup>1</sup> deve ser efetivada preferencialmente até 2019 e no máximo, até início do ano letivo de 2020”.

A BNCC enfatiza também competências a serem desenvolvidas pelos discentes no Ensino Fundamental, em relação à área do conhecimento matemático, da seguinte forma:

Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos. (BNCC, 2018, p. 265)

O documento ressalta ainda a relevância do estudo dos conceitos geométricos. Segundo ele, a Geometria:

(...) envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nessa unidade temática, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. É importante, também, considerar o aspecto funcional que deve estar presente no estudo da Geometria: as transformações geométricas, sobretudo as simetrias. As ideias matemáticas fundamentais associadas a essa temática são, principalmente, construção, representação e interdependência. (BNCC, 2018, p. 269)

---

<sup>1</sup> Considerando o momento do início dessa pesquisa (ano de 2018) e o prazo estipulado para implantação da BNCC, julgamos ser pertinente ressaltarmos também aspectos curriculares contemplados nos PCN.

Entendo que a Geometria pode contribuir significativamente no processo de ensino e aprendizagem. Nestes anos de docência, tenho percebido que alguns conceitos, tais como módulo, área, perímetro, distância entre pontos, dentre outros, são compreendidos com mais facilidade quando o educador utiliza uma abordagem geométrica em sua prática docente. Em semelhante linha de raciocínio, Davis e Hersh (1985, apud Pereira & Pereira 2016, p. 1) descrevem a Geometria como “o ramo mais adequado da matemática no que diz respeito ao desenvolvimento de capacidade intelectuais dos alunos”

Consideramos oportuno destacar também as considerações da BNCC em relação ao “aspecto funcional” que pode ser implementado ao ensino de Geometria mediante o uso das transformações geométricas. Abordaremos tal temática de modo mais detalhado no Capítulo 3. De modo próximo aos PCN, a BNCC também contempla o ensino de Geometria alicerçado no desenvolvimento do conceito de ampliações e reduções objetivando a apropriação do conceito de semelhança, sendo um documento mais enfático ainda, em suas indicações:

No Ensino Fundamental – Anos Finais, o ensino de Geometria precisa ser visto como consolidação e ampliação das aprendizagens realizadas. Nessa etapa, devem ser enfatizadas também as tarefas que analisam e produzem transformações e ampliações/reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, de modo a desenvolver os conceitos de congruência e semelhança. (BNCC, 2018, p. 270)

Nessa exposição de argumentos, entendemos que o desenvolvimento do conceito de semelhança já era descrito, desde os PCN, como um elemento essencial na formação discente. A inclusão da referida temática na BNCC, nos faz refletir sobre a permanência da relevância da mesma no que tange à constituição<sup>2</sup> do conhecimento geométrico.

Todavia, embora os PCN e a BNCC apresentem tais procedimentos essenciais para o desenvolvimento do pensamento geométrico, acreditamos que de uma forma geral o Ensino de Geometria no Brasil ainda não atende plenamente às orientações descritas nos citados documentos.

A linha argumentativa apresentada acima está em conformidade com as considerações de Catunda et al., (1990), os quais discutem a referida temática da seguinte forma:

---

<sup>2</sup> Estamos assumindo o termo constituição em seu aspecto fenomenológico, o qual caracteriza um ambiente didático implementado por atividades abertas em que o conhecimento matemático é oportunizado e elaborado em ação.

A geometria, que quase desapareceu dos programas e exames, está sendo muito discutida quanto aos problemas do seu ensino e se analisam os resultados de um erro cometido, porque a compreensão geométrica não pode faltar ao aluno.

A aprendizagem nos cursos universitários de Matemática se ressentem da absoluta falta de base que os alunos apresentam em geometria, ao ingressar na Universidade.

É preciso mergulhar fundo nos problemas do ensino de geometria, e indagar as causas de seu fracasso. Por exemplo, é preciso perguntar:

- Por que a Geometria não é ensinada na maioria das escolas embora conste algumas vezes dos seus programas? (...)

Vamos nos limitar a tecer, apenas, algumas considerações em torno do assunto.

Primeiro: o ensino de Geometria não se renovou e, com isso, ela perdeu o seu vigor.

A Geometria ensinada na maioria das escolas brasileiras é a Geometria de Euclides na sua apresentação milenar, excessivamente formal, e no seu aspecto exclusivamente de medida (...).

Segundo: os professores, na sua maioria, não dominam conhecimento de geometria (...)

Terceiro: os livros textos, para o ensino do 1º grau, apresentam uma geometria que, além de milenar, se limita a definir figuras e seus elementos.

Quarto: no passado, a geometria euclidiana, era, em geral, ensinada a alunos da faixa etária de 14 a 16 anos. Essa mudança acarreta, certamente, dificuldades para o ensino da geometria por falta de maturidade dos alunos quanto ao aspecto dedutivo que a geometria envolve e é essencial para sua compreensão. (CATUNDA, et al., 1990, p. 13)

Entendemos que muitos dos problemas relacionados ao ensino de Geometria em nosso país, identificados pelos mencionados pesquisadores aos fins do século XX, persistem até os dias atuais. Tal linha de pensamento é defendida pelas pesquisadoras Caldato & Pavanello (2015) no artigo intitulado “Um Panorama histórico do ensino de geometria no Brasil: de 1500 até os dias atuais”.

Na citada pesquisa, Caldato & Pavanello (2015), ao descreverem o desempenho dos discentes brasileiros submetidos a avaliações elaboradas pelo Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) em Geometria, expressaram-se da seguinte forma:

Os resultados obtidos pelos alunos nessas provas, especialmente no tocante à geometria, mostram que apesar das tentativas explícitas de restabelecimento do ensino desta no Brasil – principalmente por meio de medidas governamentais, como a inclusão de conteúdos de geometria em currículos em nível nacional e estadual - não se tem observado resultados positivos em relação ao alcance dos objetivos dessas medidas. (CALDATTO; PAVANELLO, 2015, p. 123)

Vale ressaltar que o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) passou a vigorar em nosso país em 2015 e é descrito no site do MEC<sup>3</sup> como “... um conjunto de avaliações externas em larga escala que permite ao Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) realizar um diagnóstico da educação básica brasileira e de fatores que podem interferir no desempenho do estudante.”

Já Proença (2008) resalta alguns aspectos que podem atribuir ineficácia ao Ensino de Geometria. Para o citado pesquisador, uma prática docente alicerçada na mera aplicação de fórmulas prontas não contribui para o desenvolvimento do “pensamento geométrico”:

O desenvolvimento das capacidades intelectuais do pensamento geométrico pode ser prejudicado se os conceitos não forem abordados utilizando uma estratégia eficaz de ensino. A geometria, mesmo presente no currículo da unidade escolar, muitas vezes, tem sido negligenciada até o fim do ano letivo. Quando é trabalhada, o professor simplesmente solicita aos alunos que apliquem fórmulas prontas de cálculo de área e volume. Não é feito um estudo explorando os elementos principais de figuras geométricas, os quais realmente caracterizam essas formas e que contribuem para uma melhor formação conceitual em solução de problemas. (PROENÇA, 2008, p. 29)

No que se refere às dificuldades vivenciadas pelos professores de Matemática no ensino de Geometria, Almouloud, et al., (2004) expressaram-se da seguinte forma:

A análise do sistema educativo, do discurso dos professores e dos jogos que envolvem a própria geometria nos permite identificar certos fatores que podem ser considerados origem de dificuldades que os professores encontram no processo de ensino e de aprendizagem de saberes e de conhecimentos geométricos.

Em primeiro lugar, identificamos como fator de dificuldades o nosso sistema educativo, que define a política da educação com recomendações e orientações gerais sobre os métodos, os conteúdos e o saber fazer, deixando para cada escola definir os conteúdos que julga importantes para a formação de seus alunos, o que faz com que a geometria seja frequentemente esquecida (...)

Além disso, alguns livros didáticos também contribuem para a origem de vários problemas, pois as situações de ensino apresentadas naqueles que analisamos e que são propostas para os alunos, de maneira geral, pela maioria dos professores, não enfatizam suficientemente a coordenação de registros de representação semiótica e a importância da figura para a visualização e exploração. Os problemas geométricos propostos por esses livros privilegiam resoluções algébricas, e poucos exigem raciocínio dedutivo ou demonstração. E ainda, quase não existe a passagem da geometria empírica para a geometria dedutiva, além de poucos trabalhos focarem a leitura e a interpretação de textos matemáticos. Essas abordagens

---

<sup>3</sup> Disponível em: <<http://portal.inep.gov.br/educacao-basica/saeb>>. Acesso em: 18 jun. 2020

criam no aluno concepções inadequadas no que diz respeito ao aprimoramento dos conceitos geométricos. (ALMOULOUD, et al., 2004, p. 99)

Em suas considerações, Almouloud, et al. (2004) expressam relevantes fatores relacionados ao ensino e aprendizagem de Geometria. Particularmente, utilizando como referência minha experiência como educador, poderia adicionar a estes outras questões interligadas à constituição do pensamento geométrico. Nestes 10 anos de docência, tenho percebido que de uma forma geral, os discentes do Ensino Fundamental apresentam dificuldades na compreensão de relevantes conceitos geométrico tais como: semelhança, perímetro, área, etc...

Ressalto ainda que as dificuldades relacionadas ao ensino de Geometria não se restringem ao Ensino Fundamental. Em sala de aula, não é difícil constatar que muitos alunos do Ensino Médio também apresentam dificuldades na compreensão de idéias vinculadas ao campo geométrico tanto na abordagem analítica quanto na espacial. De alguma forma, tais questões relacionadas à minha experiência profissional me motivaram a realizar a presente pesquisa com o intuito de buscar alternativas para dinamizar e facilitar o processo de constituição do conhecimento geométrico.

### 3 TEMA PARA PESQUISA: SEMELHANÇA DE FIGURAS PLANAS

Entendemos ser pertinente compreender de que forma outros pesquisadores se expõem sobre a temática semelhança de figuras planas. Desta forma, realizamos uma revisão de literatura sobre o citado tema, objeto de investigação.

#### 3.1 PESQUISAS QUE TRATAM DO TEMA EM INVESTIGAÇÃO

Dentre os autores encontrados, que abordam o tema semelhança de figuras planas, destacamos Maciel (2004) que elaborou a pesquisa intitulada: “O conceito de Semelhança: Uma proposta de ensino”. Em suas considerações, a mencionada pesquisadora apresenta o intuito de sua investigação, que entre outros aspectos, era o de: “... analisar as dificuldades enfrentadas na formação do conceito de semelhança por alunos do 1º ano do Ensino Médio...” (MACIEL, 2004, p. 16).

No que se refere aos aspectos metodológicos envolvendo o ensino de semelhança, Maciel (2004, p. 70) afirma que: “A maneira como se tem ensinado semelhança de figuras planas e a forma com essa propriedade vem sendo apresentada nos livros didáticos pode proporcionar aos alunos a aquisição de uma concepção limitada do conceito.”

Com relação a isso, essa autora afirma, com base em pesquisa realizada, que em alguns casos os conceitos vinculados à citada temática são explorados isoladamente. Entendemos que tal escolha pode interferir no processo de constituição do conhecimento geométrico, corroborando o que ela indica ao afirmar que:

(...) percebemos que os conceitos de proporção, propriedades de figuras planas geométricas, homotetia, ampliação (redução) e semelhança, quando trabalhados, são, em alguns casos, de maneira estanque, sem que se realizem atividades que promovam a percepção, por parte do aluno, de relações entre esses conceitos, (...). (MACIEL, 2004, p. 70)

Maciel (2004) enfatiza também que os sujeitos de sua pesquisa apresentavam dificuldades em estabelecer relações entre o tema semelhança e a realidade nos quais estavam inseridos. Segundo a pesquisadora, uma das razões que contribui para tal constatação encontrava-se numa metodologia de ensino desprovida de caráter interdisciplinar:

A falta de articulação entre conteúdos dentro da própria Matemática e a ausência de conexões entre um mesmo tema abordado em diferentes contextos contribuem para uma visão fragmentada, em que não existe

relações entre os conteúdos nem destes com a realidade. Um exemplo, em Geometria, é a semelhança de triângulos, abordada em Matemática e em formações de sombras e imagens em Ótica Geométrica, na Física, conteúdos esses trabalhados sem nenhuma relação. (MACIEL, 2004, p. 67)

Ainda com relação às dificuldades apresentadas pelos educandos no que se refere à compreensão do conceito de semelhança, Pereira & Pereira (2016) apresentam um diagnóstico dos processos de ensino e de aprendizagem da citada temática tendo como referência a opinião de discentes. Os pesquisadores ressaltam que:

No que se refere ao nível de dificuldades que os alunos apresentam para a aprendizagem de semelhança de triângulos, a pesquisa revelou que apesar dos alunos avaliarem que o grau de dificuldade está numa escala regular, os dados revelaram que existem alguns tópicos neste conteúdo que precisam de uma maior atenção no momento de seu ensino, principalmente no que se refere às questões contextualizadas que envolvam triângulos semelhantes dispostos de diferentes formas e o cálculo de distâncias inacessíveis. (PEREIRA; PEREIRA, 2016, p. 7)

Maciel (2004) nos leva a refletir sobre outro aspecto que pode ser considerado como um obstáculo para a compreensão do conceito de semelhança: o entendimento errôneo de que para que duas figuras sejam semelhantes é necessário que o conceito de congruência se aplique à comparação das mesmas:

Muitos alunos disseram que (...) figuras não são semelhantes porque são diferentes ou porque possuem medidas diferentes. Na opinião deles, para duas figuras serem semelhantes é necessário que tenham as medidas congruentes, o que demonstra não apresentarem conhecimento sobre o conceito científico de semelhança. (MACIEL, 2004, p. 66).

Nossas experiências em sala de aula nos levam a refletir sobre a plausibilidade das considerações supracitadas. Percebemos que considerável quantitativo de discentes não compreende satisfatoriamente o conceito de proporcionalidade. Entendemos que tal lacuna acaba por contribuir por levá-los a conjecturar que a congruência é uma condição indispensável para o estabelecimento da ideia de semelhança.

Frade (2012) enfatiza que a aprendizagem do conceito de semelhança pode ser considerada como um problema vinculado ao campo geométrico. Com base em sua experiência como educador, o referido pesquisador menciona dificuldades encontradas pelos discentes na compreensão do citado tema:

Então, a partir da minha prática como professor dos Ensinos Fundamental, Médio e Superior, como Coordenador de Área e como Analista de Série, percebo e vivencio que os alunos apresentam dificuldades de aprendizagem de Geometria Plana, em especial quando são questionados em relação a (...) identificação de semelhanças e diferenças entre polígonos, usando critérios como número de lados, número de ângulos, eixos de simetria, etc.; (FRADE, 2012, p. 39)

Em sua pesquisa, Silva (2007, p. 76) também constatou dificuldades relacionadas à compreensão do conceito de semelhança de figura planas durante a resolução de atividades propostas: “... observamos que os alunos tinham dificuldades para construir o conceito de semelhança, pois tal construção movimentava conceitos prévios, (...), que os alunos demonstravam não ter domínio”. Compactuamos com a linha de raciocínio apresentada pelo pesquisador. Tomando como referência nossas experiências profissionais, destacamos alguns destes “conceitos prévios” que interferem na aprendizagem do conceito de semelhança: paralelismo, razão e proporcionalidade.

Entendemos que todos os pesquisadores mencionados nesta seção corroboram que levar o aluno a compreender o conceito de semelhança de figuras planas não é uma tarefa simples. A revisão de literatura realizada levou-nos a entender também que a constatação de dificuldades relacionadas aos processos de ensino e de aprendizagem do conceito de semelhança de figuras planas sinaliza uma espécie de demanda quanto à elaboração de mais investigações abordando tal temática. Tal entendimento auxiliou-nos a mantermos o foco da presente investigação nessa direção.

A conclusão supracitada se fez presente de modo consistente nas reflexões em nosso Grupo de Estudo. As considerações dos autores corroboravam as vivências de sala de aula evidenciando que o conceito de semelhança merecia especial atenção, contribuindo para as primeiras articulações nossas, no que se referia aos futuros passos da investigação.

Desta forma, concluímos que a compreensão do conceito de semelhança de figuras planas pode ser entendida como um problema vinculado ao campo geométrico o que nos levou a debruçar-nos sobre o citado objeto.

### 3.2 GEOMETRIA DAS TRANSFORMAÇÕES

Conforme já exposto, a BNCC sugere a utilização de uma metodologia de ensino alicerçada nas transformações geométricas visando também à implementação de um “aspecto

funcional” ao estudo da Geometria. Sendo assim, consideramos necessário descrever algumas considerações concernentes à Geometria das Transformações.

Lage (2008, p. 27) apresenta a ideia de transformação da seguinte forma: “A ideia da transformação geométrica no plano é simples; cada ponto será associado a um novo ponto no plano a partir de uma regra a ser seguida”.

No que se refere à relevância de uma prática de ensino pautada no conceito de transformações geométricas, Catunda, et al., (1990) expressaram-se da seguinte forma:

Usar transformações geométricas no ensino de Geometria é uma recomendação centenária.

Em 1872, no seu trabalho “Introdução ao estudo da Geometria, baseado no conceito de transformações”, Felix Klein afirmava que o conceito de transformação desempenha um vasto papel coordenador e simplificador no estudo de Geometria (CATUNDA, et al., 1990, p. 13)

Já Andrade (2005, p. 16) ressalta o dinamismo que a Geometria das Transformações pode proporcionar aos processos de ensino e de aprendizagem: “Dentre os diversos conteúdos de Geometria, a ênfase nas transformações possibilita o ensino desta disciplina de forma dinâmica, fazendo com que se observem as regularidades e propriedades geométricas”. Neste aspecto, vale ressaltar que a possibilidade de proporcionar dinamismo ao ensino de Geometria foi um dos fatores que nos levou a considerar a Geometria das Transformações como campo de nossa investigação.

De modo próximo, Detoni & Pinheiro (2016) ressaltam relevantes aspectos concernentes à prática docente que explora o movimento bem como as relações entre objetos geométricos:

As propriedades relacionais de um objeto a outro, ou mesmo dele próprio em duas posições distintas após movimento, indicam uma temporalidade que não é suscitada no tratamento elementar. Na geometria que tem essas características, entendemos que um dinamismo está correlato ao seu pensar. (DETONI; PINHEIRO, 2016, p. 242).

Ainda com relação ao dinamismo que pode ser articulado nas aulas de Matemática mediante a exploração do conceito das transformações geométricas, Silva & Pietropaolo (2014) expressaram-se da seguinte maneira:

As Transformações Geométricas constituem um conteúdo indispensável para o desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos, pois permite

explorar conceitos e propriedades da Geometria, por meio da experimentação e do movimento. (SILVA; PIETROPAOLO, 2014, p. 301)

Enfatizando a relevância da adoção de uma prática de ensino que considere a utilização das transformações geométricas, a BNCC afirma que:

É importante, também, considerar (...) no estudo da Geometria: as transformações geométricas, sobretudo as simetrias. As ideias matemáticas fundamentais associadas a essa temática são, principalmente, construção, representação e interdependência. (BNCC, 2017, p. 271)

Compactuamos com o que está citado acima, no entanto ressaltamos que a ênfase apenas na simetria representa desperdício de esforços, se o caso é de trabalhar metodologicamente com as transformações em sua ideia mais geral. Podemos entender essa ênfase no texto dado a referência que o estudo da simetria tem, mesmo quando ela é trabalhada sem estar no espírito geral das transformações.

As considerações dos pesquisadores mencionados bem como as recomendações da BNCC tiveram papel importante em nossas reflexões. Tais aspectos levaram-nos a manter a Geometria das Transformações como campo de nossa investigação.

### **3.2.1 Aspectos Históricos**

Julgamos oportuno abordar alguns aspectos históricos concernentes à Geometria das Transformações, buscando neles mais um ponto de apoio para compreensão de nosso tema. Visando alcançar tal intento, abriremos uma temporalidade reportando-nos ao fim do século XIX.

Com base nas considerações de Detoni & Oliveira (2018) entendemos que foi neste ínterim que o estudo das transformações geométricas começara a alcançar considerável grau de destaque:

Quando falamos em Transformações, nos reportamos aos fins do século XIX, quando a Matemática, a Geometria em especial, desenvolvia ideias mais amplas em sua estrutura e o estudo de invariáveis abria outros horizontes que aquele posto pelas congruências. (DETONI; OLIVEIRA, 2018, p. 9)

Ainda com relação à utilização do conceito de transformações geométricas no mencionado contexto histórico, Piaget & Garcia (1987) ressaltam que:

(...) por um longo período – que abrange séculos –, a noção de transformação em geometria foi constantemente aplicada, no entanto ela ainda não era tematizada em seu significado e possibilidades; muitas concepções abstratas em matemática, hoje sistematizadas, foram postas em uso sem as atuais reflexões que nos permitem justificar sua utilização bem como direcionar seus sentidos a contextos matemáticos distintos. (PIAGET; GARCIA, 1987 apud DETONI; PINHEIRO, 2016, p. 237)

Entendemos que esta citação reforça que as transformações geométricas devem ser estudadas com o cuidado de buscar sua ideia geral, e utilizadas como um método de trabalho geométrico no processo de ensino e aprendizagem.

Piaget & Garcia (1987) descreve um momento histórico posterior em que os estudos referentes ao conceito de transformação alcançara considerável desenvolvimento, principalmente devido às contribuições de Lie e Klein:

A condução do conceito de transformação, segundo os autores, deu-se ao longo dos séculos e foi marcada por um apogeu. No entanto é a partir do século XX, com os estudos de Lie e Klein, que esse conceito se tornou mais abrangente, já que as concepções desses matemáticos, baseadas na noção de grupo de transformação e as invariantes correspondentes, mostraram-se como utensílios necessários para introduzir as distinções precisas entre os diferentes tipos de geometria. (PIAGET; GARCIA, 1987 apud DETONI; PINHEIRO, 2016, p. 239)

Ainda com relação aos estudos de Sophus Lie e Felix Klein, Detoni & Oliveira (2018) enfatizam que as considerações de tais pesquisadores propiciaram uma “nova abordagem epistemológica para a geometria” abrindo caminhos para práticas escolares alternativas:

São empreendimentos como esse (estudos acerca de transformações) que levam Felix Klein, ao publicar seu famoso *Programa* (KLEIN, 1872), à compreensão do que estava sendo realizado estruturalmente na Matemática de então: os invariantes, formando grupos para cada situação, ditavam geometrias correlatas. Junto com alguns contemporâneos, como Sophus Lie, ofereceram uma nova abordagem epistemológica para a Geometria, contribuindo para desdobramentos educacionais em novas práticas escolares. (DETONI; OLIVEIRA, 2018, p. 10).

Alicerçamos a presente investigação nesta ‘nova abordagem epistemológica’ quando focamos a transformação geométrica de homotetia para desenvolver atividades de nossa

pesquisa, investindo nela como método e pensamento geométrico próprio, isto é, capaz de se aplicar a situações peculiares de seu repertório potencial.

Ainda com relação aos aspectos epistemológicos vinculados ao conceito de transformação, Piaget e Garcia (1987) sugerem, com base na teoria psicogenética, a existência de níveis de organização referentes à constituição do conhecimento. Não trabalhamos aqui com a perspectiva psicogenética, porém consideramos interessantes os seus resultados para uma visão estruturada das transformações. Os citados níveis foram caracterizados por esses pesquisadores como uma tríade “intra-inter-trans”. Fernandes & Healy (2007) apresentam tal caracterização de tais etapas da seguinte forma:

Na etapa intrafigural, os sujeitos não percebem as transformações da figura dentro do conjunto (figuras-plano). Centram-se nas propriedades internas das figuras e nas relações internas de duas ou mais figuras, o que resulta numa comparação entre essas figuras. (FERNANDES; HEALY 2007, p. 123)

Vale ressaltar que na etapa supracitada observa-se um predomínio de uma abordagem geométrica em que os polígonos são explorados cada um em sua especificidade, ou seja, há uma ênfase no estudo das propriedades métricas de cada figura. Tal fase pode ser entendida como um marco da Geometria grega tradicional euclidiana.

Com relação ao segundo nível, Piaget & Garcia (1987, apud Fernandes & Healy 2007) denominam fase interfigural:

(...) aquela em que o sujeito utiliza somente referências internas do sistema analisado, ou seja, as figuras estão num plano, e esse conjunto (figuras-plano) apresenta características de totalidade. A transformação associa a uma figura-objeto sua figura-imagem... (PIAGET; GARCIA, 1987, apud FERNANDES; HEALY 2007, p. 123)

Enfatizamos que nessa fase há uma busca das relações entre objetos, as quais podem ocorrer entre um determinado objeto e ele mesmo, por exemplo, bem como entre o mesmo e sua projeção. Tal nível caracteriza-se pela busca da identificação de propriedades invariantes no estudo de uma transformação. Essa fase é um marco da Geometria das Transformações e da Geometria Projetiva.

No tocante à fase transfigural, Fernandes & Healy (2007) ressaltam que:

Essa etapa não trata somente da transformação de uma figura noutra, mas opera sobre todos os pontos do plano, verificando a realização de determinadas condições (...). Trata-se, sobretudo, de uma fase que se opera

sobre um conjunto de elementos, podemos dizer que de relações entre relações onde as transformações podem ser compostas e decompostas, já que passam a ser objetos. (FERNANDES; HEALY 2007, p. 123)

Podemos classificar tal fase como um estágio superior ao nível interfigural, em que há um enfoque das transformações nelas mesmas, independente dos objetos que alimentam os movimentos das transformações. Daí advém o sentido de método e cada possibilidade, tais como a simetria e a homotetia, pode ser entendida como uma ação metodológica.

### **3.2.2 Felix Klein e o Programa de Erlanger**

A elaboração desta pesquisa consistiu também na busca de pesquisadores que me propiciassem uma melhor compreensão das particularidades da Geometria das Transformações. Dentre alguns pesquisadores encontrados, Felix Klein e o seu Programa de Erlanger têm muita pertinência para nosso estudo.

Felix Klein nasceu na Alemanha no ano de 1849 mais precisamente na cidade de Dusseldorf. Em 1872 o mencionado pesquisador assume o ofício de Professor na Universidade de Erlanger. Ainda no referido ano, Klein apresenta à citada Universidade uma nova abordagem geométrica alicerçada principalmente na aplicação de Grupos à Geometria. Tal modelo que originalmente intitulava-se “Considerações Comparativas referentes a Recentes Investigações Geométricas” seria mais tarde denominado pela comunidade acadêmica como “Programa de Erlanger”. De certa forma, podemos afirmar que um dos pilares deste está no conceito de transformação do plano.

Maciel (2004) descreve o citado Programa da seguinte forma:

Em seu programa, Klein utilizou a aplicação dos grupos à Geometria. Para que se compreenda esta aplicação, devemos partir do conceito da transformação do plano. (...)

Para ilustrar a definição de geometria proposta por Klein, consideremos o conjunto T de todas as transformações do plano caracterizadas por reflexões em torno de retas, rotações e translações. Considerando que o produto de duas dessas transformações e que a inversa de uma delas sempre estão em T, segue-se que se trata de um grupo de transformações. Para Klein, a Geometria que resulta deste grupo é a Geometria Euclidiana Plana. Ao considerarmos também as transformações homotéticas, obtemos o grupo das semelhanças, e a Geometria que resulta deste grupo é a Geometria das Semelhanças. (MACIEL, 2004, p. 10-11)

Vale acrescentar ainda, que segundo Maciel (2004, p.11): “Grupo das Semelhanças é formado pelo conjunto das translações, rotações e reflexões, acrescentando as homotetias”.

Desse modo, ao querer trabalhar com homotetias, podemos acrescentar rotações para alçar à generalidade das semelhanças.

As considerações de Silva & Pietropaolo (2014) nos permitem compreender de modo mais amplo a proposta de Felix Klein em relação à Geometria das Semelhanças:

No seu livro, Klein (1909) propõe o estudo da semelhança definindo uma função com a finalidade de transportar uma figura em outra semelhante, preservando as suas propriedades. Essa função é também um conjunto que contém as translações, a simetria axial, a homotetia, a rotação e suas possíveis composições. (SILVA; PIETROPAOLO, 2014, p. 308)

O conceito de invariância é também um dos temas centrais do Programa de Erlanger. Piaget & Garcia (1987) além de enfatizarem a relevância das considerações de Felix Klein para o desenvolvimento do citado conceito, ressaltam com propriedade que a ênfase no estudo das propriedades invariantes implementou, uma nova abordagem epistemológica à Geometria:

“É apenas com Lie e Klein, e baseados na noção de *grupo* de transformação e as invariantes correspondentes, que se disporá do utensílio necessário para introduzir as distinções precisas entre os diferentes tipos de geometria. Desta vez é Felix Klein que vai formular de modo magistral o novo ponto de vista. Uma nova etapa será assim inaugurada. A passagem da etapa das transformações projetivas à etapa das estruturas de grupos constitui uma lição preciosa para a epistemologia” (PIAGET; GARCIA, 1987 apud OLIVEIRA, 2017, p. 22).

Ressaltamos ainda que o objetivo desta investigação não consiste em levar o educando a se apropriar das particularidades do modelo Geométrico proposto por Klein. No entanto, entendemos que tal embasamento teórico, possa nos proporcionar um olhar mais minucioso no que se refere a percepções de propriedades invariantes, relatadas pelos sujeitos durante a efetivação da pesquisa de campo.

### 3.3 CONCEITOS DE SEMELHANÇA E HOMOTETIA

Entendemos ser pertinente enfatizarmos, nesse momento da investigação, algumas considerações concernentes aos conceitos de semelhança e homotetia.

Ribeiro (2010) ao definir o conceito de semelhança expressou-se da seguinte forma:

Para que dois ou mais polígonos com a mesma quantidade de lados sejam semelhantes, é necessário que satisfaçam, simultaneamente, as seguintes condições:

- As medidas dos lados correspondentes devem ser proporcionais;
- As medidas dos ângulos correspondentes devem ser iguais;

A razão entre a medida do lado de um polígono e a medida do lado correspondente de outro polígono é chamada de **razão de semelhança**. (RIBEIRO, 2010, p. 312)

Moise & Downs (1971, apud Lima 2016) ressaltam que o conceito de semelhança:

(...) parte da ideia de proporcionalidade, na qual duas figuras geométricas, no caso poligonais, possuem exatamente a mesma forma, sem contudo, possuírem necessariamente as mesmas medidas. O termo “forma”, nesse contexto, refere-se às propriedades geométricas que essas figuras têm em comum: uma escala entre as medidas dos lados e a congruência de seus ângulos internos. Escala, neste caso, diz respeito à razão de semelhança entre as propriedades das figuras em questão. (MOISE; DOWNS, 1971 apud LIMA 2016, p. 23)

As considerações acima enfatizam que os conceitos de razão de semelhança e proporcionalidade estão interligados ao tema objeto de nossa investigação. Ressaltamos que na efetivação da pesquisa de campos intentamos propor atividades que nos permitam também verificar se os sujeitos irão constatar a existência de tais relações.

No que se refere ao conceito de homotetia, Gimenes (2014) resalta que esta transformação geométrica:

(...) é um dos processos para realizar a mudança de tamanho da figura que mantém os atributos de figuras semelhantes, pois leva uma figura a outra, ampliada ou reduzida, mantendo a medida dos ângulos internos e modificando apenas a medida dos lados de forma proporcional. (GIMENES, 2014, p. 44-45)

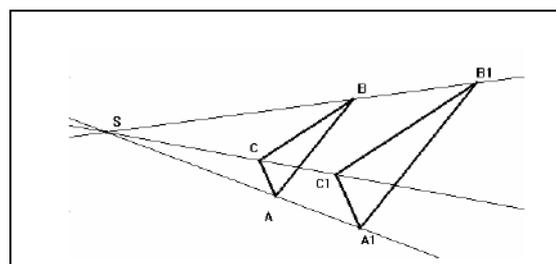


Figura 1: Transformação por homotetia  
Fonte: Andrade (2005)

Acima, vemos ilustrado uma configuração mais usual para figuras dispostas homoteticamente, em que o ponto 's', chamado centro de homotetia, pode ser visto criando a figura  $A_1B_1C_1$  a partir da figura ABC, num exemplo de homotetia direta. A 'razão de homotetia' implicitamente presente pode ser lida na razão das medidas dos 'raios de homotetia'  $SA_1$  e SA. Complementamos lembrando que se pode transformar a mesma figura ABC, também com centro em 's', em outras que estarão em semirretas opostas às que vemos na figura, com origem em 's'. Estas seriam transformações ditas homotetias inversas.

As considerações de Marmo (1964, p. 11) enfatizam a relação existente entre homotetia e paralelismo: "Figuras homotéticas são figuras semelhantes que, além disso, têm os segmentos homólogos paralelos. Podemos abreviar, dizendo que: Homotetia = Semelhança + Paralelismo".

No que se refere à utilização do conceito de homotetia como método geométrico, Andrade (2005) ressalta que ao fazer uso didático de tal objeto, o professor de matemática pode propiciar meios para vincular a geometria a outras áreas que compõem o conhecimento matemático.

No Ensino Fundamental, é válido ressaltar o estudo das transformações por homotetia. Elas constituem um caso particular de semelhança em que os lados correspondentes são paralelos. Nelas, o aluno pode desenvolver o conceito de semelhança e congruência. O estudo da homotetia possibilita ao educando explorar as grandezas lineares e angulares, como também os números e razões numéricas. Dessa forma, o conteúdo interliga o bloco espaço e forma com os números e operações e grandezas e medidas. (ANDRADE, 2005, p. 16).

Ressaltamos ainda que segundo linha de pensamento supracitada, corroborando com a intenção principal de nossa proposta, a homotetia pode permitir ao aluno "desenvolver o conceito de semelhança". Entendemos que tais considerações de alguma forma robustecem a viabilidade da presente investigação.

De modo próximo, Gimenes (2014) estabelece uma relação entre os conceitos de semelhança e homotetia. A pesquisadora ressalta que na citada transformação geométrica:

(...) é possível verificar as propriedades fundamentais de semelhança por meio da redução e da ampliação de figuras e reconhecê-las como figura semelhante à figura original, ao identificar seus elementos variantes, a medida dos lados, e invariante, a medida dos ângulos. (GIMENES, 2014, p.40)

A citação acima nos remete à proposta dessa investigação. Propomos a utilização de recursos didáticos que viabilizem manipulações homotéticas de modo que a transformação geométrica de homotetia possa contribuir para a compreensão do conceito de semelhança. A percepção da congruência dos ângulos internos de figuras homotéticas também estará no foco de nossas atenções. Intentamos verificar se os sujeitos dessa investigação irão ou não constatar a ocorrência de tal propriedade invariante.

#### 4 MATERIAIS MANIPULÁVEIS

Entendemos que um dos desafios do professor de Matemática da atualidade ainda é o de fazer uso de recursos didáticos que reduzam o grau de abstração dos conceitos geométricos, facilitando assim a compreensão dos mesmos por parte dos educandos. Porém, ampliamos o sentido das manipulações para além de serem oportunidades de experimentação teórica, considerando que na ação delas os alunos podem desenvolver raciocínios próprios de quem lida com o espaço diretamente.

Nesses aspectos, Ventura (2013) utilizando como referência os Princípios e as Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2007) ressalta que:

(...) desde o início dos primeiros anos, os alunos deverão desenvolver capacidades de visualização, através de experiências concretas, com vários objetos geométricos e através da utilização de tecnologias. Estes precisam de aprender a alterar, quer física, quer mentalmente, a posição, a orientação e a dimensão dos objetos. Devem compreender propriedades das figuras geométricas, no plano e no espaço, desenvolver a visualização e o raciocínio e ser capazes de o usar, bem como resolver problemas, comunicar e raciocinar matematicamente, em situações que envolvam contextos geométricos. No estudo deste tema são essenciais materiais de desenho, materiais manipuláveis – geoplano, tangrans, peças poligonais encaixáveis e outros. (NCTM, 2007 apud VENTURA, 2013, p. 3).

Ventura (2013) enfatiza também que cabe ao educador buscar estratégias de ensino que não se pautem exclusivamente na utilização do quadro e giz:

O professor em sala de aula deve socorrer-se de recursos que possam veicular o conhecimento, de forma a alcançar o maior número de alunos, permitindo que estes se sintam estimulados e envolvidos no seu processo de aprendizagem. Os recursos de que o professor dispõe, em sala de aula, deixaram de se resumir ao manual do aluno, ao quadro e ao giz. Atualmente, estão à sua disposição, além destes, recursos tecnológicos e materiais manipuláveis. Estes recursos, assumindo um papel relevante, permitem uma abordagem mais próxima dos interesses dos alunos e das suas motivações. (VENTURA, 2013, p. 2).

Dentre os vários recursos à disposição dos educadores para a dinamização dos processos de ensino e de aprendizagem destacam-se os materiais manipuláveis. Ao utilizar tais ferramentas, o educador promove a instauração de um ambiente favorável ao desenvolvimento da criatividade. Neste aspecto, Machado (2005, p. 1) enfatiza que: “num

ambiente de manipulação e investigação, o aluno encontra condições para produzir o conceito, produzir conhecimento, experimentar combinações, expressar-se livremente, desenvolver a criatividade, resolver problemas, ampliar sua noção do mundo”.

Amâncio (2013) ressalta que a manipulação de figuras pode contribuir significativamente no desenvolvimento do pensamento geométrico:

Manipular figuras é muito diferente de vê-las desenhadas. A possibilidade de movimento, aliada ao tato e à visão contribuem para a formação de imagens mentais. Atividades como construir, medir, desenhar, compor e decompor, comparar e classificar figuras geométricas são importantes para o desenvolvimento do pensamento geométrico. (AMÂNCIO, 2013, p. 62)

As considerações de Santos (2012) ressaltam que muitos discentes apresentaram dificuldades para estabelecer relações de comparações entre polígono devido a um considerável quantitativo de livros didáticos aborda a citada temática de modo “estático”, não viabilizando, desta forma, a constituição dos conceitos geométricos por intermédio do movimento:

No entanto, algumas dificuldades semelhantes foram percebidas, no momento em que os polígonos deveriam ser comparados. As posições estáticas que muitos livros didáticos apresentam, mostrou-se como um obstáculo para diversos alunos de séries diferentes, por isso o desafio tem sido justamente verificar quais as possibilidades de facilitar a apropriação dos conceitos geométricos partindo da interação das construções geométricas utilizando materiais manipuláveis e a geometria dinâmica, utilizando as mesmas ferramentas, mas com a possibilidade de movimentação dos polígonos. (SANTOS, 2012, p. 18)

Pensamos que os materiais manipuláveis podem trazer às práticas geométricas escolares um modo de dinamizar o tratamento didático, dando alternativa a um desenvolvimento apenas cursivo ao euclidianismo que funda a Geometria. Catunda et al., (1990), em semelhante linha de raciocínio, apresentam o caráter estático do modelo geométrico proposto por Euclides como um dos problemas do ensino de Geometria:

A Geometria de Euclides foi desenvolvida por ele e por seus continuadores de uma maneira estática. Isto quer dizer que as figuras são apresentadas e descritas como resultados de observação.

Só depois é que se consideram as transformações dessas figuras. Se o ensino da Geometria começa a partir das transformações (o que já poderá ser feito na escola primária, através de jogos) a Geometria adquirirá um aspecto dinâmico por que as figuras passarão a ser construídas por meio dessas transformações. (CATUNDA et al., 1990, p. 11)

Apresentamos, a seguir, ferramentas que viabilizam a exploração de propriedades geométricas de modo interativo, em consonância com as considerações de Catunda et al., (1990) e de Santos (2012).

#### 4.1 GEOPLANO

Desde o início de nossas ações de pesquisa envidamos esforços para identificar recursos didáticos que pudessem proporcionar dinamismo ao estudo da Geometria em conformidade com os pressupostos da Geometria das Transformações. Desta forma, concluímos que dentre os vários recursos didáticos que se utiliza do movimento para constituição de conceitos geométricos destaca-se o geoplano.

O geoplano pode ser entendido como um recurso didático que consiste em um tabuleiro com formato quadrado, retangular ou circular, composto por uma certa quantidade de pregos (ou pinos), os quais destinam-se a sustentar atilhos elásticos (popularmente elásticos de dinheiro). Amâncio (2013, p. 63) destaca que utilizando esse recurso, o aluno: “... pode construir e desfazer, alterar suas construções facilmente, favorecendo a exploração de figuras geométricas”.

Ainda com relação aos benéficos da utilização do geoplano em sala de aula, Barros & Rocha (2004) ressaltam que ao utilizar o mencionado recurso didático, o professor de matemática proporciona meios para que a Geometria não seja explorada de modo mecânico, ancorado exclusivamente no uso de fórmulas:

O Geoplano entra como um excelente recurso, onde o professor pode fazer a construção do conhecimento, fazendo com que o aluno consiga trabalhar o mesmo conteúdo em diversos contextos, desenvolvendo assim o seu raciocínio, e não somente de forma mecânica onde decoram fórmulas e apenas sabem aplicá-las em problemas já conhecidos. (BARROS; ROCHA, 2004, p. 2)

Compactuamos com as considerações de Barros & Rocha (2004) no que se refere ao dinamismo que o geoplano pode imprimir ao ensino de Geometria. Ressaltamos também que a citada ferramenta pode viabilizar, em um mesmo espaço visual e manipulativo, a exploração de importantes transformações geométricas tais como rotação e translação. Consideramos que

tal recurso didático é imediatamente afim com a pesquisa de objetos geométricos, possibilitando, por exemplo, a exploração dos conceitos de área e perímetro de modo mais abrangente.

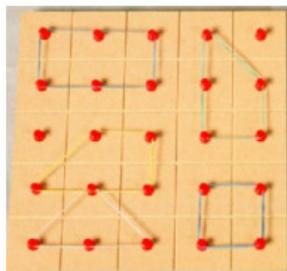


Figura 2: Geoplano  
Fonte: Schons (2008)

Conforme já exposto, a presente pesquisa alicerça-se na compreensão do conceito de semelhança de figuras planas com intermediação da transformação geométrica de homotetia. Barros & Rocha (2004) ressaltam que o geoplano é um recurso didático que se alinha a investigações desta natureza:

O Geoplano dá liberdade para o trabalho de vários tópicos matemáticos: frações, áreas, perímetros, transformações geométricas (simetria, semelhança), figuras geométricas (conceitos, elementos e propriedades), equações (resolução, sistemas, gráficos) (...). Enfim, muitas possibilidades para o professor desenvolver na sala de aula, sempre levando em consideração as variáveis pertinentes ao processo de ensino - aprendizagem. (BARROS; ROCHA, 2004, p. 2-3)

Nas considerações supracitadas, Barros & Rocha (2004) apresentam relevantes e variados conceitos aritméticos e geométricos que podem ser explorados por intermédio da utilização do geoplano. Entendemos que este é mais um aspecto que justifica a implementação de uma prática docente pautada no referido recurso didático: A possibilidade de explorar de forma dinâmica um considerável quantitativo de conceitos matemáticos.

Considerando o grau de dinamismo do mencionado instrumento, selecionamos o mesmo como ferramenta, com intuito de analisar a constituição do conceito de semelhança por intermédio da interação com polígonos homotéticos.

## 4.2 TECNOLOGIAS DE BASE INFORMÁTICA E O USO DO GEOGEBRA

A presente investigação consistiu também na busca de recursos didáticos que viabilizassem a constituição do conceito de semelhança de figuras de modo dinâmico e interativo. Dentre as várias ferramentas a dispor do educador, encontram-se também os recursos tecnológicos.

Ressaltamos que o termo interação, voltada para um grupo de pessoas, está interligado a uma prática docente que oportuniza uma constituição do conhecimento essencialmente coletiva envolvendo o professor, seus alunos e o ambiente sociointerativo que compreendem, em vista de um processo didático levado na aprendizagem dialogada. Neste aspecto, Oliveira (2017) ressalta que:

Interação, segundo o dicionário é “Influência recíproca: a interação da teoria e da prática. Diálogo; contato entre pessoas que se relacionam ou convivem.” (...). Não estamos falando somente no aspecto de se comunicar, na forma cotidiana. O que interessa pra nós é uma interação voltada para a constituição do conhecimento e exploração das ideias matemáticas. (OLIVEIRA, 2017, p. 30-31)

Esse conceito aparece com mais força nos estudos mais recentes, quando a emergência da tecnologia informática exigiu reflexões explicitadas sobre seu entendimento, quando a ideia de interação está voltada também pelas oportunidades que o ambiente virtual oferece em termos de desdobramentos pedagógicos pelas suas ferramentas. Para Ribeiro (2010), além de proporcionar dinamismo e interatividade, a utilização de novas tecnologias pode conferir ao ato de aprender maior criatividade e efetividade:

A meta é tornar a aprendizagem (...) mais estimulante, criativa e efetiva a partir do gerenciamento de novas situações de aprendizagem, que exige seleção e integração dos recursos tecnológicos disponíveis aos recursos tradicionais: livros, enciclopédias, jornais e revistas. O importante é planejar atividades que favoreçam o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, do espírito crítico, da criatividade e da tomada de decisão em situações complexas. Além disso, as tecnologias podem atuar como dinamizadoras das relações humanas e das interações, que fazem da sala de aula um ambiente propício ao trabalho colaborativo. (RIBEIRO, 2010, p. 384)

Ainda com relação à utilização de recursos tecnológicos em sala de aula e em conformidade com as considerações de Ribeiro (2010), Pinheiro (2013) afirma que:

As escolas carregam a responsabilidade de auxiliar na construção social dos alunos, de forma a prepará-los para muitas das adversidades do cotidiano. Este fato torna inevitável a utilização das TIC; no ensino e na aprendizagem, o tratamento didático e metodológico, deve condizer com a atual realidade tecnológica. (PINHEIRO, 2013, p. 22).

Visando enfatizar o perfil dos discentes inseridos na “atual realidade tecnológica”, Ribeiro (2010), em conformidade com a linha de pensamento de Lopes (2013), ressalta que:

Os jovens nascidos a partir de 1994 chegaram ao mundo praticamente com o início da internet e da expansão do setor de telefonia no Brasil - são os nativos digitais. Eles foram beneficiados pela maior possibilidade de acesso a computadores e pela ampliação de dispositivos móveis... (RIBEIRO, 2010, p. 384)

Sendo assim, com base em tais considerações, entendemos que a utilização de novas tecnologias em sala de aula pode ser interpretada como uma forma de articular a metodologia de ensino às demandas da sociedade atual.

Entendemos também que a utilização de recursos tecnológicos na pesquisa de campo possa proporcionar aos sujeitos a oportunidade de ter um olhar diferenciado para um mesmo objeto, o que de alguma forma pode contribuir na constituição do conceito de semelhança de figuras planas.

Ainda com relação à metodologia de ensino e a utilização de computadores, Penteado (2000) ressalta que tais ferramentas podem conferir ao discente um novo papel que transcende o de um mero receptor de informações:

(...) em metodologias que envolvem atividades investigativas e o uso de computadores, o professor não é mais o detentor único do conhecimento, o aluno é mais responsável por seu conhecimento, e o ensino não é mais um processo de instrução. A aprendizagem pode ser alcançada por um processo de constituição. (PENTEADO, 2000 apud OLIVEIRA, 2017, p. 20)

Compactuamos com as considerações de Penteado (2010) e enfatizamos que é com esse entendimento que desenvolvemos essa investigação. Utilizamos recursos didáticos e atividades investigativas visando viabilizar o alcance da aprendizagem do conceito de semelhança por intermédio da constituição de conceitos geométricos a partir de ações dialogadas.

No que se refere ao campo geométrico, Lage (2008, p. 32) ressalta que uma investigação vinculada a tal área do conhecimento necessita frequentemente de recursos tecnológicos que permitam uma exploração de cunho algébrico e gráfico. Para o referido

pesquisador, o estudo de propriedades geométricas envolve a utilização de vários tipos de linguagens tais como: “... a vetorial, a analítica e a linguagem algébrica para resolver um mesmo problema, além de linguagens gráficas e computacionais”.

Entendemos que a presença de computadores e softwares na educação matemática deu novo estatuto à importância da Geometria, esta muitas vezes negligenciada em sua importância perante as outras disciplinas matemáticas. Em suas considerações, o mencionado pesquisador descreve o Geogebra como uma das ferramentas à disposição do professor que possibilita atender tais demandas.

Em nossa pesquisa, uma das razões pelas quais optamos pelo *software* GeoGebra deve-se ao fato de ele permitir essa multiplicidade de exploração de linguagens, que aponta o hábito matemático de analisar situações sob múltiplos pontos de vista. (LAGE, 2008, p. 32)

Em semelhante linha de raciocínio, Lima (2016) define o Geogebra como uma ferramenta que pode contribuir na exploração de propriedades matemáticas:

Logo, por meio do dinamismo oferecido pelo software, por conta das simulações que executa e exibe ao usuário, em conjunto com uma estratégia didática, o mesmo pode se constituir em um instrumento útil na exploração, experimentação e visualização de propriedades matemáticas... (LIMA, 2016, p. 49)

Já Borba, Silva e Gadanidis (2015, apud SOUSA, 2018, p. 32-33) referem-se ao Geogebra como uma ferramenta que “... vem se consolidando cada vez mais como uma tecnologia bastante inovadora na educação matemática, explorando diversos conceitos e idéias.”

No que se refere à exploração de figura homotéticas em ambientes virtuais de aprendizagem, Gimenes (2014) ressalta que:

(...) a transformação geométrica homotetia, construída dinamicamente em um *software* de geometria, pode produzir uma situação geométrica rica de relações (...). Ao ampliar homoteticamente figuras geométricas, o aluno tem a oportunidade de visualizar a mudança de tamanho destas figuras (...), mantendo a medida dos ângulos internos e modificando a medida dos lados de forma proporcional. (GIMENES, 2014, p. 43)

Compactuamos com a linha de pensamento supracitada, uma vez que a utilização de softwares no ensino de Geometria pode viabilizar novas formas de interação facilitando a visualização de relevantes propriedades geométricas de modo mais nítido e imediato.

Ainda com relação ao grau de abrangência que podemos obter mediante a utilização de softwares no Ensino de Geometria, Murari (2011) enfatiza que:

Na produção de objetos geométricos através de softwares de geometria dinâmica é possível efetuar explorações experimentais e teóricas, o que favorece elaborar e testar as conjecturas, além do que se pode dar um dinamismo às construções com os recursos do arrastar, movimentar e animar. Assim, mostram-se diferentes possibilidades de visualização das construções, que é um aspecto importante na formação dos conceitos. (MURARI, 2011, p. 190)

As considerações supracitadas corroboram nossa linha de pensamento no sentido de que o uso de recursos tecnológicos pode imprimir considerável grau de dinamismo ao ensino de Geometria por potencializar em um mesmo ambiente várias formas de movimento.

#### 4.3 RAIADO

Propomos, a partir de nossa iniciativa, também no momento da pesquisa de campo, a utilização de uma estatura metálica, a qual denominamos Raiado, composta por (03) três varetas (medindo aproximadamente 30 cm cada), soldadas as 3 no mesmo ponto, que desde já nos referiremos como ponto 0. Visando a um trabalho em geometria plana, elas serão coplanares. Com utilização de pinos para fixar atilhos elásticos, tais varetas serão graduadas cada uma a partir desse zero, de 1 em 1 cm, de modo unidirecional. As angulações entre varetas são definidas aleatoriamente, evitando-se qualquer regularidade ou notabilidade, conforme a figura abaixo:



Figura 3: Raiado  
Fonte: Arquivo do Autor

Tal estrutura viabilizará a construção de triângulos homotéticos por intermédio de elásticos apoiados nos pinos fixados nas varetas.

Enfatizamos que durante a realização da pesquisa de campo estaremos atentos à postura epistemológica dos sujeitos ao manipular os recursos didáticos. Cabe ressaltar que nossa compreensão em relação ao termo “epistemológico” está em conformidade com as considerações de Oliveira (2017):

A epistemologia trata da ciência e do seu entorno, em aspectos tais como a crença e o conhecimento, mas, sabemos, nenhuma ciência é um constructo acabado e objetivo, para o qual acesso – aos seus objetos, suas proposições – bastaria termos inelegibilidade suficiente e objetiva. Entendemos, pensando no mundo da educação, que a ciência tem de ocorrer em nós, nós atribuindo significados ao sermos postos diante de sua apresentação, como é o caso do aprendiz frente a uma disciplina escolar. (OLIVEIRA, 2017, p. 38)

Oliveira (2017) aborda ainda outros relevantes aspectos sobre a relação entre epistemologia e o processo de constituição que pode ocorrer quando um aprendiz está frente a um constructo científico:

Em “A origem da Geometria”, Edmund Husserl, num misto de preocupação filosófica e pedagógica, pergunta ‘qual a origem da geometria?’, não a origem histórica da ciência, mas, em que momento, a um jovem aprendiz, a geometria se manifesta de modo que ele reconhece estar diante de um fazer distinto de outros, da álgebra, da física em geral, de uma ciência empírica, etc. Esse apronto husserliano indica o que entendemos por epistemológico, firmando sentido no que uma pessoa constitui quando está diante de um constructo científico. (OLIVEIRA, 2017, p. 38)

No que se refere à importância de analisarmos a postura dos discentes frente aos recursos didáticos a serem utilizados, Carvalho (1990, p.7) ressalta que: “Na manipulação do material didático a ênfase não está sobre os objetos e sim sobre as operações que com eles se realizam”.

Ainda com relação ao exposto, Detoni & Pinheiro (2015, apud OLIVEIRA, 2017, p. 27) defendem a utilização de recursos didáticos que viabilizem uma renovação de cunho epistemológico ao ensino de Geometria. No entendimento dos mencionados pesquisadores é “pertinente pensar novas possibilidades de tratamento didático (...) que trariam valores epistemológicos renovados para uma alternativa pedagógica para a geometria”, querendo eles enfatizarem, também, que manipulações, especialmente realizadas em grupo, fazem aparecer ou ressaltar aspectos dos objetos e relações geométricos que podem ser organizados em direção a novos valores de conhecimento.

A utilização de ferramentas distintas pode enriquecer o teor de nossa análise bem como contribuir na abordagem do tema semelhança por caminhos distintos. Entendemos que além de oportunizar a constituição do conceito de semelhança por intermédio de figuras homotéticas, o geoplano pode evidenciar outros relevantes conceitos geométricos tais como área e perímetro. Já o Raiado pode viabilizar tal constituição tendo o centro de homotetia do feixe homotético como referência e evidenciar também o conceito de paralelismo. O software Geogebra, por sua vez, pode promover um ambiente didático ancorado na experimentação e exploração bem como contribuir na visualização de propriedades aritméticas.

## 5 PESQUISA DE CAMPO

Conforme já exposto, a intenção para a presente investigação originou-se a partir de uma percepção a qual está atrelada a minha experiência profissional. A revisão de literatura realizada corrobora e estrutura a citada percepção para o questionamento quanto à existência de um considerável grau de dificuldade dos discentes na constituição do conceito de semelhança de figuras geométricas.

Temos o cerne desse questionamento como uma espécie de incômodo que nos leva a refletir sobre nossas práticas docentes e buscar metodologias alternativas de ensino relacionadas ao campo geométrico, visando dinamizar o processo de ensino e de aprendizagem.

O citado incômodo relaciona-se também ao formalismo em que ainda hoje a Geometria é abordada em sala de aula. Nessa linha de pensamento, Oliveira (2017) expressou-se da seguinte forma:

O que nos incomoda é assumir para a Geometria, tal como usualmente ela nos chega por meio da prática escolar, e está disposta em suas formas escritas tradicionais, que ela, pretensamente, tenha entrada imediata como conhecimento disposto a alguém, que, supostamente, teria o espelho da razão para o entendimento dela, para decifrar seus signos. (OLIVEIRA, 2017, p. 50)

No tocante aos procedimentos metodológicos para a realização dessa etapa da pesquisa, enfatizamos que não buscamos hipóteses pré-concebidas que posteriormente devem ser ou não comprovadas, e pesquisamos o como, além do o quê, o fenômeno que subjaz ao questionamento encerra. São características que encaminham a presente investigação como uma pesquisa qualitativa de cunho fenomenológico que adotaremos.

As considerações de Pinheiro (2013) corroboram tal linha de raciocínio ao caracterizar uma pesquisa desta natureza da seguinte forma:

O que se torna proeminente em pesquisas de cunho fenomenológico é o tratamento dispensável de pressupostos e idealizações, como entes do que se está a investigar, ou seja, não cabe em pesquisas embasadas neste campo, o levantamento de hipóteses que ao final devem ser comprovadas. A fenomenologia defende o deixar acontecer para ver, munindo-se apenas da interrogação que norteia a pesquisa, e orienta o interrogar o fenômeno... (PINHEIRO, 2013, p. 62)

Já as considerações de Oliveira (2017) nos levam a refletir sobre a postura que deve assumir um pesquisador que opte pela Fenomenologia como base metodológica para sua investigação:

Portanto, com as ideias trazidas pela fenomenologia, estamos atinentes com todo o processo de pesquisa, pois a preocupação com a relação sujeito/objeto está sempre à frente, respeitando as vivências de cada aluno para que ele possa decidir manipular cada objeto de acordo com suas percepções. (OLIVEIRA, 2017, p. 49)

No tocante a definição do termo Fenomenologia, Bicudo (2011) ressalta que:

É uma palavra composta pelos termos *fenômeno* mais *logos*. Fenômeno diz do que se mostra na intuição ou percepção e *logos* diz do articulado nos atos da consciência em cujo processo organizador a linguagem está presente, tanto como estrutura, quanto como possibilidade de comunicação e, em consequência, de retenção em produtos culturais postos à disposição no mundo-vida. (BICUDO, 2011, p. 29)

Julgamos oportuno enfatizar que a citada descrição para o conceito de fenômeno pode ser caracterizada como um dos pilares que alicerçou a pesquisa de campo. Neste aspecto, Oliveira (2017, p. 51) descreve tal etapa de uma investigação fenomenológica identificando a “... necessidade de ir a campo para desvelar o significado do fenômeno em como ele é experienciado pelos sujeitos”.

De modo análogo, com base em tais considerações, constatamos também a necessidade de ir a campo com o intuito de “desvelar o significado de fenômeno”, motivados pela seguinte questão: **Como a prática de atividades envolvendo homotetia pode contribuir para a compreensão e a constituição do conceito de semelhança, por parte de alunos da Escola Básica, com mediação de materiais manipuláveis?**

## 5.1 O CAMPO E OS SUJEITOS DA PESQUISA DA PESQUISA

Ressaltamos que os sujeitos da presente investigação cursavam o 9º ano do Ensino Fundamental de uma Escola pertencente à Rede Municipal da cidade de Paty do Alferes/RJ. Elegemos tal ano de escolaridade tendo em vista que segundo a BNCC o tema semelhança deve ser explorado no último ano do Ensino Fundamental.

Após obter autorização da Gestora da Unidade Escolar para realização da pesquisa de campo, dialogamos com os discentes sobre a existência dessa investigação e explicamos que a mesma estava relacionada ao tema semelhança de figuras planas.

Em nossa fala com os discentes, enfatizamos também que a participação na pesquisa de campo era de caráter voluntário e extensivo a todos. Sendo assim, contabilizamos um total de cinco alunos que demonstraram interesse em participar dessa etapa da investigação, os quais integraram o grupo dos sujeitos da pesquisa.

Ressaltamos também que antes de iniciarmos a pesquisa de campo, efetivamos o envio de Termo de Consentimento por escrito aos responsáveis dos discentes informando, entre outros aspectos, a existência, finalidade e o tema da presente investigação. O citado documento apresentava também caráter de autorização. Deixamos claro a todos os sujeitos que a participação dos mesmos na pesquisa de campo estava condicionada à apresentação do Termo de Consentimento com a assinatura do respectivo responsável. Aproveitamos a oportunidade para informar também que as ações na pesquisa de campo seriam gravadas por dispositivo de áudio e vídeo para propiciar futura análise dos dados.

No tocante às análises dos dados, procedemos, em um primeiro momento, transcrição das falas dos sujeitos objetivando apresentar, interpretar e analisar as experiências vivenciadas pelos sujeitos ideograficamente. Oliveira (2017) descreve essa etapa da pesquisa qualitativa fenomenológica da seguinte forma:

Nesse processo, pelo qual o pesquisador pode iniciar sua compreensão das idéias fundamentais que estruturam o fenômeno, é feita uma primeira síntese delas, quando é interessante dar primeiros nomes para as que são vistas próximas, no que seria uma primeira convergência. Por isso chamamos esse processo de análise ideográfica. (OLIVEIRA, 2017, p. 55)

A realização da análise ideográfica foi de suma importância por oportunizar, em um segundo momento, a organização das ideias oriundas da pesquisa de campo em núcleos de convergências. Eis o segundo passo relevante que concretizamos, em consonância com o pensamento fenomenológico: A análise Nomotética. Apresentaremos os procedimentos adotados para realização da mencionada etapa no Capítulo 7 dessa Pesquisa.

Ainda com relação à realização da pesquisa de campo, vale ressaltar que asseguramos aos participantes bem como aos seus responsáveis, que a coleta de dados seguiria padrões éticos e profissionais visando à manutenção do sigilo bem como a preservação da identidade

dos mesmos. Sendo assim, em consonância com o citado critério, mencionamos os sujeitos da seguinte forma: S1, S2, S3, S4 e S5.

Optamos por abordar as atividades organizando os sujeitos em grupos, por entender que tal ato pudesse contribuir na constituição do conhecimento de modo mais abrangente.

Registramos a participação de dois sujeitos nas atividades com o Geoplano. Já as ações no Raiado e no Geogebra ocorreram mediante participação de todos os sujeitos de modo concomitante.

## 5.2 ELABORAÇÃO DAS ATIVIDADES

Antes da efetivação da pesquisa de campo confeccionamos um material impresso que foi disponibilizado aos sujeitos. Nossa proposta foi elaborar atividades abertas em consonância com o pensamento fenomenológico, buscando respeitar as vivências e individualidades dos mesmos.

A elaboração do citado material originou vários momentos de reflexão no Grupo de Estudos. Além oportunizar a constituição do conceito de semelhança por intermédio da manipulação de figuras homotéticas, as atividades deveriam apresentar caráter exploratório e investigativo, bem como estarem alinhadas aos recursos didáticos que intentávamos utilizar considerando suas especificidades.

O nosso intuito era propor atividades abertas que também oportunizassem a instauração de um ambiente didático com abertura para ouvir os sujeitos considerando suas manifestações orais e gestuais. Finalmente chegamos a um consenso sobre o teor do citado material impresso, após vários ajustes e momentos de reflexão. Providenciamos a impressão desse material o qual foi utilizado na pesquisa de campo em conjunto com os recursos didáticos manipulativos. Apresentamos a seguir o mencionado material impresso de modo mais detalhado.

## 5.3 DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES

Conforme já exposto, após definirmos os instrumentos didáticos que seriam utilizados na pesquisa de campo, coube a nós refletirmos sobre a elaboração de atividades que de certa forma norteariam as etapas desta fase da investigação.

Em um primeiro momento oportunizamos que os sujeitos realizassem atividades preliminares objetivando que os mesmos pudessem “praticar” a homotetia nos diferentes recursos didáticos. Acreditamos que tal passo foi de suma importância para intensificar o grau de familiarização dos sujeitos em relação aos materiais manipulativos empregados.

Ressaltamos que antes de efetivar a pesquisa de campo, aplicamos uma sequência didática para todos os discentes pertencentes à mesma turma de 9º ano da qual os sujeitos faziam parte, abordando a temática semelhança de figuras planas. Tal ato teve como objetivo principal realizar uma sondagem sobre a compreensão dos sujeitos em relação aos assuntos que estariam presentes no momento da realização das atividades de nossa pesquisa de campo. Após análise de tais atividades, verificamos que os discentes apresentavam dificuldades básicas em relação à compreensão dos conceitos envolvendo homologias (lados correspondentes de figuras semelhantes), transformações geométricas (rotação e translação), razão de semelhança e homotetia. Percebemos também que além de tais dificuldades havia defasagem na compreensão do conceito de proporcionalidade.

Diante dessas constatações, concluímos que era necessário direcionarmos a parte inicial das atividades da Pesquisa de Campo para revisarmos os conceitos geométricos relacionados. Desta forma, propusemos utilizar uma série evolutiva quanto ao grau de complexidade conceitual, e até procedimental, nas atividades objetivando analisar a constituição do conceito de semelhança estando em atividades com figuras homotéticas.

A primeira sequência de atividades foi realizada mediante utilização do Geoplano. Propusemos a sala de recursos como ambiente para resolução das atividades que envolvam interação dos sujeitos com esse recurso didático.

A segunda parte das atividades foi realizada mediante utilização do software Geogebra. Enfatizamos que, para efetivação da mencionada etapa da pesquisa campo, propusemos a sala de aula como ambiente para constituição do conceito de semelhança de figuras planas.

Já a terceira parte da sequência de atividades foi desenvolvida por intermédio da estrutura metálica proposta e já descrita a qual denominamos Raiado. Essa etapa da investigação também ocorreu na sala de recurso.

#### 5.4 ATIVIDADES NO GEOPLANO

Apresentamos a primeira parte da sequência de atividades que foram desenvolvidas no geoplano. Com a utilização de tal recurso didático, exploramos relevantes conceitos

geométricos tais como: paralelismo, perímetro, área, ângulo, homotetia, proporcionalidade e rotação.

Conforme já exposto, intuímos que a utilização do Geoplano possibilita uma nova abordagem epistemológica ao ensino de Geometria. Entendemos que a construção de polígonos mediante o uso de elásticos oportunizou a compreensão de relevantes propriedades geométricas de modo mais abrangente.

#### **Atividade 5.4.1 Entendendo Homologias**

Nessa atividade, com o geoplano, propusemos a utilização de elásticos envolvendo a construção de triângulos retângulos semelhantes.

Enfatizamos que essa atividade relaciona-se aos seguintes elementos e conceitos: Lados correspondentes, paralelismo, perímetro, ângulo, homotetia e proporcionalidade.

Entendemos ser relevante que as atividades propostas apresentassem algumas ações preliminares para colocar os participantes em um nível de compreensão geométrica que permita avançar com mais segurança conceitual.

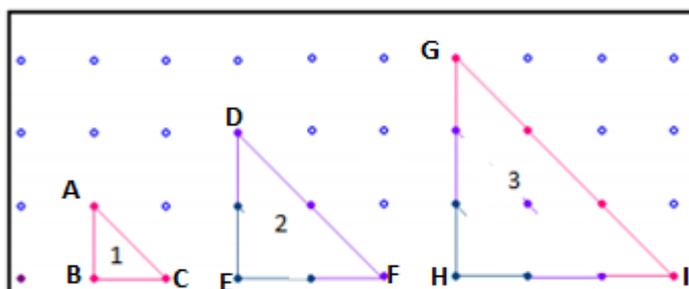
No que se refere aos objetivos da ação proposta, intentávamos, com o suporte do geoplano, levar o aluno a manusear figuras semelhantes viabilizando, desta forma, que o mesmo compreendesse com mais nitidez o conceito de lados homólogos de duas figuras semelhantes para que, a partir de tal entendimento, a temática razão de semelhança pudesse ser constituída.

As atividades exploradas no geoplano foram encaminhadas aos sujeitos da pesquisa em uma versão impressa, oportunizando que as ações desenvolvidas no citado recurso didático pudessem ser registradas pelos discentes no momento da realização das mesmas.

Quadro 1: Ação no Geoplano (Atividade 1)

**Atividade 5.4.1 – Entendendo Homologias**

1- Utilizando elásticos, construa 2 (dois) triângulos que possam ser ditos bem parecidos com o triângulo 1 (conforme a figura), mas que apresentem tamanhos diferentes:



Fonte: Machado (2013) adaptado

2) Desenvolvimento de tarefas:

- a) Observando os triângulos construídos, vamos escrever o que podemos observar quando comparamos um com o outro.
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
- b) Vamos registrar o que podemos observar no que se refere às relações entre seus lados e seus ângulos.
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
- c) Vamos observar o que podemos observar no que se refere às relações entre seus ângulos internos.

### Atividade 5.4.2 Explorando triângulos

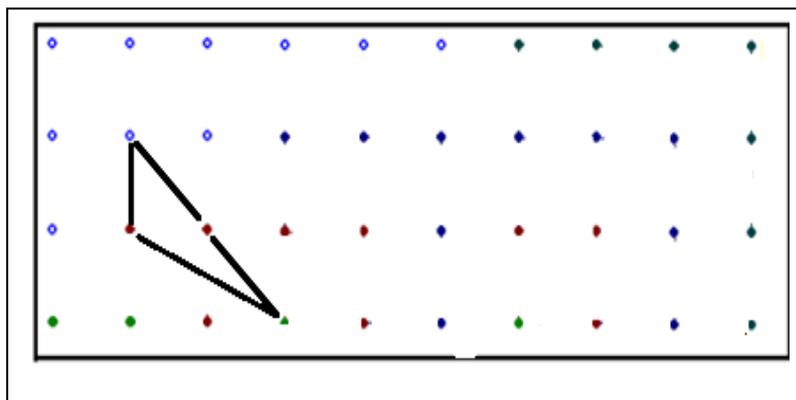
Nesta atividade, propusemos a utilização de elásticos oportunizando a construção de triângulos semelhantes.

Cabe ressaltar que a presente atividade está relacionada aos seguintes conceitos: Lados correspondentes, paralelismo, ângulo, área, homotetia e proporcionalidade.

Quadro 2: Ação no Geoplano (Atividade 2)

#### Atividade 5.4.2 – Explorando triângulos

- 1- Utilizando elásticos, construa 1 (um) triângulo ampliado que pode ser dito bem parecido com o triângulo abaixo (conforme a figura), mas que apresenta razão de semelhança 2:



Fonte: O autor

- a) Vamos escrever o que podemos observar no que se refere às relações entre os lados desses triângulos
- b) Vamos escrever o que podemos observar no que se refere às relações entre os ângulos internos desses triângulos.

### Atividade 5.4.3 Explorando trapézios

Nesta atividade propusemos a utilização de elásticos oportunizando a construção de trapézios semelhantes.

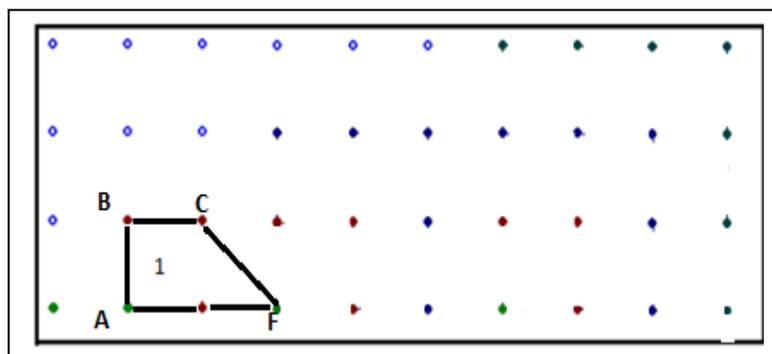
A presente atividade está relacionada com os seguintes conceitos: Lados correspondentes, paralelismo, ângulo, área, homotetia e proporcionalidade.

Ressaltamos ainda que exploramos novamente o conceito razão de semelhança objetivando que houvesse mais consistência quanto à constituição do mesmo.

Quadro 3: Ação no Geoplano (Atividade 3)

#### Atividade 5.4.3 – Explorando trapézios

- 1- Utilizando elásticos, construa um trapézio ampliado que possa ser ditos bem parecidos com o trapézio 1 (apresentado na figura abaixo), mantendo a razão de semelhança 2:



Fonte: O autor

- 2) Desenvolvimento de tarefas:

a) Vamos escrever o que podemos observar quando comparamos os trapézios um com o outro.

---

---

b) Vamos escrever o que podemos observar no que se refere às relações entre os lados desses trapézios

---

---

c) Vamos escrever o que podemos observar no que se refere às relações entre os ângulos internos desses trapézios

---

---

---

#### **Atividade 5.4.4 Construindo quadriláteros semelhantes**

Nesta Atividade propusemos a utilização de elásticos oportunizando a construção de quadriláteros semelhantes.

A presente atividade está relacionada com os seguintes conceitos: Lados correspondentes, paralelismo, ângulo, homotetia, rotação e proporcionalidade.

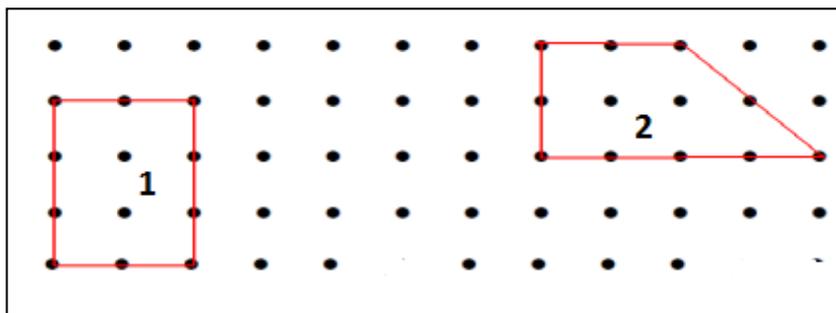
O desenvolvimento desta atividade exigiu dos sujeitos um envolvimento mais profundo em termo de compreensão geométrica uma vez que a mesma relaciona-se também ao conceito de rotação.

Conforme já exposto, exploramos também a transformação geométrica rotação, objetivando ampliar a constituição da temática semelhança de figuras planas.

Quadro 4: Ação no Geoplano (Atividade 4)

Atividade 5.4.4 – Construindo quadriláteros semelhantes

1 - Observe os polígonos abaixo:



Fonte: Silva & Attie (2010) adaptado

1- Utilizando elásticos, construa os polígonos mantendo as mesmas dimensões e formato representados nas figuras acima.

2 – Construa com elásticos dois polígonos (que denominaremos polígono 3 e polígono 4) **reduzidos** que podem ser ditos bem parecidos com os polígonos 1 e 2 mantendo a razão de semelhança  $\frac{1}{2}$ .

a) Vamos registrar o que podemos observar quando comparamos o retângulo representado pelo polígono 1 (original) e o retângulo que você construiu representado pelo polígono 3 (reduzido).

---

---

---

b) Vamos registrar o que podemos observar quando comparamos o trapézio representado pelo polígono 2 (original) e o trapézio que você construiu representado pelo polígono 4 (reduzido).

---

---

3 – Considere novamente o retângulo representado pelo polígono 1. Agora, construa com outro elástico um polígono (que denominaremos 5) que pode ser dito bem parecido com o polígono 1 e que apresente uma rotação de  $90^\circ$ .

- a) Vamos registrar o que podemos observar quando comparamos o retângulo representado pelo polígono 1 (original) e o retângulo representado pelo polígono 5.

---

---

---

4 – Construa no geoplano novamente o trapézio representado pelo polígono 2 (original). Agora construa com outro elástico um trapézio (que denominaremos 6) que pode ser dito bem parecido ao polígono 2 e que apresente uma rotação de  $90^\circ$ .

- a) Vamos registrar o que podemos observar quando comparamos o trapézio representado pelo polígono 2 com o trapézio representado pelo polígono 6.

---

---

## 5.5 ATIVIDADES NO GEOGEBRA

Na segunda etapa da sequência de atividades, propusemos a utilização do software Geogebra. Acreditamos que o uso desse recurso didático está em consonância com uma investigação interligada à temática Geometria das Transformações. Tal linha de pensamento está em conformidade com as considerações de Oliveira (2017) que enfatizou a importância da utilização do Geogebra para a efetivação da Pesquisa de Campo da seguinte forma:

As atividades de nossa pesquisa de campo foram pensadas e aplicadas como atividades que possam contribuir para a constituição de um pensamento lógico-matemático de Geometria das Transformações. Elas apresentaram grande potencial quando trabalhadas com o auxílio do *software* de geometria dinâmica Geogebra. (OLIVEIRA, 2017, p. 153)

Além de contribuir para a implantação de um ambiente didático favorável à busca de soluções mediante interação mútua, o software geogebra oportunizou também que a temática semelhança fosse abordada de modo dinâmico evidenciando relevantes conceitos geométricos tais como: homologia, paralelismo e razão de semelhança.

### 5.5.1 Construção de Triângulos inscritos Homotéticos

O Geogebra oportunizou que os sujeitos explorassem o conceito de homotetia por intermédio da construção de triângulos semelhantes. Na realização dessa etapa da Investigação, utilizamos a construção geométrica apresentada na figura abaixo:

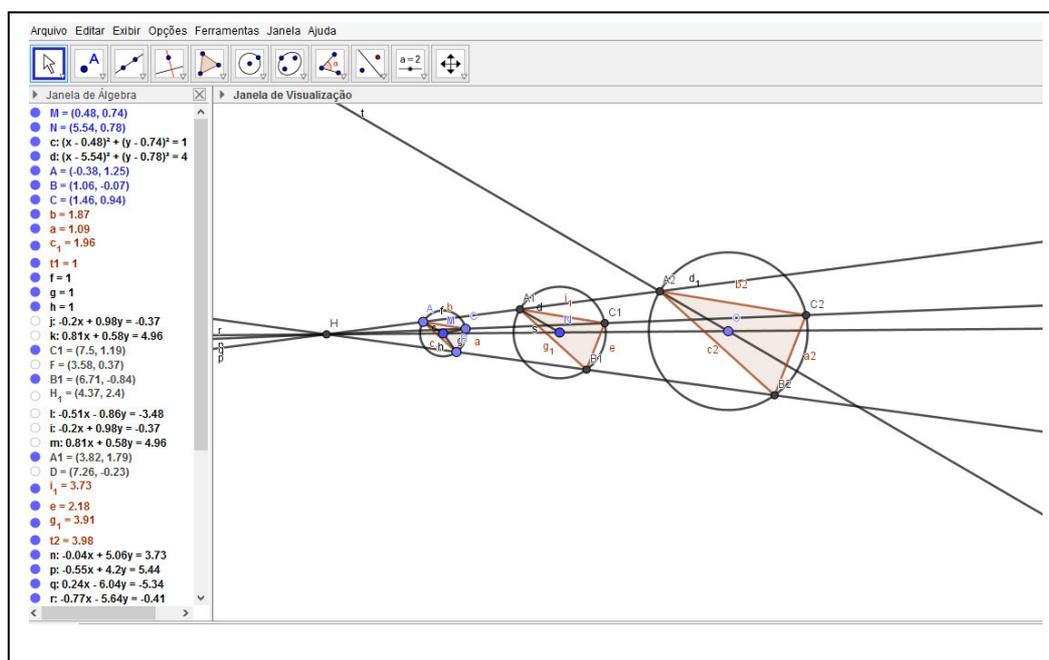


Figura 4: Triângulos inscritos homotéticos

Fonte: arquivo do autor

Essa atividade relaciona-se aos seguintes conceitos: Lados correspondentes, paralelismo, área, ângulo, homotetia, eixo de homotetia e proporcionalidade.

No que se refere aos objetivos da ação proposta, intentávamos que os educandos construíssem figuras homotéticas, que pudessem viabilizar a constituição do conceito de semelhança de figuras.

Propusemos a sala de aula como ambiente para resolução da mesma, tendo em vista que as atuais instalações do Laboratório de Informática não garantiam as condições necessárias para o desenvolvimento dessa etapa da investigação.

Vale acrescentar que as atividades a serem exploradas no geogebra foram elaboradas com intuito de fomentar o protagonismo dos sujeitos no desenvolvimento das ações.

#### Quadro 5: Ação no Geogebra (Atividade 1)

##### **Atividade 5.5.1 – Construção de Triângulos inscritos homotéticos**

###### PRIMEIRA ETAPA

- a) Construa uma circunferência com raio 1 e centro M.
- b) Marque 3 pontos aleatórios A, B e C (sugere-se espaçados) pertencentes à circunferência.
- c) Construa o triângulo ABC inscrito na circunferência<sup>4</sup> de centro M.
- d) Construa os 3 segmentos correspondentes aos raios MA, MB e MC

###### SEGUNDA ETAPA

- e) Marque um ponto N em qualquer lugar “fora” da primeira circunferência
- f) Construa uma segunda circunferência de centro N e raio 2.
- g) Trace 3 retas paralelas que interceptem o ponto N, uma a cada raio MA, MB e MC (pertencentes à primeira circunferência)
- h) Marque os pontos DEF e construa na segunda circunferência o triângulo DEF que pode ser dito bem parecido ao triângulo ABC.

Vamos registrar o que há em comum entre os dois triângulos construídos

---

---

---

<sup>4</sup> Ao dizer aqui simplesmente ‘circunferência’, estamos querendo significar ‘circunferência de círculo’.

- 1) Identifique no canto esquerdo da tela, os valores dos segmentos AB e DE, BC e EF, AC e DF e calcule as razões (divisões) descritas abaixo:

$$AB / DE =$$

$$BC / EF =$$

$$AC / DF =$$

- 2) O que podemos afirmar quando comparamos as 3 razões calculadas acima ?
- 
- 

#### TERCEIRA ETAPA

- i) Trace a reta que liga os pontos M e N
  - j) Trace a reta que liga os pontos A e D
  - k) Marque o ponto H formado pela intersecção (encontro) das retas MN e AD.
- 3) Em sua opinião as retas BE e CF também interceptarão o ponto H, ou seja, passarão pelo ponto H? Justifique
- 

- 4) Construa as retas BE e CF e verifique se a resposta ao item 3 está correta.

#### QUARTA ETAPA

- l) Marque aleatoriamente um ponto O na reta MN
- m) Construa na segunda circunferência o segmento DN.
- n) Construa uma reta paralela ao segmento DN que passe pelo ponto O
- o) Marque o ponto I (formado pela intersecção das retas AD e OI)
- p) Construa uma terceira circunferência tendo OI como raio da mesma
- q) Identifique e marque nesta circunferência o ponto G (pertencente a reta BE) bem como o ponto J (pertencente a reta CF).
- r) Construa o terceiro círculo IGJ

5) Vamos registrar o que há em comum entre o triângulo IGJ e os outros dois triângulos construídos anteriormente.

---

## 5.6 ATIVIDADES NO RAIADO

Nessa etapa da Pesquisa de Campo propusemos a utilização do Raiado para construção de triângulos semelhantes com atilhos elásticos. Cabe ressaltar que tal atividade esta relacionada aos seguintes elementos e conceitos: Lados correspondentes, paralelismo, ângulos, homotetia e razão de semelhança.

Como já caracterizamos, o mencionado recurso didático foi confeccionado previamente e esteve à disposição dos sujeitos. O Raiado foi fabricado com 3 varas metálicas graduadas de forma unidirecional que se interceptam em um ponto conforme a figura abaixo<sup>5</sup>. Iremos identificar cada vara da seguinte forma: Raio I, Raio II e Raio III.



Figura 5: Raiado  
Fonte: Arquivo do autor

---

<sup>5</sup> O Raiado pode ser construído em material mais simples. Por exemplo, pode ser feito a partir de uma placa de madeira (facilitando pôr os preguinhos da graduação) na qual seriam desenhados os três raios. A partir do encontro dos raios, a graduação pode ser feita nos dois sentidos, em cada raio. Pode-se, também, fazer Raiados com mais de três raios, para se explorar polígonos de mais lados. Ainda, pode-se fazer Raiados em que os raios não são coplanares, ampliando-se a homotetia para o espaço tridimensional.

Vale acrescentar que as atividades exploradas no raiado foram encaminhadas aos sujeitos da pesquisa em uma versão impressa. Isto é, os sujeitos tiveram acesso a cópias de um material impresso contendo atividades abertas que serviram como referência para o desenvolvimento dessa etapa da pesquisa.

#### Quadro 6: Ações no Raiado (Atividade 1 e 2)

##### **Atividade 6 – Ação no Raiado**

Desenvolvimento de atividades

- 1 – Observe a figura abaixo que representa dois triângulos construídos no Raiado.



Fonte: O autor

Movimente o elástico que forma o triângulo 2 de modo a formar um novo triângulo que possa ser ditos bem parecido ao triângulo menor.

Observando os triângulos responda.

- a) Há alguma razão de semelhança entre os polígonos. Em caso afirmativo determine o valor desta razão.

---

---

- b) Registre o que mais podemos observar quando comparamos os dois triângulos.

---

---

2 - Construa com elástico um Triângulo 1 com os seguintes vértices.

Eixo I (Ponto 4 cm)

Eixo II (Ponto 6 cm)

Eixo III (Ponto 4 cm).

- a) Construa agora com elástico um Triângulo 2 que possa ser dito bem parecido com o Triângulo 1 mantendo a razão de semelhança 2.
- b) Utilizando outro elástico, construa um triângulo 3, que possa ser dito bem parecido com o Triângulo 1, mantendo razão de semelhança 3.
- c) Vamos registrar abaixo o que podemos observar quando comparamos os três triângulos

---

---

## 5.7 CENÁRIO DOS ENCONTROS

A pesquisa de campo ocorreu principalmente em dois ambientes: A sala de recursos e a sala de aula. As ações realizadas em sala de aula foram desenvolvidas por intermédio de um notebook com o software Geogebra instalado à disposição dos sujeitos da pesquisa. Para proporcionar melhor interação, utilizamos um projetor multimídia com foco no quadro branco, o que oportunizou que todos os sujeitos acompanhassem as ações. Utilizamos a sala de recurso para o desenvolvimento das atividades no Geoplano e no Raiado.

Vale acrescentar ainda que, após consentimento dos sujeitos, procedemos a gravação de áudio e vídeo com intuito de registrar todas as ações desenvolvidas no momento da pesquisa de campo. Tal procedimento viabilizou a apresentação e tratamento dos dados de modo mais condizente à realidade experienciada pelos sujeitos na Pesquisa de Campo.

Conforme exposto anteriormente, além dos recursos didáticos mencionados, os sujeitos utilizaram uma versão impressa contendo as atividades que nortearam essa etapa da Investigação.

Gostaríamos ainda de enfatizar que, embora aplicando um material impresso, propusemos no mesmo a utilização de atividades abertas, com o intuito de atender às especificidades de uma investigação qualitativa fenomenológica. Ressaltamos também que além de ser um registro na produção de dados da Pesquisa, esse material impresso caracteriza-se como peça didática para o desenvolvimento das atividades.

Ainda com relação ao uso de atividades abertas em pesquisas que apresentam a Fenomenologia como aporte metodológico, Oliveira (2017, 51) ressalta que: “A proposta de atividades abertas vem ao encontro do pensamento fenomenológico, pois ao propô-las estávamos atentos às vivências do sujeito, respeitando as individualidades e também à sua condição dialogal”.

Ressaltamos também que as atividades foram aplicadas em quatro encontros que ocorreram no mês de Novembro de 2019. Realizamos dois encontros para registramos as ações no Geoplano tendo em vista que no primeiro dia tivemos problemas técnicos no dispositivo de gravação de áudio e vídeo. Houve um encontro voltado para as ações no Raiado e finalmente um último momento para efetivação das ações no Geogebra. Apresentamos tabela a seguir com datas da realização das atividades.

**Tabela 1: Cronograma da realização das Atividades**

<b>Encontro</b>	<b>Material Manipulativo</b>	<b>Data de Realização</b>
Primeiro	Geoplano	08 de Novembro de 2019
Segundo	Geoplano	14 de Novembro de 2019
Terceiro	Raiado	21 de Novembro de 2019
Quarto	Geogebra	28 de Novembro de 2019

## 6 APRESENTAÇÃO, INTERPRETAÇÃO E ANÁLISE IDEOGRÁFICA DOS DADOS

Após a realização da pesquisa de campo, seguiram-se os procedimentos de transcrever a fala e outras formas de expressão dos sujeitos que viabilizou a análise de manifestações sob o crivo da Fenomenologia. Em relação a tal procedimento, Oliveira (2017) enfatiza que:

Na pesquisa qualitativa fenomenológica, após o momento da pesquisa de campo, é feita a transcrição das falas – e outros meios de expressão dos sujeitos, como fisionômicos, gestuais, etc., a critério do pesquisador -, atentando às experiências vivenciadas pelos sujeitos, que serão interpretadas, indo-se das manifestações genuínas a articulações escritas que são compreensões do percebido. (OLIVEIRA, 2017 p. 55).

No mencionado momento da investigação, procedemos ações no intuito de desvelar a estrutura do fenômeno que se punha como foco da pesquisa realizada. Visando alcançar tal intento, fizemos uso de uma análise ideográfica. Com relação a isso, Oliveira (2017) ressalta que:

Nesse processo, pelo qual o pesquisador pode iniciar sua compreensão das ideias fundamentais que estruturam o fenômeno, é feita uma primeira síntese delas, quando é interessante dar primeiros nomes para as que são vistas próximas, no que seria uma primeira convergência. Por isso chamamos esse processo de análise ideográfica. (OLIVEIRA, 2017, p. 55)

Então, uma vez produzidos os dados em campo, procedemos essas análises ideográficas que consistiram na organização dos dados obtidos na pesquisa de campo em uma tabela com três colunas. Na primeira coluna, está a transcrição de todo o processo da pesquisa. Estivemos atentos às manifestações verbais e gestuais dos sujeitos sempre buscando preservar a fidedignidade do ocorrido.

A elaboração da segunda coluna nos auxiliou a “retomar a experiência vivida com os sujeitos nos movimentos de uma síntese de identificação [...] que tem fundamentos na percepção do todo que se dá em sua pesquisa de campo” (DETONI; PAULO, 2011, p. 101 apud OLIVEIRA, 2017, p. 56) com o intuito de interpretar os dados obtidos.

Já na terceira coluna, tivemos como objeto perceber idéias dos sujeitos que estavam relacionadas com a interação destes uns com os outros bem como com o material manipulativo. Ressaltamos ainda que é na citada coluna que ocorre a análise ideográfica.

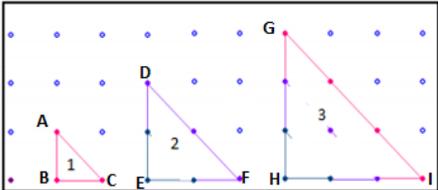
O processo de análise consistiu também na organização dos dados colhidos em cenas. Em relação à relevância de tal procedimento na estruturação das análises (Oliveira, 2017, p. 57) ressalta que ao se organizar “... o texto em cenas significativas mantemo-nos ligados à originalidade das ações dos sujeitos quando das atividades de pesquisa, que após esse passo vão se compondo no núcleo de significação sobre as ideias analisadas”.

Ressaltamos ainda que dando seqüência à tabela contendo as análises ideográficas, incluímos também foto dos materiais impressos com as respostas elaboradas pelos sujeitos. Entendemos que tal processo proporcionará ao leitor uma melhor compreensão das etapas realizadas na Pesquisa de Campo.

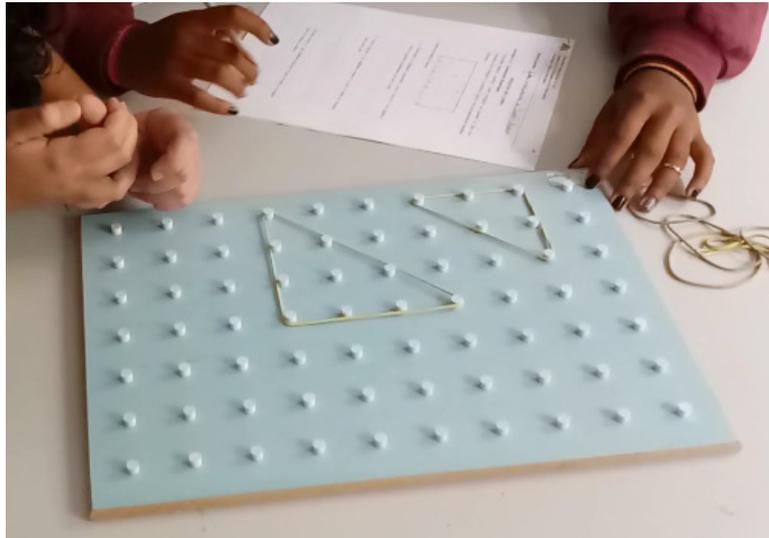
6. 1 AS CENAS E AS IDEIAS.

6.1.1 Ação no Geoplano

**Tabela 2: Análise Ideográfica das Atividades no Geoplano**

<b>Atividade 5.4.1 – Entendendo Homologias</b>		
<p>1) Utilizando elásticos, construa 2 (dois) triângulos que possam ser ditos bem parecidos com o triângulo 1 (conforme a figura), mas que apresentem tamanhos diferentes:</p>		
<p>2) Desenvolvimento de tarefas:</p>		
<p>a) Observando os triângulos construídos, vamos escrever o que podemos observar quando comparamos um com o outro.</p>		
<p>b) Vamos registrar o que podemos observar no que se refere às relações entre seus lados</p>		
<p>c) Vamos escrever o que podemos observar no que se refere às relações entre seus ângulos internos</p>		
		
<p>Prelúdio:</p> <p>Os discentes S1 e S2 se posicionam junto à mesa circular da sala de recursos sobre a qual o pesquisador já havia disponibilizado os seguintes itens:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>a) Geoplano</li> <li>b) Elásticos (à esquerda do geoplano)</li> <li>c) Lista de atividades contendo questões abertas</li> </ul> <p>Os sujeitos decidem que S1 dará início atividade proposta.</p>		
<b>Cena 1.1</b>		
<b>INTERAÇÃO</b>	<b>INTERPRETAÇÃO</b>	<b>IDEIAS</b>
<p>S1 lê a primeira questão com tom de voz audível e é acompanhada atentamente por S2 a qual comenta:</p> <p>S2: “- Parecido com o primeiro triângulo...”</p> <p>S1 aponta para o segundo triângulo e pergunta à colega:</p> <p>S1: - “É esse aqui?”</p>	<p>Os sujeitos identificam no material, elementos que lhes permitem construir uma fala propiciando o início da resolução da atividade.</p> <p>A discussão sobre as características dos triângulos a serem construídos permite</p>	<p>Habitação do horizonte geométrico mediante apresentação.</p> <p>Inauguração do diálogo científico.</p>

<p>S2: “-É... Tem que ser dois...”</p> <p>S1 toma a iniciativa e começa a construir com elástico o segundo triângulo da imagem (Triângulo 2).</p> <p>Atenta ao geoplano a aluna S2 gesticula os indicadores em tom de dúvida e em seguida conclui:</p> <p>S1 conclui a construção do triângulo 2 no geoplano e retorna ao enunciado para releitura do mesmo.</p> <p>S2: - “- Tá, é semelhante... faz aqui, ó...” (apontando para uma região do geoplano)</p> <p>S2 leva a mão direita sobre o primeiro triângulo construído e afirma:</p> <p>S2: “- Tem 3...” (referindo-se à quantidade de pinos que formam o lado do triângulo 2)</p> <p>S2 auxilia sua colega na construção do segundo triângulo e em seguida diz:</p> <p>S2: “- Faz com 4...” (referindo-se à quantidade de pinos que formam o lado do triângulo 3)</p> <p>S1 conclui a construção do segundo triângulo e retorna para leitura do enunciado da questão.</p> <p>S1 inicia a construção do terceiro triângulo com o elástico e é auxiliada por S2. (Ambas constroem o terceiro triângulo que aparece como uma rotação de 180° em relação ao triângulo anterior).</p> <p>Esboçando um leve sorriso, S1 acena positivamente com polegar direito por ter conseguido construir o terceiro triângulo.</p>	<p>uma compreensão mútua no que se refere aos procedimentos a serem adotados para resolução da atividade.</p> <p>Na resolução da atividade os sujeitos desconsideraram o triângulo 1.</p> <p>Mesmo diante de dúvidas, os sujeitos não se mostram estagnados e buscam a solução da questão proposta.</p> <p>O sujeito consegue identificar que o conceito de semelhança está presente na atividade, ou seja, que os triângulos a serem construídos serão semelhantes.</p> <p>Realização de contagem dos pinos que formam o lado do triângulo 2 objetivando conferência do mesmo em relação ao triângulo da imagem.</p> <p>Construção mútua do conhecimento (um ajudando o outro na resolução da atividade). O sujeito utiliza a quantidade de pinos que formam os lados do triângulo 3 como referência para construção do mesmo no geoplano.</p> <p>O material é habitado pelas alunas, que exploram naturalmente suas características e vão além do pedido.</p> <p>Demonstração de satisfação pelo êxito na resolução desta etapa.</p>	<p>Homotetia contribuindo na constituição do conceito de semelhança.</p> <p>Geoplano como facilitador das construções geométricas.</p> <p>Constituição do horizonte geométrico.</p>
--	--	---



### Cena 1.2

INTERAÇÃO	INTERPRETAÇÃO	IDEIAS
<p>Após analisar o triângulo 2 no geoplano, S2 afirma: “- Peraí”</p> <p>S2 inicia um processo de verificação da medida dos lados dos triângulos construindo movimentando o indicador sobre as regiões dos elásticos correspondentes ao perímetro dos triângulos e concomitantemente realiza uma contagem para certificar-se sobre a exatidão das medidas (região entre pinos).</p> <p>S2: “- Tem 4 aqui” (contando os pinos que formam os lados do triângulo maior) ... “Aqui tem 3...” (contando os espaços entre pinos). “Tá bom.. vai...”.</p>	<p>Uma iniciativa metodológica é realizada pelos sujeitos, que dispõem seus corpos (tato e visão) para dar conta do que pensaram.</p> <p>Conferência da figura construída demonstrando seriedade e comprometimento dos sujeitos na realização das atividades propostas.</p> <p>Os sujeitos buscam certificar-se de que os triângulos construídos atendem ao solicitado no material impresso.</p>	<p>Material permite explorar conceitos geométricos com o corpo e sentidos (novo enfoque epistemológico).</p>

<b>Cena 1.3</b>		
<b>INTERAÇÃO</b>	<b>INTERPRETAÇÃO</b>	<b>IDEIAS</b>
<p>Ambas as alunas lêem o item a da primeira questão do material impresso... (S2 o faz em voz audível). S1 começa a responder o item “a” da referida questão e conclui o registro.</p> <p>Os discentes se olham... analisando a resposta.</p> <p>S2: “- É...”</p> <p>Os discentes lêem o item b da questão.</p> <p>S1 questiona “Como assim...?”</p> <p>S2 posiciona a mão sobre um dos vértices (pino) do triângulo maior e reflete: “- Os lados...”</p> <p>Neste momento, S2 forma um ângulo entre polegar e os demais dedos da mão esquerda e sobrepõe a citada abertura sobre um dos ângulos do triângulo menor. Conservando a mesma posição (abertura) entre os dedos ela repete o mesmo processo sobre um dos ângulos do triângulo maior...</p> <p>S1 aponta o lápis para um dos vértices do triângulo maior chamando atenção de sua amiga..</p> <p>Ambas olham para o geoplano e refletem tentando responder a citada questão...</p> <p>S2 novamente conta os pinos que formam os lados do triângulo maior... “- Três... quatro...”</p> <p>S1: “- Este eu não entendi...”</p> <p>S2: “- Nem eu...”</p> <p>Mediante dificuldades encontradas pelos sujeitos para estabelecer algum tipo de relação</p>	<p>Análise da resposta de forma conjunta. (comprometimento e construção mútua do conhecimento)</p> <p>O termo “relação entre os lados” não é compreendido de modo imediato. O sujeito utiliza o seu corpo (mão) visando alcançar melhor interpretação do enunciado.</p> <p>Utilização do corpo (abertura entre dedos das mãos) propiciando constituição do conhecimento. O sujeito realiza um método de comparação de ângulos internos correspondentes (percepção de propriedades invariantes – congruência de ângulos correspondentes).</p> <p>Buscam a contribuição do</p>	<p>Colaboração e Interação</p> <p>Geoplano viabiliza uma abertura para utilização de uma estratégia alternativa para construção do conhecimento (uso do corpo).</p> <p>Ampliação do horizonte geométrico: Identificação de propriedades invariantes na comparação dos polígonos.</p>

<p>entre os lados correspondentes dos triângulos, fez-se necessária intervenção do pesquisador para continuidade da realização da tarefa.</p>	<p>material manipulativo na constituição do conhecimento.</p>	
<p>Pesquisador: “- Vocês não entenderam a pergunta... Leia em voz alta, por favor...”</p> <p>S1 passa a folha para S2 que realiza a leitura da questão em voz alta...</p> <p>Pesquisador: - “O que vocês percebem quando comparam um triângulo com o outro em relação aos seus lados? Escrevam o que vocês observam...”</p> <p>S1 entrega a caneta bem como a folha com o material impresso para S2...</p> <p>S2 observa atentamente os triângulos construídos e aponta para um dos vértices (pino) do triângulo maior comparando com o desenho do referido polígono no material impresso. Após tal observação ela comenta:</p> <p>S2: “- Ele girou... Ele girou...”</p> <p>S1: “- Hum?”</p> <p>S2: “- Esse comprimento veio para o outro lado... (apontando para os lados homólogos dos triângulos semelhantes)</p> <p>S1 acena concordando, mas com tom de dúvida</p> <p>S1: “- É...”</p> <p>S2 começa a responder ao material impresso.</p> <p>S2 devolve o material impresso para sua amiga.</p> <p>Após pegar o material impresso, S1 faz um</p>	<p>Ênfase na necessidade de releitura do enunciado da questão visando ampliar a compreensão da questão. Preocupação em não induzir os sujeitos à algum tipo de linha de pensamento.</p> <p>Solicitação de auxílio visando inauguração de alguma linha de pensamento. (construção mútua do conhecimento).</p> <p>O sujeito ressalta a rotação de 180° existentes entre os triângulos. (A implementação de tal transformação geométrica não fora solicitada no enunciado da questão).</p> <p>Iniciativa na identificação de lados homólogos entre duas figuras, uma homotética e rotacionada da outra, com exploração de relações homológicas.</p> <p>Dúvida quanto à exatidão da resposta elaborada. Há uma</p>	<p>Interação e colaboração</p> <p>Homotetia contribuindo para consolidação de</p>

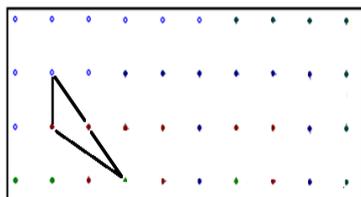
comentário em relação à resposta dada pelo grupo: S1: “- Se é isto eu já não sei...”	diferença de atitudes entre quando exploram o material e quando têm de responder o material impresso.	homologias.  Interação e colaboração.
---	---	---

#### Cena 1.4

INTERAÇÃO	INTERPRETAÇÃO	IDEIAS
<p>S1 inicia a leitura do item c do material impresso em voz audível</p> <p>S1: “-... Ângulos internos?...”</p> <p>S2 leva a mão direita sobre os vértices do triângulo maior e comenta: “- É aqui...”</p> <p>Ambas observam atentamente os triângulos construídos visando responder a questão.</p> <p>S2: “- Acho que é parecido com a resposta da b...”</p> <p>S2 continua refletindo enquanto S1 responde a questão.</p> <p>S2 analisa a resposta dada por sua amiga (abordando quantidade de pinos no interior dos triângulos) aponta para o pino que se encontra no interior do triângulo maior e comenta: “É...”</p> <p>Após acabar de responder ao item c, S1 comenta...</p> <p>S1: “- É acabou...”</p>	<p>Compreensão nítida no que tange ao conceito de ângulo. Os discentes interagem um como o outro visando compreender a questão proposta, situando o material manipulável como base de afirmações geométricas.</p> <p>O sujeito analisa as considerações do grupo verificando se tal resposta é coerente. Eles estabelecem uma relação entre a quantidade de pinos existentes no interior dos triângulos construídos.</p>	<p>Geoplano viabiliza uma abertura para solução e intensifica o grau de interação.</p>

### Atividade 5.4.2 – Explorando triângulos

1) Utilizando elástico, construa 1 (um) triângulo ampliado que pode ser dito bem parecido com o triângulo abaixo (conforme a figura), mas que apresenta razão de semelhança 2:



a) Vamos escrever o que podemos observar no que se refere às relações entre os lados desses triângulos.

b) Vamos escrever o que podemos observar no que se refere às relações entre os ângulos internos desses triângulos

#### Cena 2.1

INTERAÇÃO	INTERPRETAÇÃO	IDEIAS
<p>Os discentes lêem atentamente o material impresso e refletem sobre o enunciado da questão 1:</p> <p>S2 olha para sua colega e comenta: “- Tem que ser a razão...”</p> <p>S1: “- Com certeza... é... 2” (referindo-se à razão de semelhança do polígono a ser construído).</p> <p>S2: “- É...”</p> <p>S1 toma a iniciativa e começa a construir o segundo triângulo, fixando dois vértices do segundo triângulo e “estica” o elástico objetivando demarcar o terceiro vértice.</p> <p>Enquanto observa S1 esticando o elástico para realização do polígono, S2 diz: “- Solta...” (No momento em que na sua concepção o elástico já fora “esticado” até o vértice correto).</p> <p>Após construir o segundo triângulo, S1 realiza um processo de contagem dos pinos que formam os lados do polígono construído para verificação e comenta: “- É...”</p> <p>As duas discentes voltam-se para o material</p>	<p>Busca da compreensão do enunciado visando iniciar a questão.</p> <p>Percepção de que a razão de semelhança é um conceito fundamental para resolução da atividade. Não opõem obstáculos a que conceitos estejam junto ao material.</p> <p>A atividade propicia a construção de polígonos esticando elásticos. Tal procedimento contribui no envolvimento metodológico-geométrico.</p> <p>Os sujeitos realizam a atividade em conjunto. Podemos observar que os pinos do geoplano contribuem na mensuração da medida dos lados dos polígonos construídos.</p> <p>Verificação o polígono construído atende ao solicitado na questão. O</p>	<p>Ampliação do horizonte geométrico.</p> <p>Nova Abordagem epistemológica para o ensino de Geometria.</p> <p>Utilização do Geoplano para comprovar exatidão da construção.</p> <p>Colaboração e Interação.</p>

<p>impresso visando responder ao item “a”.</p> <p>S2 realiza a leitura da citada questão em voz alta e comenta: “– Tá... os lados...”</p> <p>S2 olha para sua colega e comenta: “- Me ajuda a pensar...”</p>	<p>resultado a que eles chegam permite considerações geométricas.</p> <p>Ênfase no termo de maior relevância para o desenvolvimento da questão.</p> <p>O trabalho em equipe propiciando construir o conhecimento de modo mais amplo e colaborativo.</p>	<p>O horizonte de atribuição de significados que eles erigiram está posto e abriga o trabalho coletivo.</p>
--	---	---

**Cena 2.2**

INTERAÇÃO	INTERPRETAÇÃO	IDEIAS
<p>S1 reflete e comenta:</p> <p>“– Que... eles... Como é que se fala...?” (estalando os dedos buscando encontrar a resposta)</p> <p>S1 sorri e comenta: “- Hã,... beleza...”</p> <p>Após comparar os lados homólogos entre os dois triângulos S1 comenta: “Não pulou aqui?... Tinha um só (um espaço entre pinos), agora tem dois aqui (referindo-se a um dos lados do segundo triângulo).</p> <p>S2 começa a registrar a resposta na folha e comenta: “- E eles aumentaram né...” (referindo-se a dimensão das áreas dos triângulos). Esta fala ocorre enquanto responde à questão.</p> <p>S1 observa S2 atentamente respondendo ao material impresso e comenta: “– Amiga, não seria assim né... Tem que falar quanto de medida aí... tipo... razão 2...”</p> <p>S2 ouve e reflete o que a amiga diz olhando para a resposta dada... “– Hum...”</p> <p>S1 aponta para a resposta e auxilia sua amiga na complementação da resposta dizendo: “- Aumentaram de lado por razão 2”</p>	<p>Empenho e dificuldade em representar na forma escrita linha de pensamento.</p> <p>Considerável grau de interação dos sujeitos (um acompanhando atentamente a linha de raciocínio do outro, buscando uma solução).</p> <p>Compreensão do conceito geométrico de lados homólogos (correspondentes) e suas correlações numéricas</p> <p>Enquanto registra a resposta no material impresso, o sujeito verbaliza outra observação e enfatiza a ampliação dos triângulos. Há uma fluidez no diálogo geométrico</p> <p>Entendimento de que além de ressaltar a ampliação, a razão numérica também deve ser registrada.</p>	<p>Busca de soluções mediante interação mútua.</p> <p>Ampliação do Horizonte Geométrico: Solidificação do conceito de homologia.</p>

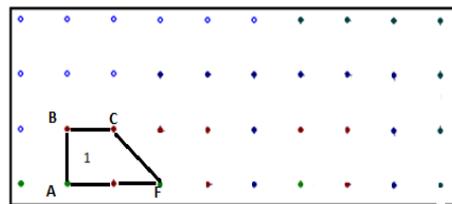
<p>S1: “– Acho que é assim que se faz...”</p> <p>As duas alunas viram o material impresso e iniciam a leitura do item c do material impresso. Após comparar as construções do geoplano, S2 sorri e comenta: “- Acho que é este pininho aqui que sobrou”... (referindo-se ao único pino que apareceu na região interna do triângulo ampliado)</p> <p>S1 comenta: “– Pode ser...”</p> <p>S2 responde ao material impresso e comenta olhando para sua amiga: “– Pininho dá pra ler (compreender)... pino, isso aqui (apontando com o indicador) é um pino...”</p> <p>S1: “- Ah... ta...”</p>	<p>Consentimento do companheiro mostra fluidez do diálogo e compreensão comum.</p> <p>Solidificação do conceito de razão de semelhança.</p> <p>Tentativa de buscar no material manipulável encaminhamento de questão proposta em texto.</p> <p>No registro percebe-se que os sujeitos atentaram mais para a palavra “interno”. Houve uma comparação entre a superfície dos dois triângulos.</p> <p>Construção mútua do conhecimento.</p>	<p>Interação e Colaboração</p> <p>Geoplano viabiliza a ampliação do horizonte geométrico.</p>
---	--	---

### Atividade 5.4.3 – Explorando trapézios

2- Utilizando elásticos, construa um trapézio ampliado que possa ser dito bem parecido com o trapézio 1 (representado na figura abaixo), mantendo a razão de semelhança 2:

2 - Desenvolvimento de tarefas:

- Vamos escrever o que podemos observar quando comparamos os trapézios um com o outro.
- Vamos escrever o que podemos observar no que se refere às relações entre os lados desses trapézios
- Vamos escrever o que podemos observar no que se refere às relações entre os ângulos internos desses trapézios



### Cena 3.1

Prelúdio: O pesquisador disponibilizou o geoplano colocando-o sobre a mesa já com trapézio do item 1 já construído. Desta forma, os sujeitos iniciam a construção conforme enunciado do item mencionado.

INTERAÇÃO	INTERPRETAÇÃO	IDEIAS
S1 inicia a construção por um dos vértices que forma a base menor do trapézio e comenta:		Habitação do horizonte geométrico.

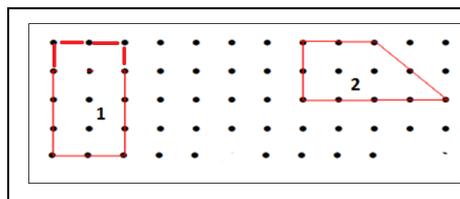
<p>S1: “- Começa por aqui... ó...”.</p> <p>Realizada a construção, S2 inicia um processo para verificação da medida dos lados do trapézio ampliado construído:</p> <p>S2: “- É tem 4...” (referindo-se a medida da base maior do trapézio ampliado).</p> <p>Os sujeitos iniciam leitura da questão 2 do material impresso objetivando responder o item “a”</p> <p>S1 começa a responder ao item “a” após momentos de reflexão e pergunta para sua amiga:</p> <p>S1: “- Como é que se escreve?...” (olhando para sua amiga e buscando uma expressão para inaugurar uma linha de raciocínio).</p> <p>S1 reflete por um tempo e enfatiza na resposta a ampliação que há na comparação entre os polígonos.</p> <p>Após responder, S1 olha para sua amiga com intuito de certificar-se sobre exatidão da resposta.</p> <p>Ambas iniciam a leitura do item “b” da questão 2.</p> <p>S1 em tom de dúvida comenta com sua amiga: “- Não sei...”</p>	<p>Os sujeitos continuam empenhados na resolução, ajudando-se mutuamente.</p> <p>Constatação se a construção atende ao solicitado (comprometimento dos sujeitos).</p> <p>Realização de trabalho em equipe propiciando construção do conhecimento de modo mais abrangente.</p> <p>Mesmo diante de dúvidas, os sujeitos persistem em buscar uma linha de pensamento plausível.</p>	<p>Geoplano viabiliza constatação de plausibilidade.</p> <p>Interação e colaboração.</p>
---	--	--

<b>Cena 3.2</b>		
<b>INTERAÇÃO</b>	<b>INTERPRETAÇÃO</b>	<b>IDEIAS</b>
<p>Após momentos de reflexão S2 comenta: “-... estão na mesma direção.” (referindo-se ao posicionamento dos lados dos trapézios)</p> <p>S1 registra a resposta citada por sua amiga no material impresso.</p> <p>Ambas iniciam a leitura do item “c” da questão 2.</p> <p>S2 comenta: “- Aqui dentro está sobrando 2 pinos... (referindo-se a quantidade de pinos na região interior do trapézio maior)... Já aqui dentro não sobra nenhum...” (referindo-se a quantidade de pinos na região interior do trapézio menor).</p> <p>S1 entrega o material impresso para que sua amiga responda a referida questão.</p> <p>S2: “- Tá...”</p> <p>S2 começa a responder a questão proposta. Após terminar, S2 entrega o material impresso à sua amiga concluindo a atividade 5.4.3.</p>	<p>Os sujeitos percebem que embora tenha havido ampliação, de uma figura para a outra, os lados dos polígonos estão “na mesma direção” (percepção de posições homotéticas das figuras).</p> <p>Os sujeitos comparam a região interna (área) entre os dois trapézios.</p>	<p>Homotetia contribui para estabelecimento de relações geométricas entre polígonos.</p> <p>Diálogo interacional.</p>

**Atividade 5.4.4 – Construindo quadriláteros semelhantes**

1) Observe os polígonos abaixo:

Figura: Quadriláteros no Geoplano



Utilizando elásticos, construa os polígonos mantendo as mesmas dimensões e formato representados nas figuras acima.

- 2) Construa com elásticos duas figuras (que denominaremos figura 3 e figura 4 (**reduzidas**) que podem ser ditas bem parecidas às figuras 1 e 2 mantendo a razão de semelhança  $\frac{1}{2}$ .
- c) Vamos registrar o que podemos observar quando comparamos o retângulo representado na figura 1 (original) e o retângulo que você construiu representado pelo polígono 3 (reduzido)
- d) Vamos registrar o que podemos observar quando comparamos o trapézio representado pelo polígono 2 (original) e o trapézio que você construiu representado pelo polígono 4 (reduzido).
- 3) Considere novamente o retângulo representado pela figura 1. Agora, construa com outro elástico um polígono (que denominaremos 5) que pode ser dito bem parecido ao polígono 1 e que apresente uma rotação de  $90^\circ$ .

Vamos registrar o que podemos observar quando comparamos o retângulo representado pelo polígono 1 (original) e o retângulo representado pelo polígono 5.

- 4) Construa no geoplano novamente o trapézio representado pelo polígono 2 (original). Agora construa com outro elástico um trapézio (que denominaremos 6) que pode ser dito bem parecido ao polígono 2 e que apresente uma rotação de  $90^\circ$ .

Vamos registrar o que podemos observar quando comparamos o trapézio representado pelo polígono 2 com o trapézio representado pelo polígono 6.

#### Cena 4.1

Interlúdio: O pesquisador disponibilizou previamente o geoplano bem como os elásticos para realização desta atividade posicionando tais ferramentas sobre a mesa.

INTERAÇÃO	INTERPRETAÇÃO	IDEIAS
Após a leitura do enunciado da questão 1 da presente atividade, os mesmos construíram os dois polígonos (retângulo e trapézio) sem dificuldades.	Maior familiarização com o material manipulativo em decorrência da sequência das atividades propostas.	Ampliação dos modos de trabalhar no horizonte geométrico.
Os sujeitos realizam a leitura dos itens “a” e “b”	Considerável grau de	

<p>da questão 2.</p> <p>S1 toma a iniciativa esboça um sorriso e entrega um elástico para sua amiga (visando atender o exposto no item “a” da questão 2):</p> <p>S1: “- Toma...”</p> <p>S2 constrói o retângulo reduzido solicitado sem dificuldades</p> <p>Ambas iniciam um processo de conferência da medida dos lados do retângulo construído na forma reduzida:</p> <p>S1: “- Um... um... dois...” (contando por intermédio do indicador os espaços que formam as medidas da base e altura do citado retângulo)</p> <p>Visando atender ao solicitado no item “b”, S2 pega um elástico e constrói sem dificuldades o trapézio na forma reduzida.</p> <p>S2: “- Vai...” (prossigamos...)</p>	<p>interação entre os sujeitos (um convidando o outro a participar da resolução).</p> <p>Manutenção do comprometimento dos sujeitos na resolução (constatação se a construção atende ao solicitado).</p> <p>Exploração do conceito de semelhança mediante redução de figuras.</p> <p>Os discentes compreenderam que a razão <math>\frac{1}{2}</math> imprime uma redução das dimensões dos lados na metade do valor original.</p>	<p>Intensificação da interação entre os sujeitos.</p> <p>Geoplano contribui para validação dos resultados obtidos.</p> <p>Ampliação do horizonte conceitual geométrico: Constituição do conceito razão de semelhança.</p>
<p><b>Cena 4.2</b></p>		
<p>S1 faz uma releitura de modo audível do item “a” visando responder à citada questão.</p> <p>S2 comenta: “- O retângulo 1 é este aqui (apontando para o geoplano)... original...”</p> <p>S1: “- Podemos...” (pausa para reflexão)</p> <p>S1 responde ao item “a” sendo atentamente acompanhada por sua colega.</p>	<p>Retomada do enunciado para ampliação da compreensão do mesmo.</p> <p>Benefício da utilização do material manipulativo viabilizando fluidez das ações</p> <p>No registro os discentes utilizam a expressão “... mudou de tamanho... mas continua semelhante” (compreensão e expressão do conceito de semelhança de figuras).</p>	<p>Geoplano facilita a busca de soluções.</p> <p>Homotetia contribui para constituição do conceito de semelhança.</p>

<b>Cena 4.3</b>		
<b>INTERAÇÃO</b>	<b>INTERPRETAÇÃO</b>	<b>IDEIAS</b>
<p>S1 inicia uma releitura do item “b” da questão 2 e reflete sobre o enunciado da mesma.</p> <p>S2 olha para o trapézio construído no geoplano e comenta:</p> <p>S2: “- É praticamente a mesma coisa...” (comparando a presente questão com a questão respondida anteriormente)</p> <p>S1 olha para sua colega, sorri e comenta: “- Vamos escrever a mesma coisa né ?...”</p> <p>S2: “- É... só que troca os nomes... então...”</p> <p>S1 passa a folha do material impresso para sua amiga responder a questão.</p> <p>S1 acompanha atentamente sua amiga respondendo ao material impresso e comenta:</p> <p>S1: “- Coloca acento nesta palavra aqui...”</p>	<p>Reflexão objetivando inaugurar uma linha de pensamento.</p> <p>Os sujeitos percebem que embora os polígonos originais sejam diferentes (retângulo e trapézio), a forma reduzida de ambos conserva o conceito geométrico de semelhança. (constatação de que o conceito de semelhança também pode ser abordado mediante reduções, mostrando uma meta compreensão e um passo epistemológico).</p>	<p>Ampliação da compreensão conceito de semelhança de polígonos.</p>
<b>Cena: 4.4</b>		
<b>INTERAÇÃO</b>	<b>INTERPRETAÇÃO</b>	<b>IDEIAS</b>
<p>Dando continuidade os sujeitos lêem a questão 3 e reconstroem os polígonos originais da questão 1 visando responder à mencionada questão.</p> <p>Ambas lêem atentamente o enunciado da citada questão e sorriem. S1 constrói o retângulo rotacionado conforme solicitado (no momento da construção, S1 faz uma conferência da quantidade de pinos que forma o retângulo original visando certificar-se da exata medida da figura a ser rotacionada)</p> <p>Após construir o retângulo, S1 relê o enunciado com intuito de respondê-la sendo acompanhada atentamente por sua colega.</p> <p>S2 reflete (batendo suavemente o indicador direito no geoplano...)</p>	<p>Prosseguimento das ações. Manutenção do ritmo das atividades.</p> <p>Sorriso comum denota que o horizonte geométrico de atribuição de significados segue cada vez mais articulado e em comunhão.</p> <p>Exploração da transformação geométrica de rotação.</p> <p>Constatação se a construção atende ao solicitado. (Manutenção do comprometimento por parte dos sujeitos).</p> <p>Reflexão visando à inauguração de uma linha de pensamento.</p> <p>No registro, o sujeito utiliza a expressão “São iguais...” (Compreensão da existência do conceito de semelhança)</p>	<p>Intensificação na relação de interação entre os participantes.</p> <p>Validação das ações permitida no material manipulável.</p> <p>Homotetia viabiliza a</p>

S1 responde à questão em pauta.	mesmo em figuras rotacionadas).	constituição do conceito de semelhança.
<b>Cena 4.5</b>		
Interlúdio: Antes de responder à questão 4, os discentes retiraram todos os elásticos do geoplano.		
<b>INTERAÇÃO</b>	<b>INTERPRETAÇÃO</b>	<b>IDEIAS</b>
<p>S1 lê o enunciado da questão 4 e entrega o material impresso para sua amiga e diz: “ – Segura...”</p> <p>S2: “ – É difícil...”</p> <p>S1 aproxima o geoplano para junto de si, toma um elástico e constrói o trapézio (original) solicitado no enunciado.</p> <p>Acompanhando o movimento de construção de sua amiga, S2 comenta: “ – Dois...” (referindo-se à medida da base menor do trapézio)</p> <p>S2: “ – Dois também...” (referindo-se à medida da altura)</p> <p>S1 confere a medida da base maior do trapézio construído.</p> <p>Após um momento de pausa e retorno ao enunciado, S1 inicia o processo de construção do trapézio na posição rotacionada e conclui a figura.</p> <p>S2 comenta: “ – Espere aí... é... foi” (conferindo a medida dos lados do trapézio construído na posição rotacionada)</p> <p>S1 relê o enunciado da questão e diz: “ – Tá...”</p> <p>Após um momento de reflexão, S2 comenta: “ – É praticamente à mesma coisa... (referindo-se à resposta da questão anterior)</p> <p>Ambas sorriem. S1 comenta: “ – É...”</p> <p>Ainda não convencida, S1 olha novamente para o geoplano.</p> <p>Neste momento, S1 balança o lápis entre os dedos enquanto reflete</p> <p>S2 comenta: “ – Amiga...” (aparentemente</p>	<p>Ao entregar o material impresso para a colega, o sujeito prontifica-se a construir o trapézio solicitado no geoplano.</p> <p>Apresentação de certo grau de dificuldade na imaginação do trapézio na forma rotacionada.</p> <p>Construção mútua do conhecimento sobre o material e suas possibilidades.</p>	<p>Interação e Colaboração.</p> <p>Geoplano viabiliza o “pensar geométrico” de modo coletivo.</p> <p>Diálogo interacional.</p>

<p>convicta da resposta)</p> <p>S1 sorri e passa o material impresso para S2.</p> <p>S1: “– Toma...” (sorrindo e ao mesmo tempo solicitando auxílio).</p> <p>S2 inicia e faz uma pausa (refletindo), sendo acompanhada atentamente por S1. S2 registra que embora o trapézio construído esteja rotacionado, o mesmo conserva as dimensões do trapézio original.</p> <p>Ambas concluem a atividade.</p>	<p>Busca dialogal para uma constatação se o polígono atende ao solicitado.</p> <p>No registro os sujeitos utilizam a expressão “Eles são a mesma coisa...” (Compreensão da ideia de semelhança e habitação do vocabulário geométrico acordado).</p>	<p>Ampliação do horizonte geométrico: Constituição do conceito de semelhança.</p>
<p><b>Pós-lúdio:</b> Cabe ressaltar que ao invés da palavra rotação eles registram o termo “giro” de 90°. (Ampliação na compreensão do conceito da transformação geométrica de rotação).</p>		

Quadro 7: Desenvolvimento das Atividades (Geoplano)

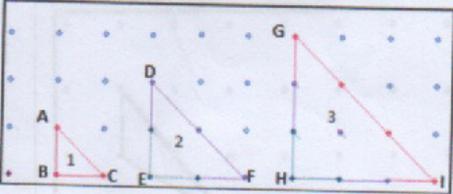
Universidade Federal de Juiz de Fora  
Programa de Pós-Graduação em Ed. Matemática  
Pesquisador: Elias da Costa Abreu

Alunos (sujeitos) \_\_\_\_\_

**PESQUISA DE CAMPO**

**Atividade 5.4.1 – Entendendo Homologias**

1- Utilizando elásticos, construa 2 (dois) triângulos que possam ser ditos bem parecidos com o triângulo 1 (conforme a figura), mas que apresentam tamanhos diferentes:



2) Desenvolvimento de taretas:

a) Observando os triângulos construídos, vamos escrever o que podemos observar quando comparamos um com o outro.

que ele mudou de tamanho

a) Vamos registrar o que podemos observar no que se refere às relações entre seus lados

Ele tem uma orientação de 90°.

c) Vamos escrever o que podemos observar no que se refere às relações entre seus ângulos internos.

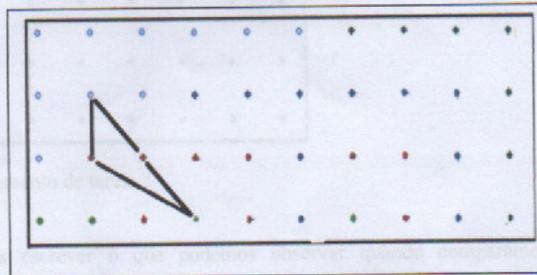
Em um sobra um no meio e outro não.

### Atividade 5.4.2 – Explorando triângulos

1- Utilizando elástico, construa 1 (um) triângulo ampliado que pode ser dito bem parecido com o triângulo abaixo (conforme a figura), mas que apresenta razão de semelhança 2:

1- Utilizando elástico, construa 1 (um) triângulo ampliado que pode ser dito bem parecido com o triângulo abaixo (conforme a figura), mas que apresenta razão de semelhança 2:

Figura: Triângulo no Geoplano



b) Vamos escrever o que podemos observar no que se refere às relações entre os lados desses triângulos.

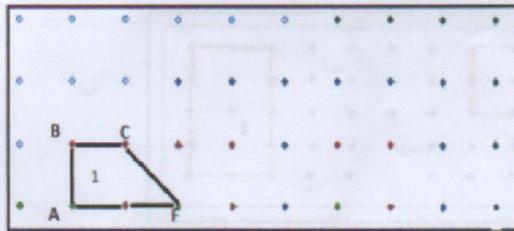
*Eles aumentaram nos lados por vezes de 2.*

c) Vamos escrever o que podemos observar no que se refere às relações entre os ângulos internos desses triângulos

*Na versão de robreou um nininho no meio.*

**Atividade 5.4.3 – Explorando trapézios**

- 1- Utilizando elásticos, construa um trapézio ampliado que possa ser dito bem parecido com o trapézio 1 (representado na figura abaixo), mantendo a razão de semelhança 2:



2) Desenvolvimento de tarefas:

- a) Vamos escrever o que podemos observar quando comparamos os trapézios um com o outro.

a ampliação

- b) Vamos escrever o que podemos observar no que se refere às relações entre os lados desses trapézios

eles estão na mesma direção

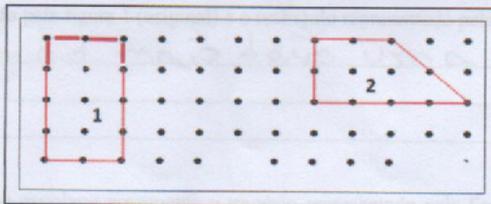
- c) Vamos escrever o que podemos observar no que se refere às relações entre os ângulos internos desses trapézios

Destaco de um estaca dobrando a pontas e destaco de outra não dobrou nada.

Atividade 5.4.4 – Construindo quadriláteros semelhantes

1 - Observe os polígonos abaixo:

Figura: Quadriláteros no Geoplano



1- Utilizando elásticos, construa os polígonos mantendo as mesmas dimensões e formato representados nas figuras acima.

2 – Construa com elásticos duas figuras (que denominaremos figura 3 e figura 4) **reduzidas** que podem ser ditas bem parecidas às figuras 1 e 2 mantendo a razão de semelhança  $\frac{1}{2}$ .

a) Vamos registrar o que podemos observar quando comparamos o retângulo representado na figura 1 (original) e o retângulo que você construiu representado pela figura 3 (reduzido).

Ele mudou de tamanho mais continua semelhante. E ao invés de ampliar ele reduziu.

b) Vamos registrar o que podemos observar quando comparamos o trapézio representado pela figura 2 (original) e o trapézio que você construiu representado pela figura 4 (reduzido).

Ele mudou de tamanho mais continua semelhante. E ao invés de ampliar ele reduziu.

3 – Considere novamente o retângulo representado pela figura 1. Agora, construa com outro elástico um polígono (que denominaremos 5) que pode ser dito bem parecido à figura 1 e que apresente uma rotação de  $90^\circ$ .

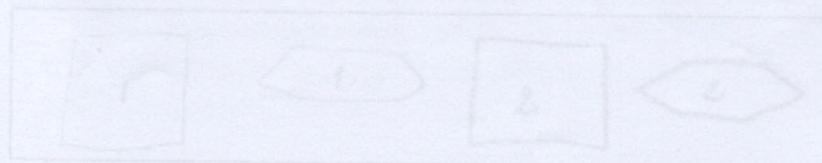
a) Vamos registrar o que podemos observar quando comparamos o retângulo representado pela figura 1 (original) e o retângulo representado pela figura 5.

São iguais mais teve uma rotação.

4 – Construa no geoplano novamente o trapézio representado pela figura 2 (original). Agora construa com outro elástico um trapézio (que denominaremos 6) que pode ser dito bem parecido à figura 2 e que apresente uma rotação de  $90^\circ$ .

a) Vamos registrar o que podemos observar quando comparamos o trapézio representado pela figura 2 com o trapézio representado pela figura 6.

Eles são a mesma coisa mais teve um giro de  $90^\circ$ .



## 6.1.2 Ação no Geogebra

**Tabela 3: Análise Ideográfica das Atividades no Geogebra**

<b>Atividade 5.5.1 – Construção de Triângulos inscritos homotéticos</b>
<p>PRIMEIRA ETAPA</p> <p>1 – Realize as atividades abaixo no Geogebra</p> <ul style="list-style-type: none"><li>a) Construa uma circunferência com raio 1 e renomeie o ponto central da mesma usando a letra M.</li><li>b) Marque 3 pontos aleatórios A,B e C (sugere-se espaçados) pertencentes à circunferência.</li><li>c) Construa o triângulo ABC inscrito na circunferência de centro M.</li><li>d) Construa os 3 segmentos correspondentes aos raios da circunferência MA, MB e MC</li></ul> <p>SEGUNDA ETAPA</p> <ul style="list-style-type: none"><li>e) Marque um ponto N em qualquer lugar “fora” da primeira circunferência</li><li>f) Construa uma segunda circunferência com raio 2 usando N como ponto central.</li><li>g) Trace 3 retas paralelas que interceptem o ponto N, uma a cada raio MA, MB e MC (pertencentes à primeira circunferência)</li><li>h) Marque os pontos DEF e construa na segunda circunferência o triângulo DEF que pode ser dito bem parecido ao triângulo ABC.</li><li>i) Vamos registrar o que há em comum entre os dois triângulos construídos? Sugestão: Você pode ocultar as retas j, l e k.</li></ul> <p>1) Identifique no canto esquerdo do Geogebra os valores dos segmentos AB e DE, BC e EF, AC e DF e calcule as razões (divisões) descritas abaixo:</p> <p>AB / DE =</p> <p>BC / EF =</p> <p>AC / DF =</p> <p>2) O que podemos afirmar quando comparamos as 3 razões calculadas acima ?</p> <p>TERCEIRA ETAPA</p> <ul style="list-style-type: none"><li>j) Trace a reta que liga os pontos M e N</li><li>k) Trace a reta que liga os pontos A e D</li><li>l) Marque o ponto H formado pela intersecção (encontro) das retas MN e AD.</li></ul> <p>3) Em sua opinião as retas BE e CF também interceptarão o ponto H, ou seja, passarão pelo ponto H ? Justifique</p> <p>4) Construa as retas BE e CF e verifique se a resposta ao item 3 está correta.</p> <p>QUARTA ETAPA</p> <ul style="list-style-type: none"><li>m) Marque aleatoriamente um ponto O na reta MN</li><li>n) Construa na segunda circunferência o segmento DN</li><li>o) Construa uma reta paralela ao segmento DN que passe pelo ponto O.</li><li>p) Marque o ponto I (formado pela intersecção das retas AD e OI)</li></ul>

q) Construa uma terceira circunferência tendo OI como raio da mesma

r) Identifique e marque nesta circunferência o ponto G (pertencente a reta BE) bem como o ponto J (pertencente a reta CF).

s) Construa o terceiro triângulo IGJ

5) Vamos registrar o que há em comum entre o triângulo IGJ e os outros triângulos construídos anteriormente.

Prelúdio: Esta etapa da pesquisa fora realizada em uma sala de aula. O pesquisador disponibilizou, de modo prévio, um notebook com geogebra instalado bem como um projetor multimídia com foco na lousa (oportunizando que todos visualizassem ações de modo mais nítido). Foram disponibilizadas também cópias do material impresso com as questões a serem desenvolvidas em etapas.

Os sujeitos se organizaram e decidiram a ordem da participação na realização das atividades no que tange à interação no notebook.

Após tomarem seus lugares, os sujeitos decidiram que S5 iniciaria a atividade no Geogebra. Desta forma, S5 se posicionou na mesa onde já havia o mencionado notebook com o software aberto. O projetor já estava ligado oportunizando que todos acompanhassem o desenvolvimento das ações

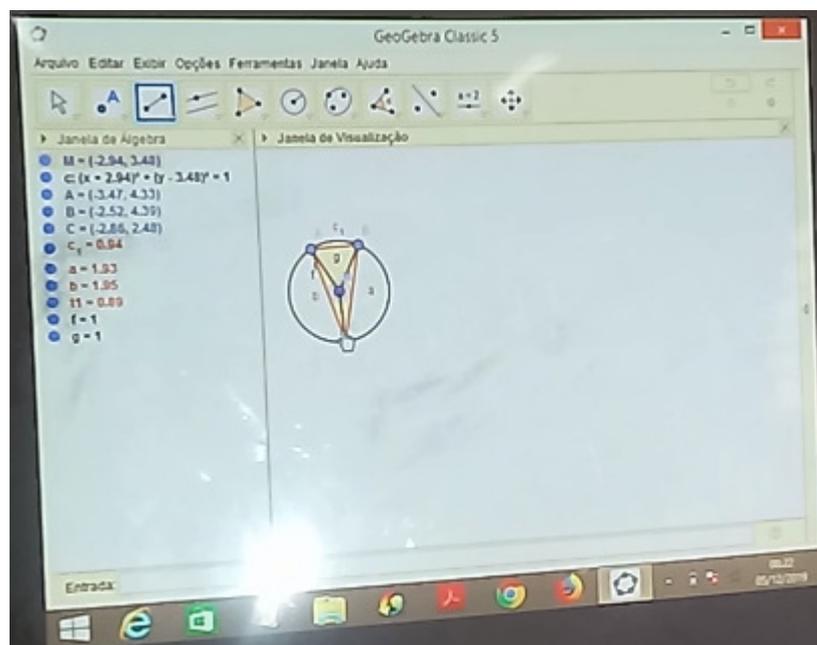
<b>Cena 5.1</b>		
<b>INTERAÇÃO</b>	<b>INTERPRETAÇÃO</b>	<b>IDEIAS</b>
<p>Iniciando a atividade, S2 se prontificou a realizar oralmente a leitura da primeira etapa da questão 1.</p> <p>Após ler o item a, S2 faz uma pausa para realização da ação no Geogebra.</p> <p>S5 constrói um ponto e em seguida renomeia o mesmo com a letra M. Todavia ela não prossegue a ação visando construir a circunferência solicitada tendo o ponto M como centro.</p> <p>Atenta ao material impresso, S2 não percebe que a construção da circunferência ainda não havia sido realizada. Ela inicia a leitura do item b da questão 1 que solicita que fossem marcados 3 pontos aleatórios sobre a circunferência.</p> <p>S1 e S2 percebem que a circunferência de centro M ainda não havia sido construída.</p> <p>S1 gesticula com a mão, em tom de contestação, indicando que o grupo não havia concluído integralmente a ação anterior. Neste</p>	<p>O ambiente didático se inicia, com o aporte da tecnologia dominado e sem estranheza. Percebe-se um sincronismo das ações. Os sujeitos preservam a construção mútua do conhecimento.</p> <p>Os sujeitos interagem e encontram no material impresso elementos que lhes permitem constatar incoerências.</p>	<p>Material impresso e software contribuem para a habitação do horizonte geométrico.</p> <p>Geogebra contribui para identificação da falta de articulação das ações em relação ao solicitado.</p> <p>Software propicia construção mútua do conhecimento.</p>

<p>ínterim, S3 comenta: “- Cadê a circunferência?”</p> <p>Neste momento os sujeitos se questionam sobre a medida do raio...</p> <p>S4: “- É 1...?”</p> <p>S5: “- É 1 ...”</p> <p>S3: “- É...”</p> <p>S5 constrói a circunferência de Raio 1 a partir do ponto Central M conforme solicitado no item a.</p> <p>S2 relê o enunciado do item b da questão em pauta.</p> <p>S5 marca 3 pontos em posições aleatórias sobre a circunferência.</p> <p>S2 lê oralmente o item c solicitando que seja construído um triângulo A, B, C inscrito na circunferência.</p> <p>Neste momento, S5 levanta-se da cadeira, oportunizando que outro sujeito dê continuidade nas ações no Geogebra.</p> <p>Após se levantar, S5 se aproxima de S2 (leitor) e acompanha atentamente a leitura do material impresso.</p>	<p>O software permite explorar a ideia de raio de modo abrangente e coletivo.</p> <p>Há um avanço no nível de interação sujeitos x software que propicia o desenvolvimento das ações.</p> <p>Ênfase na coletividade na realização das ações.</p>	<p>Geogebra viabiliza uma abertura para a solução.</p> <p>Ampliação do horizonte geométrico.</p> <p>Interação e Colaboração.</p>
---	--	--

**Cena 5.2**

INTERAÇÃO	INTERPRETAÇÃO	IDEIAS
<p>S3 se senta junto ao notebook para dar continuidade.</p> <p>Demonstrando certo grau de destreza, S3 constrói o triângulo ABC inscrito na circunferência a partir dos pontos esboçados anteriormente.</p> <p>S2 lê oralmente o item d da questão 1.</p> <p>S3 inicia a construção dos segmentos MA, MB e MC que une os vértices ao centro da circunferência, mas apresenta dúvida...</p> <p>S3: “- Como é?”</p>	<p>Há um considerável grau de participação de todos no desenvolvimento das ações. O prosseguimento das atividades ocorre com fluidez.</p> <p>Há exploração concomitante de relevantes conceitos geométricos tais como vértice, segmento de reta,</p>	<p>Software como facilitador das ações</p>

<p>S1 e S2 auxiliam S3.</p> <p>S1: - É... tem que ser no triângulo..</p> <p>S2: “- A partir dos vértices...”</p> <p>S3 constrói os 3 segmentos conforme solicitado.</p> <p>Os sujeitos concluem as atividades da primeira etapa.</p>	<p>inscrição de polígonos, etc.,</p> <p>Sujeitos interagem na busca de respostas preservando a construção mútua do conhecimento.</p>	<p>Diálogo Científico contribui na busca por Respostas.</p>
--	--	---



<b>Cena 5.3</b>		
<b>INTERAÇÃO</b>	<b>INTERPRETAÇÃO</b>	<b>IDEIAS</b>
<p>Iniciando a segunda etapa, S2 passa a folha do material impresso para S1 que lê oralmente o item e.</p> <p>S3 marca um ponto fora da primeira circunferência construída. Ela solicita uma confirmação sobre o nome do ponto.</p> <p>S3: “- Ponto N?”</p> <p>S1: “- É... N...”</p>	<p>O grupo segue nas ações, sempre com natural adesão de todos.</p> <p>Há fluidez no desenvolvimento da atividade. Há um considerável avanço na interação sujeitos x software.</p>	<p>O grupo encontra no material impresso elementos que contribuem para a continuidade das ações.</p>

<p>S3 renomeia o citado ponto para “N”.</p> <p>S1 procede a leitura do item f, ainda da questão 1, que solicita a construção de uma segunda circunferência com centro em N e raio 2.</p> <p>S1: “- Construa uma segunda circunferência com raio 2 usando... N como central”.</p> <p>Ao realizar a leitura do item f, S1 faz uma pausa, gesticula, sorri e olha para S3, tentando levá-la a perceber que o processo necessário para realização desta construção era similar ao que havia sido feito na na realização da primeira circunferência, mas neste caso o valor do raio seria diferente.</p> <p>S1: “- Ah tá... mas é diferente, tá?” (sorrindo e comparando as medidas dos raios da primeira e segunda circunferência).</p> <p>S3 constrói a segunda circunferência.</p> <p>S3: “- Assim?”</p> <p>S1: “- É...”</p> <p>Os demais sujeitos estão observando atentamente o desenvolvimento da atividade proposta.</p> <p>S1 inicia a leitura do item g.</p> <p>S1: - Trace três retas paralelas que intercep... – O quê? (leitura interrompida diante de um termo desconhecido).</p> <p>S2 continua a realizar a leitura auxiliando sua</p>	<p>Sorriso demonstrando ampliação do ambiente didático. O sujeito é capaz estabelecer relações entre as medidas dos raios das circunferências.</p> <p>Os sujeitos continuam empenhados na resolução, ajudando-se mutuamente</p>	<p>Software viabiliza a construção mútua do conhecimento.</p> <p>Exploração do horizonte conceitual geométrico: Software permite abordar o conceito de raio de modo dinâmico além de intensificar a interatividade do grupo.</p> <p>Interação e Colaboração</p>
--	---	---

<p>colega.</p> <p>S2: “- Trace 3 retas paralelas que interceptem o ponto N, uma a cada raio MA, MB e MC”</p> <p>Neste momento, S3 vira-se para S4 e pergunta: “- Você quer fazer?”</p> <p>S4: “- Sim.”</p> <p>Nesse momento, S3 se levanta, cedendo o lugar para S4 o qual se senta em seguida diante do Notebook.</p>	<p>Realização de trabalho em equipe propiciando construção do conhecimento de modo mais abrangente.</p>	<p>Trabalho em equipe viabilizando a continuidade das ações.</p> <p>Os sujeitos não buscam destacaram-se individualmente. Há um empenho mútuo na preservação da coletividade.</p>
--	---	---

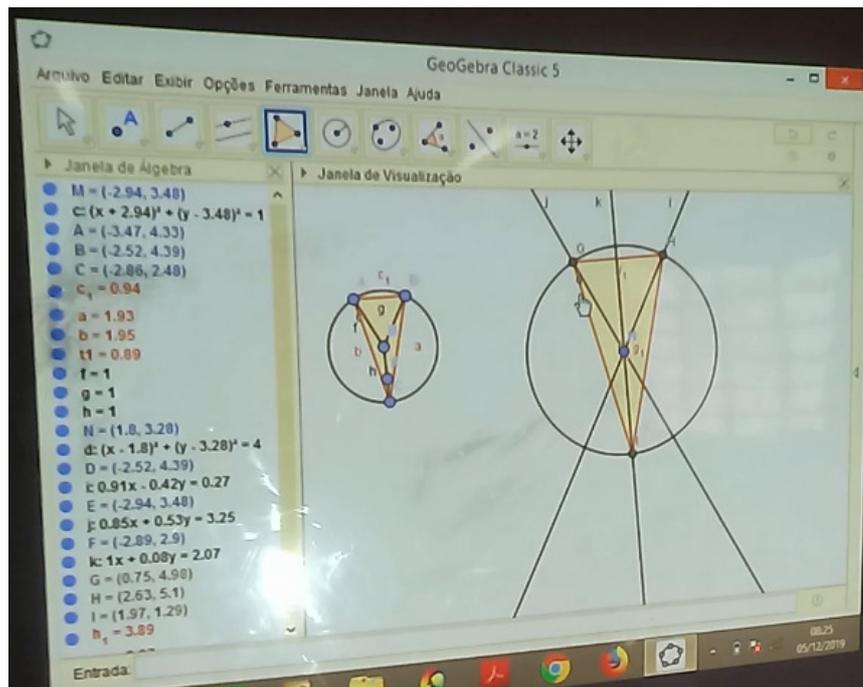
**Cena 5.4**

<b>INTERAÇÃO</b>	<b>INTERPRETAÇÃO</b>	<b>IDEIAS</b>
<p>A partir dos raios MA, MB e MC (construídos na primeira circunferência), S4 constrói 3 retas paralelas que interceptam o centro N da segunda circunferência construída. Ou seja, a primeira reta paralela à MA, a segunda reta paralela à MB, já a terceira reta paralela à MC. S4 conseguiu fazer tal passo com certo grau de desenvoltura.</p> <p>Todos estão atentos à lousa enquanto S4 interage no Geogebra.</p> <p>S2 faz a leitura do item h que solicita à marcação dos pontos D, E e F, situados na</p>	<p>Software permite que a ideia de paralelismo seja explorada pelo grupo com considerável grau de dinamismo.</p> <p>Software contribui para construção de polígonos semelhantes tendo a transformação geométrica de homotetia como referência.</p>	<p>Ampliação do horizonte conceitual geométrico.</p>

<p>segunda circunferência construída, nas regiões de intersecção entre as retas MA, MB e MC com a região do contorno da citada circunferência.</p> <p>S4 procede à marcação dos pontos e em seguida constrói na segunda circunferência o triângulo DEF. O sujeito realiza tal procedimento com certo grau de destreza.</p> <p>S1 realiza a leitura do item i, que solicita que seja feito um registro sobre o que há em comum entre os triângulos construídos.</p> <p>S3 se levanta, pega uma cadeira e se assenta mais próximo dos demais sujeitos demonstrando interesse em participar das discussões do grupo.</p> <p>S3 solicita que S5 pegue um lápis para que ela possa fazer registros.</p> <p>S5 entrega a caneta para S3.</p> <p>S4 (que está diante do notebook) pega uma cópia do material impresso para reler o enunciado da questão e em seguida olha para a projeção na lousa.</p> <p>Todos olham para S4 esperando o início de alguma linha de raciocínio. S1, S2 e S3 sorriem.</p>	<p>Há um considerável envolvimento dos sujeitos na busca de respostas.</p> <p>Sorriso comum denotando que o horizonte geométrico de atribuição de significados segue cada vez mais articulado e em comunhão.</p>	<p>A temática semelhança de figuras é explorada tendo como referência relevantes conceitos geométricos (tais como homotetia e paralelismo)</p> <p>Avanço no grau de familiarização dos sujeitos em relação ao Geogebra.</p> <p>Interação e Colaboração</p> <p>Ampliação do horizonte geométrico</p>
--	--	---

Os sujeitos voltam à atenção para a projeção na lousa e refletem por um tempo.

Software contribui na busca por respostas



**Cena 5.5**

**INTERAÇÃO**

S4 novamente lê atentamente o enunciado da questão (item i da Segunda Etapa). Em seguida comenta: - Eles têm os mesmos ângulos internos?

S2 repete o que S4 disse em tom de afirmação.

S1 registra a resposta na folha. Ela faz uma pausa, olha para a lousa e reflete sobre a hipótese levantada.

**INTERPRETAÇÃO**

Os sujeitos levantam a hipótese sobre a possibilidade de congruência dos ângulos internos correspondentes (propriedades invariantes).

**IDEIAS**

Software oportuniza um ambiente didático favorável ao levantamento de hipóteses.

<p>Enquanto S1 escreve, S4 continua olhando para o enunciado e para a projeção e reflete um pouco mais.</p> <p>Após S1 registrar a resposta, os demais sujeitos (S5, S2, S3 e S4) refletem sobre a mesma.</p> <p>S2 lê a sugestão para ocultar as retas l, j e k. S2 gesticula e tom de dúvida. Depois aponta para a lousa com o indicador.</p> <p>S2: “- Olha ali, retas l, j e k...” (olhando para a projeção na lousa)</p> <p>S1 também aponta para a lousa concordando com sua amiga e mostra tal sugestão para S4. (Em seguida, aponta para o material impresso para auxiliar S4).</p> <p>S4 segue a sugestão e oculta as retas l, j e k.</p>	<p>Os sujeitos validam a hipótese levantada. (Construção mútua do conhecimento).</p> <p>Software permite que ações possam ser realizadas coletivamente e de modo imediato.</p>	<p>Geogebra contribui para a verificação de plausibilidade de hipóteses levantadas.</p> <p>Exploração do horizonte conceitual geométrico: Identificação de propriedades invariantes (congruência dos ângulos internos dos triângulos).</p> <p>Interação e Colaboração</p>
--	--	---

**Cena 5.6**

Interlúdio: O pesquisador disponibilizou uma calculadora para facilitar os cálculos das razões solicitadas no item 1 e a colocou sobre uma das mesas. S3 se posiciona frente à calculadora.

<b>INTERAÇÃO</b>	<b>INTERPRETAÇÃO</b>	<b>IDEIAS</b>
<p>S1 lê oralmente o item 1 da segunda etapa.</p> <p>Após a leitura, S3 olha para a lousa e percebe que alguns pontos do vértice do segundo triângulo ainda não haviam sido renomeados. Ela solicita:</p> <p>S3: “- Renomeie os pontos G, H e I, por favor...”</p> <p>S4 prontamente renomeia o ponto G para ponto D, bem como o ponto H para ponto E e o ponto I para F.</p> <p>S3: “- Pronto, agora dê o valor de AB.”</p> <p>S4 clica sobre o segmento. S2 cita o valor que aparece na projeção para S1 registrar.</p>	<p>Software permite a visualização imediata da medida de segmentos. O conceito geométrico de distância entre pontos é explorado de modo</p>	

<p>S2: “- 0,94...”</p> <p>S1 registra o valor no material impresso.</p> <p>S1: “- DE?” (quanto mede?)</p> <p>S4 clica sobre o segmento...</p> <p>S2: “- 1,89...”</p> <p>S3 inicia o cálculo das divisões na calculadora. Após algum tempo ela mostra a resposta referente à primeira razão encontrada para os demais sujeitos.</p> <p>S2: “- Ué?” (Os sujeitos estranham a quantidade de casas decimais)</p> <p>S3: “- Mas é a conta...”</p> <p>S1 registra a resposta. Mas solicita uma borracha e apaga o valor registrado.</p> <p>S3 refaz a divisão e mostra o display para S1 que registra o valor com a devida correção. S1 anota o valor.</p> <p>S3 olha para a projeção:</p> <p>S3: “- Agora, BC...” (falando junto com S2)</p> <p>S2: “- Tá ali, ó...” (olhando para a projeção)</p> <p>S4 apresenta certa dificuldade para clicar no segmento...</p> <p>S4 posiciona o cursor do mouse sobre o segmento BC. S1 registra no material impresso a medida de tal segmento (1,94...).</p> <p>S1: “- EF?” (valor?)</p> <p>S4 posiciona o mouse sobre o segmento EF. S1 registra a medida do mesmo.</p> <p>S2: “- AC?” (valor?)</p> <p>S5: “- AC, olha lá...” (com olhos fixos na projeção)</p> <p>S4 seleciona o citado segmento com o mouse. S1 realiza as anotações.</p>	<p>concomitante.</p> <p>A atividade permite indiretamente a exploração da ideia de números irracionais.</p> <p>Mesmo diante de constatação de um resultado na forma de um número irracional, os sujeitos não ficam estagnados e permanecem na busca de soluções.</p> <p>Software cria um ambiente favorável para que o conhecimento seja construído coletivamente.</p>	<p>Constituição do horizonte conceitual geométrico</p> <p>Software contribui significativamente na fluidez e desenvolvimento das ações</p>
--	--	--

<p><b>Interlúdio:</b> O intuito desta etapa era o de levar os discentes a perceberem que o valor referente à razão entre as medida dos lados homólogos de duas figuras semelhantes é a mesma. Percebemos que os sujeitos tiveram dificuldades na interação simultânea de dois dispositivos: Software x calculadora.</p>		
<p><b>Cena: 5.7</b></p>		
INTERAÇÃO	INTERPRETAÇÃO	IDEIAS
<p>S3 observa os valores anotados por S1 (BC / EF) e realiza as divisões na calculadora.</p> <p>S3 mostra o resultado obtido no display para que S1 possa registrar.</p> <p>S1 pede novamente que S4 posicione o cursor sobre os segmentos AC e DF.</p> <p>S1: “- AC?”</p> <p>S4 posiciona o cursor sobre o segmento conforme solicitado.</p> <p>S1 registra o valor do segmento.</p> <p>S2: “- DF...?”</p> <p>S4 posiciona o cursor sobre DF.</p> <p>S1 registra o citado valor.</p> <p>S3 calcula o valor da terceira razão (AC / DF) e mostra o display para que S1 possa anotar o resultado encontrado.</p> <p>S1 registra o valor no material impresso.</p> <p>S2 lê de oralmente a questão 2 do material impresso que leva os sujeitos a compararem o valor das razões, resultantes da divisão entre os lados homólogos do triângulo 1 e triângulo 2.</p>	<p>A atividade permite abordar o conceito geométrico de razão entre segmentos.</p> <p>O software contribui para exploração de conceitos geométricos de modo mais abrangente.</p> <p>A atividade contribui para o desenvolvimento da compreensão de homologia.</p>	<p>Software facilita a identificação dos lados homólogos de duas figuras semelhantes.</p>

<p>S1 aponta para os valores das razões registrados.</p> <p>S1: “- Aqui ó...”</p> <p>S3, S1 e S2 se voltam para as respostas e refletem:</p> <p>S2: “- Afirmar...” (refletindo)</p> <p>S5 aproxima a folha para junto de si para que possa visualizar melhor as respostas.</p> <p>S4 levanta a folha do material impresso e olha para a projeção e também reflete...</p> <p>S3 olha para S4:</p> <p>S3: “- E aí, S4? (rindo...)”</p> <p>S2 e S1 também olham para S4 sorrindo (tom de cordialidade) e esperam que alguma linha de raciocínio seja iniciada por ele...</p>	<p>Há um considerável grau de interação dos sujeitos no desenvolvimento das ações.</p> <p>Os sujeitos tiveram dificuldades no cálculo do valor das razões. No registro percebe-se que foram encontrados 3 valores distintos.</p> <p>Mesmo diante de uma dificuldade, os sujeitos continuam interagindo e perseveram na busca de respostas.</p> <p>Há uma certa expectativa por parte da maioria dos componentes de que S4 poderia auxiliar o grupo inaugurando uma linha de raciocínio.</p>	<p>Há a manutenção de um ambiente didático que preserva a busca por respostas: Os sujeitos refletem e interagem uns com os outros fazendo indagações.</p> <p>Intensificação dos aspectos relacionados à harmonia e comunhão do grupo.</p>
<b>Cena 5.8</b>		
<b>INTERAÇÃO</b>	<b>INTERPRETAÇÃO</b>	<b>IDEIAS</b>
<p>S5 inicia uma linha de raciocínio..</p> <p>S5: “- Que elas são iguais... mas os cálculos são diferentes...” (em tom baixo e com certo grau de inibição)</p> <p>S1 olha para S5...</p> <p>S3: “- O que?” (voltando-se para S5 demonstrando interesse em ouvir sua colega).</p> <p>S5 repete a resposta mas ainda em tom baixo...</p>	<p>O sujeito levanta a hipótese de que os valores das razões deveriam ser o mesmo embora os cálculos não tenham confirmado tal linha de raciocínio.</p>	<p>Constatação da existência de pré-requisitos conceituais que permitem o sujeito identificar incoerências.</p>

<p>S3 repete a resposta elaborada por S5.</p> <p>S3: “- Que elas são iguais... o que?...” (votada para S5)</p> <p>S5: “-... mas os cálculos (valores) são diferentes...”.</p> <p>S1 registra a resposta no material impresso.</p> <p>S4 permanece refletindo olhando para a lousa.</p>	<p>O grupo sustenta a hipótese levantada e de alguma forma identifica a ideia de proporção entre os triângulos construídos.</p>	<p>Interação e Colaboração</p>
--	---	--------------------------------

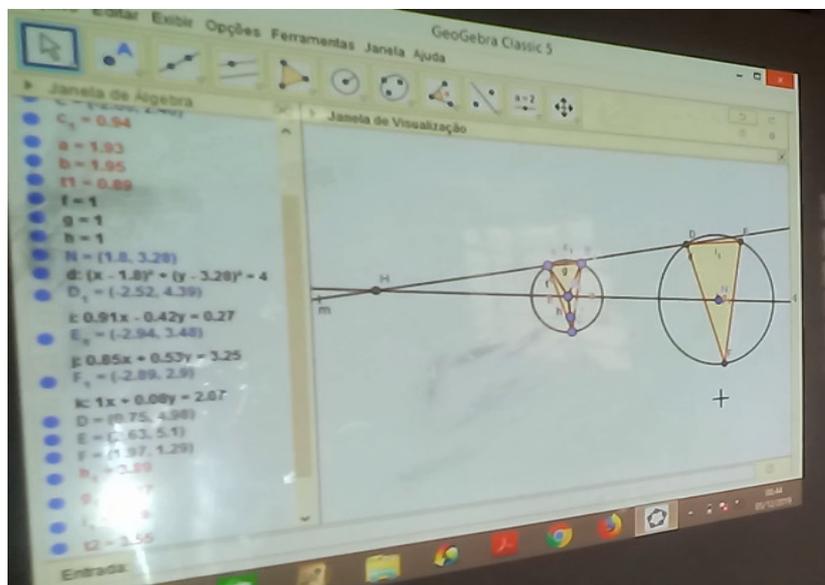
**Cena 5.9**

Interlúdio: O intuito desta etapa foi levar os sujeitos a perceberem que toda reta que passe por pontos correspondentes de dois ou mais triângulos homotéticos converge para um mesmo ponto (centro de homotetia).

INTERAÇÃO	INTERPRETAÇÃO	IDEIAS
<p>S3: “- Terceira etapa...” (iniciando novo ciclo de atividade...)</p> <p>S1 lê oralmente o item j da terceira etapa.</p> <p>S4 inicia os procedimentos para construir a reta MN... No entanto leva o cursor sobre o ponto A até D (reta AD)</p> <p>S1: “- É EM... passando pelo centro ali ó...” (olhando para a projeção referindo ao centro das circunferências...)</p> <p>S4 constrói a reta MN que intercepta os centros das circunferências.</p> <p>S1 lê o item K da terceira etapa.</p> <p>S4 constrói a reta AD</p> <p>S2 lê o item l que solicita a marcação do ponto de intersecção entre as retas MN e AD (centro de homotetia).</p> <p>Neste momento os sujeitos se olham com dúvida, uma vez que o ponto de intersecção estava em uma região não visível na projeção.</p>	<p>O software contribui para que os integrantes do grupo analisem suas ações e identifique correções a serem realizadas no transcurso da atividade.</p> <p>Os sujeitos se utilizam da interação na busca de soluções.</p>	<p>Interação e colaboração</p>

<b>Cena 5.10</b>		
Interlúdio: A intervenção do pesquisador se fez necessária uma vez que os sujeitos apresentaram certo grau de dificuldade para localizar (identificar) o ponto centro de homotetia que não estava visível.		
<b>INTERAÇÃO</b>	<b>INTERPRETAÇÃO</b>	<b>IDEIAS</b>
<p>Pesquisador: - Só um momento, S4, por favor, clique em qualquer área da região branca (mantenha clicado) e arraste para a direita...</p> <p>Com alguma dificuldade, S4 consegue tornar o ponto de intersecção visível...</p> <p>S3: “- Ah ta...” (olhando para a lousa).</p> <p>S3: “- Marque o ponto H formado pela intersecção (encontro) das retas...” (relendo o enunciado).</p> <p>S4 marca o citado ponto e o renomeia para H.</p> <p>Dando continuidade, S2 lê o enunciado da questão 3 (questionamento sobre a possibilidade das retas que interceptem os vértices correspondentes dos triângulos semelhantes também passe pelo centro de homotetia).</p> <p>Os sujeitos refletem por um tempo sobre a possibilidade das retas BE e CF também passarem pelo mesmo ponto H (centro de homotetia).</p> <p>S3: “- O quê?” (olhando novamente para o enunciado)</p> <p>S3 relê o enunciado. Todos estão atentos à leitura.</p> <p>S3 e S1 olham para S4 e refletem por mais um tempo...</p> <p>S2: “- Quer saber se vai passar pelo ponto</p>	<p>O software contribui para que os sujeitos identifiquem a existência do centro de homotetia.</p> <p>Atividade contribui para que os sujeitos percebam graficamente a convergência das retas que interceptam os vértices dos triângulos para centro de homotetia.</p> <p>Os sujeitos continuam interagindo entre si e</p>	<p>Geogebra permite a exploração de conceitos geométricos de modo dinâmico e abrangente.</p> <p>Interação e Colaboração</p>

<p>H...”</p> <p>Após momento de reflexão, S2 leva mão à sobancelha e também olha para S4 (esperando inauguração de alguma linha de raciocínio).</p> <p>Os sujeitos olham atentamente para a projeção. S1 inaugura uma linha de raciocínio.</p> <p>S1: “- Sim...” (tom de dúvida).</p> <p>Os sujeitos permanecem refletindo.</p>	<p>persistem na busca de respostas de modo coletivo.</p>	
---	--	--



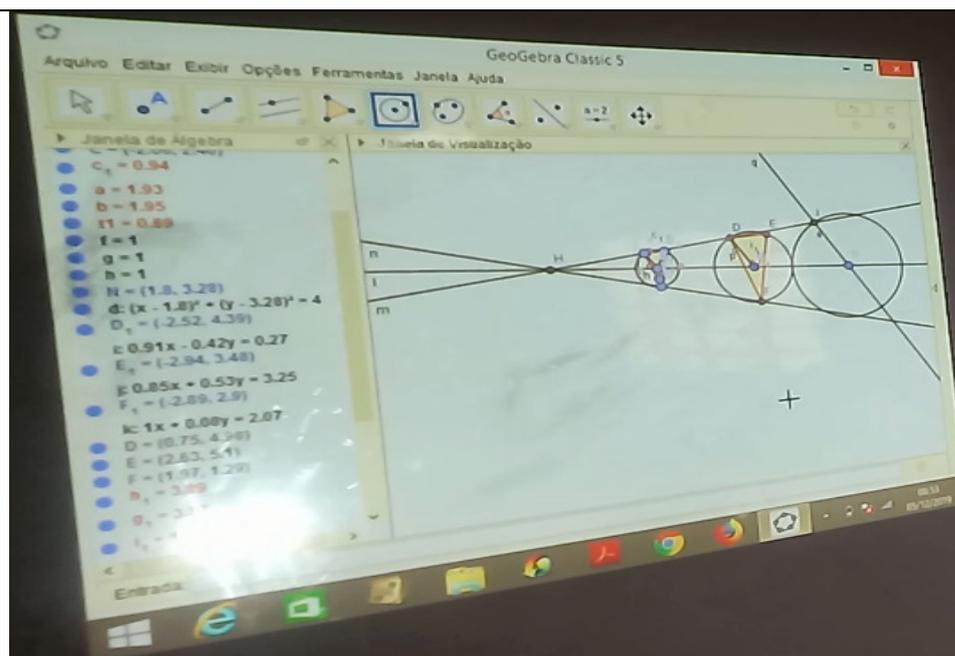
Interlúdio: Mediante considerável momento de silêncio, fez-se necessária intervenção do pesquisador.

**Cena 5.11**

<b>INTERAÇÃO</b>	<b>INTERPRETAÇÃO</b>	<b>IDEIAS</b>
<p>Pesquisador: “- Esta reta CF ainda não foi construída... O material impresso quer saber se na opinião de vocês ela passará por H (centro de homotetia) ou não... Depois vocês irão construí-la e analisar resposta de vocês...”</p> <p>S2 realiza a leitura da questão 4... (tentando encontrar auxílio para solucionar a questão anterior): - “Construa as retas BE e CF e verifique se a resposta ao item 3 está correta.</p> <p>S1: “- Então (S4), você vai ter que construir a reta ali... ligando CF...”</p>	<p>Os sujeitos decidem utilizar o software para a busca de uma resposta plausível.</p>	<p>Software contribui significativamente na busca de respostas.</p>

<p>S4 constrói a reta CF... Todos estão atentos à lousa.</p> <p>Após construção, S2 cita a resposta para S1 registrar.</p> <p>S1: “- Sim...” (respondem às questões 3 e 4 desta forma)</p> <p>Os sujeitos concluem a terceira etapa.</p>	<p>Além de permitir melhor visualização do centro de homotetia, o software contribui para a implementação de um pensar geométrico de modo mais abrangente.</p>	<p>Ampliação do horizonte conceitual geométrico</p>
<p>Interlúdio: Nesta etapa os sujeitos construíram um terceiro triângulo homotético ampliado.</p>		
<p><b>Cena 5.12</b></p>		
<p><b>INTERAÇÃO</b></p>	<p><b>INTERPRETAÇÃO</b></p>	<p><b>IDEIAS</b></p>
<p>S2 lê oralmente o item m da etapa 4.</p> <p>S4 marca o ponto O solicitado, tangenciando a borda da segunda circunferência.</p> <p>S3 sugere que o citado ponto seja reconstruído na reta MN, mas em local mais à direita... (fora da circunferência 2).</p> <p>S3: “- Esse ponto O não é mais pra cá, não?” (Apontando para uma região a direita e fora da circunferência 2).</p> <p>S4 apaga o ponto marcado e inicia a nova marcação...</p> <p>S3: “- Aí...” (mostrando o local onde entende que o cursor deveria parar)</p> <p>S4 marca um ponto sobre a reta MN (reta esta que intercepta os centros das circunferências 1 e 2) e o renomeia de O.</p> <p>S2 lê o item n do material impresso: “- Construa na segunda circunferência o segmento DN” (raio da segunda circunferência).</p> <p>S2: “- D...” (apontando para o ponto D na lousa e auxiliando S4).</p> <p>S4 inicia a construção do segmento pelo vértice D do segundo triângulo, mas estende o mesmo até o ponto O. O grupo corrige (sorriso em grupo): Ali... ó... ponto D...</p> <p>Após certa dificuldade, S4 constrói o</p>	<p>Há uma fluidez nas ações as quais são realizadas de modo coletivo.</p> <p>Os sujeitos permanecem atentos e comprometidos na busca de respostas.</p> <p>Software viabilizando a construção mútua do conhecimento.</p> <p>Sorriso comum denotando que o horizonte geométrico segue cada vez mais articulado e em comunhão</p>	<p>Interação e Colaboração</p> <p>Software contribui na fluidez do desenvolvimento da atividade.</p>

<p>segmento DN, conforme solicitado (DN é raio da circunferência 2).</p> <p>S2 prossegue e lê oralmente o item “o” (que sugere a construção do raio da terceira circunferência mediante a utilização de uma reta paralela ao raio DN pertencente à segunda circunferência) e em seguida olha para a lousa.</p> <p>Pesquisador: “- Fazer uma reta paralela à DN... semelhante ao que vocês fizeram anteriormente...”</p> <p>S4 consegue construir uma reta paralela à reta DN e que passe pelo centro O da terceira circunferência.</p> <p>S1 lê oralmente o item p (marcar o ponto I, intersecção entre as retas AD e OI)</p> <p>S4 olha para o material impresso antes de continuar a construção. Todos estão atentos à projeção.</p> <p>S1: “- Acho que tem que ler de novo...” (o enunciado)</p> <p>S3 lê novamente o item p da quarta etapa.</p> <p>Após alguns instantes, S4 marca o ponto I formado pela intersecção da reta com a terceira circunferência.</p> <p>S2 lê oralmente o item q em continuidade.</p> <p>S4 constrói a terceira circunferência tendo o segmento OI como raio.</p>	<p>Software permite a exploração da ideia de paralelismo de modo mais abrangente.</p> <p>Há um considerável grau de autonomia. Há uma constatação de voltar ao enunciado sem a necessidade de intervenção do pesquisador.</p>	<p>Material impresso contribuindo no desenvolvimento das ações.</p>



### Cena 5.13

#### INTERAÇÃO

S2 lê oralmente o item r. Após leitura todos se voltam para a projeção (lousa).

S3 aponta para a lousa indicando em que local S4 deve marcar os pontos G e J (formados pela intersecção das retas BE e CF com a terceira circunferência).

S4 marca os pontos G e J na terceira circunferência. Tais pontos são vértices do terceiro triângulo a ser construído.

S2 lê em voz alta o último item da quarta etapa, item s.

Pesquisador: - Ferramenta polígono...

S4 constrói o triângulo IGJ inscrito na terceira circunferência.

S3: “- Pronto...”

S2 lê oralmente a questão 5, que indaga o que há em comum entre os triângulos construídos.

#### INTERPRETAÇÃO

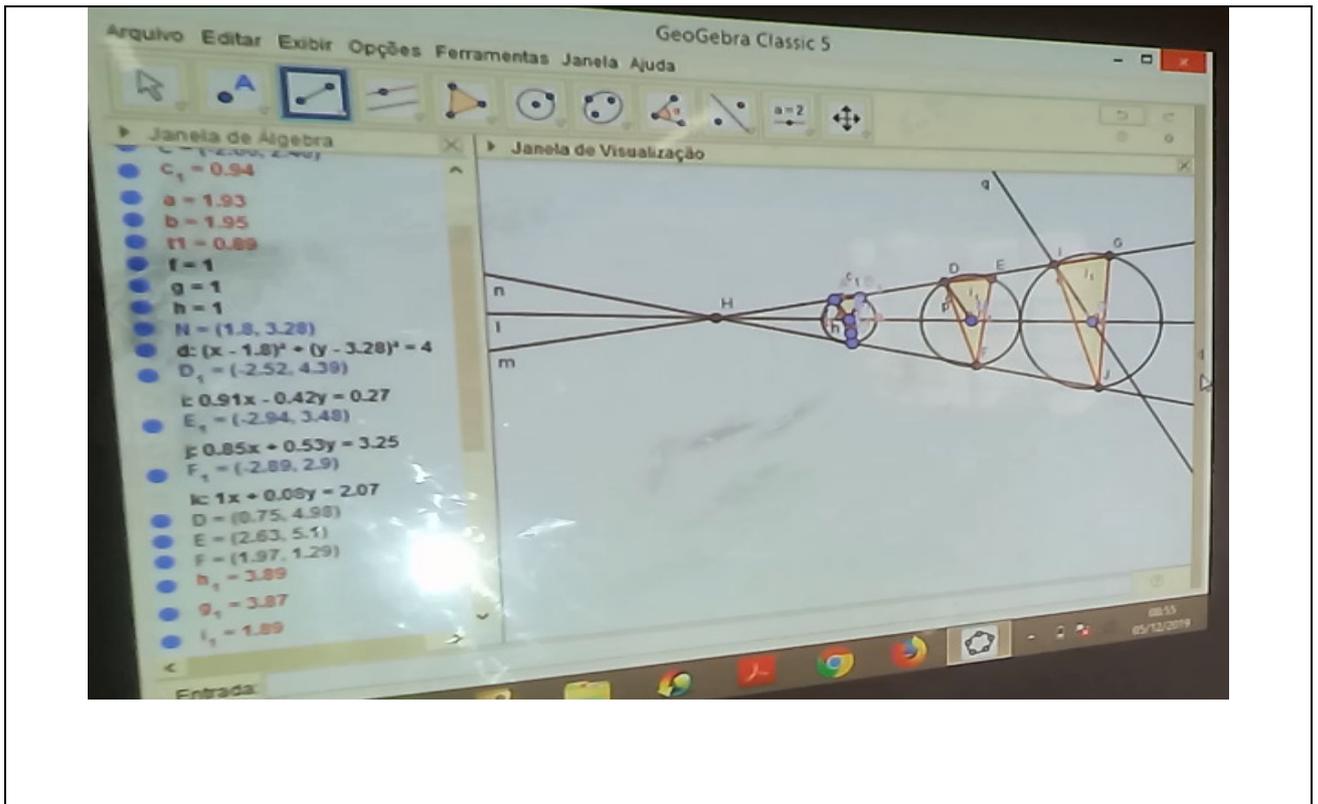
Os sujeitos continuam empenhados na resolução da atividade. Há um considerável grau de interação entre os mesmos.

Software possibilita a construção de polígonos de um modo abrangente. Além de homotetia, os sujeitos exploram concomitantemente as idéias de raio, vértice, paralelismo, etc...

#### IDEIAS

Interação e Colaboração

<p>Todos olham atentamente para a lousa (projeção)</p> <p>S3: “- Ampliou...” (inaugurando uma linha de raciocínio)</p> <p>S1 inicia o registro da resposta...</p> <p>Todos refletem. S2 olha para S4 e arqueia as sobrancelhas... (esperando continuidade).</p> <p>S3: “-... e os ângulos internos continuam os mesmos...”</p> <p>S1 registra o que S3 disse em complementação.</p> <p>S2: “- Amém...”. (em voz baixa e sorrindo, comemorando e grata pelo fim da atividade...)</p> <p>S1 conclui o registro da resposta...</p> <p>S3: “- Foi...” (acabamos)</p> <p>S2 acena positivamente com ambos os polegares (sorrindo).</p> <p>Os sujeitos concluem a atividade no geogebra.</p>	<p>Os sujeitos continuam interagindo entre si na busca de respostas.</p> <p>Software contribuindo para percepção de congruência dos ângulos internos correspondentes (propriedade invariante).</p> <p>Há um clima de entusiasmo, gratidão e satisfação pela conclusão da atividade proposta.</p>	<p>Geogebra como facilitador das ações.</p> <p>Ampliação do horizonte geométrico: Constituição de propriedades invariantes.</p> <p>Percebe-se a permanência de um ambiente didático favorável à constituição do conhecimento até o desfecho da atividade.</p>
--	--	---



Quadro 8: Desenvolvimento das Atividades (Geogebra)



Universidade Federal de Juiz de Fora  
 Programa de Pós-Graduação em Ed. Matemática  
 Pesquisador: Elias da Costa Abreu

**Alunos (sujeitos)**

**Atividade 5.5.1 – Construção de Triângulos inscritos homotéticos**

**PRIMEIRA ETAPA**

1 – Realize as atividades abaixo no Geogebra

- a) Construa uma circunferência com raio 1 e renomeie o ponto central da mesma usando a letra M.
- b) Marque 3 pontos (A,B, C) pertencentes à linha que forma a extremidade da circunferência.
- c) Construa o triângulo ABC inscrito na circunferência de centro M.
- d) Construa os 3 segmentos correspondentes aos raios da circunferência MA, MB e MC

**SEGUNDA ETAPA**

- e) Marque um ponto N em qualquer lugar “fora” da primeira circunferência
- f) Construa uma segunda circunferência com raio 2 e renomeie o ponto central da mesma usando a letra N e raio.
- g) Trace 3 retas paralelas que interceptem o ponto N, uma a cada raio MA, MB e MC (pertencentes à primeira circunferência)
- h) Marque os pontos DEF e construa na segunda circunferência o triângulo DEF que pode ser dito bem parecido ao triângulo ABC.
- i) Vamos registrar o que há em comum entre os dois triângulos construídos ?

Tem o mesmo ângulo interno.

---

Sugestão: Você pode ocultar as retas, j, l e k.

1) Identifique no canto esquerdo do Geogebra os valores dos segmentos AB e DE, BC e EF, AC e DF e calcule as razões (divisões) descritas abaixo:

$AB / DE = 0,94 \div 3,89 = 20306382$	$DE - 3,89$
$BC / EF = 3,91 \div 3,87 = 10103356$	$AB - 0,94$
$AC / DF = 3,95 \div 3,89 = 10154244$	$BC - 3,93$
	$EF - 3,87$
	$AC - 3,95$
	$DF - 3,89$

2) O que podemos afirmar quando comparamos as 3 razões calculadas acima ?

Que elas são iguais, mais os cálculos são diferentes.

#### TERCEIRA ETAPA

- j) Trace a reta que liga os pontos M e N
- k) Trace a reta que liga os pontos A e D
- l) Marque o ponto H formado pela intersecção (encontro) das retas MN e AD.

3) Em sua opinião as retas BE e CF também interceptarão o ponto H, ou seja, passarão pelo ponto H ? Justifique

Sim

4) Construa as retas BE e CF e verifique se a resposta ao item 3 está de fato correta.

Sim

#### QUARTA ETAPA

- m) Marque aleatoriamente um ponto O na reta MN
  - n) Construa na segunda circunferência o segmento DN
  - o) Construa uma reta paralela ao segmento DN que passe pelo ponto O.
  - p) Marque o ponto I (formado pela intersecção das retas AD e OI)
  - q) Construa uma terceira circunferência tendo OI como raio da mesma
  - r) Identifique e marque nesta circunferência o ponto G (pertencente a reta BE) bem como o ponto J (pertencente a reta CF).
  - s) Construa o terceiro triângulo IGJ
- 5) Vamos registrar o que há em comum entre o triângulo IGJ e os outros dois triângulos construídos anteriormente.

Ampliam e os ângulos internos continuam os mesmos.

### 6.1.3 Ação no Raiado

**Tabela 4: Análise Ideográfica das Atividades no Raiado**

<b>Atividade 6 – Ação no Raiado</b>	
<p>1 – Observe a figura abaixo que representa dois triângulos construídos no Raiado.</p>	
	<p>Movimente o elástico que forma o triângulo 2 de modo a formar um novo triângulo que possa ser dito bem parecido ao triângulo menor.</p> <p>Observando os triângulos responda.</p> <p>a) Há alguma razão de semelhança entre os triângulos? Em caso afirmativo determine o valor desta razão.</p> <p>b) Registre o que mais podemos observar quando comparamos os dois triângulos.</p>
<p>2 - Construa com elástico um Triângulo 1 com os seguintes vértices.</p> <p>Eixo I (Ponto 4cm)                      Eixo II (Ponto 6cm)                      Eixo III (Ponto 4 cm).</p>	
<p>a) Construa agora com elástico um Triângulo 2 que possa ser dito bem parecido ao primeiro mantendo a razão de semelhança 2.</p> <p>b) Utilizando outro elástico, construa um triângulo 3 que possa ser dito bem parecido ao Triângulo 1 mantendo razão de semelhança 3.</p> <p>c) Vamos registrar o que podemos observar quando comparamos os três triângulos e registre suas conclusões abaixo.</p>	
<b>Cena 6.1</b>	
<p>Interlúdio: O pesquisador colocou no centro da mesa o raiado, já com os triângulos iniciais apresentados na foto que acompanha o enunciado da questão 1 construídos. Os elásticos para realização das atividades também foram dispostos sobre a mesa bem como cópias do material impresso para que todos pudessem acompanhar o desenvolvimento das ações.</p> <p>Após breve diálogo os discentes decidem que S5 registrará as respostas do Grupo.</p>	

INTERAÇÃO	INTERPRETAÇÃO	IDEIAS
<p>De posse do material impresso, S3 toma a iniciativa de ler oralmente o enunciado da questão 1. Todos acompanham silenciosamente a realização da leitura.</p> <p>Após a realização da leitura, os sujeitos se olham... S4 leva a sua mão ao Raiado. Neste momento S3 olha para S4 e aponta para o enunciado. S4 tira a mão do raiado e retorna a ler o enunciado.</p> <p>Os sujeitos retomam a leitura do enunciado de modo silencioso e refletem por um considerável tempo.</p> <p>S4 toma a iniciativa e leva a mão novamente ao Raiado...</p> <p>S4: “- Tem que mexer no triângulo... vai ficar...”</p> <p>S3: “- O quê?” (olhando para S4)</p> <p>S4: “- Tem que mexer no triângulo...” (olhando para S3 e apontando em seguida para o enunciado da questão). (O sujeito refere-se ao segundo triângulo do raiado)</p> <p>S4 pega o Raiado e colocando-o à sua frente inclina-se (em direção ao raiado) para dar início à resolução da questão.</p> <p>S4: “- Será que é para colocar aqui?” (apontando para o nono pino do eixo 1 do raiado).</p> <p>S2 sorri e aponta o indicador para S1 (dando a entender que já havia pensado na mesma linha de raciocínio)</p> <p>S4: “- Tirar (o elástico) daqui (décimo segundo pino do eixo 1) e colocar aqui...” (nono pino).</p> <p>S1: “- E agora?” (refletindo).</p> <p>S2: “- Foi o que eu falei...”</p>	<p>O grau de interação entre os sujeitos permanece, tendo como um dos pilares o pensar de modo coletivo. O ambiente didático se inicia, constituído por eles. Os sujeitos interagem com o material impresso e uns com os outros buscando compreender a questão proposta.</p> <p>Há uma compreensão sobre os passos iniciais para resolução da questão.</p> <p>Método, pensamento e didática</p> <p>Mesmo havendo dúvida a respeito de qual pino seria usado para formar o novo vértice do triângulo 2, os sujeitos não ficam estagnados e permanecem refletindo.</p> <p>Percebe-se que todos estão participando da resolução da questão e não somente os sujeitos que se expressaram verbal ou gestualmente nos momentos iniciais.</p>	<p>Habitação do horizonte geométrico.</p> <p>Raiado viabiliza inauguração do diálogo científico</p> <p>Interação e Colaboração</p> <p>Raiado propicia abertura de elaboração de uma estratégia para busca de respostas.</p>



### Cena 6.2

INTERAÇÃO	INTERPRETAÇÃO	IDEIAS
<p>S4: “- Tem que tirar daqui... e colocar aqui...” (interagindo com o elástico e construindo um novo triângulo).</p> <p>S4: “- Acho que é isso...” (olhando para o Raiado...)</p> <p>S5 aponta a caneta para o Raiado em tom de conferência...</p> <p>Todos olham para o novo triângulo construído por S4...</p> <p>S2 comenta: “- Acho que sim...”</p> <p>S5: “- Está certo...”</p> <p>S2 comenta: “- São semelhantes...” (comparando os triângulos)</p> <p>S4 reflete sobre a afirmação de sua colega.</p> <p>S4: “- É... são semelhantes, não é?”</p> <p>S4 levanta o Raiado e mostra os triângulos para que todos possam visualizar.</p>	<p>Material manipulativo permitindo uma nova proposta epistemológica (possibilidade de “pensar” mediante o uso das mãos).</p> <p>O permite que os sujeitos toquem na estrutura dos polígonos, ao mesmo tempo em que sentem e articulam pensamentos sobre a configuração homotética.</p> <p>O grupo busca encontrar uma coerência de cunho geométrico para validar a linha de pensamento construída.</p> <p>Homotetia contribuindo na constituição do conceito de semelhança entre polígonos.</p> <p>Processo de constituição de conceitos geométricos ocorre de modo coletivo.</p>	<p>Raiado permite a construção de polígonos de modo dinâmico explorando o uso do corpo e sentidos.</p> <p>Raiado facilitando a busca de soluções.</p> <p>Diálogo Interacional</p> <p>Raiado auxilia no estabelecimento de comparações entre os polígonos homotéticos.</p> <p>Intensificação do grau de interação entre os sujeitos.</p>

Cena 6.3		
INTERAÇÃO	INTERPRETAÇÃO	IDEIAS
<p>Pesquisador: “- Podem interagir... Passar o raiado ... (um para o outro).</p> <p>Todos sorriem.</p> <p>S3 lê oralmente o item a da questão 1.</p> <p>S1 repete oralmente a parte final do enunciado...</p> <p>S1: “-... determine o valor desta razão”.</p> <p>S1: “- Como assim? É... (olhando para S4)... Tipo assim quando ele fala... razão do...?”</p> <p>S1 sorri e pega o raiado.</p> <p>S1: “- Tem que contar aqui...”</p> <p>S3 comenta com S5, nesse ínterim.</p> <p>S3: “- Coloca, sim, aí de uma vez...” (constatação da existência da razão de semelhança)</p> <p>S1 conta os pinos nos raios 1 e 2 do Raiado. Coloca o indicador no vértice do triângulo maior o qual está sobre o eixo central.</p> <p>S1: “- Aqui é... 12...” (vértice do triângulo maior localizado no eixo central)</p> <p>S1: “- Aqui... 6...” (vértice do triângulo menor localizado no eixo central)... 8 e 12... (contando os pinos que formam os vértices do triângulo maior).</p> <p>S1 olha para o triângulo menor reflete por um tempo e comenta:</p> <p>S1: “- Dois” (mostrando convicção)... (A razão de semelhança é 2). Após fazer tal afirmação ela repassa o Raiado para S4.</p>	<p>Há a preservação de um ambiente prazeroso e favorável à produção de conhecimento.</p> <p>Raiado permitindo uma facilitação na compreensão da ideia de razão. O sujeito conta os lados homólogos dos polígonos e tenta encontrar um padrão.</p> <p>A resolução da questão ocorre de modo sincronizado. Enquanto um sujeito interage com o raiado explorando sua estrutura para desenvolver-se geometricamente, há outro sujeito registrando as ações.</p> <p>O sujeito inicia uma contagem tomando o eixo central como referência e compara os vértices correspondentes dos triângulos (tais vértices localizam no eixo central). O sujeito está em busca de uma espécie de padrão (razão) entre os dois polígonos.</p> <p>Há um significativo avanço na compreensão do conceito de homologia (correspondência dos</p>	<p>Raiado contribui para busca de resposta de modo coletivo.</p> <p>Homotetia auxiliando na constituição de conceitos geométricos</p> <p>Interação e Colaboração</p> <p>Raiado auxilia na comparação entre polígonos e na busca de respostas</p> <p>Homotetia contribuindo na constituição de razão de semelhança</p>

	lados) que permite o sujeito estabelecer comparações entre os polígonos e deduzir o valor da razão.	
<b>Cena 6.4</b>		
<b>INTERAÇÃO</b>	<b>INTERPRETAÇÃO</b>	<b>IDEIAS</b>
<p>S3 repete a resposta encontrada para que S5 pudesse registrar.</p> <p>S3: “- Razão dois...”</p> <p>S4 pega o raiado e olha atentamente para os polígonos e intenciona fazer uma pergunta.</p> <p>S3: “- Espere aí...” (esperando que S4 se pronuncie).</p> <p>S4: “- Aqui tem quanto? (apontando para o vértice localizado no eixo central)?” (Quantos pinos?)</p> <p>S1: “- Doze...”</p> <p>S1 sorri e se levanta apontando para o raiado.</p> <p>S1: “- Tipo, aqui ó... aqui tem 6... (apontando para o vértice do triângulo menor sobre o eixo central)... vezes... 2” (aponta em seguida para o vértice correspondente no triângulo maior que está sobre o mesmo eixo).</p> <p>S2 comenta: “- É, está certo...”</p> <p>S3 repete a resposta para que S5 registre.</p> <p>S3: “- Sim... razão 2.”</p>	<p>Há um respeito mútuo entre os participantes. Os sujeitos consideram as ponderações de cada integrante no sentido de validar ou não a linha de raciocínio levantada. O Raiado se mostra significativo para acolher as manifestações geométricas, sendo referência para elas.</p> <p>Há uma satisfação por parte do sujeito por ter encontrado uma resposta (que no seu entender é coerente) bem como por ter argumentos para sustentá-la.</p> <p>(Ela enfatiza que como <math>6 \times 2 = 12</math>, a razão é 2).</p> <p>Os sujeitos acompanham a linha de raciocínio levantada e verificam que a mesma é coerente. (construção mútua do conhecimento).</p>	<p>O grupo preserva o pensar de modo coletivo respeitando-se mutuamente.</p> <p>Raiado propicia o desenvolvimento da compreensão do conceito de razão de semelhança.</p> <p>Argumentação matemática.</p>
<b>Cena 6.5</b>		
<b>INTERAÇÃO</b>	<b>INTERPRETAÇÃO</b>	<b>IDEIAS</b>
<p>S3 lê oralmente o item b da questão 1.</p> <p>S4 reflete e comenta: “- Que eles têm os mesmos ângulos internos.”</p> <p>S3 olha para S5 e afirma: “- Vai...” (registre).</p>	<p>O sujeito levanta a hipótese da existência de propriedade invariante. (Ângulos internos correspondentes</p>	<p>Raiado contribui na intuição de propriedade invariante</p>

<p>S1 olha para S4 e pergunta: “- O quê?”</p> <p>S4: “- Que eles tem os mesmos ângulos internos...”</p> <p>S1: “- Tá ...”</p> <p>S2 sorri e bate palmas (discretamente) demonstrando admiração.</p> <p>S4: “- Acho que é isso...”</p> <p>S5 conclui o registro das respostas.</p>	<p>congruentes</p> <p>Os sujeitos concluem que os ângulos internos correspondentes são congruentes.</p>	<p>Validação de hipótese de modo coletivo: Constituição de propriedade invariante.</p> <p>Entusiasmo demonstra ampliação do horizonte conceitual geométrico.</p>
---	---	--

**Interlúdio:** O raiado foi reposicionado sobre a mesa sem elásticos para que os sujeitos pudessem realizar a questão 2 do material impresso.

No momento da construção do primeiro triângulo da questão 2, ficou claro que a utilização de um elástico menor (mais apropriado) facilitaria o desenvolvimento das ações. Todavia os sujeitos encontraram uma alternativa trabalhando com o elástico “dobrado”.

**Cena 6.6**

INTERAÇÃO	INTERPRETAÇÃO	IDEIAS
<p>S3 lê oralmente o enunciado do item 2 do material impresso em prosseguimento.</p> <p>S4 inclina-se em direção ao Raiado e afirma:</p> <p>S4: “- Não entendi...”</p> <p>S1 aponta o lápis para os raios do Raiado e afirma:</p> <p>S1: “- Aqui tem que ter 4... (apontando para o raio I)... aqui 6... (apontando para o raio II) ... e aqui 4 ...” (apontando para o raio III). (Com tom de convicção).</p> <p>Todos estão atentos à explicação de S1.</p> <p>S2 afirma: “- Ah, tá...”</p> <p>S1 toma a iniciativa e pega o raiado.</p> <p>S1: “- Deixa eu tentar fazer...”</p> <p>S4 entrega alguns elásticos para S1.</p> <p>S1 inicia a construção do triângulo com</p>	<p>O sujeito encontra no enunciado da questão dados que lhe possibilita construir uma linha de pensamento, encontrando, também, respaldo na estrutura do raiado para iniciar a resolução da questão. O raiado, mais uma vez, oferece uma abertura de horizonte de significações.</p> <p>Os sujeitos continuam construindo o conhecimento preservando o pensar e agir de modo coletivo.</p> <p>O sujeito busca</p>	<p>Raiado torna-se uma relevante referência na construção do conhecimento.</p> <p>Raiado viabilizando abertura para utilização de uma estratégia na busca de respostas.</p> <p>Interação e Colaboração.</p>

<p>elástico, mas percebe que o elástico é grande para construir o citado triângulo.</p> <p>S1: “- E... Tem que dobrar isso aqui?” (olhando para o pesquisador).</p> <p>S1 dobra o elástico (reduzindo o seu tamanho) e reinicia a construção do triângulo solicitado no enunciado da questão 2.</p> <p>S1 tem certa dificuldade para concluir a construção do triângulo. Ela olha para S2...</p> <p>S1: “- Isso aqui fico meio...”</p> <p>S3 auxilia S1 na construção...</p> <p>S3: “- Aqui é 4...” (referindo-se ao pino do raio central)</p> <p>S4 aponta para o Raiado tentando ajudar...</p> <p>S1: “- O quê?”</p> <p>S1 passa o raiado para S4 para tentar construir o triângulo.</p>	<p>meios para ajustar o material no sentido de construir o polígono solicitado.</p> <p>Há uma análise das ações. Grupo preserva considerável grau de comprometimento nas ações a serem desenvolvidas.</p> <p>Os componentes se empenham na construção do triângulo buscando soluções. Interação permitindo que outros integrantes participem da resolução das questões.</p>	<p>Intensificação do grau de interação dos participantes.</p>
<p><b>Cena 6.7</b></p>		
<p><b>INTERAÇÃO</b></p>	<p><b>INTERPRETAÇÃO</b></p>	<p><b>IDEIAS</b></p>
<p>S4 relê silenciosamente o enunciado da questão 2.</p> <p>S2 comenta: “- Como é que fica agora?”</p> <p>S1 comenta: “- Neste daqui tem que ter 4...” (apontando para o raio I)</p> <p>S4: “- Aqui tem ter 4 ?” (apontando para o raio I e inclinando-se para o Raiado).</p> <p>S4 inicia a construção do triângulo.</p> <p>S1: “- Esse daqui no meio, 6...” (indicando o raio central... tentando auxiliar o colega).</p> <p>S1 sorri e leva a mão à boca (denotando expectativa) enquanto S4 interage no Raiado. Todos estão atentos ao que S4 está fazendo.</p> <p>S4 posiciona o elástico no pino 7 do eixo central do Raiado bem como no pino 5 do</p>	<p>Os sujeitos não permanecem estagnados em meio às dúvidas.</p> <p>O conhecimento é construído de alicerçado em diversos pontos de vista e com preservação do diálogo.</p>	<p>Raiado mais uma vez contribui na busca de soluções</p> <p>Interação e Colaboração</p>

<p>raio I para construir o triângulo solicitado.</p> <p>S1: “- Tem... sete” (sinalizando para S4 que o vértice central está no pino errado).</p> <p>S3: “- Tira um...” (Recuar o elástico para o pino anterior no raio central).</p> <p>S4 recua o elástico no eixo central em uma unidade e posiciona o mesmo sobre o pino 6 atendendo ao solicitado.</p> <p>S1: “- E aí tem 5... do outro lado” (sinalizando que o elástico também foi fixado no pino errado no raio I).</p> <p>S4 realiza as correções apontadas pelos colegas...</p> <p>S3: “- Do outro lado (raio III)... 4” (fixar no pino 4).</p> <p>S2: “- Tá certo, não?”</p> <p>Neste íterim S1 argumenta: “- Eu só quero saber como vai ficar a base ali embaixo...” (referindo-se à base do polígono construído)</p> <p>S3 leva à mão ao Raiado... (enquanto S4 constrói) e realiza uma contagem dos pinos para certificar-se...</p> <p>S3: “- 1, 2,3...”</p>	<p>Raiado permite que os sujeitos constatem imprecisões.</p> <p>Sujeito identifica que o polígono que está sendo construído não apresenta a forma triangular.</p>	<p>Raiado contribui no fluxo das ações propiciando também a constatação de imprecisões</p> <p>Interação e Colaboração</p> <p>Validação dos resultados obtidos.</p>
---	---	--

Interlúdio: Os sujeitos apresentam certo grau de dificuldade para construir o triângulo solicitado no enunciado questão 2. Na construção de tal polígono, o elástico deveria ser posicionado nos seguintes pinos: Raio I (Ponto 4cm) / Raio Central (Ponto 6cm) / Raio III (Ponto 4 cm). Todavia, a construção realizada pelo grupo neste íterim assemelhava-se a um pentágono.

### Cena 6.8

INTERAÇÃO	INTERPRETAÇÃO	IDEIAS
<p>S4, ainda com dificuldades, interage com o Raiado e constrói um polígono com formato pentagonal.</p> <p>S1: “- É isso aí...?” (tom de desconfiança...)</p> <p>S2: “- É...?”</p> <p>S1 mostra o enunciado para S4...</p> <p>S1: “- Aqui ó... isto aí é um triângulo?”</p>	<p>Sujeito compreende o enunciado e verifica que a construção não atende ao que foi solicitado. A configuração geométrica fica incontestado no raiado, mostrando o insucesso que é</p>	<p>Sujeitos encontram no material impresso bem como no raiado, elementos que lhes permite constatar incoerências.</p>

(referindo-se à construção realizada). S1 sorri. S2: “- Não... Isso aí é uma casinha...” (rindo). S4 continua interagindo para corrigir o polígono construído. S4: “- Como eu vou fazer?”	rapidamente observado.  Todos estão interagindo na busca de respostas.	Interação e Colaboração.
---	--	--------------------------

**Cena 6.9**

<b>INTERAÇÃO</b>	<b>INTERPRETAÇÃO</b>	<b>IDEIAS</b>
S4 tira o elástico do Raiado e retorna a ler o enunciado da questão. S3 apóia a mão no Raiado para auxiliar S4. S2 leva o indicador no eixo central mostrando em que pino S4 deve colocar o elástico. S2: “- Aqui...” S1: “- É...” S3: “- Aqui...” (apontando para Raiado...) S1: “-... É quatro aqui, S4... olha essa bolinha branca aí...” (S1 utiliza o pino pintado de branco, no eixo I, como referencial pois se trata do quinto pino...) S4 continua tentando construir o triângulo... S2: “-Não, aqui...” (apontando o pino no eixo central) S1: “- Tá certo... Agora deixa...” (solte o elástico) S3: “- Deixa aqui...” (elástico posicionado no pino 4 do eixo III) S1: “- Coloca 6 aqui...” (apontando para o sexto pino no eixo central) S3 segura o elástico tentando auxiliar S4. S3: “- Vai, solta...” (o elástico) S3: “- Aqui é 6 ...” (referindo-se ao eixo	Mediante percepção da dificuldade na construção do triângulo, 4 sujeitos interagem simultaneamente com o raiado, demonstrando significativo grau de interação do grupo.  Raiado permitindo novo pensar epistemológico (pensar com as mãos).  Os sujeitos insistem na busca de verificar suas construções e constatar se as mesmas atendem ao solicitado.	O “estar em grupo” contribui na busca de respostas, tendo o raiado como referência.  Intensificação do grau de interação Sujeitos x Raiado.  Raiado proporciona nova abordagem para o ensino de Geometria.

<p>Central). Tem que...</p> <p>Os sujeitos conseguem construir um triângulo no Raiado, (tal polígono fora construído com um dos seus vértices posicionado no pino 5 do raio I)</p> <p>S2: “- Tá...”</p> <p>S1 pega o Raiado com o objetivo de conferir as medidas polígono construído.</p> <p>S1: “- Foi?” (Conseguimos?)... Deve ter ido... (rindo)</p>		<p>Diálogo interacional.</p> <p>Raiado viabiliza constatação de plausibilidade.</p>
<p>Interlúdio: O triângulo construído não atende integralmente ao solicitado no enunciado da questão. O elástico foi posicionado nos seguintes pinos: Raio I (Ponto 5 cm) / Raio Central (Ponto 6cm) / Raio III (Ponto 4 cm)</p>		
<p><b>Cena 6.10</b></p>		
<p><b>INTERAÇÃO</b></p>	<p><b>INTERPRETAÇÃO</b></p>	<p><b>IDEIAS</b></p>
<p>S1 leva a mão no elástico e entende que ainda precisa de ajustes.</p> <p>S1: “- Aqui ó...”</p> <p>S1 recua o elástico para o pino 4 no raio I.</p> <p>S4 concorda com a ação da amiga.</p> <p>S4: “- Aí mesmo...”</p> <p>S2: “- Tá...”</p> <p>Os sujeitos conseguem alterar a construção do triângulo em atendimento ao solicitado no enunciado da questão.</p> <p>S1 solicita um elástico à S4 e inicia a construção do segundo triângulo em conformidade com o solicitado no item ”a” da questão 2.</p> <p>Neste momento o pesquisador intervém.</p> <p>Pesquisador: - Leiam o enunciado da questão a ...</p> <p>S3 realiza a leitura da questão oralmente.</p> <p>S1 inicia a construção do segundo triângulo fixando o elástico nos pinos dos eixos I e III e estica o elástico para construção do terceiro</p>	<p>Sujeitos continuam analisando a construção e percebem necessidade de nova correção, sem a necessidade de intervenção do pesquisador</p> <p>A atividade continua transcorrendo com considerável grau de fluidez, também conseguida por todos irem cada vez mais se familiarizando com as possibilidades geométricas realizadas no Raiado.</p>	<p>Sujeitos encontram no material e no Raiado, elementos que lhe permite identificar incoerências</p> <p>Raiado oportuniza construção mútua do conhecimento.</p> <p>Exploração do horizonte geométrico</p> <p>Raiado viabiliza o agir de modo coletivo.</p>

<p>vértice no eixo central. S2 apóia a base para que o elástico não se solte.</p> <p>S3: “- Está fazendo a questão a?”</p> <p>S1: “- Tô...”</p> <p>S1 estica o elástico até o pino 8 no eixo I, solta o elástico e analisa por um tempo o triângulo construído.</p> <p>S2 leva mão ao Raiado para auxiliar a colega</p> <p>S1 continua construindo o triângulo e posiciona o elástico no pino 8 do eixo III.</p> <p>S1 acaba de construir o triângulo 2 atendendo ao solicitado e coloca o Raiado no centro da mesa.</p>	<p>Sujeitos conseguem superar dificuldades e finalizam a construção do polígono preservando a coletividade.</p>	<p>Interação e Colaboração.</p>
--	---	---------------------------------



### Cena 6.11

INTERAÇÃO	INTERPRETAÇÃO	IDEIAS
<p>S2 lê o enunciado do item b da questão 2 que solicita a construção de um triângulo com razão de semelhança 3.</p> <p>S1: “- Como assim, gente? Razão de semelhança 3....?” Vai lá S4... (S3 entrega o Raiado para seu amigo). Sinta-se a vontade, tá?... (rindo).</p> <p>S1: “- 8...” (apontando para o pino 8 do raio I, que se refere a um dos vértices do triângulo 2 construído) <math>8 \times 3...</math></p>	<p>Diante de certa dificuldade na interpretação do enunciado, há um aspecto de descontração o que não impede a continuidade das ações.</p> <p>Raiado permite considerável grau de interação entre sujeito x polígono.</p> <p>Compreensão de que a</p>	<p>Ação coletiva auxilia na busca de soluções.</p> <p>Raiado viabiliza ampliação no grau da interação.</p> <p>Sujeito encontra no Raiado uma abertura metodológica para</p>

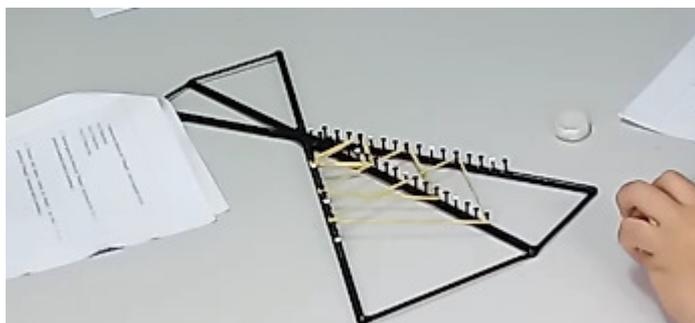
S4: “- Ih...”	operação de multiplicação	busca de resposta.
S1: “- Acho que não é $8 \times 3$ não... (rindo) é ...?”	possibilitaria a construção do terceiro triângulo.	Raiado viabiliza constituição da ideia de razão de semelhança.
S2: “- Não sei...”		
S1: “- Aí vocês têm que multiplicar aí...” (rindo e como que estivesse passando a tarefa para os amigos...)	Raiado contribui para o estabelecimento de um vínculo entre a Aritmética e Geometria.	

### Cena 6.12

Interlúdio: Fez-se necessária intervenção do pesquisador para solicitar que os sujeitos utilizassem o triângulo 1 como referência para construção do triângulo 3 (utilizando razão de semelhança 3 conforme solicitado no enunciado do item b da questão 2).

INTERAÇÃO	INTERPRETAÇÃO	IDEIAS
<p>Pesquisador: - Considerem o primeiro triângulo... (Use o primeiro triângulo como referência para construir o terceiro).</p> <p>S1: “- É... esse aqui...” (apontando o indicador para o triângulo). Ah... ta... Vai é... <math>4 \times 3</math> ... (apontando para o pino 4, eixo I que forma um dos vértices do primeiro triângulo).</p> <p>S5: “- 12...”</p> <p>S1: “- 12, aqui...” (apontando para o pino 12 no eixo I)</p> <p>S1: “- Aqui...” (apontando para o pino 6 do vértice triângulo 1 no eixo central). “- <math>6 \times 3</math>?” (Olhando para os colegas).</p> <p>Todos olham para S5 esperando a resposta... (S1 sorri)</p> <p>S5: “- 18...”</p> <p>S1 aponta para o pino 18 no eixo central...</p> <p>S1: “- Então vai ser aqui em cima...”</p> <p>Em seguida ela aponta novamente para o pino 12 no eixo I e dirige-se a S4.</p> <p>S1: “- Coloca aqui, por favor...” (rindo)</p> <p>S4: “- Ah ta...”</p> <p>S1: “- Aqui...” (auxiliando o colega para formar o vértice no eixo I). “- Aqui...”</p>	<p>Raiado possibilita que o pensar aritmético (realização dos cálculos numéricos) ocorra concomitantemente ao pensar geométrico (este, especialmente, junto à construção do polígono).</p> <p>Devido considerável grau de familiarização com o Raiado, sujeito (S1) assume um papel de coordenador das ações.</p> <p>Os sujeitos dividem as ações. Enquanto uns constroem o polígono, outros realizam as operações matemáticas de modo sincronizado.</p> <p>Manutenção do pensar e do agir de modo coletivo.</p> <p>Solidificação do conceito razão de semelhança.</p>	<p>Raiado viabiliza exploração do horizonte conceitual aritmético x geométrico.</p> <p>Colaboração e Interação</p> <p>Grupo alcança protagonismo nas ações.</p> <p>Homotetia viabiliza constituição de conceitos geométricos.</p> <p>Novo enfoque epistemológico: Pensar com o uso do corpo</p>

<p>(marcando o vértice no eixo III) “- e aqui...” (ajudando S4 esticar o elástico até o pino 18 no eixo central).</p> <p>S3: “- Foi...?” (conseguimos?)</p> <p>S1: “- Foi.” (sim)</p> <p>S2 aplaude discretamente. (tom de comemoração)</p> <p>Os sujeitos concluem a construção do terceiro triângulo.</p>	<p>Raiado proporciona uma nova abordagem para construção de polígonos: “esticar elásticos”.</p> <p>Mesmo não tendo interagido diretamente com o raiado, sujeito demonstra satisfação pela conclusão da atividade.</p>	<p>Intensificação no grau de interação: Entusiasmo individual pelo sucesso do grupo.</p>
---	---	--



<b>Cena 6.13</b>		
<b>INTERAÇÃO</b>	<b>INTERPRETAÇÃO</b>	<b>IDEIAS</b>
<p>Os sujeitos retornam para o material impresso e realizam a leitura do enunciado do item c da questão 2 (comparação entre os 3 triângulos construídos). S1 lê oralmente.</p> <p>S2 aponta para S4 (em tom irônico e desafiador)</p> <p>S1 sorri.</p> <p>S1: “- Que...”</p> <p>S3: “- Eles estão ampliados...”</p> <p>S4: “- É...”</p>	<p>Sujeitos constataam que as razões utilizadas ocasionaram construção de figuras ampliadas, trazendo coerentemente termos associados.</p> <p>Sujeitos mantêm considerável grau de interação, interrogando uns aos outros e buscando ampliar a linha</p>	<p>Protagonismo nas ações.</p> <p>Ampliação do horizonte conceitual geométricos</p> <p>O “estar em grupo” contribuindo na busca</p>



Quadro 9: Desenvolvimento das Atividades (Raiado)

	<p>Universidade Federal de Juiz de Fora Programa de Pós-Graduação em Ed. Matemática Pesquisador: Elias da Costa Abreu</p>
---	---

**PESQUISA DE CAMPO**

**Atividade 6 – Ação no Raiado**

Desenvolvimento de atividades

1 – Observe a figura abaixo que representa dois triângulos construídos no Raiado.



Fonte: O autor

Movimente o elástico que forma o triângulo 2 de modo a formar um novo triângulo que possa ser dito bem parecido ao triângulo menor.

Observando os triângulos responda.

a) Há alguma razão de semelhança entre os triângulos. Em caso afirmativo determine o valor desta razão.

Sim. Razão 2

b) Registre o que mais podemos observar quando comparamos os dois triângulos.

Que ambas tem o mesmo ângulo interno.

2 - Construa com elástico um Triângulo 1 com os seguintes vértices.

Eixo I (Ponto 4cm)

Eixo II (Ponto 6cm)

Eixo III (Ponto 4 cm).

a) Construa agora com elástico um Triângulo 2 que possa ser dito bem parecido ao primeiro mantendo a razão de semelhança 2.

b) Utilizando outro elástico, construa um triângulo 3 que possa ser dito bem parecido ao Triângulo 1 mantendo razão de semelhança 3.

c) Vamos registrar o que podemos observar quando comparamos os três triângulos e registre suas conclusões abaixo.

Eles se ampliaram, mas não mudaram de formas, continuaram a mesma figura.

Observando os triângulos responda:

a) Há alguma razão de semelhança entre os triângulos? Se sim, qual é o valor desta razão?

Sim. É a razão 2.

## 7 A ANÁLISE NOMOTÉTICA

A análise ideográfica oportunizou identificar, na terceira coluna, as idéias oriundas do fenômeno objeto de nossa investigação. Tendo como parâmetro as mesmas, partimos para efetivação de uma próxima etapa, a Análise Nomotética, que consistiu, em um primeiro momento, na categorização de tais manifestações dos sujeitos em três âmbitos de Convergências. São eles: Convergência do Pedagógico, Convergência do Didático e Convergência da Geometria.

Em cada Convergência, identificamos núcleos de significação que nos permitiram agrupar e categorizar as idéias em consonância com o pensamento fenomenológico, isto é, como movimento em direção à convergências, nunca como compreensões articuladas prévias.

No tocante aos aspectos pedagógicos do fenômeno, procedemos o agrupamento das manifestações dos sujeitos que se relacionavam à apropriação do conhecimento e transformação social. A citada convergência vincula-se também à formação discente voltada para cidadania. Nela, identificamos os seguintes núcleos: Diálogo Pedagógico, Interação e o Afetar-se.

Já para identificação dos valores didáticos, evidenciamos as idéias relacionadas à estruturação do ambiente para produção do conhecimento. Nessa etapa de categorização, consideramos entre outros aspectos, o espaço, o tempo bem como o horizonte de exploração metodológica – especialmente em torno do como fazer que vem da iniciativa e autonomia do sujeito. Os núcleos de significação vinculados a tal convergência são: Materiais Manipulativos e Ambiente (Espaço x Tempo).

A Convergência da Geometria volta-se para a identificação de idéias que se relacionam ao horizonte de constituição de produção de significado geométrico. Entre outros aspectos, consideramos de que modo os sujeitos pensam a Geometria no que concerne também ao desenvolvimento de processos na busca de respostas. Os núcleos que estão relacionados a essa Convergência são: Constituição do Horizonte Geométrico, o Epistemológico e Constituição de Conceitos.

Ressaltamos ainda que os núcleos de significação não estão dissociados. Entendemos que os aspectos pedagógicos, didáticos e geométricos que categorizam o fenômeno estão presentes em todas as convergências, vinculando-se entre si. Tal entendimento justifica a ocorrência de uma mesma ideia em núcleos distintos.

As convergências das idéias em seus respectivos núcleos de significação foram organizadas nas tabelas que seguem:

Tabela 5: Convergência da Geometria

Homotetia contribuindo para consolidação de homologias	<p><b>Constituição do Horizonte Geométrico</b></p>
Identificação de Propriedades Invariantes	
Consolidação de conceito: Homologias	
Percepção do vínculo da ideia de redução ao tema semelhança	
Ampliação do horizonte conceitual geométrico: Software abordando conceitos de modo dinâmico; Software permite a ideia de paralelismo com dinamismo;	
Software facilita a identificação dos lados homólogos de duas figuras semelhantes.; Software possibilita a construção de polígonos de um modo abrangente.	
Sorriso comum denota que o horizonte geométrico de atribuição de significados segue cada vez mais articulado em comunhão.	
Raiado oferece uma abertura de horizonte de significações.	<p><b>Núcleo Epistemológico</b></p>
Identificação de Propriedades Invariantes; Raiado contribui na intuição de propriedade invariante; Geogebra viabiliza identificação de propriedades invariantes	
Homotetia contribui na constituição de semelhança; Avanço na compreensão do conceito de homologia que permite estabelecer comparações entre os polígonos e deduzir o valor da razão; Conceito de semelhança também pode ser abordado mediante reduções: uma meta compreensão.	
Geoplano permite explorar conceitos geométricos com o corpo e sentidos; Raiado permite a construção de polígonos de modo dinâmico explorando o uso do corpo e sentidos; Raiado permitindo novo pensar epistemológico (pensar com as mãos);	
Raiado proporciona nova abordagem para o ensino de Geometria; Raiado propicia abertura de elaboração de uma estratégia para busca de respostas	
Ideias que mostram novas práticas para o pensar: Geoplano permite comprovar exatidão da construção; Geoplano viabiliza constatação de plausibilidade. Geoplano permite validação das ações.	
Raiado viabiliza exploração do horizonte conceitual aritmético x geométrico; Raiado possibilita que o pensar aritmético ocorra concomitantemente ao pensar geométrico	

Argumentação lógico-matemática	<b>Constituição de Conceitos</b>
Constituição de conceito: Razão de Semelhança; avanço na compreensão do conceito de homologia; vínculo da ideia de redução ao tema semelhança	
Homotetia contribui na constituição do conceito semelhança	
Material manipulativo contribui na constituição de razão de semelhança e na constituição de propriedade invariante	

Tabela 6: Convergência do Pedagógico

Diálogo Científico: Apropriação da Teoria	<b>Diálogo Pedagógico</b>
Geoplano viabiliza o “pensar geométrico” de modo coletivo.	
Raiado viabiliza inauguração do diálogo científico	
Software propicia construção mútua do conhecimento.	
Colaboração e Interação: Coletividade auxiliando no desenvolvimento das atividades	<b>Interação</b>
Habitação do horizonte geométrico	
Raiado viabiliza o agir de modo coletivo e intensifica o grau de interação entre os sujeitos.	
Sorriso comum denota que o horizonte geométrico de atribuição de significados segue cada vez mais articulado e em comunhão.	
A resolução ocorre de modo sincronizado. Enquanto um sujeito interage com o raiado explorando sua estrutura para desenvolver-se geometricamente, há outro sujeito registrando as ações.	
Os componentes se empenham na construção de triângulos buscando soluções. Interação permitindo que outros integrantes participem da resolução das questões.	
Os sujeitos interagem e encontram no material impresso elementos que lhes permitem constatar incoerências.	<b>Afetar-se</b>
O grupo preserva o pensar de modo coletivo respeitando-se mutuamente. As ponderações de cada integrante são consideradas no sentido de validar ou não a linha de raciocínio levantada.	
Os sujeitos não buscam destacaram-se individualmente. Há um empenho mútuo na preservação da coletividade. Observa-se harmonia e comunhão no grupo no desenvolvimento das atividades.	
O “estar em grupo” contribui na busca de respostas, tendo o Raiado como referência.	
Demonstração de entusiasmo, satisfação e gratidão pelo êxito na resolução das atividades	

Tabela 7: Convergência do Didático

Materiais manipulativos viabilizam abertura para utilização de ação metodológica na busca de respostas.	<p><b>Materiais Manipulativos</b></p>
Software viabiliza a construção mútua do conhecimento.	
Software permite abordar o conceito de raio de modo dinâmico além de intensificar a interatividade do grupo. (original)	
Software e Raiado oportunizam um ambiente didático favorável ao levantamento de hipóteses.	
Software contribui significativamente na fluidez e desenvolvimento das ações bem como para verificação de plausibilidade de hipóteses levantadas.	
Geogebra viabiliza a exploração concomitante de relevantes conceitos geométricos tais como vértice, segmento de reta, inscrição de polígonos, raio, paralelismo, etc.,	
Software permite que a ideia de paralelismo seja explorada pelo grupo com considerável grau de dinamismo.	
Software contribui para construção de polígonos semelhantes tendo a transformação geométrica de homotetia como referência.	
Raiado se mostra significativo para acolher as manifestações geométricas, sendo referência para elas, permitindo também considerável grau de interação entre sujeito x polígono.	
Software contribui para percepção de congruência dos ângulos internos correspondentes (propriedade invariante).	

Grupo alcança protagonismo nas ações.	<b>Ambiente (Espaço x Tempo)</b>
Percebe-se a permanência de um ambiente didático favorável à construção do conhecimento até o desfecho da atividade.	
Há a manutenção de um ambiente didático que preserva a busca por respostas: Os sujeitos interagem com o material impresso e uns com os outros buscando compreender as questões propostas.	
Software cria um ambiente favorável para que o conhecimento seja construído coletivamente.	

## 7.1 ASPECTOS RELACIONADOS À CONVERGÊNCIA PARA O FAZER GEOMÉTRICO

### 7.1.1 Constituição do Horizonte Geométrico

Esse núcleo relaciona-se a como os sujeitos abrem um horizonte de significação, não só se manifestando diretamente a objetos geométricos, mas também delineando um modo próprio de abordá-los, de criá-los, em ação. As ideias consideradas no mesmo apresentam aspectos vinculados à temática semelhança os quais emergiram das vivências dos sujeitos mediante um processo dialogal contínuo o que enfatiza habitação e subsequente ampliação do citado horizonte.

Na cena 1.3 percebe-se na fala de um dos sujeitos que a exploração da atividade no Geoplano acentuou a compreensão da ideia de homologia mediante a constatação da identificação da correspondência dos lados de dois polígonos semelhantes, mesmo estando rotacionados. Ao apontar para os lados correspondentes dos triângulos construídos, o sujeito afirma com convicção: “- Esse comprimento veio para o outro lado...”. Tal verbalização sinaliza que o mencionado material manipulativo contribuiu na consolidação do conceito.

Na cena 4.3 os sujeitos analisaram um trapézio construído no Geoplano, com razão de semelhança  $\frac{1}{2}$  e concluíram que o conceito de redução também se aplica à temática semelhança. Caracterizamos tal passo como uma metacompreensão e um passo epistemológico. Houve uma ampliação na compreensão da temática semelhança caracterizada pela percepção de que a razão de semelhança mencionada ocasionou a construção de polígonos reduzidos com lados correspondentes proporcionais.

Já na cena 5.10 o software oportunizou que os sujeitos identificassem graficamente a convergência das retas que interceptam os vértices correspondentes de triângulos homotéticos para um mesmo ponto: O centro de homotetia. A projeção dos triângulos viabilizou a constatação da existência do citado ponto de modo dinâmico e coletivo. Sendo assim, concluímos que o Geogebra contribuiu para ampliação do horizonte conceitual geométrico.

Na cena 6.6 percebemos que a temática semelhança articula-se ao Raiado de modo consistente o qual oportunizou uma abertura de horizontes de significações geométricas: O sujeito dialoga com o grupo, interage com o material manipulativo e indica com convicção de que modo deveria ser construído o triângulo solicitado no material impresso.

### 7.1.2 Constituição de Conceitos

O núcleo Constituição de Conceitos tem importância residindo no âmago científico da atividade. Enfatizamos que a Constituição de Conceitos é a parte mais ligada ao que denominamos de resultados, no entanto, nas intenções desta investigação, ele traz elementos que não estão imediatamente vinculados à ciência. Nele, nós aproximamos alguns elementos interligados ao modo com os quais este resultado emanaram.

Na cena 6.4 percebemos que a constituição do conceito razão de semelhança ocorreu em conjunto com outras manifestações de semelhança. Utilizando argumentação lógico-matemática, o sujeito enfatizou com convicção para o grupo, ao apropriar-se dos triângulos homotéticos construídos no Raiado, que há uma razão existente na comparação dos lados correspondentes.

Constatamos na cena 4.4 que a transformação geométrica de homotetia contribuiu na constituição do conceito de semelhança. Os sujeitos compararam dois polígonos semelhantes construídos no Geoplano e registraram no material impresso “são iguais” o que enfatiza que a citada transformação geométrica viabilizou a constituição do mencionado conceito.

Verificamos a ocorrência de algo similar ao supracitado na cena 6.2. Após compararem os triângulos construídos no Raiado, o sujeito afirma com convicção: “- São semelhantes...”. Após momentos de reflexão, outro integrante do grupo posicionou-se em tom de concordância: “- É, são semelhantes...”. A cena levou-nos a concluir que o Raiado viabilizou um diálogo interacional e propiciou que a constituição do conceito de semelhança ocorresse de modo coletivo.

Já na cena 4.5 os integrantes do grupo construíram dois trapézios semelhantes imprimindo uma rotação  $90^\circ$  conforme solicitado. Logo após compararem os dois polígonos os sujeitos registraram “eles são a mesma coisa...” o que evidenciou a constituição do conceito de semelhança. Cabe ressaltar que a transformação geométrica de rotação não se configurou como um obstáculo para constatação da semelhança existente entre os polígonos considerados.

No tocante à constituição de propriedades invariantes, constatamos tal ocorrência na cena 6.5. O Raiado tornou-se uma referência para os integrantes do Grupo que ao compararem dois triângulos homotéticos, concluíram de modo coletivo, e com certo grau de entusiasmo, que os ângulos correspondentes dos mesmos eram congruentes.

A identificação de propriedades invariantes ocorreu também na cena 5.13. Ao compararem os ângulos internos correspondentes dos triângulos homotéticos construídos no Geogebra, o sujeito afirmou com convicção: “... - e os ângulos internos continuam os mesmos.” A utilização do termo “continuam” no contexto da realização desta atividade enfatiza que o material manipulativo oportunizou a constituição do citado conceito.

### **7.1.3 Aspectos epistemológicos vivenciados**

O núcleo epistemológico está vinculado à atribuição de significados geométricos que ocorre nos sujeitos frente à apresentação científica. O foco reside na tentativa de buscar compreender de que maneira os integrantes do grupo pensam a Geometria. Para Oliveira (2017, p. 142) o modo de compreender e realizar dos mesmos nos revela “como a ciência ocorre nos sujeitos, como o raciocínio geométrico deles se põe e como a visualização das figuras juntamente com o recurso comunicacional compreende o pensar matemático”.

Na cena 6.5 percebemos que o Raiado contribuiu para que o sujeito intuísse a congruência dos ângulos internos dos triângulos homotéticos construídos. A verbalização expressa o modo de pensar do mesmo por ocorrer após considerável momento de observação e reflexão. Mais uma vez concluímos que o material manipulativo foi habitado e que a temática semelhança está intrinsecamente vinculada ao Raiado.

Verificamos também após análise da cena 5.5 a ocorrência de algo similar ao descrito acima: A homotetia contribuiu para que os sujeitos constatassem a existência de propriedades invariantes ao compararem os ângulos internos dos triângulos homotéticos construídos no Geogebra. Neste aspecto, concluímos que o software viabilizou um ambiente didático favorável ao desenvolvimento do pensar geométrico ancorado em um novo enfoque epistemológico.

De modo próximo, constatamos que o geoplano também oportunizou uma ~~nova~~ abordagem interessante para o fazer geométrico. Na cena 1.3, ao comparar os ângulos internos correspondentes de dois triângulos, o sujeito construiu um ângulo entre o polegar e os demais dedos da mão esquerda e em seguida sobrepôs a citada abertura em um dos ângulos do triângulo original. Conservando a mesma posição (abertura) entre os dedos ele verificou se o ângulo correspondente do triângulo maior preservava a mesma abertura. Tal modo de

pensar com as mãos enfatiza que o geoplano propiciou um novo enfoque epistemológico para a Geometria mediante uso do corpo.

Percebemos também a ocorrência do “pensar com as mãos” durante a realização das atividades no Raiado. Na cena 6.2 o sujeito percebeu que o triângulo construído não atendia ao solicitado. Enquanto interagia com o elástico fazendo as devidas correções, ele verbalizou para os demais integrantes do grupo: “- Tem que tirar (o elástico) daqui... e colocar aqui...”. A cena enfatizou que o Raiado propiciou dinamismo ao fazer geométrico além de viabilizar uma nova abordagem epistemológica mediante utilização do corpo e sentidos.

Na cena 1.2 observamos que após construírem triângulos no Geoplano, o sujeito solicitou uma pausa na execução da atividade para iniciar um processo de contagem das regiões entre os pinos que formavam os lados dos triângulos, objetivando verificar se as dimensões dos mesmos atendiam ao solicitado no material impresso. Concluímos que o material contribuiu para que o fazer geométrico ocorresse alicerçado em critérios de plausibilidade oportunizados na iniciativa dos sujeitos.

Já na cena 6.12 o grupo intentava construir no Raiado um triângulo semelhante ao original mantendo razão de semelhança 3. Para auxiliar o grupo, o sujeito apontou para o pino 6 do eixo central em que situava-se um dos vértice do triângulo original, olhou para os colegas e indagou: “-  $6 \times 3$  ?”. Após considerar a verbalização da resposta formalizada pelo grupo, o mesmo sujeito apontou para o 18º pino do eixo central e afirmou: “- Então vai ser aqui em cima...” (marcando o ponto em que ao seu ver seria um dos vértices do novo triângulo). Essas manifestações enfatizam que o material foi habitado pelos sujeitos os quais se apropriaram do mesmo como algo pertencente a eles. A cena nos permitiu perceber também que o Raiado viabilizou a ocorrência do pensar aritmético de modo coletivo e concomitante ao pensar geométrico.

## 7.2 ASPECTOS RELACIONADOS À CONVERGÊNCIA PARA O PEDAGÓGICO

Ao abordar este núcleo, ressaltamos o nosso entendimento em relação ao Pedagógico. Na pesquisa de campo utilizamos atividades abertas buscando também implementar um ambiente em que o convívio entre os sujeitos e a interação com os materiais apresentassem valores pedagógicos, no sentido de viabilizar engrandecimento cultural, atitudinal e de conhecimento, em ação coletivas interacionais.

O enfoque pedagógico das atividades está em consonância com o intuito da investigação de Oliveira (2017) ao propor:

(...) questões abertas para serem objetos de investigação e experimentação, para que o sujeito seja o promotor do seu próprio conhecimento, que quando construído de forma conjunta em um grupo de pessoas com o mesmo objetivo, alcance uma aprendizagem mais global. (OLIVEIRA, 2017, p. 33).

Os núcleos dessa convergência evidenciam de que modo o “estar em grupo” oportunizou uma aprendizagem mais abrangente em que o conhecimento geométrico fora elaborado e constituído em ação. O sentido do que é aprendizagem é estendido para nível do saber do conhecimento, quando o sujeito constitui compreensões e transcende a ação, consciente de valores que afetam sua constituição como estudante.

### 7.2.1 Diálogo Pedagógico

Esse núcleo enfatiza que as atividades foram essencialmente interativas com os materiais e sujeitos, com resultados interligados à colaboratividade. Os sujeitos revelaram o quanto esses aspectos dão sentido pedagógico, em relação ao exposto acima, à produção do conhecimento.

Na cena 1.1, S1 e S2 dialogaram sobre as características dos triângulos semelhantes a serem construídos no Geoplano. Constatamos que tais manifestações mostraram os sujeitos implementando espontaneamente diálogos sobre a Geometria. Cabe ressaltar que tais verbalizações vinculam-se ao saber teórico dos integrantes do grupo. Após leitura do enunciado da questão 1, S2 se expressou, em relação ao segundo triângulo a ser construído, da seguinte forma: “-... parecido com o primeiro triângulo...”. As verbalizações relacionadas às características dos triângulos viabilizaram uma compreensão mútua quanto aos procedimentos necessários para resolução da atividade.

Na cena 4.5, S1 constrói no geoplano, um trapézio com base menor e altura medindo 2 unidades. Enquanto observa o movimento da construção de sua colega, S2 verbaliza o valor numérico das referidas medidas com intuito de auxiliar na construção. Neste aspecto, verificamos que o pensar geométrico encontrou na atividade proposta com o geoplano um ambiente de colaboratividade entre os sujeitos, que expressaram compreensões coletivas.

A cena 6.1 iniciou com apresentação de dois triângulos não semelhantes construídos no Raiado. Os sujeitos deveriam interagir no elástico que formava o segundo triângulo de modo a torná-lo semelhante ao primeiro. Após lerem e refletirem sobre o enunciado da questão S4 levou a mão ao Raiado e verbalizou: “– Tem que mexer no triângulo” (apontando para o elástico que formava o segundo triângulo). Verificamos que o Raiado se mostrou rico em fomentar discussões nas quais a geometria da semelhança foi se constituindo em vários apontamentos conceituais.

Na cena 5.2 verificamos o empenho de S1 e S2 ao auxiliarem S3 construir no Geogebra três segmentos (raios MA, MB e MC) que partiam dos vértices do triângulo inscrito até o centro da circunferência. Constatamos que em se tratando de uma atividade aberta, na qual um desafio traz a exigência de participações genuínas, o software colheu as variadas contribuições de todos os sujeitos.

### 7.2.2 Afetar-se

Esse núcleo relaciona-se à existência dos sujeitos junto ao ambiente, aos materiais manipulativos, ao horizonte constituído, aos demais integrantes do Grupo bem como às demandas propostas. Cabe ressaltar que os resultados apresentados no mesmo estão impregnados das afetividades dos sujeitos, visto que o conhecimento surge a partir do modo como foi vivenciado. As ideias apresentadas nesse núcleo referem-se também à memória vivencial que habita no corpo dos sujeitos que promove alguma forma de mudança.

Trazemos a ideia de existência tal como na abordagem ontoepistemológica da Fenomenologia. Afastando-se do cogito cartesiano, o sujeito afeta-se da experiência didática sendo enquanto pensa. *Estar-presente* com a tarefa e *pertencer* ao grupo são características disso.

Na primeira questão (letra a) da cena 6.4, os sujeitos discutiam sobre a possibilidade da existência de uma razão de semelhança entre os triângulos construídos no Raiado. Após discussão houve um consenso de que o valor da mesma seria 2. O registro do citado valor foi interrompido por S3, no momento em que S4 se apropria novamente do Raiado para validar a

resposta encontrada pelo Grupo: “– Espere aí”. Percebe-se que as considerações individuais apresentaram significativa relevância para o desenvolvimento das atividades. Constituiu-se um ambiente em que há preservação do respeito mútuo entre os sujeitos.

Já na cena 5.7 os sujeitos compararam os valores das razões entre as medida dos lados homólogos de dois triângulos semelhantes construídos no Geogebra (Questão 1 da Segunda Etapa). Mediante dificuldades encontradas para estabelecer uma relação entre os valores das razões, S3, S2 e S1 olham para S4 acreditando que o mesmo pudesse iniciar alguma linha de raciocínio que auxiliasse na busca de respostas. Essas manifestações expressaram significativo grau de harmonia e comunhão entre os sujeitos no desenvolvimento das atividades propostas.

Na cena 6.9 houve a interação simultânea dos sujeitos S3, S2, S1 e S4 no Raiado na construção do polígono solicitado no enunciado da questão 2. Mais uma vez o Raiado tornou-se uma referência para o Grupo oportunizando a manutenção de um ambiente favorável à constituição do conhecimento de modo coletivo.

Na cena 6.5 os sujeitos observaram os triângulos homotéticos construídos no Raiado, e em seguida concluíram que os ângulos correspondentes (internos) dos mesmos eram congruentes. Mediante tal constatação, S2 bateu palmas em um tom de entusiasmo e satisfação. De modo próximo, na cena 5.13 após a conclusão das atividades realizadas no Geogebra, o mesmo sujeito verbalizou: “– Amém” (sorrindo), acenando positivamente com ambos os polegares. Tais manifestações evidenciam a manutenção de um ambiente favorável à constituição do conhecimento até a conclusão das atividades propostas.

### **7.2.3 Interação**

O núcleo Interação refere-se também aos aspectos atitudinais dos sujeitos, que de alguma forma contribuíram para a manutenção de um ambiente favorável à constituição do conhecimento. Evidenciaremos aqui aspectos vinculados ao pensar e agir de modo coletivo tais como harmonia e sincronismo.

Percebemos na cena 6.10 que enquanto S1 estica o elástico para construção do triângulo solicitado na questão 2, S2 posiciona sua mão no Raiado de modo a proporcionar melhor sustentação para o citado instrumento. A espontaneidade dos sujeitos revela a constituição de um ambiente em que há espaço para as manifestações dos mesmos mediante

preservação do respeito mútuo. Cabe ressaltar também o aspecto funcional do Raiado por intensificar o grau de interação entre os integrantes do Grupo.

Na cena 4.4 os sujeitos construíram um triângulo semelhante na forma rotacionada, conforme solicitado na questão 3. Enquanto liam o enunciado, os sujeitos esboçaram um sorriso comum que evidenciou que as atividades exploradas no Geoplano oportunizaram a manutenção de um horizonte geométrico articulado em comum e favorável à constituição do conhecimento.

Já na cena 6.3 evidenciou-se o sincronismo e o protagonismo dos sujeitos na resolução da questão 1 (item a). Após chegarem a um consenso quanto à existência de uma razão de semelhança entre os triângulos construídos, S1 interage no Raiado para intuir o valor da mesma. Neste ínterim, S3 solicitou que S5 iniciasse o registro da resposta de modo afirmativo o que demonstra significativo grau de interação entre os sujeitos.

Na cena 6.8, os sujeitos construíram um polígono de formato pentagonal, na tentativa de elaboração de um triângulo conforme solicitado no enunciado da questão 2. De modo imediato, S1 mostra o enunciado da citada questão para S4 e indaga para o grupo: “- Isso aí é um triângulo?”. Tais manifestações enfatizam que a atividade impressa bem como o Raiado tornaram-se referenciais para os sujeitos no sentido de contribuir na constatação de incoerências.

### 7.3 ASPECTOS RELACIONADOS À CONVERGÊNCIA PARA O DIDÁTICO

A nossa ideia sobre o didático relaciona-se ao conjunto de articulações de espaço e tempo, ocupados por uma intenção de tarefas pedagógicas, por pessoas e por recursos, materiais e intelectuais, com os quais se estruturam o ambiente para constituição do conhecimento.

As considerações de Oliveira (2017) permitem-nos externar de modo mais abrangente nosso entendimento em relação aos aspectos atrelados à citada convergência:

O didático não se basta nos recursos disponíveis, numa metodologia de trabalho proposta, no ambiente arquitetônico. Tudo isso perfaz uma proposta, e o modo como as pessoas a tomam é que resulta no *didático ocorrido*. (...)

A imagem social mais marcante que a Didática tem, faz a associarmos com técnicas. Mas, já compreendemos em nossas análises iniciadas, as vicissitudes do humano se mostram quando a metodologia de desenvolvimento de atividades didáticas está em aberto, a ser realizada. (OLIVEIRA, 2017, p. 47-48)

Os núcleos aqui descritos consideram também fatores metodológicos que contribuíram para constituição e ampliação de um horizonte de exploração e produção de significados geométricos.

#### 7.3.1 Materiais Manipulativos

Nesse núcleo enfatizamos as ações metodológicas dos sujeitos frente aos instrumentos didáticos no desenvolvimento das atividades propostas. As cenas descritas expressam também que os materiais manipulativos foram habitados pelos integrantes do Grupo e oportunizaram a constituição de um horizonte de produção de significados que tende a ampliar-se mediante diálogo e interação.

Na cena 1.4 os sujeitos S2 e S1 refletiram sobre a possibilidade da existência de alguma relação entre os ângulos internos dos triângulos homotéticos construídos no Geoplano. Em tom de dúvida, S1 indagou: “– Ângulos internos...?”. Nesse ínterim, S2 aponta para um dos vértices do triângulo maior e afirma com convicção: “– É aqui...”. Percebemos que o citado material oportunizou uma abertura metodológica na busca de resposta intensificando o grau de interação entre os sujeitos.

De modo próximo ao supracitado, na cena 6.2 foram apresentados aos sujeitos dois triângulos já construídos no Raiado. Os integrantes do Grupo questionaram-se sobre a adoção

de uma estratégia para torná-los semelhantes. Após consideráveis momentos de reflexão, S4 afirmou: “- Tem que tirar o elástico daqui (12° pino do eixo 1) ... e colocar aqui (9° pino do eixo 1)...”. A verbalização e interação com o Raiado ocorreram de modo concomitante evidenciando que o citado instrumento propiciou uma abertura de cunho metodológico para resolução da questão proposta.

Já na cena 6.13 os sujeitos refletiam sobre os três triângulos homotéticos construídos no Raiado S3 expressou-se da seguinte forma: “- Porque ampliou... Então é a mesma coisa...”. Após momentos de reflexão, S2 apontou para os triângulos, e afirmou em tom de conclusão: “- É a mesma coisa, amiga!” (voltada para S1). Entendemos que o Raiado oportunizou a preservação de um ambiente didático favorável ao levantamento e validação de hipóteses tornando-se mais uma vez uma referência para constituição do conceito de semelhança.

Na cena 5.5, em atendimento ao solicitado ao item i da Segunda Etapa (ação no Geogebra) os sujeitos refletiram sobre aspectos comuns entre os dois triângulos homotéticos construídos. S4 indagou para o grupo: “- Que eles tem os mesmos ângulos internos?”. Enquanto registrava tal linha de raciocínio, S1 fez uma pausa, olhou novamente para a projeção dos triângulos e refletiu por mais um tempo sobre a mesma. Após alguns instantes, o Grupo chegou a um consenso quanto à validação da hipótese levantada. Entendemos que além de viabilizar a constituição do conceito de propriedades invariantes, o software contribuiu também para manutenção de um ambiente favorável ao levantamento e validação de hipóteses.

Na cena 5.13, os sujeitos concluíram a construção dos três triângulos homotéticos no Geogebra. O mencionado recurso didático oportunizou a exploração concomitante de relevantes conceitos geométricos, tais como: homotetia, vértice, raio, paralelismo etc... No desfecho da cena, em atendimento ao solicitado no material impresso, os sujeitos refletiram sobre aspectos comuns entre os três triângulos construídos. No registro do Grupo percebe-se que o software viabilizou a constituição de propriedade invariante mediante a identificação da congruência dos ângulos internos correspondentes.

Já na cena 5.4, S4 concluiu a construção do segundo triângulo homotético solicitado no enunciado do item h (Segunda etapa) apresentando considerável grau de destreza ao manusear o Geogebra. A cena evidenciou que o software contribuiu na construção de polígonos semelhantes tendo a transformação geométrica de homotetia como referência.

Na cena 6.11 em atendimento ao item b da questão 2, os sujeitos buscavam estratégias para construção de um triângulo homotético utilizando a razão de semelhança 3. Neste

interim, S1 verbalizou: “– Como assim gente? (...) Vai lá, S4... (S3 entrega o raiado para S4). Sinta-se à vontade, ta?” (sorrindo). As manifestações enfatizaram que o raiado viabilizou intensificação nas interações entre os sujeitos contribuindo também na preservação de um ambiente didático em que o conhecimento fora constituído de modo prazeroso e coletivo.

### **7.3.4 Ambiente (Espaço x Tempo)**

Esse núcleo apresenta aspectos relacionados ao pensamento fenomenológico que considera a aprendizagem do sujeito ocorrendo junto aos demais integrantes do Grupo, junto ao educador, bem como junto aos recursos didáticos disponibilizados. As ideias aqui descritas interligam-se também a um fazer geométrico embasado no conceito de espacialização. Oliveira (2017, p. 40) ao descrever o vínculo entre o citado conceito e a Geometria, expressou-se da seguinte forma: “A geometria (...) é um fazer humano que imbrica sempre um espaço – material ou ideal – no qual o homem espacializa. Espacializar é mover e mover-se, e habitar o movimento, percebendo-o”.

Cabe ressaltar que nesse núcleo será considerado também o tempo que oportuniza o espacializar dos sujeitos na busca de respostas. A relevância de tal fator para a concretização de uma pesquisa é sustentada nas considerações de Oliveira (2017, p. 140) ao afirmar que: “A disponibilização de tempo para um grupo viver a espacialidade (...) é um elemento imprescindível, compreendemos, para que uma investigação se dê”.

Na cena 6.13 os sujeitos interagem buscando construir no Raiado um triângulo semelhante mantendo razão de semelhança 3. S1 aponta para o pino 6 do eixo central do primeiro triângulo já construído e indaga para o grupo: “ – Aqui, 6 x 3 ?” (olhando para os colegas). Neste momento todos olharam para S5 esperando a resposta. A cena apresenta a constituição do conhecimento ocorrendo junto ao raiado bem como o protagonismo alcançado pelo Grupo ao dividir as ações: enquanto uns interagiam no Raiado, outros realizavam as operações matemática de modo sincronizado.

Na cena 6.1, após realização da leitura do enunciado da questão 1, os sujeitos se olham e S4 leva sua mão ao raiado tentando iniciar a resolução da questão. Neste momento S3 olha para S4 e aponta para o enunciado, o que levou S4 a retirar a mão do raiado e proceder a releitura do enunciado da citada questão. Tais manifestações sinalizam o início do ambiente didático constituído pelos sujeitos tendo a coletividade como principal fundamento. Percebe-se também a busca da compreensão da questão proposta junto ao raiado, junto ao material impresso, bem como junto aos integrantes do Grupo.

Já na cena 5.6 os sujeitos identificaram os valores das medidas dos segmentos homólogos (raios AB e DE, BC e EF, AC e DF) das circunferências construídas objetivando determinar os valores das razões  $AB / DE$ ,  $BC / EF$  e  $AC / DF$  em atendimento ao solicitado no enunciado da questão 1 (Segunda etapa). Na execução do citado procedimento, S4 posicionou o cursor do mouse sobre os mencionados segmentos destacando o valor das medidas dos raios. De forma concomitante, S2 citou em voz alta tais valores para que S1 procedesse os registros dos mesmos no material impresso. Complementando ação e de modo simultâneo, S3 efetuou os cálculos das razões na calculadora. A cena expressa constituição do horizonte conceitual geométrico bem como protagonismo e significativo grau de interação entre os sujeitos. A busca por respostas ocorreu junto ao software bem como junto ao material impresso ancorada no pensar e agir de modo coletivo.

## 8 ASPECTOS TRANSCENDENTES RELACIONADOS À INVESTIGAÇÃO

A partir da interrogação de nossa pesquisa, conseguimos articular compreensões ao organizarmos todas as nossas análises nas três convergências obtidas: A Geometria, o Pedagógico e o Didático.

Na primeira, a Geometria, pudemos ver ampliado que a constituição de conhecimentos se faz em vários aspectos, muito além de uma apreensão e conceitos oportunizados numa sessão didática. O aluno, ao ser convidado a produzir conhecimentos, dentro do ambiente que foi realizado nas atividades de campo, mostrou que um tema pode ser a entrada para habitação de toda a ciência que está tratando, descortinando-se os horizontes possíveis de atribuição de significados. O conhecimento, dentro disso, é realizado em várias instâncias, e os modos em que os significados atribuídos são legitimados como científicos mostram como o valor epistemológico está em curso, se firmando junto às ações. Desse modo, os conceitos se constituem, são elaborados em comunidade, num processo moderado pelo professor, se mostrando como ápice de significações manifestadas e seguidamente reorganizadas.

A Pesquisa de Campo evidenciou que o conceito de semelhança, alvo principal deste estudo, se fez com o homotético, ou seja, a citada transformação geométrica viabilizou a implementação de uma metodologia que acolheu as manifestações dos sujeitos e oportunizou a constituição do tema objeto de investigação. Entendemos também que as atividades elaboradas e aplicadas possam contribuir no processo de ensino e aprendizagem da temática semelhança tendo a homotetia como referência. A mencionada transformação geométrica oportunizou o estabelecimento de relações entre os polígonos construídos, bem como a exploração concomitante de relevantes conceitos interligados ao citado tema tais como paralelismo e homologia.

Verificamos também, a partir dos registros dos sujeitos, que as atividades propostas contribuíram para a constatação da congruência dos ângulos internos correspondentes de polígonos homotéticos. A análise de tais apontamentos, no contexto da experiência vivida, nos levou à percepção da constituição do conceito de invariância.

Na segunda convergência, o Pedagógico, constatamos que as questões propostas proporcionaram aberturas metodológicas na busca por respostas e contribuíram na constituição de um horizonte de investigação caracterizado por uma crescente ampliação. Observamos também que as atividades abertas fomentaram verbalizações e manifestações gestuais que caracterizaram um ambiente pedagógico favorável à constituição do

conhecimento. Neste aspecto, ressaltamos a colaboratividade como um relevante elemento que permeou todo o processo de investigação.

As análises também evidenciaram que a existência dos sujeitos junto ao ambiente constituído, bem como junto aos materiais manipulativos configurara-se como um relevante aspecto pedagógico vinculado à maneira como o conhecimento fora vivenciado. Percebemos que os resultados obtidos estão impregnados das afetividades dos integrantes do Grupo em que a constante busca por respostas fundamentou-se em critérios de harmonia, comunhão e respeito mútuo.

Na convergência do Didático, pudemos constatar que os materiais manipulativos viabilizaram a exploração da temática semelhança com base em uma nova abordagem epistemológica, ancorada principalmente na possibilidade de um pensar geométrico mediante a utilização do corpo e sentidos. Os recursos didáticos utilizados oportunizaram a constituição de um horizonte de atribuição de significados geométricos fundamentando em um processo dialogal contínuo. Cabe ressaltar também que os materiais manipulativos foram habitados pelos sujeitos e apresentaram significativo potencial no que tange à exploração de conceitos geométricos tendo a homotetia como referência. Ainda no que concerne aos procedimentos metodológicos adotados na Pesquisa de Campo, ressaltamos que os mesmos vincularam-se ao referencial fenomenológico adotado tendo em vista que buscamos respeitar as vivências dos sujeitos sem utilizar hipóteses pré-concebidas. Com isso, julgamos oportuno tecermos algumas considerações com base na interrogação que viabilizou o desvelar do significado do fenômeno em como o mesmo foi experienciado pelos sujeitos objetivando transcender a experiência vivida.

Conforme já exposto, o intuito dessa pesquisa consistia em buscar compreender como a prática de atividades envolvendo homotetia poderia contribuir para a compreensão e a constituição do conceito de semelhança, por parte de alunos da Escola Básica, com mediação de materiais manipuláveis. Visando alcançar tal objetivo, realizamos uma revisão de literatura relacionada ao panorama do ensino de Geometria em nosso país considerando também aspectos curriculares vinculados à citada área do conhecimento. A realização da mencionada etapa foi de suma importância no sentido também de corroborar a viabilidade de investirmos na transformação geométrica de homotetia como método e pensamento geométrico próprio visando à constituição do conceito de semelhança. Conforme já exposto, o referido método situa a natureza da presente investigação em uma nova abordagem de cunho epistemológico a qual se interliga a uma recompreensão do fazer geométrico.

A resposta à interrogação da investigação está vinculada também ao “como” explicitado na mesma e que não se relaciona a um conjunto de conclusões fechadas, mas sim a todo o processo que viabilizou a estruturação das ideias em grupo de convergências, as quais podem ser entendidas como um conjunto de significações oriundas de nossas análises.

Pudemos observar também que as questões propostas e os materiais manipulativos estão alinhados à temática semelhança e evidenciam a viabilidade da utilização de propostas alternativas para o ensino de geometria que consideram, entre outros aspectos, os benefícios da adoção de novas possibilidades pedagógicas e didáticas na constituição do conhecimento.

Por fim, entendemos que nossos estudos, os autores com quem dialogamos, e as manifestações de nossos sujeitos, permitem considerarmos que ampliações na prática curricular, como pediram os PCN e hoje indica a BNCC para a Geometria Escolar são não só possíveis, como alentos para que a educação geométrica contribua para a formação de nossos estudantes em vários aspectos que são entendidos como tarefa das nossas escolas.

## 9 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

\_\_\_\_\_. A pesquisa qualitativa olhada para além de seus procedimentos. In: BICUDO, M. A. (Orgs.). **Pesquisa Qualitativa segundo a visão fenomenológica**. São Paulo: Cortez, 2011.

\_\_\_\_\_. Elementarmathematik vom höheren Standpunkten Aus. *Teil II: Geometrie*. Leipzig, 1909, 522p.

ALBUQUERQUE, A. G.: A idéia de semelhança nas associações entre entidades da geometria em livros didáticos de matemática para o ensino fundamental / Ademilton Gleison de Albuquerque. – Recife: O autor, 2011.

ALMOULOUD, S. Ag. et al. A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos, 2004, p. 94-108. Disponível em: <<http://www.scielo.br/pdf/rbedu/n27/n27a06.pdf>> Acesso em: 28/09/2019.

AMÂNCIO, R. A. **O Desenvolvimento do pensamento:** Trabalhando polígonos especialmente quadriláteros. 2013. 182 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2013.

ANDRADE, L. V. X. **Avaliação dos efeitos de uma sequência didática na concepção de ensino-aprendizagem e na construção do conceito de homotetia em licenciados de Matemática**. 2005. 149 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências) – Departamento de Educação, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2005.

BARROS, A. L. S.; ROCHA C. A. O uso do Geoplano como material didático nas aulas de geometria. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife. Anais do VIII ENEM. Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 2004.

BIANCHINI, Edwaldo.: *Matemática Bianchini*. – 8. Ed. – São Paulo : Moderna, 2015

BICUDO, M. A. V. A contribuição da fenomenologia à educação. In: PENTEADO, M.G.; BORBA, M. C. (Orgs.). **Fenomenologia:** uma visão abrangente da educação. São Paulo: Olho d'Água, 1999.

BICUDO, Maria Aparecida, V.; Pesquisa em Educação Matemática, **Pro-Posições**; Vol. 4 N° 01 [10] – março de 1993

BICUDO, M, A. V. O professor de matemática nas escolas de 1.º e 2.º graus. In: BICUDO, M. A. V. (org.). Educação matemática. 2 ed. São Paulo: Centauro, 2005

BORBA, M. de C; SILVA, R. S. R.; GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática: Sala de aula e internet em movimento.** 1ª ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2015 (Coleção Tendências em Educação Matemática).

BRASIL, Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Conselho Pleno. Resolução CNE/CP nº 2, de 22 de dezembro de 2017. Institui e orienta a implantação da Base Comum Curricular. Brasília, DF, 22 dez. 2017b.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. . Brasília: MEC /SEF, 1998. 148 p.

CALDATTO, M.; PAVANELLO, R. Um panorama histórico do ensino de geometria no Brasil: de 1500 até os dias atuais. **Quadrante**, [S. l.], v. 24, n. 1, p. 103–128, 2015. Disponível em: <https://quadrante.apm.pt/index.php/quadrante/article/view/63>. Acesso em: 27 jan. 2021.

CARVALHO, D. L. de: **Metodologia do Ensino de Matemática.** São Paulo: Cortez, 1990.

CARVALHO, J. B. P. O que é Educação Matemática? **Temas & Debates**, Ano IV, nº3, pp. 17-26, 1991

CATUNDA, O. et al. **As transformações geométricas e o ensino da Geometria.** Salvador: Centro Editorial e Didático da UFBA, 1990.

D' AMBRÓSIO, U.; Educação Matemática: Da Teoria à Prática. Campinas, SP: Papyrus, 1996. – (Coleção Perspectiva em Educação Matemática)

DAVIS, P. J.; HERSH, R. *A experiência matemática.* Trad. J. B. Pitombeira. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1985.

DETONI A. R.; OLIVEIRA D. B. S. - **Uma proposta para a presença curricular da geometria das transformações.** Revista de investigação e divulgação em Educação Matemática, Juiz de Fora, v. 2, n. 1, p. 06 - 25, jan./jun. 2018.

DETONI, A. R.; PAULO, R. M. A organização dos dados da pesquisa em cena: um movimento possível de análise. In: Bicudo, M A V. (Org.) **Pesquisa qualitativa segundo a visão fenomenológica.** São Paulo: Editora Cortez, 2011. p. 99 – 120.

DETONI A. R.; PINHEIRO J. M. L. - **Compreensões Filosóficas para Uma Alternativa do Pensamento Geométrico**. REVEMAT. Florianópolis (SC), v.11, Ed. Filosofia da Educ. Matemática, p. 232-243, 2016.

DETONI, A. R.; PINHEIRO, J. M. L. – **Direções para uma Filosofia Geométrica das Transformações**. VI SIPEM – Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. 2015.

FERNANDES, S. H. A. A.; HEALY, L. - **Transição entre o intra e interfigural na construção de conhecimento geométrico por alunos cegos**. Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática, Educ. Mat. Pesquisa. São Paulo, v. 9, n. 1, pp. 121-153, 2007. PUC-SP.

FIORENTINI, D.: A Educação Matemática Enquanto Campo Profissional de Produção de Saber: A trajetória brasileira, **Dynamis**, Blumenau v.1, nº 7, p. 7-16, abr/jun 1994

FRADE, R. **Composição e/ou decomposição de figuras planas no ensino médio: Van Hiele, uma opção**. 2012. 242 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2012.

GIMENES, S. S. **Contribuições de atividades de investigação e exploração com o computador na produção de conhecimento acerca do assunto semelhança**. 2014. 148 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Instituto Federal do Espírito Santo, 2014.

KLEIN, F. *Vergleichen de Betraungenüberneuregeometrische Forchungen. Programmzum Eintritt in die philosophische*. Erlangen: Universitätzu Erlangen, 1872.

LAGE, M. A. **Mobilização das formas de pensamento matemático no estudo de transformações geométricas no plano**. 2008. 171 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2008.

LIMA, N. S. **Investigações em Geometria Plana com Interfaces Digitais: Um estudo sobre Homotetia**. 2016. 118 f. (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016.

LORENZATO, S.; FIORENTINI, D. (adaptado).; O profissional em Educação Matemática, pp. 1 – 5, 2001 (Preprint)

LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria? **A educação matemática em revista**. Geometria. Blumenau, número 04, p.03-13, 1995. Edição especial.

MACHADO, Rosa Maria. **Minicurso - explorando o geoplano**. In: II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática. Disponível em: <<http://www.bienasbm.ufba.br/M11.pdf>>. Acesso em: 23/09/2019.

MACIEL, A. C. **O conceito de Semelhança**: Uma proposta de Ensino. 2004. 261 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

MARMO, C. Curso de Desenho, Gráfica Editora Hamburg Ltda, São Paulo, 1964.

MOISE, E. E.; DOWNS, F. L. **Geometria Moderna**. São Paulo: Edgard Blucher, 1971

MURARI, C. Experienciando Materiais Manipulativos para o Ensino e a Aprendizagem da Matemática. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 25, n. 41, p. 187-211, dez. 2011

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. (Tradução portuguesa do original de 2000). Lisboa: APM.

OLIVEIRA, D. B. S. **A constituição de conhecimento colaborado em geometria das transformações com ferramentas dinâmicas**. 2017. 169 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2017.

PAVANELLO, R. M. Por que ensinar/ aprender geometria? In: ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7., 2004, São Paulo. **Anais...** São Paulo: USP, 2004.

PAIS, L. C.: Intuição, Experiência e Teoria Geométrica; **Zettké**, Campinas, SP, v. 4, n° 6, p. 65 – 74, jul / dez.1996

PIAGET, J.; GARCIA, R. **Psicogênese e História das Ciências**. Traduzido por Maria F. M. R. Jesuíno. Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1987.

PENTEADO, M. G. Possibilidade para a formação de professores de Matemática. In: PENTEADO, M. G.; BORBA, M. (Orgs.). **A informática em ação**: formação de professores, pesquisa e extensão. São Paulo: Olhos D'Água, 2000. p. 23-34.

PEREIRA, S. R. F.; PEREIRA M. F. F. **O ensino de Semelhança de triângulos na opinião dos alunos**. XII ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática. 2016

PINHEIRO, J. M. L.: **A aprendizagem significativa em ambientes colaborativos-investigativo de aprendizagem: Um estudo de conceito de geometria analítica plana.** 2013. 202 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.

PROENÇA, Marcelo Carlos de. **Um estudo exploratório sobre a formação conceitual em geometria de alunos do ensino médio.** 2008. 200 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências, 2008. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/11449/90947>>. Acesso em 27/01/2021

RIBEIRO, Jackson. **Matemática: Ciência, Linguagem e Tecnologia.** 1. Ed. São Paulo: Scipione, 2010.

REZENDE, D. P. L. **Ensino e aprendizagem de Geometria no 8º ano do Ensino Fundamental:** uma proposta para o estudo de polígonos. 2017. 155 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2017.

SANTOS, M. T. Semelhança de Triângulos e Geometria Dinâmica – O trabalho em Grupo na Aprendizagem de conceitos. 2012. 130 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

SCHONS, L. M. B: O Geoplano como recurso didático para aprendizagem de conceitos e aplicações de triângulos e quadriláteros / Liane Maria de Brum Schons. – 2008

SILVA D. C.; LEIVAS J. C. S.: Inclusão no Ensino Médio: Geometria para Deficiente Visual. **Educação Matemática em Revista**, Brasília, Novembro 2013

SILVA, R. **Análise de um processo de estudo de semelhança.** 2007. 121 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação do Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico) – Universidade Federal do Pará. 2007.

SILVA, D. W.; ATTIE J. P.: **Atividades com o Geoplano.** X ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática. 2010

SILVA, J. C. D.; PIETROPAOLO, R. C. Um Estudo sobre as contribuições de Felix Klein para a Introdução das Transformações Geométricas nos Currículos Prescritos de Matemática do Ensino Fundamental. **Perspectivas da Educação Matemática** – UFMS – v. 7, n. 14 – 2014

SOARES, L. H. **Aprendizagem significativa na educação matemática**: uma proposta para a aprendizagem de geometria básica. 2008. 137 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Centro de Educação, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2008.

SOUSA, J. F. **Uso do Geogebra no Ensino de Matemática**. 2018. 156 f. Dissertação (Mestrado em Ensino) - Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* Mestrado em Ensino, Universidade do Vale do Taquari – UNIVATES, Lajeado, 2018.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA. Disponível em <<http://www.ufjf.br/mestradoedumat/publicacoes/produtos-educacionais/>>. Acesso em: 16 out. 2018

VENTURA, S. R. R. **O geoplano na resolução de tarefas envolvendo os conceitos de área e perímetro**: um estudo no 2º Ciclo do ensino básico. 2013. 152 f. Dissertação (Mestrado em Educação.) – Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2013.

VIEIRA, G., Paulo, R. & ALLEVATO, N.: Simetria no Ensino Fundamental através da Resolução de Problemas: possibilidades para um trabalho em sala de aula. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 27, n. 46, p. 613 – 630, ago. 2013