



INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PRODUTO EDUCACIONAL

UMA PROPOSTA DE TRABALHO DIDÁTICO COM A GEOMETRIA PROJETIVA

MARCELO CUNHA FIGUEIREDO

ADLAI RALPH DETONI

Juiz de Fora (MG)

Fevereiro, 2018



Este trabalho está licenciado com uma Licença [Creative Commons – Atribuição – NãoComercial 4.0 Internacional](http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

```
<a rel="license" href="http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/"></a><br />Este trabalho está licenciado com uma Licença <a rel="license" href="http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/">Creative Commons - Atribuição-NãoComercial 4.0 Internacional</a>.
```

Sumário

1 APRESENTAÇÃO	4
2 O CURSO.....	5
2.1 O que é a Geometria Projetiva?.....	5
2.2 Áreas de Figuras Planas	9
2.2.1 Definição	10
2.2.2 Área de um triângulo retângulo.....	12
2.2.3 Área de um triângulo qualquer.....	13
2.3 Teorema de Tales e Aplicações.....	14
2.3.1 Teoremas de Ceva e Menelau	15
2.3.2 Cálculo e Geometria.....	18
2.3.3 Teoremas da bissetriz interna e externa	22
2.3.4 Teorema de Pascal.....	24
2.4 Razão Anarmônica	25
2.4.1 Definição	25
2.4.2 Razão Harmônica	26
2.4.3 Feixes anarmônicos	28
2.4.4 Pontos correspondentes	30
2.4.5 Razão de quatro raios	31
2.5 Divisão Harmônica.....	35
2.5.1 Definição	35
2.5.2 Quadrilátero completo.....	40
2.6 Polo e Polar	44
2.7 Cônicas numa Visão Projetiva	52
2.7.1 Planos que cortam superfície cônica geram curvas cônicas.....	53
2.7.1.1 Elipse.....	53
2.7.1.2 Parábola.....	55
2.7.1.3 Hipérbole.....	56
2.7.2 Círculo projetado sobre um plano	57
2.7.3 Teoremas com projetividade	58
3 COMENTÁRIOS	60
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	59

1 APRESENTAÇÃO

Este produto educacional é fruto de uma dissertação apresentada ao programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, e de uma vontade pessoal em desenvolver um material a ser utilizado por futuros professores da disciplina que desejam ampliar seus conhecimentos em Geometria. Vale ressaltar que são omitidas as fontes das informações ora utilizadas, já que estas se encontram nessa dissertação.

A maioria das licenciaturas do Brasil oferecem aos estudantes o conteúdo de Geometria Plana do ponto de vista euclidiano. Por se saber da existência de Geometrias denominadas não euclidianas, este estudo prioriza por entender como estas surgiram, e se seria pedagógico trabalhá-las nas licenciaturas, visando fomentar discussões sobre outras ciências geométricas.

Sabe-se hoje da existência de várias Geometrias não euclidianas. Como tema deste produto, escolheu-se, em particular, a Geometria Projetiva, uma vez que ela possui características comuns com a euclidiana, mesmo sendo não euclidiana.

Quando se afirma que uma Geometria é não euclidiana isso significa que ela nega o quinto postulado de Euclides acerca de uma consideração sobre as paralelas.

Quinto Postulado de Euclides

"Se uma linha reta cortar duas outras retas de modo que a soma dos dois ângulos internos de um mesmo lado seja menor do que dois retos, então essas duas retas, quando suficientemente prolongadas, cruzam-se do mesmo lado em que estão esses dois ângulos".

Esse enunciado foi estudado durante muito tempo, pois vários matemáticos acreditavam não se tratar de um postulado e sim de um teorema, que poderia ser demonstrado pelas postulações feitas anteriormente, já que sua compreensão não era tão trivial quanto a dos anteriores.

Os primeiros matemáticos a suspeitarem que o quinto postulado era independente dos demais foram Gauss, Bolyai e Lobachevsky, nos séculos XVIII e XIX. Estes cientistas investigaram, assim, novas concepções sobre a quantidade de paralelas que passam por um ponto fora de uma reta, percebendo que as geometrias formuladas nessas concepções são consistentes do ponto de vista matemático. Portanto, o espaço não se restringe a ser pensado euclidianamente.

2 O CURSO

O propósito deste produto é disponibilizar material sobre o tema Geometria Projetiva do ponto de vista axiomático, elencando suas diferenças estruturais com relação à Geometria Euclidiana, as suas potencialidades pedagógicas e demonstrar como ela pode colaborar na resolução de problemas geométricos. O curso foi estruturado em capítulos, desenvolvendo-se um novo olhar sobre a geometria, no qual o espaço é visto de uma perspectiva inovadora, baseada em matemáticos pioneiros do sec. XIX, já citados.

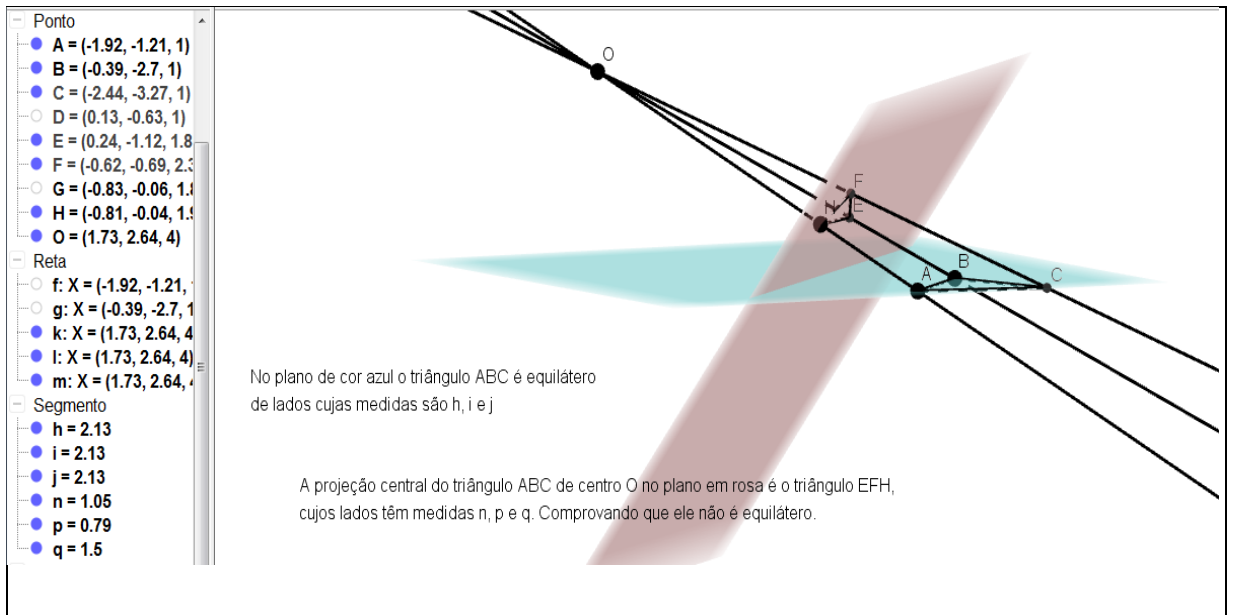
2.1 O que é a Geometria Projetiva?

A Geometria Projetiva foi instituída como ciência no século XIX, não havendo uma linearidade cronológica em seu processo de constituição. Já no primeiro século da era Cristã, Menelau produziu um teorema que pode ser considerado o primeiro marco projetivo, e como é demonstrado neste estudo, sua recíproca trata de questões envolvendo colinearidades.

O conhecido geômetra francês, Poncelet (1788 - 1867), estudou algumas propriedades das figuras geométricas que ele denominou propriedades projetivas. Explica-se, a seguir, no que consistem essas propriedades.

Seja A uma figura arbitrária, situada em um plano α ; β um outro plano e O um ponto do espaço. O ponto O , conjuntamente com cada ponto M da figura A , determina uma reta OM . Esta reta intersecta o plano β em algum ponto M' que será denominado projeção do ponto M (sobre o plano β de centro O). As projeções de todos os pontos da figura A no plano β formam uma figura A' , denominada projeção da figura A . A operação que permite obter a figura A' recebe o nome de projeção central do ponto O .

Variando a escolha do ponto O e do plano β pode-se obter, mediante projeções centrais da figura A , um conjunto infinito de figuras que, em parte, serão parecidas com a figura A , mas que em muitos aspectos diferenciam-se substancialmente desta. Por exemplo, projetando um triângulo equilátero pode-se obter um outro de forma arbitrária. Note-se isso acontecendo no GeoGebra.



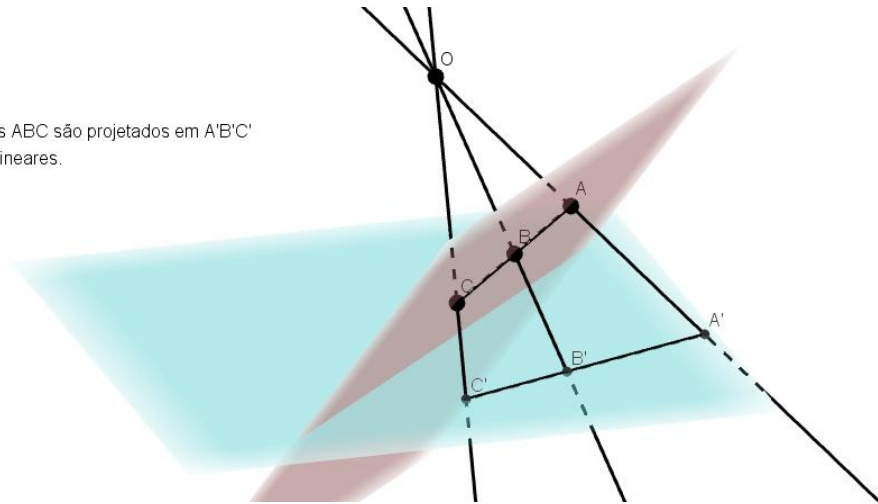
Percebe-se, assim, que algumas propriedades das figuras não se transmitem em projeção, como a medida dos segmentos. Ao se projetar um segmento de medida a pode-se obter outro de medida tão grande ou tão pequena quanto se queira.

Por outra parte, as figuras possuem propriedades que se conservam em qualquer projeção, sendo que existem magnitudes relacionadas às figuras que também são transmitidas em projeção. Tais propriedades e magnitudes são denominadas invariantes de uma projeção.

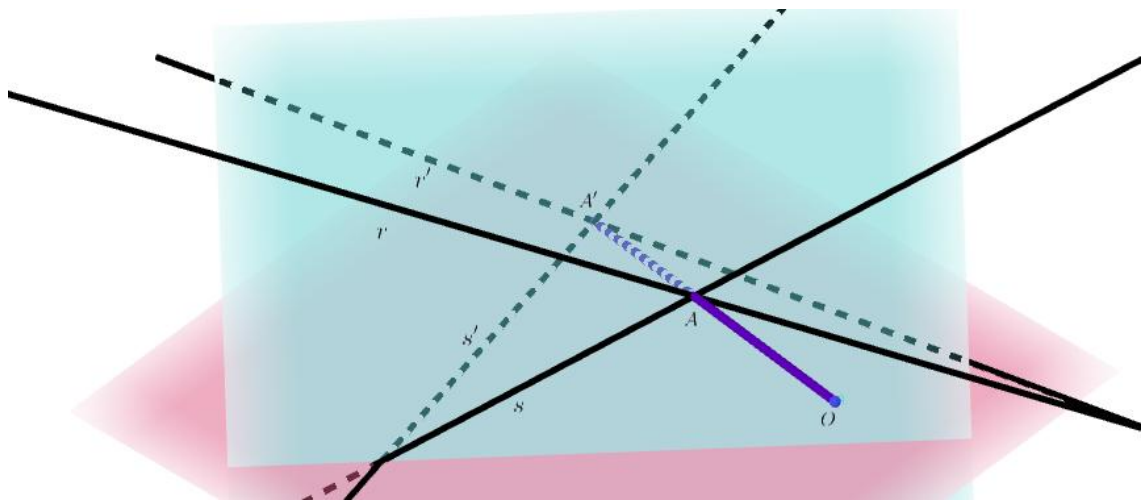
As propriedades das figuras que são invariantes com respeito a qualquer projeção foram definidas por Poncelet como propriedades projetivas, consideradas como objeto de estudo da geometria projetiva.

Um exemplo dessa invariância seria a “colinearidade”. Assim, se os pontos P_1, P_2, \dots, P_n de uma figura A estão sobre uma mesma reta, suas projeções P'_1, P'_2, \dots, P'_n também estarão alinhados. Portanto, a colinearidade é uma propriedade projetiva, pois é transmitida em projeção. Na figura abaixo, percebe-se a invariância da colinearidade em projeção.

Os pontos colineares ABC são projetados em $A'B'C'$ que também são colineares.



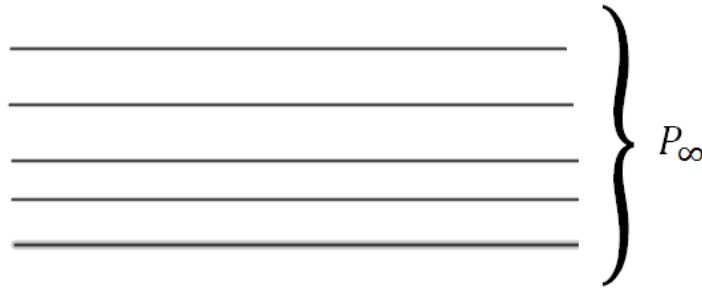
Uma outra propriedade projetiva é a "incidência", ou seja, num plano α , se duas retas se intersectam num ponto A , suas projeções num plano β , por um ponto O , se encontrarão num ponto A' , que é a projeção do ponto A . Na ilustração abaixo, percebe-se a invariância da incidência.



Na Geometria Projetiva, os elementos como pontos, retas e planos continuam a desempenhar um papel elementar. Porém, são definidos também os pontos, retas e planos do infinito. Trata-se, nesse estudo, que as retas paralelas euclidianas se encontram nesses pontos do infinito, também chamados de pontos ideais ou pontos impróprios. O espaço projetivo é constituído de pontos ordinários (euclidianos) e de pontos ideais (projetivos).

Diz-se que uma reta " a " é incidente com um ponto A , quando " a " passa por A e vice-versa; um ponto A é incidente com uma reta " a " quando ele pertence à reta " a ". Considera-se também que duas retas são incidentes em um ponto " A " quando elas se intersectam em A .

Uma reta projetiva " a " é constituída de pontos ordinários e de um Ponto Ideal, que pertence também a um feixe de retas paralelas a " a ". Verifica-se, abaixo, que o Ponto Ideal P_∞ é o ponto de encontro das paralelas euclidianas traçadas.



Informações sobre a existência das paralelas podem ser observadas na obra "*Geometria Euclidiana Plana*", de João Lucas Marques Barbosa (2010), na qual o autor demonstra que duas retas paralelas não podem se encontrar em um ponto ordinário, posto que existe uma única paralela para uma reta dada que passa por um ponto fora dela.

Supondo-se que os pontos ideais de retas não paralelas são distintos, o plano projetivo possui uma quantidade infinita de pontos ideais. O conjunto de todos pontos ideais de um plano é chamado de "reta do infinito" e o conjunto de todos os pontos ideais do espaço se denomina "plano do infinito".

A terminologia usada se justifica pelos seguintes fatos:

i) Dois planos paralelos possuem pontos ideais comuns, assim, a razão da denominação "reta do infinito" se explica pela percepção que se tem da interseção de planos, que é uma reta.

ii) O conjunto de todos os pontos ideais do espaço determina uma reta do infinito quando é intersectado por um plano ordinário. Por isso, define-se esse conjunto como "plano do infinito".

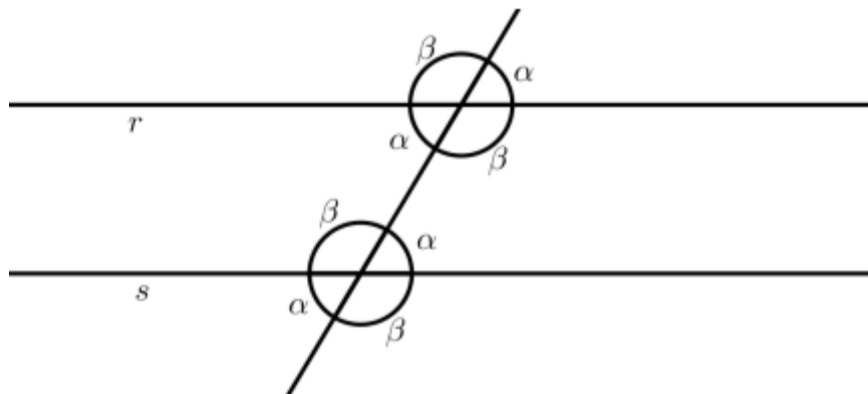
O tratamento axiomático que é dado à Geometria Projetiva se assemelha, em parte, ao que foi feito por Euclides nos "Elementos", exceto pelas considerações feitas sobre as paralelas:

Linhas paralelas ou equidistantes são linhas retas, que existindo no mesmo plano, se sendo produzidas de ambas as partes, nunca chegam a tocar.

Se uma linha reta cortar duas outras retas de modo que a soma dos dois ângulos internos de um mesmo lado seja menor do que dois retos, então essas duas retas, quando suficientemente prolongadas, cruzam-se do mesmo lado em que estão esses dois ângulos.

No plano projetivo, diz-se que duas retas distintas sempre são incidentes, ou seja, sempre se intersectam. Quando essa interseção se dá num ponto ordinário, considera-se que elas são concorrentes, e quando a interseção é um Ponto Ideal elas são tomadas por paralelas, ou seja, continuam sendo chamadas de paralelas, porém, de uma nova perspectiva, pois no plano projetivo as "paralelas" não existem.

Em "*Geometria Euclidiana Plana*", de João Lucas (2010), encontra-se a caracterização para que duas retas sejam consideradas paralelas. Pelo quinto postulado, que trata da unicidade da paralela, basta que os ângulos correspondentes sejam congruentes. Tal argumento é validado na presente proposta.



Assim, no plano projetivo é única a reta que contém um ponto ordinário e um Ponto Ideal.

2.2 Áreas de Figuras Planas

Como o objetivo aqui é criar uma sequência didática acerca do tema Geometria Projetiva, a preocupação central está em como demonstrar fatos que interessam projetivamente. O primeiro passo, então, é definir a área de uma figura plana, que funcionará como aporte teórico para demonstração de vários resultados utilizados no contexto projetivo.

Vale ressaltar que na Geometria Projetiva busca-se lidar com teoremas que envolvem a colinearidade e a incidência de retas, que são invariantes segundo a projeção. Pretende-se, sim, lidar com medidas de segmentos e com áreas para demonstrar as propriedades que

constituem o foco do interesse, quer seja, mostrar que colinearidades e incidências são preservadas em várias situações. Assim, assume-se uma postura não euclidianas no sentido de lidar com uma axiomática distinta, centralizando o interesse em questões diferentes do euclidianismo.

Nesse intento, a Geometria Euclidiana é utilizada como ferramenta para lidar com teoremas que tratam das colinearidades e de incidências.

2.2.1 Definição

Para tratar das áreas de figuras planas, postula-se como válidas as seguintes propriedades, assim como fez Antonio Caminha Muniz Neto (2012):, na obra "*Tópicos de Matemática Elementar - Geometria Plana*"

- a) Polígonos congruentes têm áreas iguais.
- b) Se um polígono convexo é particionando em um número finito de outros polígonos convexos, então a área do polígono maior é a soma das áreas dos outros polígonos.
- c) Se um polígono (maior) contém outro (menor) em seu interior, então a área do polígono maior é maior que a área do polígono menor.
- d) A área de um quadrado de lado 1cm é igual a 1cm^2 .

Com esses enunciados, pode-se facilmente demonstrar que um quadrado de lado medindo n , $n \in \mathbb{N}$ é n^2 .

De fato:

Particionando cada lado do quadrado original em n segmentos de medida unitária, obtém-se n fileiras e n colunas, formando-se assim $n \cdot n = n^2$ quadrados de lado unitário. Assim, denotando por A_n a área do quadrado de lado n , conclui-se que:

$$A_n = n^2$$

Considerando-se agora um quadrado de lado $\frac{m}{n}$, com $m, n \in \mathbb{N}$ e área $A_{\frac{m}{n}}$, pode-se demonstrar que sua área é $\left(\frac{m}{n}\right)^2$.

De fato:

Empilhando n^2 quadrados de lado $\frac{m}{n}$ em n filas e n colunas, forma-se um quadrado de lado $\frac{m}{n} \cdot n = m$. Tal quadrado possui área igual a m^2 . Pelo postulado 2, tem-se que $n^2 \cdot \frac{A_m}{n} = m^2$. Portanto, $\frac{A_m}{n} = \frac{m^2}{n^2} = \left(\frac{m}{n}\right)^2$.

Assim, fica demonstrado, até agora, que se $l \in \mathbb{Q}$ for a medida do lado de um quadrado, sua área medirá l^2 . Será demonstrado, portanto, que se $l \in \mathbb{R}$ for a medida do lado de um quadrado sua área medirá l^2 .

E de fato:

Utilizando-se os conceitos da análise, tem-se, pela densidade dos números racionais na reta, que existem x_k e y_k racionais positivos, tais que, para $k \in \mathbb{N}$,

$$x_k < l < y_k \text{ e } y_k - x_k < \frac{1}{k}$$

Considerando-se que são construídos dois quadrados de lados x_k e y_k , o primeiro contido no quadrado dado e o segundo contendo, e utilizando o postulado 3, verifica-se que é verdadeira a expressão $x_k^2 < A_l < y_k^2$. Como $x_k < l < y_k$, depreende-se que $x_k^2 < l^2 < y_k^2$. Portanto, ambos os números A_l e l^2 pertencem ao intervalo $]x_k^2, y_k^2[$, de modo que,

$$|A_l - l^2| \leq y_k^2 - x_k^2 \rightarrow |A_l - l^2| \leq (y_k - x_k) \cdot (y_k + x_k) \rightarrow |A_l - l^2| \leq \frac{1}{k} \cdot \left(x_k + \frac{1}{k} + x_k\right)$$

$$|A_l - l^2| \leq \frac{1}{k} \cdot \left(\frac{1}{K} + 2x_k\right) \leq \frac{1}{k} \cdot \left(\frac{1}{K} + 2l\right)$$

Como para todo $k \in \mathbb{N}$ existem x_k e y_k presume-se que $0 \leq |A_l - l^2| \leq \frac{1}{k} \cdot \left(\frac{1}{K} + 2l\right)$.

Como $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \cdot \left(\frac{1}{K} + 2l\right) = 0$, constata-se que $A_l - l^2 = 0$, ou seja, $A_l = l^2$.

A seguir, demonstra-se, de forma análoga, que a área de um retângulo se dá pelo produto das medidas de suas dimensões.

Começando com um retângulo de lados medindo m e n , com $m, n \in \mathbb{N}$. Particionando-o em $m \cdot n$ quadrados de lado 1, tem-se que sua área é igual a $m \cdot n$. Em seguida, toma-se um retângulo de lados medindo $\frac{m_1}{n_1}$ e $\frac{m_2}{n_2}$, com $m_1, n_1, m_2, n_2 \in \mathbb{N}$, e com $n_1 \cdot n_2$ cópias desse retângulo, monta-se um retângulo maior de lados medindo m_1 e m_2 . Sendo "A" a área de cada um dos retângulos menores, vê-se que:

$$n_1 \cdot n_2 \cdot A = m_1 \cdot m_2 \rightarrow A = \frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2} \rightarrow A = \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2}$$

Finalmente, pode-se tomar um retângulo de lados medindo a e b , com $a, b \in \mathbb{R}$, e, para $k \in \mathbb{N}$, racionais positivos x_k, y_k, u_k, v_k tais que $x_k < a < y_k$, $u_k < b < v_k$ e $y_k - x_k < \frac{1}{k}$, $v_k - u_k < \frac{1}{k}$.

Sendo A a área do retângulo, um argumento análogo ao feito para quadrados garante que A e $a \cdot b$ pertencem, ambos, ao intervalo $]x_k u_k, y_k v_k[$, e daí, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$|A - ab| < y_k v_k - x_k u_k = y_k v_k - x_k v_k + x_k v_k - x_k u_k = v_k(y_k - x_k) + x_k(v_k - u_k)$$

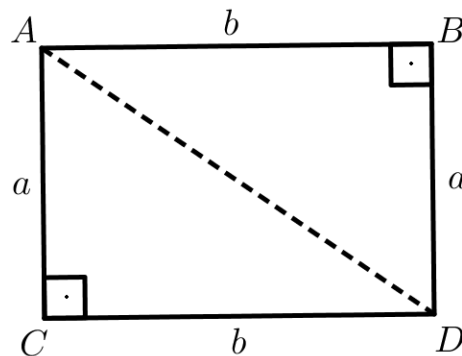
$$|A - ab| < \frac{1}{k} \cdot (v_k + x_k) < \frac{1}{k} \cdot \left(u_k + \frac{1}{k} + x_k\right) < \frac{1}{k} \cdot \left(b + \frac{1}{k} + a\right)$$

$$|A - ab| < \frac{1}{k} \cdot \left(\frac{1}{k} + a + b\right)$$

A expressão obtida é válida para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \cdot \left(\frac{1}{k} + a + b\right) = 0$ tem-se que $A = ab$.

2.2.2 Área de um triângulo retângulo

Assumindo-se como válidos também os postulados sobre a congruência entre dois triângulos; considerando-se um triângulo retângulo de lados medindo a e b ; e tomando-se um retângulo com os lados congruentes ao do triângulo, percebe-se que, ao traçar a diagonal, resultam dois triângulos congruentes pelo caso LAL.



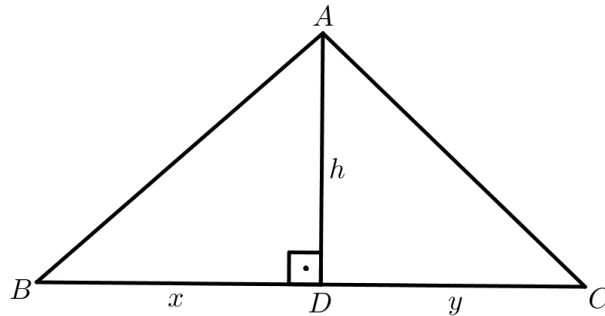
Como as áreas dos triângulos ACD e ABD são iguais, conclui-se que a área de cada triângulo retângulo será a metade da área do retângulo. Assim:

$$A = \frac{a \cdot b}{2}$$

Obs.: Representaremos por $[ABC]$ a área do triângulo ABC .

2.2.3 Área de um triângulo qualquer

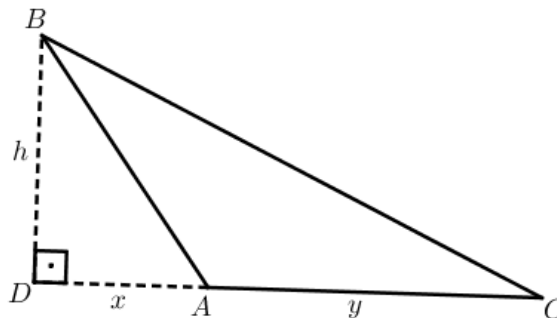
Considerando-se um triângulo não retângulo ABC , percebe-se que sua área é igual ao semi-produto das medidas de um lado qualquer pela altura relativa a ele.



Ao se traçar a perpendicular ao lado BC , passando por A , obtém-se o ponto D . Divide-se, assim, o triângulo ABC em dois triângulos retângulos, ABD e ADC . Logo, a área A do triângulo ABC será igual a:

$$[ABC] = \frac{x \cdot h}{2} + \frac{y \cdot h}{2} \rightarrow [ABC] = \frac{h \cdot (x + y)}{2} \rightarrow [ABC] = \frac{\overline{BC} \cdot h}{2}$$

Se o triângulo for obtusângulo, a expressão mostrada também é verdadeira quando se considera a base um lado adjacente ao ângulo obtuso. Seja o triângulo ABC , com $B\hat{A}C$ obtuso. A projeção ortogonal do ponto B na reta \overrightarrow{AC} se dá no ponto D , exterior ao segmento AC .



$$[ABC] = [BCD] - [ABD] \rightarrow [ABC] = \frac{(x + y) \cdot h}{2} - \frac{x \cdot h}{2} \rightarrow [ABC] = \frac{x \cdot h}{2} + \frac{y \cdot h}{2} - \frac{x \cdot h}{2}$$

$$[ABC] = \frac{y \cdot h}{2}$$

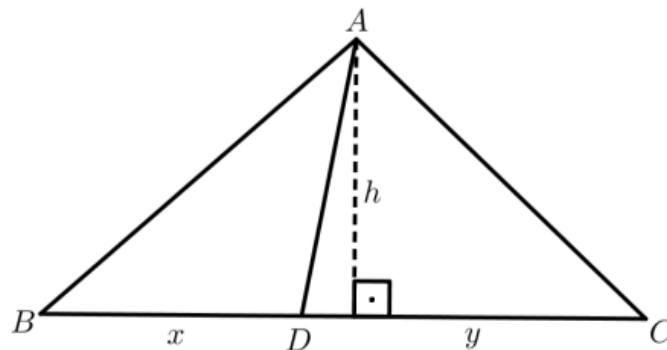
Proposição:

Considerando-se o triângulo ABC , abaixo, e a ceviana AD ., percebe-se que a razão entre as áreas dos triângulos ABD e ADC é igual a razão entre as medidas dos segmentos \overline{BD} e \overline{DC} .

$$[ABD] = \frac{x \cdot h}{2} \text{ e } [ADC] = \frac{y \cdot h}{2}$$

Dividindo-se membro a membro as expressões, obtém-se:

$$\frac{[ABD]}{[ADC]} = \frac{x \cdot h/2}{y \cdot h/2} \rightarrow \frac{[ABD]}{[ADC]} = \frac{x}{y} \rightarrow \frac{[ABD]}{[ADC]} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}$$



Obs.: Se os dois triângulos tivessem um lado em comum, poderia se proceder de forma análoga para mostrar que a razão entre as áreas seria a razão das medidas das alturas relativas a esse lado comum.

2.3 Teorema de Tales e Aplicações

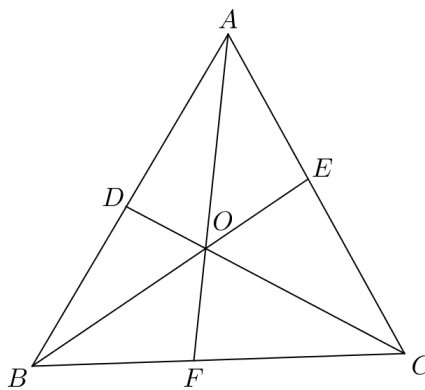
Percebe-se, nos livros de geometria, que cada um tem uma maneira de enunciar os postulados e demonstrar os teoremas. Este produto apresenta uma forma própria, entendendo que o Teorema de Tales é uma ferramenta de grande valia para se obter medidas euclidianas, e sendo ele necessário para demonstrar um resultado muito utilizado: a semelhança entre triângulos. Apresenta-se, a seguir, uma sequência de demonstrações que levam ao Teorema de Tales de uma forma alternativa.

2.3.1 Teoremas de Ceva e Menelau

Inicialmente, são enunciados e demonstrados estes dois teoremas, que serão utilizados mais posteriormente.

Teorema de Ceva

"Se em um triângulo qualquer ABC no qual três cevianas se encontram num ponto O , então $\overline{BF} \cdot \overline{CE} \cdot \overline{AD} = \overline{FC} \cdot \overline{EA} \cdot \overline{DB}$ "



Demonstração:

$$\frac{[ABF]}{[AFC]} = \frac{\overline{BF}}{\overline{FC}} = \frac{[BOF]}{[OFC]} \rightarrow \frac{[ABF]-[BOF]}{[AFC]-[OFC]} = \frac{\overline{BF}}{\overline{FC}} \rightarrow \frac{[ABO]}{[AOC]} = \frac{\overline{BF}}{\overline{FC}}$$

Raciocinando de forma análoga para outros triângulos, obtém-se:

$$\frac{[BOC]}{[AOB]} = \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \text{ e } \frac{[AOC]}{[BOC]} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$$

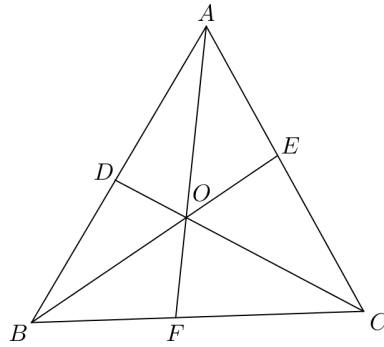
Multiplicando membro a membro as três igualdades, obtém-se:

$$\frac{[ABO]}{[AOC]} \cdot \frac{[BOC]}{[AOB]} \cdot \frac{[AOC]}{[BOC]} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{BF}}{\overline{FC}} \rightarrow 1 = \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{BF}}{\overline{FC}} \rightarrow \overline{BF} \cdot \overline{CE} \cdot \overline{AD} = \overline{FC} \cdot \overline{EA} \cdot \overline{DB}$$

De posse desse resultado, dá-se a possibilidade agora de demonstrar o Teorema de Menelau.

Teorema de Menelau

No triângulo abaixo, mostra-se que $\overline{AD} \cdot \overline{OF} \cdot \overline{BC} = \overline{AO} \cdot \overline{FC} \cdot \overline{DB}$.



Sabe-se, pelo Teorema de Ceva que $\overline{BF} \cdot \overline{CE} \cdot \overline{AD} = \overline{FC} \cdot \overline{EA} \cdot \overline{DB}$ (*).

Observe-se no triângulo ABF , cortado pela secante \overleftrightarrow{DO} , que intersepta os lados do triângulo nos pontos D, O e no prolongamento de \overline{BF} em C .

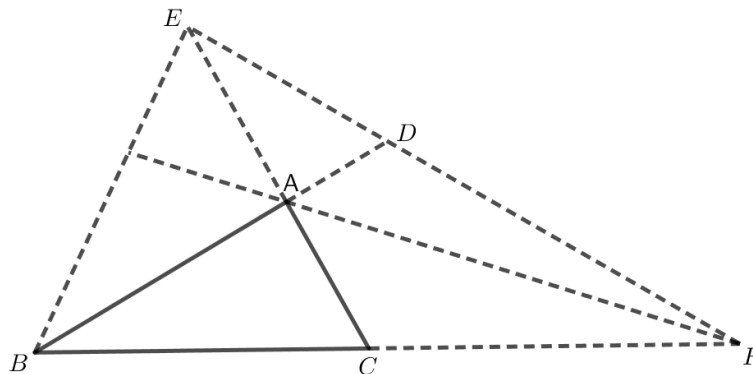
$$\frac{[AOB]}{[BOF]} = \frac{\overline{AO}}{\overline{OF}}, \quad \frac{[BOF]}{[OBC]} = \frac{\overline{BF}}{\overline{BC}} \text{ e } \frac{[AOB]}{[OBC]} = \frac{\overline{EA}}{\overline{CE}}$$

Como $\frac{[AOB]}{[OBC]} = \frac{[AOB]}{[BOF]} \cdot \frac{[BOF]}{[OBC]}$, resulta que $\frac{\overline{EA}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{OF}} \cdot \frac{\overline{BF}}{\overline{BC}}$, ou seja, $\overline{AO} \cdot \overline{BF} \cdot \overline{CE} = \overline{OF} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{EA}$ (+)

Dividindo membro a membro as expressões (*) e (+), vê-se que:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{FC} \cdot \overline{DB}}{\overline{OF} \cdot \overline{BC}}, \text{ ou seja, } \overline{AD} \cdot \overline{OF} \cdot \overline{BC} = \overline{AO} \cdot \overline{FC} \cdot \overline{DB}.$$

Demonstra-se ainda que, caso a secante intersekte os prolongamentos dos lados, a expressão também é verdadeira. Considerando-se, por exemplo, o triângulo ABC , abaixo, e a secante DEF ,



Demonstra-se que $\overline{AD} \cdot \overline{BF} \cdot \overline{CE} = \overline{AE} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{CF}$.

De fato:

No triângulo ECF , é possível usar Menelau, considerando a secante BAD . Assim,

$$\overline{EA} \cdot \overline{CB} \cdot \overline{FD} = \overline{ED} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{FB}$$

No triângulo BDF , pode-se usar Menelau, considerando a secante EAC . Assim,

$$\overline{BA} \cdot \overline{DE} \cdot \overline{FC} = \overline{BC} \cdot \overline{DA} \cdot \overline{FE}$$

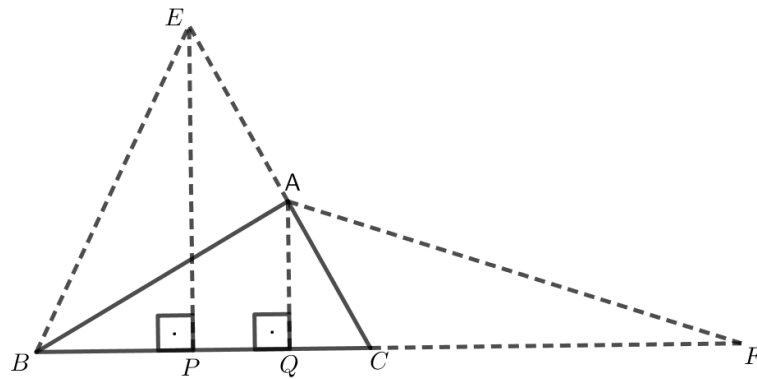
Dividindo membro a membro as expressões anteriores, obtém-se que:

$$\frac{\overline{EA} \cdot \overline{CB} \cdot \overline{FD}}{\overline{BC} \cdot \overline{DA} \cdot \overline{FE}} = \frac{\overline{ED} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{FB}}{\overline{BA} \cdot \overline{DE} \cdot \overline{FC}} \rightarrow \overline{EA} \cdot \overline{FD} \cdot \overline{BA} \cdot \overline{FC} = \overline{CA} \cdot \overline{FB} \cdot \overline{DA} \cdot \overline{FE}$$

Utilizando-se os resultados das áreas, depreende-se que:

$$\frac{[BDF]}{[EBF]} = \frac{\overline{FD}}{\overline{FE}}, \quad \frac{[BAF]}{[BDF]} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BD}}$$

Observe-se, na figura, que os triângulos BAF e EBF possuem o lado BF em comum, portanto, a razão entre suas áreas será a razão entre as medidas das alturas relativas a esse lado comum.



Assim, é possível formular que:

$$\frac{[BAF]}{[EBF]} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{EP}}$$

Os triângulos ABC e EBC também possuem o lado BC em comum, portanto, a razão entre suas áreas será:

$$\frac{[ABC]}{[EBC]} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{EP}}$$

Mas sabe-se que a razão entre as áreas desses triângulos sobre o segmento EC é $\frac{\overline{CA}}{\overline{CE}}$.

$$\frac{[BAF]}{[EBF]} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{EP}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CE}} \rightarrow \frac{[BDF]}{[EBF]} \cdot \frac{[BAF]}{[BDF]} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CE}} \rightarrow \frac{\overline{FD}}{\overline{FE}} \cdot \frac{\overline{BA}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CE}} \rightarrow \frac{\overline{FD}}{\overline{FE}} \cdot \frac{\overline{BA}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CE}}$$

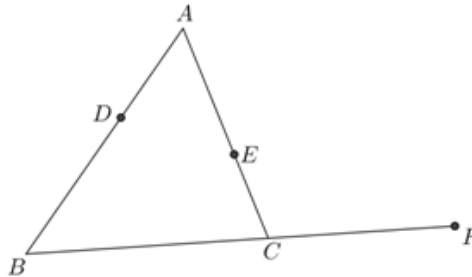
Portanto, da expressão $\overline{EA} \cdot \overline{FD} \cdot \overline{BA} \cdot \overline{FC} = \overline{CA} \cdot \overline{FB} \cdot \overline{DA} \cdot \overline{FE}$ e da anterior, equaciona-se:

$$\frac{\overline{EA} \cdot \overline{FD} \cdot \overline{BA} \cdot \overline{FC}}{\overline{FE} \cdot \overline{CA}} = \frac{\overline{CA} \cdot \overline{FB} \cdot \overline{DA} \cdot \overline{FE}}{\overline{FE} \cdot \overline{CA}} \rightarrow \overline{EA} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{CE}} \cdot \overline{FC} = \overline{FB} \cdot \overline{DA} \rightarrow \overline{AD} \cdot \overline{BF} \cdot \overline{CE} = \overline{AE} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{CF}$$

Logo, o resultado se mantém verdadeiro, caso a secante intercepte os prolongamentos dos lados.

A recíproca do Teorema de Menelau também é verdadeira, demonstrando-se no triângulo ABC , abaixo, que:

Se $\overline{AD} \cdot \overline{BF} \cdot \overline{CE} = \overline{AE} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{CF}$ (*), então os pontos D , E e F são colineares.



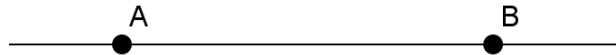
Considerando-se a reta que passa pelos pontos D e E , e o ponto F' , interseção dessa reta com o prolongamento da reta que perpassa pelos pontos B e C . Na secante D, E e F' pode-se usar Menelau, assim, $\overline{AD} \cdot \overline{BF'} \cdot \overline{CE} = \overline{AE} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{CF'}$ (&). Dividindo-se membro a membro as expressões (*) e (&), obtém-se que $\frac{\overline{BF}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{BF'}}{\overline{CF'}}$. Conclui-se, desse modo, que os pontos F e F' coincidem, pois só existe um ponto na reta BC que divide o segmento BC numa determinada razão. Portanto, os pontos D, E e F estão em linha reta. Procede-se da mesma forma quando a secante intersecta os prolongamentos dos lados.

2.3.2 Cálculo e Geometria

Não se está aqui afirmando que os matemáticos da época relacionaram essas duas áreas da matemática para lidar com reflexões sobre os elementos do infinito. Foi percebido, no desenvolvimento desse nosso estudo, que as ideias do cálculo infinitesimal podem colaborar com o entendimento de uma observação que é fundamental nesse material. Utilizando-se os elementos da Análise Real, é possível demonstrar um fato importante sobre

os pontos ideais. Para tanto, serão associados pontos de uma reta que contenha os pontos A e B a números reais.

Na reta real abaixo, são demarcados dois pontos, A e B , associados a números reais " a " e " b ", com $a < b$. Defini-se que $\overline{AB} = \overline{BA} = |b - a| = b - a$. seja P_∞ o Ponto Ideal da reta que contém os pontos A e B .



Sendo " r " o número real associado ao ponto R e " x " o número real associado ao ponto X ordinário, demonstra-se que $\lim_{X \rightarrow P_\infty} \frac{\overline{AX}}{\overline{BX}} = 1$ (escrever $X \rightarrow P_\infty$ significa que é possível se obter pontos ordinários da reta que se afastam cada vez mais dos pontos A e B) que será tratado da mesma forma que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-a}{x-b} = 1$, com $x > a$ e $x > b$. Pela definição dada no livro de Elon Lages, dado $\varepsilon > 0$, existe um número r , tal que se $x > r$, então $\left| \frac{x-a}{x-b} - 1 \right| < \varepsilon$.

De fato:

Basta tomar $r = \frac{b \cdot (\varepsilon + 1) - a}{\varepsilon}$. O primeiro passo é mostrar que $r > b$. Verifica-se que a diferença $r - b$ é sempre positiva.

$$r - b = \frac{b \cdot (\varepsilon + 1) - a}{\varepsilon} - b = \frac{b \cdot \varepsilon + b - a - b \cdot \varepsilon}{\varepsilon} = \frac{b - a}{\varepsilon} > 0$$

O segundo passo é mostrar que se $x > r$, então $\left| \frac{x-a}{x-b} - 1 \right| < \varepsilon$.

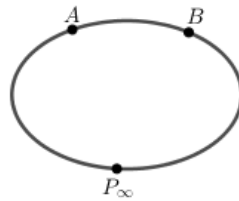
$$\begin{aligned} x > r &\rightarrow x > \frac{b \cdot (\varepsilon + 1) - a}{\varepsilon} \rightarrow \varepsilon \cdot x > b \cdot \varepsilon + b - a \rightarrow \varepsilon \cdot (x - b) > b - a \rightarrow \frac{b - a}{x - b} < \varepsilon \\ &\rightarrow \frac{b - a}{x - b} + 1 - 1 < \varepsilon \rightarrow \frac{x - a}{x - b} - 1 < \varepsilon \end{aligned}$$

Como $\overline{AX} > \overline{BX}$, tem-se que $x - a > x - b$, ou seja, $\frac{x-a}{x-b} - 1 > 0$, logo $\left| \frac{x-a}{x-b} - 1 \right| < \varepsilon$.

Portanto, existe um ponto R da reta que contém A e B , tal que se X estiver à direita de R a razão das distâncias se aproxima do valor 1 o quanto se desejar.

A reta projetiva tem uma propriedade abstrata, mas lógica do ponto de vista matemático. Será definido que ambos os lados de uma reta projetiva tendem para o Ponto Ideal. Assim, a reta projetiva é considerada uma "curva". Os axiomas de ordenação são

postulados nessa perspectiva. Sabe-se que o Ponto Ideal é abstrato, mas a figura abaixo dá uma ideia de como é uma reta projetiva.



Assim, tanto pela direita quanto pela esquerda, as retas projetivas se "encontrarão" no seu Ponto Ideal.

Seja $f(X)$ uma expressão que envolve medidas de segmentos, no qual o ponto ordinário " X " tenderá ao Ponto Ideal. Vale ressaltar que aqui não se trata de movimentação de um ponto sobre uma reta. Fixados A e B numa reta é possível obter pontos que se afastam cada vez mais de A e B .

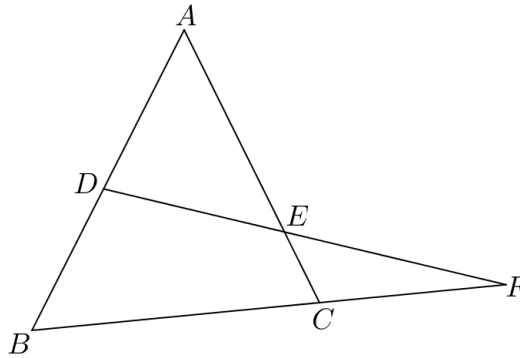
Toma-se por base que o limite da expressão $f(X)$, quando $X \rightarrow P_\infty$, existirá quando $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Observa-se que essa expressão $f(x)$ está no campo da análise, enquanto $f(X)$ encontra-se no ponto de vista geométrico. Para tornar claro, na expressão $\lim_{X \rightarrow P_\infty} \frac{\overline{AX}}{\overline{BX}}$, percebe-se que $f(X) = \frac{\overline{AX}}{\overline{BX}}$ e $f(x) = \frac{x-a}{x-b}$. Portanto, começam a ser inseridas as ideias do cálculo diferencial e integral para entes geométricos.

Poderia se proceder da mesma forma quando $x \rightarrow -\infty$, no objetivo de demonstrar que $\left| \frac{a-x}{b-x} - 1 \right| < \varepsilon$. Assim, os "limites laterais" no Ponto Ideal possuem o mesmo valor. Logo $\lim_{X \rightarrow P_\infty} \frac{\overline{AX}}{\overline{BX}} = 1$.

Convencionou-se em usar no material a notação $\frac{\overline{AP_\infty}}{\overline{BP_\infty}}$ para representar o limite, quando um determinado ponto ordinário da reta tende para o Ponto Ideal, ou seja, $\frac{\overline{AP_\infty}}{\overline{BP_\infty}} = 1$

Esse resultado é de suma importância nas conclusões alcançadas sobre uma segunda possibilidade de entendimento do Teorema de Tales.

Observando-se o triângulo ABC abaixo, fixado um ponto D no segmento AB , unindo com um ponto F do prolongamento do segmento BC , obtém-se o ponto E do lado AC .



Utilizando Menelau, tem-se que $\frac{\overline{AD} \cdot \overline{BF} \cdot \overline{CE}}{\overline{AE} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{CF}} = 1$. Pode-se assim imaginar o primeiro membro da expressão como uma função geométrica "constante", em que o ponto F seja a "variável" em questão. Quando F tende ao Ponto Ideal, depreende-se que:

$$\lim_{F \rightarrow P_{\infty}} \frac{\overline{AD} \cdot \overline{BF} \cdot \overline{CE}}{\overline{AE} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{CF}} = 1$$

Como $\lim_{F \rightarrow P_{\infty}} \frac{\overline{AD} \cdot \overline{CE}}{\overline{AE} \cdot \overline{BD}} = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{CE}}{\overline{AE} \cdot \overline{BD}}$ e $\lim_{F \rightarrow P_{\infty}} \frac{\overline{BF}}{\overline{CF}} = 1$ existem, constata-se que $\frac{\overline{AD} \cdot \overline{CE}}{\overline{AE} \cdot \overline{BD}} \cdot 1 = 1$, isto é, $\frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CE}}$.

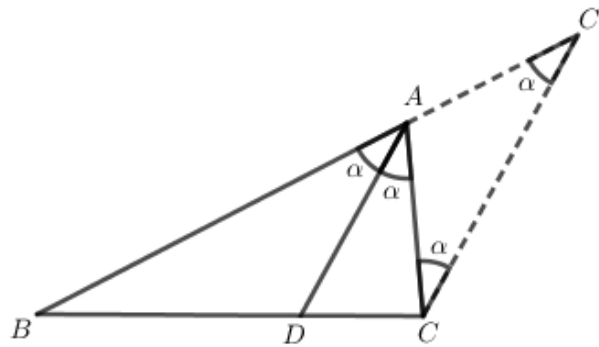
Nota-se que esse resultado é o Teorema de Tales visto de uma nova perspectiva, baseada no Teorema de Menelau e nas considerações sobre o Ponto Ideal. Portanto, o Teorema de Tales, por esse olhar, pode ser caracterizado como um caso particular do Teorema de Menelau, ou seja, quando a secante é paralela a um dos lados do triângulo.

Tem-se a consciência que o Teorema de Tales é a ferramenta de vários teoremas mostrados na Geometria Euclidiana, tais como os teoremas das bissetrizes interna e externa, a semelhança entre dois triângulos e a potência de um ponto em relação à uma circunferência. Acredita-se que seja conhecida a semelhança entre dois triângulos e a potência de um ponto. Caso o leitor queira obter informações complementares sobre os assuntos, fica, novamente, a sugestão de consultar o livro "Geometria Euclidiana Plana", de autoria de João Lucas.

Porém, na sequência, são traçadas algumas considerações sobre os teoremas das bissetrizes interna e externa, pois percebe-se a falta de informações na literatura sobre o círculo de Apolônio, que é um lugar geométrico interessante e que é abordado no presente estudo.

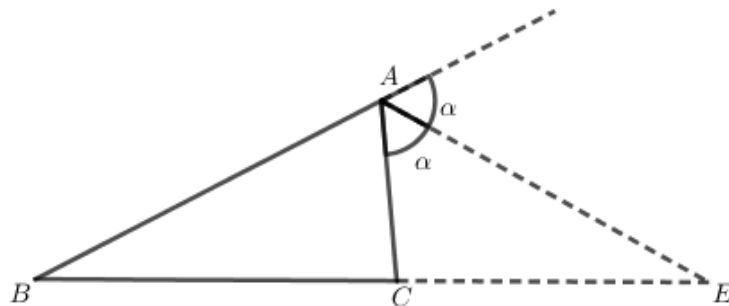
2.3.3 Teoremas da bissetriz interna e externa

No triângulo ABC , abaixo, mostra-se que a bissetriz interna relativa ao vértice A encontra o lado BC no ponto D tal que $\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DC}}$.



Demonstração:

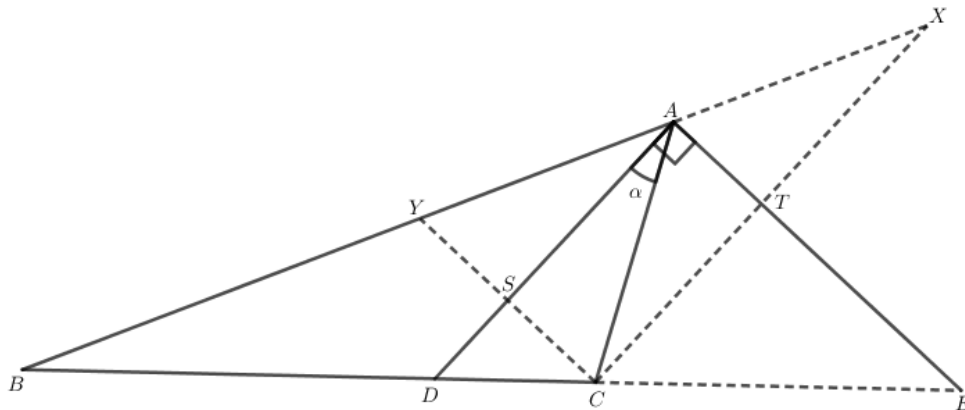
Traçando uma reta paralela à bissetriz interna pelo ponto C , resulta o ponto C' , no prolongamento do lado AB . Como as retas são paralelas, os ângulos $B\hat{A}D$, $A\hat{C}'C$ e $A\hat{C}C'$ têm a mesma abertura α . Utilizando Tales depara-se que $\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{DC}}$. Como o triângulo ACC' é isósceles, os segmentos AC e AC' são equipolentes. Portanto, $\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DC}}$. Procedendo de forma análoga para a bissetriz externa, demonstra-se que a bissetriz externa relativa ao vértice A intersecta o prolongamento do lado BC no ponto E , de forma que $\frac{\overline{AB}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CE}}$.



Percebe-se, assim, que ao traçar as bissetrizes interna e externa relativas a um vértice de um triângulo podem ser obtidos os pontos D e E , tal que $\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}}$. Posteriormente, é visto que os pontos D e E são denominados de conjugados harmônicos em relação aos pontos B e C .

Obs.: As bissetrizes interna e externa formam um ângulo de 90° , pois a soma do ângulo interno com seu externo é igual a um raso. Assim, suas metades somam 90° .

Será mostrado que a recíproca desse teorema também é verdadeira, ou seja, se D e E satisfazem à expressão $\frac{BD}{CD} = \frac{BE}{CE}$, e se o ângulo $D\hat{A}E$ for igual a 90° , as retas AD e AE são, respectivamente, as bissetrizes interna e externa.



Na figura acima, a reta CY é paralela à reta AE , e a reta CX é paralela à reta DA . Por intermédio de Tales chega-se ao seguinte: $\frac{BD}{AB} = \frac{CD}{AX}$ e $\frac{BE}{AB} = \frac{CE}{AY}$. Dessas duas igualdades conclui-se que $\frac{AB}{AX} = \frac{AB}{AY}$, pois por hipótese $\frac{BD}{CD} = \frac{BE}{CE}$. Com isso, $\overline{AX} = \overline{AY}$, ou seja, A é o ponto médio do segmento XY . Os triângulos YSA e ATX são congruentes pelo caso ALA , assim $\overline{YS} = \overline{AT}$. Como o quadrilátero $ATSC$ é um retângulo, $\overline{SC} = \overline{AT}$. Logo, S é o ponto médio de YC . Os triângulos YSA e CSA são congruentes pelo caso ALA , ou seja, $Y\hat{A}S = \alpha$. Portanto, o segmento AD pertence à bissetriz interna do ângulo $B\hat{A}C$. Como os triângulos YSA , CSA e ATX são congruentes, resulta que $A\hat{X}T = \alpha$. Logo, $C\hat{A}T = T\hat{A}X = 90^\circ - \alpha$. Desta forma, é possível concluir que o segmento AE é a bissetriz do ângulo externo $C\hat{A}X$.

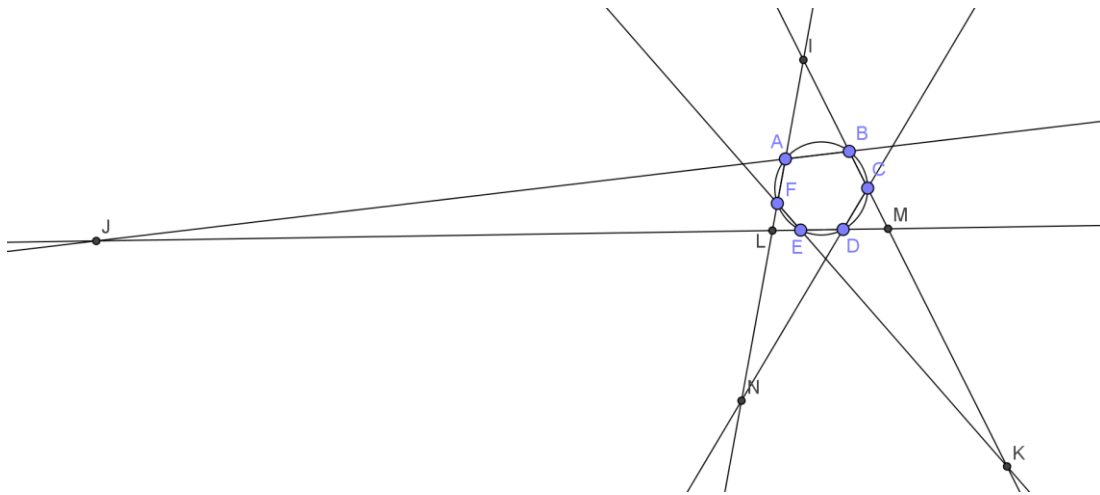
Como o vértice A "enxerga" o segmento DE segundo um ângulo de 90° , diz-se que ele pertence ao arco capaz de 90° , ou seja, à uma circunferência. Tal arco será denominado Círculo de Apolônio, que é o lugar geométrico dos pontos cuja razão das distâncias a dois pontos fixos é constante.

2.3.4 Teorema de Pascal

Outra ferramenta usada na presente explanação de trabalho projetivo é o Teorema de Pascal, que está enunciado abaixo:

“Em todo hexágono inscrito a uma circunferência, os três pontos de encontro dos lados opostos estão em linha reta”.

O desenho abaixo ilustra o enunciado.



Pretende-se mostrar que os pontos J , N e K são colineares.

De fato:

No triângulo ILM , considere-se as três secantes \overleftrightarrow{AB} , \overleftrightarrow{CD} e \overleftrightarrow{EF} . De posse do teorema de Menelau, estabelece-se que:

$$\begin{aligned} \text{Secante } \overleftrightarrow{AB}: \\ \overline{IA} \cdot \overline{LJ} \cdot \overline{MB} = \overline{IB} \cdot \overline{LA} \cdot \overline{MJ} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Secante } \overleftrightarrow{CD}: \\ \overline{IN} \cdot \overline{LD} \cdot \overline{MC} = \overline{IC} \cdot \overline{LN} \cdot \overline{MD} \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Secante } \overleftrightarrow{EF}: \\ \overline{IF} \cdot \overline{LE} \cdot \overline{MK} = \overline{IK} \cdot \overline{LF} \cdot \overline{ME} \quad (2) \end{aligned}$$

Pela potência de ponto, advém que:

$$\overline{MB} \cdot \overline{MC} = \overline{ME} \cdot \overline{MD}, \overline{LF} \cdot \overline{LA} = \overline{LD} \cdot \overline{LE} \text{ e } \overline{IA} \cdot \overline{IF} = \overline{IB} \cdot \overline{IC} \quad (4)$$

Multiplicando membro a membro as expressões (1), (2) e (3), e simplificando os fatores mostrados em (4), é obtida a igualdade:

$$\overline{IN} \cdot \overline{LJ} \cdot \overline{MK} = \overline{IK} \cdot \overline{LN} \cdot \overline{MJ}$$

Emprega-se aqui a recíproca do Teorema de Menelau no triângulo ILM , ou seja, os pontos J , N e K são colineares. Prova-se, assim, o Teorema de Pascal.

Nos estudos de grupo, conforme é possível observar em Dutra (2016), o desenvolvimento de uma atividade para esse teorema junto a um *software* gráfico permite estender os resultados iniciais sobre um hexágono para o pentágono, quadrilátero e triângulo, uma vez que um lado inscrito pode ter seus extremos infinitamente aproximados, e na medida em que a secante que ele determina passar ao estatuto de tangente ao círculo.

Assim, num exemplo, o seguinte resultado: “as tangentes tiradas pelos vértices de um triângulo, em relação ao seu círculo circunscrito encontram, cada uma, a reta do lado oposto do vértice, em 3 pontos alinhados”, que pode ser visto como um corolário do teorema de Pascal original.

2.4 Razão Anharmônica

A partir de agora, passa-se a tratar do tema da razão anharmônica, que é a base para alguns resultados projetivos importantes alcançados.

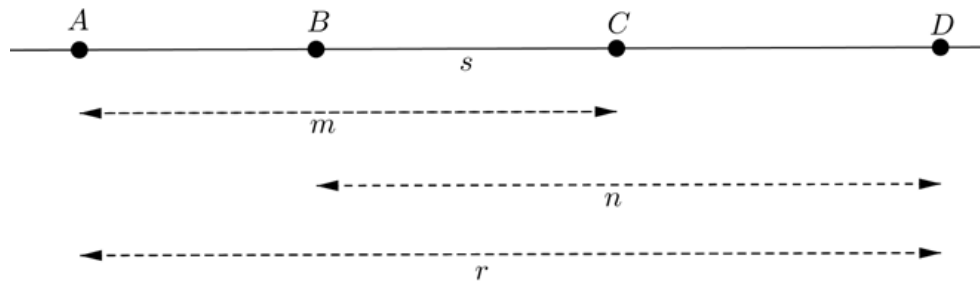
As informações contidas neste texto acerca da razão anharmônica foram adaptadas do livro "*Elementos de Geometria*", de Fic (1941), o qual constitui, segundo se acredita, uma importante fonte, porém este não discute o espaço projetivo de uma perspectiva axiomática. Para tanto, foi desenvolvida uma adaptação do enfoque vetorial do livro, o qual se crê, pela presente proposta, não seja adequado, pois aqui a geometria projetiva é considerada de uma forma sintética, valendo destacar que não se deixará de operar com segmentos de medidas reais. Para construção desta parte, foram consultadas várias obras, que são distintas no que tange à estruturação da teoria.

2.4.1 Definição

A literatura registra que Pappus, um matemático egípcio, realizou estudos sobre a razão anharmônica, também chamada de razão cruzada, ou razão dos 4 pontos, que é fundamental na constituição dessa teoria. A razão anharmônica de quatro pontos A , B , C , D em linha reta é o quociente que é obtido dividindo-se a razão das distâncias mensuradas entre o primeiro ponto e os dois últimos pela razão das distâncias do segundo ponto aos dois últimos.¹

¹ Definição dada por Chasles (1793 – 1880), em sua *Géométrie Superieure*.

Denota-se a razão anarmônica de quatro pontos colineares A, B, C e D pelo símbolo $(ABCD)$. Assim, pela definição feita, tem-se o que segue:



$$(ABCD) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \div \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{\overline{AD} \cdot \overline{BC}} = \frac{m \cdot n}{r \cdot s}$$

Um fato interessante é que o Ponto Ideal poderá ser um dos quatro de uma razão anarmônica. Sendo P_∞ o Ponto Ideal de uma reta que contém os pontos A, B e C , a razão anarmônica $(ABCP_\infty)$ será definida por:

$$(ABCP_\infty) = \lim_{X \rightarrow P_\infty} \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BX}}{\overline{AX} \cdot \overline{BC}} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BP_\infty}}{\overline{AP_\infty} \cdot \overline{BC}}$$

Já foi mostrado anteriormente que a razão $\frac{\overline{BP_\infty}}{\overline{AP_\infty}}$ é igual a 1. Assim, a razão anarmônica $(ABCP_\infty)$ será dada por $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$.

2.4.2 Razão Harmônica

Quatro termos formam uma proporção harmônica ou uma quádrupla harmônica quando a razão anarmônica assume por valor o real 1, ou seja:

$$(ABCD) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \div \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = 1 \rightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$$

Os pontos A e B são denominados conjugados harmônicos em relação aos pontos C e D .

Observação:

Os pontos C e D que dividem harmonicamente um segmento AB necessariamente separam o par de pontos A e B , dado que, no interior do segmento AB , só existe um ponto que o divide numa determinada razão.

Teorema:

"Quando duas razões anarmônicas iguais tem três pontos comuns, o quarto também será comum."

De fato:

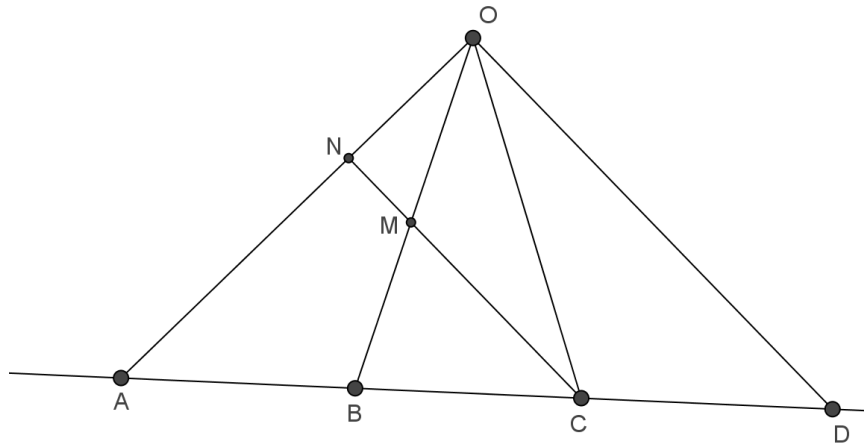
Se $(ABCD) = (ABCD')$ então $\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \div \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD'}} \div \frac{\overline{BC}}{\overline{BD'}}$. Suprimindo o fator comum $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$,

vem que:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AD'}}{\overline{BD'}}$$

Portanto, D e D' coincidem, pois, supondo-se C no segmento AB , D e D' estarão no prolongamento, e só existe um único ponto que divide o segmento numa determinada razão.

Uma vez determinada a razão entre as medidas de dois segmentos que seja igual a razão anarmônica de quatro pontos dados, sejam A, B, C e D os quatro pontos e $\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \div \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$ a razão considerada, é possível extrair que:



Tome-se o ponto O no exterior da reta que passa pelos quatro pontos e uma reta paralela a \overrightarrow{OD} , interceptando \overrightarrow{OA} em N e \overrightarrow{OB} em M , respectivamente. Os triângulos ANC e AOD são semelhantes, assim, $\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{DO}}$. Analogamente, para os triângulos BMC e BOD , tem-se que, $\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{CM}}{\overline{DO}}$. Dividindo-se membro a membro as duas expressões, obtém-se:

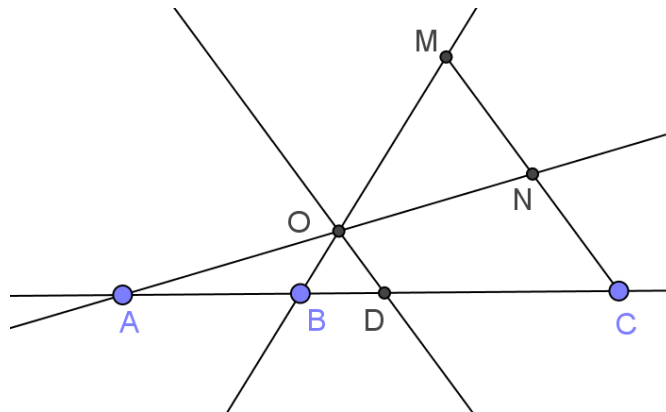
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \div \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{CM}}$$

Logo, $(ABCD) = \frac{\overline{CN}}{\overline{CM}}$. Está determinada, assim, uma razão das medidas de dois segmentos que resulta na razão anarmônica entre quatro pontos dados.

Resolução de Problema:

Sendo dados três pontos de uma razão anarmônica conhecida, determinar o quarto ponto.

Considerando-se abaixo três pontos A, B e C de uma razão anarmônica $\frac{m}{n}$ dada. No desenho ilustra-se a situação descrita com a escolha da razão anarmônica $\frac{1}{2}$.



Para se obter o quarto ponto é utilizada a ideia do problema anterior. Assim, são marcados dois pontos N e M , colineares com C , de forma que $\frac{\overline{CN}}{\overline{CM}} = \frac{1}{2}$. A escolha desses pontos é trivial, visto que é possível construir duas circunferências de raios u e $2u$. A interseção entre \overrightarrow{AN} e \overrightarrow{BM} gera o ponto O . Traçando-se uma reta paralela a \overrightarrow{MN} que passa pelo ponto O , obtém-se na reta o ponto D , que é solução do problema.

2.4.3 Feixes anarmônicos

Chama-se feixe anarmônico a figura formada por quatro raios retilíneos tirados por um só ponto no mesmo plano.

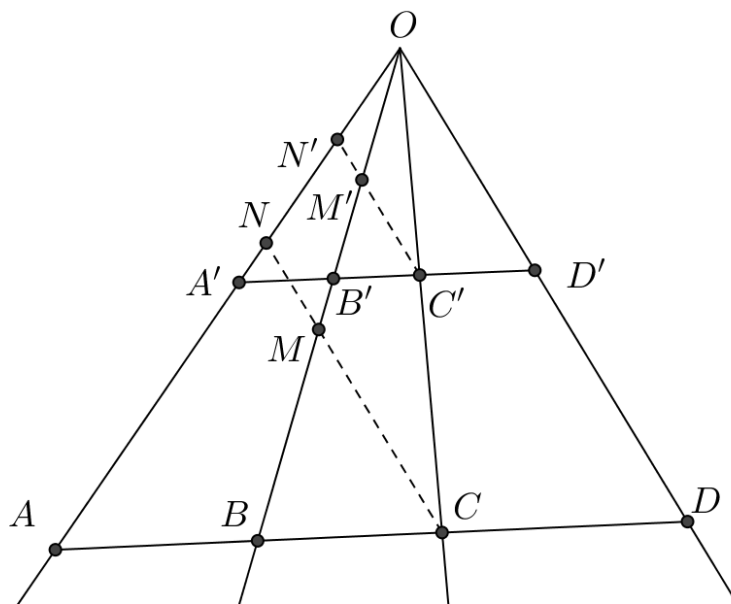
Teorema:

"Toda transversal que corta um feixe dado de quatro raios é encontrada em quatro pontos cuja razão anarmônica é constante."

Para provar basta mostrar que duas secantes quaisquer $ABCD, A'B'C'D'$ dão a mesma razão.

De fato:

No desenho abaixo, vê-se que a razão anarmônica $(ABCD) = \frac{\overline{CN}}{\overline{CM}}$, pelo que foi mostrado anteriormente. Sabe-se também da razão anarmônica que $(A'B'C'D') = \frac{\overline{C'N'}}{\overline{C'M'}}$.



Sendo paralelas as retas \overline{CN} e $\overline{C'N'}$, os triângulos NCO e $N'C'O'$ são semelhantes. Assim $\frac{\overline{CN}}{\overline{C'N'}} = \frac{\overline{MO}}{\overline{M'O}}$. Analogamente, ocorre para os triângulos MCO e $M'C'O'$, ou seja, $\frac{\overline{CM}}{\overline{C'M'}} = \frac{\overline{MO}}{\overline{M'O}}$. Dividindo-se membro a membro as duas expressões obtém-se o que segue:

$$\frac{\overline{CN}}{\overline{CM}} = \frac{\overline{C'N'}}{\overline{C'M'}}$$

Portanto, $(ABCD) = (A'B'C'D')$. O feixe é chamado de anarmônico, pois a razão anarmônica é uma invariante em um feixe de quatro raios. Pelo resultado acima, é possível deduzir, então, que a razão anarmônica num feixe de quatro raios é constante.

Na figura anterior, fica claro que os sistemas $ABCD$ e $A'B'C'D'$ são perspectivas, ou que ocorre a projeção central um do outro. Os resultados mostrados anteriormente podem ser escritos então da seguinte forma:

"A razão anarmônica conserva-se em perspectiva"

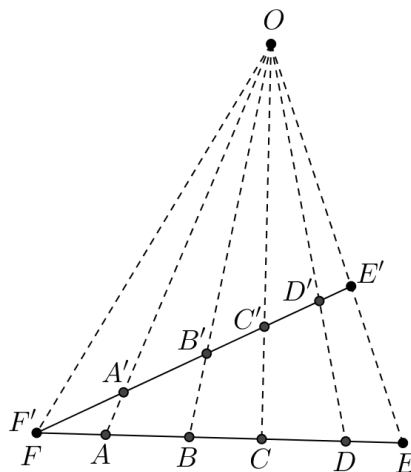
Ou, mais simplesmente ainda:

"A razão anarmônica é projetiva"

2.4.4 Pontos correspondentes

Pontos correspondentes são aqueles que ocupam a mesma ordem em duas séries de pontos que têm a mesma razão anarmônica.

Na figura abaixo, sendo $(ABCD) = (A'B'C'D')$, vê-se que A e A' são correspondentes, e o mesmo acontece com B e B' .



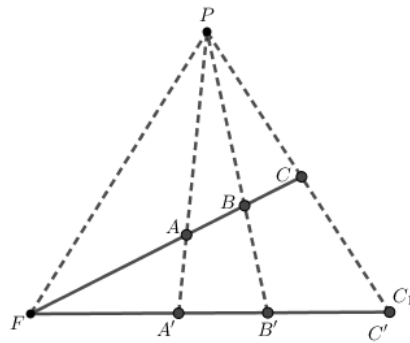
Sobre duas retas pode ser considerado um número qualquer de pontos correspondentes; a razão anarmônica de quatro desses pontos é igual a de quatro pontos correspondentes. O ponto F comum a duas divisões anarmônicas perspectivas chama-se ponto duplo ou ponto unido.

Teorema

"Duas divisões que têm a mesma razão anarmônica e um ponto comum são perspectivas."

Demonstração:

Considere-se na figura abaixo duas divisões $FABC$ e $FA'B'C'$ que possuem um ponto em comum e a mesma razão anarmônica.



Nela, as retas AA' e BB' se encontram em um ponto P . Seja C_1 o ponto obtido pela interseção das retas FA' e PC . Cria-se, assim, um feixe anarmônico, e pelo que já foi exposto, $(FABC) = (FA'B'C_1)$. Mas, por hipótese $(FABC) = (FA'B'C')$, ou seja, $(FA'B'C_1) = (FA'B'C')$. Assim:

$$\frac{\overline{FB'} \cdot \overline{A'C_1}}{\overline{FC_1} \cdot \overline{A'B'}} = \frac{\overline{FB'} \cdot \overline{A'C'}}{\overline{FC'} \cdot \overline{A'B'}} \rightarrow \frac{\overline{A'C_1}}{\overline{FC_1}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{FC'}}$$

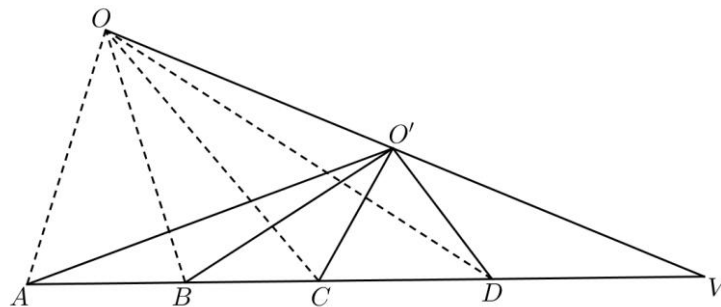
Como é único o ponto no prolongamento de FA' que o divide numa determinada razão, C_1 e C' são coincidentes.

2.4.5 Razão de quatro raios

A razão anarmônica de quatro raios do mesmo feixe é a razão dos quatro pontos que determina uma secante qualquer. Escreve-se $(O, ABCD) = (O, A'B'C'D')$.

Teorema:

“Dois feixes têm a mesma razão quando têm uma secante comum”.



Demonstração:

Dois feixes têm uma secante comum quando os raios se cortam, dois a dois, em pontos A, B, C, D , situados em uma mesma reta. A razão do feixe de centro O é dado por $(ABCD)$; o mesmo se dá com o feixe O' ; logo $(O, ABCD) = (O', ABCD)$.

Definição:

Dois feixes anarmônicos que possuem uma secante em comum são denominados de perspectivos, ou seja, dois feixes perspectivos possuem a mesma razão anarmônica.

Observação:

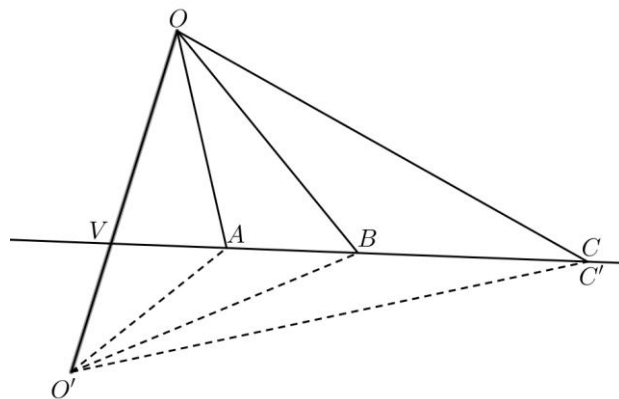
Os dois feixes têm um raio comum OO' . O raio comum de dois feixes chama-se raio duplo ou raio unido.

Teorema:

“Dois feixes que têm um raio comum e a mesma razão anarmônica são perspectivos”.

Demonstra-se, a seguir, que os raios correspondentes se cortam dois a dois em pontos situados em linha reta.

Sejam dois feixes ,tendo O, O' como vértices respectivos e OO' como raio comum.



Dois pares de raios correspondentes cortam-se em A e B , por exemplo. Tome-se então a reta AB .

Seja V o ponto onde AB intercepta OO' , C o ponto onde esta reta corta o raio OC e C' o ponto onde ela corta OC' . Basta provar que C e C' coincidem.

As razões anarmônicas dos feixes O e O' são $(VABC)$ e $(VABC')$, respectivamente, que por hipóteses são coincidentes, ou seja, $(VABC) = (VABC')$.

Logo os pontos C e C' são coincidentes.

Portanto, dois feixes que têm um raio comum e a mesma razão anarmônica são perspectivos.

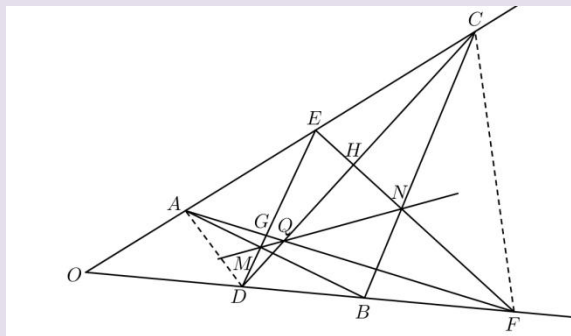
Serão demonstradas, a seguir, algumas aplicabilidades da razão anarmônica. Em geral, ela é utilizada na demonstração de resultados que envolvem a colinearidade de pontos em um feixe de retas.

Em seu livro, Fic comenta, sem entrar em detalhes, que a razão anarmônica serve como base para Chasles no livro “Tratado de Geometria Superior” e também no “Tratado das Cônicas”.

Problemas

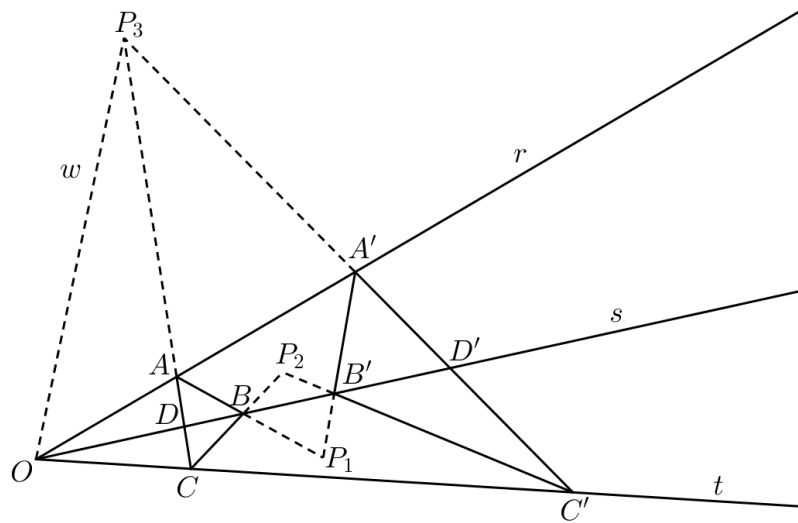
1) Demonstre o Teorema de Pappus, enunciado abaixo.

“Quando um hexágono tem três de seus vértices sobre uma reta, e os outros três vértices sobre outra reta, os três pontos de encontro dos lados opostos estão em linha reta”.



2) Demonstre o Teorema de Desargues, enunciado abaixo.

“Quando dois triângulos têm os vértices dois a dois sobre três retas concorrentes, os três lados cortam-se dois a dois em três pontos situados em uma mesma reta.”



Soluções

1)

O feixe centrado em A , de raios AO, AD, AB e AF é perspectivo em relação ao de centro em C , de raios CO, CD, CB e CF , já que possuem a secante $ODBF$ em comum. A reta que passa pelos pontos E e D intersectam o feixe de centro em A nos pontos E, D, M e G . A reta que passa pelos pontos E e F intersecta o feixe de centro em C nos pontos E, H, N e F . Como os feixes são perspectivos $(EDMG) = (EHNF)$. Observa-se que as divisões $EDMG$ e $EHNF$ possuem a mesma razão anarmônica e um ponto em comum E . Logo, pelo que se vê, elas formam uma perspectiva, ou seja, as retas DH, MN e GF se encontram num único ponto. Portanto, o ponto Q pertence à reta MN , demonstrando o Teorema de Pappus.

2)

Observe o feixe anarmônico centrado em O e pelas retas w, r, s e t . Como a razão anarmônica em um feixe é constante, $(P_3ADC) = (P_3A'D'C')$. Os feixes centrados em B , de raios BP_3, BA, BD e BC , e o outro de centro B' , de raios $B'P_3, B'A', B'D'$ e $B'C'$ são perspectivos, pois possuem a mesma razão anarmônica, além do raio comum BB' . Assim, as interseções das retas BP_3 e $B'P_3, BA$ e $B'A', BC$ e $B'C'$ se dão em pontos que são colineares. Logo, P_3, P_1 e P_2 são colineares. Está assim demonstrado o Teorema de Desargues.

2.5 Divisão Harmônica

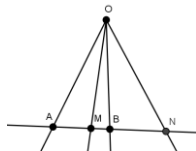
Nesta seção apresenta-se a divisão harmônica como um caso particular da razão anarmônica e uma situação euclidiana que será confrontada com outra de forma projetiva. Na literatura sobre o tema, percebe-se poucas informações a respeito da obtenção geométrica da média harmônica entre as medidas de dois segmentos. Porém os conceitos aqui abordados poderão mostrar como os teoremas projetivos podem colaborar numa prática euclidiana.

2.5.1 Definição

Diz-se que um segmento AB é dividido harmonicamente por dois pontos M e N quando a razão das distâncias do ponto M aos pontos A e B é igual a razão das distâncias de N aos mesmos dois pontos, isto é, quando existe a relação:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{BN}}$$

Portanto, o segmento MN também é dividido harmonicamente pelos pontos A e B . Os pontos M e N serão denominados conjugados harmônicos em relação aos pontos A e B . Chama-se feixe harmônico a figura obtida com a união de um ponto qualquer O aos pontos A, B, M, N de um segmento dividido harmonicamente.



Cada secante OA, OM , etc., é chamada raio do feixe. OM e ON são raios conjugados, assim como OA e OB .

Os geômetras da antiguidade apresentavam a relação harmônica de uma outra forma. Abaixo, segue demonstrada a relação algébrica, na qual o inverso da medida do segmento AB será escrita em função das medidas de AM e AN .

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{BN}} \rightarrow \frac{\overline{AM}}{\overline{AB} - \overline{AM}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AN} - \overline{AB}} \rightarrow \overline{AM} \cdot (\overline{AN} - \overline{AB}) = \overline{AN} \cdot (\overline{AB} - \overline{AM}) \rightarrow$$

$$\overline{AM} \cdot \overline{AN} - \overline{AM} \cdot \overline{AB} = \overline{AN} \cdot \overline{AB} - \overline{AN} \cdot \overline{AM} \rightarrow 2 \cdot \overline{AM} \cdot \overline{AN} = \overline{AB} \cdot (\overline{AM} + \overline{AN}) \rightarrow$$

$$\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AM} + \overline{AN}}{\overline{AM} \cdot \overline{AN}}$$

$$\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AM}} + \frac{1}{\overline{AN}}$$

Assim, o inverso da medida de AB é a média aritmética dos inversos das medidas de AM e AN . O segmento AB é denominado média harmônica de \overline{AM} e de \overline{AN} .

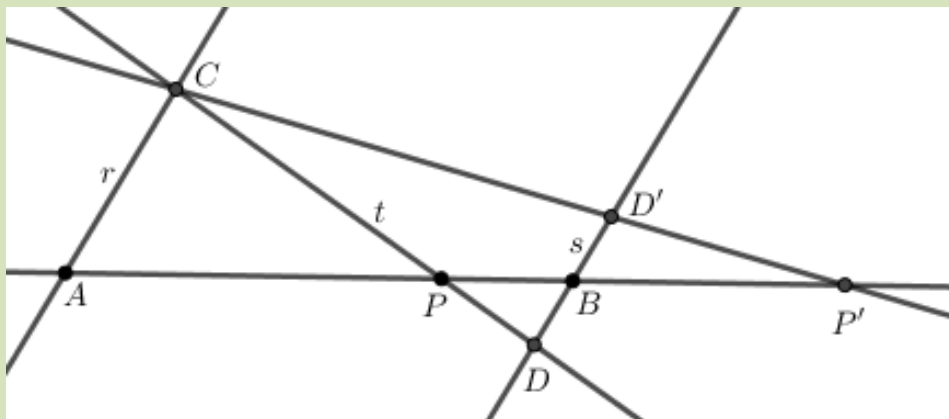
Problema

Utilizando paralelas e compasso obtenha o conjugado harmônico de P em relação aos pontos A e B .



Solução

Observe a figura abaixo



Seja r uma reta qualquer passando pelo ponto A , s uma paralela a ela, passando pelo ponto B , e t uma reta qualquer que intersecte r e s nos pontos C e D , respectivamente.

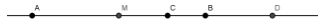
Pela figura, temos que os triângulos APC e BPD são semelhantes. Assim $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}}$.

Considere o ponto D' na reta s , de forma que $\overline{DB} = \overline{D'B}$ e P' sendo o ponto de encontro das retas CD' e AB .

Os triângulos $AP'C$ e $BP'C$ também são semelhantes. Assim, $\frac{\overline{AP'}}{\overline{BP'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BD'}}$. Como $\overline{DB} = \overline{D'B}$ concluímos que $\frac{\overline{AP'}}{\overline{BP'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}}$. Portanto, $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AP'}}{\overline{BP'}}$, ou seja, P' é o conjugado harmônico de P em relação aos pontos A e B .

Teorema

"A metade da medida de um segmento é a média geométrica entre as distâncias do seu ponto médio a dois pontos que o dividem harmonicamente."



Na figura acima, podem ser encontrados os dois pontos A e B , seu ponto médio M e dois pontos C e D que o dividem harmonicamente. O objetivo aqui é mostrar que $\overline{AM}^2 = \overline{MC} \cdot \overline{MD}$.

E de fato:

Sabe-se que $\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}}$. Assim:

$$\frac{2}{2 \cdot \overline{AM}} = \frac{1}{\overline{AM} + \overline{MC}} + \frac{1}{\overline{AM} + \overline{MD}} \rightarrow \frac{1}{\overline{AM}} = \frac{\overline{AM} + \overline{MC} + \overline{AM} + \overline{MD}}{(\overline{AM} + \overline{MC}) \cdot (\overline{AM} + \overline{MD})} \rightarrow$$

$$(\overline{AM} + \overline{MC}) \cdot (\overline{AM} + \overline{MD}) = \overline{AM} \cdot (2\overline{AM} + \overline{MC} + \overline{MD}) \rightarrow$$

$$\overline{AM}^2 + \overline{AM} \cdot \overline{MD} + \overline{AM} \cdot \overline{MC} + \overline{MC} \cdot \overline{MD} = 2 \cdot \overline{AM}^2 + \overline{AM} \cdot \overline{MC} + \overline{AM} \cdot \overline{MD} \rightarrow$$

$$\overline{AM}^2 = \overline{MC} \cdot \overline{MD}$$

Verifica-se que a recíproca desse teorema também é verdadeira, ou seja, sendo M o ponto médio do segmento AB , e se $\overline{AM}^2 = \overline{MC} \cdot \overline{MD}$, então C e D dividem harmonicamente o segmento AB .

De fato:

$$\overline{AM}^2 = \overline{MC} \cdot \overline{MD} \rightarrow \frac{\overline{AM}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{MD}}{\overline{AM}} \rightarrow \frac{\overline{AM}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{MD}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{AM} + \overline{MD}}{\overline{MC} + \overline{AM}} \rightarrow \frac{\overline{AM}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{MD}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}$$

Sendo M o ponto médio, observa-se que $\overline{AM} = \overline{BM}$. Substituindo na expressão seguinte, obtém-se:

$$\overline{BM}^2 = \overline{MC} \cdot \overline{MD} \rightarrow \frac{\overline{BM}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{MD}}{\overline{BM}} \rightarrow \frac{\overline{BM}}{\overline{MD}} = \frac{\overline{MC}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{BM} - \overline{MC}}{\overline{MD} - \overline{BM}} \rightarrow \frac{\overline{BM}}{\overline{MD}} = \frac{\overline{MC}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$$

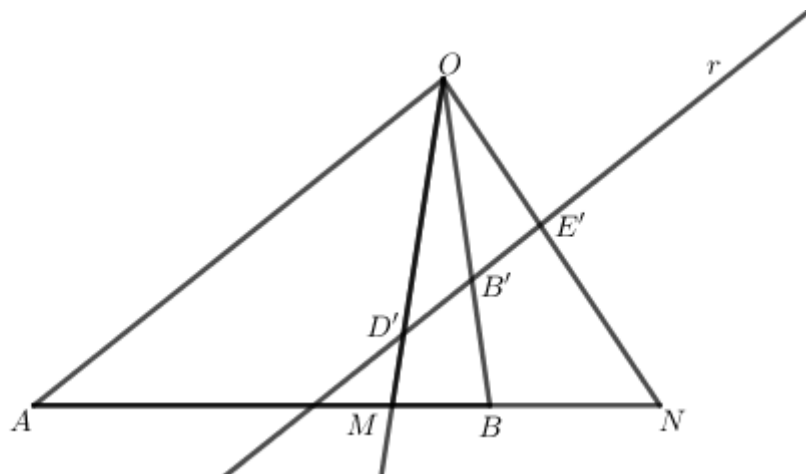
Como $\frac{\overline{AM}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{MC}}$ é certo que $\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}$, ou seja, C e D dividem harmonicamente o segmento BD .

Teorema:

"Toda secante paralela a um dos raios de um feixe harmônico é dividida em duas partes iguais pelos três raios"

Demonstração:

Na figura abaixo, observa-se o segmento AB , separado harmonicamente pelos pontos M e N .



Seja O um ponto ordinário do plano projetivo pelo qual passa um feixe harmônico de raios OA, OB, OM e ON . Como os pontos formam uma quádrupla harmônica, então $(ABMN) = 1$.

Seja r uma reta paralela à \overleftrightarrow{OA} . O objetivo em questão é mostrar que B' é o ponto médio do segmento $D'E'$.

Sabe-se que a razão anarmônica em um feixe de quatro raios é sempre constante. Sendo r e \overrightarrow{OA} paralelas, fica posto que elas concorrem no seu Ponto Ideal (P_∞). Assim $(P_\infty B'D'E') = 1$, ou seja:

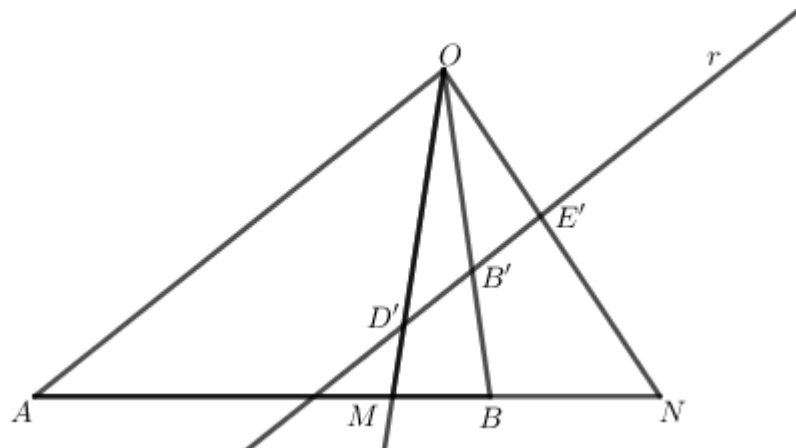
$$\frac{\overline{P_\infty D'}}{\overline{P_\infty E'}} \div \frac{\overline{B'D'}}{\overline{B'E'}} = 1$$

Já foi mostrado que $\frac{\overline{P_\infty D'}}{\overline{P_\infty E'}} = 1$, isto é, $\frac{\overline{B'D'}}{\overline{B'E'}} = 1$. Logo, B' é o ponto médio de $D'E'$.

A recíproca deste teorema também é verdadeira. Um feixe será harmônico quando uma paralela a um dos raios intersecta os outros três, de forma que um deles é o médio dos outros dois.

Demonstração:

No desenho a seguir pode ser encontrada a situação descrita na hipótese.



Sendo r uma reta paralela a \overrightarrow{OA} e B' o ponto médio de $D'E'$, decorre que a razão anarmônica do feixe de retas de centro em O e raios OA, OB, OM e ON é $(P_\infty B'D'E') = \frac{\overline{P_\infty D'}}{\overline{P_\infty E'}} \div \frac{\overline{B'D'}}{\overline{B'E'}}$. Por hipótese, B' é o ponto médio de $D'E'$. Como $\frac{\overline{P_\infty D'}}{\overline{P_\infty E'}} = 1$, deriva que $(P_\infty B'D'E') = 1$. Logo, o feixe é harmônico. Pode se concluir, assim, que $(ABMN) = 1$, ou seja, os pontos A e B são divididos por M e N harmonicamente.

2.5.2 Quadrilátero completo

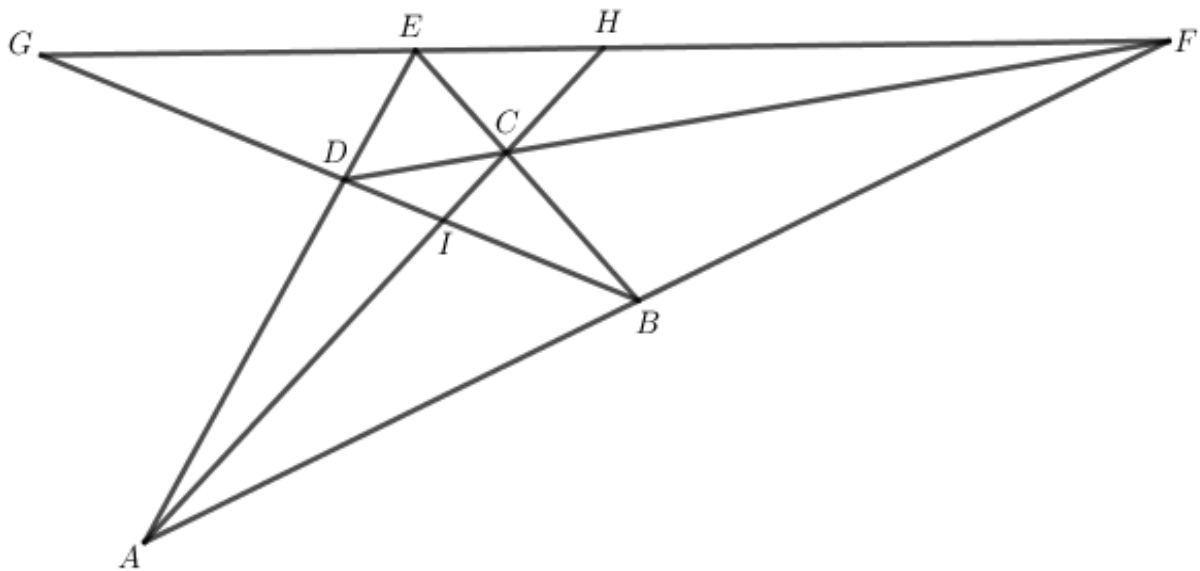
Denomina-se de quadrilátero completo a figura obtida prolongando-se os lados opostos de um quadrilátero. Será de agora em diante denominado de terceira diagonal o segmento que une os pontos de encontro dos lados opostos.

Teorema:

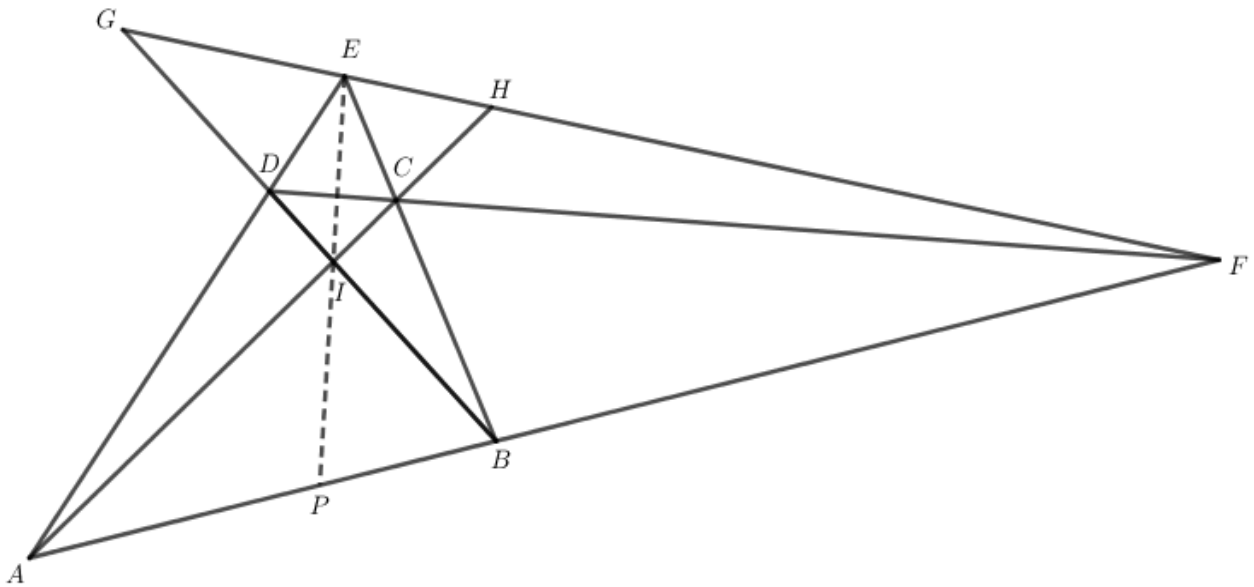
"Em todo quadrilátero completo, cada diagonal é dividida harmonicamente pelas outras duas."

Demonstração:

Abaixo, apresenta-se um quadrilátero $ABCD$ e suas diagonais AC , BD e EF , além dos pontos de encontros demarcados H , G e I .



Seja P o ponto do segmento AB que intersecta a reta EI .



Mostra-se que P e F dividem harmonicamente o segmento AB .

No triângulo ABE , utiliza-se o Teorema de Menelau pela secante DCF , assim:

$$\overline{AD} \cdot \overline{BF} \cdot \overline{EC} = \overline{AF} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{ED}$$

Utilizando-se o Teorema de Ceva no triângulo ABE , decorre que:

$$\overline{AD} \cdot \overline{BP} \cdot \overline{EC} = \overline{AP} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{ED}$$

Dividindo-se membro a membro as expressões anteriores, obtém-se:

$$\frac{\overline{BF}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AP}} \rightarrow \frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{BF}}$$

Logo, os pontos P e F dividem harmonicamente o segmento AB , ou seja, $(ABPF) = 1$.

Considerando-se o feixe harmônico centrado em E , de raios EA , EB , EP e EF , é possível concluir, com a ajuda da figura que, $(ACIH) = (ABPF) = 1$, ou seja, as diagonais BD e EF intersectam a diagonal AC em pontos que a dividem harmonicamente.

Procedendo-se de forma análoga é dado concluir que $(DBIG) = 1$, ou seja, as diagonais AC e EF intersectam a diagonal BD em pontos que a dividem harmonicamente.

De forma análoga ao que foi feito com os pontos P e H , poderia ter se iniciado a ilustração mostrando que H e G dividem harmonicamente o segmento EF . Utilizar-se-ia, para tanto, os Teoremas de Menelau no triângulo AEF pela secante BDG e o Teorema Ceva.

Portanto, as diagonais AC e BD intersectam a diagonal EF em pontos que a dividem harmonicamente.

Problemas

1) Determine o conjugado harmônico do ponto P em relação aos pontos A e B , utilizando somente a régua.



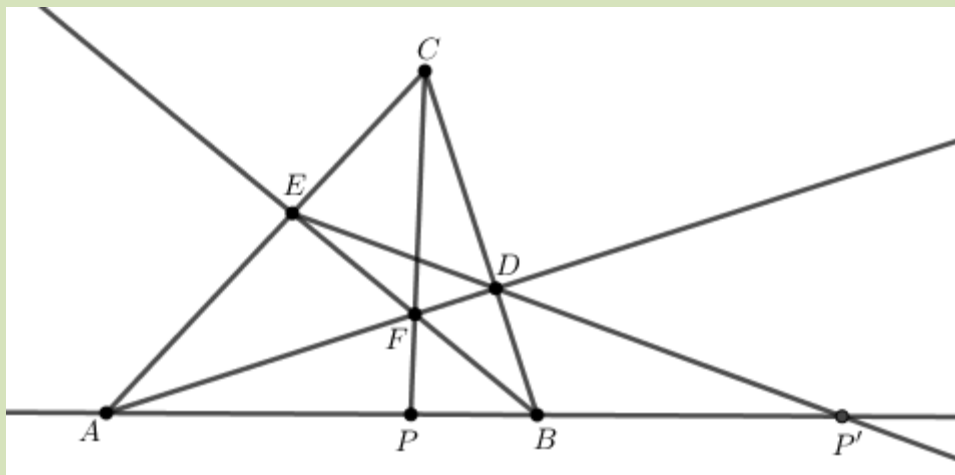
2) Obtenha um segmento cuja medida seja a da média harmônica entre u e v .



Solução

1)

Utilizaremos o quadrilátero completo para obter o conjugado harmônico de P em relação aos pontos A e B . Observe o desenho abaixo:



Tome-se um ponto C qualquer fora da reta que passa por A e B formando o triângulo ABC . Traçando a ceviana CP , marca-se nela o ponto F , além das semirretas BF e AF , que

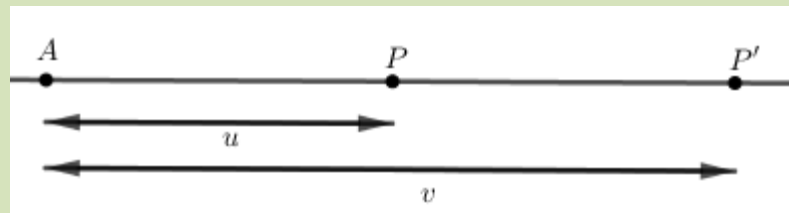
intersectam os lados do triângulo nos pontos E e D . A semirreta ED intersecta a reta AB no ponto P' , conjugado harmônico de P em relação aos pontos A e B . Observa-se que nesta construção só foi utilizada a régua. Se levarmos este desenho para o GeoGebra e movimentarmos os pontos C ou F , percebemos que o ponto P' é fixo.

2)

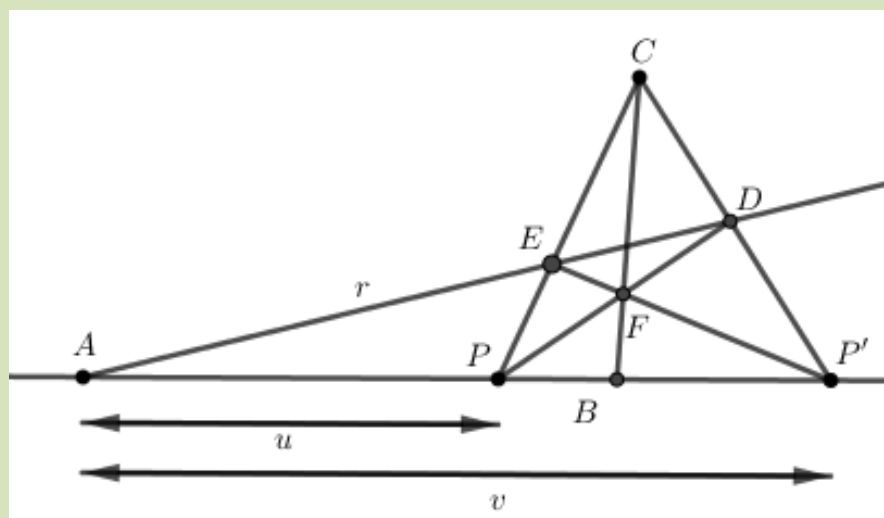
Já foi visto que se quatro pontos A, P, B e P' formam uma quádrupla harmônica, então:

$$\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AP}} + \frac{1}{\overline{AP'}}$$

E que a medida do segmento AB é definida como sendo a média harmônica das medidas dos segmentos AP e AP' . Assim, para se resolver este problema adapta-se o resultado ao enunciado.



Basta tomar dois pontos P e P' com $\overline{AP} = u$ e $\overline{AP'} = v$ e obter o conjugado harmônico de A em relação aos pontos P e P' . A ferramenta utilizada para obter o conjugado harmônico será o quadrilátero completo. Observe a figura abaixo:



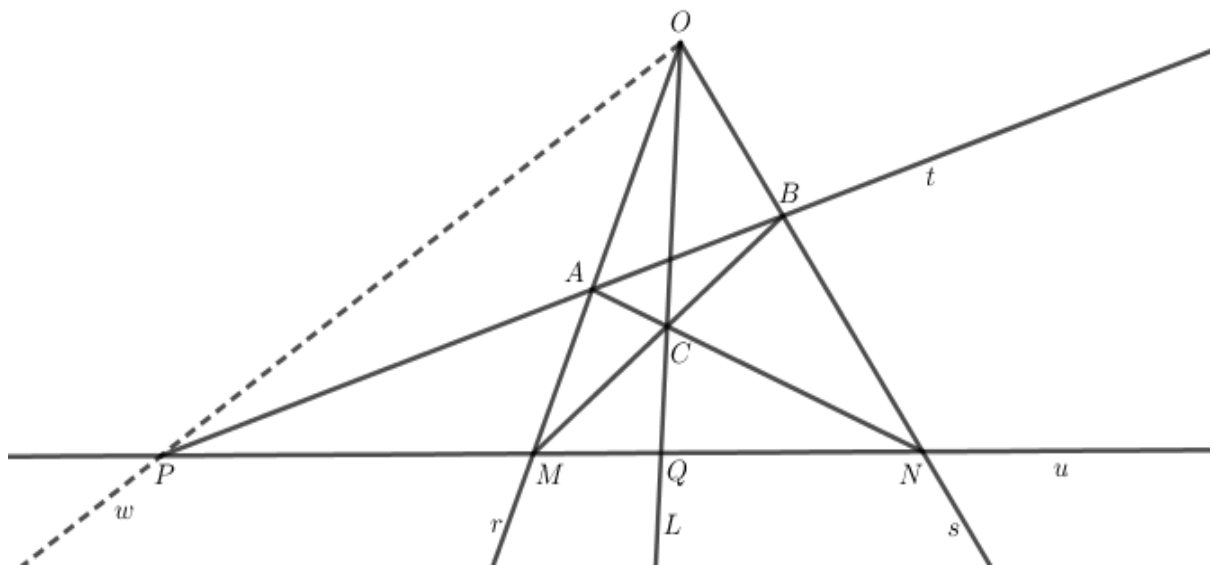
Escolhendo aleatoriamente um ponto C , fora da reta AP , formamos o triângulo PCP' . Traçando uma semirreta r que intersecta os lados do triângulo nos pontos E e D , obtém-se

também o ponto F , ponto de encontro das diagonais do quadrilátero $EDPP'$. A semirreta CF intersecta a reta AP no ponto B , conjugado harmônico de A em relação aos pontos P e P' . A medida de AB é resultado da média harmônica entre u e v .

2.6 Polo e Polar

Teorema:

"O lugar geométrico dos pontos L , conjugados harmônicos do ponto P em relação às interseções dos lados de um ângulo dado e das secantes tiradas por este ponto P , é uma reta que passa pelo vértice do ângulo e pelo ponto de encontro das diagonais dos quadriláteros formados por duas secantes quaisquer. "



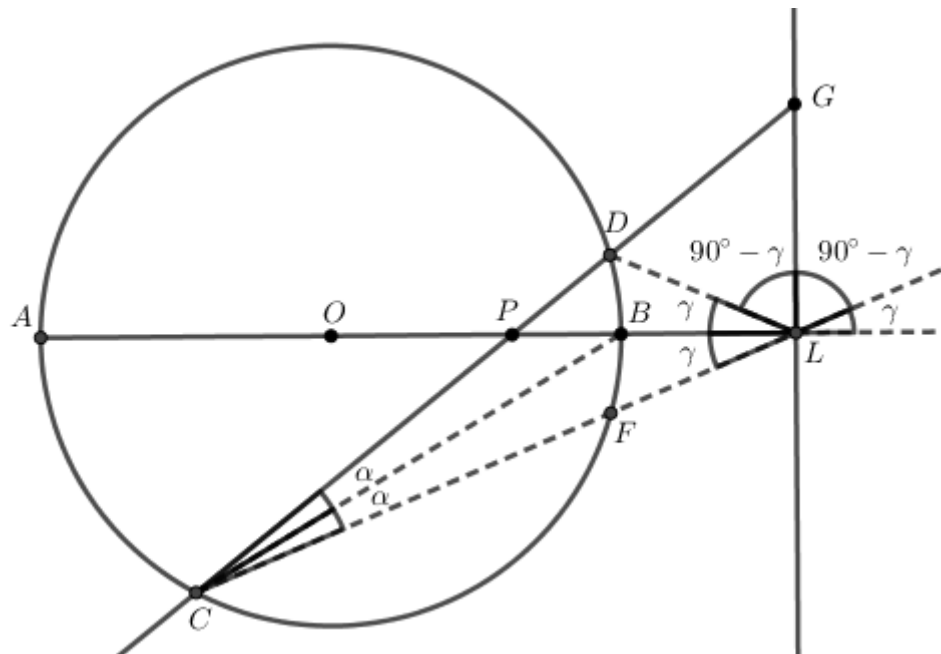
Considerando-se o ângulo de vértice O pelas semirretas r e s , são traçadas duas secantes t e u , que passam pelo ponto P , intersectando os lados do ângulo nos pontos A , B , M e N . Forma-se, assim, o quadrilátero $ABMN$, além do quadrilátero completo $ABMNPO$, já que P e O são os pontos de encontro dos lados opostos. Sendo C o ponto de encontro das diagonais AN e BM , é dado pelo teorema anterior, que o feixe de retas centrado em O de raios w, r, L e s é harmônico. Portanto, a reta L é o lugar geométrico dos pontos que são conjugados harmônicos do ponto P em relação aos pontos de encontro do ângulo descrito com as secantes traçadas por P .

Definição:

O ponto P chama-se polo da reta OL , em relação ao ângulo de vértice O pelas semirretas r e s . A reta OL é a polar do ponto P , ou seja, a polar de um ponto dado é o lugar geométrico do conjugado harmônico de P em relação aos pontos de encontro de uma secante qualquer com as semirretas r e s .

Teorema:

"Por um ponto P , dado no plano de um círculo, tira-se uma secante qualquer PDC ; o lugar do ponto G , conjugado harmônico do ponto P em relação às extremidades da corda CD , é uma reta perpendicular ao diâmetro que passa pelo ponto P ."



Demonstração:

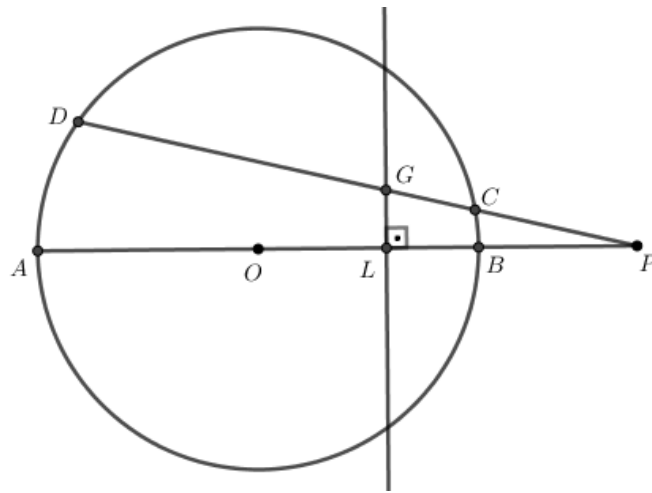
Sendo P um ponto do interior do círculo, considera-se uma reta que passa pelo centro O e pelo ponto P , intersectando-os nos pontos A e B . Utilizando-se o quadrilátero completo, pode ser obtido o ponto L , que é o conjugado harmônico de P em relação aos pontos A e B . Considere-se agora a reta perpendicular ao diâmetro passando por L . Uma secante qualquer PDC intersecta essa reta no ponto G .

Sendo A e B os conjugados harmônicos de P e L , vê-se que o círculo de diâmetro AB é o círculo de Apolônio, já tratado em seções anteriores. Assim, decorre que a reta BC é bissetriz do ângulo externo $P\hat{C}L$ e que as medidas das cordas DB e BF são iguais. Os pontos

B e O equidistam de D e F e, portanto, a reta AB é mediatriz do segmento BF . Desta feita, sobrevém que o ponto L equidista de D e F , ou seja, $D\hat{L}B = B\hat{L}F = \gamma$. Observa-se, portanto, que, no triângulo CDL , a reta LP é bissetriz interna e a reta LG é bissetriz externa, ou seja, os pontos C, D, P e G formam uma quádrupla harmônica.

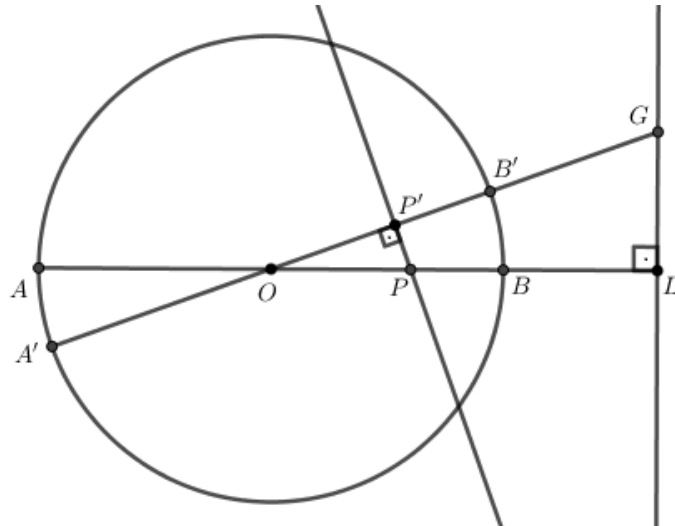
Observação:

De forma análoga ao que foi feito, é possível demonstrar o caso em que o ponto P está fora do círculo. A polar de P é a reta perpendicular ao diâmetro que passa pelo ponto L , conjugado harmônico de P em relação aos pontos A e B abaixo, e que a secante PCD intersecta a polar no ponto G , que é conjugado harmônico de P em relação aos pontos C e D .



Teorema:

"Se um ponto G pertence à polar de um ponto P no interior de um círculo centrado em O , então o ponto P pertence à polar de G , ou seja, a relação de polaridade é recíproca."



Demonstração:

Se o ponto G for o conjugado harmônico de P em relação aos pontos A e B , então é claro que P é seu conjugado harmônico e a polar de G passaria por P .

Se G for um ponto distinto de L na polar de P , e traçando-se a reta que passa por O e G , além da perpendicular a essa que passa por P , obtém-se o ponto P' . Os triângulos $OP'P$ e OLG são semelhantes, ou seja:

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OG}} = \frac{\overline{OP'}}{\overline{OL}} \rightarrow \overline{OG} \cdot \overline{OP'} = \overline{OP} \cdot \overline{OL} = R^2$$

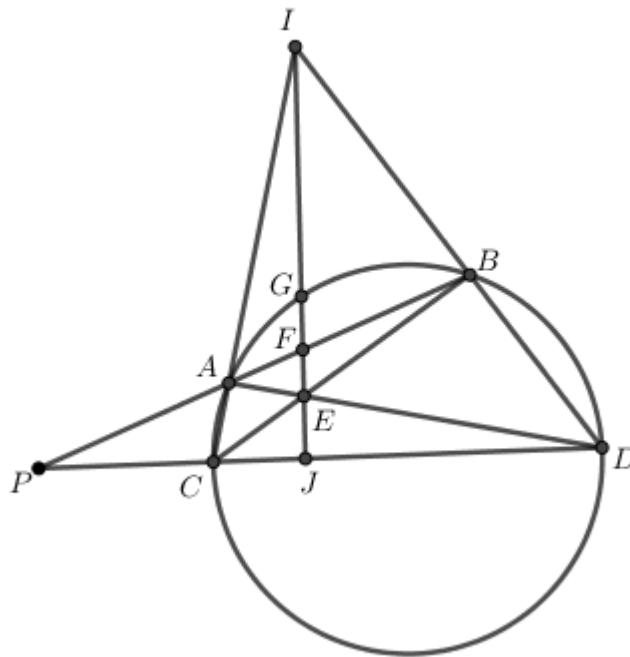
Logo, G e P' são conjugados harmônicos em relação aos pontos A' e B' . Logo, P pertence à polar de G .

Observação:

Quando o ponto P pertence à circunferência, ele coincide com seu conjugado harmônico, e assim a polar de um ponto que pertence à circunferência é uma reta tangente à circunferência que passa por P .

Teorema:

"Se, por um ponto dado, tiram-se duas secantes quaisquer, as retas que unem duas a duas as extremidades das cordas se cortam sobre a polar do ponto dado."



Na figura acima, considerando-se o ponto P e as secantes PAB e PCD , e unindo-se as extremidades das cordas AB e CD , obtém-se os pontos E e I . A reta que passa pelos pontos E e I possibilita a marcação dos pontos G , F e J . Percebe-se que o quadrilátero $ABCDPI$ é completo, ou seja, o feixe centrado em I , de raios IP , IC , IJ e ID , é harmônico, ou seja, F e J são conjugados harmônicos do ponto P em relação aos pontos A e B e C e D , respectivamente. Como já foi mostrado em seções anteriores, tais pontos só podem pertencer à polar de P , pela unicidade do conjugado harmônico.

Observação:

O ponto G , além de pertencer à circunferência, pertence também à polar de P . Logo, pelo que foi visto anteriormente, o ponto P pertence à polar de G , que é uma reta tangente à circunferência em G . Portanto, cria-se mais uma possibilidade para traçar a reta tangente à circunferência que passa por um ponto P fora dela, porém, sem a utilização do compasso.

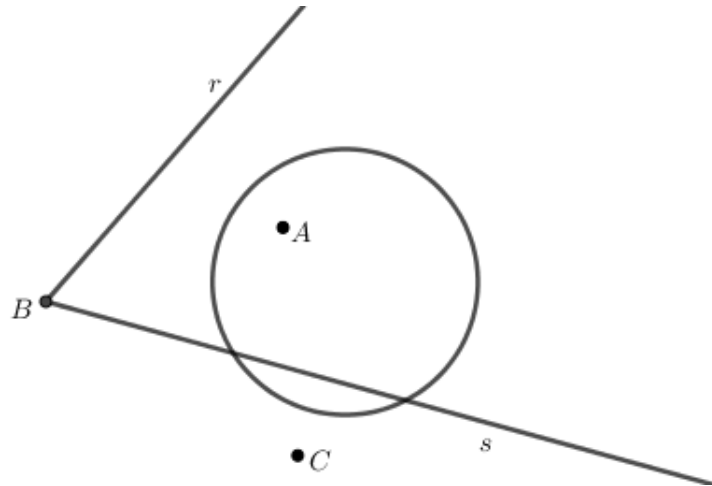
Teorema:

"O vértice de um ângulo tem para polar a reta que une os polos dos lados deste ângulo, e a reta que une os dois pontos dados tem para polo o ponto de encontro das polares desses dois pontos."

Demonstração:

Seja B o vértice do ângulo pelas semirretas r e s . Seja A o polo da reta r , e C o polo da reta s em relação à circunferência. Como o ponto B pertence a r , ocorre, pela reciprocidade

da polar, que A pertence à polar de B . Analogamente, acontece com o ponto C . Logo, a polar de B é uma reta que passa pelos polos de r e s .



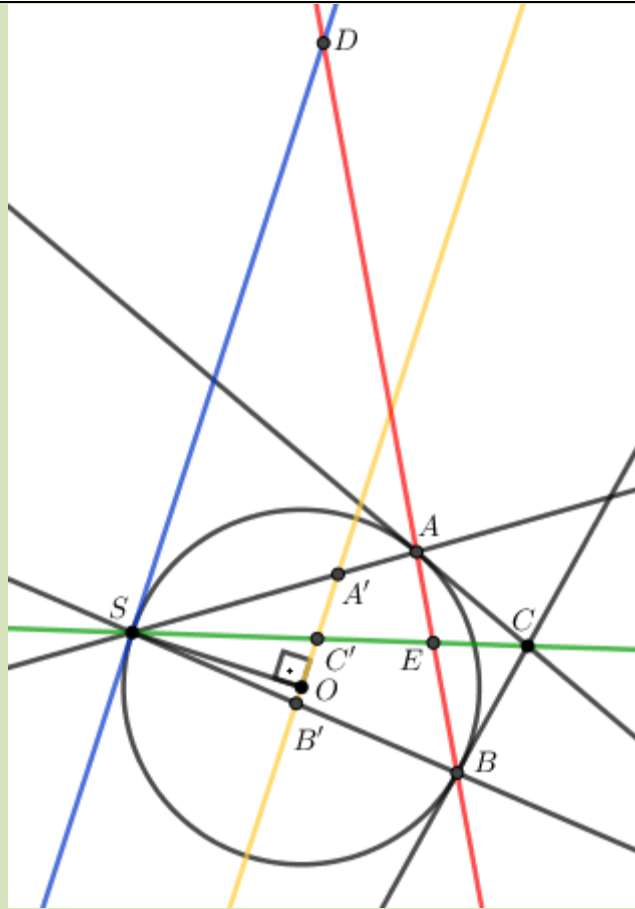
Problema

" As tangentes a uma circunferência de centro O , traçadas por um ponto exterior C , tocam a circunferência nos pontos A e B . Seja S um ponto qualquer da circunferência. As retas SA, SB e SC cortam o diâmetro perpendicular à reta SO nos pontos A', B' e C' , respectivamente.

Prove que C' é o ponto médio de $A'B'$ "

Solução

Observe a figura abaixo com os elementos citados no problema.



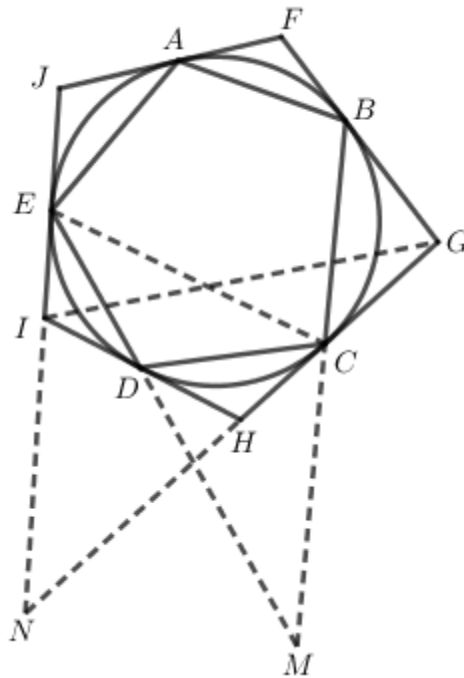
Encoraja-se o leitor a resolver este problema com ferramentas euclidianas. Vamos resolvê-lo de forma bem simples com o que foi visto sobre reciprocidade polar.

A reta em vermelho é a polar de C , pois ele pertence à polar de A e de B , ou seja, a reta que passa por A e B é a polar de C . Em azul, traçamos a polar de S , que é tangente à curva em S . O ponto D pertence à polar de S e de C , assim, a reta verde é a polar de D . Pode-se concluir que os pontos $DAEB$ formam uma quádrupla harmônica, isto é, o feixe centrado em S de raios SB, SE, SA e SD é harmônico, pois uma secante possui razão anarmônica $(DEAB) = 1$. A reta em laranja é paralela à azul, pois ambas são perpendiculares ao raio. Considerando-se a secante em laranja encontrada no feixe, temos que $(P_{\infty}C'A'B') = 1$, ou seja, $\frac{C'A'}{C'B'} = 1$. Logo, C' é o ponto médio do segmento $A'B'$.

Definição:

Dois polígonos, um dos quais está circunscrito a um círculo, e o outro é formado unindo-se dois a dois os pontos de contato dos lados consecutivos do primeiro, chamam-se polígonos polares recíprocos.

Os vértices de um deles são os polos dos lados correspondentes de um outro polígono; reciprocamente, os lados de um deles são as polares dos vértices correspondentes do outro.



Assim, percebe-se que F é o polo da reta AB , G é o polo de BC e etc. O ponto M é o polo da reta IG , pois M pertence à polar de I , que é a reta ED , além de pertencer à polar de G , que é a reta BC . Logo, a reta IG é a polar de M .

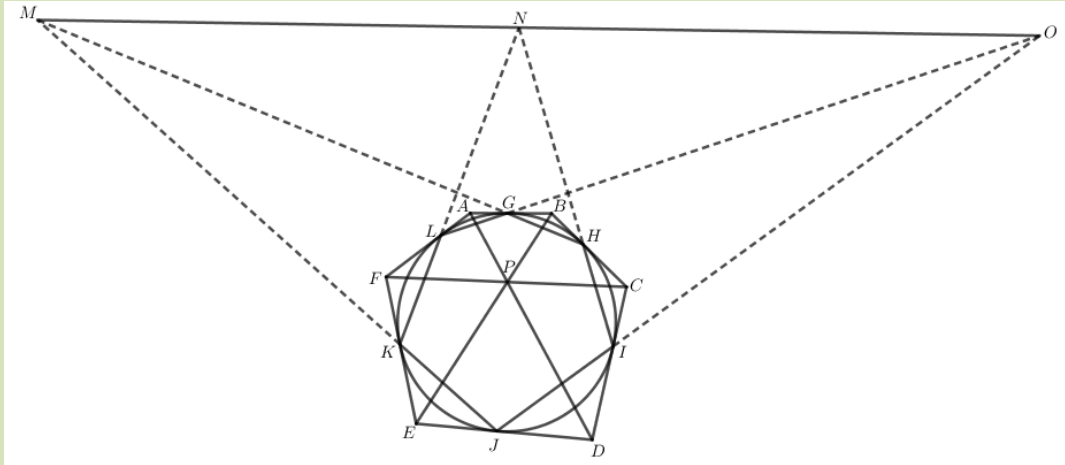
Problema

Demonstre o Teorema de Brianchon, enunciado abaixo.

"As três diagonais que unem os vértices opostos dum hexágono circunscrito a um círculo cortam-se no mesmo ponto.".

Solução

Observe a figura abaixo.



A circunferência está inscrita no hexágono $ABCDEF$. Marcamos nela os pontos de tangência $GHIJKL$ e formamos o hexágono inscrito. Pelo Teorema de Pascal, temos que seus lados opostos GH e KJ , HI e KL , IJ e LG se encontram em pontos que são colineares. Assim, os pontos destacados M, N e O pertencem à uma mesma reta. É fácil ver que os pontos N, O e M são os polos das retas FC, AD e BE , respectivamente. Como M, O e N são colineares, as interseções entre as retas FC, AD e BE se darão no polo da reta que contém os pontos, ou seja, o ponto de encontro das diagonais AD, BE e CF é único.

2.7 Cônicas numa Visão Projetiva

Sabe-se, por meio de conhecimentos históricos, que as curvas cônicas são eminentemente ligadas ao projetivo, primeiramente porque a superfície cônica onde são geradas representa exatamente os princípios da projetividade, a partir do vértice desta superfície.

As cônicas estão sempre presentes em estudos aplicados, nos quais a projetividade toma destaque, como na ótica e na astronomia.

Neste estudo, tenciona-se mostrar essa impregnação mútua, baseando-se em uma sequência suficientemente completa de teoremas e objetos mais importantes, e com a intenção de trazer compreensões mais globais.

2.7.1 Planos que cortam superfície cônica geram curvas cônicas

O secionamento de uma superfície cônica por planos é um instrumento primaz na Geometria Projetiva, pois à seção produzida corresponderia uma projeção dos pontos dessa superfície sobre esse plano, tendo o vértice como centro projetivo. Principia-se o intento de desenvolver a ideia do anunciado acima com a conhecida geração de curvas cônicas, a qual deve ser demonstrada tal como fez Dandelin. O enunciado de teorema do autor sobre isso, em sua primeira parte, consta (FIC, p. 468):

"Todo plano oblíquo ao eixo de um cone de revolução determina uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole."

Entende-se, pelo texto, o sentido atribuído a oblíquo, como de 'não perpendicular'; mas, ao se ampliar o rol das cônicas para abarcar o círculo – como caso particular -, essa referência angular pode ser esquecida.

Não se trata, nesse produto, sobre o secionamento de superfícies cilíndricas, escorando-se, aqui, no fato geométrico de a superfície cônica ser mais geral. As geratrizes do cilindro são, particularmente, paralelas, sendo o seu vértice um ponto impróprio, o que permite tomá-lo como caso particular do cone, argumentação mais que intencional neste estudo. Lembra-se também que, no caso de superfície cilíndrica, o corte anunciado acima, ordinariamente só gera elipses.

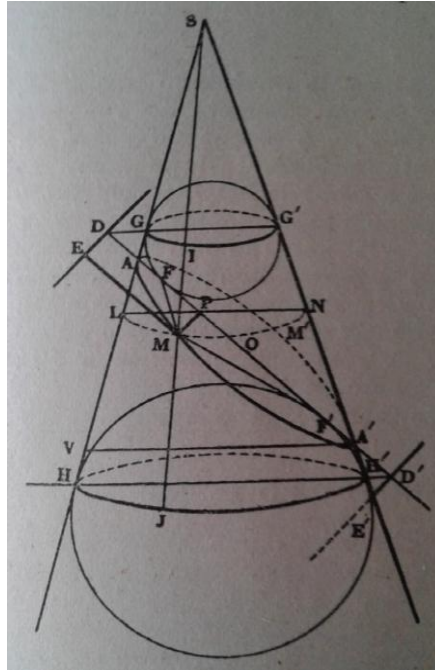
Tal como na obra citada acima, percebe-se, em todas as outras consultadas, e que tratam o teorema, demonstrações sobre situações características e mais particulares para as possíveis angulações do plano de corte, ou seja, a não opção por uma demonstração geral. Como matemático, é imperativo tornar essa uma questão - a de realizar demonstrações de um modo geral. Em seguida, contudo, como profissional da área, tem-se o papel de questionar valores didáticos de uma solução por demais genérica.

2.7.1.1 Elipse

Assim, inicia-se pela elipse. Percebe-se que o enunciado do teorema abaixo toma tanto o cilindro quanto o cone, e, na demonstração em Fic (p. 468-469), curiosamente são encontrados os mesmos nomes dos elementos geométricos arrolados nas figuras das duas superfícies, sendo o texto demonstrativo único, com dupla validade. Reiterando, aborda-se aqui apenas o cone de revolução.

Enunciado:

"A seção dum cilindro ou cone de revolução por um plano que corta todas as geratrizes é uma elipse."



Fonte: Fic (1941, p. 469).

Seja a seção $AMA'M'$, perpendicular ao plano do meridiano principal; inscreve-se esferas tangentes ao cone segundo os círculos GIG' e HJH' , e à seção AMA' nos pontos F e F' . Unindo, agora, um ponto qualquer M da curva obtida aos pontos F e F' , e retirando-se a geratriz IMJ .

As retas MF e MI são iguais como tangentes tiradas do mesmo ponto a uma esfera; assim também $\overline{MF'} = \overline{MJ}$; logo, $\overline{MF} + \overline{MF'} = \overline{IJ} = \overline{GH}$, quantidade constante.

Tem-se ainda que, $\overline{AF} = \overline{AG}$, $\overline{AF'} = \overline{AH}$; logo, $\overline{AF} + \overline{AF'} = \overline{GH}$.

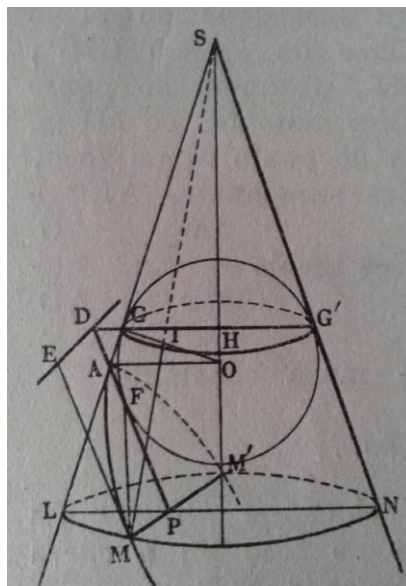
Da mesma forma, ainda, $\overline{A'F'} + \overline{A'F} = \overline{G'H'} = \overline{GH}$.

Logo, a seção é uma elipse tendo AA' como eixo maior e os pontos F e F' como focos.

2.7.1.2 Parábola

Agora, para o caso da parábola, desenvolve-se também um teorema a partir de seção de corte, porém, como cônica propriamente dita, ou seja, não se obtém uma parábola seccionando um cilindro.

“A seção de um cone de revolução por um plano que é paralelo a uma só geratriz é uma parábola.”



Fonte: Fic, 1941, p. 470

Comentou-se aqui, que o advérbio ‘só’, contido no enunciado, evita que se desvie para o caso de uma hipérbole, quando o plano de corte é paralelo a duas geratrizes meridianamente opostas. Mais uma vez, recorre-se à demonstração contida em Fic (1941, p. 470-471).

Seja a seção MAM' , perpendicular ao plano do meridiano principal. Inscrevendo-se uma esfera tangente ao cone, segundo o círculo GIG' , e à seção AMA' no ponto F ; unindo-se um ponto qualquer M da curva ao ponto F ; estabelecendo-se a geratriz MIS , e pelo ponto M traçando um plano perpendicular ao eixo do cone. Este plano corta a seção MAM' segundo uma reta MP , que é perpendicular ao meridiano principal e à reta AF , que é paralela à DE , interseção do plano secante e do plano do círculo GIG' . A reta ME , paralela à PD , é a distância obtida do ponto M à linha DE .

Ora, as retas MF e MI tangentes à esfera são iguais; mas, $\overline{MI} = \overline{NG'} = \overline{PD} = \overline{ME}$, logo, $\overline{MF} = \overline{ME}$.

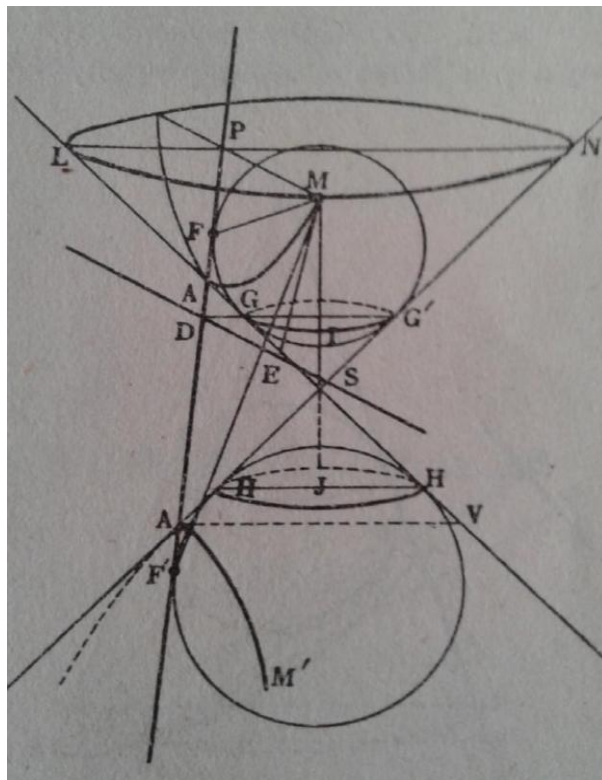
Assim, a curva MAM' é uma parábola, tendo F como foco e DE para diretriz.

2.7.1.3 Hipérbole

Finaliza-se com a hipérbole. Trazendo o enunciado do teorema da obra vista, citando-se a p. 471, tem-se:

“A seção de um cone de revolução por um plano que encontra as duas folhas é uma hipérbole.”

Salienta-se que esta definição, correta e comum nos livros, mostra que o plano não necessita ser paralelo ao eixo da superfície cônica. Mais uma vez se reproduz a figura e o texto demonstrativo constante nos Elementos de Geometria, de Fic.



Fonte: Fic (1941, p. 471)

Seja a seção $AMA'M'$ perpendicular ao plano do meridiano principal; nela inscreva-se esferas tangentes ao cone, segundo os círculos GIG' e HJH' , e à seção nos pontos F e F' , tirando-se a geratriz MIJ .

As retas MF e MI são iguais como sendo tangentes tiradas do mesmo ponto a uma esfera; assim também $\overline{MF'} = \overline{MJ}$; portanto, $\overline{MF'} - \overline{MF} = \overline{IJ} = \overline{GH}$, quantidade constante.

Tem-se também $\overline{AF} = \overline{AG}$, $\overline{AF'} = \overline{AH}$; logo $\overline{AF'} - \overline{AF} = \overline{GH}$.

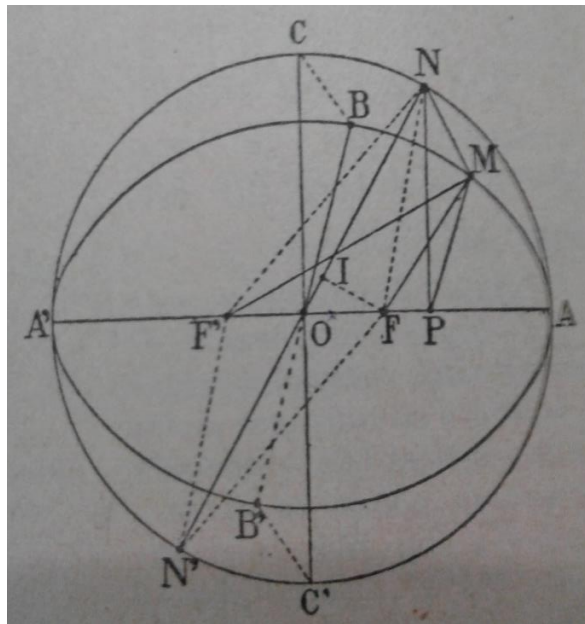
Da mesma forma, $\overline{A'F} - \overline{A'F'} = \overline{GH}$.

Logo, a seção $AMA'M'$ é uma hipérbole, tendo AA' como eixo transversal e os pontos F e F' como focos.

2.7.2 Círculo projetado sobre um plano

Vê-se que as demonstrações acima se apresentam a partir de um instrumento projetivo que é o corte, gerando seção. É interessante também apresentar um outro modo de ver a ligação de cônicas, no caso, uma elipse com o círculo, o que é apresentado mediante o teorema abaixo demonstrado, com texto e figura recortados de Dumont (s/d, p. 424-425):

A projeção de um círculo sobre um plano é uma elipse



Fonte: Irmão Isidoro Dumont, p. 424

Seja o círculo de centro O e AA' e CC' dois diâmetros perpendiculares.

Projetando esse círculo sobre um plano qualquer que passa por AA' , a projeção $ABA'B'$ é uma elipse.

Com efeito, sobre AA' , tomando-se dois pontos F e F' de modo que $\overline{OF} = \overline{OF'} = \overline{BC}$, obtém-se, para um ponto M , projeção de qualquer ponto N do círculo:

$$\overline{MF} + \overline{MF'} = \text{constante}$$

Para demonstrá-lo, são traçados o diâmetro NN' e a perpendicular FI , que o divide em dois segmentos, IN e IN' ; será demonstrado que $\overline{MF} = \overline{IN}$ e $\overline{MF'} = \overline{IN'}$, donde resultará: $\overline{MF} + \overline{MF'} = \overline{IN} + \overline{IN'} = \overline{NN'} = \overline{AA'} = \text{constante}$.

Com efeito, traçando-se NP perpendicular a AA' , a projeção MP de NP é também perpendicular a AA' .

Ora, os triângulos NMP e CBO , semelhantes por terem lados paralelos, dão:

$$\frac{\overline{NM}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{PN}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{PM}}{\overline{OB}}$$

Além disso, os triângulos retângulos OFI e OPN são semelhantes por terem um ângulo agudo O , comum:

$$\frac{\overline{FI}}{\overline{OF}} = \frac{\overline{PN}}{\overline{ON}}$$

$$\text{Mas, } \overline{ON} = \overline{OC}, \text{ donde resulta : } \frac{\overline{PN}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{NM}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{FI}}{\overline{OF}}$$

Ora, por construção, $\overline{OF} = \overline{CB}$; logo, $\overline{NM} = \overline{FI}$

Por outra parte, os dois triângulos retângulos FMN e FIN , tendo a hipotenusa comum e um cateto igual $\overline{NM} = \overline{FI}$, são iguais; portanto, $\overline{MF} = \overline{IN}$.

No quadrilátero $NFN'F'$, as diagonais FF' e NN' cortam-se pelo meio; a figura é, pois, um paralelogramo, e tem-se que $\overline{NF'} = \overline{N'F}$. Portanto, os dois triângulos retângulos FIN' e MNF' , que têm as hipotenusas FN' e NF' iguais e os catetos FI e MN iguais, são iguais e correspondem a: $\overline{MF'} = \overline{IN'}$; donde resulta, afinal:

$$\overline{MF} + \overline{MF'} = \overline{NI} + \overline{IN'} = \overline{NN'} = \overline{AA'} = \text{constante}$$

2.7.3 Teoremas com projetividade

Em Eves (1965), em várias páginas subsequentes, observa-se vários teoremas que são apresentados com apoio em situações análogas no círculo e na relação de permanência projetiva de propriedades para as cônicas. Coloca-se em pauta, aqui, alguns deles, com objetivo de ampliar os objetos projetivos implicados nas cônicas. Toda cônica própria é a imagem de um círculo sobre perspectividade, a partir do vértice da superfície cônica, e,

“portanto, toda propriedade de um círculo que seja descritiva, isto é, inalterada por projeção, pode ser transferida imediatamente para a cônica”. (EVES, 1965, p. 295).²

Considerando-se os teoremas seguintes, sempre com referência a cônicas próprias (não degeneradas), em cada um deles, sugere-se o exercício de ilustrar graficamente as situações postas. Também quando a situação tiver significância para elementos de invariância de propriedades frente a elementos geométricos movíveis, sugere-se que a situação seja trabalhada na dinâmica de um *software* gráfico.

- a) Uma linha reta no plano de uma cônica a corta em dois pontos, é tangente à cônica ou não a corta;
- b) a tangente a uma cônica, em um ponto seu, é única;
- c) seja P um ponto do plano de uma cônica. Considere-se as retas que passam em P e cortam a cônica. Em cada uma delas, considere-se o ponto conjugado harmônico de P em relação aos dois pontos da interseção da reta com a cônica. Todos esses conjugados harmônicos estão sobre uma mesma reta. Pode-se acrescentar aqui que, em cada reta por P e seu conjugado com relação às suas interseções com a cônica, essas interseções dividirão o segmento de P e seu conjugado harmonicamente;

Observou-se que os dois primeiros teoremas são de simples constatação dentro da argumentação acerca da projetividade, e a partir de fatos bem conhecidos, que são as devidas propriedades para o círculo. O teorema c já exige a presença de um objeto da geometria elementar, nem sempre conhecido de todos. Anteriormente a este produto, tratou-se desse tema, um desenvolvimento que implica polaridade. Essa elaboração, gerou, sem maiores preocupações demonstrativas para o momento, alguns resultados, tais como a posição da reta polar de um ponto em relação à cônica: cortando a cônica se o polo é exterior a ela; tangenciando a cônica, se o polo está sobre ela; ou a externando, se o polo lhe é interior.

- d) Se $ABCB$ é um quadrilátero completo inscrito numa cônica, então, cada ponto diagonal do quadrilátero é o polo, em relação à cônica, da reta determinada pelos outros dois pontos diagonais;

² Basicamente a mesma argumentação, e a mesma ênfase em situações sustentadas por polaridade podem ser encontradas em Coxeter (1974), cap. 8 e 9.

3 COMENTÁRIOS

O curso foi estruturado para ser desenvolvido com estudantes de Licenciaturas em Matemática, com conhecimentos prévios de Geometria Euclidiana Plana. Achou-se prudente que o material demonstrasse os resultados numa sequência lógica, de forma a nortear os leitores como os principais teoremas da geometria projetiva podem ser revelados.

Na dissertação, foi elaborado um capítulo que apresenta alguns fichamentos de textos que tratam do tema geometria projetiva. Caso o leitor se interesse por outras formas de entendimento, deixa-se algumas literaturas como sugestão.

Acredita-se que a utilização de *softwares* é importante para constituição de saberes em geometria projetiva, pois as atividades que envolvem objetos dessa ciência são invariantes quando pontos são movidos no espaço, e os *softwares* de geometria dinâmica permitem esta movimentação, diferentemente da lousa estática.

O curso foi desenvolvido junto a um grupo de estudantes, graduandos em matemática, obtendo-se um retorno positivo no que se refere ao ganho cultural que experienciaram com a nova possibilidade geométrica. As manifestações dos sujeitos que participaram da pesquisa, que foram imergidos em um ambiente investigativo, também podem ser encontradas na dissertação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. 10^a ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

DUMONT, I. I. **Geometria Elementar**, de. Coleção de livros didáticos da FTD, Livraria Francisco Alves/Livraria Paulo de Azevedo, Rio de Janeiro, São Paulo, Belo Horizonte. 515 p.

F.I.C. **Elementos de Geometria**. 11^a ed. Rio de Janeiro: F. Briguiet, 1941.

NETO; A. C. M. **Tópicos de Matemática: geometria euclidiana plana**. 1^a ed. Rio Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.