UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PRODUTO EDUCACIONAL

TAREFAS EXPLORATÓRIO-INVESTIGATIVAS PARA O ESTUDO DE POLÍGONOS NO 8º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dayselane Pimenta Lopes Rezende

Juiz de Fora (MG)
Março, 2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
Pós-Graduação em Educação Matemática
Mestrado Profissional em Educação Matemática

Dayselane Pimenta Lopes Rezende

PRODUTO EDUCACIONAL

TAREFAS EXPLORATÓRIO-INVESTIGATIVAS PARA O ESTUDO DE POLÍGONOS NO 8º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Orientador: Prof. Dr. Reginaldo Fernando Carneiro

.

Produto Educacional apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Juiz de Fora (MG)
Março, 2017

LISTA DE FIGURAS

LISTAS DE QUADROS

SUMÁRIO

1. APRESENTAÇÃO

O produto educacional apresentado é parte integrante de nossa pesquisa de mestrado[1] e poderá ser desenvolvido em sala de aula, com a finalidade de dar suporte ao trabalho do professor dos anos finais do Ensino Fundamental, mais especificamente, no 8º ano do Ensino Fundamental no que se refere ao ensino de polígonos. Além disso, esse produto educacional também poderá ser utilizado para a formação de professores, visto que pode permitir interações e intervenções dos futuros professores com os alunos no processo de ensino e aprendizagem de conceitos geométricos.

Para tal, elaboramos nove tarefas exploratório-investigativas, nas quais o uso do material didático manipulável é fortemente recomendado. Essas tarefas foram desenvolvidas com alunos do 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola do interior do Estado do Rio de Janeiro[2]. As tarefas podem ser adaptadas para qualquer ano de escolaridade ou para abordagem de outros conceitos geométricos, não apresentados.

A realização das tarefas pelos alunos foi registrada por meio de vídeo-gravações, de registros escritos, de fotografias, entre outras, cujos dados foram analisados e discutidos na pesquisa.

Os professores que se interessarem poderão desenvolver as tarefas da forma como estão apresentadas nesse produto educacional, ou ainda, modificá-las ou adaptá-las de modo que satisfaçam os seus objetivos. Para tal, poderão basear-se na literatura discutida e nas análises dos dados que apresentamos na dissertação de mestrado.

Trazemos aqui um breve comentário sobre a perspectiva de investigação matemática e de material didático manipulável, que nos auxiliou na elaboração das tarefas. Fazemos uma síntese da nossa experiência com o desenvolvimento da

---

[1] Pesquisa desenvolvida no Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, intitulado “Ensino e aprendizagem de geometria no 8 º ano do Ensino Fundamental: uma proposta para o estudo de polígonos”.

[2] Creche e Escola Municipal Maria Puddó Murucci – Porciúncula- RJ.

sequência didática, destacando algumas contribuições para o processo de ensino e aprendizagem de polígonos.

Por fim, apresentaremos as tarefas exploratórios-investigativas aplicadas no 8º ano de escolaridade do Ensino Fundamental, apontando algumas sugestões e considerações que podem servir como material de apoio para os professores que se interessarem por aulas de cunho exploratório-investigativo.

2. INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

A investigação matemática teve início em Portugal, na década de 80 e 90, cujo interesse no tema está pautado na ideia de que investigar compõe uma poderosa ferramenta para o processo de ensino e aprendizagem (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003). Nesse sentido, o trabalho com a investigação matemática pode propiciar uma exploração de tarefas investigativas, promovendo assim, o desenvolvimento matemático dos alunos com diferentes níveis de desempenho.

Por outro lado, a necessidade do professor em buscar metodologias e materiais didáticos para ensinar a matemática, a investigação matemática surge como atividade de ensino e de aprendizagem, por meio da qual “o aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e professor.” (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p. 23).

Nesse contexto investigativo, o papel do professor e uma boa gestão da sala de aula tornam-se importante para o processo de ensino e aprendizagem. É fundamental que o aluno saiba desde o início o que se pretende com a tarefa, ou seja, o professor deve ajudar o aluno a compreender o que significa investigar e, como consequência, aprender a investigar. Assim, pensar em investigação matemática “como atividade de ensino e aprendizagem, ajuda trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo assim, uma poderosa metáfora educativa.” (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p. 23).

Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) investigar envolve quatro momentos, os quais são essenciais para que a investigação matemática aconteça, a saber:

> O primeiro momento abrange o reconhecimento da situação, a sua exploração preliminar e a formulação de questões. O segundo momento refere-se ao processo de formulação de conjecturas. O terceiro inclui a realização de testes e o eventual refinamento das conjecturas. E, finalmente o último diz respeito à argumentação, à demonstração e avaliação do trabalho realizado (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p. 20).

De acordo com os autores, os momentos podem acontecer de maneira simultânea e em cada um deles várias atividades podem ser realizadas, oportunizando a apreciação e a descoberta da matemática. Elas funcionam como mecanismos essenciais que permitem incorporar e aprofundar conceitos matemáticos.

Todos os momentos têm sua importância, mas é no primeiro momento de uma investigação que o aluno se familiariza com a tarefa e busca compreendê-la, sendo assim, essencial para que as demais etapas sejam efetivadas. Esse momento pode ser considerado como o propulsor da tarefa investigativa.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) afirmam que em toda a investigação é preciso se preocupar não só com as formulações das conjecturas, mas sim com as justificativas de cada uma. Desta forma, os alunos passam a entender os conceitos matemáticos ora investigados, sistematizando as principais conjecturas e refletindo sobre o trabalho de investigação realizado. Os autores também afirmam que essa fase é fundamental para os alunos, pois

> Por um lado, ganhem um entendimento mais rico do que significa investigar e, por outro, desenvolvam a capacidade de comunicar matematicamente e de refletir sobre os eu trabalho e o seu poder de argumentação. Podemos mesmo afirmar que, sem a discussão final, se corre o risco de perder o sentido da investigação. (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p. 41).

Certamente, as investigações matemáticas apontam para um percurso metodológico que permita aos alunos vivenciar cada momento da aprendizagem, propondo questionamentos, discutindo e estabelecendo relações da matemática com problemas de sua realidade. Nesse sentido, Castro (2003) fez uma análise e reflexão sobre o uso das tarefas investigativas nas suas aulas de matemática, corroborando assim com as ideias de Ponte, Brocardo e Oliveira (2003). A autora destaca,

> Ser professor numa aula que privilegia a atividade investigativa dos alunos, pois está centrada em tarefas investigativas, exige deste, abertura e disposição para aprender sempre e por diversas vias além de uma atitude reflexiva e investigativa sobre a própria prática. Embora essas exigências profissionais, sob um ponto de vista, possam representar obstáculos para os professores optarem por esta perspectiva didático-pedagógica, sob outro, podem se constituir em um desafio (CASTRO, 2004, p. 43).

Destacamos aqui a importância da investigação matemática para a reflexão sobre a própria prática pedagógica. A utilização metodológica da investigação matemática requer uma nova postura em sala de aula, onde o professor deixa de ser mero transmissor e passa ser mediador e orientador de todo o processo de ensino e aprendizagem.

Certamente, a postura interrogativa do professor é fundamental nas aulas investigativas. Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) apresentam como vantagem dessa postura “o fato de ajudar os alunos a compreenderem que o papel principal do professor que é o de apoiar o seu trabalho e não simplesmente validá-lo” (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p. 52). Ele passa a ser moderador de todo processo, desempenhado um “conjunto de papéis no decorrer de uma investigação: desafiar os alunos, avaliar o seu progresso, raciocinar matematicamente e apoiar o trabalho deles” (PONTE et al., 1998, p. 47).

Desta forma, em cada momento da investigação matemática o professor deve sempre instigar os alunos a procurar respostas e a testar suas conjecturas. O trabalho com tarefas investigativas é um desafio tanto para o professor quanto para o aluno, visto que uma nova postura é exigida, a postura investigativa. Assim, o aluno precisa ser ativo em todos os momentos da aula. Passos, Lamonato, Piton-Gonçalves (2006) ressaltam que tarefas desse tipo têm um caráter reflexivo e

> [...] isso exige do professor um novo papel. A união do domínio matemático com os fundamentos pedagógicos é fundamental para que as intervenções sejam adequadas. Além disso, o professor precisa estar atento para perceber quando uma investigação matemática, pretendida por ele, precisa ser interrompida, ou quando ela pode ser transformada em outra (PASSOS; LAMONATO; PITON-GONÇALVES, 2006, p.11).

Isso só confirma a necessidade da mudança do papel do professor mediante as aulas de cunho investigativo. Além do domínio do matemático que já é exigido, é preciso também a ideia de intervenções pedagógicas que levem os alunos a refletir sobre o que estão aprendendo, formulando e validando, quando possível, suas conjecturas.

Quando nos referimos ao ensino da geometria, mais especificamente, nessa perspectiva investigativa, o mesmo propicia a “realização de atividades de natureza exploratória e investigativa” (ABRANTES, 1999, p. 53). Assim, o ensino da geometria vai além da memorização e é preciso pensar em atividades que contribuam para a percepção significativa do aluno quanto à aprendizagem de conceitos geométricos. Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) as investigações geométricas podem ser uma alternativa para desenvolver essa percepção, visto que

> A exploração de diferentes tipos de investigação geométrica pode também contribuir para concretizar a relação entre situações da realidade e situações matemáticas, desenvolver capacidades, tais como a visualização espacial e o uso de diferentes formas de representação, evidenciar conexões matemáticas e ilustrar aspectos interessantes da história e da evolução da Matemática (PONTE; BORCARDO; OLIVEIRA, 2003, p. 71).

Os autores destacam as diversas possibilidades que a investigação geométrica pode proporcionar. O mais interessante é a possível contribuição no que tange tornar concreta essa relação entre a realidade e a matemática. A geometria pode possibilitar que o aluno formule e teste suas conjecturas para posterior demonstração e generalização.

Abrantes (1999) considera que na “geometria existe um enorme âmbito para tarefas exploratórias e investigativas a ser desenvolvida em sala de aula, sem exigir muitos pré-requisitos” (ABRANTES, 1999, p. 54), o que evita, sem dúvidas, atividades mecânicas e sem sentido para o aluno. Para o autor essa variedade de tarefas só valoriza a geometria no currículo e nas aulas de matemática, na medida em que o aluno pode explorar, conjecturar, construir, visualizar, generalizar e demonstrar, sem se preocupar com os resultados e sim com o processo.

Scheffer (2012) considera a geometria “como um campo fértil para um ensino baseado na exploração e investigação [...]” (SCHEFFER, 2012, p. 96). A contribuição da geometria vai muito além da memorização e aplicação de técnicas na resolução de problemas, pois ela propicia a compreensão dos fatos e relações matemáticas estudadas.

Portanto, a investigação matemática, em especial a geométrica, foco desse produto educacional, contribuiu para o processo de ensino e aprendizagem de modo significativo, propiciando ao aluno e professor refletir sobre o seu papel nesse processo.

3. MATERIAL DIDÁTICO MANIPULÁVEL

Considerando que a geometria é um campo fértil para a investigação matemática, e de alguma forma visual e manipulável, a utilização do material didático manipulável pode facilitar a percepção dos estudantes quanto aos conceitos geométricos referentes a polígonos. Assim, apresentaremos uma breve discussão sobre o material didático manipulável (MD)[3] para o ensino da Matemática.

Uma definição clássica de MD pode ser expressa como "objetos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar. Podem ser reais que têm aplicação no dia-a-dia ou podem ser objetos que são usados para representar uma ideia" (REYS, 1971, apud, MATOS; SERRAZINA, 1996, p. 193). Também podemos entender que MD "é qualquer instrumento útil ao processo de ensino-aprendizagem" (LORENZATO, 2012, p. 18). Portanto, todo o tipo de instrumento que favoreça o processo de ensino e aprendizagem dos estudantes pode ser considerado um material didático, por exemplo, um livro, quebra-cabeça, calculadora, filme, jogos, entre outros.

No entanto, a utilização de MD no ensino surgiu pela primeira vez no século XIX, por Pestalozzi, defendendo a utilização de objetos concretos, ações e experimentações (NACARATO, 2005). A possibilidade de tocar, manipular, visualizar, entre outras, torna a matemática mais experimental.

No Brasil, a defesa pelo uso de MD nas aulas de matemática iniciou-se na década de 1920, concomitantemente, com o surgimento de uma tendência no ensino da Matemática conhecida como empírico-ativista (NACARATO, 2005). No contexto desta tendência, o papel do professor muda e se assemelha ao exigido na investigação matemática, pois

> Aqui o professor deixa de ser o elemento fundamental do ensino, tornando-se orientador ou facilitador da aprendizagem. O aluno passa a ser considerado o centro da aprendizagem – um ser "ativo". O currículo, nesse contexto, deve ser organizado a partir dos interesses do aluno e deve atender ao seu desenvolvimento psicobiológico. Os métodos de ensino consistem nas "atividades" desenvolvidas em pequenos grupos, com rico

---

[3]Consideramos MD como material didático manipulável.

> material didático e em ambiente estimulante que permita a realização de jogos e experimentos ou contato – visual e táctil- com materiais manipulativos (FIORENTINI, 1995, p. 9, grifo do autor).

Desta forma, a utilização de materiais didáticos manipuláveis torna-se relevante para o ensino e aprendizagem em geometria, porém, o "uso inadequado ou pouco exploratório de qualquer material manipulável pouco ou nada contribuirá para a aprendizagem matemática" (NACARATO, 2005, p. 4). Assim, percebemos que não é suficiente ter disponível esse tipo de material e não saber utilizá-lo no sentido de possibilitar o desenvolvimento de habilidades e raciocínio matemático nos alunos.

Lorenzato (2012) destaca que o modo de utilizar o MD depende do professor e suas concepções pedagógicas em relação à matemática e ao processo de ensino-aprendizagem. Se o professor utiliza o MD apenas para apresentar ao aluno algum conceito, ele reproduz um reforço à memorização do conceito matemático, conforme apresentado nos livros didáticos. Contudo, aquele professor que utiliza o MD propiciando que o aluno faça suas descobertas, percepções, constatações e soluções, possibilita o "desenvolvimento cognitivo e afetivo do aluno" (LORENZATO, 2012, p. 25).

Os materiais didáticos devem possuir características que facilitem sua aplicabilidade para modelar o maior número possível de ideias e conceitos matemáticos, pois essa gama de aplicações possibilita que os alunos "estabeleçam conexões entre os diversos conceitos intrínsecos à manipulação do material" (PASSOS, 2012, p. 87).

Corroborando com Passos (2012), Lorenzato (2012) descreve algumas potencialidades do MD, de acordo com a intenção do seu uso pelo professor. O autor destaca que o MD pode ser um raio X, na medida em que permite ao professor observar os conceitos que devem ser revistos ou aprofundados. Pode ser um regulador, uma vez que permite ao aluno aprender no seu próprio ritmo; pode ser um modificador, pois favorece mudanças na ordem de abordagem do conteúdo previsto; bem como pode ser utilizado em diferentes níveis de ensino (LORENZATO, 2012).

Ao utilizar o MD, o professor deve buscar meios para estimular tanto uma abordagem experimental quanto dedutiva, sendo que as duas devem andar de “mãos dadas”, possibilitando assim, a “elaboração conceitual por parte dos alunos” (NACARATO, 2005, p. 6).

Diante do exposto, o MD pode ser um aliado da prática pedagógica dos professores, na medida em que facilita a observação, a análise, o desenvolvimento do raciocínio lógico, crítico e científico, entre outras possibilidades. Porém, não é simplesmente ter o material didático na sala de aula, é preciso explorar todos os conceitos possíveis dentro de cada tarefa. Assim, a “exploração de vários tipos de investigação geométrica pode contribuir para a concretização e relação entre situações matemática” (SCHEFFER, 2012, p. 95).

Nesse sentido, aliar a investigação matemática e o uso do MD, pode tornar possível que os alunos vivenciem experiências de aprendizagem importantes, pois passam a indagar, a discutir e a estabelecer relações entre a matemática escolar e a sua realidade.

Portanto, a sequência didática apresentada na próxima seção, propiciou a junção de tarefas de cunho investigativo e o uso de MD, facilitando assim, que algumas percepções e conjecturas matemáticas fossem construídas e validadas.

4. A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A proposta desta sequência está pautada em diversas leituras que realizamos e da inquietação da professora sobre as dificuldades dos alunos quando se trata da Geometria.

D'Ambrosio (2012) afirma que cada pessoa possui sua prática e que o professor reproduz aquilo que o impressionou e deixa de fazer aquilo que não aprovou. Mas como um professor pode ter essas impressões, se não teve em nenhum momento de sua formação memória de experiências? O mesmo autor discute o elo entre a teoria e a prática do professor. Se não há teoria, pode não ocorrer uma boa prática e daí, isso reflete as dificuldades de cada um (D'AMBROSIO, 2012). Talvez as dificuldades dos alunos e professores com o ensino da geometria seja reflexo da omissão do ensino da geometria por muitos anos.

Fonseca et al (2011, p. 14) discutem três questões que permeiam toda a Educação Matemática, quais sejam: "O que se ensina em Geometria"; "Os conhecimentos de Geometria dos professores (e dos alunos)"; e "Por que ensinar Geometria". Todas as questões são importantes e estão relacionadas a perguntas que o professor deve sempre se preocupar: O que fazer? Como fazer? Quando fazer ? Por que fazer? Para que?

Pautada nessas questões indagadoras é que procuramos elaborar as tarefas exploratório-investigativas. Para tal, consideramos as concepções de Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) que destacam que "a Geometria é particularmente propícia, desde os primeiros anos de escolaridade, a um ensino fortemente baseado na exploração de situações de natureza exploratória e investigativa". (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p. 71). Os autores evidenciam que a grande contribuição da geometria pode está pautada na concretização entre situações cotidianas e matemáticas.

Abrantes (1999) considera que na "geometria existe um enorme âmbito para tarefas exploratórias e investigativas a ser desenvolvidas em sala de aula, sem exigir muitos pré-requisitos" (ABRANTES, 1999, p. 54), o que evita sem dúvidas, atividades mecânicas e sem sentido para o aluno. Para o autor essa variedade de tarefas só valoriza a geometria no currículo e nas aulas de matemática, na medida em que o aluno pode explorar, conjecturar, construir, visualizar, generalizar e demonstrar, sem se preocupar com os resultados e sim com o processo.

Nesse sentido, o material didático manipulável pode ser um aliado nas tarefas de cunho investigativo, pois permite ao aluno a manipulação, visualização, exploração e construção de conceitos matemáticos. Assim, os materiais didáticos devem possuir características que facilitem sua aplicabilidade para modelar o maior número possível de ideias e conceitos matemáticos, pois essa gama de aplicações possibilita que os alunos "estabeleçam conexões entre os diversos conceitos intrínsecos à manipulação do material" (PASSOS, 2012, p. 87).

Considerando as ideias de Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), e demais pesquisadores que discutem a importância da investigação matemática para o ensino da geometria e as concepções de Passos (2012) e Lorenzato (2012) sobre as potencialidades uso do material didático manipulável, além é claro, de toda a literatura estudada para a pesquisa de mestrado, a sequência didática foi pensada e elaborada com o objetivo de ampliar a compreensão acerca de polígonos, trazendo elementos que possam contribuir para o desenvolvimento do pensamento crítico, raciocínio lógico e a habilidade argumentativa dos alunos por meio de tarefas exploratório-investigativas.

Também buscamos na literatura uma definição para sequência didática com o intuito de compreender como a mesma deveria ser elaborada. Para Zabala (1998) a sequência didática é "um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelo professor como pelos alunos" (ZABALA, 1998, p. 18). Nessa linha de pensamento, a sequência didática produzida para este trabalho possibilitou desenvolver um trabalho coletivo, onde ocorreu a troca de ideias, de maneira colaborativa entre os alunos e a professora, favorecendo assim, a socialização das reflexões e expectativas dos alunos em torno dos conceitos geométricos abordados.

A seguir apresentaremos as tarefas que fazem parte da sequência didática, que foram elaboradas de acordo com a literatura da dissertação de mestrado.

4.1. Tarefa 1: canudos e linha: o que podemos construir?

O objetivo desta tarefa é compreender o conceito de triângulos e a desigualdade triangular, através da manipulação de canudos e linha. Assim, é esperado que o aluno identificasse que nem sempre três segmentos podem formar um triângulo, e que existe uma relação entre essas medidas.

Os alunos foram divididos em grupo e receberam três dados e pedaços de canudos com medidas correspondendo aos valores das unidades do dado (1 a 6), sendo que cada unidade correspondeu a dois centímetros. Cada uma das unidades continha três peças diferenciadas pelas cores. Também receberam linha mais firme (tipo de pipa ou de anzol) e uma folha com instruções.

Primeiramente, foram escolhidos o líder do grupo e o relator, que tinham como função, respectivamente, coordenar as atividades do grupo e registrar as informações para posterior apresentação à classe. Cada aluno jogou os três dados simultaneamente e conforme as unidades da face superior dos dados pegaram os canudos e construíam ou não os triângulos. As informações de cada rodada serão anotadas em uma tabela, conforme quadro 1.

Quadro 1: Número de jogadas

Jogadas	Medidas dos canudos			Soma das medidas dos canudos menores	Medida do canudo maior	Formou triângulo?
1ª						
2ª						
3ª						

Fonte: elaborado pela autora.

Após cada jogador jogar duas vezes e a tabela anterior ser preenchida, o grupo discutiu algumas questões, conforme quadro 2. Depois, os resultados foram apresentados e discutidos com a toda a turma.

Quadro 2: Questões para análise

1. Analisando a soma da medida dos canudos menores, o que você observa em relação ao canudo de maior unidade de medida?
2. Quando os três canudos formam um triângulo? Registre suas conclusões.
3. Quando os três canudos não formam triângulo? Registre suas conclusões.
4. Então, podemos dizer que três segmentos de qualquer medida formam um triângulo? Por quê? Qual condição você deve observar para construir um triângulo?

Fonte: elaborado pela autora.

Para a realização da tarefa foram necessários duas aulas de cinquenta minutos cada. Nesse tempo estão inclusos todos os momentos de uma investigação matemática, “a exploração e formulação de questões, a formulação de conjecturas, o teste e a reformulação de conjecturas e ainda, a justificação de conjecturas e avaliação do trabalho” (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p. 29).

É uma tarefa simples, mas que com o apoio do material didático manipulável permitiu aos alunos, através da observação das regularidades, compreenderem a condição de existência do triângulo.

4.2. Tarefa 2: rígido ou não?

O objetivo dessa tarefa é identificar a propriedade de rigidez do triângulo, através de materiais manipulativos. Espera-se que os alunos concluam que os lados do triângulo não se movimentam, e, portanto, os ângulos também não se alteram.

Para a realização dessa tarefa foi necessário pedaços de canudos de diversos tamanhos (utilizamos pedaços do mesmo tamanho da tarefa 1) e linha mais firme (tipo de pipa ou anzol), transferidor e régua para medir os ângulos e lados, respectivamente, e demais materiais necessários para o registro das conclusões dos alunos. Também foi distribuída a folha com as orientações da tarefa, conforme quadro 3.

Quadro 3: Orientações da tarefa 2

1. Utilizando os palitos e borrachinhas, construam polígonos de três, quatro, cinco, seis e sete lados.
2. Meça seus lados e seus ângulos e anote no quadro 4.

Quadro 4: Medida dos lados e ângulos

Polígonos	Medidas dos lados	Medidas dos ângulos
Triângulo		
Quadrilátero		
Pentágono		
Hexágono		
heptágono		

3. Agora, experimentem movimentar os polígonos construídos. É possível movimentar os lados de todos os polígonos? Discuta com os colegas.
4. Meça novamente os lados e os ângulos dos polígonos após movimentá-los e anote o resultado no quadro 5.

Quadro 5: Medida dos lados e ângulos, após movimentação.

Polígonos	Medidas dos lados	Medidas dos ângulos
Triângulo		
Quadrilátero		
Pentágono		
Hexágono		

heptágono		

5. Observe as duas tabelas. O que você pode observar em relação a medida dos lados? E em relação a medida dos ângulos? Anote suas conclusões.
6. Existe algum polígono que você não conseguiu movimentar? Por quê?
7. E as medidas dos seus ângulos foram alteradas?
8. Escreva suas conclusões e apresente para a turma.

Fonte: elaborado pela autora.

Para a realização da tarefa foram necessárias duas aulas de cinquenta minutos cada.

O material utilizado na tarefa facilitou a construção dos polígonos, mas não ajudou no momento da medição dos ângulos internos dos polígonos que se movimentavam facilmente, como o quadrado, pentágono, entre outros. Isso devido à flexibilidade da linha e dos canudos. Então, como sugestão para essa tarefa, o ideal é a utilização de palitos de picolé unidos por percevejos. E para facilitar a medida dos ângulos, os polígonos construídos podem ser fixados em uma base de papelão ou isopor, pois desta maneira, os lados (palitos de picolé) não se movimentariam no momento de medir os ângulos.

Outros materiais que podem ser utilizados são palitos de churrasco ou pirulito e borrachinhas (borrachas utilizadas para fazer um garrote quando se tira sangue). Como esse material é oco, torna-se possível ligar os palitos por pedaços dessa borrachinha. E para medir os ângulos é só fixar os polígonos em uma base de papelão ou isopor.

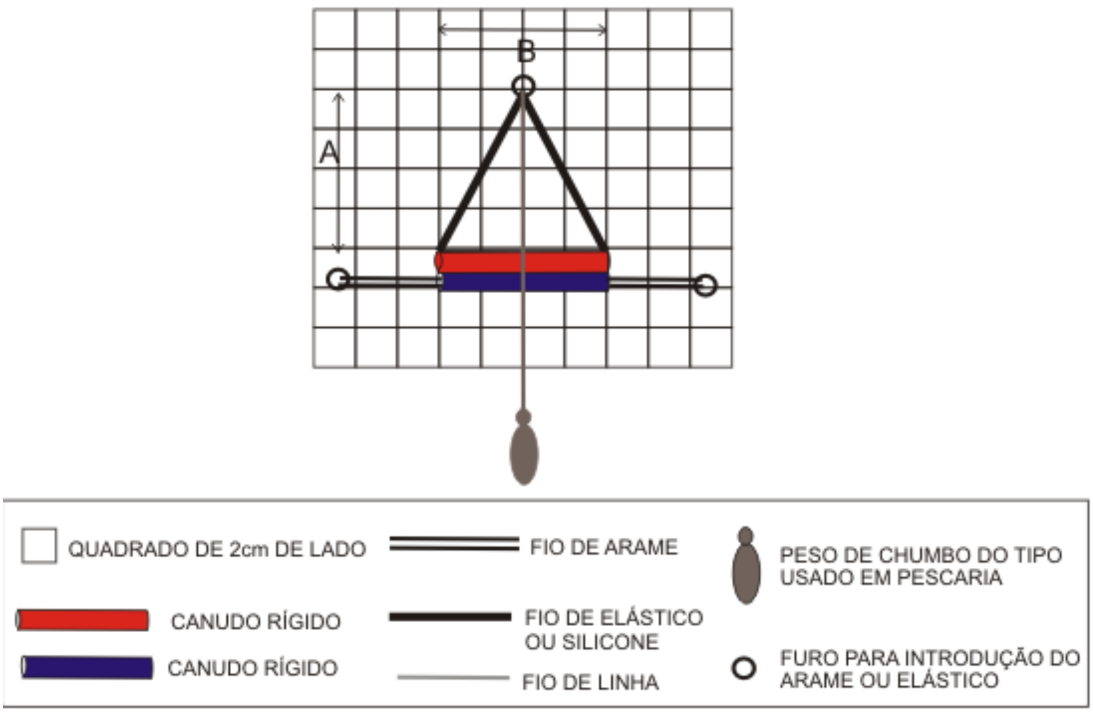
4.3. Tarefa 3: medindo, classificando e comparando triângulos

A tarefa foi desenvolvida e adaptada de Kaleff (2008), utilizando os artefatos modeladores de triângulos. A tarefa será dividida em partes, e cada parte evidenciou o estudo de algum conceito sobre triângulos.

O objetivo dessa tarefa é investigar e medir dimensões e, efetivamente, comprovar a invariância da medida da área em relação às variações de triângulos formados, através da observação de regularidades: medida da altura (fixa) em relação à medida constante de ao menos um dos lados.

Primeiramente, foi construído o artefato modelador de triângulos proposto por Kaleff (2008), utilizando os seguintes materiais: folha de papelão, uma folha de papel tamanho A4 com traçado de malha quadriculada, canudos de plástico rígido, arame rígido, plástico adesivo, tesoura, um chumbinho (tipo de pescaria), elástico ou fio de silicone bem resistente e cola. O artefato deve ser construído conforme o esquema da figura 1.

Figura 1: Artefato modelador de triângulos



Fonte: (KALEFF, 2008, p. 90)

Em seguida, os alunos manipularam o artefato construído, seguindo as orientações descritas no quadro 6. Nessa etapa, o registro das considerações dos alunos é muito importante para a formulação de suas conjecturas e discussão em sala de aula.

Quadro 6: Orientações da tarefa 3

1. Utilizando artefato modelador de triângulos, empurre o par de canudos ao longo do arame e obtenha outras figuras na forma de triângulo.
2. As figuras triangulares obtidas tem a mesma forma? Discuta com seus colegas e anote suas conclusões.
3. Agora, deixe o artefato em pé, perpendicularmente sobre a mesa, faça com que o chumbo funcione como um fio de prumo. Empurre o par de canudos para obter triângulos, quais sejam: que o fio divida-o em duas partes iguais, isto é, de maneira que se tenha o mesmo número de quadradinhos em ambos os lados da linha; que o fio coincida com o elástico que forma o lado triângulo; e que o fio fique na região externa do triângulo.
4. Agora, desenhe os triângulos em papel quadriculado. Usando a régua, meça os lados, a base e a altura de cada triângulo, colocando suas medidas no quadro 7, chamando o primeiro triângulo de Nº. 1, o segundo de Nº. 2 e o terceiro de Nº. 3. Considere como base o lado formado pelo par de canudos.

Quadro 7: Medidas observadas

Triângulo Nº.	Lado	Lado	Lado	Altura
1				
2				
3				
4				
5				

5. O que você observa em relação à medida dos lados de cada triângulo? Existe alguma relação entre as medidas dos lados de cada triângulo?
6. Movimente o par de canudos anterior e repita o item 4, por mais duas vezes, formando triângulos diferentes dos anteriores. Chame-os de triângulos Nº 4 e 5 e complete o quadro.
7. Comparando a medida dos lados, as bases e as alturas de todos os triângulos o que

você observa?

8. Usando o transferidor, meça os ângulos de cada um dos triângulos desenhados anteriormente e complete o quadro 8.

Quadro 8: Medidas dos ângulos

Triângulo Nº.	Ângulo 1	Ângulo 2	Ângulo 3
1			
2			
3			
4			
5			

9. Comparando os ângulos de todos os triângulos o que você pode observar quanto às suas medidas? Discuta com os colegas e anote suas conclusões.
10. Agora, considerando cada quadradinho como unidade de medida, tente contar quantos quadrinhos ou parte destes, que compõem a região interna de cada triângulo desenhado.
11. Relacione as medidas indicadas por A e B, com a medida da base e da altura de cada triângulo, respectivamente.
12. Tente relacionar o número de quadradinhos que você encontrou com os valores de A e B. Discuta com os colegas sobre suas conclusões e anote-as.
13. O que você percebe em relação a medida da base e da altura dos triângulos? E em relação à área de cada triângulo, o que você observa? Discuta com os colegas.
14. Anote suas conclusões e apresente a turma.

Fonte: adaptado de Kaleff (2008, p. 88-89)

Para a realização dessa tarefa foram necessárias cinco aulas de cinquenta minutos, não considerando aqui o tempo para a construção do artefato.

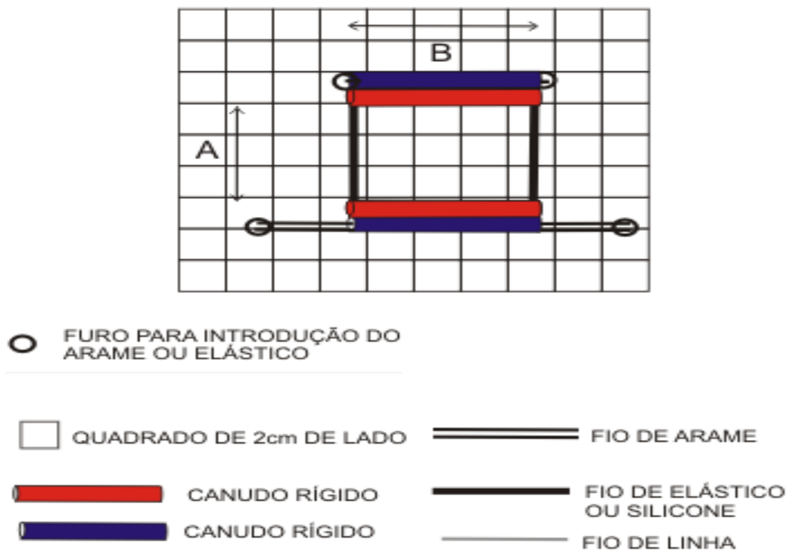
O professor pode levar o artefato construído, mas seria interessante construir esse material com os alunos, pois durante a construção, os alunos podem desenvolver habilidades relacionadas a medidas, ângulos, paralelismo, entre outras.

Outros conceitos também podem ser explorados com essa tarefa, como a modelagem das alturas dos triângulos em relação ao lado horizontal, podendo ser internas ou externas (KALEFF, 2012).

4.4. Tarefa 4: medindo, classificando e comparando paralelogramos

Para a realização dessa tarefa utilizamos o artefato modelador de paralelogramos, construídos com uma placa de papelão coberta com papel quadriculado e isolada com plástico autoadesivo. Sobre essa placa foram adaptados arame, inseridos em furos e dobrados no verso da placa, que serviram como guias a pares de canudos de plásticos rígidos, e colados entre si. Por dentro de cada canudo sem arame, colocam-se elásticos finos ou fios de silicone, que são amarrados na parte de trás da placa de papelão, conforme esquema da figura 2.

Figura 2 : artefato modelador de paralelogramos.



Fonte: (KALEFF, 2008, p.90).

A tarefa tem como objetivos: propiciar aos alunos a construção de significados para o conceito de paralelogramos, bem como identificar suas propriedades principais através da observação dos atributos relevantes; investigar e medir dimensões e, efetivamente, comprovar a invariância da medida da área em relação as variações de paralelogramos formados, através da observação de regularidades: medida da altura (fixa) em relação à medida constante de ao menos um dos lados.

Depois da construção dos artefatos, os mesmos foram manipulados pelos alunos, de acordo com as orientações descritas no quadro 9. Também fez parte dessa etapa, o registro das conclusões dos mesmos.

Quadro 9: Orientações da tarefa 4 com artefato de paralelogramos

1. Movimente o par de canudos ao longo do arame do artefato. As figuras obtidas têm a mesma forma? Anote suas conclusões.
2. Movimente o par de canudos novamente de maneira que os lados (elásticos) das formas geométricas coincidam com as linhas da malha quadriculada. O que você observa? Anote suas conclusões.
3. Agora, desenhe as figuras geométricas obtidas em uma folha de papel quadriculado. Veja como os colegas fizeram.
4. Depois de desenhado a figura geométrica meça, com a régua, os seus lados e anote os valores no quadro 10. Depois, com o auxílio do transferidor, meça os ângulos internos de cada figura modelada e anote no quadro 11.

Quadro 10: Medida dos lados

Figura	Lado	Lado	Lado	Lado
1				
2				
3				
4				
5				

Quadro 11: Medida dos ângulos internos da figura geométrica modelada

Figura	Ângulo 1	Ângulo 2	Ângulo 3	Ângulo 4
1				
2				
3				
4				
5				

5. Comparando as medidas dos lados da figura geométrica modelada o que você observa? Discuta com os colegas.
6. Comparando a medida dos ângulos de todas as figuras o que você observa? Discuta com seus colegas.
7. Podemos afirmar que essa figura é um quadrilátero? Discuta com seus colegas e anote suas conclusões.
8. O que você concluiu até o momento? Anote suas conclusões.
9. Você acha que os lados opostos são paralelos? Explique.
10. Podemos afirmar que essa figura é um paralelogramo? Justifique sua resposta e discuta com os colegas.
11. Agora, tente contar os quadradinhos que ocupam a região interior da figura geométrica. O que você observa?
12. Existe alguma relação entre a medida dos lados da figura e a quantidade de quadradinhos da sua região interna? Ou existe alguma relação entre a medida do lado dessa figura e a distância desse lado ao seu lado oposto?
13. Como você poderia registrar essa relação?
14. O que você observou quanto a área dos paralelogramos com mesmo valor de comprimento (base) e largura (altura)? Anote suas conclusões.

Fonte: adaptado de Kaleff (2008).

Para a realização dessa tarefa foram necessárias cinco aulas de cinquenta minutos cada.

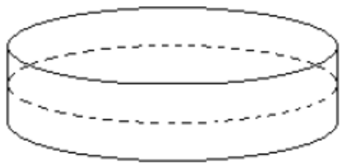
O material didático manipulável apresentou aplicabilidade para modelar um grande número de ideias matemáticas, facilitando assim, a descoberta, a manipulação, o envolvimento na realização da tarefa, ou seja, se caracterizou “pelo envolvimento físico dos alunos numa situação de aprendizagem ativa” (LORENZATO, 2012, p. 78).

4.5. Tarefa 5: Investigando os quadriláteros

O objetivo dessa tarefa é propiciar ao aluno a compreensão das relações entre os quadriláteros e analisar as propriedades dos quadriláteros estudados, através da observação e exploração dos elementos de todas as figuras obtidas.

Para a realização dessa tarefa, foi utilizado papel, cola e tesoura. Primeiramente, os alunos cortaram algumas tiras de papel com aproximadamente 30 cm de comprimento e 4 cm de largura cada uma e marcadas ao meio. Colaram as tiras formando um anel comum de papel, conforme figura 3.

Figura 3: Anel formado a partir das tiras de papel, coladas nas extremidades.



Fonte: (RÊGO; RÊGO; VIEIRA, 2012, p.44)

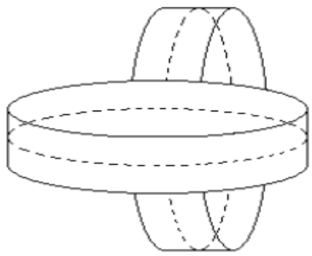
O pontilhado não precisa ser feito na tira, é apenas uma ilustração que indicam onde deve ser feito o corte. Antes de colar, é bom dobrar a fita ao meio, no sentido do comprimento, fazendo um vinco. Isso facilita identificar o local de corte.

Depois, das tiras preparadas, foi desenvolvido a investigação descrita no quadro 12.

Quadro 12: Investigação da tarefa 5

1. O que acontece quando cortamos o anel ao meio. Corte e confira o resultado. O que você observou?
2. Agora, você vai colar os dois anéis iguais ao primeiro, um perpendicular ao outro, como indicado na figura 4. Em seguida, recorte ao meio os dois anéis colados, como foi feito no item 1. O que aconteceu? Discuta com os colegas e anote suas conclusões.

Figura 4: Dois anéis colados perpendicularmente.



Fonte: (RÊGO; RÊGO; VIEIRA, 2012, p. 45)

3. Agora, pegue dois novos anéis. Que modificações devem ser feitas no tamanho dos anéis ou na forma de colar as fitas para que o resultado seja um losango e não um quadrado? Discuta com seus colegas e anote suas conclusões.
4. Que modificações devem ser feitas no tamanho dos anéis ou na forma de colar as fitas para que o resultado seja um retângulo e não um quadrado? Discuta com os colegas.
5. Como devem ser os anéis, e como colá-los para que o resultado seja um paralelogramo (não retângulo)? Discuta com os colegas.
6. Observando as figuras formadas, o que você conclui? Escreva suas conclusões.
7. O que acontece se colar três anéis de mesmo tamanho, cada um perpendicular ao seguinte e cortar os três ao meio? Discuta com os colegas e anote suas conclusões.
8. O que acontece se colar três anéis de tamanhos diferentes, dispostos como no item 7? Discuta com os colegas e anote os resultados.
9. O que acontece se colar três anéis iguais inclinados um em relação ao outro? Verifique o resultado e anote suas conclusões.
10. Cole os anéis de uma forma diferente das anteriores e observe o resultado. Anote suas conclusões.

11. Após observar cada figura formada, descreva suas conclusões.

Fonte: adaptado de Rêgo, Rêgo e Vieira (2012)

Para a realização dessa tarefa foram necessárias três aulas de cinquenta minutos cada.

A proposta de investigação dessa tarefa propiciou a discussão dos conceitos relacionados aos quadriláteros, principalmente, dos paralelogramos.

Com essa tarefa, os alunos identificaram os atributos que são necessários para conceituar um quadrado, retângulo, losango, trapézio, entre outros polígonos. Segundo Rêgo, Rêgo e Vieira (2012) essa tarefa pode oportunizar de maneira intuitiva questões relativas aos quantificadores universais e existenciais de um polígono. Nesse sentido, a observância da maneira de colar os anéis e o tamanho dos anéis influenciou na formação do quadrilátero. Por exemplo, se quisessem construir um quadrado, os anéis teriam que ser do mesmo tamanho e deveriam ser colados de forma perpendicular. Caso quisessem formar um losango que não fosse quadrado, os anéis deveriam ser de mesmo tamanho, mas a forma de colá-los não seria a mesma, deveria ser inclinada.

4.6. Tarefa 6: Traçando diagonais

O objetivo dessa tarefa é compreender o conceito de diagonais de um polígono, a partir da identificação de um vértice traçar as diagonais de um polígono.

Para a realização dessa tarefa, foi necessário um geoplano quadrado, elásticos coloridos (tipo látex, dinheiro, etc), papel de malha pontilhada que imita um geoplano de papel, lápis, borracha, régua, etc. As atividades serão desenvolvidas de acordo com as orientações o quadro 13.

Quadro 13: Orientações da tarefa 6

1. Utilizando o geoplano, você irá construir as formas geométricas solicitadas. Imagine que você irá decorar o pátio de sua escola para uma festa junina. Para pendurar as bandeirinhas de um canto a outro do pátio, os organizadores da festa decidiram que:

   1º). nenhuma corda pode ligar cantos vizinhos;

   2º) um mesmo par de cantos não pode ser ligado por mais de uma corda

   Se a escola tivesse um pátio quadrado, quantas cordas seriam penduradas? E se a escola tivesse um pátio em forma pentagonal? E se fosse um pátio hexagonal? E se fosse um pátio octogonal? E se fosse triangular? Qual a forma, com menor número de lados, que permitiria pendurar cordas? Existe alguma forma que não permitiu pendurar cordas? Discuta com os colegas e anote suas conclusões.

2. Usando geoplano em madeira e folha com malha pontilhada, construa outros polígonos e trace suas diagonais e complete a quadro 14.

   Quadro 14: Diagonais de um polígono.

Número de lados	Diagonais traçadas a partir de um vértice	Número total de diagonais traçadas a partir de cada vértice	Número total de diagonais distintas do polígono
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			

N			

3. Observando o quadro 14, existe alguma relação entre o número de lados e o número de diagonais? Discuta com seus colegas e anote suas conclusões.

Fonte: adaptada de Bairral (2004, p. 32).

Outras questões podem surgir durante o desenvolvimento da atividade. Se houver a necessidade de ampliar o quadro 14 para que os alunos consigam observar as regularidades quanto ao número de diagonais de um polígono, não há problema algum.

Para a realização dessa tarefa foram necessárias duas aulas de cinquenta minutos cada.

Outros materiais podem substituir o geoplano, como palitos de picolé, percevejos, linha colorida (tipo de costura), e uma base de papelão ou isopor. Primeiramente, se constrói os polígonos com palitos e percevejos, fixado as figuras construídas na base de papelão. Depois, é realizar as orientações do quadro 13, usando linha para representar as cordas.

4.7. Tarefa 7: Investigando os ângulos internos e externos de um polígono

O estudo dos ângulos internos e externos dos polígonos, muita das vezes, se restringe a apresentação de fórmulas e memorização das mesmas. Os alunos não compreendem como se chegou a esse resultado.

Nesse sentido, essa tarefa tem como objetivos: identificar os ângulos externos e internos de um polígono; calcular a soma dos ângulos internos e externos de um polígono, relacionando a soma com o número de lados de um polígono.

As tarefas anteriores propiciaram a compreensão do que são polígonos e seus elementos, bem como o que é uma diagonal. Esses conceitos ora estudados anteriormente serão necessários para o estudo dos ângulos de um polígono.

Para a realização da tarefa foram necessários folha de papel em malha pontilhada, régua, lápis, transferidor e cola. As orientações da tarefa estão descritas no quadro 15.

Quadro 15: Orientações da tarefa 7

1. Construa um triângulo na folha de malha pontilhada e marque seus ângulos internos. Depois recorte o triângulo e o divida-o em 3 partes, a partir de seus lado, de modo que os seus ângulos internos permaneçam inalterados. Em seguida, trace uma reta sobre uma folha de papel e tente montar uma nova figura, unindo os ângulos internos do triângulo, de modo que eles fiquem adjacentes. O que você observou?
2. Meça com o transferidor o ângulo formado pelos três ângulos de um triângulo e anote no quadro 16.
3. Agora, construa um quadrilátero e faça o mesmo procedimento do item 1, porém dividindo-o em 4 partes. O que você observou?
4. Meça com o transferidor o ângulo formado pelos ângulos internos do quadrilátero. Anote o resultado no quadro 16.
5. Desenhe o mesmo quadrilátero, fixe um vértice e trace todas as diagonais que saem desse vértice. Quais figuras se formaram? Qual a relação do ângulo medido no item 4 e os ângulos das figuras somadas.
6. Desenhe um pentágono, fixe o vértice e trace todas as diagonais que saem desse vértice. Anote o resultado do quadro 16.
7. Faça o mesmo procedimento do item 6 para os hexágonos, heptágonos e octógonos.
8. Analise o quadro 16. Existe alguma relação entre o número de lados e a soma dos ângulos internos do polígono? Discuta com os colegas.

Quadro 16: Soma dos ângulos internos de um polígono.

Polígonos	Nº de lados	Nº de ângulos	Nº de triângulos	Soma dos ângulos internos
Triângulo				
Quadrilátero				
Pentágono				

9. E se o polígono tiver n lados como poderíamos determinar a soma de seus ângulos internos? Escreva uma relação para tal. Discuta com os colegas suas conclusões.
10. Agora, desenhe um quadrilátero numa folha de malha pontilhada. Construa os ângulos externos desse quadrilátero. Lembre-se que o ângulo externo é formado com o lado do quadrilátero e o prolongamento do outro lado. Marque esses ângulos. Depois, recorte os ângulos externos e coloque um perto do outro, formando uma circunferência.
11. Utilizando o transferidor, meça o ângulo formado e anote no quadro 17.
12. Faça o mesmo procedimento do item 10 e 11, para o pentágono, hexágono e heptágono. O que você observou? Discuta com os colegas.

Quadro 17: Soma dos ângulos externos do polígono.

Polígonos	Nº de lados	Nº de ângulos externos	Soma dos ângulos externos
Quadrilátero			
Pentágono			
Hexágono			
Heptágono			

13. Utilizando os resultados do quadro 16, seria possível determinar a medida do ângulo interno do polígono? Descreva o que você pensou e discuta com os colegas.
14. Utilizando os resultados do quadro 17, seria possível determinar a medida do ângulo externo do polígono? Discuta com os colegas e anote suas conclusões.

Fonte: elaborado pela autora.

Para a realização dessa tarefa foram necessárias quatro aulas de cinquenta minutos cada.

Durante a realização dessa tarefa, a professora vivenciou uma situação inesperada quanto à investigação dos ângulos externos de um polígono. Se o polígono for convexo quando fizermos o recorte desses ângulos e unirmos o seus lados adjacentes sempre vai formar uma circunferência. Porém, quando se tratar de um polígono não convexo, não conseguimos fazer essa circunferência, sempre fica sobrando um ângulo. Essa situação pode ser explicada pelo fato do ângulo externo do vértice reentrante do polígono não convexo medir mais que 180 graus. Como os ângulos internos e externos de um polígono são suplementares, nesse caso, a sua soma dava mais que 180 graus. Para ser verdadeira essa propriedade, o ângulo externo formado pelo prolongamento de um lado e o outro lado de um vértice reentrante de um polígono não convexo tem que ser negativo.

Por esse motivo, quando os alunos colaram os ângulos sempre sobrava um ângulo. Essa sobra seria a medida desse ângulo negativo.

Essa situação só confirmou a questão da investigação matemática, onde conhecemos o início, mas não podemos prever os resultados. Por isso, é muito importante nos preocuparmos com todo o processo de uma investigação e aqui sem dúvidas, o material didático manipulável permitiu aos alunos visualizar essa situação, facilitando assim, refutar e rever suas conjecturas.

4.8. Tarefa 8: Dobras e cortes

Essa tarefa foi retirada de Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), cujo objetivo é investigar os polígonos obtidos e suas propriedades, através de dobras e cortes numa folha de papel.

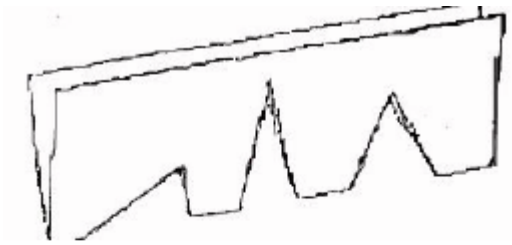
Lamonato e Passos (2008) apresentaram os resultados de uma pesquisa com professores que utilizaram essa tarefa na íntegra e adaptada. Realizaram duas tarefas, a primeira não determinaram qual tipo de triângulo iriam recortar e na segunda, utilizaram o mesmo enunciado que Ponte, Brocardo e Oliveira (2003). Mostraram que o enunciado da tarefa tem importância para direcionar a investigação.

Após observar as considerações das autoras e conhecer o público alvo da pesquisa de mestrado, optamos por utilizar a tarefa conforme proposta por Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), como mostra no quadro 18. Para a realização dessa tarefa foram necessárias várias folhas de papel (pode ser de revista, jornal), tesoura, lápis e régua.

Quadro 18: Dobras e cortes

1. Uma dobragem e dois cortes.

a) Numa folha de papel dobrada ao meio, corte triângulos equiláteros, isósceles e escalenos. Pegue os pedaços de papel que obteve, desdobre-os e diga quais as formas geométricas que têm.



b) Com apenas dois cortes, e se quiser obter triângulos equiláteros, isósceles e escalenos na folha de papel, que cortes deve fazer? Desenhe o esboço que mostre os cortes que fez e comente as suas descobertas.

2. Mais dobragens e um só corte.

a) Agora você vai investigar o que acontece quando se faz mais do que uma dobra mantendo ajustados os lados da folha de papel.

b) Com duas dobras e um corte, que tipo de figura obtém? De que maneira consegue obter um quadrado?

c) Agora com três dobras, experimente fazer a mesma investigação. De que maneira consegue obter um quadrado?

d) E com quatro dobras?

Fonte: (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2003, p. 72-74)

Para a realização dessa tarefa foram necessárias quatro aulas de cinquenta minutos cada.

Dentre todas as tarefas apresentadas, esta foi a que não proporcionou uma boa investigação. É preciso o acompanhamento do professor em todos os momentos da investigação, pois analisando os resultados percebemos que se a professora tivesse assumido definitiva a postura interrogativa, os resultados seriam outros.

4.9. Tarefa 9: Construindo mosaicos

Essa tarefa tem como objetivo investigar quais condições são necessárias para que polígonos regulares ou não, possam formar mosaicos no plano, propiciando assim, o aprofundamento do conceito de ângulos, propriedades e relação entre lados, vértices e ângulos de um polígono.

Para a realização dessa tarefa foram necessárias folhas impressas com vários polígonos regulares ou não com números de lados diferentes, tesoura, transferidor, régua, folha com malha pontilhada, lápis e borracha.

Primeiramente, discutimos o que seria um mosaico. Para tal, apresentamos diversos exemplos de mosaico. O próximo passo foi a realização da tarefa exploratório-investigativa, conforme quadro 19.

Quadro 19: Orientações para a pavimentação de planos através de mosaicos.

1. Entregar aos alunos diversos polígonos coloridos para recortar.

a) Dentre os polígonos que vocês recortaram, quais polígonos regulares e congruentes entre si pavimentam perfeitamente o plano? Discuta com os colegas.

b) Existe uma relação entre os ângulos internos e os mosaicos construídos? Discuta com os colegas e anote suas conclusões.

c) O que acontece se colocar mais um polígono do mesmo tipo, de modo que seus lados se encaixem perfeitamente e seus vértices coincidam? Discuta com os colegas e anote suas conclusões.

d) E se combinar polígonos regulares diferentes, o que você percebe? Discuta com os colegas.

e) Agora, construa os mosaicos dos itens anteriores na folha de papel pontilhado, meça os ângulos e anote suas conclusões.

f) Agora utilizando polígonos irregulares, tente construir mosaicos. Existe uma relação entre lados e os ângulos? Discuta com os colegas e anote suas conclusões.

Fonte: elaborado pela própria autora.

Para a realização dessa tarefa foram necessárias quatro aulas de cinquenta minutos cada.

Os alunos fizeram não apresentaram dificuldades para fazer esse tipo de tarefa. Ao investigar como ocorre a pavimentação todos os grupos perceberam que os lados e os vértices dos polígonos devem formar um ângulo de 360º, caso contrário, fica faltando um polígono para completar o espaço vazio.

As nove tarefas apresentadas neste produto educacional podem ser utilizadas na integra nas salas de aula ou podem servir de exemplo para a criação de outras tarefas que abordem outros conceitos geométricos ainda não discutidos na pesquisa de mestrado

Ao elaborar a sequência didática consideramos os autores estudados no referencial teórico e na revisão de literatura. A preocupação central sempre esteve voltada para um aprendizado significativo, que de alguma maneira, levasse o aluno a refletir, conjecturar, formular, analisar e registrar suas conclusões. Dessa maneira, utilizando a manipulação de diversos materiais, os alunos tiveram a oportunidade de compreender o conceito de polígonos e suas propriedades.

Percebemos também que, a partir da revisão de literatura, evidenciou-se o aumento de interesse pela temática, ensino e aprendizagem de polígonos, porém ainda existem algumas lacunas referentes ao estudo desse conceito, o que mostra a relevância desse produto educacional.

5. ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

O presente produto educacional foi fruto da pesquisa de mestrado cujo objetivo foi o de investigar as possíveis contribuições que as atividades exploratório-investigativas, aliadas ao uso de material didático manipulável, proporcionam para a aprendizagem de conteúdos relativos a polígonos por alunos do 8º ano do Ensino Fundamental e para o processo de reflexão sobre a própria prática pedagógica da professora.

Para tal, elaboramos uma sequência didática composta por nove tarefas exploratório-investigativas por meio das quais os alunos pudessem realizar suas descobertas, percepções, constatações e soluções. Procuramos também utilizar os materiais didáticos com características que facilitaram sua aplicabilidade para modelar o maior número possível de ideias e conceitos matemáticos.

Nesse contexto investigativo, percebemos que a intervenção do professor faz-se necessária e a mesmo deve ter uma postura interrogativa, evitando assim, responder as perguntas dos alunos diretamente, o que não propicia um trabalho investigativo.

A reflexão sobre a prática pedagógica da professora proporcionou rever a dinâmica da sala de aula, transformando o ambiente escolar num espaço de interação, participação, afeto pela matemática, autonomia e compartilhamento das ideias.

Nesse sentido, deixamos algumas sugestões que poderão auxiliar o professor na dinâmica das aulas de cunho investigativo, a saber:

- As tarefas podem ser aplicadas durante todo o ano letivo, intercaladas com outros conceitos matemáticos, sem a necessidade de um período específico, como foi feito na dissertação de mestrado para a coleta de dados;
- Trabalhar sempre em pequenos grupos, de no máximo 5 alunos, pois isso facilita a intervenção do professor;

- Pedir ao aluno que fale sobre o que está pensando ou fazendo propicia a socialização de suas ideias e, como consequência, o registro escrito de suas conclusões. Vamos dar voz aos nossos alunos.
- Sempre que for necessária a intervenção, não responda diretamente uma pergunta. Procure sempre devolver a resposta com outra pergunta, isso facilita o desenvolvimento do pensar geometricamente.
- As tarefas foram aplicadas na ordem apresentada nesse produto educacional, mas o professor pode inverter a ordem;
- O tempo de desenvolvimento de cada tarefa pode ser diferente do descrito no texto, pois vai depender do perfil da turma;
- As tarefas foram descritas conforme aplicadas na sala de aula. É preciso deixar espaço para o registro escrito dos alunos, pois para apresenta-las nesse texto, esse espaço foi retirado;
- É muito importante pesquisar e realizar leituras para ampliar o seu conhecimento sobre os conceitos abordados, pois assim, estaremos mais preparados para lidar com situações que podem acontecer durante a aplicação das tarefas.

E por fim, agradecemos ao Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora pela oportunidade de podermos contribuir para o ensino e aprendizagem em geometria, aproximando assim, a teoria da prática pedagógica da professora. Isso possibilitou um olhar crítico e reflexivo sobre o ambiente escolar.

6. SUGESTÕES DE LEITURAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular** – Documento preliminar. 2ª versão. MEC. Brasília, DF, 2016.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental, **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

COLINVAUX, D. Aprendizagem e construção/constituição de conhecimento: reflexões teórico-metodológicas. **Pro-Posições**. Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, v. 18, n. 3(54), p. 29-51, set./dez. 2007.

FIORENTINI, D. Grupo de Sábado: uma história de reflexão, investigação e escrita sobre a prática escolar em matemática. In: FIORENTINI, D.; CRISTÓVÃO, E. M. (Org.). **Histórias e investigação de/em aulas de matemática**. Campinas, SP: Editora Alínea, 2006. p. 13-36.

GÓMEZ-CHACÓN, M. I. **Matemática emocional: Los afectos en el aprendizaje matemático.** Madrid: Narcea, 2000.

HERSHKOWITZ, R. Aspectos psicológicos da aprendizagem da geometria. **Boletim Gepem,** Rio de Janeiro, n. 32, p. 3-31, 1994.

KALEFF, A. M. M. R. **Vendo e entendendo poliedros:** do desenho ao cálculo do volume através de quebra-cabeças e outros materiais concretos. Niterói: EdUFF, 2003.

KALEFF, A. M. M. R. Criatividade, Educação Matemática e Laboratório de Ensino. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5, 2011, Brasília, **Anais...** Brasília: SBEM – Regional, p. 1-20, 2011.

LIMA, C. N. M. F; NACARATO, A.M. A INVESTIGAÇÃO DA PRÓPRIA PRÁTICA: mobilização e apropriação de saberes profissionais em Matemática. **Educação em Revista**. Belo Horizonte, v.25, n.02, p. 241-266, ago. 2009.

LORENZATO. S. Como aprendemos e ensinamos geometria. In: _______. (Org.). **Aprender e ensinar geometria**. Campinas: Mercado de Letras, p. 11-33, 2015.

PONTE, J. P**.** Investigar a nossa própria prática. In: GTI (Org). Reflectir e investigar sobre a prática profissional. Lisboa: APM, p. 5-28, 2002. Disponível em: <http://www.ipb.pt/~mjt/documdisciplinas/investigaranossa.pdf>. Acesso em: 31 out. 2016.

PONTE, J. P. Investigar, ensinar e aprender. In: **ACTAS do PROFMAT**. Lisboa: APM, p. 25-39, 2003. Disponível em: <http://www.ime.usp.br/~iole/GEN5711/Ponte,%20J.P.%20Investigar,%20Ensinar%20e%20aprender.pdf> . Acesso em: 15 mar. 2016.

PONTE, J. P. Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal. **Investigar em Educação**, v. 2, p. 93-169, 2003.

REZENDE, D. P. L. O Laboratório de Ensino de Matemática nos anos finais do ensino fundamental: um relato de experiência. In: ENCONTRO CAPIXABA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, X, 2015. Vitória. **Anais...** Vitória, 2015, p. 1- 9.

SANTOS, C. A.; NACARATO, A. M. **Aprendizagem em Geometria na educação básica**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2014.

WICHNOSKI, P., KLÜBER, T. E. Uma revisão crítica da tendência investigação matemática no Brasil. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XIV, 2015, Chiapas, México. **Anais...** Chiapas, México, p. 1-9, 2015.

7. REFERÊNCIAS

ABRANTES, P. Investigações em geometria na sala de aula. In: VELOSO, E.; FONSECA, H.; PONTE, J. P.; ABRANTES, P. (Org.). **Ensino da Geometria no virar do milénio**. Lisboa: Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, p. 51–62, 1999.

ABREU, M. G. S. **Uma investigação sobre a prática pedagógica**: refletindo sobre a investigação nas aulas de matemática – São Carlos: UFSCar, 2008. 192 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de São Carlos, 2008.

BAIRRAL, M. A. **Instrumentação do ensino da Geometria**. Rio de Janeiro: Fundação Cecierj, v. 1, 119p, 2004.

CASTRO, J. F. **Um estudo sobre a própria prática em um contexto de aulas investigativas de matemática**, 2004, 196p. Dissertação (Mestrado em Educação: Educação Matemática). Faculdade de Educação, Universidades Estadual de Campinas, 2004.

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática**: da teoria à prática. Campinas: Papirus, 2012.

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. **Zetetiké,** v. 3, n. 4, p. 1-16, 1995.

FONSECA, M.C.F.R., et al. **O ensino de geometria na escola fundamental**: três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011.

KALEFF, A. M. M. R. Do fazer concreto ao desenho em geometria: ações e atividades desenvolvidas no laboratório de ensino de geometria da Universidade Federal Fluminense. In: LORENZATO, Sérgio**. Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2012. p. 113-134.

KALEFF, A.M.M.R. **Tópicos em ensino de Geometria:** A Sala de Aula frente ao Laboratório de Ensino e à História da Geometria. Rio de Janeiro: Cecierj, 2008.

LAMONATO, M.; PASSOS, C. L. B. Investigando Geometria: aprendizagens de professoras da educação infantil. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES

DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XII, Rio Claro. **Anais...** Rio Claro, 2008.

LORENZATO, S. **Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis.** In: LORENZATO, S. (org.). O laboratório de ensino de matemática na formação de professores - Campinas. SP: Autores Associados, 2006. p. 3-37.

LORENZATO, S. (org.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. Campinas, SP: Autores Associados, 2012.

MATOS, J. M. e SERRAZINA, M. de L. **Didáctica da Matemática**. Lisboa: Universidade Aberta, 1996.

NACARATO, A. M. Eu trabalho primeiro no concreto – São Paulo, SP: **Revista de Educação Matemática.** Ano 9, n. 9-10, p. 1-6 2004.

PASSOS, C. L. B. Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática. In: LORENZATO, Sérgio. **Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores.** Campinas: Autores Associados, 2012. p. 77-92.

PASSOS, C. L. B.; LAMONATO, M.; PITON-GONÇALVES, J. Investigações geométricas: reflexões sobre aprendizagens compartilhadas em um grupo. In: ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, VIII, 2006, São Paulo. **Anais...** São Paulo, p. 1-12, 2006.

PROENÇA, M. C.; PIROLA, N. A. Um estudo sobre o desempenho e as dificuldades apresentadas por alunos do ensino médio na identificação de atributos definidores de polígono. **Zetetiké**, Campinas, v. 17, n. 31, jan./jun., 2009.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H.; **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

PONTE, J. P., OLIVEIRA, H., BRUNHEIRA, L., VARANDAS, J. M., FERREIRA, C. O trabalho do professor numa aula de investigação matemática. **Quadrante**, v. 7, n. 2, p. 41-70, 1998.

RÊGO, R. M.; RÊGO, R. G. Desenvolvimento e uso de materiais didáticos no ensino de matemática. In: LORENZATO, Sérgio. **Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores.** Campinas: Autores Associados, p. 39-56, 2012.

RÊGO, R. G; RÊGO, R. M.; VIEIRA, K. M.; **Laboratório de ensino de geometria**. Campinas, SP: Autores Associados, 2012.

SCHEFFER, N. F. O LEM na discussão de conceitos de geometria a partir de mídias: dobradura e software de dinâmico. LORENZATO, S. (org.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. 3ª. ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2012. p. 93-112.

ZABALA, A. **A Prática Educativa**: Como educar. Porto Alegre, 1998.