UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

LEIDE MARIA LEÃO LOPES

# MINICURSO: EXPLORANDO O PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO EM ATIVIDADES PARA O ENSINO DE VETORES EM GEOMETRIA ANALÍTICA

JUIZ DE FORA, MG
2019

## RESUMO

Este minicurso se propõe a analisar as contribuições de atividades de Geométrica Analítica na formação de imagens de conceito e elaboração da definição de conceitos relacionadas à vetores de estudantes de Licenciatura em Matemática. Se fundamenta teoricamente no conhecimento do Pensamento Matemático Avançado embasado na noção de imagens de conceito e definição de conceito. Os procedimentos metodológicas do minicurso se enquadra na modalidade de experimento de ensino com abordagem de cunho qualitativo, como instrumento será utilizado: grupos de atividades pré-elaboradas, observação e questionário. O minicurso será realizado através de 4 encontros, com carga horária total de 10 horas e será destinado a estudantes do curso de Matemática. Espera-se que os participantes percebam que é possível operar vetores geometricamente sem auxílio dos eixos coordenados e notem a equivalência das definições geométricas e algébricas. Espera-se obter resquícios de imagens de conceito e definição de conceito a partir das respostas escritas, além das falas, gestos, etc. Considera-se que a maneira que o conteúdo é explanado pode representar um rico potencial de investigação para formação de imagens e definições de conceito por parte dos estudantes do curso de Licenciatura em Matemática.

**Palavras-chave**: Educação Matemática; Pensamento Matemático Avançado; Ensino Superior.

## SUMÁRIO


| | |
|---|---|
| Apresentação | 4 |
| Justificativa | 5 |
| Objetivo | 6 |
| Plano de ação | 7 |
| Procedimentos metodológicos do Minicurso | 8 |
| Sobre o Pensamento Matemático Avançado | 9 |
| Sobre a transição do pensamento matemático elementar para o pensamento matemático avançado | 11 |
| Imagem de conceito e definição de conceito | 13 |
| Concepções de vetores e alguns aspectos sobre o ensino geometria analítica relacionado à vetores. | 17 |
| Roteiro do Encontro nº 1 | 20 |
| Roteiro do Encontro nº 2 | 26 |
| Roteiro do Encontro nº 3 | 30 |
| Roteiro do Encontro nº 4 | 34 |
| Referências | 35 |

## Apresentação

Diante das contribuições da Educação Matemática no Ensino Superior e das prospectivas elaboradas, proporemos a realização de um minicurso munido de atividades que, a princípio, acreditamos contribuir didaticamente na formação das imagens e definições de conceitos dos alunos a partir do estudo de vetores.

Este produto educacional é fruto da dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Educação Matemática do Programa de Pós Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, intitulada “Formação de imagem de conceito e reelaboração da definição de conceito relacionado ao ensino de vetores em Geometria Analítica”.

Este minicurso será realizado em 4(quatro) encontros com duração de 2,5 horas cada um, totalizando uma carga horária de 10(dez) horas. E constituído de atividades pré-elaboradas divididas em três grupos:

Grupo 1 – Atividade geométricas de vetores;

Grupo 2 – Atividades algébricas de vetores;

Grupo 3 – Atividades geométricas e algébricas.

Esta ação está direcionada para estudantes do curso de Licenciatura em Matemática. E como critério, estabelece-se que estes estudantes estejam cursando ou já tenham cursado o curso de Geometria Analítica.

## Justificativa

O interesse da realização deste minicurso sobre a formação de imagens de conceito e reelaboração de definição de conceito relacionado ao ensino de vetores em Geometria Analítica é advindo da experiência da pesquisadora enquanto docente no ensino superior. Esta investigação se confirma por diversos pesquisadores em Educação Matemática que detectaram dificuldades de alunos na aprendizagem de Geometria Analítica, a exemplo temos Cavalca (1997) e Munhoz(1999), que apontam que a maneira que a disciplina de matemática vem sendo tratada ao longo do ensino médio e superior contribui para o agravamento destas dificuldades, e isso pode gerar consequências na transição da representação geométrica para algébrica de conceitos e propriedades inerentes à mesma.

No primeiro ano do curso de licenciatura em matemática, nos deparamos com muitos alunos que tem dificuldades na interpretação de questões de geometria analítica que são puramente abstrata, e isso é uma das inquietações que levou-me a reconhecer a necessidade de um estudo sobre vetores, por indicar possibilidades destes estudantes apresentarem imagens de conceito incompleta sobre esta temática.

Entretanto, este minicurso levará em consideração como objeto abstrato a Álgebra e como objeto concreto a Geometria Euclidiana, pois acredita-se que a partir de manipulações geométricas com vetores, possa ser possível manifestações de entendimentos algébricos por partes dos estudantes no primeiro ano do curso de Licenciatura em Matemática.

Em torno das experiências citadas, sobre a aprendizagem e questionamentos, têm-se como proposta este minicurso que foi gerado a partir da pesquisa de campo do mestrado, com o objetivo de investigar quais as contribuição de atividades de Geometria Analítica para formação de imagens de conceito e reelaboração da definição de conceito relacionadas à vetores com estudantes de Licenciatura em Matemática.

## Objetivo

Este minicurso tem como objetivo analisar a formação de imagens de conceito e reelaboração da definição de conceitos relacionadas à vetores a partir de atividades de Geometria Analítica. Além de observar sobre as interpretações algébricas dos estudantes sobre vetores após realizarem operações geométricas e observar a transição do método geométrico (Pensamento Matemático Elementar) para o método algébrico/abstrato (Pensamento Matemático Avançado).

## Plano de Ação

O plano de ação do minicurso será distribuído da seguinte maneira:

1º tempo - 60 min: será feita uma apresentação expositiva sobre do Pensamento Matemático Avançado; sobre a transição do pensamento matemático elementar par o pensamento matemático avançado; sobre imagens de conceito e definição de conceito; concepções de vetores e alguns aspectos sobre o ensino geometria analítica relacionado à vetores.

2° tempo - 45 min: neste segundo momento, terá umas breve explanação sobre operações de vetores de forma geométrica e algebricamente. Posteriormente os participantes serão convidados a resolverem individualmente as atividades de nº1.

3° tempo - 45 min: os participantes serão distribuídos em duplas, para que possam dar continuidade na resolução das atividades propostas (atividades de nº2) sobre operar vetores a partir de equações que envolvem soma, diferença e multiplicação por escalar.

No decorrer das aplicação das atividades o professor/pesquisador deve ficar atento para observar qualquer manifestação dos participantes, com objetivo de obter elementos que possam ser considerados indícios de imagens de conceito e definições de conceitos como comentários, gestos, falas, escrita, etc.

**Procedimentos Metodológicos do Minicurso**

Este minicurso resume-se em apresentar concepções e trabalhos acerca das teorias sobre imagens de conceito e definição de conceito que fazem parte da linha de pesquisa do Pensamento Matemático Avançado, familiarizando os participantes com o tema e socializando os resultados da pesquisa de campo realizada com estudantes de licenciatura em Matemática, sobre operações com vetores em Geometria Analítica.

O minicurso será destinado a estudantes do curso de Licenciatura em Matemática que estejam cursando ou já tenham cursado a disciplina de Geometria Analítica.

As opções metodológicas subjacentes a este minicurso se enquadra na modalidade de experimento de ensino com abordagem de cunho qualitativo.

Serão utilizados como instrumento: atividades pré-elaboradas e um questionário. Além dos recursos didático como projetor multimídia e computador.

Com intuito de investigar indícios de imagens de conceito e definições de conceitos analisar-se-á os registros escritos, falas, gestos e comentários apresentados pelos participantes durante a realização das atividades.

O minicurso será desenvolvidos através de quatro encontros, onde cada encontro terá duração de 2,5 horas, totalizando a carga horária de 10 horas. Cada encontro seguirá um roteiro contendo as características de cada um.

.

**Alguns tópicos importantes**

**Sobre o Pensamento Matemático Avançado**

Os fundamentos deste minicurso estão atrelados ao termo Pensamento Matemático Avançado, para o qual existe uma variação de definições. Há, no entanto, algumas diferentes perspectivas sobre o termo PMA, destacando características que o distingue do pensamento matemático elementar (ELIAS; BARBOSA; SAVIOLI, 2012, p. 4).

Optamos por utilizar como fundamentação teórica principal os estudos de David Tall e Shlomo Vinner (1981) e Winner (1991), dentre outros pesquisadores.

Nessa perspectiva, dissertamos sobre o PMA e o que esse termo quer dizer.

Indiscutivelmente, agimos e pensamos diferente, e apresentamos uma variedade de dificuldades quando um conceito nos é repassado em sala de aula. Nesse sentido, Vinner e Tall (1981) consideram que existe uma estrutura cognitiva complexa que produz uma variedade de imagens mentais quando um conceito é evocado, antes de serem formalmente definidos na mente de cada indivíduo.

De acordo com os estudiosos supracitados, na formação desse pensamento, ocorre a associação simbólica ao conceito, que é uma maneira de compreensão e comunicação do que se aprendeu. E, quando isso ocorre, acontece a manipulação mental do aprendiz.

Segundo Tall (1998, p. 5), “o pensar em matemática avançada nem sempre é um processo lógico para a criação de ideias matemáticas”. Para este pesquisador, somos criativos, mas é bem depois do pensamento elementar que nos ocorre a abstração das coisas que aprendemos, ou seja, é nesse estágio que é exigido a abstração das propriedades de conceitos matemáticos. Baseados na definição de Tall (1998), significa que, quando isso ocorre, o sujeito (aluno) é capaz de manipular as suas próprias definições conceituais produzidas, de forma abstrata, para desenvolver as relações lógicas dos conceitos que foram estudados anteriormente.

Tall (1981, apud CARMO; SOARES; SOUZA, 2016) afirma que, durante os processos mentais de recordar e manipular um conceito, muitos processos associados são colocados em jogo, consciente e inconscientemente, afetando seu significado e uso.

O termo PMA, segundo Dreyfus (2002), consiste na interação entre vários processos, como os processos de representar, visualizar, generalizar, entre outros. Para o autor, não existe uma diferença nítida entre os processos envolvidos no PMA e no PME. Pois, ele nos afirma, que há tópicos da matemática elementar que podem ser tratados de forma avançada, assim como há pensamento elementar sobre temas avançados, e que depende da complexidade de como são tratados e gerenciados tais processos presentes em cada um dos pensamentos.

Segundo Gray (1999), atividades cognitivas envolvidas no pensamento matemático avançado podem diferir grandemente de um indivíduo para outro.

Estas ideias sobre PMA parecem fazer transparecer diferentes significados, enquanto umas dão importância aos processos envolvidos e suas interações para a compreensão da matemática avançada, outras defendem os tipos de atividades cognitivas, pois as atividades podem ser responsáveis por sustentar tal pensamento na mente do aluno, e isto pode variar.

Olímpio (2006) nos remete a um conhecimento que nos auxilia nessa compreensão sobre o PMA. Segundo o autor, este pensamento caminha no direcionamento de diferentes competências, a saber:

> Pensamento Matemático Avançado (TALL, 1991): pensamento este qualificado como um conjunto de competências complexas que se pretende que o(a)s aluno(a)s universitários demonstrem, dentre as quais se incluem desde a capacidade de representar objetos e situações matemáticas, relacionando essas representações e efetuando generalizações, até a de fazer conjecturas e de demonstrar teoremas (OLIMPIO, 2006, p. 33).

As ideias dos pesquisadores apontam aspectos importantes para a aprendizagem de um curso de Geometria analítica. Pois acreditamos que as definições do Pensamento Matemático Avançado na Geometria Analítica podem auxiliar na transição da representação geométrica (concreto, palpável) para a representação algébrica (abstrata, puramente mental), superando dificuldades de estudantes em relação a Vetores.

**Sobre a transição do pensamento matemático elementar para o pensamento matemático avançado**

Apresentamos algumas diferentes perspectivas sobre o pensamento matemático, que, segundo alguns pesquisadores, diferem da educação básica para a superior.

Concordando com Tall (1991), muitas das atividades que ocorrem no ciclo completo de atividade em PMA também ocorrem na resolução de problemas da matemática elementar, mas a possibilidade de definição formal e dedução é um fator que distingue o PME do PMA.

Podemos encontrar outros fatores que distinguem os dois pensamentos, por exemplo, “a passagem do descrever para o definir, do convencer para o provar de uma maneira lógica baseada em definições” (TALL, 1995, p. 17). O autor acrescenta que a linha separadora entre o PMA e o PME é aquela que localiza a mudança cognitiva ocorrida com a introdução do método axiomático, onde os objetos têm um estado cognitivo novo, como conceitos definidos construídos de definições verbais.

Tall (2002), ao discorrer sobre coerência e consequência, em sua obra, nos diz que, “é a transição da coerência da matemática elementar (vista na educação básica) para a consequência da matemática avançada (vista no ensino superior) que é baseada em entidades abstratas que o indivíduo deve construir a partir de deduções de definições formais (TALL, 2002, p. 20).

Elias, Barbosa e Savioli (2012), em suas pesquisas, defendem a questão da percepção de algum objeto de estudo, em relação à ação sobre este. Os autores se embasam na hipótese de Tall (1995), sobre transição de um pensamento para o outro, ao considerar que:

> A transição cognitiva do pensamento matemático elementar para o avançado no indivíduo se dá, inicialmente, com a percepção de e a ação sobre objetos do mundo exterior e é construído por meio dos dois desenvolvimentos paralelos citados anteriormente, inspirando o pensamento criativo baseado nos objetos formalmente definidos e na demonstração sistemática, (TALL, 1995, p. 163).

Diante da hipótese defendida por Tall (1995), existe a possibilidade de que algumas atividades desenvolvidas sobre o olhar do PMA podem estar presentes no PME. Portanto, diante do meio criativo que existe no PME para resolver um problema matemático, destacou-se a possibilidade da dedução e da definição formal, o que distingue os dois pensamentos.

Gray (1999), referindo-se aos conceitos matemáticos elementares, diz que estes têm propriedades que podem ser determinadas atuando sobre eles, ou seja, o autor quer dizer que as propriedades são manipuladas dos objetos, enquanto que os objetos em PMA são criados de propriedades (axiomas).

Algumas características que diferem o PME do PMA são apresentadas por Dreyfus (2012). Na obra *Advanced Mathematical Thinking*, o autor defende que a forma como é conduzida a transição de um pensamento para o outro é o que os difere (ELIAS; BARBOSA; SAVIOLI, 2012, p. 5).

Retomando o que diz Dreyfus (2002), ao relacionarmos o PMA ao nível de ensino superior, o autor diz que isso independe da idade do aluno e que esse pensamento pode ocorrer sem que isto interfira. Neste contexto, sob a perspectiva de Tall (2002), “a linha separadora entre o PME e o PMA, não está na impossibilidade de um estudante da educação básica conseguir desenvolver um PMA por não ser um adulto, e sim na maneira como a matemática é apresentada neste nível de ensino” (ELIAS; BARBOSA; SAVIOLI, 2012, p. 8). Da mesma maneira, o PMA não é propício somente a alunos do ensino superior.

## Imagem de conceito e definição de conceito

Os fundamentos deste estudo estão atrelados às noções de imagem de conceito e definição de conceito propostos por Tall e Vinner (1981).

Dentre os inúmeros desafios em educar matematicamente, fazer uso das definições de conceitos matemáticos que os livros didáticos receitam é, sem dúvida, um dos maiores desafios ao professor de matemática, pois estas definições, na maioria das vezes, são apresentadas em linguagem abstrata (FONSECA et al., 2013).

Enquanto professores pesquisadores, podemos questionar qual seria a definição adequada, ou qual a definição de melhor compreensão, e, sem dúvida, as respostas iriam apresentar justificativas variadas, e, certamente, a resposta para esse e outros questionamentos tem sido uma meta almejada por muitos pesquisadores, principalmente os envolvidos com a educação matemática.

Segundo Leão e Bisoggnin (2009, p. 2), essa teoria foi desenvolvida no ano de 1981, por David Tall e Shlomo Vinner. Estes defendem que um conceito matemático não deve ser apenas ensinado através da definição formal.

Há décadas, estas questões vêm sendo estudadas por pesquisadores matemáticos, e, neste trabalho, vamos dar destaque aos estudos de David Tall e Shlomo Vinner (1981), pois são fundamentais para o encaminhamento do objeto de estudo desta pesquisa.

De acordo com Tall e Vinner (1981), a teoria de imagem de conceito sugere que o processo cognitivo de certas imagens esteja aliado a um leque de ideias associadas ao conceito, e que a compreensão da própria definição de conceito só é possível quando uma gama de ideias associadas é rica o suficiente.

Ainda sob a ótica dos percussores desta teoria, o estudante tem que ser estimulado a pensar, pois

> [...] trará em sua mente inúmeras representações mentais, como imagens de representações visuais, impressões, experiências e propriedades, as quais podem ser elaboradas, pelos sujeitos, por intermédio de processos de pensamentos sobre essas representações mentais, denominadas pelos autores como Imagem de Conceito (TALL; VINNER, 1981, p. 152).

Sendo assim, essa carga de representações decorre de todo o processo de aprendizagem do estudante, desde a educação básica ao ensino superior, pois, à medida que ele é estimulado, suas ideias vão amadurecendo.

Na teoria desenvolvida por Tall e Vinner (1981), "Imagem de Conceito" é definida como:

> [...] a estrutura cognitiva total associada ao conceito, que inclui todas as figuras mentais, processos e propriedades associados. Ela é construída ao longo dos anos, através de experiências de todos os tipos, mudando enquanto o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece (TALL; VINNER, 1981, p. 152).

Além disso, os autores afirmam que um indivíduo pode ou não utilizar sentença de palavras para especificar um dado conceito, denominada definição de conceito (TALL; VINNER, 1981). Esta afirmação pode ser uma simples memorização por um indivíduo, bem como a expressão da compreensão do significado matemático do conceito ou, ainda, uma reconstrução pessoal da definição formal. E pode ser construída pelo próprio indivíduo ou simplesmente memorizada por ele, pois uma definição de conceito pode mudar ao longo do tempo, da mesma forma que a imagem de conceito. Desta forma, a imagem de conceito pode (ou não) incluir uma definição de conceito pessoal, que, por sua vez, pode (ou não) ser consistente com a definição formal.

Tall (1992, p. 496) ressalta que “a própria ideia de definir um conceito no sentido matemático em oposição a de *descrevê-lo,* é particularmente difícil de compreender”. Segundo o autor, o termo “imagem de conceito” pode ser a descrição de uma estrutura cognitiva, e que esta esteja associada ao conceito ensinado. Essa estrutura cognitiva é representada pelo conjunto formado por todas as imagens, propriedades e/ou processos que alguma vez na mente do indivíduo foram associadas ao conceito. E, à medida que o indivíduo tem novas experiências ao longo do tempo, referentes a um conceito, essas imagens vão sendo enriquecidas, ocorrendo, dessa forma, certa ampliação do conceito imagem.

Mas quando é formada a Definição de Conceito? Segundo Tall e Vinner (1981), a definição de conceito é formada a partir da imagem de conceito, isto quer dizer que toda forma de representação da imagem, através de palavras, leva à definição de conceito.

De acordo com Tall e Vinner (1981), a definição de conceito pode ser expressa como:

> O tipo de palavras que o estudante usa para sua própria explanação de seu conceito imagem (evocado). Se os conceitos definição lhes são dados ou construídos por si mesmo, pode variar de tempo em tempo. Desta maneira um conceito definição pessoal pode ser diferente de um conceito definição formal, este último sendo um conceito definição que é aceito pela comunidade matemática (TALL; VINNER, 1981, p.2).

Os autores complementam, ainda, que, caso a definição de conceito não tenha sido compreendida ou tenha sido esquecida pelo discente, pode não ter existido, ou pode ser inativa, a exemplo da memorização que ele faz ao realizar uma avaliação.

Outros autores chamam atenção para a importância da distinção entre definição de imagem de conceito e definição de conceito, do ponto de vista pedagógico. Baseado no texto de Vinner (1991), temos que:

> [...] muitas palavras em linguagem diária não têm definições (apesar de serem “definidas” de alguma forma em dicionários). Pense em “carro”, “casa”, “verde”, “bonito”, etc., e você imediatamente percebe que para entender, por exemplo, a sentença: “meu bonito carro verde está estacionado em frente à minha casa” você não consulta definições. [...] Entretanto, é necessário consultar definições ao tentar entender a sentença: “dentre todos os retângulos com o mesmo perímetro, o quadrado ´e o que têm área máxima” (VINNER, 1991, p. 86).

Corroborando o pensamento de Giraldo (2004), certamente um aluno de uma disciplina de Matemática no ensino superior deve ter clareza de que a definição de um conceito é o critério decisivo em um desenvolvimento teórico que o envolva, entretanto, para que este objetivo seja atingido, é necessário que, no estágio inicial, este aluno trave contato com mais do que simplesmente a definição formal.

Para justificar o uso da teoria de imagem de conceito e definição de conceito no processo de ensino nesta pesquisa, reiteramos o que afirma Fonseca (2011):

> A maior dificuldade dos alunos com a matemática está na formalização de conceitos abstratos, que para eles, não tem muito significado. Atrelado a isso, um dos maiores desafios do professor, no ensino aprendizagem de matemática é trabalhar com as definições matemáticas que, em geral são apresentadas em linguagem bastante abstrata (FONSECA, 2011, p. 36).

Nesse sentido, as dificuldades apresentadas pelos alunos nos diferentes níveis da educação matemática são baseadas na distinção entre os conceitos matemáticos definidos formalmente e apresentados nas aulas e pelos processos cognitivos pelos quais são compreendidos.

É muito comum o professor fazer uso exclusivo de definições formais recomendadas pelos livros didáticos para a construção de conceitos matemáticos, e isso gera certas limitações ou conflitos para o estudante ao expor suas próprias definições devido a essa exclusividade de definições prontas adotadas pelo docente. Senão, vejamos: um vetor representado por $\vec{v} = (x, y)$ ou um par ordenado $P(x, y)$ não representam um ponto geométrico, mas sim a expressão analítica do vetor ou a representação abstrata do ponto. Podemos citar um modelo abstrato comum obtido pela Álgebra que são as equações do círculo e da reta, pois não são retas, mas equações algébricas, e se essa sentença não tiver muito significado para o estudante, algebricamente, o professor recorre à representação geométrica para demonstrar e provar tal afirmação.

Para Vinner (1893), as noções de imagem de conceito e definição de conceito podem trazer subsídios importantes na construção de um conceito matemático. Nesse sentido, Tall e Vinner “consideram que a imagem conceitual descreve a estrutura cognitiva total que é associada ao Conceito” (FONSECA et al., 2013, p. 4). Sendo assim, acreditamos que, a partir das atividades de geometria analítica propostas e das discussões realizadas durante a pesquisa de campo, temos a possibilidade de analisar as definições de conceitos e reelaboração da imagem de conceito dos sujeitos da pesquisa sobre vetores e confrontá-las com definições formais.

**Concepções de vetores e alguns aspectos sobre o ensino de Geometria Analítica relacionado a vetores**

Neste tópico, apresentamos algumas concepções sobre vetores, sob a perspectiva de alguns pesquisadores:

Steinbruch e Winterle (1987) apresentam vetores da seguinte forma: “vetor determinado por um segmento orientado AB é o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a AB” (STEINBRUCH; WINTERLE, 1987, p. 4). Vale ressaltar que, por muitos anos, os referidos autores tiveram excelente aceitação como referências recomendadas no ensino superior nos cursos de Introdução à Álgebra Linear e de Geometria Analítica.

Uma apresentação de concepção sobre vetor semelhante encontra-se no livro de Álgebra Linear e Geometria Analítica de Valladares (1982, p. 19): “dado um segmento orientado AB chamamos de vetor representado por AB ao conjunto AB de todos os segmentos que são equipolentes a AB”.

Sob a perspectiva de Spiegel, “vetor é uma grandeza que tem módulo ou valor absoluto, direção e sentido, tais como deslocamento, velocidade, força e aceleração” (SPIEGEL, 1966, p. 1).

Eisberg (1982, p. 79), na obra *Física: Fundamentos e aplicações*, apresenta vetor da seguinte maneira: “uma quantidade que se soma a uma quantidade idêntica do modo diferente pelo qual as posições relativas se adicionam requer mais do que um único número para especificá-la completamente, tal grandeza é chamada de vetor”.

Segundo Battist e Nenring (2016, p. 2), “geometricamente no contexto da Geometria Analítica, vetor é entendido como uma classe de equivalência de segmentos orientados equipolentes entre si, ficando definido a partir das noções de módulo, direção e sentido”.

Por conseguinte, Menon (2009, p. 10) nos apresenta vetor da seguinte maneira: “vetor é geometricamente representado por uma seta, com comprimento proporcional ao seu módulo, o que é intuitivo”.

Boldrini et al. (1980, p. 97) exemplificam a representação de vetor “de modo que, soluções de sistemas de equações lineares e equações diferenciais também possam ser representadas por vetores”.

Winterle, destaca:

> Vetores e geometria analítica são assuntos de vital importância na compreensão de disciplinas tais como cálculo, álgebra linear, equações diferenciais, e outras, uma vez que, além de relacionarem as representações algébricas com entes geométricos, visam desenvolver habilidades como raciocínio geométrico e visão espacial (WINTERLE, 2011, p. 6).

Entretanto, a efetivação da aprendizagem será mais consistente e concreta se durante o primeiro ano do ensino superior forem sanadas as dificuldades na compreensão de Geometria Analítica relacionadas a vetores.

Passamos a descrever alguns aspectos relacionados a vetores em alguns estudos no contexto da Geometria Analítica.

Compreendido na literatura em História da Educação Matemática: escrita e reescrita de histórias, Comin et al. (2012) colocam que a Geometria Analítica é considerada imprescindível na Matemática, devido a importância de sua utilização em várias áreas do conhecimento, tanto na formação básica como nos cursos de formação superior.

Destacamos o estudo de Battist e Nenring (2016) que investigou aspectos relevantes na significação do conceito de vetor no contexto da Geometria Analítica por acadêmicos, no processo de ensino e de aprendizagem em ações de uma aula da disciplina de Geometria Analítica e Vetores de cursos de Engenharia. Como subsídio, as autoras usaram software de Geometria Dinâmica, onde puderam considerar relevantes contribuições, e que as interações mediadas pelo conceito de vetor, como também as diferentes representações geométricas, numéricas e algébricas contribuíram de forma positiva na aprendizagem de vetores pelos acadêmicos participantes (BATTIST; NENRING, 2016)

Nos trabalhos de Patrício (2011) e de Pinheiro, Dallemole e Matos (2016), o que nos interessa é a contribuição da pesquisa para o ensino e para a aprendizagem da Geometria Analítica sobre as dificuldades relacionadas à aprendizagem do conceito de vetor no ensino superior. O primeiro autor identificou e analisou as dificuldades encontradas na produção e no tratamento de vetores de uma turma de alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Pará – UEPA, através de registros de representação semiótica e acredita que o estudo realizado possa servir como uma proposta no ensino de vetores e eliminar as dificuldades detectadas pelos participantes do estudo.

Pinheiro, Dallemole e Matos (2016), no trabalho que trata de geometria analítica e vetores, exploram conceitos e propriedades com auxílio das TCI’s no ensino de

Matemática. Buscaram promover uma reflexão sobre o processo de ensino e aprendizagem da Geometria Analítica Plana e Espacial com um grupo de professores e estudantes do curso de Matemática. Neste trabalho, a consideração feita pelos pesquisadores é que “o desenvolvimento cognitivo matemático do educando está diretamente vinculado às ações metodológicas” (PINHEIRO; DALLEMOLE; MATOS, 2016, p. 7).

A relevância dos estudos supracitados está relacionada a pesquisas que versam sobre Geometria Analítica relacionadas, especificamente, sobre vetores no ensino superior e as dificuldades apresentadas por estudantes no início de sua formação.

**Roteiro do Encontro nº 01**

**Apresentação**: O primeiro encontro será contemplado pelo grupo 1 de atividades. Neste grupo as atividades são apresentadas com vetores apenas no ponto de vista geométrico. Segundo Winterle (2011, p. 1), a grande vantagem da abordagem geométrica é possibilitar, predominantemente, a visualização dos conceitos que são apresentados para estudo, o que favorece o entendimento dos estudantes.

**Conteúdo**: Operações geométricas com vetores: soma diferença e multiplicação de um vetor por um número.

**Objetivo**: Espera-se que os participantes se familiarizem com a ideia de que os vetores não precisam ter uma expressão algébrica para serem representados, que podem ser operados geometricamente.

Na atividade 1, espera-se que os participantes notem que vetores podem ser operados geometricamente (apenas desenhos) sem suas coordenadas e sem ajuda dos eixos coordenados.

Na atividade 2, espera-se que os participantes desenvolvam compreensão para operar geometricamente uma equação envolvendo soma, diferença e multiplicação por escalar de vetores.

Em todos os encontros serão expostas as maneiras de operar com vetores e as definições serão disponibilizadas nas atividades propostas.

## Grupo 1: Operações geométricas com vetores

A representação gráfica apresentada permite-nos executar uma série de operações com vetores (soma, subtração, etc.).

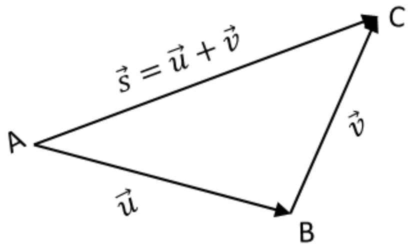
A seguir, apresenta-se as definições dessas operações.

### Soma de vetores

Segundo Steinbruch e Winterle (1987), define-se a soma geométrica de vetores da seguinte maneira:

Sejam os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ representados pelos segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$. Os pontos A e C determinam um vetor $\vec{s}$ que, por definição, é a soma de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, isto é: $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$ .

**Figura 1** - Soma de vetores

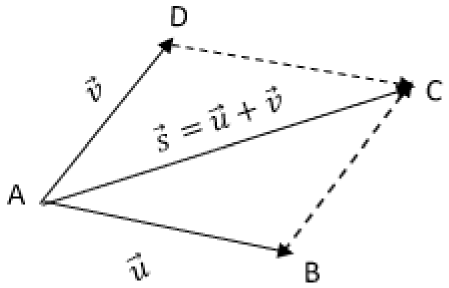



Fonte: Adaptado de Steinbruch; Winterle (1987)

De acordo com Winterle (2011), há outra maneira de encontrar o vetor soma de $\vec{u} + \vec{v}$. Representam-se os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ por segmentos orientados de mesma origem A: $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$. Completa-se o paralelogramo ABCD (Figura 2) e o segmento orientado de origem A, que corresponde à diagonal do paralelogramo, é o vetor:

$\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$, ou seja, $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

**Figura 2** - Soma de vetores

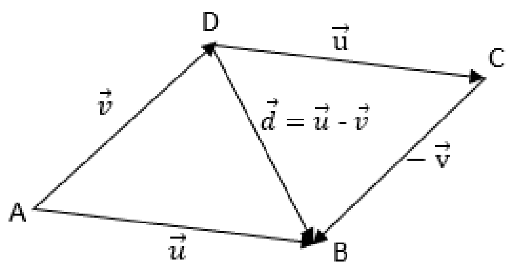



Fonte: Adaptado de Winterle (2011)

**Diferença de vetores**

Consideremos os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ representados pelos segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$, segundo Winterle (2011). A subtração de vetores $\vec{d} = \vec{u}$ - $\vec{v}$ resulta em um terceiro vetor (chamado diferença), representado pelo segmento orientado $\overrightarrow{DB}$, cujas propriedades são inferidas a partir da soma dos vetores $\vec{u}$ e (-$\vec{v}$ ). O vetor -$\vec{v}$ tem módulo e direção iguais ao do vetor $\vec{v}$, mas tem o sentido oposto, conforme ilustração abaixo.

**Figura 3** - Diferença de vetores




Fonte: Adaptado de Winterle (2011)

**Multiplicação de um vetor por um número**

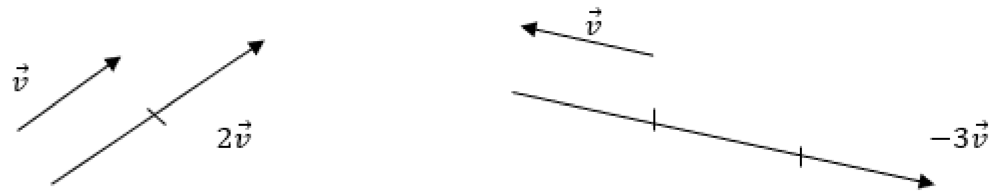
Segundo Steinbruch e Winterle (1987), define-se a multiplicação de um vetor por um número da seguinte forma:

Seja um vetor $\vec{v} \neq 0$ e um número real $k \neq 0$. Chama-se produto do número real *k* pelo vetor $\vec{v}$ o vetor $\vec{p} = k\vec{v}$, tal que:

- ✓ O módulo: $\overrightarrow{|p|}$ = $|k\vec{v}| = |k||\vec{v}|$;
- ✓ Direção: a mesma de $\vec{v}$;
- ✓ Sentido: o mesmo de $\vec{v}$ se k > 0, e sentido contrário ao de $\vec{v}$ se k < 0.

A figura 4 apresenta o vetor $\vec{v}$ e alguns vetores da forma $k\vec{v}$.

**Figura 4** - Produto de vetores por escala

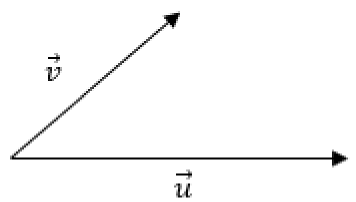



Fonte: Adaptado de Steinbruch; Winterle (1987)

**Atividades 1: Soma, diferença e multiplicação de vetor por um número**

a) Dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ representados na figura 5, desenhe o representante do vetor soma: $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$.

**Figura 5** - Vetores e suas posições no plano




Fonte: Elaboração da autora

b) Considerando os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ da figura a cima, desenhe o vetor representante da diferença: $\vec{d} = \vec{u} + (-\vec{v}\,)$.

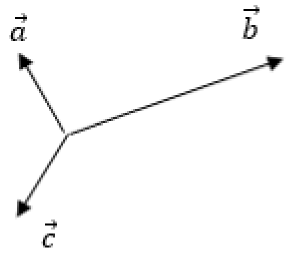
c) Considere o vetor $\vec{u}$ e as definições de operações geométricas, desenhe, no plano representado na figura 5, o seguinte vetor: $\vec{p} = 2\vec{u}$.

Na atividade 1, conceitua-se operações com vetores na forma geométrica. A resolução tem que ser feita no plano e/ou no espaço sem ajuda de eixos coordenados para obter o desenhos dos vetores soma, diferença e produto.

**Atividade 2: operações geométricas com vetores**

a) Os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ estão representados na figura 6 da seguinte maneira:

**Figura 6** - Vetores e suas posições no plano




Fonte: Elaboração da autora

Construa geometricamente o seguinte vetor: $\vec{s} = -2\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + 2\vec{c}$.

b) Desenhe o representante do vetor soma, de acordo com a figura 6, acima.

c) Com base na figura 6, desenhe o seguinte vetor: $\vec{z} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

A resolução deverá ser feita da seguinte maneira: o vetor $\vec{a}$ deverá ter seu tamanho duplicado para depois ter seu sentido invertido, o vetor $\vec{b}$ deverá ter seu tamanho reduzido à metade e o vetor $\vec{c}$ deverá ter seu tamanho dobrado. Feito isso, os estudantes devem aplicar o conceito da soma geométrica de vetores que foi apresentado no enunciado da questão, resultando numa figura.

**Roteiro do Encontro nº 2**

**Apresentação:** O segundo encontro será contemplado pelo grupo 2 de atividade. Neste grupo, as atividades são apresentadas com vetores no sistema de eixos cartesianos do plano, as operações são abordadas sob o ponto de vista algébrico, ou seja, apresenta-se o processo de algebrização do conceito de vetores através de suas coordenadas.

**Conteúdo**: Operações de vetores com coordenadas: soma, diferença e multiplicação por escalar.

**Objetivo**: Espera-se que os participantes concluam que procedimento algébrico das atividades do segundo encontro conduz ao mesmo entendimento geométrico das atividades do primeiro grupo.

Na atividade 1, espera-se que os participantes desenvolvam compreensão para operar vetores abstratamente.

Na atividade 2, espera-se que os participantes concluam que os resultados obtidos nesta atividade coincidem com os resultados da atividade 2 do primeiro encontro.

## Grupo 2: vetores com coordenadas no plano

Apresenta-se algumas definições de vetores com coordenadas no plano, baseadas no livro *Vetores e Geometria Analítica* de P. Winterle e no livro *Geometria Analítica* de A. Steinbruch e P. Winterle.

### Igualdade de vetores

Steinbruch e Winterle (1987) apresentam a definição de igualdade de vetores no plano da maneira seguinte:

Dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ são iguais se, e somente se, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$, e escreve-se $\vec{u} = \vec{v}$.

### Soma de vetores

A soma de vetores com coordenadas no plano é definida por Steinbruch e Winterle (1987), assim:

Sendo $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ dois vetores, define-se a soma de $\vec{u} + \vec{v}$ da seguinte forma: $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2\ , y_1 + y_2)$.

**Multiplicação de vetor por um número**

Segundo Steinbruch e Winterle (1987), define-se multiplicação de vetor por um número:

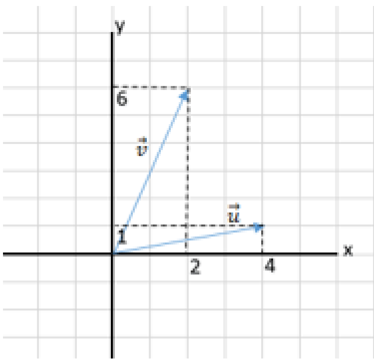
Sendo $\vec{u} = (x_1, y_1)$ um vetor no plano e $k$ um número real. Define-se a multiplicação de um vetor por um número como sendo o vetor $\vec{p} = k.\vec{u} = (kx_1, ky_1)$.

A seguir, apresenta-se as atividades de vetores com coordenadas no plano que compõe o grupo 2, sobre igualdade de vetores, soma de vetores e multiplicação de um vetor por um número.

**Atividades 1: operações com vetores no plano cartesiano**

a) Dados os vetores $\vec{u} = (4\,,1)$ e $\vec{v} = (2\,,6)$ representados na figura 7, desenhe o representante do vetor soma: $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$.

**Figura 7** - Vetores e suas posições no plano cartesiano




Fonte: Elaboração da autora

b) Considerando os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ da figura acima, desenhe o vetor diferença: $\vec{d} = \vec{u} + (-\vec{v}\,)$ no plano cartesiano.

c) Dado o vetor $\vec{u} = (4\,,1)$ e as definições de operações algébricas, desenhe no plano representado na figura 7, o seguinte vetor: $\vec{p} = 2\vec{u}$ .

Nesta atividade os vetores são dados através de suas coordenadas e as operações já não são mais geométricas e sim algébricas.

Os vetores utilizados no grupo 2 são os mesmos utilizados no grupo 1, sendo no primeiro em forma de figuras e no segundo com coordenadas.

A resolução deve ser feita somando-se coordenada a coordenada, de forma semelhante a diferença e na multiplicação, o participante deve multiplicar cada coordenada pelo mesmo escalar, etc.

**Atividade 2: operações de vetores com suas coordenadas**

a) Considere os vetores $\vec{a} = (-1\,, 2)$, $\vec{b} = (4\,, 2)$ e $\vec{c} = (-1, -2)$ assim representados. Determine algebricamente o seguinte vetor: $\vec{s} = -2\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + 2\vec{c}$.

b) Desenhe os representantes dos vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ e $\vec{s}$ no plano cartesiano.

c) O que você pode verificar ao comparar o resultado desta atividade com o resultado obtido na atividade 2 do Grupo 1?

Nesta atividade há os três vetores que foram apresentados na atividade 2 do grupo 1 e a mesma equação, porém agora apresentam-se de forma algébrica.

A resolução deverá ser feita algebricamente da seguinte maneira: o vetor $\vec{a}$ deverá ter seu tamanho duplicado para depois ter seu sentido invertido, o vetor $\vec{b}$ deverá ter seu tamanho reduzido à metade e o vetor $\vec{c}$ deverá ter seu tamanho dobrado. Feito isso, os participantes devem desenhar os representantes dos vetores que foram apresentados no enunciado da questão e depois comparar o resultado desta atividade com o resultado da atividade 2 do grupo 1.

**Roteiro do Encontro nº 3**

**Apresentação**: O terceiro encontro será contemplado pelo grupo 3 de atividades. As atividades deste grupo abordam vetores definidos por dois pontos, operações e igualdade de vetores, e são consideradas mais complexas. Nesse contexto, sob a perspectiva de Tall e Vinner (1981) o Pensamento Matemático Avançado busca entender a evolução do entendimento abstrato a partir de situações consideradas “concretas”, que no caso deste minicurso é a apresentação geométrica nas atividades.

**Conteúdo**: vetores definidos por dois pontos, operações e igualdade de vetores.

**Objetivo**: Investigar se os participantes conseguem passar do processo construtivo (geométrico) para o processo operatório com vetores (algébrico) e observar resquícios da transição do Pensamento Matemático Elementar (PME) para o Pensamento Matemático Avançado (PMA).

Espera-se com estas atividades que os participantes conseguem operar com confiança, ou seja, se conseguem operar e demostrar um entendimento geométrico.

## Grupo 3: Igualdade, Operações, e Vetor Definido Por Dois Pontos

Steinbruch e Winterle (1987), definem igualdade, operações e vetor definidos por dois pontos da seguinte maneira:

### Igualdade de vetores

Dois vetores, $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$, são iguais se, e somente se, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$, e escreve-se $\vec{u} = \vec{v}$.

Exemplo: se o vetor $\vec{u} = (x + 1, 4)$ é igual ao vetor $\vec{v} = (5, 2y - 6)$, de acordo com a definição de igualdade dos vetores, $x + 1 = 5$ e , $2y - 6 = 4$ ou *x* = 4 e *y* = 5. Assim, se $\vec{u} = \vec{v}$, então *x* = 4 e *y* = 5.

### Operações de vetores

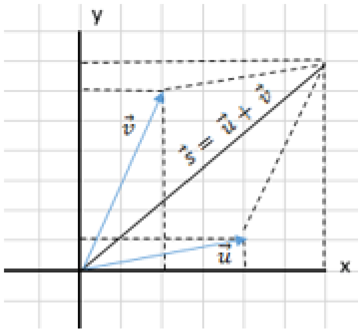
Sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ e *a* ϵ IR. Define-se:

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2) \text{ e } a.\vec{u} = (ax_1, ay_1).$$

Exemplo: dados os vetores $\vec{u} = (4, 1)$ e $\vec{v} = (2, 6)$, para realizar algebricamente as operações, basta somarmos as componentes correspondentes: $\vec{u} + \vec{v} = (4 + 2, 1 + 6) = (6, 7)$ e para multiplicarmos $2\vec{u}$, tem-se: $2\vec{u} = 2(4, 1) = (8, 2)$. (1).

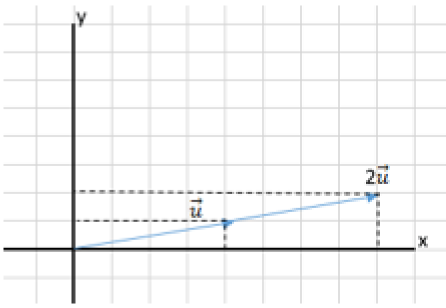
A figura 8 mostra geometricamente a soma de vetores e a figura 9 mostra o produto de vetor por um escalar.

**Figura 8** - Soma de vetores




Fonte: Elaboração da autora

**Figura 9** - Produto de vetor por um número




Fonte: Elaboração da autora

**Vetor definido por dois pontos**

Se A$(x_1, y_1)$ e B$(x_2, y_2)$ são dois pontos quaisquer, então para determinar as componentes de $\overrightarrow{AB}$ , subtraem-se das coordenadas da extremidade B as coordenadas da origem A, da seguinte maneira: $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)$, a razão pela qual também se escreve $\overrightarrow{AB} = B - A$. (2).

Exemplo:

Considerando os pontos $A(-1,2)$, $B(3,-1)$, $C(-2,4)$, determinar $D(\,x, y)$, de modo que $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, segue-se:

$$\overrightarrow{CD} = D - C = (x, y) - (-2,4) = (x + 2, y - 4)$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (3,-1) - (-1,2) = (4,-3)$$

Dessa forma,

$$(x + 2, y - 4) = \frac{1}{2}(4,-3)$$

$$(x+2, y-4) = (2, \frac{-3}{2})$$

$$x+2 = 2; x = 0 \text{ e } y-4 = \frac{-3}{2}; y = \frac{5}{2}$$

Portanto, $D(\,0, \frac{5}{2})$.

**Atividades: Igualdade, Operações e Vetor Definido por Dois Pontos**

a) Dados os vetores $\vec{u} = (2\,,4)$, $\vec{v} = (-1\,,2)$, $\vec{w} = (-3{,}1)$ e $\vec{z} = (-5, -1)$:

-Determine algebricamente a soma de: $\vec{u}$ + $\vec{v}$; ($\vec{u}$ + $\vec{v}$)+ $\vec{w}$ ; e ( $\vec{u}$ + $\vec{v}$+ $\vec{w}$) + $\vec{z}$.

-Desenhe, no plano cartesiano, o representante do vetor obtido em cada operação.

-Qual sua interpretação em relação à soma de mais de dois vetores geometricamente?

b) Os pontos $A(4,1)$, $B(5,3)\ e\ C(3,5)$, assim representados, são vértice de um triângulo:

-Determine algebricamente as componentes dos vetores: $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{CA}$.

-Desenhe o triângulo formado pelos pontos ABC no plano cartesiano.

-Realize a soma de ($\vec{u}$ + $\vec{v}$) + $\vec{w}$ e escreva o que se pode concluir.

c) Considere os vetores $\vec{u} = (3\,,-1)$ e $\vec{v} = (-1\,,2)$ e a expressão dada $4(\vec{u} - \vec{v}) + \frac{1}{3}\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{w}$. Determine o vetor $\vec{w}$. Faça a representação geométrica no plano dos vetores: $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$.

Nesta atividade, há igualdade de vetores, operações e definição de vetores por dois pontos apresentados de uma forma mais complexa para observar se, de fato, os sujeitos da pesquisa se sentem confiantes o bastante para realizar a transição do processo construtivo e o operatório feito abstratamente.

**Roteiro do Encontro nº 4**

**Apresentação**: O quarto e último encontro será destinado a aplicação de um questionário contemplado por sete perguntas, sobre as atividades propostas nos encontros.

**Objetivo**: Analisar a contribuição de atividades de Geometria Analítica na formação de imagens de conceito e na reelaboração da definição de conceito relacionadas à vetores de estudantes de Licenciatura em Matemática.

Considera-se que este instrumento de coleta é essencial para saber o que os participantes do minicurso aprenderam em relação aos processos de operar com vetores (geométrica e algebricamente), e se eles notaram que as definições algébricas para realizar as operações com vetores tem equivalência com a definições geométricas.

**Questionário:**

1) É possível realizar operações com vetores apenas na forma geométrica sem ajuda dos eixos coordenados?
2) É possível resolver uma equação envolvendo soma, diferença e multiplicação por escalar de vetores sem ter uma expressão algébrica?
3) É possível realizar operações de vetores representados na forma algébrica apenas?
4) O que representa geometricamente a soma de mais de dois vetores?
5) O que se conclui com os resultados obtidos nas operações de vetores com coordenadas do grupo 2, após ser desenhada?
6) Existe coerência entre os resultados obtidos nas atividades dos grupos 1 e 2?
7) A partir das atividades deste minicurso, o que você considerou importante?

## REFERÊNCIAS


BATTIST, I. K., & NENRING, C. M. A Significação do conceito de vetor, no contexto da Geometria Analítica, por acadêmicos. **Anais do XXI Jornada de Pesquisa**: Salão do Conhecimento, ciência alimentando o Brasil, 2016, p. 8.

CARMO, P. S; SOARES, M. R; SOUZA. H. T. O pensamento matemático avançado em pesquisas. In: **XII Encontro Nacional de Educação Matemática**, 7, 2016, São Paulo. Anais eletrônicos. São Paulo, UCSUL, 2016. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/13/MR02.pdf>. Acesso em: 04 jul. 2017.

CAVALCA, A. V. S. **Espaço e representação Gráfica** (Dissertação de Mestrado). Pontifícia Universidade de São Paulo, São Paulo, 1997.

COMIN, A; *et al*. **História da Educação Matemática**: escrita e reescrita de histórias. Org. Ocsana Sônia Danyluk. Porto Alegre: Sulina, 2012.

DREYFUS, T. Advanced mathematical thinking processes. In: TALL, D. (Org.). **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer, 2002. p. 25-41.

EISBERG, R. N; Lerner L. S. **Física – Fundamentos e Aplicações** (Vol 2). Trad. Ivam J. Albuquerque. São Paulo: McGraw-Hill, 1982.

ELIAS, H. R.; BARBOSA, L. N. S. C.; SAVIOLI, A. M. D. Indícios de dificuldade na compreensão da matemática avançada: o conceito de grupo. In: **V SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**. Petrópolis/RJ, 2012.

FERREIRA, Juliano Cezar. **Integral de linha de campos vetoriais/trabalho realizado**: imagem de conceito e definição de conceito. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – PPGEM. Juiz de Fora: UFJF, 2013.

FONSECA, V. G. **O uso de Tecnologias no Ensino Médio:** a integração de Mathlets no Ensino da Função Afim. Dissertação de Mestrado. UFRJ, 2011.

GIRALDO, V. **Descrições e Conflitos Computacionais**: O Caso da Derivada. Tese (Doutorado em Ciências) – COPPE. Rio de Janeiro: UFRJ, 2004.

GRAY, E.; PINTO, M.; PITTA, D.; TALL, D. Knowledge construction and diverging thinking in elementary and advanced mathematics. **Educational Studies in Mathematics***,* v. 38, 1999. p. 111-133.

LEÃO, A. S. G; BISOGGNIN, V. Construção do conceito de função no ensino fundamental por meio da metodologia de resolução de problemas. **Educação Matemática em Revista**. Rio Grande do Sul/RS, Ano 10, n. 10, v. 1, p. 27-35, 2009.

MENON, M. J. Sobre as origens das definições dos produtos escalar e vetorial. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 31, n. 2. 2009. Disponível em: <http:// http://www.sbfisica.org.br/rbef/pdf/312305.pdf>. Acesso em: 12 ago. 2013.

MUNHOZ, M. **A impregnação do sentido cotidiano de termos geométricos no ensino e aprendizagem da Geometria Analítica** (Dissertação de Mestrado). Pontifícia Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.

OLIMPIO, A. **Compreensões de conceitos de cálculo diferencial no primeiro ano de matemática**: uma abordagem integrando oralidade, escrita e informática. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro - SP, 2006.

PATRICIO, R. S. **As dificuldades relacionadas à aprendizagem do conceito de vetor à luz da teoria dos registros de representação semiótica**. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Instituto de Educação Matemática e Científica. Universidade Federal do Pará, Belém, 2005.

PINHEIRO, G. D.; DALLEMOLE, J. J.; MATOS, J. D. Geometria Analítica e vetores: Explorando conceitos e propriedades com o desenvolvimento de appelts no geogebra. **XII Encontro Nacional de Educação Matemática**: Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades, 2016, p. 8.

SPIEGEL, MURRAY R. **Análise Vetorial**: com Introdução a Análise Tensorial. Coleção Schaum. 1. Ed. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1966.

STEINBRUCH, Alfredo & WINTERLE, Paulo. **Álgebra Linear**. 2. Ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

______. **Geometria Analítica**. 2. Ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

TALL, D.; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, **Dordrecht**. v. 3, n. 12, p. 151-169, 1981.

TALL, D. The psychology of advanced mathematical thinking. In: ______ (Org.). **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer, 1991, p. 3-21.

______. **Advanced mathematical thinking**. Kluwer Academic Publishers, 2002.

______. Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. In: **Proceedings of 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education**, v. 1. Recife, Brasil, 1995, p. 61-75.

______. The nature of mathematical proof. **Mathematics Teaching**. n. 127, p. 28-32, 1989.

VALLADARES, R. J. C. **Álgebra Linear e Geometria Analítica**. Rio de Janeiro: E. Campus, 1982.