UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PRODUTO EDUCACIONAL

Geometria das Transformações

Débora Bordonal Senra Oliveira

Adlai Ralph Detoni

Juiz de Fora (MG)

Agosto, 2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

Pós-Graduação em Educação Matemática

Mestrado Profissional em Educação Matemática

PRODUTO EDUCACIONAL

A CONSTITUIÇÃO DE CONHECIMENTO COLABORADO EM GEOMETRIA DAS TRANSFORMAÇÕES COM FERRAMENTAS DINÂMICAS

Orientador: Prof. Dr. Adlai Ralph Detoni

Produto Educacional apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Juiz de Fora (MG)

Agosto, 2017

TABELAS

Tabela 1: Temas das Atividades 14

LISTA DE FIGURAS

Figura	Descrição	Pág.
Figura 1	Máxima Metodológica	9
Figura 2	Dados da Atividade 1..	15
Figura 3	Resolução Atividade 1..	16
Figura 4	Dados da Atividade 2..	17
Figura 5	Resolução Atividade 2..	18
Figura 6	Dados da Atividade 3..	20
Figura 7	Resolução Atividade 3..	21
Figura 8	Dados da Atividade 4..	22
Figura 9	Resolução Atividade 4..	23
Figura 10	Dados da Atividade 5..	24
Figura 11	Resolução Atividade 5..	25
Figura 12	Dados da Atividade 6..	27
Figura 13	Resolução Atividade 6..	28
Figura 14	Dados da Atividade 7..	29
Figura 15	Resolução Atividade 7..	30
Figura 16	Possíveis soluções	30
Figura 17	Dados da Atividade 8..	31
Figura 18	Resolução Atividade 8..	33
Figura 19	Dados da Atividade 9..	34
Figura 20	Resolução Atividade 9..	35
Figura 21	Dados da Atividade 10..	36
Figura 22	Resolução Atividade 10..	37
Figura 23	Dados da Atividade 11..	38
Figura 24	Resolução Atividade 11..	39

SUMÁRIO

1- Apresentação ... 7

2- Considerações sobre a Geometria das Transformações ... 8

3- Investigação Matemática ... 10

4- Considerações sobre as atividades propostas ... 12

5- As Atividades Propostas ... 14

5.1- Atividade 1- PROJETO ARQUITETÔNICO ... 14

5.2- Atividade 2- TRIATLON ... 17

5.3- Atividade 3- BASQUETE ... 20

5.4- Atividade 4- HOMEM BALA ... 22

5.5- Atividade 5- VIVEIRO ... 24

5.6- Atividade 6- CONTRUÇÃO DA PONTE ... 27

5.7- Atividade 7- SINUCA ... 29

5.8- Atividade 8- PIRATA ... 31

5.9- Atividade 9- PRAÇA ... 34

5.10- Atividade 10- PASSARELA ... 36

5.11- Atividade 11- PARQUE ... 38

6- Algumas Considerações ... 40

Referências ... 41

1- Apresentação

Este Produto Educacional é parte integrante da dissertação apresentada no Mestrado Profissional de Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, intitulado "*A constituição de conhecimento colaborado em Geometria das Transformações com ferramentas dinâmicas*" e objetiva ser uma proposta de intervenção didática na geometria escolar.

Para tal objetivo, elaboramos atividades em Geometria das Transformações, que foram aplicadas na pesquisa de campo dessa dissertação com alunos do curso de Licenciatura em Matemática de uma Universidade Pública. O uso do *software* GeoGebra perpassou essa aplicação.

Apresentamos este Produto como uma sequência didática que pode ser trabalhada em conjunto a um *software* de Geometria Dinâmica, nos anos finais do Ensino Fundamental, no Ensino Médio ou no Ensino Superior, dependendo da abordagem didática adotada.

Este Produto contém três partes: uma primeira teórica, onde, de maneira sucinta, embasamos algumas fundamentações que norteiam a pesquisa, como a investigação matemática em sala de aula e a Geometria das Transformações. Na segunda parte é apresentada a sequencia didática utilizada na pesquisa e uma separação das atividades por temas: Simetria, Translação, Rotação e Homotetia. A terceira parte conta com a resoluções comentadas e reflexões pedagógicas sobre a proposta.

2- Considerações sobre a Geometria das Transformações

Vemos a Geometria das Transformações (GT) como uma Geometria alternativa à Geometria Elementar por apresentar tratamento diferente aos objetos. Na Geometria Elementar, sabe-se que as relações e propriedades são dadas como pertinentes a uma figura, geralmente vindo da métrica linear ou angular. Já na GT as relações são válidas para todas as figuras, pois não são intrínsecas e dizem respeito a todos os objetos que se relacionam, independente de suas características estruturais. Não há restrições quanto aos objetos para que se possa aplicar uma propriedade, dizemos a máxima da GT.

Uma política de universalização do esforço pela implantação da Matemática Moderna foi intencionada ao traduzir-se, no Brasil, parte da obra de Dienes e Golding, pensadores sobre currículos e práticas matemáticos que foram importantes a Geometria das Transformações. Suas propostas vêm na esteira do que se chamou de inversão didática para o aprendizado em Geometria, na qual a geometria euclidiana seria o último passo escolar. Noções de topologia, depois projetivas e afins, nesta ordem, seriam postas para o trabalho com crianças. O “estudo é baseado em experiências relativas ao espaço, [...] que as crianças devem ter feito durante os dois primeiros anos de estudo” (DIENES e GOLDING, 1959, p. 1), e toda a trajetória de estudos, sempre evocativos de deslocamentos, deságua no estudo de rotações, simetrias e translações, porta de entrada de um euclidianismo renovado metodologicamente e epistemologicamente.

Detoni e Lopes (2015) dizem que é “pertinente pensar novas possibilidades de tratamento didático sobre novas geometrias que trariam valores epistemológicos renovados para uma alternativa pedagógica para a geometria” (DETONI E LOPES, 2015, p. 6). Nesse sentido, o pensamento metodológico para a resolução de problemas em transformações geométricas é característico:

Sendo f uma figura que contém A (a descobrir), a transformada f´ dessa figura conterá o transformado do ponto A´

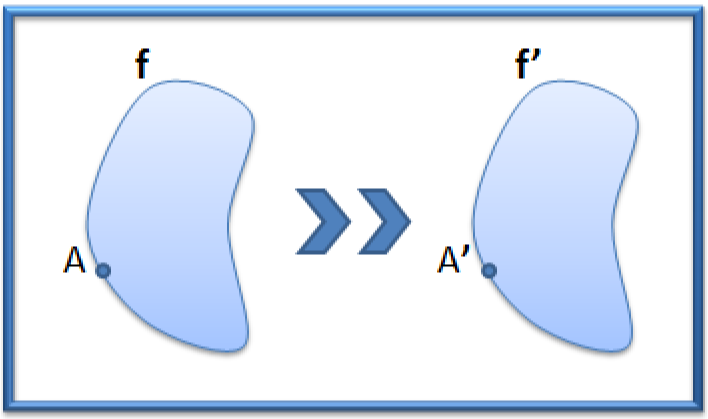


Figura 1: Máxima metodológica
Fonte: dados da pesquisa

A aplicação dessa máxima resulta em desdobrar dados na situação geométrica presente. Comumente, a partir do transformado obtido, utiliza-se a mesma transformação com sentido contrário e “volta-se” para se obter o ponto procurado.

Esse modo estrutural de pensar é o que, a nosso ver, mais destoa do usual tratamento elementar da geometria enquanto ensino e aprendizagem. Na Geometria das Transformações (GT) o metodológico abrange vários tipos de transformações e impera sobre particularidades de objetos envolvidos. Sua ciência caracteriza a estruturação de grupos de invariâncias, que é afim com o aspecto piagetiano do *transfigural*[1], no qual a figura, em si mesma, já não é o principal, uma vez que são suas relações extrínsecas que importam.

Dessa forma, pudemos observar em nossa pesquisa, um modo diferente de habitar um *software* de geometria dinâmica com a Geometria das Transformações. O movimento da GT facilitado e sugerido pelo *software* mostrou-se importante na constituição do conhecimento colaborado a partir de aberturas de horizontes didáticos.

[1] Ver Texto completo em WWW.

3- Investigação Matemática

Na pesquisa que realizamos, foram propostas atividades aos sujeitos que entendemos, são de forma similares à proposta de Resolução de Problemas (RP) por apresentar um fundo investigativo, contextualizado e de otimização. O ponto central dos atuais trabalhos na área de RP levam os estudos para a compreensão de como acontece a aprendizagem *através* da resolução de problemas (ONUCHIC & ALLEVATO, 2011).

Colocamos nossas atividades como sendo problemas, no sentido de não serem exercícios de aplicação algorítmica, mas por serem atividades dentro de um contexto com sujeitos que não resolveriam os problemas de forma imediata, apresentando interesse de saber resolvê-los. Pensamos as atividades para que privilegiassem as estratégias usadas pelo resolvedor para encaminhar a resolução do problema e seus conhecimentos prévios, entendendo essas como fatores determinantes do tipo de problema em questão.

Consoante com o pensamento em Resolução de Problemas, nós pesquisadores, buscando tomar atitudes diferentes da convencional, deixamos de ser nossa exposição o centro e passamos o foco para o problema. Planejamos, em nossa preparação das atividades, uma proposta em que os sujeitos tomariam uma postura de resolvedores, teriam que colocar em prática o *poder* matemático, como diz Onuchic e Allevato (2011, p. 82), desenvolvendo a capacidade de pensar matematicamente e utilizando diferentes estratégias, o que pode aumentar a compreensão e a constituição dos conceitos matemáticos.

Em nossa pesquisa de campo, acompanhamos todo o processo de raciocínio e de desenvolvimento dos sujeitos, participando e estando atento aos desenvolvimentos feitos por eles, olhando o que estava sendo feito e perguntando sobre os passos e as decisões tomadas. Buscamos tomar atitudes, que, conforme Onuchic e Allevato (2011, p. 84), fossem de professores incentivadores para os alunos utilizarem conhecimentos prévios e técnicas operatórias, métodos diferentes e atuando como interventores e questionadores.

Entendemos que o trabalho com a Geometria abre possibilidades das pessoas terem manifestações matemáticas muito próximas do que pensam, vivem e articulam como pensamentos de sua vida cotidiana. Cremos que atividades didáticas não devam ser apenas de para exercitar conceitos, mas, também, uma oportunidade de se constituir conhecimentos através da colaboração proporcionada tanto pela disposição didática como pelas próprias características interacionais presentes em atividades investigativas e exploratórias.

Uma motivação para que os alunos manifestassem uma postura de investigar[2] foi proporcionada pelas atividades e a constituição do ambiente de aplicação das atividades que elaboramos, com o uso do computador. Sugerimos assim, que as atividades sejam aplicadas em duplas ou grupos com um *software* de Geometria Dinâmica, para fomentar uma interação e, consequentemente, uma colaboração dialogada mediada pelo *software*.

Isso não exclui a possibilidade das atividades serem aplicadas sem o uso de um *software*. Todas têm condições de serem feitas com o uso de lápis, papel, régua e compasso, não deixando de ser dinâmicas e interativas.

[2] Como uma postura de quem quer conhecer conforme Ponte (2003).

4- Considerações sobre as atividades propostas

Entendemos a constituição do ambiente como sendo de extrema importância para sua habitação plena. A abertura para os participantes escolherem fazer duplas ou trios e as pessoas com quem trabalhar, pode ser um passo importante para a fluidez de todos os ambitos que envolvem a atividade.

A possibilidade de uso de um *software* pode ser vista de várias maneiras: como facilitador de construções, como auxilio no uso de estratégias junto ao *software* que envolve formular e testar conjecturas e como apoio para comprovar conhecimentos prévios. Além de ser uma ferramenta que também se mostra potencial no âmbito epistemológico, possibilita constituição de pensamentos junto ao *software*, pensamento esse que é reformulado de forma distinta em outras mídias, abrindo possibilidades de resolução e investigação através de sua dinamicidade didática.

O *software* também auxilia na constituição do conhecimento colaborado, conforme pudemos observar na nossa pesquisa de campo as possibilidades de movimentações no *software* sendo mote de diálogo interacional, no cuidado em colocar o outro no mesmo pensamento, sendo possibilitador de reformulações de conhecimento já posto e de abrir possibilidades de investigação.

Observamos que a Geometria das Transformações é uma temática afim ao uso de *software* por promover a movimentação, tal como comandos específicos tornam possíveis, e também como abertura de horizontes, permitindo a habitação dos resolvedores no horizonte geométrico através de interação e da colaboração.

Todos esses ambitos constituem um campo ainda maior que são os modos pedagógicos nos quais as atividades ocorrem. O modo como preparamos as atividades, sua apresentação contextualizada, o fundo investigativo contribuíram para que os resolvedores desenvolvessem um espírito autônomo.

Mesmo que a solução de um problema sugerido não tenha sido alcançada, o conhecimento que vai se constituindo é mais do que resultados finais. Apreciamos o caminho, o desenvolvimento, as possibilidades apresentadas e auxiliamos os resolvedores como incentivadores e questionadores para que eles repensem o caminho pretendido e encontrem justificativas para segui-lo ou para deixá-lo.

Na maioria das atividades, depois de se chegar à solução, é interessante motivar a pesquisa com movimentações dos dados, especialmente para que os resolvedores ratifiquem as propriedades (ou invariâncias) implicadas e observem outras possibilidades de construção e de variação de acordo com os dados pedidos.

5- As Atividades Propostas

As atividades foram projetadas de modo sem atenção ao cumprimento de um programa de conteúdos, não havendo uma sequência para a sua aplicação. Mas, separamos por temas, para facilitar sua identificação.

Considerando inclusive o nível de complexidade, sugere-se considerar mais de uma possibilidade de aplicação de cada atividade. Algumas, entendemos, podem ser aplicadas como exercícios no decorrer de uma aula; algumas podem ser objetos de uma pesquisa extra classe e em grupo.

A sequencia utilizada na pesquisa de campo está representada na tabela abaixo.

Tabela 1: Temas das Atividades da pesquisa de campo.

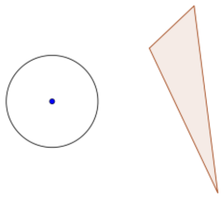
ATIVIDADE	Tema da atividade em sala
1	Homotetia
2	Translação
3	Simetria
4	Rotação
5	Rotação e Homotetia
6	Simetria
7	Simetria
8	Rotação
9	Homotetia
10	Translação
11	Rotação

Fonte: Elaborado pelos autores

5.1- Atividade 1- PROJETO ARQUITETÔNICO

Uma construtora está projetando para a área de lazer de um condomínio a construção de uma região triangular e um espaço circular, como mostra o projeto abaixo. Um arquiteto, vendo esse projeto, sugeriu que dentro do círculo também tivesse uma região triangular, a maior possível, com seus lados paralelos, cada um, aos lados do triângulo já projetado. Como fazer esse projeto?

Figura 2: Dados atividade 1

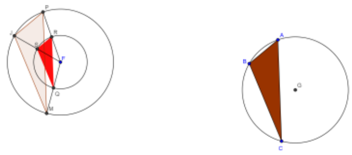


Fonte: elaborado pelos autores

Orientações: Nessa atividade, o objetivo resulta em construir um triangulo inscrito no círculo, homotético ao triangulo dado. Uma orientação que julgamos contribuir é pensar na resposta do problema, fazendo um triangulo qualquer inscrito nesse círculo. A partir disso, construir um triângulo qualquer, externo e homotético a este. Isso facilita a visualização da construção que deve ser feita.

Uma possível resolução: Trace as mediatrizes do triangulo dado, encontrando o centro do círculo que o circunscreve. Ligue o centro dos círculos e construa o círculo com o triangulo, centrado no círculo dado. Trace o triangulo homotético no circulo dado.

Figura 3: Resolução Atividade 1



Fonte: elaborado pelos autores

Comentários:

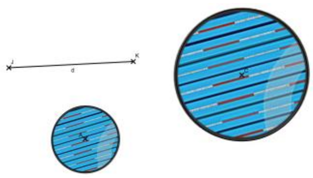
- Consideramos esta atividade de complexidade média. Observamos que os resolvedores apresentaram dificuldades na identificação do centro de homotetia.
- O centro de homotetia pode ser exterior ao circulo. Proporcionando uma solução um pouco diferente da apresentada.

5.2- Atividade 2- TRIATLON

O treinador resolveu criar um treino dife29renciado para o seu atleta de Triatlon. No clube escolhido para os treinos, há duas pi31scinas redondas e o treinador quer que o atleta percorra, numa só reta e na direção das raias das piscinas, um trecho nadado na primeira piscina, um trecho corrido entre as piscinas e um último trecho nadado na segunda piscina, de modo que os dois trechos nadados somem d metros.

Onde terá que ser a largada para que o atleta nade d metros?

Figura 4: Dados atividade 2

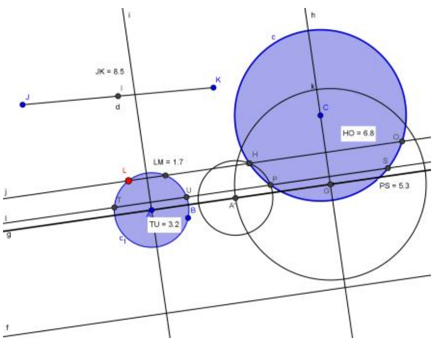


Fonte: elaborado pelos autores

Orientações: Nesta atividade, objetivo resulta em encontrar o ponto de largada que determina um comprimento d, dado, na direção das raias. Para isso, sugerimos que pense na resposta pronta para visualizar a resolução.

Uma possível resolução: Traça uma reta g na direção das raias passando pelo centro A. Trace perpendiculares à essa reta g passando pelos centros A e C. A partir da intersecção dessa perpendicular com g, temos ponto G. Traçamos o circulo com centro em G e raio d/2 encontrando o ponto A’ como intersecção dele com a reta g. Traçamos o circulo com centro em A’ e raio AB encontrando os pontos H e P como intersecção desse círculo com o circulo c. Traçamos uma reta paralela a g passando por H obtendo como intersecção com c_1 os pontos L e M e com o circulo c os pontos H e O. Obtemos o ponto L como um ponto de largada e LM + HO = JK= d. E traçando uma paralela a g passando por P obtendo como intersecção com c_1 os pontos T e U e com o circulo c os pontos P e S. Obtemos, nesse caso, o ponto T como um ponto de largada e TU + PS = JK= d.

Figura 5: Resolução Atividade 2



Fonte: elaborado pelos autores

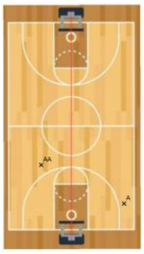
Comentários:

- Inicialmente não sabemos qual é a medida que devemos transladar o centro A, então temos que observar uma medida conhecida que é d. Sabemos que a mediana que passa pelo centro do circulo corta uma corda no seu ponto médio, então, concluímos que a distancia entre A' e G é d/2.
- A observação feita no comentário anterior é o ponto onde observamos mais dúvida por parte dos resolvedores no momento da pesquisa de campo.
- Nessa atividade obtemos duas respostas possíveis, podendo sugerir aos resolvedores que pense em dois nadadores largando ao mesmo tempo e fazendo a mesma distância nadada.

5.3- Atividade 3- BASQUETE

Um técnico de basquete, desenhando em sua prancheta, quer combinar uma jogada com seu armador, que deverá estar no início da jogada sobre o eixo da quadra (linha rosa), e, em relação a esse eixo, ver o ala-armador (AA) e o Ala (A) sob mesmo ângulo. Onde ele deve desenhar o armador dele?

Figura 6: Dados da Atividade 3

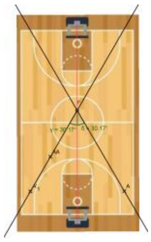


Fonte: elaborado pelos autores

Orientações: Para encontrar o ponto F que seja vértice do ângulo AAFA de forma que o eixo seja bissetriz, sugerimos que imagine AA e A em um mesmo lado do eixo caracterizando o simétrico de um ponto em relação ao eixo.

Uma possível resolução: Basta fazer um simétrico do ponto A, em relação ao eixo rosa (A') e ligar a reta definida por A' e AA. A intercessão dessa reta com o eixo rosa, definida pelo ponto F, é o local solicitado.

Figura 7: Resolução Atividade 3



Fonte: elaborado pelos autores

Comentários:

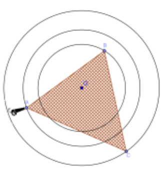
- Os sujeitos apresentaram dificuldades na identificação da transformação. Utilizaram testes empíricos para encontrar o ponto F, a solução.
- Há uma construção que nós, pesquisadores, não tínhamos pensado anteriormente. Um resolvedor utilizou o teorema das bissetrizes, o círculo de Apolônio e rotação da razão harmônica que ele mesmo encontrou. Essa construção é uma construção correta e robusta (pode-se mover o ponto A que a solução continua sendo válida).

5.4- Atividade 4- HOMEM BALA

No circo, a apresentação do espetáculo do Homem-Bala está causando preocupação com a segurança dos seus participantes. O cenário da apresentação é formado por três círculos concêntricos onde o canhão (A) gira no círculo do meio; dois assistentes (representados pontualmente por B e C) deverão ficar um no círculo de dentro e o outro no de fora. Quando o apresentador terminar de anunciar o espetáculo, a música irá parar e onde o canhão estiver ele lançará o homem-bala. A rede de proteção estará presa ao canhão. E, a distância entre os assistentes, com a rede esticada, deve ser a mesma que a de cada um à boca do canhão.

Onde os assistentes deverão estar para esticar a rede de proteção e salvar o homem-bala?

Figura 8: Dados da Atividade 4



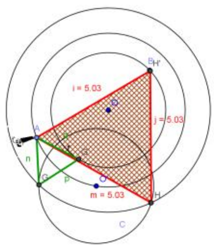
Fonte: elaborado pelos autores

Orientações: Utilize a máxima metodológica, uma vez que vértices de um triângulo equilátero têm relações que deixa campo aberto para rotações.

Uma possível resolução: Primeiro, devemos definir um ponto do círculo do meio para ser nosso ponto A. Não conhecemos o tamanho do lado desse triangulo que queremos construir, então, rotaciona-se o centro da círculo em torno de A, 60º num sentido (consideremos, aqui, o horário). Traça um círculo com raio igual ao raio do círculo menor, encontrando H e

G. “Volta-se com H”(utilizando a mesma rotação, porém no sentido contrário), rotacionando H em torno de A 60º no sentido anti-horário e encontrando H’. O triangulo AHH’ é a solução. Sabemos que o triangulo AGG’ também é uma construção de um triangulo equilátero, mas não está no contexto da atividade.

Figura 9: Resolução Atividade 4



Fonte: elaborado pelos autores

Comentários: A animação feita no GeoGebra auxiliou aos resolvedores no entendimento da atividade. Inicialmente, procuraram a solução por testes empíricos, movimentando os pontos B e C. Observaram a dificuldade de se obter a exatidão exigida e partiram para a construção de um triangulo equilátero utilizando-se da rotação.

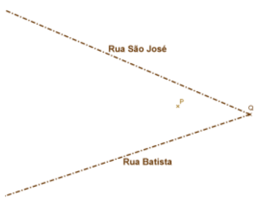
5.5- Atividade 5- VIVEIRO

Antônio precisa construir um viveiro triangular equilátero, tendo como vértices três mourões: A, B e C. Para aproveitar o espaço, ele considerou que B e C ficassem, cada um, juntos aos muros das margens das ruas São José e Batista.

No encontro dos muros (Q), há uma fonte d'água que servirá de irrigação para o viveiro. Um dos pontos de irrigação será em P que pertence à cerca BC, e o outro será em A. Por questão de economia P e A estarão alinhados com a fonte Q.

Ajude Antônio a construir esse viveiro.

Figura 10: Dados da Atividade 5

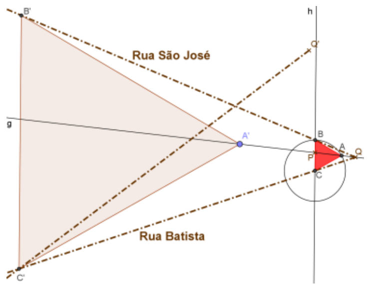


Fonte: elaborado pelos autores

Orientações: Utilize a máxima metodológica, uma vez que vértices de um triângulo equilátero têm relações que deixa campo aberto para rotações. Lembrando-se que essa não é a solução final.

Uma possível resolução: Traça-se a semirreta QP. Marque um ponto arbitrário A' nela para, em seguida, construir um triângulo auxiliar A'B'C', com B'na rua São José e C' na rua Batista , rotacionando-se uma rua 60º em torno de A'; na solução apresentada na figura rotacionou-se a rua São José, 60º em torno de A' no sentido anti-horário obtendo C'. "Volta-se" com C', rotacionando-se este ponto em torno de A' em 60º no sentido horário, obtendo B’ pertencente à rua São José. O triangulo A’B’C’ é equilátero. Basta, agora, construir um triangulo homotético a esse passando por P. Para isso, traça-se paralela ao lado do triangulo passando por P, obtendo-se, assim, o tamanho do lado do triangulo BC. Construindo uma círculo com raio BC, e centro C, obtemos o ponto A. O triangulo ABC é o triangulo pedido.

Figura 11: Resolução Atividade5



Fonte: elaborado pelos autores

Comentários:

- Atividade com dupla transformação, causando, talvez, descontinuidade de desenvolvimento. A interseção do professor como orientador de alguns passos, pode ser interessante.
- Como na rotação sempre temos dois sentidos nos quais podemos rotacionar um objeto (sentido horário ou anti-horário), temos duas

soluções diferentes nessa atividade. Se tivéssemos pedido o menor viveiro possível, a possível solução dada seria solução única.

- É interessante orientar aos resolvedores a movimentar o ponto A, ao finalizar a construção, para visualizarem o movimento feito pelo triangulo.

5.6- Atividade 6- CONTRUÇÃO DA PONTE

O governador prometeu aos prefeitos da cidade de Arantina e da cidade de Bom Jardim de Minas fazer uma ponte (a mais curta possível) sobre o rio Quixeramobim, que passa reto na região entre as duas cidades. Mas ele exigiu que o projeto considerasse que uma futura ligação rodoviária entre elas, que passaria por essa ponte, fosse de menor comprimento possível. Veja o mapa da situação e desenhe a ponte.

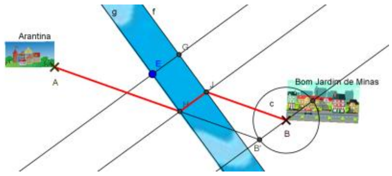
Figura 12: Dados da Atividade 6

Fonte: elaborado pelos autores

Orientações: Sabe-se que o menor caminho entre dois pontos é sempre o que está em linha reta. Dessa forma, podemos orientar aos estudantes que desconsidere o rio por um momento, e pense na situação sem ele.

Uma possível solução: Inicialmente mede-se a largura do rio traçando uma perpendicular ao lado, sendo EG. Em seguida, translada-se o B em direção e módulo de EG, obtendo B'. Liga-se AB', afetando a margem g em H. A partir de H trace uma perpendicular à g obtendo J em f. Ligue JB, obtendo JB paralela a HB', obtendo assim, AH+HJ+JB o menor caminho.

Figura 13: Resolução Atividade 6



Fonte: elaborado pelos autores

Comentários:

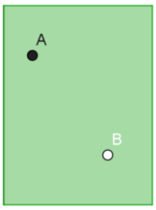
- Se for desenvolver essa atividade sem o auxilio de um *software*, pode-se dobrar a folha de papel fazendo com que a largura do rio vire zero, o rio será uma linha. No movimento de abrir essa dobradura, é feita uma "translação do papel" medindo a largura do rio.
- No *software*, depois de terminada uma solução, pode-se movimentar os pontos A e B, que representam as cidades, a construção continua sendo verdadeira e os conceitos geométricos implicados podem ser vivenciados como invariantes que são.

5.7- Atividade 7- SINUCA

Dada uma sinuca retangular e duas bolas A e B, bater a bola B na bola A depois de tocar duas tabelas.

OBS: Tabela nas tabelas da sinuca significa que deverá tocar em dois lados da sinuca antes de bater na outra bola.

Figura 14: Dados da Atividade 7

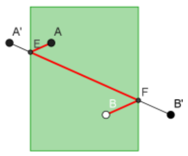


Fonte: elaborado pelos autores

Orientações: A escolha das duas tabelas a considerar está em aberto, e para cada escolha o caminho de uma bola tacada em uma sinuca representa um caminho mínimo, dadas as condições físicas implicadas, análogas ao que sabemos da ótica.

Uma possível resolução: Faz-se os simétricos dos pontos A e B em relação às tabelas à esquerda de A e à direita de B, na consideração que estas duas darão o menor dos caminhos possíveis. Tendo A' e B', Trace A'B' e marque os pontos de intercessão com os lados da sinuca, neste caso, E e F. Ligue os pontos BFEA, e esse é o caminho que a bola B tem que fazer para que encontre a bola A depois de tocar duas tabelas.

Figura 15: Resolução Atividade7

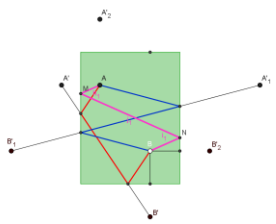


Fonte: elaborado pelos autores

Comentários:

- Cada grupo pode fazer sua escolha. Como são possíveis várias soluções.
- Se quiser restringir as soluções dessa atividade, pode-se pedir o menor dos caminhos mínimos, neste caso, teremos somente uma solução (a marcada em rosa na figura a seguir), mas terão os resolvedores que ao menos discutir sobre, senão realizar, mais de uma solução. Deixando em aberto a escolha, um estudo de simetria se aplicará a cada caso.

Figura 16: Possíveis soluções.



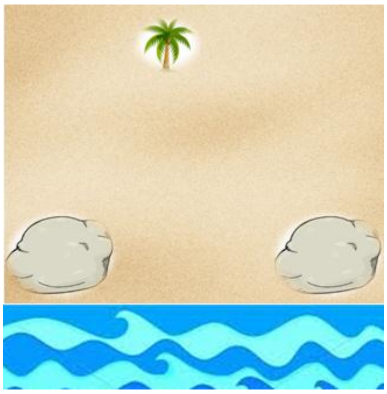
Fonte: elaborado pelos autores

5.8- Atividade 8- PIRATA

Há muitos anos, o pirata Barba-Ruiva resolveu enterrar o seu tesouro. Escolheu uma ilha onde a única praia tinha duas grandes rochas junto à água, a 100 metros uma da outra, e uma enorme palmeira entre as duas rochas, mas a 80 metros da linha da água. Mandou um dos piratas do seu bando para cada uma das rochas e deu-lhes as seguintes instruções: olhar em direção à palmeira, rodar 90º e andar uma distância igual à que a respectiva rocha estava da palmeira. Nenhum dos piratas se molhou. Os dois piratas ficaram parados e o pirata Barba-Ruiva enterrou o tesouro exatamente a meio caminho entre eles.

Por acaso, encontramos o documento onde isto estava escrito e decidimos ir até à ilha à procura do tesouro. Lá encontramos as rochas junto à água, mas infelizmente a palmeira tinha desaparecido, provavelmente derrubada por um furacão. Como a praia agora é um destino turístico conhecido, não podemos andar a escavar por todo o lado. A única hipótese é aproveitar uma noite antes de amanhecer e fazer apenas um buraco. Onde devemos escavar para termos hipóteses de descobrir o tesouro?

Figura 17: Dados da Atividade 8



Fonte: elaborado pelos autores

Orientações: Essa é a única atividade que não é de nossa autoria, mas a consideramos por compreendermos ser uma atividade clássica e, sua complexidade nos leva a profundas discussões e investigações.

Uma possível resolução: Suponha um lugar para a palmeira, fazer a rotação em torno das pedras 90º -uma rotação no sentido horário e a outra no sentido anti-horário- traçar o segmento que liga os dois pontos rotacionados e marcar o ponto médio. Esse ponto médio é o lugar onde se encontra o tesouro.

Justificativa Geométrica para essa construção:

Sejam A e B as pedras e k a linha da palmeira C (que não temos).

Girando k 90º no sentido horário, em torno de B temos n ; no sentido antihorário, também 90º, em torno de A, temos m.

m contém C', rotacionado de C em torno de A 90º; n contém C'' rotacionado 90º em torno de B.

Como C´e C'' estão, portanto, em perpendiculares equidistantes de A e B, qualquer segmento C´C'' tem seu ponto médio na mediatriz de AB.

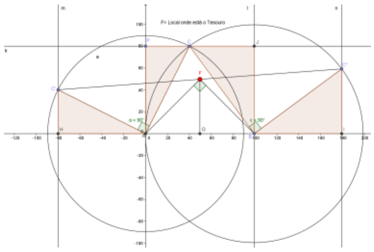
Os pontos H e I são os transformados de P e J nas rotações efetuadas. Então, AHC´= APC, o que nos dá C'H= PC;

também, BJC=BIC'', o que nos dá CJ=IC''. Isto revela (como PC + CJ =PJ) que C´H + C''I = PJ.

Observemos, agora, FG, perpendicular a AB (na mediatriz). FG é base média de um trapézio HC´C''I, portanto, vale PJ/2.

Observa-se que este resultado se verifica para qualquer ponto C entre P e J. Portanto, a solução F é ponto da mediatriz de AB e está a PJ/2 deste segmento.

Figura 18: Resolução Atividade 8



Fonte: elaborado pelos autores

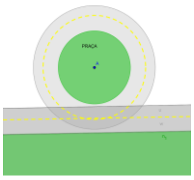
Comentários:

- A palmeira estar entre as duas pedras não significa que a palmeira está na mediatriz dessas duas pedras.
- Essa construção independe do lugar onde está a palmeira, desde que a palmeira esteja entre as duas pedras com relação a perpendiculares à borda da água.
- Os resolvedores apresentaram certa dificuldade nessa construção, mas a maior dificuldade foi na justificativa da construção.
- Depois de terminada uma solução, pode-se movimentar os pontos P e C para observar as invariâncias.

5.9- Atividade 9- PRAÇA

Deseja-se construir um palco quadrangular para as festividades de aniversário da cidade. Para não precisar furar o asfalto, decidiram que dois mourões de sustentação ficassem na grama da praça e os outros dois ficassem na linha do limite da grama com a rua retilínea, conforme a figura abaixo, na qual a cor verde representa os espaços gramados. Desenhe o menor palco possível.

Figura 19: Dados da Atividade 9

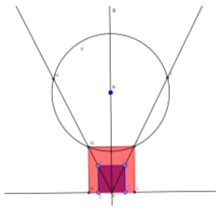


Fonte: elaborado pelos autores

Orientações: Identificar e aplicar homotetia.

Uma possível resolução: Traça-se uma perpendicular a rua retilínea passando por A, obtendo F como intercessão. Constrói-se um quadrado que tenha esse ponto F como ponto médio de um dos lados. Basta usar F como ponto de homotetia, traçando as retas que passam pelos vértices desse quadrado. A intercessão dessa reta com a circunferência (a praça) seriam possíveis respostas, mas é pedido na atividade o menor palco possível, restringindo, assim, para uma única resposta que é o quadrado vermelho.

Figura 20: Resolução Atividade 9



Fonte: elaborado pelos autores

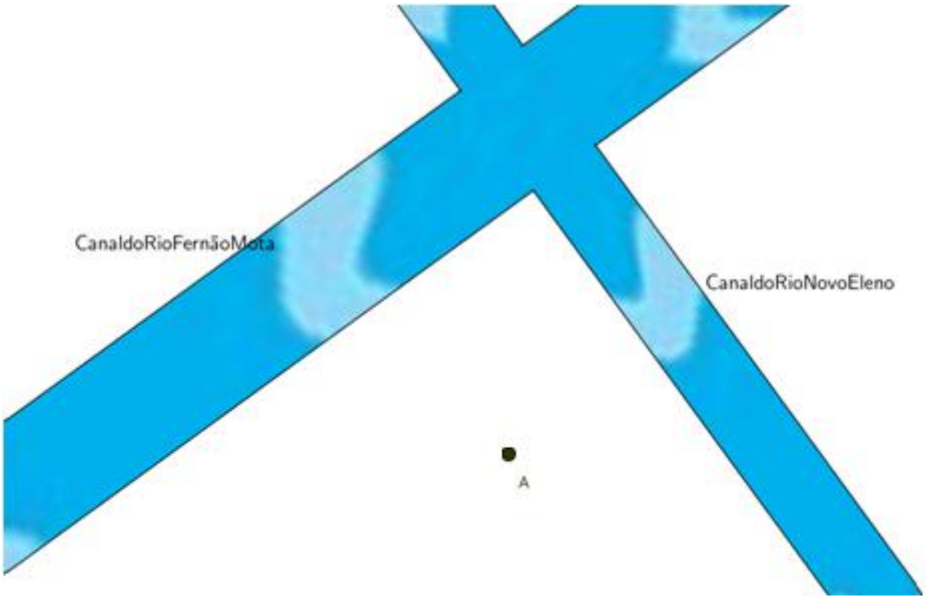
Comentários:

- Atividade com grau de dificuldade elevado.
- Os resolvedores apresentaram dificuldades na construção do quadrado auxiliar que deve ter o ponto médio de um dos lados na perpendicular da rua retilínea passando pelo centro da praça.

5.10- Atividade 10- PASSARELA

A prefeitura projeta a construção de uma passarela que permita o trafego de pessoas sobre os canais dos rios Fernão Mota e Novo Eleno. Uma parte desta passarela terá suas extremidades apoiadas em dois pilares, um deles, o pilar B, a ser posicionado sobre a borda do canal do Rio Fernão Mota e, o outro, o pilar A, já posicionado entre os dois canais. A outra parte da passarela será construída a partir do pilar A, terminando sobre o pilar C, a ser posicionado na borda do canal do Rio Novo Eleno. Determine as posições dos pilares B e C, de forma que as duas partes da passarela tenham o mesmo tamanho e estejam sobre uma mesma reta.

Figura 21: Dados da Atividade 10

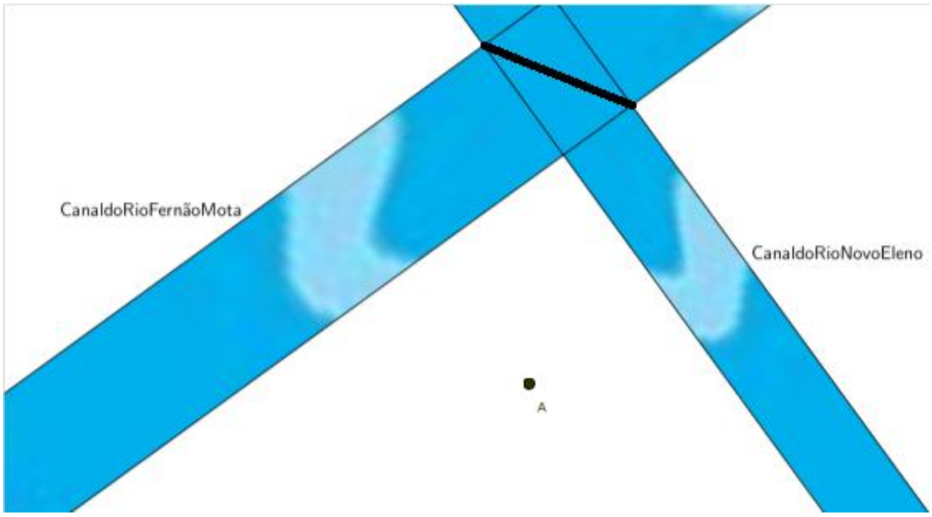


Fonte: elaborado pelos autores

Orientações: Identificar a diagonal do retângulo como comum, e utilizar translação.

Uma possível resolução: Identificar que a diagonal do retângulo é comum aos dois rios e traçar uma paralela à diagonal passando por A.

Figura 22: Resolução Atividade 10



Fonte: elaborado pelos autores

Comentários:

- Nessa atividade todas as duplas iniciaram fazendo testes empíricos, traçando uma reta por A e medindo as distâncias dos segmentos em cada rio.

5.11- Atividade 11- PARQUE

Um parque em forma quadrangular é formado por avenidas. Uma delas contém o mercado M e a outra a lanchonete L. O armazém A e o mercado se encontram na esquina do bar B, outras duas avenidas A e L se encontram na esquina da doceria D e as avenidas L e M se encontram na esquina da Câmara Municipal C.

Um desenhista decalcou do mapa da situação apenas os três estabelecimentos, como abaixo. Como desenhar o parque recuperando os traçados urbanísticos?

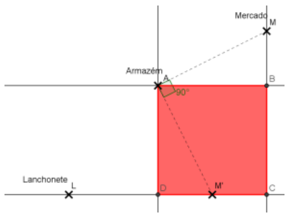
Figura 23: Dados da Atividade 11

Fonte: elaborado pelos autores

Orientações: Identificar e aplicar a rotação utilizando a máxima metodológica.

Uma possível resolução: Como o parque é quadrangular, temos que a avenida que passa por M e B é perpendicular à Avenida que passa por L e C. Como A é dado, basta rotacionar M, 90º no sentido horário encontrando M' e, depois, ligar M' a L. Assim, por construção fundamental, constrói-se o quadrado ABCD.

Figura 24: Resolução Atividade 11



Fonte: elaborado pelos autores

Comentários:

- Os resolvedores não apresentaram dificuldades para resolver essa atividade por já terem feito uma semelhante anteriormente.
- A rotação do ponto M em torno de A, 90º no sentido horário é o desfecho dessa atividade.
- Atividade de fácil resolução quando aplicada a máxima metodológica.

6- Algumas Considerações

Os sujeitos são convidados a habitar um horizonte que se dispõe. Se dispõe com seu ambiente de recursos tecnológicos, com a tarefa de aprendizagem, as intenções pedagógicas, as possibilidades didáticas, com o outro sujeito (seu cossujeito), seus companheiros, enfim, com a vontade de seguirem juntos numa empreitada que percebem ser importantes em suas vidas.

Desse modo, os horizontes são habitados a partir de ações e pensamentos que seguem com atribuições de significados de variadas natureza. O horizonte geométrico vai se fazendo em sentido, isto é, o sentido vai se constituindo sempre com as atribuições de significados.

As atividades apresentadas foram pensadas e aplicadas em pesquisa como atividades que possam contribuir para a constituição de um pensamento lógico-matemático de Geometria das Transformações. E apresentaram grande potencial quando trabalhadas com o auxilio do *software* de geometria dinâmica GeoGebra.

Acreditamos que as atividades que utilizam alguns conceitos diretos das Transformações possam contribuir para o ensino e a aprendizagem através de grupos colaborativos nas salas de aula dos anos finais do ensino fundamental e médio, e, essas e outras com desenvolvimento mais complexo podem ser utilizadas inclusive no ensino superior, que sugerimos também que seja através de grupos colaborativos e com o auxílio do GeoGebra.

Referências

DETONI, A. R.; PINHEIRO, J. M. – **Direções para uma Filosofia Geométrica das Transformações.** VI SIPEM – Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. 2015.

- Compreensões Filosóficas para Uma Alternativa do Pensamento Geométrico. REVEMAT. Florianópolis (SC), v.11, Ed. Filosofia da Educ. Matemática, p. 232-243, 2016.

DIENES, Z., GOLDING, E. **Exploração do Espaço**, 1959, Melhoramentos.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G., **Pesquisa em Resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas.** Bolema, Rio Claro (SP), v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011