O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE VETORES NO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO: UMA REESTRUTURAÇÃO CURRICULAR

Prof. Msc. Daniella Assemany da Guia (CAp UFRJ)

daniella.assemany@gmail.com

RESUMO

O presente trabalho tem por finalidade apresentar uma reformulação da estrutura curricular do 1º ano do Ensino Médio feita no Colégio de Aplicação da UFRJ. A partir da utilização do conceito e aplicações de *Vetores* no início do EM, geram-se reflexos significativos na condução e organização do programa de Matemática nas séries subsequentes. Diante do despreparo dos alunos ingressantes na Universidade e da dissociação entre os conteúdos de Matemática destacados nos Parâmetros Curriculares Nacionais, adotou-se, desde 2006, um novo currículo de Matemática no Ensino Médio do CAp UFRJ. Descrevemos nesse trabalho os tópicos abordados nessa reestruturação, em particular à 1ª série do E.M., que trata a Geometria Analítica em uma roupagem exclusivamente vetorial. Além disso, exemplificamos formas peculiares da abordagem adotada nesse processo e apresentamos, como primeiros resultados, as consequências no ensino da Matemática dos conteúdos das séries posteriores. Honrando o compromisso do CAp UFRJ com a educação pública e de qualidade, acreditamos estar promovendo a reflexão sobre a prática docente.

Palavras-chave: vetores; reforma curricular, PCN.

ABSTRACT

This paper aims to present a reform of the curriculum of the first year of High School, which was done at Colégio de Aplicação da UFRJ (CAp UFRJ). From the use of the concept and applications of *Vectors* at the beginning of the High School, a great impact happened on the conduct and organization of the mathematics program in the subsequent school years. Given the unpreparedness of students entering the University and the decoupling between the mathematics programs which were posted on the National Curriculum Parameters, it has been adopted, since 2006, a new mathematics curriculum in the High School of CAp UFRJ. In this paper the topics covered in this restructuring are described especially about the first year of the High School, which deals with Analytic Geometry in a exclusively *vector*. Moreover, we exemplify the peculiar forms of the approach taken in this process and present, as first results, the impact on teaching mathematics content of the latter school years. Honoring the commitment of CAp UFRJ with public education and quality, we believe that we are promoting a reflection on teaching practice.

Keywords: vectors; curriculum reform, National Curriculum Parameters.

INTRODUÇÃO

Ainda cursando a Licenciatura Matemática na Universidade do Estado do Rio de Janeiro (Uerj), iniciei minha conduta como pesquisadora mantendo uma bolsa de Iniciação Científica que me proporcionou participar da elaboração da apostila do 1º ano do Ensino Médio (EM) do Colégio de Aplicação da Uerj (CAp Uerj). Esta oportunidade foi precursora para que eu observasse os conteúdos tradicionais propostos para o Ensino Básico de uma forma crítica e desafiadora. Como o referido colégio abordava, de forma breve, a utilização dos *Vetores* no currículo de Matemática, explorando algumas aplicações dessa noção desde o 6º ano (antiga 5ª série) do Ensino Fundamental, gerou-se reflexos na proposta curricular do Ensino Médio, do qual eu fazia parte enquanto colaboradora com atividades para a apostila. A partir daí, o meu olhar para a organização curricular tradicional de Matemática modificou-se e vislumbrei uma possibilidade de incluir, de forma assumida e conteudista, o *cálculo vetorial* no currículo tradicional de Matemática antes da série terminal (3° ano/EM).

Na condição de professora de Matemática, ministrei aulas de *Geometria Analítica com Cálculo Vetorial* na graduação em uma Universidade estadual, por quatro anos consecutivos, e nesse período pude observar algumas das limitações apresentadas pelos alunos ingressantes durante as aulas.

Com base nos estudos de Nasser (2009) e Resende (2003), que apontam as dificuldades dos alunos nos ciclos básicos das Universidades na disciplina de Cálculo, verificamos que há lacunas na disposição dos conteúdos tradicionais de Matemática. "*Observamos que os alunos chegam à Universidade com muitas dificuldades, provenientes da falta de experiências prévias com o traçado e análise de gráficos nos ensinos fundamental e médio.*" (Nasser, 2009, p.2)

Acreditamos que as limitações descritas podem ter relação com a maneira pela qual as *Funções* e suas representações gráficas são apresentadas aos estudantes do EM, completamente desconectadas com outros conteúdos de Matemática. Além disso, segundo Patrício (2011), há também despreparo dos alunos ingressantes nas Universidades quanto ao ensino e aprendizagem de *Vetores*, o qual se dá também pela distinção entre o estudo da *Geometria Analítica* do Ensino Médio e o da Graduação.

Compactuando com as reais dificuldades em Matemática dos alunos ingressantes na Graduação, destacamos as alterações curriculares e transformações estruturais do Ensino Médio, promovidas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN/EM). Nota-se que a educação passou a ser entendida no seu aspecto mais geral em uma das três áreas do conhecimento: *Linguagens, Códigos e suas Tecnologias*; *Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*; e *Ciências Humanas e suas Tecnologias*. A denominação *"e suas Tecnologias"* nas três áreas indica que as disciplinas, em particular a Matemática, devam promover competências e habilidades para sua utilização direta na vida diária, associando prática e teoria, o que contribui para o desenvolvimento de meios de interpretação, compreensão de procedimentos e formalização de estratégias de pensamentos.

Ressaltamos a dissociação de vários conteúdos estudados na Educação Básica, além da observação de que alguns conceitos não são amplamente compreendidos pelos alunos, inclusive por falta de conexão entre eles, como a *Trigonometria*, por exemplo. Nos PCN/EM, destacamos um trecho que expõe de forma detalhada a angústia propulsora para a elaboração de uma proposta curricular diferente da que existe atualmente no Brasil, pois conecta a apresentação do currículo da Matemática escolar e a diferente produção de significados para um determinado conceito:

> Um primeiro exemplo disso pode ser observado com relação às funções. O ensino isolado desse tema não permite a exploração do caráter integrador que ele possui. Devemos observar que uma parte importante da Trigonometria diz respeito às funções trigonométricas e seus gráficos. As seqüências, em especial progressões aritméticas e geométricas, nada mais são que particulares funções. As propriedades de retas e parábolas estudadas em Geometria Analítica são propriedades dos gráficos das funções correspondentes. Aspectos do estudo de polinômios e equações algébricas podem ser incluídos no estudo de funções polinomiais, enriquecendo o enfoque algébrico que é feito tradicionalmente. (PCNs, 1999 – p. 225)

Com base nas ideias apresentadas, apostamos no ensino e aprendizagem de um conteúdo em que acreditamos ser o precursor para a produção de significados para *Plano Cartesiano*, *Funções*, *Gráficos de equações algébricas*, *Trigonometria*, *Geometria espacial*, *Retas* e *Planos* em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$: a noção de *Vetor*, no 1º ano do Ensino Médio.

Os estudos apresentados por Bittar (2002; 2003), Dorier (1990) e outros, justificam o ensino de *Vetores* desde o 8º ano/EF, como acontece nas escolas francesas.

> O conceito de vetor é introduzido no ensino secundário francês na classe de Quatrième. Trata-se nesse momento de um objeto geométrico, definido através de propriedades geométricas, cuja função é de constituir uma nova ferramenta para a resolução de problemas de geometria. (...) A classe de Quatrième corresponde à 7ª série do ensino fundamental no Brasil. (Bittar, 2002, p. 1)

O nosso objetivo com esse trabalho é apresentar uma reformulação curricular para o 1° ano do Ensino Médio, no Brasil, a partir da noção de *Vetor,* o qual será entendido como objeto primário para o ensino de grande parte dos conteúdos subsequentes, possibilitando explorações diversas e conectadas entre os mesmos, descritas posteriormente neste artigo.

A partir de 2006, nasceu a possibilidade de iniciar uma pesquisa de campo, de fato, com os alunos do Colégio de Aplicação da Universidade Federal do Rio de Janeiro (CAp

UFRJ[1]), implementando uma nova abordagem para o ensino e aprendizagem de Matemática, a partir de uma reestruturação curricular para o EM, baseada na conceituação de *Vetores* e *Transformações no Plano*. Esta reformulação se mantém até hoje e tem se aprimorado constantemente diante de observações baseadas na análise de resultados.

Para atingir o ojetivo que propomos, vamos descrever os tópicos trabalhados nessa reestruturação curricular e propôr algumas abordagens didático-metodológicas que contemplam a formação da noção de *Vetor* e suas diretrizes.

A REESTRUTURAÇÃO CURRICULAR NO COLÉGIO DE APLICAÇÃO DA UFRJ

O CAp UFRJ desempenha função acadêmica e institucional, ancorada nos preceitos do ensino, mas prioriza também a pesquisa e as atividades de extensão. Este colégio é o campo de estágio de formação de professores do Ensino Básico, prioritariamente dos cursos de licenciatura da UFRJ.

Detalhando, especificamente, as aulas de Matemática no EM, o CAp UFRJ oferece 4 (quatro) tempos semanais de aula nos 1° e 2° anos e 6 (seis) tempos no 3° ano.

Iniciaremos a apresentação de nossa experiência reorganizando o plano de curso do 1° ano do Ensino Médio, apresentando o que de fato é abordado, em ordem cronológica, no ensino de Matemática deste colégio .

Os temas *Conjuntos Numéricos*, *Intervalos Reais* e *Plano Cartesiano* compõem o programa de Matemática do Ensino Fundamental no CAp UFRJ, porém os dois primeiros são destacados inicialmente nessa reestruturação curricular, devido ao ingresso anual de 30 (trinta) alunos concursados para esta série. Dessa forma, a tabela a seguir mostra os temas trabalhados nas aulas de Matemática do 1° ano do Ensino Médio.

	Conteúdos	
	1° semestre	**2° semestre**
1° ano / E.M.	Conjuntos Numéricos e Intervalos Reais	Equações da reta no plano
	Segmento Orientado no plano	Funções
	Vetores no ¡ ^{2}	Função Afim / Composição com Modular
	Circunferência e sua equação analítica	Progressão Aritmética
	Transformações no ¡ ^{2}	Função Quadrática / Composição com Modular
	Trigonometria no círculo	Inequações

[1] O CAp UFRJ é um órgão suplementar do Centro de Filosofia e Ciências da Natureza da UFRJ que tem como finalidade o ensino, a pesquisa e a extensão na área de Educação Básica. Este colégio se constitui em campo de estágio supervisionado para a formação de profissionais em Educação e áreas afins.

"*Existe uma multiplicidade de formas e formalizações em torno da noção de vetor (vetor da física, vetor geométrico e vetor elemento de um espaço vetorial)*" (Bittar, 2003, p. 72).

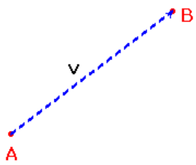
A introdução da noção de *Vetores* no ¡ ^{2} no 1° ano do Ensino Médio pretende lançar mão de um instrumento importante e prático no estudo dos conteúdos expostos em sequência, mas principalmente da Trigonometria e Função Afim, reduzindo cálculos desnecessários que estes temas recorrem quando seu ensino é feito de maneira isolada. A organização dos conteúdos estruturados e baseados nos *Vetores* pretende conduzir o aluno a interpretações geométricas de fatos algébricos. De maneira concisa, podemos afirmar que o ensino de *Vetores* no início do 1° ano do EM proporciona, dentre outras coisas:

- ❖ Aplicar o conceito de módulo de *Vetores* na contrução do gráfico de uma circunferência e, em seguida, determinar a equação da mesma.
- ❖ Definir e mostrar as *Transformações no Plano*, via recursos de softwares de geometria dinâmica, como o Cabri Géomètre e o Geogebra, por exemplo.
- ❖ Recorrer à *Rotação de Vetores* para: (i) formalização da noção de *Ângulo*; (ii) utilização dos triângulos retângulos (provenientes da projeção ortogonal sobre o eixo x ou y quando localiza-se um vetor em sua posição canônica) no cálculo de medidas de ângulos ou das coordenadas do vetor; (iii) conceituação de *Ciclo Trigonométrico* como sendo a rotação de 360° de um vetor unitário em torno da origem do plano cartesiano. Esse encaminhamento propicia a compreensão da *Trigonometria no círculo*, ou seja, possibilita, inicialmente, a determinação dos valores do seno e cosseno de arcos maiores ou iguais a 90°, apenas por *Transformações* e o *Teorema de Pitágoras*.
- ❖ Aplicar a *Translação de pontos* na contrução do gráfico de uma reta e, em seguida, determinar a equação da mesma.
- ❖ Deduzir a equação reduzida da reta no ¡ ^{2}, que serve como ponto de partida para o estudo da *Função Afim*.
- ❖ Utilizar as *Translações* para relacionar os gráficos e as leis de formação das *Funções*, servindo como base para a construção de gráficos mais elaborados, como os definidos por mais de uma sentença e os gráficos das *Funções Quadráticas* e *Modulares* (compostas com *Afim* e *Quadrática*). Indicamos a utilização de um software de geometria dinâmica para proporcionar uma visualização e conjecturas mais requintadas provenientes dos alunos.

Como a reestruturação curricular que apresentamos baseia-se no estudo vetorial, não nos preocuparemos em descrever outros detalhes do processo, como: (i) a abordagem da *Progressão Aritmética* enquanto *Função Afim*, cujo domínio é o conjunto dos números naturais; (ii) as atividades em softwares de geometria dinâmica; (iii) o enfoque dado aos gráficos da *Função Quadrática*, cuja lei de formação é apresentada na forma reduzida, evidenciando as coordenadas do vértice da parábola e reforçando a *Translação.*

UMA PRIMEIRA ABORDAGEM

Após a definição de *Segmento Orientado* a partir das características de módulo, direção e sentido, sua representação no plano cartesiano e os tipos de segmentos orientados, apresentamos a noção de *Vetor* como um representante de um conjunto de segmentos equipolentes. O que buscamos enfatizar aqui é a noção intuitiva de transporte de pontos que utilizamos, como por exemplo, um indivíduo que está em uma estação do Metrô e deseja ser transportado (pelo trem) à outra. Dessa forma, nossa abordagem é apresentada conforme o seguinte texto:

> "No plano ($\mathbb{R}^2$), um ponto é um par ordenado (x, y) onde x é a abscissa e y é a ordenada. Se o vetor v é um representante de todos os segmentos orientados equipolentes a AB, então v = AB. Podemos interpretar que o vetor v conduz (transporta) o ponto A até o ponto B, conforme mostra a figura.
>
> 
>
>
> Observe que o vetor não está fixo no plano cartesiano, mas o segmento orientado está determinado pela origem e extremidade, que são pontos fixos no plano.
> A partir da idéia do transporte de A para B, por intermédio de v, com abuso de notação, pode-se expressar: A + v = B, ou ainda, A + AB = B.
> A expressão indica que, a partir do ponto A, promovemos um deslocamento dado pelo vetor AB, chegando ao ponto B. Ainda com abuso de notação, pode-se escrever: AB = B – A."

(Apostila de Vetores e Geometria Analítica do CAp UFRJ, 2011, p. 9)

Pretendemos com a noção intuitiva dada pelo transporte de pontos, apresentar de forma sutil o movimento de translação, sem recorrer à sua definição à priori. Isso se dará apenas no momento em que forem trabalhadas as *Transformações no Plano*.

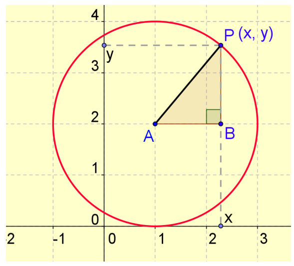
A partir dessa primeira abordagem, os conteúdos são explorados conforme descrevemos anteriormente. Para compreender melhor a conexão entre eles, apresentamos algumas formas de tratamento dos temas a partir de 4 (quatro) atividades:

ATIVIDADE 1 - *Objetivo: Conjecturar sobre circunferências e determinar sua equação.*

Esboce no plano cartesiano, em papel milimetrado, a circunferência que tem centro no ponto A(1, 2) e raio 2 unidades de comprimento. Em seguida, faça o que se pede:

a) Escreva as coordenadas de três pontos desta circunferência.
b) Considere um ponto qualquer P(x, y) da circunferência. Determine as medidas dos lados do triângulo ABP e relacione-os através de uma sentença matemática.

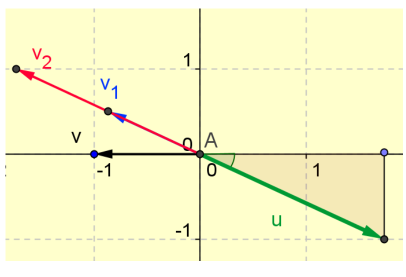
A resolução dessa atividade depende da construção gráfica da figura. Determinando o triângulo retângulo de lados $(x - 1)$, $(y - 2)$ *e 2, aplica-se o Teorema de Pitágoras, encontrando:* $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$.



ATIVIDADE 2 - *Objetivo: Aplicar conceitos de Transformações.*

Considere um vetor u que sofreu as seguintes transformações, respectivamente: simetria central em torno da origem; homotetia de razão $\frac{1}{2}$ com centro na origem e rotação de 30° em torno da origem, no sentido anti-horário. Após estas transformações, o vetor encontrado foi v = (-1,0). Encontre as coordenadas do vetor u.

A partir de v *=(-1,0), deve-se "desfazer" as transformações na ordem inversa em que foram feitas: rotação de 30° em torno da origem no sentido horário; homotetia de razão 2 com centro na origem e simetria central em torno da origem.*

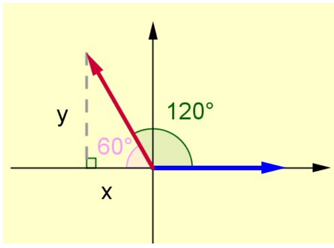


ATIVIDADE 3 - *Objetivo: Introduzir aTrigonometria e proporcionar conjecturas sobre o seno e o cosseno de arcos maiores do que 90°.*

A rotação de um vetor v, em torno da origem e no sentido anti-horário, segundo um ângulo de 360º, faz com que a ponta do vetor descreva uma circunferência de raio de medida $|v|$. Isto é, a ponta do vetor percorreu uma distância que representa o comprimento da circunferência de centro em O e raio $|v|$, ou seja, $2\pi|v|$. Responda:

a) A rotação do vetor v, em torno da origem e no sentido anti-horário, segundo um ângulo de 120º, faz com que a ponta do vetor percorra que distância?

b) Se v = (1,0), quais as novas coordenadas de v após a rotação do item anterior?



A medida do arco de 120° é a terça parte da medida do arco de 360°. Assim, a distância percorrida será $\frac{2\pi|v|}{3}$. *No triângulo retângulo de catetos x, y e hipotenusa 1, tem-se que sen 60°* = $\frac{y}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *e cos 60°* = $\frac{x}{1} = \frac{1}{2}$. *Logo,*

$$v' = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

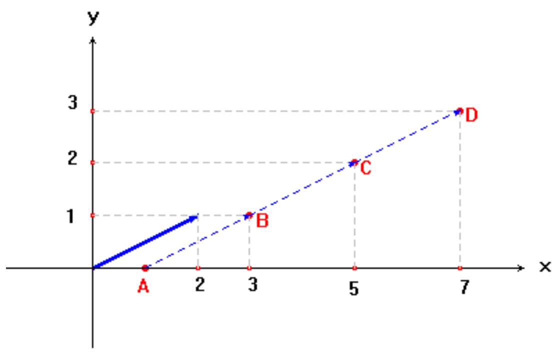
ATIVIDADE 4 - *Objetivo: Conjecturar sobre retas no plano e determinar sua equação.*

Considere uma reta que contém o ponto A (1, 0) e tem a direção do vetor v = (2, 1).

a) Determine as coordenadas do ponto B, translação de A segundo v.

b) Localize, no papel milimetrado, quatro pontos que pertencem a essa reta (A, B, C, D) e escreva B, C e D em função de A e v.

c) Escreva as coordenadas de todos os pontos P(x, y) da reta, como translações de A na direção de v.



Observando que $B = A + v$, $C = A + 2v$ *e* $D = A + 3v$, *intui-se que* $P = A + tv$, *com* $t \in$ ¡ *, que é a equação vetorial da reta.*

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Procuramos expôr algumas razões e resultados para se lançar mão da geometria vetorial, a partir de uma reformulação curricular, mostrando, como complementação dessa parte teórica, atividades que exemplificam as abordagens utilizadas.

Como consequência dessa proposta para o 1° ano do EM, os conteúdos destinados aos alunos de 2° e 3° anos do CAp UFRJ também sofreram modificações, não tão significativas quanto o 1° ano, mas que valem a pena serem destacados:

- O estudo de *Funções Exponenciais*, *Logarítmicas* e *Trigonométricas*, todas em composição com a modular, é feito com base nas *Translações* de gráficos, utilizadas nas funções *Afim* e *Quadrática*.
- O ensino de *Números Complexos* é preservado pela conexão entre os *Planos de Argand-Gauss* e o *Cartesiano*, mostrando que um número complexo pode ser encarado com um vetor, preservados os devidos ambientes e singularidades. Com base nisso, as representações algébricas e trigonométricas são simultâneas, além de proporcionar algumas visualizações, como, por exemplo, a *Rotação* de 90° de um número complexo no plano sendo associada com clareza ao produto pelo imaginário puro *i*.
- As *Matrizes* são vistas, também, como formas de agrupar vetores linha ou coluna, possibilitando o estudo intuitivo de operações com matrizes apenas por comparação com as operações vetoriais.
- O espaço $\mathbb{R}^3$, por ser uma generalização do $\mathbb{R}^2$, propicia que a *Geometria Espacial*, em especial os paralelepípedos e tetraedros, sejam abordados a partir da localização de seus vértices, ao invés de priorizar os dados métricos, como é de costume.

Há ainda outras consequências que observamos, tanto no âmbito técnico (curricular), quanto no pessoal (resultados dos alunos), mas não destacaremos aqui. Ainda estamos na fase de análise dos dados e pretendemos ter estes resultados no momento da exposição desse trabalho, como um complemento do artigo.

As experiências relatadas nessa proposta fazem parte de um processo em andamento, assumido como investigativo, e em caráter de pesquisa. Temos consciência de que estamos em uma etapa intermediária da investigação, que é motivada pelas reflexões que fazemos diante da demanda da nossa prática e que refletem o compromisso do corpo docente do Setor Curricular de Matemática do CAp UFRJ com a produção de conhecimento. Reafirmando nosso compromisso com a Educação Pública e de qualidade, esperamos ainda, com esta comunicação, estimular a reflexão sobre a prática docente e apontar possibilidades de mudanças.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASSEMANY, D.; AKIO, L. ; DIAS, P ; RANGEL, L.; SPÍLLER, L. & VILLAR, F. **Apostila de Vetores e Geometria Analítica**. Universidade Federal do Rio de Janeiro, 145 p., 2011.

BITTAR, M. **O Ensino de Vetores e os Registros de Representação Semiótica**. In Org MACHADO, S.D.A. **Aprendizagem em Matemática.** Campinas, São Paulo. Ed. Papirus, 2003.

_____ . **A teoria dos campos conceituais e o ensino de vetores no ensino secundário francês**. Anais da 25ª Reunião da Anped, 2002.

DORIER, J. L. **Contribution à l' étude de l' enseignement à l' université des premiers concepts d'algèbre linéaire. Approches historique et didactique**. Grenoble 1, UNIVERSIDADE JOSEPH FOURIER, 1990.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, SECRETARIA DE EDUCAÇÃO MÉDIA E TECNOLÓGICA. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino** MÉDIO. Brasília, 1999.

NASSER, L. **Uma pesquisa sobre o desempenho de alunos de Cálculo no traçado de gráficos**. In Org. FROTA, M.C.R. & NASSER, L.: **Educação Matemática no Ensino Superior – Pesquisas e Debates**, pp.43-58, Biblioteca do Educador Matemático – Coleção SBEM, vol.5, 2009.

PATRÍCIO, R. S. **As Representações Semióticas no Ensino de Vetores**. In: **III Seminário de Pesquisas da pós-graduação em Educação em Ciências e Matemáticas**, PA, 2011. PPGECM, Anais do III SAPPECIM, 2011.

RESENDE, W. **O ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica**. In Org MACHADO, N.J. e CUNHA, M.O: **Linguagem, Conhecimento, Ação – Ensaios de Epistemologia e Didática**, pp. 313-336. Escrituras Editora, São Paulo, 2003.