“OS NÚMEROS REAIS”: UM CONVITE AO PROFESSOR DE MATEMÁTICA DO ENSINO FUNDAMENTAL E DO ENSINO MÉDIO

Prof. Msc. Willian José da Cruz[i]
lukinha@barbacena.com.br

RESUMO

Este artigo apresenta o resultado de pesquisa para obtenção do grau de mestre em Educação Matemática pela Universidade Federal de Juiz de Fora. Com a percepção que distingue a matemática escolar em vários aspectos da matemática científica, esta pesquisa propõe uma aproximação entre essas duas formas conceituais, no que discute o entender e fazer matemática, perpassando pelas idéias que diferenciam cada uma delas. Ainda que num tratamento formal na apresentação dos Números Reais, serão apontadas possíveis consequências e aplicações desta apresentação nas séries finais do ensino fundamental e do ensino médio. Esta pesquisa também é uma tentativa de iniciar uma reflexão, a partir dos Números Reais, que possa permitir uma mudança na forma de trabalho com a disciplina Análise Real, nos cursos de Licenciatura em Matemática, diminuindo a dicotomia entre a formação matemática do professor e sua prática docente.

Palavras-chave: Matemática Escolar, Análise Real, Números Reais, Licenciatura em Matemática, Formação de Professores.

ABSTRACT

This article presents the results of research to obtain a master's degree in Mathematics Education from the Federal University of Juiz de Fora. With the perception that distinguishes school mathematics in various scientific aspects of mathematics, this research proposes a rapprochement between these two conceptual ways in which discusses the understanding and doing mathematics, passing by the ideas that distinguish each one .Although a formal treatment in the presentation of real numbers, will be pointed out the possible consequences and applications of this presentation in the final grades of elementary school and high school. This researches also an attempt to initiate a reflection from the real numbers that would enable a shift in the discipline of working with Real Analysis courses in Mathematics, reducing the dichotomy between mathematics teacher education and practice teacher.

Keywords: School Mathematics, Real Analysis, Real Numbers, Mathematics Degree, Teacher Education.

INTRODUÇÃO

Apresentando os números reais em suas estruturas “algébrica e topológica”, esta pesquisa tem como objetivo convidar o professor, e/ou licenciando em matemática, a entender e a identificar na sua prática tal tratamento, buscando também refletir sobre a possibilidade de iniciar, por meio dos números reais, uma discussão sobre como poderia ser o trabalho com o conteúdo Análise Real, nos cursos de licenciatura em matemática.

Outro objetivo a destacar é sugerir ao professor do ensino fundamental e do ensino médio que o conjunto dos números reais e todas as suas propriedades estão presentes em sua sala de aula, ainda que o tratamento formal, em sua plenitude, possa não ser considerado.

Empreende-se nesta pesquisa, para alcançar os objetivos propostos, uma discussão sobre matemática escolar e matemática acadêmica, diferenciando essas duas formas de entender e de conceber a matemática e também discutir aspectos da formação do professor de matemática, não se esquecendo das especificidades que estão envolvidas na dinâmica do trabalho docente. Para este empreendimento, destacam-se educadores matemáticos que estudam questões relacionadas à formação do professor matemática, que contribuem para a dinâmica desta pesquisa.

A apresentação dos números reais nas estruturas “algébrica e topológica” se encerra nesta pesquisa, definindo números reais como corpos ordenados completos, com a tentativa de aproximar as questões que são desenvolvidas nos cursos de formação de professores na disciplina Análise Real e a prática docente, respeitando a autonomia do professor em incorporar ou não tal tratamento em seu fazer pedagógico.

OBJETIVOS

Apresentando os números reais em suas estruturas “algébrica e topológica”, esta pesquisa tem como objetivo convidar o professor e/ou licenciando em matemática, a entender e identificar na sua prática tal tratamento, buscando também refletir a possibilidade de iniciar, por meio dos números reais, uma discussão sobre como poderia ser o trabalho com o conteúdo Análise Real, nos cursos de licenciatura em matemática.

Outro objetivo a destacar é sugerir ao professor do ensino fundamental e do ensino médio que o conjunto dos números reais e todas as suas propriedades estão presentes em sua sala de aula, ainda que o tratamento formal em sua plenitude possa não ser considerado.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Esta pesquisa resumiu-se na busca de textos que tratassem sob todos os aspectos do tema "os números reais em suas estruturas algébrica e topológica" e em quatro livros didáticos, sendo dois usados no ensino fundamental e dois usados no ensino médio, que pudessem contribuir para identificação de elementos dos números reais estudados no âmbito do ensino fundamental e do ensino médio.

A abordagem escolhida foi à apresentação dos números reais como estrutura de corpo ordenado completo que ao longo do processo oportunizaram identificar elementos em livros didáticos os quais utilizavam, com ou sem rigor, tais estruturas.

MATEMÁTICA ACADÊMICA

A matemática acadêmica ou matemática científica nesta pesquisa são considerados termos com mesmo sentido.

A matemática científica é estruturada axiomaticamente, sustentando-se em definições, teoremas, postulados e conceitos primitivos previamente estabelecidos para as provas e validades das mesmas, exigindo uma formulação das definições, não caracterizando ambiguidades na construção lógica de um objeto matemático, para não produzir contradições na teoria.

As definições formais e o processo de sistematização são elementos fundamentais no decorrer do processo de conformação da teoria, que é validado por demonstrações rigorosas (MOREIRA, 2004, p. 24).

MATEMÁTICA ESCOLAR

A matemática escolar se configura como um conjunto de saberes associados ao exercício da profissão docente (MOREIRA, 2004, p. 12). Os valores constituídos pela matemática escolar se desenvolvem no contexto educativo, valida a necessidade de encontrar formas distintas para desenvolvimento do conhecimento matemático no âmbito da escola.

Na perspectiva da matemática produzida na escola, o saber docente divide-se em vários componentes, um deles, dentre os quais se destaca, é o conhecimento da disciplina que assume um papel essencial.

NÚMEROS E OPERAÇÕES NO ENSINO FUNDAMENTAL

De acordo com os parâmetros curriculares do ensino fundamental (BRASIL, 1998), os conhecimentos numéricos são construídos e assimilados de forma dialética pelos alunos.

Esses conhecimentos intervêm como instrumentos eficazes para resolver determinados problemas e como objetos que serão estudados, considerando suas propriedades, suas relações e o modo como se configuram historicamente.

Ao longo do processo de escolarização, o aluno percebe a existência de diversas categorias de números criadas em função de distintos problemas que a humanidade teve que enfrentar – números naturais, números inteiros positivos e negativos, os números racionais em suas representações fracionárias e decimais e os números irracionais.

À medida que se depara com as operações de adição, de subtração, de multiplicação, de divisão, de potenciação e de radiciação, os conceitos numéricos vão se ampliando.

No processo operatório, o trabalho a ser realizado se concentrará na compreensão dos diversos significados de cada uma das operações, nas relações existentes entre elas e no estudo reflexivo do cálculo, contemplando distintos tipos, dos quais se destacam o exato e o aproximado, o mental e o escrito (BRASIL, 1998, p. 75).

Reconhecer números e operações perpassa pela compreensão dos significados de números naturais, do sistema de numeração decimal e pela identificação dos números inteiros e racionais em diferentes contextos (BRASIL, 1998)

É fato que o professor do ensino fundamental do 6º ano retoma e amplia todo trabalho desenvolvido com números naturais nas séries anteriores e inicia o conceito de números racionais, considerando-os nessa fase de conceituação como elementos de um conjunto, os quais determinam, de uma forma geral e completa, as operações de adição e multiplicação, mas de uma forma restrita a subtração e a divisão. Também desperta os estudantes para a percepção de relações entre esses números, nos mais distintos universos aos quais são considerados, como por exemplo, o universo dos números primos e compostos, dos divisores, de múltiplos e de outros.

No 7º ano é introduzido o conceito de números negativos, trabalhando os inteiros e os racionais negativos, já no 8º ano, introduzem-se os conceitos de números racionais e irracionais, definindo os números reais, dando sequência no 9º ano e no ensino médio.

Por meio desta concepção, é necessário que o professor do ensino fundamental das séries finais e do ensino médio, conheça a matemática do ponto de vista escolar e principalmente conheça a matemática trabalhada nas séries iniciais, para que possam entender as dúvidas de conceituação que aparecem frequentemente entre os estudantes.

Para essa concepção, Moreira e David (2005)dizem:

> No desenvolvimento de cada etapa desse processo de expansão dos conjuntos numéricos, o professor terá que, por um lado, conhecer profundamente — do ponto de vista da matemática escolar — aquilo que os alunos consideram num dado momento, como o <u>universo</u> (grifo do autor) numérico, e, por outro, lidar com dúvidas e concepções incorretas dos alunos, as quais vão se referir tanto ao "novo" conjunto, mais amplo, como também ao conjunto mais restrito, aquele supostamente "conhecido", que está sendo ampliado (MOREIRA & DAVID, 2005, p.53).

A axiomatização do processo de ensino e aprendizagem de matemática tem, por um lado, a importância de organização, de sistematização e de conhecimento, mas servem para propósitos definidos, que, muitas vezes chocam com os aspectos pedagógicos (MOREIRA & DAVID, 2005, p. 58).

INCURSÃO HISTÓRICA – O QUE É ANÁLISE

Análise Real é a área da matemática que trata do formalismo e do rigor matemático usados para justificar os conceitos do Cálculo. Geralmente, divide-se a matemática em três áreas: a Álgebra, a Geometria e a Análise, sendo a Análise a mais nova delas, que se constitui como uma ramificação do Cálculo que é uma teoria criada no século XVII, por Newton e Leibniz, sendo este um fato histórico de grande importância para o desenvolvimento da física moderna.

O estabelecimento dos fundamentos do Cálculo caminhou pelo século XVIII, quando aconteceram as primeiras tentativas de rigorização do Cálculo (REIS, 2009, p. 83), adentrando pelo século XIX, com o movimento da arimetização da Análise.

Segundo Reis (2009), as tentativas fracassadas de obter uma rigorização do Cálculo, realizadas no século XVIII foram os primeiros passos para a fundação da Análise.

A mudança do modelo geométrico por um modelo mais formal, baseado na ideia de número, o que é conhecido como aritmetização, foi pensada de forma que pudesse ter o rigor necessário e nesse modelo, as questões observadas poderiam ser abarcadas e resolvidas.

Vários matemáticos contribuíram para o desenvolvimento da aritmetização da Análise, dos quais, destacam-se Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815 – 1897) e Bernhard Bolzano (1781 – 1848). O primeiro autor foi considerado um dos precursores do movimento e o segundo foi considerado por Felix Klein (1849-1925) o pai da aritmetização da Análise.

Desde a criação do Cálculo, a Análise inseriu-se em praticamente todas as áreas da matemática, quer seja por causa de sua riqueza intrínseca quer seja pelas suas aplicações. Suas subdivisões adquiriam vida própria e são frequentemente estudadas com fins em si próprios.

DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA

A apresentação do conjunto dos números reais como corpo ordenado completo, é geralmente estudada nos cursos de Análise Real, nas licenciaturas em matemática.

CORPO

Um conjunto no qual estão definidas e fixadas duas operações binárias, denotadas por $+$ e $\cdot$, as quais são chamadas de adição e multiplicação respectivamente, satisfazendo os axiomas seguintes é chamado de corpo, denotado nesta pesquisa por K.

OS AXIOMAS DA ADIÇÃO:

Axioma 1A. A adição é uma operação comutativa no corpo K, ou seja, quaisquer que sejam os elementos x e y de K, verifica-se a igualdade:

$$x + y = y + x$$

Axioma 2A. A adição é associativa, ou seja, quaisquer que sejam os elementos x, y e z de K:

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

Axioma 3A. A adição tem um único elemento neutro, ou seja, para a adição, existe um único elemento m , pertencente a K, tal que qualquer que seja x pertencente a K.

$$x + m = m + x = x$$

Axioma 4A. Todo elemento de K tem simétrico, isto é, qualquer que seja $x \in$ K, existe pelo menos um y de K, tal que:

$$x + y = y + x = m$$

OS AXIOMAS DA MULTIPLICAÇÃO

Axioma 1M. A multiplicação é uma operação comutativa no corpo K, ou seja, quaisquer que sejam os elementos x e y de K, verifica-se a igualdade:

$$x \cdot y = y \cdot x$$

Axioma 2M. A multiplicação é associativa, isto é, quaisquer que sejam os elementos x, y e z de K:

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

Axioma 3M. A multiplicação tem um único elemento neutro diferente de zero, ou seja, para a multiplicação, existe um único elemento α diferente de zero, pertencente a K, tal que qualquer que seja x pertencente a K:

$$x \cdot \alpha = \alpha \cdot x = x$$

Axioma 4M. Todo elemento K, distinto de zero, tem inverso, ou seja, qualquer que seja $x \in$ K, com $x \neq 0$, existe pelo menos um $y \neq 0$, tal que:

$$x \cdot y = y \cdot x = \alpha$$

A DISTRIBUTIVIDADE: UMA RELAÇÃO ENTRE A ADIÇÃO E A MULTIPLICAÇÃO

Axioma D. O encontro das duas operações, adição e multiplicação, acontece nesse axioma e é chamado de propriedade distributiva, ou seja, a multiplicação é distributiva a respeito da adição: quaisquer que sejam os elementos x, y e z de K:

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

CORPO ORDENADO

Um corpo K será dito ordenado se neste corpo está destacado ou fixado um subconjunto P, chamado de conjunto dos elementos positivos de K, que satisfaz as seguintes condições:

1ª – Se a e b pertencem a P, então $a + b$ pertence a P, ou seja, se dois elementos do corpo K são positivos, a soma deles também é um elemento positivo.

2ª – Se a e b pertencem a P, então $a \cdot b$ pertence a P, ou seja, o produto de dois elementos do corpo K positivos é um elemento de K positivo.

3º - Se a pertence a K, então verifica uma, e somente uma das seguintes propriedades:

ou $a \in$ P, ou $a = 0$, ou $-a \in \mathbf{P}$

A terceira condição também é conhecida como propriedade da tricotomia. Esta terceira condição implica que o conjunto M = {$-a$; $a \in$ P} o qual é denominado conjuntos dos elementos do corpo ordenado K negativos, não tem elementos comuns com o conjunto P. Desta forma, pode-se concluir que o conjunto K é a união dos três conjuntos disjuntos, P, {0} e M.

CORPO ORDENADO COMPLETO

Um corpo ordenado K é dito completo, se todo subconjunto não vazio X $\subset$ K, limitado superiormente, possui supremo em K, da mesma forma, se um subconjunto Y$\subset$ K for limitado inferiormente, tem que possuir ínfimo. Pode-se concluir que todo corpo ordenado completo é Arquimediano.

A partir deste momento, definem-se os Números Reais como corpo ordenado completo e, evidentemente, todas as propriedades de corpos ordenados completos serão válidas para R.

Na abordagem atual das licenciaturas, os números reais são definidos axiomaticamente e, uma vez assim estabelecidos, prova-se que existem reais que não são racionais (MOREIRA & DAVID, 2005, p.82)

O QUE DISCUTIMOS?

Buscou-se nesta pesquisa, discutir questões que muitas vezes geram confusões na dinâmica do trabalho com a matemática no âmbito do ensino fundamental e do ensino médio. Estas questões envolvem as famosas regras de sinais, por exemplo, $(-1) \times (-1) = 1$, a multiplicação por zero, o módulo de um número real, a representação decimal infinita dos números reais, inequações dentre outras.

As compreensões de certos aspectos da matemática formal foram observadas no transcorrer deste trabalho, buscando associar questões importantes da matemática do ensino fundamental e do ensino médio, dando aos mesmos um tratamento mais rigoroso.

CONSIDERAÇÕES

Esta pesquisa se configurou como uma proposta para iniciar uma reflexão sobre o que poderia ser trabalho da disciplina de Análise Real para os cursos de licenciatura em matemática e também um convite ao professor do ensino fundamental e do ensino médio a entender aspectos da construção dos números reais em suas estruturas "algébrica e topológica", identificando consequências desta na matemática produzida no ambiente escolar.

Para este empreendimento, o autor se dispôs a apresentar algumas questões envolvidas na dinâmica de sala de aula e também a clarear aspectos que diferenciam matemática escolar e matemática acadêmica. Como o foco desta pesquisa tem como referência a formação inicial ou continuada do professor, emprendeu-se neste trabalho um diálogo, permitindo, dentre várias concepções, concluir que, em termos da formação do professor de matemática, ainda há a necessidade de se encontrar formas para uma melhor qualificação.

O autor procurou, neste trabalho, proporcionar ao professor e\ou licenciando em matemática, situações estudadas em um curso de Análise Real, levantando algumas questões e mostrando as dificuldades que perpassam por assuntos mais abstratos. Para esta pesquisa, foram dispostas etapas importantes, a destacar o estudo de um número significativo de textos, livros e outros; compreensão dos conteúdos apresentados; desenvolvimento da pesquisa dentro do rigor necessário; a construção de um procedimento metodológico coerente com os objetivos definidos; desprendimento de certos aspectos da matemática escolar e acadêmica, para uma melhor compreensão destas duas formas do fazer matemático.

O autor assumiu também grandes dificuldades em buscar na sua prática elementos que pudessem compor a dinâmica desta pesquisa.

Como a proposta desta pesquisa era apresentar os números reais nas estruturas "algébrica e topológica", convidando o professor do ensino fundamental e do ensino médio a entender tais aspectos e, se possível, iniciar, a partir dos números reais, uma discussão sobre como poderia ser o curso de Análise Real para licenciatura, o autor acredita ter vencido esta etapa.

REFERÊNCIAS

BARTLLE, Robert G. **Elementos de Análise Real**. Tradução de Alfredo A. de Farias. – Rio de Janeiro: Campus, 1983.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática** / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC / SEF, 1998, 148 p.

BRASIL. Secretaria de Educação Média. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. v 2. Brasília: MEC, 1998.

BRASIL, Ministério da Educação. **Diretrizes curriculares nacionais para os cursos de matemática, bacharelado e licenciatura**. Publicada no Diário oficial da União em 05 de março, 2002.

MOREIRA, Plínio Cavalcanti e DAVID Maria Manuela Martins Soares.**A formação matemática do professor.** Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

_______.**Matemática escolar, matemática científica, saber docente e formação de professores.** (Artigo), Revista Zetetike - Cempem – FE – Unicamp – v.11 – n. 19, - Jan./Jun. 2003.

_______.**O conhecimento matemático do professor.** (Artigo), Revista Brasileira de Educação nº 28, 2005.

MOREIRA, Plínio Cavalcanti; CURY, Helena Noronha; VIANNA, Carlos Roberto. **Por que análise real na licenciatura?** (Artigo), Revista Zetetike - Cempem – FE – Unicamp – v.11 – n. 23, - Jan./Jun. 2005.

MOREIRA, Plínio Cavalcanti. O conhecimento matemático do professor: formação na licenciatura e prática docente na escola básica. Belo Horizonte: 2004. 195 f. BBE. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais. Orientador: Maria Manuela Martins Soares David.

REIS, F. S. **A tensão entre rigor e intuição no ensino de cálculo e análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos**. 2001. 604 f. Tese (Doutorado em Educação) - FE/Unicamp, Campinas (SP), 2001.

_______. **Educação Matemática no ensino superior: pesquisas e debates**. Recife: SBEM, 2009.p. (81 – 97).

[i] Professor efetivo da Secretaria de Educação Municipal de Barbacena MG; Professor do Centro de Educação Angher Barbacena MG; Professor substituto do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora.