

MODELAGEM MATEMÁTICA COMO A CONSTRUÇÃO DE UMA REALIDADE INTERMEDIÁRIA OU UM ISOLADO

Dale Bean
dale@iceb.ufop.br

Cássio Luiz Vidigal
cassio.vidigal@ifmg.edu.br

Resumo: A partir de uma revisão bibliográfica, apresentamos uma comparação dos elementos de modelagem matemática propostos por Cifuentes e Negrelli: *realidade inicial*, *realidade intermediária* e *modelo matemático* com os elementos correspondentes propostos por Bean: *situação problemática*, *isolado* e *modelo matemático*. Esta comparação é feita por meio da análise de artigos dos autores e exemplos apresentados por eles: a trajetória de um projétil (Cifuentes e Negrelli) e a queda livre (Bean). Da análise dos artigos, apontamos similaridades e diferenças em conceitos chave às concepções de modelagem dos autores, reconhecendo a necessidade de um estudo mais profundo para esclarecer melhor suas concepções.

Palavras-chave: modelagem matemática, realidade intermediária, isolado, situação limite, premissa, pressuposto.

Abstract: From a bibliographical study, we present a comparison of the mathematical modeling elements proposed by Cifuentes e Negrelli: *initial reality*, *intermediate reality* and *mathematical model* with corresponding elements proposed by Bean: *problematic situation*, *isolated* and *mathematical model*. This comparison is realized by means of the analysis of articles of the authors and examples that they present: the trajectory of a projectile (Cifuentes e Negrelli) and free fall (Bean). From the analysis of the articles, we point out similarities and differences in key concepts of the authors' conceptions of modeling, recognizing the necessity of further studies in order to better clarify their conceptions.

Key words: mathematical modeling, intermediate reality, isolated, limit situation, premise, assumption.

INTRODUÇÃO

Há algum tempo a modelagem matemática se constituiu em um importante foco de discussão no âmbito da Educação Matemática. Existe uma variedade de entendimentos a respeito do que constitui essa atividade (BASSANEZI, 2002; BIEMBENGUT e HEIN, 2007; BARBOSA, 2001; BEAN, 2003, 2007, 2009; BURAK, 2004; CIFUENTES e NEGRELLI, 2006, 2007, 2009). Dentre esses múltiplos entendimentos, este trabalho tem

por objetivo a apresentação de um estudo inicial da atividade da construção de modelos matemáticos que é concebido diferentemente, embora de forma similar, nas concepções de modelagem matemática de Cifuentes e Negrelli (2006, 2009) e Bean (2003, 2007, 2009). Diz respeito ao que Bassanezi (2002, p. 28-29) se refere como o levantamento de hipóteses e a simplificação de situações complexas. As descrições dessa atividade de construção se encontram nas concepções de Cifuentes e Negrelli e de Bean, mais especificamente nos conceitos da *realidade intermediária* de Cifuentes e Negrelli e do *isolado* de Bean.

Cifuentes e Negrelli (2006, 2009) entendem que a formulação de *situações limites* referente de uma situação inicial, ou *realidade inicial*, é um meio para estruturar o que entendemos por realidade na construção de uma *realidade intermediária* para depois se desenvolver o modelo matemático. Bean (2007, 2009), por sua vez, não considera questões a respeito de realidade ao empregar a noção da construção de um *isolado* pela adoção de *premissas* e formulação de *pressupostos*¹.

A seguir, como resultado de nosso estudo inicial que teve por objetivo uma compreensão maior a respeito das similaridades e das diferenças entre as concepções destes três autores, apresentamos uma análise das noções da *realidade intermediária* no contexto da concepção de modelagem matemática de Cifuentes e Negrelli (2006, 2007, 2009) e do *isolado* na concepção de Bean (2007, 2009). Iniciamos com uma breve descrição do caráter criativo de modelagem por entender que as noções dos três autores remetem a esta característica de modelagem matemática.

MODELAGEM COMO ATIVIDADE CRIATIVA

Em 2003, Bean propôs uma forma de olhar a modelagem matemática em termos do pensamento. Naquela ocasião, o autor definiu por “modelagem matemática uma atividade expressiva que exige a utilização do pensamento interpretativo e criativo na formulação de uma representação matemática para um fenômeno através de hipóteses e aproximações simplificadoras” (BEAN, 2003, p. 2). Esta visão comunga com a apresentada por Cifuentes e Negrelli (2006, p. 2) quando afirmam que “fazer modelagem matemática implica em modelar alguma realidade e, nesse processo, são ingredientes a imaginação e a matemática,

¹ A concepção de modelagem em termos de premissas e pressupostos está sendo desenvolvido em trabalhos de Bean (2007, 2009) e Melillo e Bean (em prelo). Neste texto, ao comentar sobre as ideias de Bean (2007) utilizamos a palavra *pressuposto* no lugar de *hipótese* conforme à nomenclatura atual de Bean (2009) por entender que na concepção de Bean o “recorte” na modelagem é o conjunto de premissas e pressupostos utilizado para a construção do modelo.

ou melhor, o pensamento matemático, algo mais dinâmico que um simples saber.” Nessa mesma ótica de criatividade, Biembengut e Hein afirmam que a

modelagem matemática [...] pode ser considerada um processo artístico, visto que, para se elaborar um modelo, além de conhecimento de matemática, o modelador, precisa ter uma dose significativa de intuição e criatividade para interpretar o contexto, saber discernir que conteúdo matemático melhor se adapta e também ter senso lúdico para jogar com as variáveis envolvidas.

(BIEMBENGUT e HEIN, 2007, p. 12)

Ainda, de acordo com Bassanezi (2002, p. 61), “a modelagem matemática consiste essencialmente na arte de transformar problemas da realidade e resolve-los, interpretando suas soluções na linguagem do mundo real.”

Nas concepções dos autores citados no parágrafo anterior, a modelagem matemática é uma atividade criativa; inclusive um processo artístico. Mais que isso, quando criarmos um modelo a partir de uma situação, devemos ter em mente quais aspectos podem ser desconsiderados e quais são relevantes e como conceituá-los de forma a obtermos um modelo adequado aos nossos objetivos. É disto que trataremos na próxima seção, sob as óticas de Cifuentes e Negrelli e de Bean.

A REALIDADE INTERMEDIÁRIA / O ISOLADO

Para Cifuentes e Negrelli, a realidade (ou *realidade inicial*) é a realidade empírica que se fundamenta na ideia que reconhecemos as coisas independentes do conhecimento sobre elas e o que interessa à modelagem matemática é transpor um problema desta realidade para a matemática. Segundo os autores, este problema que será transposto para a matemática não “reside” na *realidade inicial* e sim num momento entre a realidade inicial e o modelo, momento este que denominam *realidade intermediária*.

Nesta concepção a realidade intermediária consiste numa problematização e, consequentemente, na criação de uma nova realidade que ainda não é o modelo. Para Cifuentes e Negrelli (2009, p.7) a realidade intermediária “é um recorte de uma situação daquela realidade inicial, propiciado pela elaboração de hipóteses e aproximações simplificadoras, a partir do qual se formulará o problema.”

O que Cifuentes e Negrelli tratam por realidade intermediária, Bean chama de isolado. Trata-se de interpretar, pelas concepções do modelador, a situação a ser modelada

para apreciar quais aspectos devem ser levantados para se criar um modelo que atenda a situação em questão. Para Bean (2009, p. 1), “modelagem (sem o adjetivo matemática) remete a objetivos, premissas e pressupostos na conceituação de situações problemáticas”. A ideia central de modelagem na concepção de Bean reside no recorte, ou mais especificamente, na elaboração de um isolado fundamentado em premissas e pressupostos que possuem aspectos, tanto do fenômeno a ser modelado, quanto dos objetivos do modelador.

De modo geral, esses três autores possuem concepções de modelagem matemática similares, entretanto suas bases filosóficas exprimem uma diferença na maneira que eles compreendem a atividade. Bean concebe o modelo criado por modelagem como um artifício ou construto conceitual, enquanto Cifuentes e Negrelli o concebem como uma representação parcial da realidade empírica. Conforme seus pressupostos filosóficos, Cifuentes e Negrelli destacam a estruturação da realidade que relacionam a *realidade inicial* em termos de realismo, onde a realidade é concebida como aquilo que é dado independentemente do nosso conhecimento a respeito dele; a *realidade intermediária* em termos de estruturalismo (estruturas formulados para as interpretações / percepções / intuições referentes a realidade dada) e o *modelo* em termos de empirismo ao entender que o modelo deve ser avaliado em termos de sua adequação empírica. Os pressupostos filosóficos de Bean remetem ao pragmatismo com a ideia que lidamos com *problemas*, em parte, com linguagens para *conceituá-los* em relação aos nossos objetivos. A adequação de *modelos* está julgada frente aos objetivos relativos às situações em questão.

realidade inicial	realidade intermediária	modelo matemático
situação problemática	isolado	modelo matemático

Quadro 1. Três elementos para conceituar a atividade de modelagem matemática de acordo com Cifuentes e Negrelli (linha superior) e Bean (linha inferior).

A seguir, abordaremos a atividade de construir a *realidade intermediária* por meio da construção de *situações limites* de Cifuentes e Negrelli e o *isolado* de Bean que é concebido com um conjunto de *premissas* e *pressupostos* que delimitam as conceituações a ser utilizadas na construção do modelo.

SITUAÇÕES LÍMITES / PREMISSAS E PRESSUPOSTOS

Nesta seção sintetizamos nossa interpretação da noção de *situações limites* de Cifuentes e Negrelli e das noções de *premissas* e *pressupostos* de Bean, ilustrando o uso destas noções com exemplos retirados de trabalhos dos próprios autores. Em seguida, compararemos alguns dos aspectos levantados.

Cifuentes e Negrelli (2009, p. 10) entendem *situações limites*, de modo geral, como aproximações simplificadoras que fazem parte da realidade intermediária, mas não necessariamente da realidade inicial. Ressaltam que a simplificação da realidade inicial não é simplesmente uma seleção de elementos da realidade, e sim, uma transformação do que está entendido pela realidade inicial, modificando-a através da abstração na formulação de *situações limites*. Os autores descrevem que as situações limites são construídas por meio das hipóteses e aproximações simplificadoras. Subentendido nessa concepção (CIFUENTES e NEGRELLI, 2009, p. 7) está a ideia de que a realidade intermediária é uma aproximação da realidade inicial e a ideia de que podemos aperfeiçoar essa abstração para, a partir dela, construir modelos que fornecem uma melhor compreensão da realidade. De acordo com Cifuentes e Negrelli (2009, p. 11), “As hipóteses e aproximações simplificadoras dadas por situações limites e que são obtidas geralmente por indução sobre a realidade inicial, pois supõem uma escolha, são as que permitirão o surgimento de um recorte da realidade inicial, a realidade intermediária, que é a que será modelada.”

Cifuentes e Negrelli ilustram a construção de uma realidade intermediária com o caso da trajetória de um projétil na qual os autores consideram como pressupostos algumas das situações limites formulados.

Para esse estudo, podemos considerar como realidade inicial o ambiente terrestre, com toda sua complexidade natural, onde ocorre o lançamento do projétil. Como hipóteses ou aproximações simplificadoras podemos ter, num primeiro momento:

- a) o pressuposto de que a superfície terrestre é plana (uma situação limite, e não um caso particular);
- b) o pressuposto de que a trajetória do projétil não sofre alteração devido ao atrito com a atmosfera (outra situação limite);
- e
- c) o pressuposto de que a ação da força de gravidade tem a mesma intensidade a qualquer altura; dentre outras.

Com esses pressupostos temos, como realidade intermediária, um mundo onde a superfície terrestre é plana, onde não há atmosfera que possa

produzir atrito, etc., isto é, uma realidade construída e não dada. É ela que será modelada matematicamente.

(CIFUENTES e NEGRELLI, 2009, p. 9)

Em 2001, Bean assumiu as concepções da Matemática Aplicada e bases filosóficas da ciência moderna, ao entender a modelagem matemática como uma atividade na “qual as características pertinentes de um objeto ou sistema são extraídas, com a ajuda de hipóteses e aproximações simplificadoras, e representadas em termos matemáticos (o modelo)” (BEAN, 2001, p. 53). Entretanto, Bean (2007), ao entender a *modelagem matemática* em termos de *modelagem* (sem o adjetivo *matemática*) como atividade humana, propôs que podemos compreender o que é modelagem com base em *situações problemáticas e linguagens*. Essa compreensão, embora coerente com a prática de matemáticos aplicados, se afasta de ideias filosóficas da ciência moderna que ainda fundamentam entendimentos a respeito do que é modelagem matemática em termos de *realidade – matemática*, que de acordo com Cifuentes e Negrelli (2007, p. 64)², “pressupõe-se que o contexto no qual os problemas se apresentam e a matemática com qual se pretende descrevê-los são distintos.”

Para Bean a premissa é uma ideia-guia³, um princípio ou uma teoria que serve para nortear o pensamento para algum fim. É um ponto de partida global que serve como norte para o pensamento na construção do modelo. Um pressuposto, por sua vez, é uma afirmação mais específica da situação em questão, que pode até contradizer o que o modelador entende por realidade. O pressuposto está formulado com intuito de conceituar a situação em relação ao objetivo.

A seguir, apresentamos a ilustração de Bean (2009) do modelo galileano da queda livre onde são explicitados as premissas e os pressupostos.

O modelo de Galileu se fundamenta em duas premissas:

1. Um corpo tende a manter sua velocidade na ausência de forças;
2. Existe uma “força” atrativa entre o corpo e a Terra.

Se aceitarmos o pressuposto de que a atração (gravidade) entre o corpo e a Terra é constante e, além disso, pressupomos a ausência de resistência do ar, podemos conceituar a velocidade da queda como variando uniformemente em relação ao tempo. Isto é, a velocidade de queda seria proporcional ao tempo de queda.

² Convém notar que Cifuentes e Negrelli (2006, 2007) entendem que a modelagem matemática pode ser realizada numa situação puramente matemática.

³ Melillo e Bean (em prelo) apropriam e resignificaram a noção de ideia-guia de Dewey (1959, p. 136) para a atividade de modelagem.

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{t_1}{t_2} \quad (1)$$

E a relação proporcional entre a distância (s) percorrida na queda e o quadrado do tempo de queda (o modelo galileano), segue do *teorema I – proposição I* de Galileu:

O tempo no qual um determinado espaço é percorrido por um móvel que parte do repouso com um movimento uniformemente acelerado é igual ao tempo no qual aquele mesmo espaço seria percorrido pelo mesmo móvel uniforme, cujo grau de velocidade seja a metade do maior e último grau de velocidade alcançado no movimento uniformemente acelerado.

(GALILEU GALILEI, 1988, p. 170)

Esse teorema afirma que, dada uma velocidade uniformemente variada, a distância s_i percorrida em tempo t_i é dada por $s_i = 0,5 v_i t_i$. Resolvendo para v_i :

$$v_i = \frac{2s_i}{t_i}$$

e substituindo v_i para $i = 1,2$ na expressão (1) obtém-se a expressão (2), o modelo galileano para a queda livre:

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{t_1^2}{t_2^2} \quad (2)$$

As premissas e os pressupostos fundamentam uma conceituação coerente com os conceitos físicos e matemáticos de um modelo que Galileu julgou adequado para o seu objetivo. O modelo não representa a queda livre, nem é “fiel” à interação entre um corpo e a Terra, mas serve como parâmetro conceitual para auxiliar na compreensão do fenômeno e fazer previsões.

(BEAN, 2009, p. 98-99)

No exemplo da queda livre Bean mostra, além da construção do isolado, a matematização do isolado. Galileu levou a matematização em consideração na construção do isolado, uma vez que teve como propósito a construção de uma descrição matemática da queda.

A seguir, comparamos o uso das noções de situações limites (hipóteses ou aproximações simplificadoras), premissas e pressupostos pelos autores:

O isolado para o modelo galileano de queda livre

Premissas:

1. Um corpo tende a manter sua velocidade na ausência de forças;
2. Existe uma “força” atrativa entre o corpo e a Terra.

Pressupostos:

1. A atração (gravidade) entre o corpo e a Terra é constante;
2. Não existe resistência do ar.

A realidade intermediária para a trajetória do projétil

Hipóteses ou aproximações simplificadoras:

- a. O pressuposto de que a superfície terrestre é plana (uma situação limite, e não um caso particular);
- b. O pressuposto de que a trajetória do projétil não sofre alteração devido ao atrito com a atmosfera (outra situação limite);
- c. O pressuposto de que a ação da força de gravidade tem a mesma intensidade a qualquer altura; dentre outras.

Ao comparar os *pressupostos* do *isolado* de Bean para a queda livre com as *situações limites* especificadas da *realidade intermediária* de Cifuentes e Negrelli para a trajetória do projétil, notamos que os três autores classificam como pressupostos que i) não há efeito do atrito do ar nos corpos e ii) a força da gravidade tem a mesma intensidade a qualquer altura (o aspecto de altura sendo subentendido no trabalho de Bean). O pressuposto que a superfície terrestre é plana não entra na conceituação da queda livre sendo que o aspecto da forma da Terra é desconsiderado no contexto da situação. Assim, existe uma coerência nas conceituações dos autores nestes dois exemplos.

Embora exista uma aproximação no uso dos conceitos de situação limite e pressuposto, também existem diferenças entre as ideias dos autores. Por exemplo, a noção de premissa de Bean não encontra um conceito correspondente na realidade intermediária de Cifuentes e Negrelli. No modelo de queda livre a primeira premissa garante que ao soltar o corpo de uma dada altura, ele ficaria parado no ar caso não existisse nenhuma força e, portanto, há necessidade de conceituar a interação entre o corpo e a Terra com a segunda premissa. A segunda premissa que afirma a existência de uma “força atrativa” fornece a base para a afirmação que tal “força” seja constante, e assim, permite o uso de proporcionalidade, ou seja, permite a matematização do *isolado* da queda. Embora a

premissa faça parte de um argumento coerente, existe a questão da necessidade, ou não, de distinguir entre pressupostos e premissas.

Como Cifuentes e Negrelli não destacam o pressuposto (c) como uma situação limite, pode ser que eles entendam este pressuposto como diferente de uma situação limite. Assim, levanta-se a questão a respeito de como os autores estão conceituando a relação entre situações limites e hipóteses ou aproximações simplificadoras e, ainda, levanta-se a questão a respeito da necessidade de acrescentar conceitos, além da situação limite, para descrever a formulação da realidade intermediária.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nos exemplos apresentados, a noção de *situação limite* de Cifuentes e Negrelli é similar à noção de *pressuposto* de Bean. Entendemos que a situação limite serve para vários casos, desde que sejam conceituados de acordo com os quadros conceituais da Física. A questão sobre o grau de extensão ou alcance dessa noção a outros tipos de situações necessita de um estudo mais aprofundado. Além disso, Bean (2007) exemplifica modelagem em algumas situações fora das ciências físicas em que o *pressuposto* não possui o caráter de uma *situação limite*.

Este estudo aponta a necessidade de examinar as relações entre as noções de *situação limite* e *pressuposto* em uma variedade de contextos de modelagem. E, ainda, levanta as questões: Como podem ser categorizados os elementos da realidade intermediária que não sejam situações limites? As noções de premissas e pressupostos de Bean são adequadas para discernir a modelagem nas múltiplas atividades humanas? Até que ponto é necessário fazer uma distinção conceitual entre o que é uma premissa e o que é um pressuposto para a modelagem?

Estas são algumas das várias questões que este estudo levantou, apontando para a necessidade de um aprofundamento a respeito dos conceitos de *realidade intermediária* e *isolado* no contexto das ideias de Cifuentes, Negrelli e Bean, bem como em relação a outras concepções de modelagem.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24, 2001, Caxambu. **Anais...**

Caxambu: ANPED, 2001. 1 CDROM. Disponível em: <<http://www.uefs.br/nupemm/anped2001.pdf>>. Acesso em: 19 fev. 2010.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002. 389 p.

BEAN, Dale. O que é modelagem matemática? **Educação Matemática em Revista**. São Paulo, nº 9/10, p. 49-57, abril 2001.

_____. Modelagem na perspectiva do pensamento. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3, Piracicaba – SP, **Anais...** Universidade Metodista Piracicaba – Piracicaba, 2003. 11 p.

_____. Modelagem matemática: Uma mudança de base conceitual. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5, Ouro Preto – MG. **Anais...** Universidade Federal de Ouro Preto – Ouro Preto e Universidade Federal de Minas Gerais – Belo Horizonte, 2007. p. 35-58.

_____. Modelagem: uma conceituação criativa da realidade. In: IV Encontro de Educação Matemática de Ouro Preto, 4, Ouro Preto – MG. **Anais...** Universidade Federal de Ouro Preto – Ouro Preto. Editora UFOP, 2009. p. 90-104.

BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. **Modelagem matemática no ensino**. São Paulo, Contexto, 2007.

BURAK, Dionísio. Modelagem Matemática e a Sala de Aula. In: ENCONTRO PARANAENSE DE MODELAGEM EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1., 2004, Londrina. **Anais...** Londrina: UEL, 2004. 1 CD-ROM. Disponível em: <http://www.dionisioburak.com.br/I_EPMEM.pdf>. Acesso em: 27 dez. 2009.

CIFUENTES, José Carlos; NEGRELLI, Leônia Gabardo. A modelagem matemática: uma epistemologia da matemática aplicada. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6, Londrina – PR. **Anais...** Universidade Estadual de Londrina – Londrina, 2009. 21 p.

_____. Modelagem matemática e o método axiomático. In: BARBOSA, Jonei Cerqueira; CALDEIRA, Ademir Donizeti; ARAÚJO, Jussara de Loiola (Orgs.). **Modelagem matemática na educação matemática brasileira**: pesquisas e práticas educacionais. Recife: SBEM, 2007. p. 63-77.

_____. Perspectivas epistemológicas e metafísicas na modelagem matemática. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (G10 – Modelagem Matemática), 3. 2006, Águas de Lindóia. **Anais...** Águas de Lindóia: SBEM, 21 p.

DEWEY, John. *Como Pensamos*. Tradução de Haydée de Camargo Campos. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1959. 292 p. (Coleção: Atualidades pedagógicas, v. 2).