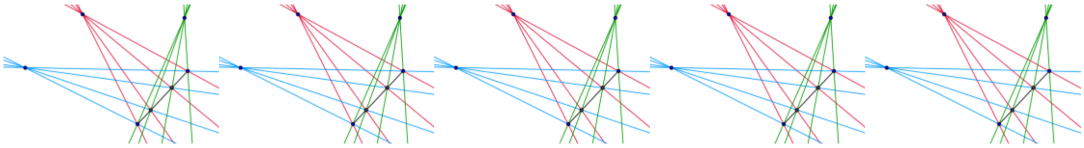
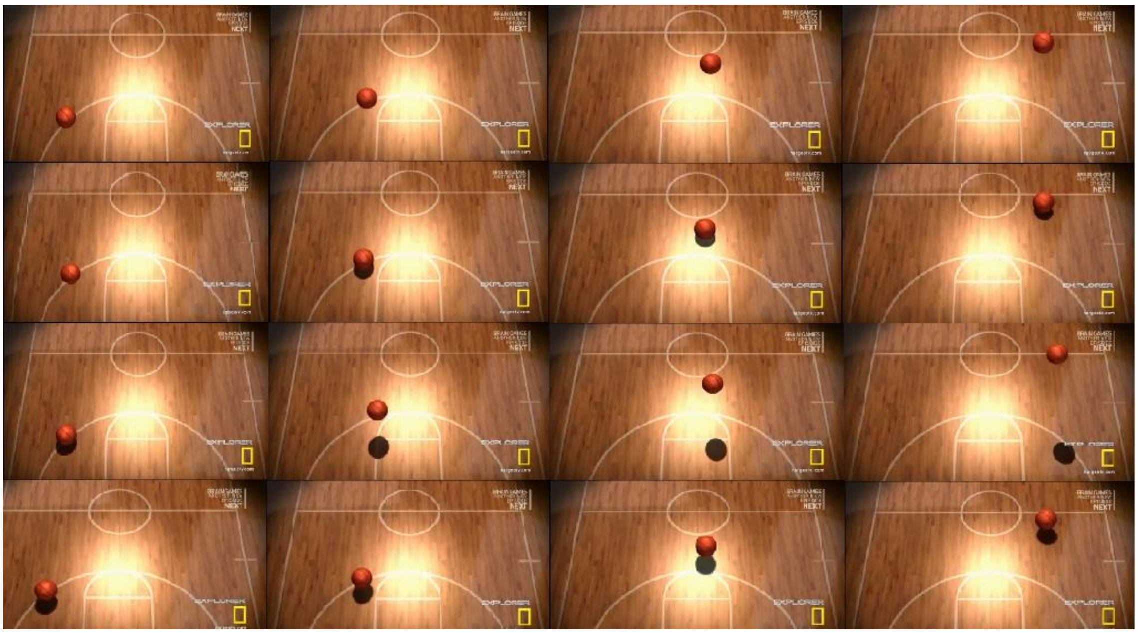
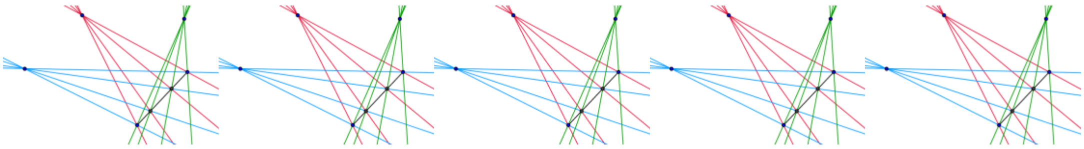




ATIVIDADES PARA UM MINICURSO DE GEOMETRIA PROJETIVA



“Linhas paralelas se encontram no infinito. O infinito não acaba. O infinito é nunca. Ou sempre.”

(Caio Fernando Abreu)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PRODUTO EDUCACIONAL

MARINA DUTRA VIEIRA

ADLAI RALPH DETONI

Dezembro, 2016

Índice

Figuras:

1ª. capa: Brain Games. https://www.youtube.com/watch?v=dqgsDQEjDqA, acesso em 16/06/2016**,** adaptada.

2ª. capa: QuoteAddicts. quoteaddicts.com/topic/railroad-tracks-photography/, acesso em 30/11/2016

Apresentação

Prezados Educadores;

Este Produto Educacional é parte do trabalho apresentado ao programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora.

É um material voltado para o auxílio de profissionais ligados à educação, em todos os âmbitos. Na maioria das vezes, um Produto Educacional apresenta uma proposta de ensino ou de formação de professores, e esse material é desenvolvido e analisado pelo mestrando e seu orientador, com esse intuito.

O material exposto aqui, é oriundo de vasta pesquisa, valendo-nos de artigos, livros, dissertações e teses, além de um curso projetado onde foi feita uma apresentação aos participantes e sugeridas atividades de construção e de demonstração de alguns destes conceitos.

Particularmente, este Produto Educacional traz as atividades apresentadas durante o curso formulado, e apresentado a alunos (cientes e conscientes de suas participações) da licenciatura em matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora. Chamamos a atenção de que as atividades devem ser vistas como eixo na sequência de ideias geométricas, mas, para serem praticadas, é requerido um trabalho conceitual que lhes dê um solo de sustentação.

Motivação

Um dos motivos que me levaram a cursar matemática foi uma profunda admiração pela geometria. Assim como a maioria das pessoas, que escolhem este curso, antes de entrar na faculdade não conhecia nada diferente da Geometria Euclidiana (tanto plana quanto espacial) e a Geometria Analítica.

Às vezes temos oportunidades extra curriculares e numa delas acabei conhecendo a Geometria Projetiva, que me encantou. Essa ciência, que traduz muito da nossa realidade, do nosso mundo, nos coloca diante de uma perspectiva distinta do modo euclidiano. Resolvemos unir estudos desenvolvendo o projeto de pesquisa, ora apresentado.

O uso do Geogebra foi de extrema importância durante minha formação acadêmica. O Geogebra é um software de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos em um único pacote, sendo simples de se usar.

Ao longo de nossa pesquisa, fomos acreditando que a ciência aqui referida poderia ser facilmente apresentada como uma alternativa curricular à que hoje é lecionada. Ela é capaz de fazer uma leitura muito próxima da realidade.

O ponto de fuga, por exemplo, é um objeto que está na arte e até em discursos sobre o cotidiano, é um conceito muito importante para a Geometria Projetiva, ainda que nela ele tenha outro tratamento. É bastante usado em nossa realidade, quando por exemplo, observamos uma estrada longa ou trilhos de trem; é um conforto intelectual sabermos que uma ciência exata cuida da impressão que temos de que elas se encontram.

Motivos apaixonantes não faltam para trazer essa ciência ao convívio de alunos em fase escola.

Como vemos a aplicação das atividades em sala de aula

Em concordância com alguns pesquisadores, nós acreditamos que novas geometrias, diferentes da Euclidiana que é a única geometria apresentada nas escolas, devam ser inseridas nas escolas, podendo ser de grande proveito.

Para Kline (1976) uma das importâncias de termos outras geometrias no currículo é que as geometrias, não euclidianas, são aplicáveis ao espaço físico de nossa vivência.

Dienes e Golding (1975) relatam a experiência com aplicações de atividades com o tema geometria. Dentre estas, está a geometria por nós aqui estudada, a Projetiva. Eles relatam um curso para professores e alunos de uma escola primária, que nos mostra como diversas geometrias podem ser complementares num currículo escolar.

Embora nossas atividades tenham sido pensadas, não apenas para o público do curso dado, licenciandos, mas também para serem apresentadas em escolas, acreditamos que elas não sejam tão adequadas para os anos iniciais. Pensamos que nossas atividades possam ser inseridas aos poucos nos anos finais do ensino fundamental e ensino médio. Assim, não perderiam o contato com a Geometria Euclidiana, mas não ficariam presos ao uso apenas dessa.

Acreditamos que o tema Geometria Projetiva deva ser apresentado dentro de sala ao longo do ano em conjunto com a Geometria já curricular.

Nenhuma das atividades tem obrigatoriamente que ser realizada com o uso de softwares matemáticos, pois é de nosso conhecimento que não são todas as escolas que possuem laboratório de informática, e mesmo quando possuem nem sempre estão em bom estado ou tem número suficiente para a quantidade de alunos presentes. Porém, nossas pesquisas mostraram que este tipo de software pode facilitar muito a apresentação e realização das tarefas.

Sequência das Atividades

O conjunto de atividades proposto, para ser, apresentado no curso de extensão, teve o intuito da produção de dados para respostas à interrogação da pesquisa de mestrado. A maior parte destas atividades foi projetada para ser realizada no software de geometria dinâmica Geogebra. Preocupamo-nos em varrer os conceitos básicos desta geometria, chegando até a razão anharmônica. O princípio usado na escolha dessas atividades foi pedagógico. Escolhemos uma sequência de atividades que, didaticamente, pudesse ser suficiente para uma ordem lógica de sentidos matemáticos, cabíveis para a compreensão dos sujeitos da pesquisa que, provavelmente, nunca lidaram com a Geometria Projetiva.

As atividades têm como objetivo imediato apresentar conceitos projetivos tais como: colinearidade, incidência, encontro de retas paralelas, a não preservação de medidas e sim a preservação da proporção anharmônica entre segmentos. Apresentamos também teoremas de importância para a Geometria Projetiva.

Lembramos que objetivos pedagógicos ampliam as atividades tal como são apresentadas. Mais do que resolvê-las, a produção de significados matemáticos, que prováveis alunos poderão atribuir, é mais relevante.

Deixamos registradas resoluções sugeridas em cada atividade. Estas poderão servir de norte, mas, convida-se o usuário do material a contrapô-las com outras que ele construir ou encontrar em outra autoria.

A sequência de atividades sugeridas é:

1 - Formule e prove a recíproca do Teorema de Menelau

2 - Demonstre o teorema de Ceva com auxílio do teorema de Menelau.

3 - Formule e prove a recíproca do Teorema de Ceva.

4 - Prove que as medianas de um triângulo são concorrentes em um ponto que se chama Baricentro.

5 - Prove que as bissetrizes internas de um triângulo são concorrentes em um ponto que se chama Incentro.

6 - Dado um hexágono ABCDEF, qualquer, inscrito em uma cônica, verifique o teorema de Pascal.

7 - Dado o triângulo ABC, e sejam N pertencente ao segmento BC e M pertencente ao segmento AC. As diagonais de ABNM, AN e BM, se encontram em Q. Construa outros quadriláteros ABN'M', a partir de um N´ em BC, cuja interseção de suas diagonais esteja contida na semirreta CQ.

8 – Se em dados 4 segmentos em um arranjo de transversais cortadas por paralelas de medidas a, b, c e d, temos a proporção a/b = c/d, temos a’/b’ = c’/d’ em projeção desse arranjo em um plano qualquer?

9 - Verifique a projetividade da razão anharmônica.

10 – Dados A, B e C, colineares, encontre D, colinear a eles, tal que (AC/BC)=(AD/BD).

11 - Trace uma tangente de um ponto a um círculo, sem usar o compasso.

O conjunto de atividades foi apresentado, originalmente, em um curso de extensão, com o intuito da pesquisa de mestrado. Neste curso, houve a necessidade de levar aos alunos objetos geométricos projetivos, uma vez que estes não são comuns na formação do professor de matemática.

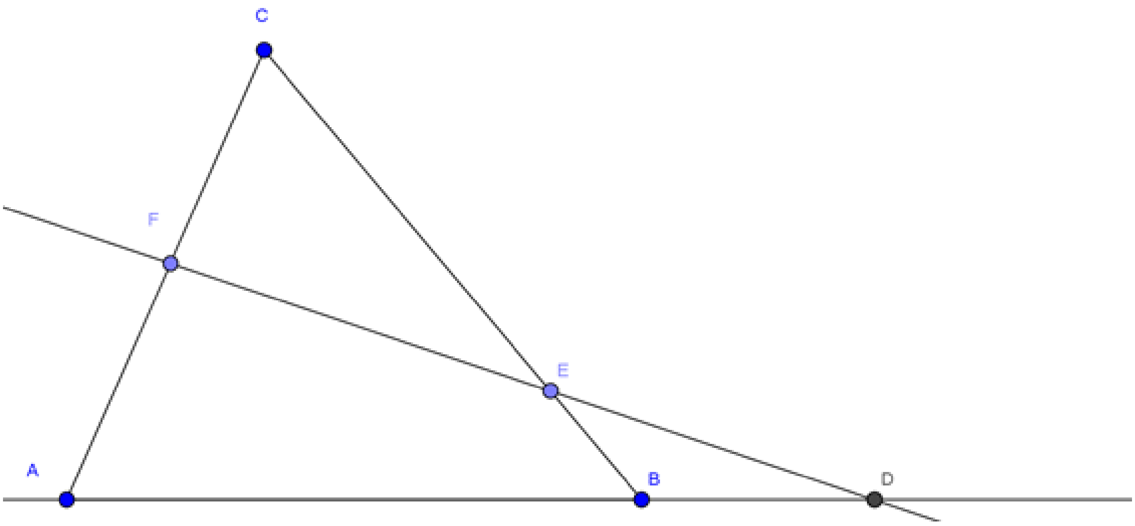
Sentimos necessidade de uma bibliografia técnico-científica. Neste ponto nos defrontamos com uma carência de publicações, especialmente nacionais, que apresentem a Geometria Projetiva de forma organizada a ser trabalhada como disciplina. Na dissertação, que tem este Produto como parte, relacionamos várias publicações. Felizmente, muito material já se acha disponível em sites e afins, apesar de nem sempre atenderem diretamente a uma sequência didática desejada.

A maior parte destas atividades seria realizada com suporte do software de geometria dinâmica, o Geogebra.

Registramos a seguir essas atividades e uma forma de solucioná-la. Também, apresentamos um relato sobre a experiência vivida com cada uma durante a pesquisa, acreditando que isso possa ser significativo para leitura de quem se interessar pelo assunto e para aqueles que pretendem repetir a experiência ou, simplesmente, conferir sua execução.

Atividades e Desenvolvimento

1 - Formule e prove a recíproca do Teorema de Menelau.



Para desenvolver a atividade é obviamente necessário que se conheça o Teorema de Menelau em sua forma direta. Estamos, com isso, sugerindo que se busque esse teorema e sua demonstração, para depois praticar a atividade 1. Tal teorema é bastante acessível em livros e sites.

Para a atividade nós planejávamos mostrar aos participantes a importância, para a Geometria Projetiva, da colinearidade de três pontos, característica presente na demonstração do teorema de Menelau original.

Aqui não há construção a ser feita, portanto a figura acima foi usada apenas como base visual, para a demonstração da atividade sugerida.

Resolução sugerida:

A primeira ação é elaborar o texto da recíproca:

Se D, E, F são pontos nas retas suportes dos lados AB, BC e AC, respectivamente, do triângulo ABC, diferentes dos vértices e a equação

$$\frac{AD}{BD} \cdot \frac{BE}{CE} \cdot \frac{CF}{AF} = 1$$

é satisfeita, então estes três pontos são colineares.

Demonstração:

Suponhamos um F’ construído dentro do segmento AC.

Pela hipótese, D, E e F pertencentes aos suportes dos lados do triângulo ABC e diferentes de seus vértices de modo que

$$\frac{AD}{BD} \cdot \frac{BE}{CE} \cdot \frac{CF}{AF} = 1$$

(2)

Suponhamos que as retas AC e DE se interceptem em F’. Então, pelo Teorema de Menelau, temos que

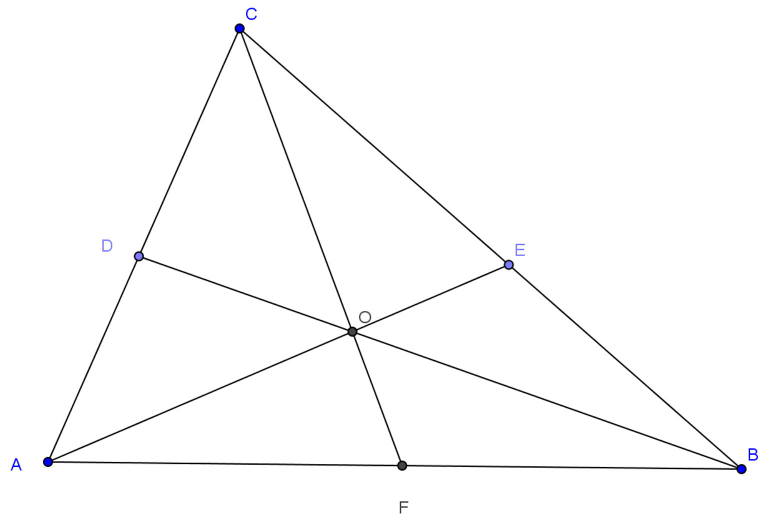
$$\frac{AD}{BD} \cdot \frac{BE}{CE} \cdot \frac{CF'}{AF'} = 1$$

(3)

Comparando (2) e (3), temos que $\frac{CF\prime}{AF\prime} = \frac{CF}{AF}$. Como AC é tanto soma de CF + AF como de CF´+ AF´, F’ coincide com F, pois são pontos que dividem o segmento AC numa mesma razão. Esse fato (F’ = F), implica que D, E e F são colineares, como queríamos demonstrar.

2 - Demonstre o teorema de Ceva com auxílio do teorema de Menelau.

Aqui tínhamos como objetivo mostrar a importância do teorema de Menelau em tudo que se segue na Geometria Projetiva. Gostaríamos que eles comentassem quantas relações de Menelau conseguiam ver na figura auxiliar. Assim como nós, pesquisadores, o grupo participante também conseguiu encontrar seis relações.



Como a princípio os participantes tentaram usar apenas uma relação de Menelau para tal demonstração, foi necessário que nós fizéssemos uma intervenção, dizendo que seriam necessárias duas relações.

Seja o texto proposto para o Teorema de Ceva:

Se 3 cevianas de uma triângulo concorrem em um único ponto,

$$DC \cdot FA \cdot EB = DA \cdot FB \cdot EC$$

Resolução sugerida:

Embora existam outra relações, escolhemos os triângulos ACF e CBF para esta demonstração, deixando bem claro que seria possível demonstrar usando outros triângulos.

Triângulo ACF e a transversal DOB

$$\frac{DC}{DA} \cdot \frac{BA}{BF} \cdot \frac{OF}{OC} = 1$$

Triângulo CBF e a transversal AOE

$$\frac{AF}{AB} \cdot \frac{EB}{EC} \cdot \frac{OC}{OF} = 1$$

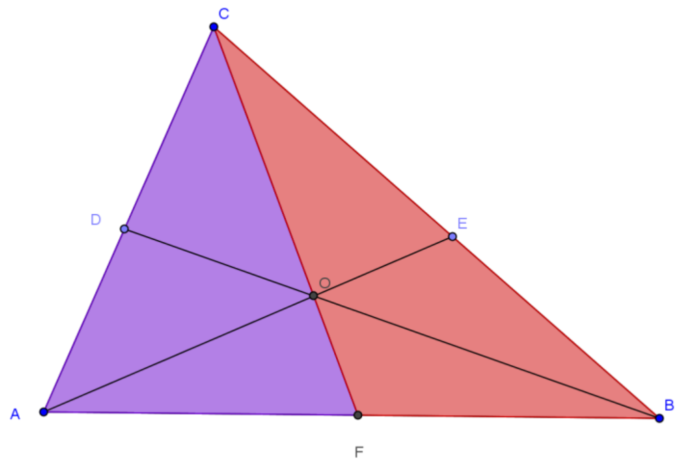
Multiplicando membro a membro e suprimindo os fatores em comum, obtém-se:

$$\frac{DC}{DA} \cdot \frac{FA}{FB} \cdot \frac{EB}{EC} = -1$$

O que nos dá:

DC . FA . EB = DA . FB . EC

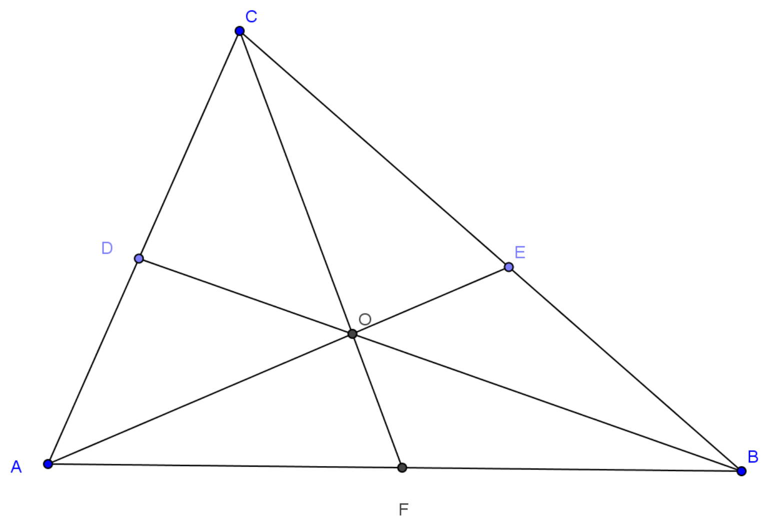
Para tal demonstração usamos uma nova figura, do teorema de Ceva, onde com auxílio do Geogebra, fizemos uma nova construção da figura de apoio, colorindo os triângulos que usaríamos.



3 - Formule e prove a recíproca do Teorema de Ceva.

Aqui pedimos aos participantes que provassem a volta do Teorema de Ceva. Onde conseguem notar, de fato, a projetividade do teorema que, agora, estaria ligada a incidência de 3 retas.

Incidência de 3 retas e colinearidade de 3 pontos são objetos primazes da Geometria Projetiva, sendo inclusive importantes naquilo que se designa como dualidade dos teoremas projetivos. Acreditamos, assim, que com essa atividade da recíproca, esse segundo objeto estaria ratificado em sua importância.



Resolução sugerida:

Formulação do texto do teorema:

Se três cevianas de um triângulo ABC, CF, AE e BD satisfazem

$$\frac{AF}{BF} \cdot \frac{BE}{CE} \cdot \frac{CD}{AD} = 1$$

então elas são incidentes (concorrentes) num só ponto.

Para mostrar a recíproca, considere O como o ponto de interseção dos segmentos AD e BE e seja F' o ponto de interseção da reta CO com a reta AB e suponha que

$$AF/FB.BE/EC.CD/DA=1.$$

Por outro lado, como AD, BE e CF' concorrem em O, a parte já provada do teorema nos dá que

$$AF/'F'B.BE/EC.CE/EA=1.$$

Comparando estas duas últimas equações, temos que

$$AF/FB=AF/'F'B.$$

Ora, isto é equivalente a

$$AF/FB+1=AF'/F'B+1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AF/FB+FB/FB=AF'/F'B+F'B/F'B$$

$$\Leftrightarrow AF+FB/FB=AF'+F'B/F'B$$

$$\Leftrightarrow AB/FB=AB/F'B$$

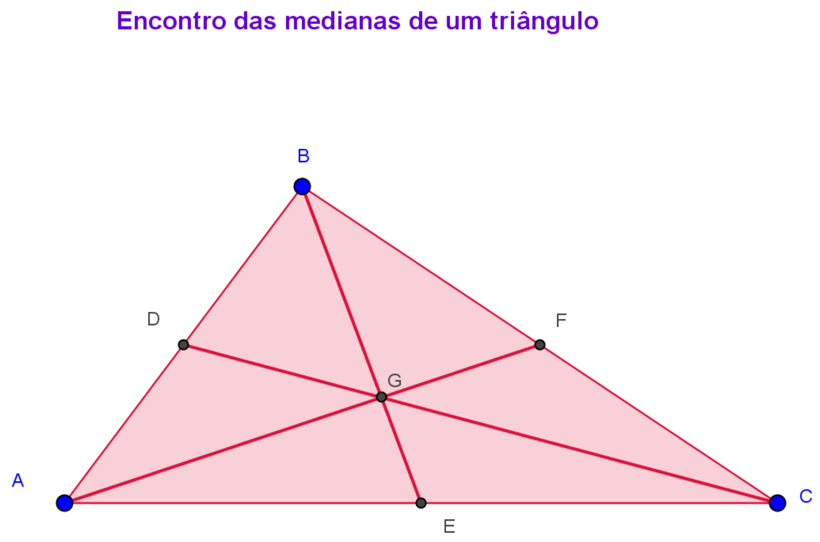
$$\Leftrightarrow FB=F'B$$

Isto é, B e B' são os mesmo pontos. Logo AE, BD e CF concorrem (em um só ponto).

4 - Prove que as medianas de um triângulo são concorrentes em um ponto que se chama baricentro.

Essa atividade foi pedida para que pudéssemos demonstrar este conteúdo de outra forma, que não só por Geometria Euclidiana. E assim conseguimos mostrar também que, em alguns momentos, a Geometria Projetiva pode agir como facilitador.

Usamos o Teorema de Ceva e introduzimos a ideia de incidência.



Resolução sugerida:

Do Teorema de Ceva, temos:

$$\frac{BD}{AD} \cdot \frac{AE}{CE} \cdot \frac{CF}{BF} = 1$$

Sendo medianas segmentos que vão de um vértice ao ponto médio do lado oposto, então:

AD = BD;

AE = CE;

BF = CF.

como, pelo Teorema de Ceva, temos:

$$\frac{BD}{AD} \cdot \frac{AE}{CE} \cdot \frac{CF}{BF} = 1$$

usando as igualdades, teremos:

$$\frac{BD}{AD} = 1; \; \frac{AE}{CE} = 1; \frac{CF}{BF} = 1$$

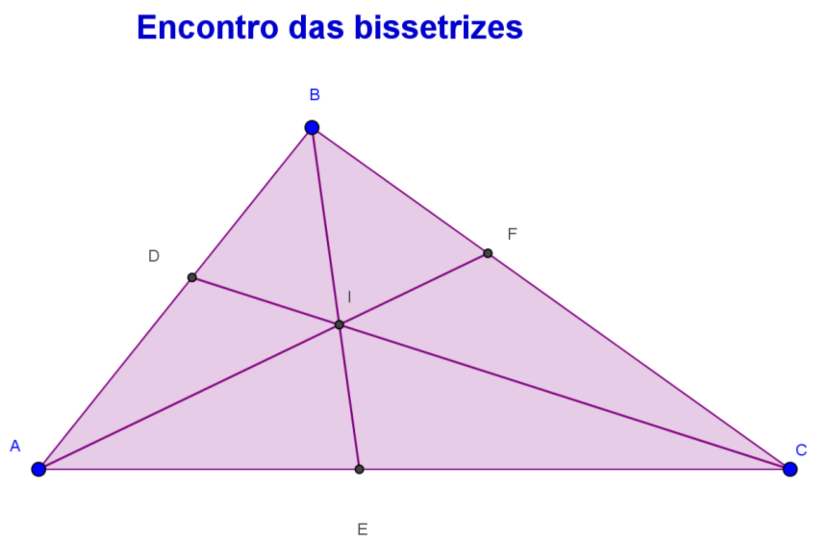
$$\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} = 1$$

A identidade a qual chegamos, sustenta, pelo Teorema de Ceva recíproco, que as medianas concorrem em um ponto.

5 - Prove que as bissetrizes internas de um triângulo são concorrentes em um ponto que se chama Incentro.

As intenções com essa atividade são as mesmas que as da atividade quatro.

Mais uma vez usamos o Teorema de Ceva. A figura a seguir reproduz situação do teorema já pretensamente provado. A princípio ela só servirá para conjecturarmos ideias acerca de cada bissetriz em separado, desconsiderando o ponto I, chamado futuramente de Incentro.



Resolução sugerida:

Do Teorema de Ceva, temos:

$$\frac{BD}{AD} \cdot \frac{AE}{CE} \cdot \frac{CF}{BF} = 1 \quad ...(1)$$

Do teorema da bissetriz interna, temos que uma bissetriz divide o lado oposto em dois segmentos que são proporcionais aos lados do triângulo que lhes são adjacentes. Isso aplicado a cada bissetriz, resulta:

$$\frac{AE}{CE} = \frac{AB}{BC}; \qquad \frac{BF}{CF} = \frac{AB}{AC}; \quad \text{e} \quad \frac{BD}{AD} = \frac{BC}{AC}$$

Trabalhando algebricamente essas 3 proporções, podemos chegar na expressão (1) acima, e, pela recíproca do Teorema de Ceva, conclui-se que as 3 bissetrizes de um triângulo são concorrentes (num só ponto).

Observamos, aqui, que as atividades 4 e 5, em sequência, são propositais para que se veja o caráter mais generalizador do teorema de Ceva, que congrega numa só ideia duas situações distintas, e que, no trabalho euclidiano usual, são demonstrações distintas. Isso reforça a ideia que queríamos ratificar de que a Geometria Projetiva, como um todo, tem essa característica sobre a Geometria Euclidiana.

Temos que registrar também que, nas demonstrações das atividades 4 e 5, lança-se mão de objetos auxiliares que são vistos tipicamente no euclidiano. Mas, insistimos, devemos ver isso como uma possível complementaridade entre geometrias, não como falhas estruturais.

6 - Dado um hexágono ABCDEF, qualquer, inscrito em uma cônica, verifique o teorema de Pascal.

Aqui a intenção era, além da própria verificação do Teorema de Pascal, mostrar que para a Geometria Projetiva as propriedades são válidas para todas as cônicas e não apenas para uma delas.

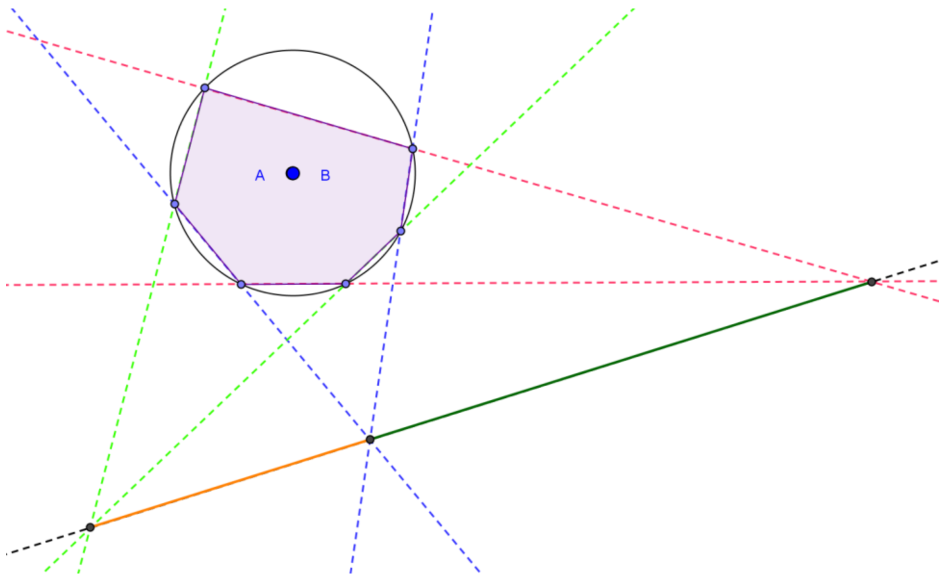
A figura base usada na resolução desta atividade foi uma elipse, fazendo com que os focos coincidissem, o que dava a impressão de um círculo. E em momento posterior, apresentamos também um aplicativo para a construção do teorema em parábola e hipérbole.

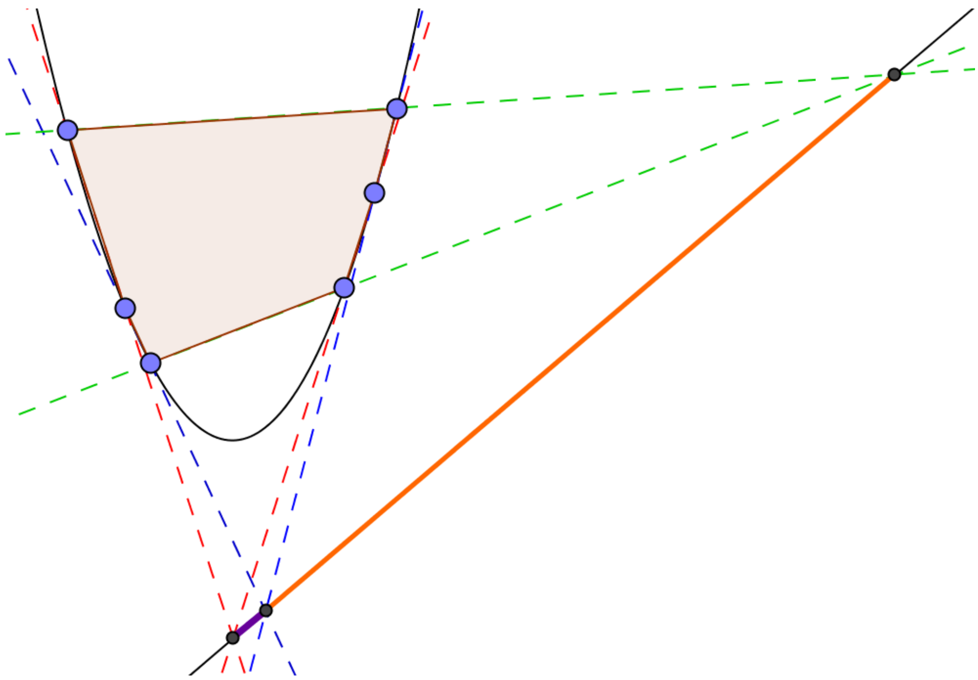
Objetivo não era a demonstração do teorema; o objetivo era visual, para que mediante a uma construção aleatória, sem se preocupar com a métrica, o teorema se fizesse válido. Acabamos testando a validade para outras cônicas e para outros tipos de polígonos também.

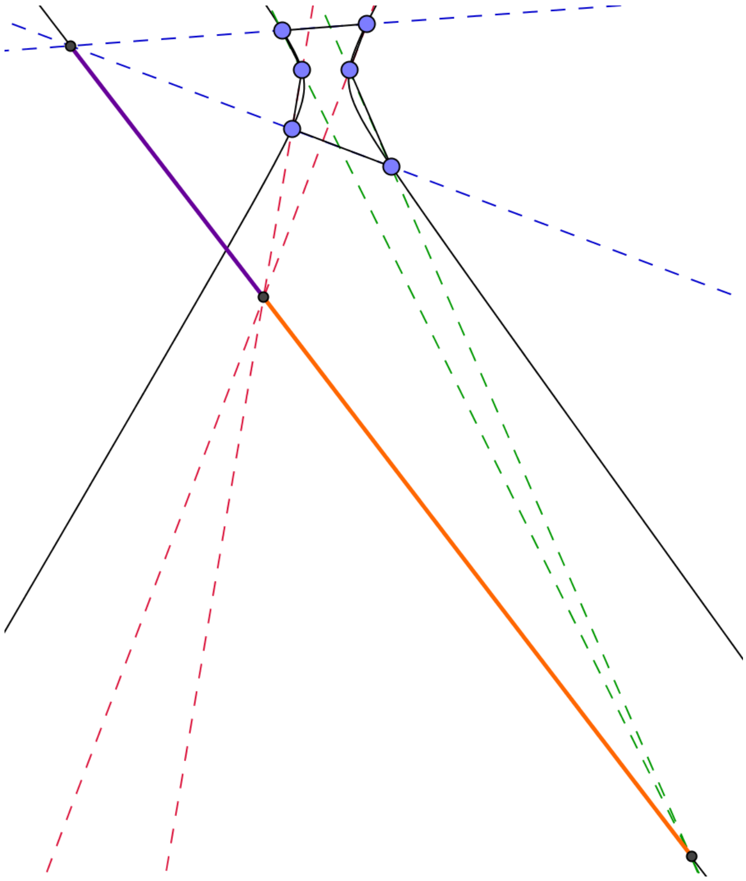
É claro, a atividade requer que se ponha o teorema em questão, e a pesquisa de seu texto é uma proposta incidente. Podemos escrevê-lo assim: se um hexágono é inscrito em uma cônica, seus lados opostos se encontram em 3 pontos que são colineares.

Observamos a importância científica e histórica de se aproximar o teorema de Pascal com o de Pappus. Este, diz que em um hexágono apoiado em duas retas (3 vértices em cada uma) os lados opostos se encontram 2 a 2 em 3 pontos colineares. A ideia de oposição, nesse caso, é por extensão, uma vez que há ocorrência de um polígono estrelado. Historicamente, Pappus antecede Pascal, e diz-se que este generalizou aquele. Cientificamente, porém, pode-se dizer que Pappus é uma decorrência, um fato particular, daquele, apreciando retas como cônicas degeneradas.

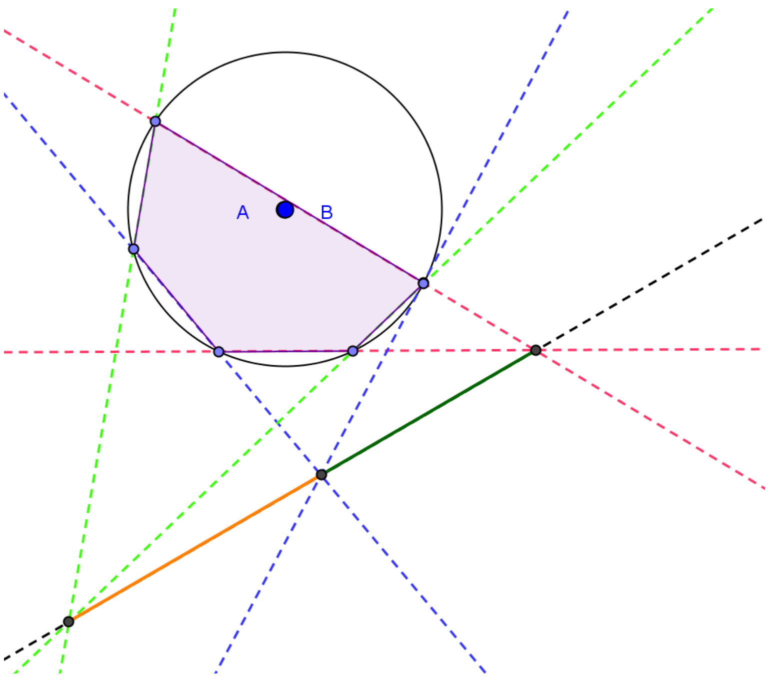
Na sequência de figuras abaixo, mostramos como Pascal se verifica nas cônicas em geral.

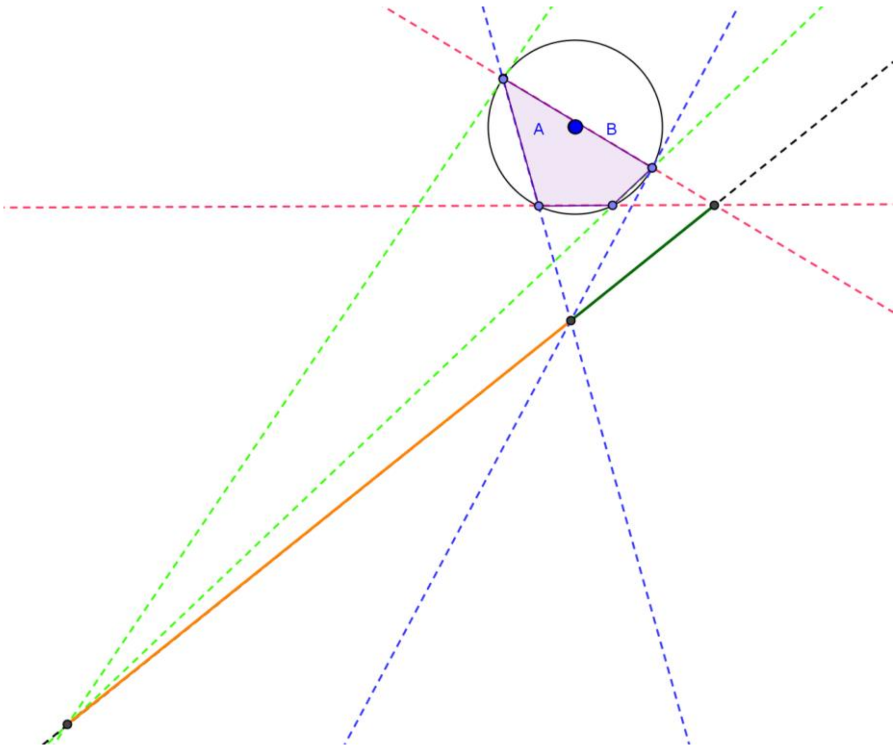

A
B

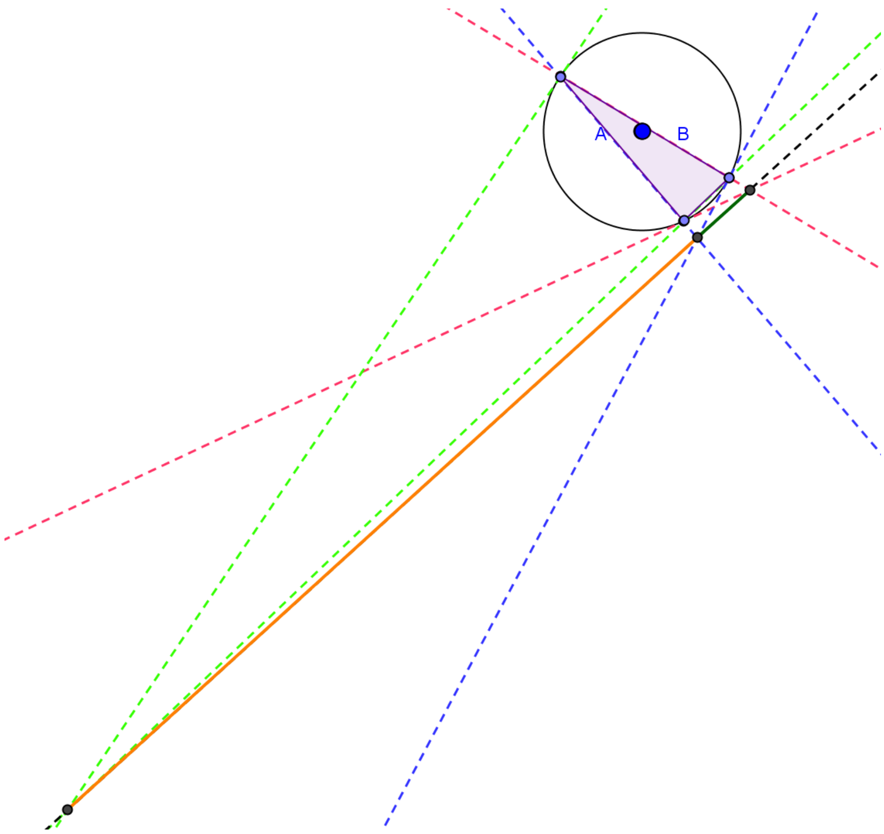




Durante a investigação nos perguntaram se o teorema também seria válido para pentágonos, quadriláteros e triângulos. Essa verificação se tornou possível, e de fácil realização, com o uso do Geogebra, dado sua propriedade de arraste, justamente pela possibilidade de se considerar um lado, secante, sendo reduzido a um ponto, aproximando dois vértices consecutivos, chegando-se na condição de uma tangente.


A
B

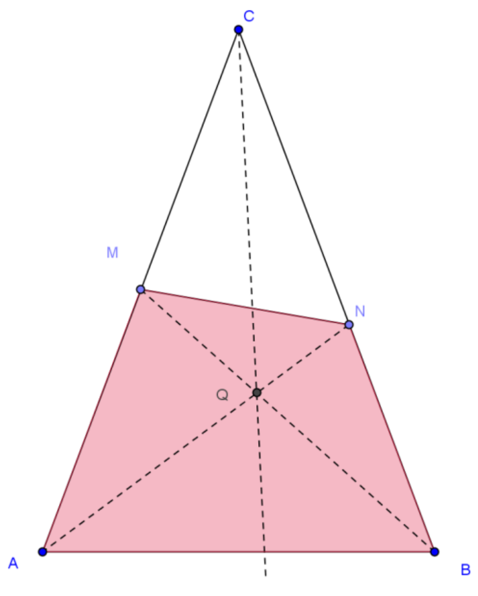

A
B


A
B

7 - Dado o triângulo ABC, e sejam N pertencente ao segmento BC e M pertencente ao segmento AC. As diagonais de ABNM, AN e BM, se encontram em Q. Construa outros quadriláteros ABN'M', a partir de um N´ em BC, cuja interseção de suas diagonais esteja contida na semirreta CQ.

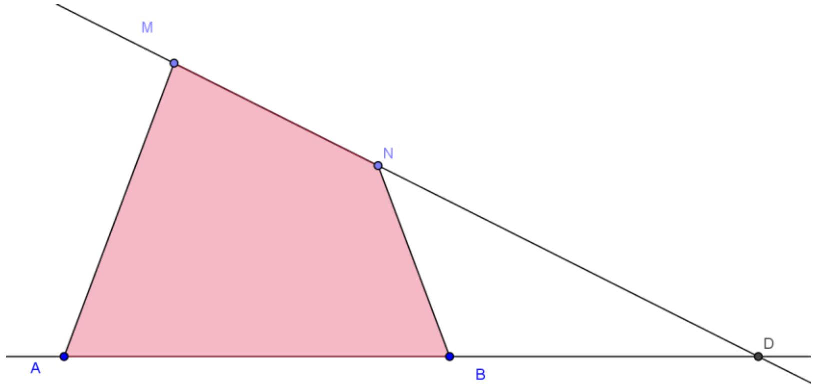
Para a realização desta tarefa, sem que se começasse a solução determinando-se já o ponto de encontro na semirreta CQ, seria necessária a apresentação do conceito de Quadrilátero Completo. A proposta, explicitada, acordava que o ponto de interseção das diagonais não poderia ser usado como parte da solução.

A figura abaixo foi usada como base, embora os participantes tenham construído o triângulo suporte em outra posição, o que de forma alguma impossibilitou a construção da figura no espaço gráfico criado, e nem, a formulação de conjecturas.



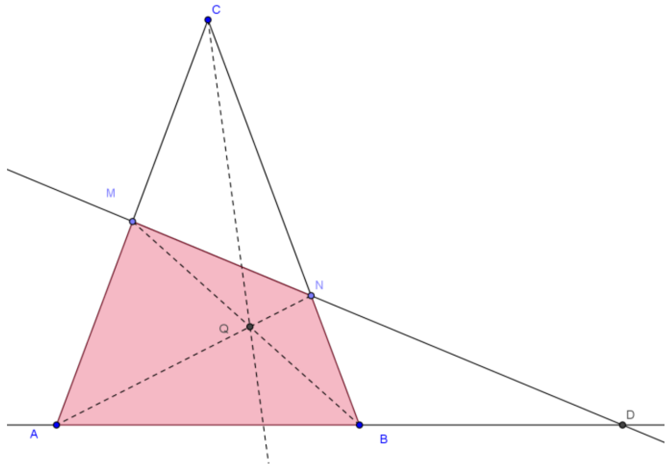
Resolução sugerida:

Como dissemos, essa atividade requer, de antemão, o conhecimento da ideia do quadrilátero completo, se se quer que ela seja praticada dentro do campo da Geometria Projetiva. Um quadrilátero completo é a figura obtida prolongando-se os lados opostos de um quadrilátero, gerando-se dois pontos, considerando o segmento que une esses dois pontos como 3ª diagonal. A figura abaixo representa um exemplo:



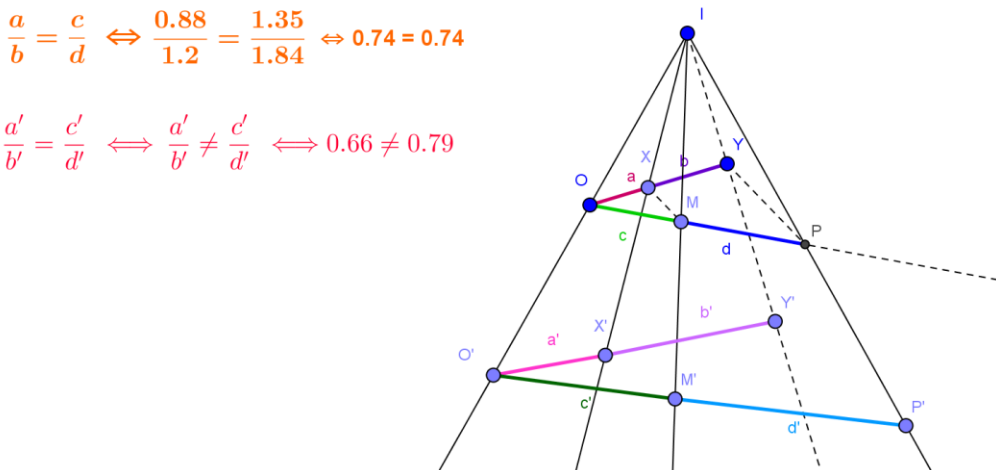
Da ideia de quadrilátero completo, é necessário trabalhar a de divisão harmônica que ocorre entre seus elementos, baseando-se também na ideia de feixe harmônico, a fim de que a solução projetiva seja viável. Com isso, como mostramos na sequência, a solução se torna trivial.

Na atividade, realizada por nós pesquisadores, traçamos uma reta passando pelos pontos A e B e uma reta passando pelos ponto M e N. A interseção entre essas duas retas gera um ponto D, esse ponto é a nossa solução, pois a partir dele, qualquer reta que interceptar os segmentos AC e BC possibilitará a construção de outro quadrilátero.



8 – Se em dados 4 segmentos em um arranjo de transversais cortadas por paralelas de medidas a, b, c e d, temos a proporção a/b = c/d, temos a'/b' = c'/d' em projeção desse arranjo em um plano qualquer?

Aqui objetivamos mostrar que relações de medidas não são, em geral, preservadas na Geometria projetiva. Antes dessa atividade feita na tela do computador, fizemos uma breve seção com uma lanterna iluminando um arranjo feito com varetas presas com fita crepe que simulava paralelas cortadas por transversais. Fizemos medidas e contas, confirmando a não permanência, em projeção, da relação de Tales.



A primeira relação escrita, baseada no Teorema de Tales, é construída com auxílio de retas paralelas. Na figura, seriam as transversais OXY e OMP cortadas pelas paralelas XM e YP. Na segunda relação, corresponde à construção na qual utilizamos um feixe arbitrário a partir de I, e sobre cada reta do feixe marcamos O´ como projeção de O a partir de I, M´ como projeção de M a partir de I, e X´ como projeção de X a partir de I. Essas projeções são arbitrárias, mas, são possíveis, uma vez que para o triângulo OXM há infinitos triângulos O´X´M´ que podem ser projeções dele, a partir de I. Feito isso, prolongando-se O´X´ determinamos Y´; prolongando-se O´M´, determinamos P´.

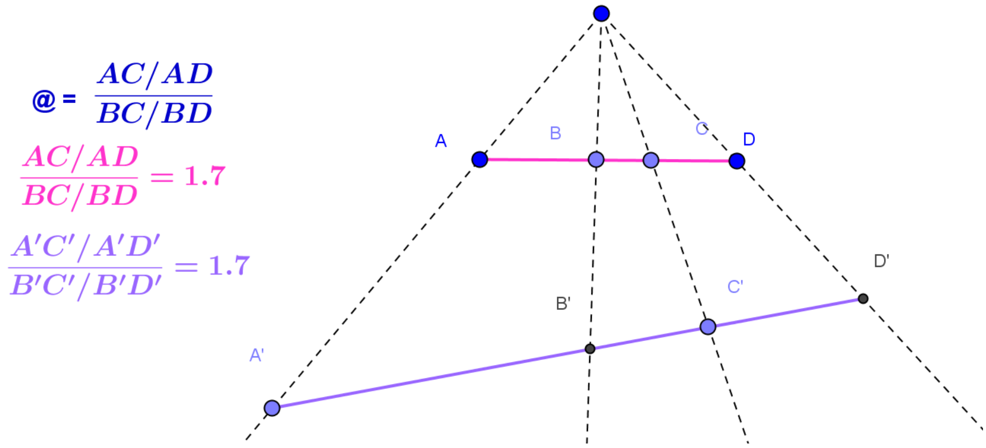
Feita a construção no Geogebra, utilizamos um recurso, seu, de cálculo de medidas para os valores de segmentos envolvidos nas relações Talesianas acima. Nomeadas como a/b=c/d e a´/b´=c´/d´, conforme ilustração acima, e mediante o arrasto de segmentos projetados, o programa informava seguidamente a não permanência da relação de Tales.

9 - Verifique a projetividade da razão anharmônica.

Seja a razão anharmônica, a razão entre quatro pontos cujo quociente que se obtém dividindo a razão das distâncias do primeiro ponto aos dois últimos pela razão das distâncias do segundo ponto aos dois últimos.

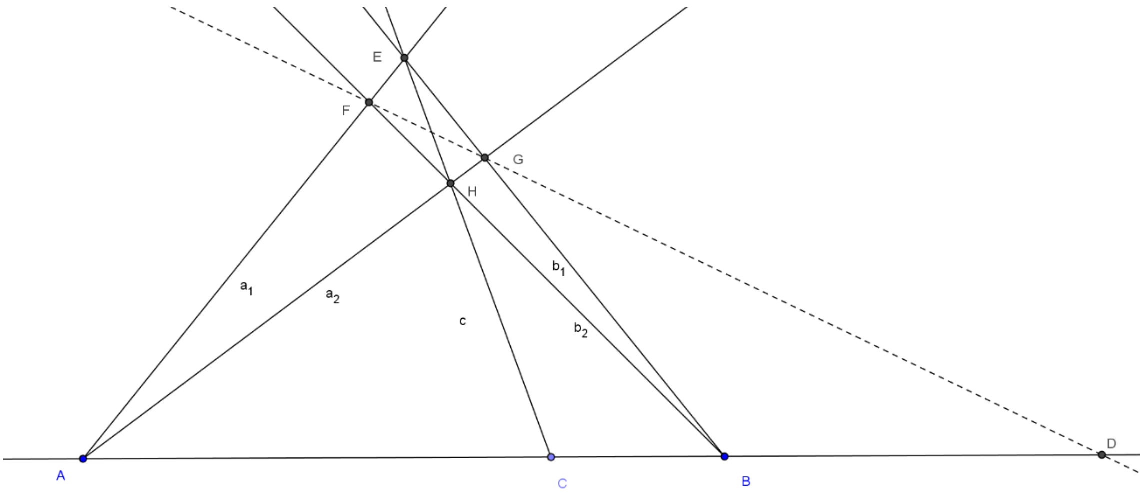
Aqui, como na atividade sobre o Teorema de Pascal, o objetivo era desenvolver as relações solicitadas no campo da dinâmica do software, com apelo visual sustentado pelo comando arrasto, que dá a variedade de sujeitos apoiados, e pelo texto de cálculo da relação anharmônica (@).

Mais uma vez o auxílio do Geogebra foi determinante para que esse objetivo fosse simplesmente alcançado. Ao final, foi comentado e sugerido caminhos para uma demonstração geométrica desse resultado.



10 – Dados A, B e C, colineares, encontre D, colinear a eles, tal que (AC/BC)=(AD/BD).

Esta construção também pode ser realizada com o uso da geometria euclidiana, quando se lança mão do conceito de divisão harmônica e de construção que envolve paralelas e medidas. Sob a perspectiva da Geometria Projetiva temos outro processo, e para tal resolução, abrimos mão do compasso e realizamos a tarefa com o uso apenas de régua, assim, em mais uma oportunidade pudemos confirmar ser a Geometria Projetiva a Geometria da régua.



Resolução sugerida:

Para resolver essa atividade com o uso apenas de régua, portanto projetivamente:

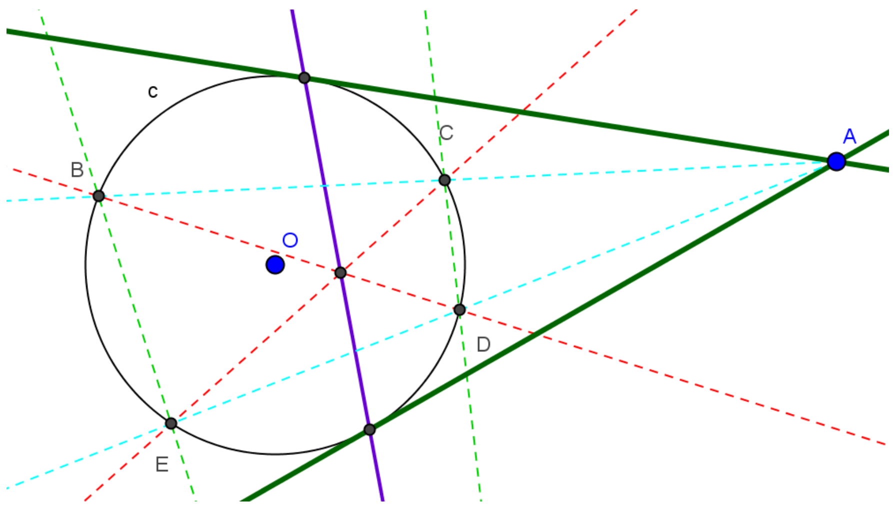
Dados os pontos *A*, *B* e *C* sobre uma reta *r*, traçando duas retas quaisquer a_1 e a_2 passando por *A* e uma reta *c* passando por *C*. Unindo a *B* os pontos de incidência de *c* com a_1 e a_2, respectivamente, obtemos as retas b_1 e b_2. Fica então formado um quadrilátero (*EFHG*, na figura) tal que os lados opostos concorrem em *A* e *B*, e tal que uma de suas diagonais passa por *C*. Seja *D* o ponto de encontro de *r* com a outra diagonal do quadrilátero. Então *D* é o conjugado harmônico de *C* em relação a AB.

Assim descrita a resolução, logo a associamos com a ideia anteriormente explorada do quadrilátero completo, no caso EFHG. Definindo-se a reta AB como suporte de sua terceira diagonal, utiliza-se aqui o fato geométrico de que cada diagonal do quadrilátero completo é cortado pelas outras duas em pontos que a dividem harmonicamente.

11 - Trace uma tangente de um ponto a um círculo, sem usar o compasso.

Essa atividade, a princípio é a mais complexa de todas. Traçar uma tangente de um ponto a um círculo é uma situação familiar e corriqueira na geometria, mas sem que se possa usar o compasso, é uma condição, para muitos, nova. Obviamente que essa proposta dá sequência, no aspecto de lidar com objetos geométricos, à atividade anterior.

Para isso, se utiliza teoremas e definições estritamente projetivos, como o teorema Pascal, Polo e Polar. O estudo de Polo e Polar é central para a Geometria Projetiva e aparece como requisito para essa atividade.



Resolução sugerida:

Pelo estudo de Polo e Polar, a reta polar de um ponto A, exterior, em relação a um círculo é uma secante a este que passa pelos pontos de tangência das retas tangentes por A a ele. Então, trata-se de traçar essa polar.

Mas, o conjugado de A em relação ao círculo forma com A um segmento que é dividido harmonicamente pelos pontos que são interseção do círculo com a reta desses dois pontos. Essa relação abre espaço para que a reta polar procurada seja determinada com o uso da ideia do quadrilátero completo.

Assim, desenvolvemos a seguinte construção:

Dados um círculo qualquer, e um ponto A, qualquer, traçamos duas secantes (quaisquer) saindo do ponto A e cortando o círculo. Em seguida marcamos os pontos B, C, D e E; interseções entre as secantes e o círculo, construímos duas novas retas, uma passando por C e E, e outra passando por D e B, encontrando um ponto de interseção. Traçamos duas outras retas, uma passando por B e E, e outra por C e D, marcamos a interseção. Na figura ilustrativa acima, este ponto não aparece no espaço gráfico, mas, feita a construção no computador, facilmente pode-se manipular as secantes iniciais para que ele se efetive no espaço visual disponível na tela. Feito isso, construímos uma reta que corta os dois pontos de interseção, que é a reta Polar de A. Essa reta cortará o círculo em dois pontos, que são o que procuramos. Por cada um deles passará uma tangente em relação ao ponto A.

Conclusões

As atividades, que apresentamos neste produto Educacional, são importantes importantes para que o desenvolvimento do pensamento projetivo fosse demonstrado. O software de geometria dinâmica Geogebra se mostrou ser um grande facilitador na realização das tarefas apresentadas, visto que, com o uso do mesmo, os participantes do curso não precisavam fazer outras construções para verificar a autenticidade de determinadas ideias apresentadas.

Acreditamos que essas atividades representam uma possibilidade de trabalho didático que permitam a inserção das ideias projetivas na prática escolar da geometria. Elas podem ser propostas tal como as apresentamos, ou customizadas dentro do panorama de uma dada situação escolar.

Estamos convictos de que essas atividades podem ser um caminho para o acréscimo da Geometria Projetiva, facilitada pelo Geogebra, como agente transformador no estudo da geometria curricular.

Anexo I – Protocolos de Construção

Atividade 1: Protocolo construção da figura usada:

N.	Nome	Descrição	Valor	Legen...
1	Ponto A		A = (-2, -1)	
2	Ponto B		B = (5, -1)	
3	Reta a	Reta AB	a: y = -1	
4	Ponto C		C = (0.4, 4.48)	
5	Segmento b	Segmento [A, B]	b = 7	
6	Segmento c	Segmento [C, A]	c = 5.98	
7	Segmento d	Segmento [C, B]	d = 7.15	
8	Ponto E	Ponto sobre d	E = (3.89, 0.33)	
9	Ponto F	Ponto sobre c	F = (-0.74, 1.88)	
10	Reta e	Reta FE	e: 1.55x + 4.63y = 7.55	
11	Ponto D	Ponto de interseção de e, a	D = (7.83, -1)	
12	Texto texto2		"\frac{AF}{FC}.\frac{CE}{E...	

Atividade 2: Protocolo de construção, da figura base:

N.	Nome	Descrição	Valor	Legen...
1	Ponto A		A = (-0.74, -2.52)	
2	Ponto B		B = (8.96, -2.62)	
3	Ponto C		C = (1.94, 3.54)	
4	Segmento a	Segmento [A, B]	a = 9.7	
5	Segmento b	Segmento [B, C]	b = 9.34	
6	Segmento c	Segmento [C, A]	c = 6.63	
7	Ponto D	Ponto sobre c	D = (0.53, 0.35)	
8	Ponto E	Ponto sobre b	E = (5.7, 0.24)	
9	Segmento d	Segmento [D, B]	d = 8.94	
10	Segmento e	Segmento [A, E]	e = 7.01	
11	Ponto O	Ponto de interseção de d, e	O = (3.52, -0.7)	
12	Reta f	Reta CO	f: 4.24x + 1.58y = 13.81	
13	Ponto F	Ponto de interseção de a, f	F = (4.21, -2.57)	
14	Segmento g	Segmento [C, F]	g = 6.52	

Protocolo de construção, com os triângulos coloridos:

N.	Nome	Descrição	Valor	Legenda
1	Ponto A		A = (-0.74, -2.52)	
2	Ponto B		B = (8.96, -2.62)	
3	Ponto C		C = (1.94, 3.54)	
4	Segmento a	Segmento [A, B]	a = 9.7	
5	Segmento b	Segmento [B, C]	b = 9.34	
6	Segmento c	Segmento [C, A]	c = 6.63	
7	Ponto D	Ponto sobre c	D = (0.53, 0.35)	
8	Ponto E	Ponto sobre b	E = (5.7, 0.24)	
9	Segmento d	Segmento [D, B]	d = 8.94	
10	Segmento e	Segmento [A, E]	e = 7.01	
11	Ponto O	Ponto de interseção de d, e	O = (3.52, -0.7)	
12	Reta f	Reta CO	f: 4.24x + 1.58y = 13.81	
13	Ponto F	Ponto de interseção de a, f	F = (4.21, -2.57)	
14	Segmento g	Segmento [C, F]	g = 6.52	
15	Triângulo pol1	Polígono A, F, C	pol1 = 15.08	
15	Segmento c_1	Segmento [A, F] de Triângulo pol1	c_1 = 4.95	
15	Segmento a_1	Segmento [F, C] de Triângulo pol1	a_1 = 6.52	

N.	Nome	Descrição	Valor	Legenda
15	Segmento f_1	Segmento [C, A] de Triângulo pol1	f_1 = 6.63	
16	Valor Booleano h		h = false	TriâguloACF
17	Triângulo pol2	Polígono C, F, B	pol2 = 14.45	
17	Segmento b_1	Segmento [C, F] de Triângulo pol2	b_1 = 6.52	
17	Segmento c_2	Segmento [F, B] de Triângulo pol2	c_2 = 4.75	
17	Segmento f_2	Segmento [B, C] de Triângulo pol2	f_2 = 9.34	
18	Valor Booleano i		i = false	TriâguloBCF
19	Triângulo pol3	Polígono A, B, D	pol3 = 14.01	
19	Segmento d_1	Segmento [A, B] de Triângulo pol3	d_1 = 9.7	
19	Segmento a_2	Segmento [B, D] de Triângulo pol3	a_2 = 8.94	
19	Segmento b_2	Segmento [D, A] de Triângulo pol3	b_2 = 3.14	
20	Valor Booleano j		j = false	TriânguloABD
21	Triângulo pol4	Polígono A, E, C	pol4 = 15.83	
21	Segmento c_3	Segmento [A, E] de Triângulo pol4	c_3 = 7.01	
21	Segmento a_3	Segmento [E, C] de Triângulo pol4	a_3 = 5.01	
21	Segmento e_1	Segmento [C, A] de Triângulo pol4	e_1 = 6.63	

N.	Nome	Descrição	Valor	Legenda
22	Valor Booleano k		k = false	TriânguloACE
23	Triângulo pol5	Polígono A, B, E	pol5 = 13.69	
23	Segmento e_2	Segmento [A, B] de Triângulo pol5	e_2 = 9.7	
23	Segmento a_4	Segmento [B, E] de Triângulo pol5	a_4 = 4.33	
23	Segmento b_3	Segmento [E, A] de Triângulo pol5	b_3 = 7.01	
24	Valor Booleano l		l = false	TriânguloABE
25	Triângulo pol6	Polígono D, C, B	pol6 = 15.52	
25	Segmento b_4	Segmento [D, C] de Triângulo pol6	b_4 = 3.48	
25	Segmento d_2	Segmento [C, B] de Triângulo pol6	d_2 = 9.34	
25	Segmento c_4	Segmento [B, D] de Triângulo pol6	c_4 = 8.94	
26	Valor Booleano m		m = false	TriânguloBCD

Atividade 4:

N.	Nome	Descrição	Valor	Legen...
1	Ponto A		A = (2, -1)	
2	Ponto B		B = (5, 3)	
3	Ponto C		C = (11, -1)	
4	Triângulo pol1	Polígono A, B, C	pol1 = 18	
4	Segmento c	Segmento [A, B] de Triângulo pol1	c = 5	
4	Segmento a	Segmento [B, C] de Triângulo pol1	a = 7.21	
4	Segmento b	Segmento [C, A] de Triângulo pol1	b = 9	
5	Segmento d	Segmento [A, B]	d = 5	
6	Segmento e	Segmento [B, C]	e = 7.21	
7	Segmento f	Segmento [C, A]	f = 9	
8	Ponto D	Ponto médio de AB	D = (3.5, 1)	
9	Ponto E	Ponto médio de AC	E = (6.5, -1)	
10	Ponto F	Ponto médio de BC	F = (8, 1)	
11	Segmento g	Segmento [A, F]	g = 6.32	
12	Segmento h	Segmento [D, C]	h = 7.76	
13	Segmento i	Segmento [E, B]	i = 4.27	
14	Ponto G	Ponto de interseção de i, h	G = (6, 0.33)	

N.	Nome	Descrição	Valor	Legen...
15	Texto texto1		"Encontro das ...	

Atividade 5:

N.	Nome	Descrição	Valor	Legen...
1	Ponto A		A = (0, -2)	
2	Ponto B		B = (4, 3)	
3	Ponto C		C = (11, -2)	
4	Triângulo p...	Polígono B, A, C	pol1 = 27.5	
4	Segmento c	Segmento [B, A] de Triângulo	c = 6.4	
4	Segmento b	Segmento [A, C] de Triângulo	b = 11	
4	Segmento a	Segmento [C, B] de Triângulo	a = 8.6	
5	Segmento d	Segmento [A, B]	d = 6.4	
6	Segmento e	Segmento [B, C]	e = 8.6	
7	Segmento f	Segmento [C, A]	f = 11	
8	Reta g	Bissetriz de B, A, C	g: -0.43x + 0.9y = -1.8	
9	Reta h	Bissetriz de A, C, B	h: -0.31x - 0.95y = -1.45	
10	Reta i	Bissetriz de A, B, C	i: 0.99x + 0.14y = 4.37	
11	Ponto F	Ponto de interseção de g,	F = (6.58, 1.16)	
12	Ponto D	Ponto de interseção de h,	D = (2.24, 0.81)	
13	Ponto E	Ponto de interseção de i, f	E = (4.69, -2)	
14	Segmento j	Segmento [D, C]	j = 9.19	

N.	Nome	Descrição	Valor	Legen...
15	Segmento k	Segmento [A, F]	k = 7.3	
16	Segmento l	Segmento [E, B]	l = 5.05	
17	Ponto I	Ponto de interseção de j, k	I = (4.4, 0.11)	
18	Texto texto1		"Encontro das bissetr...	

Atividade 6:

Protocolo de construção para a elipse/círculo:

N.	Nome	Descrição	Valor	Legen...
1	Ponto A		A = (4.22, 1.02)	
2	Ponto B		B = (4.24, 1.02)	
3	Ponto C		C = (4.98, 3.26)	
4	Elipse c	Elipse com focos A, B passando por C	c: $89.28x^2 + 89.28y^2$ - 7...	
5	Ponto D	Ponto sobre c	D = (2.53, 2.66)	
6	Ponto E	Ponto sobre c	E = (6.54, 1.49)	
7	Ponto F	Ponto sobre c	F = (1.94, 0.43)	
8	Ponto G	Ponto sobre c	G = (3.23, -1.12)	
9	Ponto H	Ponto sobre c	H = (5.25, -1.11)	
10	Ponto I	Ponto sobre c	I = (6.31, -0.1)	
11	Hexágono pol1	Polígono D, E, I, H, G, F	pol1 = 12.41	
11	Segmento d	Segmento [D, E] de Hexágono pol1	d = 4.18	
11	Segmento e	Segmento [E, I] de Hexágono pol1	e = 1.61	
11	Segmento i	Segmento [I, H] de Hexágono pol1	i = 1.47	
11	Segmento h	Segmento [H, G] de Hexágono pol1	h = 2.02	
11	Segmento g	Segmento [G, F] de Hexágono pol1	g = 2.01	
11	Segmento f	Segmento [F, D] de Hexágono pol1	f = 2.3	

N.	Nome	Descrição	Valor	Legen...
12	Reta a	Reta DE	a: 1.16x + 4.02y = 13.61	
13	Reta b	Reta GH	b: -0.01x + 2.02y = -2.28	
14	Ponto J	Ponto de interseção de a, b	J = (15.42, -1.07)	
15	Reta j	Reta IE	j: -1.59x + 0.23y = -10.06	
16	Reta k	Reta GF	k: -1.55x - 1.29y = -3.55	
17	Ponto K	Ponto de interseção de j, k	K = (5.72, -4.12)	
18	Reta l	Reta FD	l: -2.23x + 0.58y = -4.09	
19	Reta m	Reta HI	m: -1.02x + 1.07y = -6.51	
20	Ponto L	Ponto de interseção de l, m	L = (0.32, -5.81)	
21	Reta n	Reta LJ	n: -4.74x + 15.1y = -89....	
22	Segmento p	Segmento [L, K]	p = 5.67	
23	Segmento q	Segmento [K, J]	q = 10.16	

Protocolo de construção para a parábola:

N.	Nome	Descrição	Valor	Legen...
1	Ponto A		A = (6.08, -1.32)	
2	Ponto B		B = (2.5, -2.48)	
3	Ponto C		C = (10.4, -2.4)	
4	Reta a	Reta BC	a: -0.08x + 7.9y = -19.79	
5	Parábola c	Parábola com foco A e diretriz a	c: 1.97x² + 0.04x y - 23.9x - 4.68y = ...	
6	Ponto D	Ponto sobre c	D = (3.91, 0.16)	
7	Ponto E	Ponto sobre c	E = (3.24, 1.61)	
8	Ponto F	Ponto sobre c	F = (1.7, 6.32)	
9	Ponto G	Ponto sobre c	G = (10.43, 6.9)	
10	Ponto H	Ponto sobre c	H = (9.84, 4.65)	
11	Ponto I	Ponto sobre c	I = (9.04, 2.14)	
12	Hexágono pol1	Polígono F, E, D, I, H, G	pol1 = 38.99	
12	Segmento f	Segmento [F, E] de Hexágono pol1	f = 4.95	
12	Segmento e	Segmento [E, D] de Hexágono pol1	e = 1.6	
12	Segmento d	Segmento [D, I] de Hexágono pol1	d = 5.5	
12	Segmento i	Segmento [I, H] de Hexágono pol1	i = 2.64	
12	Segmento h	Segmento [H, G] de Hexágono pol1	h = 2.32	
12	Segmento g	Segmento [G, F] de Hexágono pol1	g = 8.75	

N.	Nome	Descrição	Valor	Legen...
13	Reta b	Reta FE	b: 4.71x + 1.54y = 17.72	
14	Reta j	Reta HI	j: 2.51x - 0.8y = 20.99	
15	Reta k	Reta ED	k: 1.45x + 0.67y = 5.78	
16	Reta l	Reta HG	l: -2.25x + 0.59y = -19.39	
17	Reta m	Reta FG	m: -0.59x + 8.73y = 54.14	
18	Reta n	Reta DI	n: -1.99x + 5.13y = -6.97	
19	Ponto L	Ponto de interseção de m, n	L = (23.61, 7.79)	
20	Ponto J	Ponto de interseção de b, j	J = (6.09, -7.12)	
21	Ponto K	Ponto de interseção de k, l	K = (6.95, -6.38)	
22	Reta p	Reta LJ	p: 14.91x - 17.52y = 215.51	
23	Segmento q	Segmento [J, K]	q = 1.13	
24	Segmento r	Segmento [K, L]	r = 21.87	

Protocolo de construção para a hipérbole:

N.	Nome	Descrição	Valor	Legenda
1	Ponto A		A = (3.7, 1.46)	
2	Ponto B		B = (6.2, 1.58)	
3	Ponto C		C = (7.16, -1.38)	
4	Hipérbole c	Hipérbole com focos A, B	c: -17.55x² - 2.4x y + 7....	
5	Ponto D	Ponto sobre c	D = (3.59, 3.12)	
6	Ponto E	Ponto sobre c	E = (4.2, 1.9)	
7	Ponto F	Ponto sobre c	F = (3.89, 0.09)	
8	Ponto G	Ponto sobre c	G = (6.94, -1.06)	
9	Ponto H	Ponto sobre c	H = (5.65, 1.91)	
10	Ponto I	Ponto sobre c	I = (6.18, 3.31)	
11	Segmento a	Segmento [D, I]	a = 2.59	
12	Segmento b	Segmento [H, I]	b = 1.49	
13	Segmento d	Segmento [H, G]	d = 3.24	
14	Segmento e	Segmento [G, F]	e = 3.26	
15	Segmento f	Segmento [F, E]	f = 1.84	
16	Segmento g	Segmento [E, D]	g = 1.36	
17	Reta h	Reta DE	h: 1.22x + 0.6y = 6.26	

N.	Nome	Descrição	Valor	Legenda
18	Reta i	Reta HG	i: 2.97x + 1.29y = 19.27	
19	Reta j	Reta IH	j: 1.4x - 0.53y = 6.89	
20	Reta k	Reta EF	k: 1.81x - 0.31y = 7.02	
21	Reta l	Reta DI	l: -0.19x + 2.59y = 7.38	
22	Reta m	Reta FG	m: 1.15x + 3.05y = 4.75	
23	Ponto J	Ponto de interseção de l, m	J = (-2.88, 2.64)	
24	Ponto K	Ponto de interseção de j, k	K = (3.02, -5.07)	
25	Ponto L	Ponto de interseção de h, i	L = (16.13, -22.22)	
26	Reta n	Reta JL	n: 24.86x + 19.01y = -2...	
27	Segmento p	Segmento [J, K]	p = 9.71	
28	Segmento q	Segmento [K, L]	q = 21.59	

Atividade 7:

N.	Nome	Descrição	Valor	Legenda
1	Ponto A		A = (-1, -2)	
2	Ponto B		B = (5, -2)	
3	Ponto C		C = (2, 6)	
4	Segmento a	Segmento [A, B]	a = 6	
5	Segmento b	Segmento [B, C]	b = 8.54	
6	Segmento c	Segmento [C, A]	c = 8.54	
7	Ponto N	Ponto sobre b	N = (3.7, 1.48)	
8	Ponto M	Ponto sobre c	M = (0.77, 2.72)	
9	Segmento d	Segmento [M, N]	d = 3.18	
10	Segmento e	Segmento [N, A]	e = 5.84	
11	Segmento f	Segmento [M, B]	f = 6.34	
12	Ponto Q	Ponto de interseção de e, f	Q = (2.61, 0.67)	
13	Semirreta g	Semirreta com origem C passando	g: 5.33x + 0.61y = 14....	
14	Texto texto1		"Dado o triângulo AB...	
15	Quadriláter...	Polígono M, A, B, N	pol1 = 18.44	
15	Segmento ...	Segmento [M, A] de Quadrilátero pol1	m = 5.04	
15	Segmento a_1	Segmento [A, B] de Quadrilátero pol1	a_1 = 6	
15	Segmento b_1	Segmento [B, N] de Quadrilátero pol1	b_1 = 3.71	

N.	Nome	Descrição	Valor	Legenda
15	Segmento n	Segmento [N, M] de Quadrilátero pol1	n = 3.18	
16	Reta h	Reta AB	h: y = -2	
17	Reta i	Reta MN	i: 1.24x + 2.93y = 8.91	
18	Ponto D	Ponto de interseção de h, i	D = (11.9, -2)	

Atividade 8:

N.	Nome	Descrição	Valor	Legen...
1	Ponto I		I = (6, 6)	
2	Ponto O		O = (4.58, 3.5)	
3	Ponto Y		Y = (6.58, 4.1)	
4	Semirreta a_1	Semirreta com origem O passando por Y	a_1: -0.6x + 2y = 4.25	
5	Ponto X	Ponto sobre a_1	X = (5.43, 3.75)	
6	Segmento a	Segmento [O, X]	a = 0.88	
7	Segmento b	Segmento [X, Y]	b = 1.2	
8	Semirreta c_1	Semirreta com origem I passando por O	c_1: 2.5x - 1.42y = 6.48	
9	Ponto A		A = (10.04, 2.5)	
10	Semirreta d_1	Semirreta com origem O passando por A	d_1: x + 5.46y = 23.69	
11	Ponto M	Ponto sobre d_1	M = (5.91, 3.26)	
12	Segmento e	Segmento [X, M]	e = 0.69	
13	Reta f	Reta passando por Y e paralela a e	f: 0.5x + 0.48y = 5.24	
14	Ponto P	Ponto de interseção de f, d_1	P = (7.71, 2.93)	
15	Segmento g	Segmento [Y, P]	g = 1.63	
16	Semirreta h	Semirreta com origem I passando por X	h: 2.25x - 0.57y = 10...	

N.	Nome	Descrição	Valor	Legen...
17	Semirreta i	Semirreta com origem I passando por M	i: 2.74x - 0.09y = 15.9	
18	Semirreta j	Semirreta com origem I passando por Y	j: 1.9x + 0.58y = 14.88	
19	Semirreta k	Semirreta com origem I passando por P	k: 3.07x + 1.71y = 2...	
20	Segmento c	Segmento [O, M]	c = 1.35	
21	Segmento d	Segmento [M, P]	d = 1.84	
22	Texto texto1	"\frac{" + (LaTeX[a]) + "}{" + (LaTeX[b]) + "} =	"\frac{0.88}{1.2} = \fr...	
23	Texto texto2		"\frac{a}{b} = \frac{c}...	
24	Texto texto3		"⇔"	
25	Número l	a / b	l = 0.74	
26	Número m	c / d	m = 0.74	
27	Texto texto4	"⇔ " + l + " = " + m + ""	"⇔ 0.74 = 0.74"	
28	Ponto O'	Ponto sobre c_1	O' = (3.17, 1.02)	
29	Ponto X'	Ponto sobre h	X' = (4.8, 1.31)	
30	Segmento a'	Segmento [O', X']	a' = 1.66	
31	Ponto Y'	Ponto sobre j	Y' = (7.28, 1.81)	
32	Segmento b'	Segmento [X', Y']	b' = 2.52	
33	Ponto P'	Ponto sobre k	P' = (9.18, 0.29)	

N.	Nome	Descrição	Valor	Legen...
34	Número n	a' / b'	n = 0.66	
35	Ponto M'	Ponto sobre i	M' = (5.82, 0.68)	
36	Segmento c'	Segmento [O', M']	c' = 2.67	
37	Segmento d'	Segmento [M', P']	d' = 3.39	
38	Número o	a' / b'	o = 0.66	
39	Número p	c' / d'	p = 0.79	
40	Texto texto5	"\frac{a'}{b'} = \frac{c'}{d'} ⇔ \frac{a'}{b'} ≠	"\frac{a'}{b'} = \frac{c'..	

Atividade 9:

N.	Nome	Descrição	Valor	Legen...
1	Ponto A		A = (6.06, 4.12)	
2	Ponto D		D = (9.44, 4.1)	
3	Segmento a	Segmento [A, D]	a = 3.38	
4	Ponto B	Ponto sobre a	B = (7.6, 4.11)	
5	Ponto C	Ponto sobre a	C = (8.32, 4.11)	
6	Ponto E		E = (7.66, 6.04)	
7	Semirreta b	Semirreta com origem E passando	b: 1.92x - 1.6y = 5.04	
8	Semirreta c	Semirreta com origem E passando	c: 1.93x - 0.06y = 14....	
9	Semirreta d	Semirreta com origem E passando	d: 1.93x + 0.66y = 1...	
10	Semirreta e	Semirreta com origem E passando	e: 1.94x + 1.78y = 2...	
11	Texto texto1		"\frac{AC/AD}{BC/B...	
12	Texto texto2		"@ ="	
13	Segmento f	Segmento [A, C]	f = 2.26	
14	Segmento g	Segmento [A, D]	g = 3.38	
15	Segmento h	Segmento [B, C]	h = 0.72	
16	Segmento i	Segmento [B, D]	i = 1.84	
17	Número j	f / g	j = 0.67	

N.	Nome	Descrição	Valor	Legen...
18	Número k	h / i	k = 0.39	
19	Número l	j / k	l = 1.7	
20	Ponto A'	Ponto sobre b	A' = (3.33, 0.85)	
21	Ponto C'	Ponto sobre d	C' = (9.07, 1.91)	
22	Reta m	Reta A'C'	m: -1.06x + 5.74y = ...	
23	Ponto B'	Ponto de interseção de c, m	B' = (7.51, 1.62)	
24	Ponto D'	Ponto de interseção de e, m	D' = (11.1, 2.29)	
25	Segmento n	Segmento [A', D']	n = 7.9	
26	Texto texto3	"\frac{AC/AD}{BC/BD} = " + (LaTeX[l]) + ""	"\frac{AC/AD}{BC/B...	
27	Segmento p	Segmento [A', C']	p = 5.83	
28	Segmento q	Segmento [A', D']	q = 7.9	
29	Segmento r	Segmento [B', C']	r = 1.58	
30	Segmento s	Segmento [B', D']	s = 3.65	
31	Número o	p / q	o = 0.74	
32	Número t	r / s	t = 0.43	
33	Número u	o / t	u = 1.7	
34	Texto texto4	"\frac{A'C'/A'D'}{B'C'/B = " + (LaTeX[u]) + ""	"\frac{A'C'/A'D'}{B'C'/...	

Atividade 10:

N.	Nome	Descrição	Valor	Legen...
1	Ponto A		A = (-1.24, -3.04)	
2	Ponto B		B = (10, -3)	
3	Reta r	Reta AB	r: -0.04x + 11.24...	
4	Ponto C	Ponto sobre r	C = (6.96, -3.01)	
5	Ponto D_1		D_1 = (3.9, 3.36)	
6	Semirreta a_1	Semirreta com origem A passando por D_1	a_1: -6.4x + 5.14y = -7.69	
7	Ponto E_1		E_1 = (6.8, 2.98)	
8	Semirreta a_2	Semirreta com origem A passando por E_1	a_2: -6.02x + 8.04y = -16.98	
9	Ponto F_1		F_1 = (3.88, 5.4)	
10	Semirreta c	Semirreta com origem C passando por F_1	c: -8.41x - 3.08y ...	
11	Ponto H	Ponto de interseção de a_2, c	H = (5.2, 1.79)	
12	Ponto E	Ponto de interseção de a_1, c	E = (4.4, 3.98)	
13	Semirreta b_2	Semirreta com origem B passando por H	b_2: -4.79x - 4.8y = -33.46	
14	Semirreta b_1	Semirreta com origem B passando por E	b_1: -6.98x - 5.6y = -53.02	
15	Ponto F	Ponto de interseção de a_1, b_2	F = (3.78, 3.21)	
16	Ponto G	Ponto de interseção de a_2, b_1	G = (5.8, 2.23)	

N.	Nome	Descrição	Valor	Legen...
17	Reta a	Reta FG	a: 0.98x + 2.02y ...	
18	Ponto D	Ponto de interseção de a, r	D = (16.62, -2.98)	

Atividade 11:

N.	Nome	Descrição	Valor	Legen...
1	Ponto O		$O = (5, 1)$	
2	Ponto B_1		$B_1 = (7.48, 1.78)$	
3	Círculo c	Círculo por B_1 com centro O	$c: (x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 6.76$	
4	Ponto A		$A = (12.7, 2.42)$	
5	Ponto A_1		$A_1 = (2.06, 1.92)$	
6	Semirreta a	Semirreta com origem A passando por A_1	$a: 0.5x - 10.64y = -19.4$	
7	Ponto D_1		$D_1 = (2.54, -1.58)$	
8	Semirreta b	Semirreta com origem A passando por D_1	$b: 4x - 10.16y = 26.21$	
9	Ponto C	Ponto de interseção de c, a	$C = (7.32, 2.17)$	
9	Ponto B	Ponto de interseção de c, a	$B = (2.58, 1.94)$	
10	Ponto D	Ponto de interseção de c, b	$D = (7.53, 0.38)$	
10	Ponto E	Ponto de interseção de c, b	$E = (3.57, -1.17)$	
11	Reta d	Reta BD	$d: 1.56x + 4.95y = 13.65$	
12	Reta e	Reta CE	$e: 3.34x - 3.75y = 16.34$	
13	Ponto F	Ponto de interseção de d, e	$F = (5.9, 0.9)$	
14	Reta f	Reta BE	$f: 3.12x + 1y = 9.97$	

N.	Nome	Descrição	Valor	Legen...
15	Reta g	Reta CD	g: 1.78x + 0.2y = 13.51	
16	Ponto G	Ponto de interseção de f, g	G = (9.98, -21.23)	
17	Reta h	Reta FG	h: 22.13x + 4.08y = 134....	
18	Ponto H	Ponto de interseção de c, h	H = (5.4, 3.57)	
18	Ponto I	Ponto de interseção de c, h	I = (6.29, -1.26)	
19	Reta i	Reta AH	i: -1.15x - 7.3y = -32.24	
20	Reta j	Reta AI	j: 3.68x - 6.41y = 31.17	

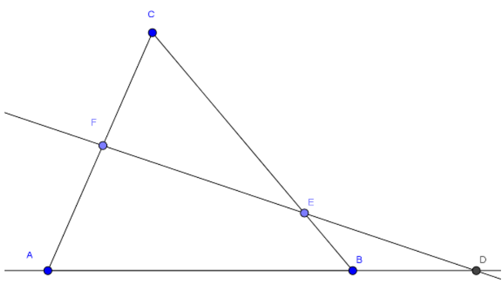
Anexo II – Experiências Vividas

Atividade 1:

Observamos que, até pelo texto pouco geométrico da demonstração acima, a atividade pode parecer menos interessante para uma intenção sintética da geometria, mas, tanto o teorema direto quanto o recíproco podem ganhar dinamismo se ambientados em um software gráfico que permita deslocamentos e variações que ajudem a mostrar empiricamente a presença de propriedades.

Ao propormos esta atividade, fizemos um resumo para o grupo sobre o Teorema de Menelau, e perguntamos aos participantes o que seria a recíproca, e um deles respondeu, prontamente, que seria uma reta. Em seguida, o tema colinearidade foi, novamente, levantado pelos participantes, demonstrando absorção do conteúdo (colinearidade). Assim, após conjecturas, eles concluíram que se os pontos forem colineares, a relação do Teorema de Menelau será válida. Usando o fato de que dois pontos são colineares, é preciso demonstrar a colinearidade do terceiro ponto.

$$\frac{\boldsymbol{AF}}{\boldsymbol{FC}} \times \frac{\boldsymbol{CE}}{\boldsymbol{EB}} \times \frac{\boldsymbol{BD}}{\boldsymbol{DA}} = \mathbf{1}$$



Atividade 2:

A primeira reação dos participantes, quando foi pedido que eles demonstrassem o Teorema de Ceva, foi afirmar que fica sugestiva a presença de Menelau, já que é possível intuir ligações entre as situações características. Para seguir com a atividade, consideramos uma afirmação do grupo, de que seria possível enxergar seis relações de Menelau, em um triângulo de Ceva, acrescentando que, portanto, seria possível escrever seis relações. A partir daí um integrante do grupo afirma que ao usar uma relação de Menelau um segmento que está na hipótese não é relacionado, entrando em uma discussão de quais segmentos seriam relacionados ou não. Então, viu-se a necessidade de fazer nova intervenção e mencionar que para tal demonstração será necessário o uso de duas relações, ao mesmo tempo, para que, com as devidas contas, seja possível encontrar a demonstração.

Essa percepção demonstrativa, claramente, é ancorada na experiência do grupo enquanto licenciandos de matemática. Em outros grupos, certamente haverá uma variação nela. A familiaridade com os objetos matemáticos é fator significativo.

Fizemos uso do Geogebra para mostrarmos as seis relações de Menelau que mencionamos e para isso colorimos os seis triângulos correlatos que nos referimos, tendo feito seis caixas de ocultar/exibir objetos, conseguindo deixar colorido apenas os dois que usamos, melhorando assim a visualização do que estamos falando.

Atividade 3:

Em função da recíproca do Teorema de Menelau já ter sido demonstrada, a ideia aqui fica mais direta, pois a demonstração se faz semelhante.

O artifício algébrico apresentado é bem semelhante, usamos aqui o fato de que duas cevianas, de um triângulo, sempre concorrem em um ponto, precisando demonstrar que a terceira ceviana também será concorrente, às outras duas.

Atividade 4:

Para realizar essa atividade foi necessária uma revisão da definição de Baricentro, pela necessidade do seu uso na tarefa.

Comentou-se com o grupo que para esta demonstração na Geometria Euclidiana temos no mínimo uma página, e que na Projetiva poderíamos fazer em uma linha, o que causou certa admiração.

Os alunos começam a fazer conjecturas. A primeira delas relativa ao fato de que as medianas são segmentos que vão de um vértice ao ponto médio do lado oposto, gerando dois segmentos congruentes. Usam também o fato que ao pegarmos segmentos, dois a dois, alternando um, o produto será compensado. E então durante nova mediação, é dito a eles que em função dessas conjecturas temos do Teorema de Ceva que há uma incidência.

Atividade 5:

Aqui também conversou-se sobre o conceito de bissetrizes.

Um dos participantes comenta que para esta demonstração, na Geometria Euclidiana é usado um círculo inscrito.

Voltamos ao conteúdo e fez-se necessária uma explicação do Teorema da Bissetriz Interna, dizendo ao grupo que o teorema é uma coisa, a demonstração é outra. Falamos, também, que as três concorrem em um único ponto, e que euclidianamente esta demonstração é feita em, aproximadamente, uma página e meia, mas que projetivamente demonstramos em umas duas linhas.

Atividade 6:

Na realização dessa tarefa o Geogebra se mostrou extremamente necessário e produtivo, pois os alunos puderam realizar movimentos que não seriam possíveis com o uso de papel e lápis, pois seria necessária a construção de outras figuras. A dinamicidade é um fator requerido, aqui.

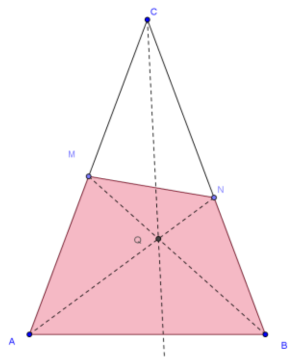
A elipse de entrada teve seus dois focos coincididos com uso do arrasto, portanto chegando a ser particularmente um círculo. Em movimentos realizados pelos alunos, os dois focos sobrepostos da elipse foram deslocados permitindo a eles que descobrissem, sozinhos, que a relação do Teorema de Pascal não se aplica apenas ao círculo, mas a todas as cônicas. Então passam a fazer movimentos com o hexágono, tendo como cônica uma elipse e não mais um círculo. Novamente sendo o Geogebra e seu movimento de arrasto, de suma importância.

Partimos para uma verificação, inicialmente sugerida por nós pesquisadores, da possibilidade de que o teorema seja válido também para um pentágono. Com o polígono tendo cinco lados, o grupo observa que deixamos de ter três pares de lados opostos e em um desses pares passamos a ter um lado oposto a um vértice, gerando uma conversa a respeito da pergunta introduzida pelo pesquisador: “então podemos dizer, que neste contexto, um vértice é igual a um lado?” Após essa conversa o grupo vai aceitando ter validade também para pentágono. Gerando curiosidade da validade do teorema para outros polígonos, fizemos novas sobreposições de pontos e chegamos a um quadrilátero e a um triângulo, e a relação permanecia. Em seguida foi perguntado aos pesquisadores se seria possível a veracidade do teorema para um heptágono, e combinamos fazer essa verificação em casa e levar na aula seguinte.

Atividade 7:

Nessa atividade tivemos outro momento onde o uso do Geogebra foi extremamente importante. Com o auxílio do software os participantes puderam ir testando suas ideias, sem ter que apagar tudo e recomeçar.

Aqui, os pesquisadores apresentaram a atividade, explicaram o que queriam e, então, pediram ao grupo que fizessem a tarefa deixando exposto, na lousa interativa, uma figura igual a esta.



Seguindo uma tendência natural, os alunos partiram para uma solução independente de um pensar projetivo. Na tentativa de achar o novo quadrilátero eles construíram semirretas e forçaram a concorrência delas com a semirreta CQ. Teve-se que recobrar o sentido de conceitos projetivos já trabalhados, com a ideia de quadrilátero completo.

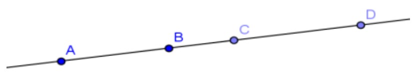
No final, todos perceberam que o intuito da atividade, mais que aplicação de um conhecimento específico, era o de trazer à tona o sentido projetivo de feixes de retas, além de ser uma curiosidade geométrica o fato de todo M´ determinado a partir de um N´ arbitrário, como projeção deste a partir de D, dar conta do solicitado na atividade.

Atividade 8:

Na ocasião do desenvolvimento da atividade em que foi pedido que verificasse se as relações de proporções métricas são mantidas projetivamente, os pesquisadores dizem que não podem dar essa garantia a eles, que partiram para a verificação. O resultado foi tomado como significativo, e todos entenderam o objetivo da atividade em desconstruir preventivamente um resultado indevido.

Como contra exemplo de que as relações métricas não permanecem em projeção, apresentamos a Razão Cruzada (ou anharmônica), cuja métrica é preservada em projeções. Conversamos sobre o que seria essa razão, num fundo histórico e geométrico. Essa conversa nos levou à atividade seguinte.

Razão Cruzada



$$\frac{AC.BD}{AD.BC}$$

Atividade 9:

Para essa atividade apresentou-se, como dissemos, o aplicativo referente ao assunto e conversamos sobre razão harmônica. Todos participaram da construção, que um dos presentes capitaneou.

Percebeu-se que foi importante a conversa de fundo histórico, criando um contexto científico para o objeto estudado. A ideia de feixe projetivo de 4 retas, sempre gerando, nas secantes que o cortam, segmentos que mantêm a mesma razão anharmônica, foi aproveitada em sequência natural da atividade.

Atividade 10:

O grupo de alunos fez conjecturas em relação a tarefa, que, inicialmente foi-se mostrando complexa. As tentativas de encaminhar soluções foram mais escoradas em conhecimentos geométricos euclidianos, até que em um dado momento perguntam aos pesquisadores se teriam que fazer uso do Quadrilátero Completo. Com essa percepção em tela, eles partiram para uma solução, quando foi reforçada a indicação de não se fazer uso de compasso para a construção.

Resolveu-se apresentar a solução mais tradicional, que serviria de contraponto à questão do uso de instrumentos.

Depois disso, o grupo de alunos insistiu na construção com o uso do quadrilátero completo, e todos acabam valorizando o fato de a construção projetiva ser interessante, pela possibilidade de se trabalhar mais livremente com retas aleatórias, o que dá mais dinamicidade quando se está num software gráfico.

Atividade 11:

Ao se pedir aos alunos que a construção fosse projetiva, deixamos bem claro que fica descartado o uso do compasso.

Para tal construção, o tema polo e polar foi relembrado. As ideias começaram a aparecer, e um dos alunos tomou a iniciativa sobre a construção de uma polar. O grupo, sendo mediado, começa a construir essa polar. Identificou-se a presença da ideia do quadrilátero completo, o que satisfez a todos por ter sido a atividade atual como um fecho das demais.