Tarefas Algébricas para o 6º ano do Ensino Fundamental.

Mageri Rosa Ramos
Amarildo Melchiades da Silva

Juiz de Fora (MG)
Agosto, 2011

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
Pós-Graduação em Educação Matemática
Mestrado Profissional em Educação Matemática

Mageri Rosa Ramos
Amarildo Melchiades da Silva

Tarefas Algébricas para o 6º ano do Ensino Fundamental

Orientador: Prof. Dr. Amarildo Melchiades da Silva

Produto Educacional a partir da dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Juiz de Fora (MG)
Agosto, 2011

Mageri Rosa Ramos
Amarildo Melchiades da Silva

Tarefas Algébricas para o 6º ano do Ensino Fundamental

Produto Educacional a partir da Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Comissão Examinadora

____
Prof. Dr. Amarildo Melchiades da Silva
UFJF – Orientador

____
Profª. Drª. Janete Bolite Frant
UNIBAN

____
Profª. Drª. Maria Cristina de Araújo de Oliveira
UFJF

Juiz de Fora, 04 de Agosto de 2011

SUMÁRIO

Apresentação

Esse produto educacional é fruto de uma pesquisa desenvolvida no Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora e sua finalidade é oferecer tarefas que sirvam como subsídio para seu trabalho, professor ou professora.

As tarefas aqui apresentadas têm por objetivo auxiliar o processo de desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 6º ano do Ensino Fundamental ou mesmo para séries posteriores. Você poderá aplicá-las como são apresentadas, poderá modificá-las para que melhor satisfaçam seus propósitos ou poderá baseado nas tarefas propostas, construir suas próprias tarefas. Para ajudá-lo nesse propósito seguiremos alguns passos que consideramos de extrema importância: faremos um breve estudo sobre a situação atual da álgebra escolar, falaremos sobre importantes características das tarefas e as apresentaremos e comentaremos sobre nossa experiência com a aplicação das mesmas e apresentaremos sugestões de acordo com nossa experiência.

Se você quiser aprofundar esse estudo recomendamos a leitura da dissertação que deu origem a esse produto educacional: “Uma Investigação Sobre a Produção de Tarefas Algébricas para o 6º ano do Ensino Fundamental”.

Falando sobre a álgebra escolar

Nesse primeiro momento, faremos uma análise sobre diferentes entendimentos do que é álgebra, pensamento algébrico e atividade algébrica e verificar de que maneira diferentes concepções afetam o processo de ensino e de aprendizagem.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) trazem a orientação de uma pré-álgebra para os três primeiros ciclos do Ensino Fundamental. Essa *pré-álgebra* seria o desenvolvimento de alguns aspectos da álgebra, como a exploração de situações-problema através das quais o aluno reconhecerá, segundo os PCN, diferentes funções da álgebra, como generalizar padrões, estabelecer relações, resolver problemas, etc. Essa pré-álgebra desenvolve, ainda segundo os PCN, a habilidade de *pensar abstratamente*, se forem proporcionadas aos alunos experiências variadas envolvendo as noções algébricas. Recomenda que seja um trabalho informal, articulado com a aritmética e que deve ser retomado no 3º ciclo (6º e 7º anos) para que as noções e conceitos algébricos possam ser consolidados e ampliados.

Embora os PCN orientem que já se possa desenvolver uma pré-álgebra, não descrevem nenhuma ação que possam concretizar essas indicações. Já para o 3º ciclo, os PCN orientam o não aprofundamento com expressões algébricas e equações, pois consideram suficiente que nessa fase se conheça a noção de variável e já se possa reconhecer a expressão algébrica como forma de tradução das relações existentes entre a variação de grandezas, deixando as técnicas convencionais para o 4º ciclo.

Segundo os PCN há um consenso razoável de que se houver o engajamento, por parte dos alunos, em atividades que inter-relacionem as diferentes concepções da álgebra, estará garantido o desenvolvimento do pensamento algébrico. O quadro a seguir (Fig. 1) ilustra as diferentes concepções/tendências citadas nos PCN.

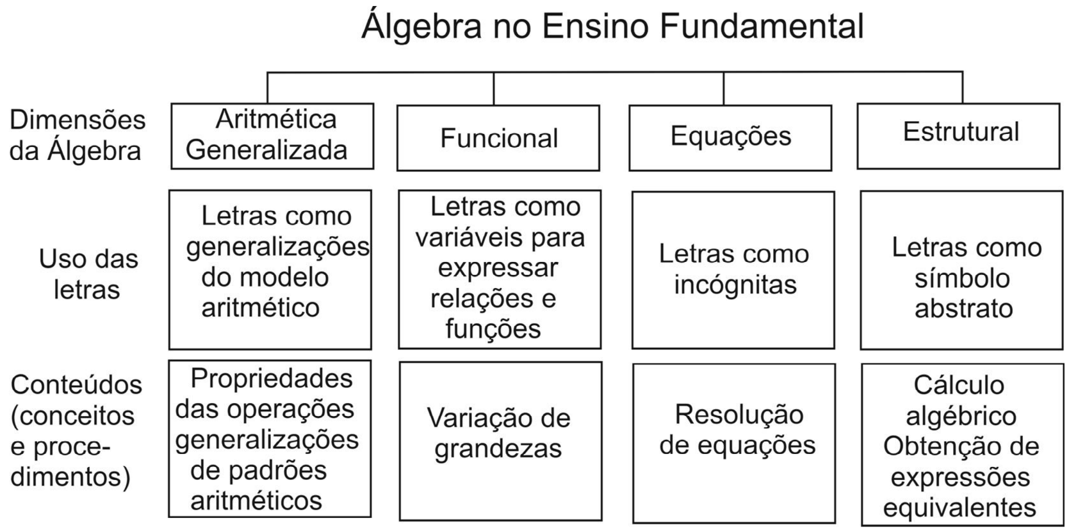


Figura 1 - Quadro de referência das dimensões da álgebra e uso das letras.

Apresentaremos, a partir de agora, uma análise sobre as diversas concepções de Educação Algébrica presentes na literatura de Educação Matemática.

Álgebra para Usiskin

Para Zalman Usiskin (1995), a álgebra da escola básica se relaciona à compreensão do significado das variáveis e das operações envolvendo variáveis e nos esclarece que muitos consideram *que os alunos estão estudando álgebra quando encontram variáveis pela primeira vez*.

Entendemos que *reduzir álgebra ao estudo das variáveis* não nos ajuda a entender qual é a proposta do ensino de álgebra na escola básica. Numa perspectiva de ampliação do tratamento da álgebra na escola básica, Usiskin (1995, p. 10), considera as equações com a mesma forma, ou seja, o produto de dois números sendo igual a um terceiro. Cada uma delas tem um caráter diferente. Vejamos:

i) $A = b.\ h$ indica uma fórmula;
ii) $40 = 50\ x$ indica uma equação;
iii) $sen\ x = cos\ x.\ tg\ x$ indica uma identidade;
iv) $1 = n.\ (1/n)$ indica uma propriedade;
v) $y = kx$ indica a expressão de uma função.

Observe, professor ou professora, que apenas em (v) há o caráter de "variabilidade", de onde advém o termo variável. Com análise dos itens descritos, Usiskin (1995) afirma que não há, em álgebra, uma única concepção para a variável.

Outra contribuição de Usiskin (1995) é a apresentação de quatro diferentes concepções de álgebra: (1) a álgebra como aritmética generalizada, (2) a álgebra como estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas, (3) a álgebra como estudo de relações entre grandezas e (4) a álgebra como estudo das estruturas. Passaremos, então, a descrever e analisar essas concepções.

1ª) A álgebra como aritmética generalizada

Nesta concepção, segundo Usiskin (1995), é natural pensar as variáveis como generalizadoras de modelos. Por exemplo, generaliza-se uma igualdade como 3 + 5 = 5 + 3, na qual a ordem das parcelas não altera a soma, escrevendo-se $a + b = b + a$.

Nessa concepção de álgebra o importante é *traduzir e generalizar*.

2ª) A álgebra como estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas

Para entendermos essa concepção, Usiskin (1995) propõe um problema: adicionando 3 ao quíntuplo de certo número, a soma é 43. Achar o número. O problema é facilmente traduzido para a linguagem da álgebra da seguinte maneira: $5x + 3 = 43$. Ao traduzirmos esse problema para a linguagem algébrica trabalhamos segundo a concepção 1. Quando continuamos a resolver a equação, trabalhamos segundo a concepção 2.

$5x + 3 = 43$

$5x + 3 + (-3) = 43 + (-3)$ (somando – *3* a ambos os membros da equação)

$5x = 40$

$x = 8$

Assim, o "certo número" do problema é 8, e facilmente testamos esse resultado, efetuando 5. 8 + 3 = 43.

Ao resolver problemas desse tipo, Usiskin (1995) afirma que muitos alunos têm dificuldade na *passagem da aritmética para a álgebra*. Aritmeticamente, a resolução consiste em subtrair 3 de 43 e dividir o resultado por 5. Já a forma algébrica $5x + 3$ envolve a multiplicação por 5 e a adição de 3, que são as operações inversas da subtração 43 – 3 e da divisão 40: 5. Para armar uma equação, raciocinamos da maneira oposta à que empregamos para resolver o problema aritmeticamente.

Nesse caso, Usiskin (1995) diz que as variáveis são ou *incógnitas* ou *constantes* e as instruções-chave são, diferentemente da primeira concepção, *simplificar e resolver*. Aqui o aluno precisa dominar não apenas a capacidade de traduzir os problemas para a linguagem algébrica, como também precisa ter habilidades em manipular essas equações até obter a solução. Nesse caso a letra como uma incógnita, um valor a ser encontrado e não algo que varia.

3ª) A álgebra como estudo de relações entre grandezas

Segundo Usiskin (1995), ao expressarmos uma relação entre três grandezas e escrevermos a fórmula da área de um retângulo, $A = b. h$, não temos a sensação de se estar lidando com uma incógnita, já que não estamos resolvendo nada. Mesmo que possamos pensar em generalizações, fórmulas como essas nos dão uma sensação diferente de generalizações como $1 = n. (1/n)$.

Considerando que a concepção de álgebra como estudo de relações entre grandezas pode começar com fórmulas, a maior diferença entre esta concepção e a anterior é que, nesse caso, as variáveis realmente variam. Para esclarecer essa questão, Usiskin (1995) exemplifica: o que ocorre com o valor de $1/x$ quando x se torna cada vez maior? Como não pedimos o valor de x, então, x não é uma incógnita. Também não estamos pedindo ao aluno que traduza o problema para a linguagem algébrica, conforme a concepção 2. Há um modelo a ser generalizado, mas não se trata de um modelo que se pareça com a aritmética, já que não teria sentido perguntar, por exemplo, o que aconteceria com o valor de ½ quando 2 se torna cada vez maior. Nesse caso, temos um modelo fundamentalmente algébrico.

A álgebra se ocupa, nessa terceira concepção, de acordo com Usiskin (1995), com modelos e leis funcionais que descrevem ou representam as relações entre duas ou mais grandezas variáveis. Uma variável é um argumento ou um parâmetro, representando, respectivamente, os valores do domínio de uma função ou um número do qual dependem outros números.

O fato de variáveis e argumentos diferirem de variáveis e incógnitas se evidencia na questão: “Achar a equação da reta que passa pelo ponto (6, 2) e tem inclinação 11” (Usiskin, 1995, p. 16).

Podemos começar a partir do fato conhecido, segundo Usiskin (1995), de que os pontos de uma reta estão relacionados por uma equação do tipo $y = mx + b$. Nesse caso, teríamos aqui tanto um modelo entre variáveis como uma fórmula. Para o professor, x e y podem ser encarados como variáveis e m representaria um parâmetro (quando m varia, obtemos todas as retas do plano não-verticais), mas para o aluno pode não ficar claro se o argumento é m, x ou b. Para ele pode parecer que todas as letras sejam incógnitas.

Vejamos a resolução proposta por Usiskin (1995, p. 17). Como conhecemos m, que representa a inclinação da reta, substituímos essa letra pelo seu valor, obtendo $y = 11x + b$. No caso específico do problema, m é uma constante, não um parâmetro e b não é um parâmetro, e sim uma incógnita. Mas, como achar b? Usando um par entre os muitos pares de valores associados x e y, ou seja, escolhemos um valor do argumento x para o qual conhecemos o valor associado de y. Podemos fazer isso em $y = mx + b$ já que essa relação descreve um modelo geral entre números. Substituindo x e y pelo par (6, 2), temos $2 = 11.\ 6 + b$, e, portanto, $b = -64$. Observemos que não achamos x e y, embora tenhamos atribuído valores a eles, porque x e y, nesse caso, não eram incógnitas. Achamos somente a incógnita b e substituímos seu valor na equação, obtendo a resposta do problema: $y = 11x - 64$.

4ª) A álgebra como estudo das estruturas[1]

De acordo com Usiskin (1995), no curso superior de Matemática, o estudo de álgebra envolve estruturas como, por exemplo, grupos, anéis, domínios de integridade, corpos e espaços vetoriais, o que nos parece ter pouca semelhança com a álgebra da escola básica, embora sejam essas estruturas que fundamentam a resolução de equações nesse nível de ensino. Entretanto, podemos reconhecer a álgebra como estudo das estruturas na escola básica pelas propriedades que atribuímos às operações com números reais e polinômios.

Para explicitarmos melhor, consideremos os seguintes problemas:

1) Determine $(a + 1)\ (b - x)$;

2) Fatorar a expressão $ax + ay + bx + by$.

---

[1] Do nosso entendimento o termo estrutura usado por Usiskin (1995) não se refere à noção de estrutura algébrica e sim de manipulação algébrica em que a variável é apenas um "pouco mais que um símbolo arbitrário" (Usiskin, 1995, p. 18).

Nesses dois exemplos, a concepção de variável, não coincide com nenhuma das concepções discutidas anteriormente. Não se trata da concepção 1, já que não há qualquer modelo aritmético a ser generalizado. Não há qualquer equação a ser resolvida, de modo que a variável não atua como uma incógnita, como na concepção 2. Do mesmo modo, não se trata de nenhuma função ou relação, ou seja, a variável não é um argumento, como na concepção 3.

Observemos as resoluções dos problemas:

1) $(a + 1)(b - x)$

$ab - ax + b - x$

2) $ax + ay + bx + by$

$(a + b)(x + y)$

Vejamos que, nos dois problemas, as variáveis são tratadas como apenas como sinais no papel, sem qualquer referência numérica. Nessa concepção, o que caracteriza a variável é o fato de ser pouco mais do que um símbolo arbitrário. As atividades conhecidas como de cálculo algébrico, por exemplo, produtos notáveis, fatoração, operações com monômios e polinômios, situam-se na concepção 4.

Sintetizando essa discussão sobre as diferentes concepções de álgebra relacionadas como os diferentes usos das variáveis, Usiskin (1995), elaborou o seguinte quadro:

Concepção de álgebra	**Uso das variáveis**
Aritmética generalizada	Generalizadoras de modelos (traduzir, generalizar)
Estudo de procedimentos para resolver problemas	Incógnitas, constantes (resolver, simplificar)
Estudo de relações entre grandezas	Argumentos, parâmetros (relacionar, fazer gráficos)
Estudo de estruturas	Sinais arbitrários no papel (manipular, justificar)

O Modelo Três Usos da Variável (3UV)

O modelo 3UV, proposto por Ursini *et al* (2005), destaca três usos da variável: como **termo desconhecido**, como **número genérico** e como **relação funcional**. Para os autores, embora os três usos das variáveis sejam trabalhados em sala de aula não é dada a importância necessária às diferenças desses três usos e quais seriam as ações adequadas que se deve fazer em cada caso e essa seria a causa das dificuldades algébricas acumuladas pelos alunos.

As concepções algébricas descritas por Lins e Gimenez

De acordo com Lins e Gimenez, no livro Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI, não há consenso sobre o que seja *pensar algebricamente*. Para os autores, a atividade algébrica é associada imediatamente a conteúdos e na tentativa de se relacionar o que é e o que não é álgebra. Em geral, a atividade algébrica é descrita como *fazer ou não fazer álgebra*.

Esta ideia, construída com base em uma *concepção conteudista* nos permite, segundo Lins e Gimenez (1997), saber se isto ou aquilo "é" álgebra e trabalhar esses conteúdos. Segundo os autores, essa ideia carrega alguns problemas que residem no fato de que esse tipo de abordagem não nos permite identificar dois itens fundamentais:

a) levantar a existência de outros tópicos que deveriam estar presentes nesse currículo e, ainda,

b) fica difícil saber de que forma organizar um currículo para a educação algébrica, e até mesmo se os tópicos tradicionais são tão relevantes quanto parece indicar a inclusão tradicional nos currículos.

- Concepção *letrista*: Para os que assumem essa concepção, a atividade algébrica se resume ao cálculo com letras e algoritmos, sendo assim caracterizada pelo uso de notações. Esta tendência é, ainda hoje, predominante nos livros didáticos brasileiros. Na concepção letrista, atividade algébrica é vista como uma atividade de *cálculo literal*.
- Concepção *facilitadora* ou *letrista-facilitadora* que é caracterizada pela atividade algébrica dada pela presença de certos temas e conteúdos que

são baseados em situações criadas com finalidade didática, partindo do que é conhecido pelo aluno.

- Uma terceira concepção de educação algébrica seria aquela em que o *concreto* também está presente, como ponto de partida. Nessa proposta, as atividades são de investigação de situações reais e a álgebra não é o objeto primeiro de estudo, e sim mais um instrumento de leitura do mundo. Para os adeptos dessa concepção de educação algébrica, a atividade algébrica caracteriza-se como resultado da ação do pensamento formal (*operar* sobre operações ou sobre resultados aritméticos). Essa caracterização nos leva a pensar que a atividade algébrica se caracteriza pela *generalidade*[2] e a álgebra como aritmética generalizada, tornando-se, como as linhas anteriormente descritas, uma caracterização dependente de conteúdos (LINS & GIMENEZ, 1997).
- Uma quarta concepção seria a noção de *campo conceitual*, conceito desenvolvido por Gérard Vergnaud e que é constituído por: *a)* um conjunto de esquemas operacionais e de invariantes; *b)* um conjunto de formas notacionais; e *c)* um conjunto de problemas que, a um mesmo tempo, são resolvidos por aqueles esquemas e dão sentido a eles (LINS & GIMENEZ, 1997).

Após tecerem essas considerações sobre atividade e educação algébricas, Lins e Gimenez propõem **outra abordagem**, pois consideram que tanto a abordagem letrista quanto as facilitadoras estão equivocadas. Para eles, a primeira tendência – a letrista – ignora o fato de que o texto em letras não possui significado algum. As facilitadoras, por sua vez, ignoram que a passagem de um campo semântico formado em torno de um núcleo familiar para outro núcleo, muitas vezes desconhecido, não acontece de forma suave ou por uma abstração, generalização ou qualquer outra coisa que sugira que permanece uma essência; ademais, quando não há a explicitação do processo ao se mudar o campo semântico, aos alunos só resta “adivinhar” o que está acontecendo.

De uma forma geral, o grande problema, segundo os autores, é que essas formas de abordagem consideram que sempre o aluno estará disponível para

[2] Lins e Gimenez (1997) fazem uma distinção entre generalidade e generalização. Generalidade refere-se diretamente do que é geral em uma situação, sem intermediação de casos particulares. Generalização refere-se ao falar do que é comum a um conjunto de casos particulares.

atender as atividades, ou seja, ele possui conhecimentos necessários para resolver as situações, não considerando a possibilidade do aluno não possuir tais conhecimentos.

Essas abordagens são dirigidas para a sala de aula e apresentam, para Lins e Gimenez (1997), o grande problema de limitar a compreensão do professor sobre “onde o aluno está” se esse se comporta de modo identificavelmente correto. Mas se ele se comporta de outra maneira, diversa da maneira considerada “ideal”, o professor não tem como saber onde (cognitivamente) o aluno está. É necessário, portanto, ter uma perspectiva de atividade algébrica que permita ao professor tanto saber o que é o ideal a ser atingido quanto ler positivamente o que o aluno faz quando está agindo de forma “não-ideal” ao executar uma atividade algébrica.

Para Lins e Gimenez (1997), pode-se dizer que **há atividade algébrica quando ocorre um processo de produção de significados para a Álgebra.** Os autores assim definem Álgebra: “... um conjunto de afirmações para as quais é possível produzir significado em termos de números e operações Aritméticas, possivelmente envolvendo igualdade e desigualdade.” (LINS & GIMENEZ, 1997, p.137). Para esses autores, a atividade algébrica e a aritmética ocorrem juntas, ainda que em planos diferentes.

O problema das abordagens tradicionais em educação matemática, lembram autores, é a preocupação exclusiva ou de tamanha importância com a existência das afirmações que os alunos assumam como corretas que todos os demais itens desaparecem do problema do educador.

Como vimos, para os autores, pensar algebricamente é produzir significados para situações em termos de números e operações aritméticas, em como igualdades e desigualdades, para com base nisso, transformar as expressões obtidas de acordo com três características fundamentais do pensamento algébrico: aritmeticismo (produção de significados apenas em relação a números e operações matemáticas), internalismo (consideração de números e operações apenas segundo suas propriedades, não modelando números em outros objetos “físicos” ou “geométricos”) e analiticidade (operações sobre números não conhecidos como se fossem conhecidos).

Os autores sugerem uma proposta de trabalho que se baseie em **significados**, não em conteúdos, e que essa proposta se enquadra bem no modelo de ciclos, nos quais se possa explorar ou tematizar certos aspectos, introduzir novas considerações e, com base nos resultados, buscar meios de tornar os instrumentos desenvolvidos mais seguros e familiares para os alunos. Para estes, **o projeto de educação algébrica deve permitir a produção de significados para a Álgebra e a capacidade de pensar algebricamente**.

O trabalho com significado, para os autores, fornece uma flexibilidade para o professor, permitindo-lhe ter um olhar positivo e permanente do que os alunos estão dizendo e fazendo. Os ciclos sugerem um desenvolvimento que não ocorrem de uma só vez, e permite a visita sucessiva e repetida ao mesmo tema, de maneiras diversas e em situações diferentes. Pode-se partir de uma atividade com “intenção” algébrica e chegar a uma atividade de “intenção” aritmética e vice-versa.

Quanto a conteúdos, os autores ressaltam que a oferta de uma lista desse tipo contribuiria para matar, de forma prematura, a discussão, fazendo com que o leitor ficasse preso em questões menores como “falta isso ou aquilo”.

Vejamos professor ou professora, que o conhecimento dessas diferentes concepções nos informa sobre o quadro geral do ensino de álgebra nessas diferentes perspectivas. Passaremos agora a analisar uma concepção alternativa de educação algébrica.

Uma concepção alternativa

Na educação matemática escolar a ideia de que a Aritmética deve vir antes da Álgebra está enraizada e é assim apresentada por livros didáticos e seguida pelos professores. Lins e Gimenes (1997) defendem que Aritmética e Álgebra se relacionam, sem que isso implique caracterizar a Álgebra como Aritmética generalizada.

Para os autores, a Álgebra é o grande corte na educação matemática escolar e que isso é explicado por alguns mediante a alegação de que estudantes na faixa etária referente a estas séries não teriam alcançado o desenvolvimento intelectual necessário para o desenvolvimento de tais habilidades.

Nossa concepção é baseada em um modelo teórico que enfatiza a *produção de significados* no desenvolvimento do pensamento e na aprendizagem escolar – o Modelo dos Campos Semântico, elaborado por Romulo Campos Lins (1997, 2001).

Para Lins e Gimenez, a proposta é exatamente oposta, pois eles defendem a antecipação do trabalho com álgebra, de modo que álgebra e aritmética se desenvolvessem juntas, ideia essa, defendida por pesquisadores de várias partes do mundo.

Segundo Lins e Gimenez (1997), álgebra é um conjunto de afirmações para as quais é possível produzir significado em termos de números e operações aritméticas, possivelmente envolvendo igualdade e desigualdade. E pode-se dizer que há atividade algébrica quando ocorre um processo de produção de significados para a álgebra. Para esses autores, a atividade algébrica e a aritmética ocorrem juntas, ainda que em planos diferentes.

Essa inovadora proposta se baseia em significados, não em conteúdos, na qual se possa explorar ou tematizar certos aspectos, introduzir novas considerações e, com base nos resultados, buscar meios de tornar os instrumentos desenvolvidos mais seguros e familiares para os alunos. Para estes, **o projeto de educação algébrica deve permitir a produção de significados para a álgebra e o desenvolvimento da capacidade de pensar algebricamente.**

A análise da produção de significados, para Lins e Gimenez (1997) fornece uma maneira do professor interagir com seus alunos, permitindo-lhe uma leitura plausível do que os alunos estão dizendo e fazendo.

Analisando as concepções de Educação Algébrica descritas anteriormente, pela visão crítica dos aportes do Modelo dos Campos Semânticos (MCS), assumimos que nossos objetivos seguem na direção de discutir uma nova abordagem para os processos de ensino e aprendizagem da álgebra, partindo da *produção dos significados*.

Nossa concepção

Concordamos com Lins e Gimenez (1997) que consideram equivocadas as concepções letrista e facilitadora e passamos a adotar, como nossa concepção, a proposta alternativa que indica um novo projeto de Educação Algébrica.

As Tarefas

Para a elaboração das tarefas observamos as características do pensamento algébrico descritas por Lins em sua tese de doutorado, como já dissemos anteriormente, o **aritmeticismo**, o **internalismo** e a **analiticidade**.

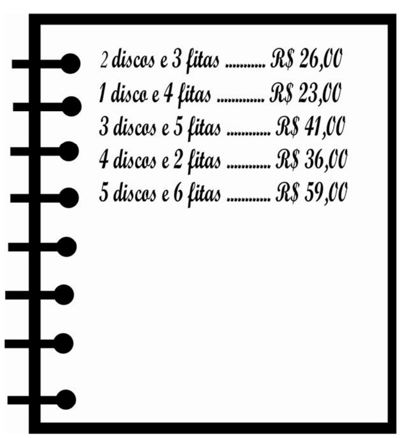
Na elaboração de nossas tarefas também levamos em conta outras características para as tarefas que são as de que sejam **familiares** e **não-usuais**. Ser “familiar” significa que devem ser tarefas de que os alunos já tenham recursos para operá-las, ou seja, são tarefas a partir das quais o aluno consegue falar e “não-usuais” no sentido de serem, de certa forma, não-habituais, ou seja, tarefas que o sujeito não consiga resolvê-las sem o mínimo de envolvimento cognitivo, de forma banal.

Tarefa da Feira de Antiguidades[3]

A escola de João está promovendo uma feira de antiguidades para que as turmas arrecadem dinheiro para uma viagem a uma cidade histórica de Minas Gerais.

Sua turma optou por montar uma barraca de vendas de discos de vinil e fitas de videocassete.

No horário destinado ao grupo de João ficar na barraca, seus outros colegas não apareceram e ele não sabia o preço que deveria vender os discos e fitas. Ao procurar pela barraca, encontrou algumas anotações, em um caderno, deixadas pelo grupo anterior. Veja.



[3] Tarefa baseada na tarefa “The Music Shop”, que conhecemos inicialmente em comunicação oral de Rômulo Campos Lins e publicada recentemente no livro “Future Curricular Trends in Schoool Algebra and Geometry”.

Como sua barraca era uma das mais procuradas, ele teve que se virar!

Por que você não ajuda o João a calcular o preço de algumas compras?

1. O pai de Raquel, sua colega de turma, comprou 3 discos e 7 fitas. Quanto ele pagou?

2. O professor Carlos, que coleciona discos de vinil e filmes antigos, comprou 5 discos e 8 fitas. Quanto ele pagou?

3. Marília do 7º ano comprou 2 discos e 1 fita. Quanto ela pagou?

A produção de significados da Tarefa da Feira de Antiguidades

Essa tarefa foi aplicada a grupos de dois e quatro alunos e a análise das três entrevistas nos mostra uma grande variedade de produções de significados para uma mesma tarefa.

Na primeira dupla, enquanto um dos sujeitos de pesquisa chamado Keven considera a possibilidade de achar os valores unitários de cada disco e fita, sua colega Katy levante a possibilidade de novos caminhos, ela pensa na possibilidade de discos e fitas terem o mesmo preço e mais tarde propõe valores aleatórios para os discos e fitas. Apesar de ouvir sua colega, Keven não abandona a ideia inicial de achar os preços unitários de discos e fitas.

Já para segunda dupla, Pepsi e Sprite, a produção de significados é totalmente diversa da primeira dupla, pois eles concordam que devem achar o valor unitário.

Apesar de pensarem em valores unitários, Sprite resolve inicialmente a terceira questão sem achar esses valores unitários, mas analisando algebricamente a quarta equação (4 discos e 2 fitas = 36) e a pergunta da terceira questão (2 discos e 1 fita = ?), percebendo que bastaria dividir o valor pago por 2.

Nas demais questões, Sprite muda sua forma de operar e passa a dar valores aleatórios para discos e fitas e consegue encontrar valores que satisfazem às equações dadas e responder às demais perguntas.

Já para o terceiro grupo, as produções de significado são as mais variadas. Poseidon propõe encontrar o valor unitário de discos e fitas. Seia, seu colega de grupo, sugere que o caminho, para encontrar o resultado da primeira questão, não é achar os valores unitários e sim os valores de 3 discos e de 7 fitas separadamente, não aceitando a ideia proposta de cálculo do valor unitário. Isa produz significados diferentes. Ela propõe analisar os dados fazendo uma comparação entre eles e as questões, analisando qual dado está “mais próximo” de cada uma das questões.

A partir daí, as mais variadas produções de significados aparecem. Após a primeira intervenção eles partem para a tentativa de achar os valores unitários. Após a segunda intervenção, alguns começam a atribuir valores aleatórios para discos e fitas e uma quarta integrante do grupo, Stefanny, não abre mão de encontrar os valores unitários.

Tarefa dos Bombons e Pirulitos

Laura estava planejando uma festa quando recebeu um anúncio de uma loja que vende bombons e pirulitos. Veja o anúncio.

Ela começou a pensar em algumas possibilidades de compra. Ajude-a a resolver esse problema.

a) Quanto ela gastará se comprar 25 bombons e 20 pirulitos?

b) Qual será o preço de 20 bombons e 30 pirulitos?

c) E se eles comprarem apenas 5 bombons?

d) Quanto custa cada bombom? E cada pirulito?

A produção de significados da tarefa dos bombons e pirulitos

Essa tarefa foi aplicada a uma dupla formada por Sprite e Pepsi, pelo quarteto Seia, Poseidon, Isa e Stefanny e por Keven que fez essa tarefa sozinho, pois Katy não compareceu no dia combinado.

Na análise das três entrevistas encontramos também diversas produções de significados.

Essa tarefa, diferentemente da Tarefa da Feira de Antiguidades permitia o cálculo do valor unitário de bombons e pirulitos através da análise das sentenças dadas.

Na primeira entrevista, Sprite sugere a estratégia já utilizada anteriormente de encontrar os valores unitários. Diferentemente da Tarefa da Feira de Antiguidades, eles encontraram os valores unitários de bombons e pirulitos baseados somente na análise dos dados, não utilizando dessa vez a estratégia de atribuir valores aleatórios.

Veja, professor ou professora, que baseando-se nas duas primeiras sentenças do desenho, Sprite descobre o preço de cada pirulito. Descobertos esses valores eles respondem rapidamente às demais perguntas.

Na segunda entrevista, o quarteto muda totalmente sua forma de operar em relação à Tarefa da Feira de Antiguidades. Eles resolvem as duas primeiras questões com facilidade fazendo as somas de bombons, pirulitos e preços.

Já na terceira questão, diante do obstáculo imposto pela tarefa, alguns mudam novamente a forma de operar passando a procurar cálculos que possibilitem a identificação do preço de cinco bombons.

Stefanny produz outros significados, tentando atribuir valores aleatórios para o preço de bombons e pirulitos e substituindo esses valores nas equações dadas, tentando comprovar se suas atribuições estão corretas ou não.

Na terceira entrevista, acontece algo inusitado. Keven não entendeu a extensão de sua contribuição ao produzir significados para a primeira tarefa e considerando-se incompetente estuda com um familiar para as próximas tarefas.

Ao receber a tarefa passa, então, a resolvê-la considerando um sistema linear e utiliza o método da adição. Convencido de que a única maneira de resolver a tarefa é encontrar os valores unitários de bombons e pirulitos, ele monta o sistema e após algumas tentativas consegue encontrar o valor de cada bombom e após algum tempo e várias intervenções, o preço de cada pirulito.

Durante sua participação, em vários momentos não aceita novas sugestões de encaminhamento para a resolução da tarefa.

Tarefa das Promoções

Sandra é dona de uma loja e para aumentar as vendas ela está fazendo promoções em sua loja. Veja o cartaz de divulgação das promoções.

O cartaz diz que encontraremos outras promoções no interior da loja. Sandra quer estar preparada para compras diferentes das que estão no cartaz. Ajude-a.

a) Qual será o brinde de quem comprar 2 calças, 3 blusas e 1 jaqueta?

b) Quem comprar 1 blusa e 1 jaqueta ganha o quê?

c) E se a compra for de 1 calça e 1 jaqueta?

A produção de significados da Tarefa das Promoções

Essa tarefa foi realizada pelo trio Sprite, Pepsi e Katy, pelo quarteto Seia, Poseidon, Isa e Stefanny e por Keven, que fez a tarefa sozinho porque estava doente no dia marcado.

Na primeira entrevista, Sprite percebe a possibilidade de somar as equações pra resolver a primeira questão. Mas a falta de valores numéricos parece incomodá-los. Eles produzem vários significados diferentes, como tentar substituir um item comprado por outro e a atribuição de valores aleatórios para calças, blusas e jaquetas. Em certo momento alegam a impossibilidade de resolver por não saber os preços de cada um, mas acabam resolvendo as duas primeiras questões.

Na segunda entrevista Keven produz significados diferentes. Ele não pensa em preços para os itens comprados, mas faz as substituições simbólicas na primeira e segunda questões. Na terceira questão tem dificuldades em pensar acerca de tarefas que não tenham dados suficientes para sua resolução.

Na terceira entrevista os significados produzidos pelo quarteto são outros: eles pensam em quantidade de itens comprados e na quantidade de brindes, como se comprar três "coisas" e ganhar duas "coisas".

Poseidon refere-se não à quantidade de itens comprados, mas à quantidade de tipos de produtos comprados e inserem novos dados como a alegação de que os brindes não podem ser repetidos.

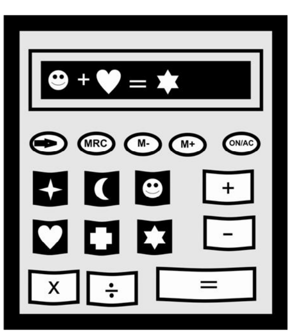
Apesar de nossa intervenção ressaltando que as promoções não são casuais, eles continuam estabelecendo os brindes sem nenhuma justificativa para suas escolhas. Alguns ficam presos à possibilidade de ter ou não contas a serem realizadas, não chegando a um consenso.

Stefanny consegue perceber a possibilidade de resolução somando as duas equações dadas. Poseidon percebe e passa a produzir novos significados, pensando agora na possibilidade de outras operações, mas logo volta a pensar aleatoriamente acerca dos brindes.

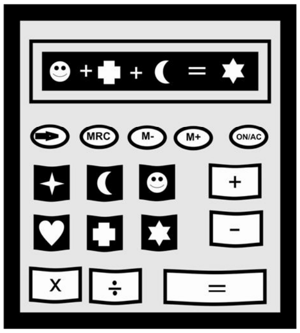
Apesar das intervenções eles continuaram a pensar na distribuição aleatória de brindes para a terceira questão, não percebendo a impossibilidade de resolução diante dos dados insuficientes.

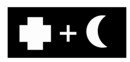
Tarefa da calculadora

Marina ganhou uma calculadora MUITO DIFERENTE e resolveu experimentá-la.
Veja a primeira conta que Marina fez e seu resultado.



Ela fez uma outra conta. Observe.



a) Qual seria o resultado da conta  ?

b) Quanto vale o símbolo  ? Responda usando desenhos.

c) Quanto vale o símbolo  ? Responda usando desenhos.

d) Dá para trocar os desenhos por números?

A produção de significados da tarefa da calculadora

Essa tarefa foi realizada pelo trio Sprite, Pepsi e Katy, pelo quarteto Seia, Poseidon, Isa e Stefanny e por Keven, que resolveu sozinho.

Analisando essas entrevistas pareceu-nos forte a presença da aritmética nas resoluções apresentadas. Houve uma necessidade de substituição dos símbolos por números e para justificar essa atitude os sujeitos utilizaram diversas explicações.

Importante ressaltar os muitos modos de produção de significados apresentados.

Na primeira entrevista, Sprite acha quanto vale o coração fazendo comparação entre as equações apresentadas, dizendo que “uma cruz mais uma lua é igual a um coração”, mas logo após muda sua forma de pensar e passa a dar valores aleatórios para cada um dos símbolos.

Mais tarde, após algumas intervenções, percebem que os valores dados por eles não são as únicas possibilidades possíveis. Pergunto se é necessário a troca somente pelos números que eles encontraram e eles parecem ter a certeza de que a substituição dos símbolos por valores numéricos é legítima.

O símbolo que não aparece em nenhuma das duas operações (estrela de quatro pontas) também parece incomodá-los bastante. Talvez por terem contato com tarefas em que todos os dados são utilizados em sua resolução e mais tarde Pepsi também tenta novamente encontrar uma utilidade para o símbolo que não é utilizado na resolução, dizendo que uma resposta que eles não conseguem encontrar deve ser o símbolo não utilizado. Pergunto sobre a troca de símbolos por números e eles respondem que é possível porque é uma calculadora e porque essa foi uma pergunta da tarefa.

Na segunda entrevista, Keven apresenta algumas hipóteses e não parece querer mudar sua forma de pensar, apesar das intervenções. Mais tarde percebemos que Keven estava preso em apenas uma operação, a de adição, apesar da calculadora apresentar as quatro operações fundamentais.

Como os primeiros entrevistados Keven também se mostra inclinado às substituições numéricas, mas também percebe que os valores dados aos símbolos não são os únicos possíveis.

Na terceira entrevista, a primeira sugestão é a de substituição dos símbolos por números, mas diferentemente das outras entrevistas, a substituição sugerida é na ordem de uma calculadora convencional.

Mais tarde levantam a possibilidade de fazer essa substituição somente por números pares e logo após passam a atribuir valores aleatórios, descartando a possibilidade anterior. Stefanny passa a pensar somente com os símbolos e percebe que os resultados das duas calculadoras são iguais, sugerindo um mesmo valor para a estrela de seis pontas.

Assim como Pepsi e Sprite, eles também se incomodam com o dado que aparentemente não será utilizado e tentam colocá-lo em alguma resposta.

Muitos significados são produzidos também em relação à substituição dos símbolos por números. Isa parece não admitir essa substituição, enquanto os demais permanecem presos a essa ideia. Ao ceder à possibilidade de pensar somente com símbolos e produzir novos significados eles conseguem resolver a tarefa.

Algumas propostas e esclarecimentos

Nessa pesquisa, não nos importávamos com a resolução matematicamente correta e sim com o que os alunos tinham a dizer. É de extrema importância que você, professor ou professora, se contenha em responder às tarefas como muitas vezes fazemos em sala de aula. As intervenções devem ser realizadas quando o professor perceber que o aluno não consegue produzir significados para aquela tarefa ou para possibilitar novas produções de significado, mas insistimos, as intervenções não devem ser utilizadas para responder a tarefa para o aluno ou explicá-las. Entendemos também que a dinâmica de sala de aula é diferente da dinâmica de uma pesquisa realizada com pequenos grupos e por isso fazemos algumas propostas e esclarecimentos para a aplicação dessas tarefas.

- Separe seus alunos em pequenos grupos para que, no início, possa intervir separadamente;
- Alerte-se para o grande número de produções de significados. Em muitos casos, podem aparecer direcionamentos que sequer suspeitamos existir. Ler atentamente as análises das tarefas que citamos resumidamente[4] poderá ajudá-lo.
- Prepare-se para a possibilidade de alguns alunos "travarem" diante das tarefas e não conseguirem produzir significado algum. Suas intervenções serão importantíssimas, mas podem não surtir nenhum efeito.
- Muitas intervenções surtirão efeito e os alunos conseguirão produzir significados ou mudar os significados produzidos.
- Aplicamos as tarefas na seguinte ordem: Tarefa da Feira de Antiguidades, Tarefa dos Bombons e Pirulitos, Tarefa das Promoções e Tarefa da Calculadora. Escolhemos essa ordem porque queríamos que o aluno começasse a trabalhar com tarefas que possuem valores numéricos e que depois passassem para tarefas que não possuem valores numéricos. Apesar dessa ordem por nós estipulada entendemos que você poderá modificá-la sem prejuízo nenhum. Entendemos, até, que deva ser

---

[4] As análises completas encontram-se na dissertação de mestrado intitulada "Uma Investigação Sobre a Produção de Tarefas Algébricas para o 6º ano do Ensino Fundamental", disponível em www.ufjf.br/mestradoedumat/dissertacoes-defendidas .

interessante partir da Tarefa da Calculadora, que não tem nenhum valor numérico.

- Sugerimos também a possibilidade de que algumas dessas tarefas sejam realizadas como tarefas de casa em que os alunos façam anotações por escrito, mais detalhadamente possível, e que essas sejam postas e discutidas em sala de aula.
- Ao conhecer as produções de significados de seus colegas cada aluno poderá produzir seus próprios significados ou aceitar a produção de significados dos outros colegas, sem a necessidade da explicação formal do professor. Caso isso não aconteça, propomos intervenções mais fortes ou o retorno dessas tarefas em outra ocasião.
- Entendemos os grandes progressos cognitivos que podem ocorrer em alguns meses, portanto sugerimos que essas tarefas sejam aplicadas ao aluno do final do 6º ano do Ensino Fundamental.
- O tempo necessário para a realização das tarefas variou bastante. Sugerimos o tempo médio de 1 hora para o desenvolvimento de cada uma.

A elaboração de tarefas

Durante a realização da pesquisa ficou muito clara a necessidade de adotarmos um referencial teórico que norteasse todo esse trabalho acadêmico e também nosso trabalho docente. As tarefas foram criadas pensando nos objetivos propostos para o trabalho e não o contrário. Nosso objetivo com as tarefas é o de propiciar ao aluno experiências que possam desenvolver seu pensamento algébrico. Como já dissemos anteriormente, as tarefas foram produzidas pensando na caracterização de pensamento algébrico proposta por Lins e Gimenez no livro Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI. Para os autores, **pensar algebricamente é produzir significados para situações em termos de números e operações aritméticas, em como igualdades e desigualdades**, para com base nisso, transformar as expressões obtidas de acordo com **três características fundamentais do pensamento algébrico**:

- **Aritmeticismo**: é a produção de significados apenas em relação a números e operações matemáticas;
- **Internalismo:** é a consideração de números e operações apenas segundo suas propriedades, não modelando números em outros objetos “físicos” ou “geométricos”;
- **Analiticidade**: são as operações sobre números não conhecidos como se fossem conhecidos.

Baseando-nos nessas três características obtemos 7 possibilidades diferentes de tarefas que podem abordar uma característica de cada ou suas combinações. Essas características do pensamento algébrico nortearam também as análises posteriores.

Algumas estratégias desenvolvidas pelos sujeitos de pesquisa revelam o uso do aritmeticismo, como por exemplo, na Tarefa da Feira de Antiguidades, quando Sprite recorre à experimentação de alguns números e descobre o preço de discos e fitas. Já na Tarefa dos Bombons e Pirulitos, ele resolve de forma diferente, pois já não atribui valores aleatórios, mas calcula o preço unitário analisando as equações dadas.

Na Tarefa da Calculadora, Keven estabelece hipóteses iniciais que revelam um pensar analítico quando diz, por exemplo, “eu tenho duas hipóteses: ou o coração tem o mesmo resultado da cruz e da meia lua juntos ou essa carinha feliz aqui não vale nada”.

Essa elaboração de tarefas é um trabalho que pode e deve ser desenvolvido por você professor. Sugerimos que para a elaboração e análise de novas tarefas sejam levadas em consideração as características do pensamento algébrico descritas anteriormente, pois essa elaboração poderá ir ao encontro do desenvolvimento de características que nosso aluno demonstra ainda não ter desenvolvido.

Sugestões de Leitura

Alsina i Pastells, A. (2009). **Desenvolvimento de competências matemáticas com recursos lúdicos-manipulativos para crianças de 6 a 12 anos.** Trad. de Vera Lúcia de Oliveira Dittrich. Curitiba: Base Editorial.

Loth, M. H. M. (2011) **Uma Investigação Sobre a Produção de Tarefas Aritméticas para o 6º ano do Ensino Fundamental.** Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Juiz de Fora. Disponível no site www.ufjf.br/mestradoedumat/dissertacoes-defendidas .

Ramos, M. R. (2011) **Uma Investigação Sobre a Produção de Tarefas Algébricas para o 6º ano do Ensino Fundamental.** Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Juiz de Fora.
Disponível no site www.ufjf.br/mestradoedumat/dissertacoes-defendidas .

Referências

Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. (1997). **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. (Primeiro e Segundo Ciclos). Brasília: MEC/SEF.

Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. (1998). **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. (Terceiro e Quarto Ciclos). Brasília: MEC/SEF.

Lins, R. C. **A framework for understanding what algebric thinking is.** Thesis (Phd). University of Nottingham, Nottingham, 1992.

Lins, R. C. **Um quadro de referência para se entender o que é pensamento algébrico.** MEC/INEP -1993.

Lins, R. C.; Gimenez, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI.** Campinas, Brasil: Papirus, 1997(a).

Lins, R. C. **A diferença como oportunidade para aprender.** In: XIV ENDIPE, 2008, Porto Alegre. Trajetórias e processos de ensinar e aprender: sujeitos, currículos e culturas. Porto Alegre : EdiPUCRS, v. 3. p. 530-550, 2008.

Oliveira, R. **Pensando algebricamente antes da 7ª série: Uma outra perspectiva sobre os processos de construção do conhecimento.** Rio de Janeiro, GEPEM, 1998, p. 82 a 107.

Silva, A. M. **Sobre a dinâmica da produção de significados para a matemática.** Tese de Doutorado em Educação Matemática. Rio Claro, Brasil: IGCE/UNESP, 2003.

Usiskin, Z. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: A. F. Coxford & A. P. Shulte, **As Idéias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1995

ANEXOS

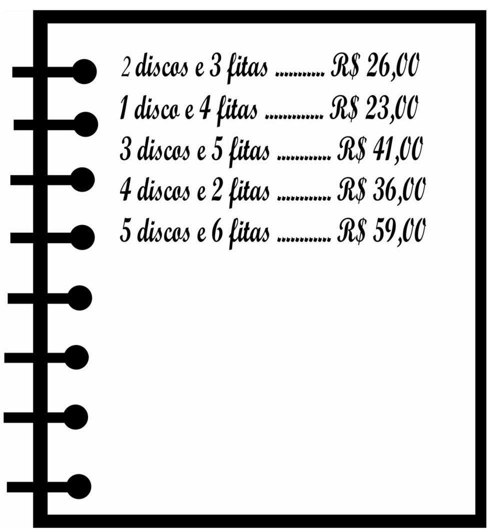
ANEXO 1

Tarefa da feira de antiguidades

A escola de João está promovendo uma feira de antiguidades para que as turmas arrecadem dinheiro para uma viagem a uma cidade histórica de Minas Gerais.

Sua turma optou por montar uma barraca de vendas de discos de vinil e fitas de videocassete.

No horário destinado ao grupo de João ficar na barraca, seus outros colegas não apareceram e ele não sabia o preço que deveria vender os discos e fitas. Ao procurar pela barraca, encontrou algumas anotações, em um caderno, deixadas pelo grupo anterior. Veja.



Como sua barraca era uma das mais procuradas, ele teve que se virar!

Por que você não ajuda o João a calcular o preço de algumas compras?

O pai de Raquel, sua colega de turma, comprou 3 discos e 7 fitas. Quanto ele pagou?

O professor Carlos, que coleciona discos de vinil e filmes antigos, comprou 5 discos e 8 fitas. Quanto ele pagou?

Marília do 7º ano comprou 2 discos e 1 fita. Quanto ela pagou?

ANEXO 2

Tarefa dos bombons e pirulitos

Laura estava planejando uma festa quando recebeu um anúncio de uma loja que vende bombons e pirulitos. Veja o anúncio.

Ela começou a pensar em algumas possibilidades de compra. Ajude-a a resolver esse problema.

Quanto ela gastará se comprar 25 bombons e 20 pirulitos?

Qual será o preço de 20 bombons e 30 pirulitos?

E se eles comprarem apenas 5 bombons?

Quanto custa cada bombom? E cada pirulito?

ANEXO 3

Tarefa das promoções

Sandra é dona de uma loja e para aumentar as vendas ela está fazendo promoções em sua loja. Veja o cartaz de divulgação das promoções.

O cartaz diz que encontraremos outras promoções no interior da loja. Sandra quer estar preparada para compras diferentes das que estão no cartaz. Ajude-a.

Qual será o brinde de quem comprar 2 calças, 3 blusas e 1 jaqueta?

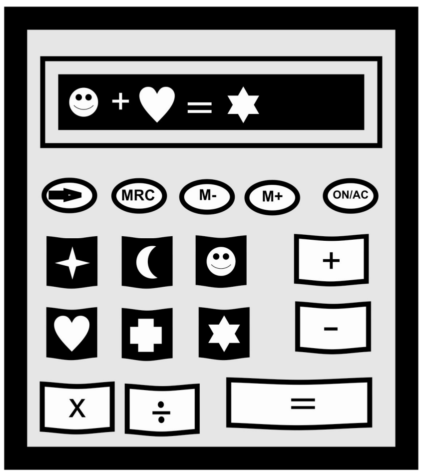
Quem comprar 1 blusa e 1 jaqueta ganha o quê?

E se a compra for apenas de 1 calça e 1 jaqueta?

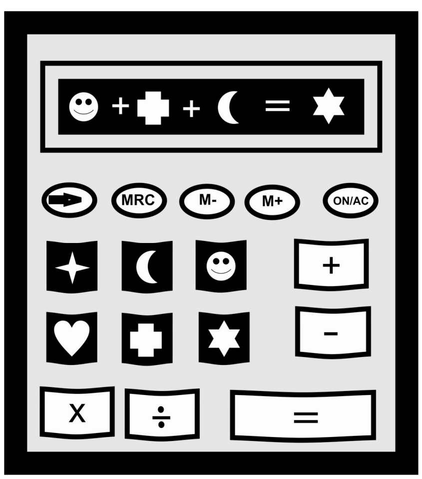
Tarefa da calculadora

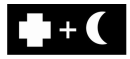
Marina ganhou uma calculadora MUITO DIFERENTE e resolveu experimentá-la.

Veja a primeira conta que Marina fez e seu resultado.



Ela fez uma outra conta. Observe.



Qual seria o resultado da conta  ?

Quanto vale o símbolo  ? Responda usando desenhos.

Quanto vale o símbolo  ? Responda usando desenhos.

Dá para trocar os desenhos por números?