MINICURSO: ATIVIDADES DE ENSINO PARA SEQUÊNCIAS DE NÚMEROS REAIS, NA PERSPECTIVA DA DISCIPLINA ANÁLISE.

Valter Costa Fernandes Junior

Juiz de Fora (MG)

Outubro, 2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

VALTER COSTA FERNANDES JUNIOR

MINICURSO: ATIVIDADES DE ENSINO PARA SEQUÊNCIAS DE NÚMEROS REAIS, NA PERSPECTIVA DA DISCIPLINA ANÁLISE.

Orientador: Prof. Dr. Orestes Piermatei Filho

Produto educacional apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Mestrado Profissional em Educação Matemática, da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

JUIZ DE FORA – MINAS GERAIS
Outubro, 2014

APRESENTAÇÃO

Aos professores e futuros professores,
o número de pesquisas em Educação Matemática relacionadas ao ensino superior é pequeno e, neste universo, o número relacionado ao ensino de Análise é menor ainda. Dessa forma, nos propusemos a elaborar um minicurso a partir de uma pesquisa de mestrado cujo tema central foi à disciplina Análise, em particular o conteúdo de sequências de Números Reais. Levantar discussões e reflexões sobre as pesquisas e concepções acerca das literaturas pelas quais nos baseamos e, também sobre nossa própria pesquisa de campo são objetivos desse minicurso. A teoria de imagens de conceito e definição de conceito é o nosso referencial teórico e, é na perspectiva desse referencial que pretendemos discutir nesse minicurso as problemáticas e possibilidades para o ensino de Análise.

Assim, para que o leitor possa inteirar-se sobre o minicurso e pensar em utilizar as atividades de ensino (apêndice II) ou questionário (apêndice I), ou basear-se na elaboração dos mesmos adaptando a outros conteúdos, busca-se neste trabalho além de descrever o minicurso em questão, trazer também, um pouco das teorias que nos serviram de referencial teórico.

Sumário

1 INTRODUÇÃO

Este produto é fruto de uma pesquisa de mestrado cujo objetivo foi verificar e analisar as modificações nas imagens de conceito de seis alunos de um curso de licenciatura em matemática. Como uma investigação voltada para o ensino superior, utilizamos como referencial teórico a teoria de imagens de conceito e definição de conceito que pertence à linha do Pensamento Matemático Avançado, que possui muitos trabalhos desenvolvidos em relação a pesquisas nesse nível de ensino. Essa linha de pesquisa é apoiada na psicologia, uma vez que, as teorias desenvolvidas visam entender os aspectos cognitivos dos alunos.

As experiências do autor como aluno da disciplina Análise, assim como o trabalho de Giraldo (2004), serviram como estímulo e motivação para a pesquisa. Primeiro, as experiências vividas no curso de Análise nos impulsionaram a investigar as problemáticas envolvendo o ensino dessa disciplina e, segundo, o contato com a teoria de imagens de conceito e definição de conceito de Tall e Vinner (1981), através do trabalho de Giraldo (2004). Percebemos, ao refletir sobre a teoria de imagens de conceito e definição de conceito, que esta poderia nos ajudar a entender alguns dos problemas relacionados à disciplina Análise.

Assim nossa pesquisa seguiu por este caminho, procurando por literaturas que investigassem o ensino de Análise, percebemos que o número dessas ainda é pequeno no universo da Educação Matemática, mesmo quando olhamos apenas para os trabalhos referentes ao ensino superior, à maioria deles refere-se ao ensino de Cálculo Diferencial e Integral.

Seguindo nossas análises, decidimos investigar as modificações nas imagens de conceito de alunos expostos a uma atividade de ensino contando com quinze questões sobre sequência de números reais. A escolha desse conteúdo aconteceu depois de verificarmos que o número de trabalhos sobre sequências de números reais é quase nulo neste nível e, também, pelo fato do mesmo ser trabalhado na Educação Básica, mesmo que de outra forma. As questões elaboradas tinham como objetivo, além de nos fornecerem dados para analisar como modificam as imagens de conceito dos alunos, romper com o ensino tradicional, onde o professor detém o saber e o “repassa” ao aluno, oportunizando aos discentes a pensarem e construírem/reconstruírem os conceitos sobre sequências de números reais.

De acordo com a teoria de imagens de conceito e definição de conceito de Tall e Vinner (1981), os conteúdos devem ser trabalhados de modo que sejam exploradas as várias representações de um determinado objeto, por exemplo, no estudo de funções podemos explorar, para além da expressão algébrica, os gráficos e tabelas. Assim qualquer proposta metodológica baseada neste referencial teórico deve levar esse aspecto em consideração.

Por outro lado, qualquer investigação baseada nas teorias de imagens de conceito e definição de conceito, segundo Tall e Vinner (1981), deve levar também em consideração o que os indivíduos pensam, quais são suas ideias sobre os objetos matemáticos em questão.

Levando em consideração esses dois aspectos, que julgamos serem os mais importantes de nosso referencial teórico (para a pesquisa realizada), elaboramos o que nós chamamos de atividades de ensino, que é formada por quinze questões sobre sequências de números reais, sob a perspectiva da disciplina Análise. Para acompanharmos as modificações nas imagens de conceito dos alunos, precisávamos primeiramente verificar o conhecimento deles. Assim elaboramos um questionário que foi aplicado antes das atividades de ensino e esse serviu para diagnosticarmos as experiências ou conhecimentos prévios dos alunos, que é chamado por Tall (1989) de raízes cognitivas.

Nossa pesquisa se qualificou como qualitativa, uma vez que olhamos para o processo, o desenvolvimento das atividades e o comportamento dos sujeitos.

A disciplina Análise possui, digamos, como característica, a formalização dos conteúdos de Cálculo e a baixa aprendizagem, dos objetos matemáticos, de uma parcela significativa dos alunos nos faz refletir sobre a forma como vem sendo lecionado e trabalhado os conteúdos. De acordo com nossa pesquisa, este baixo aprendizado pode levar alguns discentes a uma insatisfação e até mesmo rejeição em relação à disciplina Análise. Dessa forma, também decidimos descrever e analisar o processo de formalização dos conteúdos por parte dos alunos e também suas reações e impressões frente à disciplina.

Assim o minicurso elaborado é uma forma de discutir e difundir tanto as pesquisas que basearam nossos estudos, quanto a nossa própria. Neste caso destacam-se as pesquisas de: Otero-Garcia (2011); Amorim (2011); Bolognezi (2006); Brito (2010); Moreira; Cury e Vianna (2005); Pasquini (2007); Reis (2001);

Tall e Vinner(1981); Tall (1989); Pinto (2002); Giraldo (2004) e; Cornu (1981). As sete primeiras são investigações sobre o ensino de Análise, enquanto as outras são pesquisas que usam teorias do Pensamento Matemático Avançado.

2 Referência teórica

2.1 A Educação Matemática no Ensino Superior

Se a área Educação Matemática é um campo científico e profissional novo, o interesse, de uma parcela significativa, em investigar os processos de ensino-aprendizagem no ensino superior é ainda mais recente.

Com a massificação do Ensino Superior, decorrente do aumento da oferta de vagas, surge a necessidade de uma reforma no sistema de educação para atender a essa demanda – durante muito tempo o ingresso no ensino superior era privilégio de uma elite, onde problemas no ensino e aprendizagem eram “insignificantes” – que de uma forma geral, traz defasagens do Ensino Médio.

As pesquisas voltadas para as questões dos processos de ensino e aprendizagem de Matemática no Ensino Superior se intensificam no Brasil por volta do ano 2000.

Outro aspecto interessante que observamos na história é que as ações governamentais sempre tiveram como foco o ensino básico. As questões relacionadas ao ensino superior eram sobre a formação dos professores, para que esses atendessem melhor o público do ensino básico.

A quantidade de pesquisas sobre os processos de ensino e aprendizagem no Ensino superior, ainda é pequeno se comparado com os dois níveis do ensino básico. Mas vemos alguns avanços, como a teoria do Pensamento Matemático Avançado, que é referência para a maioria dos trabalhos, inclusive para o nosso, como veremos a seguir.

2.2 Ensino de Análise

Através da pesquisa de Otero-Garcia (2011) notamos que são recentes as questões sobre a temática envolvendo o ensino de análise e, de acordo com o mesmo, os primeiros trabalhos publicados no Brasil foram o de Reis (2001) e o de Pinto (2001).

Utilizando ainda o trabalho de Otero-Garcia (2011), podemos notar que a quantidade de trabalhos relacionados à Educação Matemática no Ensino Superior é muito pequena e, neste grupo temático as produções sobre o ensino de Análise é menor ainda, as preocupações maiores tem sido com as disciplinas de Cálculo.

O trabalho de Otero-Garcia (2011) nos mostra que a demanda pelos cursos de Álgebra Linear e, principalmente, de Cálculo, presentes em quase todos os cursos de ciências exatas, seria a causa pelas poucas pesquisas sobre o ensino de Análise, que possui uma baixa demanda.

A pesquisa de Otero-Garcia (2011) também nos mostrou como se deu a constituição da disciplina de Análise, conforme os padrões atuais, nos cursos de matemática da USP e do IGCE da UNESP. O autor analisou ementas, bibliografias e objetivos, levantando questionamentos sobre esses três aspectos, principalmente ao terceiro.

Essa dissertação foi muito importante em nossa leitura, pois, por meio dela, pudemos identificar e analisar o que vem sendo feito sobre o ensino de Análise no Brasil. Abrange quase todas as pesquisas realizadas, com este foco, até o presente momento, pois é um trabalho recente. Assim decidimos seguir as literaturas levantadas e mapeadas por Otero-Garcia (2011).

2.3 Sobre Imagens de Conceito e Definições de Conceito

Nosso primeiro contato com as teorias relacionadas às imagens de conceito foi com o trabalho de Giraldo (2004), que utilizou as teorias do Pensamento Matemático Avançado, em especial as de David Tall, para solidificar uma proposta de investigação onde a utilização do computador é um apoio para o processo de ensino-aprendizagem. Assumindo a postura de aceitação dos conflitos gerados pelo uso do computador, em vez de ignorá-los, Giraldo analisa a influência desses conflitos nas imagens de conceito dos alunos, sobre o conteúdo de derivadas.

Nossa pesquisa terá como referência as teorias de imagem de conceito e raiz cognitiva de David Tall. Não é nossa pretensão encerrar as discussões sobre as questões envolvendo o ensino de Análise, mas acreditamos que o entendimento do processo de desenvolvimento das imagens de conceito pode contribuir para um ensino significativo da disciplina Análise. Como dito no capítulo anterior, existem outras variáveis que poderiam ser investigadas por outros referenciais, mesmo que essas não pareçam ser tão decisivas no ensino superior quanto no ensino básico.

Quando abordamos um conteúdo matemático, os alunos podem trazer algumas ideias associadas aos objetos em questão, essas são oriundas de experiências passadas dentro ou fora da matemática e do ambiente escolar. Por exemplo, um aluno ao se deparar com sequências e séries, pode se lembrar de progressões aritméticas e geométricas. Nota-se que, neste exemplo o aluno evocou conceitos da própria matemática, mas em muitos casos experiências externas influenciam o conceito que os discentes possuem sobre um determinado objeto matemático.

Essas ideias podem aparecer na mente de um individuo de diferentes formas, ou seja, é tudo que se pensa sobre o objeto. Por exemplo, para a maioria das pessoas quando falamos em quadrado, à ideia que se tem é a imagem de um quadrilátero com os quatro lados iguais e os quatro ângulos retos, mas se pedirmos uma descrição muitos ignoram o fato dos ângulos terem que ser retos. De acordo com Tall e Vinner (1981, p. 2), essas ideias são chamadas de imagem de conceito, na qual definem da seguinte forma: “Usaremos o termo *imagem de conceito* para descrever a estrutura cognitiva total que está associada com o conceito, incluindo todas as imagens mentais, propriedades e processos associados”. (tradução nossa) (grifo do autor).

Vamos usar o exemplo acima para explicar o conceito de conflito, definido por Tall e Vinner (1981). Alguns alunos descrevem o quadrado como um quadrilátero que possui os lados iguais, não levando em consideração a característica dos ângulos. Mas ao verem a figura de um losango – em que os pares de ângulos opostos possuem medidas de 60º e 120º, respectivamente – encontram uma contradição entre a forma visual e a descrita, pois mesmo que não descrevem, eles sabem que os ângulos tem que possuir uma determinada forma, que é ter medida de 90º. Esta incoerência entre duas imagens de conceito, relacionada a um mesmo objeto, é definida por Tall e Vinner (1981) por fator de conflito potencial. Tall; Vinner (1981, p. 153) definem da seguinte forma: “vamos chamar uma parte da imagem de conceito ou definição de conceito que pode conflitar com outra parte da definição de conceito ou imagem de conceito, um *fator de conflito potencial*”. (Tradução nossa) (grifo do autor).

Tall e Vinner (1981) chamam de fator de conflito cognitivo a situação em que dois ou mais fatores de conflitos potenciais são evocados simultaneamente.

A ideia de conflito é de suma importância na teoria de imagens de conceito, concordamos com Tall e Vinner (1981) quanto à posição dos professores frente a situações de conflito, onde sugerem o uso dessas a favor do processo de ensino-aprendizagem, ao invés de as evitarem. Quando há o conflito entre duas ou mais imagens de conceito, relacionadas a um mesmo objeto, temos a oportunidade de ampliarmos as imagens de conceitos de nossos alunos. Como no exemplo acima, quando confrontado a descrição com a imagem visual, os alunos notam que para definirmos um quadrado é necessário ter em mente a característica de seus ângulos e não somente a de seus lados. Assim ocorre uma transformação na imagem de conceito dos alunos, referente ao quadrado, enriquecendo-a, internalizando propriedades que antes geravam conflitos. Notemos que ao formar uma imagem de conceito para quadrado, como um quadrilátero que possui todos os lados iguais e todos os ângulos retos, os discentes podem enxergar o quadrado como um caso particular de retângulo, o que no nível de educação básica essa dedução não é trivial.

A forma de palavras pela qual um indivíduo expressa certo conceito é definido por Tall; Vinner (1981) como definição de conceito. De acordo com Giraldo (2004), a definição de conceito do individuo é parte de sua imagem de conceito e pode ou não ser coerente com a definição formal. A introdução de um conteúdo matemático no ensino superior tem acontecido, geralmente, por meio da apresentação de definições formais. Assim, muitos alunos decoram a definição formal e a única ideia que possuem sobre um determinado assunto será esse jogo de palavras que é a definição, ou seja, essa definição formal será parte de sua imagem de conceito. O aluno também pode ter em mente uma definição de conceito incoerente com a definição formal e essa também será parte de sua imagem de conceito, pois é uma estrutura cognitiva ligada a um objeto matemático.

Notamos que é importante, para o enriquecimento da imagem de conceito de um individuo, que a abordagem pedagógica seja feita através de várias representações, com o intuito de dar ao aluno a oportunidade de assimilar outras ideias associadas ao objeto matemático. Giraldo (2004) comenta que uma única representação não é suficiente para explorar todas as ideias sobre um determinado objeto matemático, somente com a utilização e relação entre as várias representações é que os alunos terão a oportunidade de enriquecer suas imagens de conceito. Por exemplo, ao falar de funções com alunos, muitos pensam somente na lei de formação, pois a prática de ensino foca muito a parte algébrica, e não relacionam esta lei de formação com as outras representações matemáticas para função. Muitos até sabem manipular a expressão algébrica, como por exemplo, determinar as raízes de uma função, mas não sabem o significado geométrico dessas. Assim, pelo que sugere a teoria de imagens de conceito, o professor deveria trabalhar o conteúdo de funções explorando as várias representações, algébricas, gráficas e por meio de tabelas.

Um exemplo da Análise é quando trabalhamos o conceito de limite, de acordo com Amorim e Reis (2013) apesar dos alunos dominarem as técnicas e realizarem os cálculos envolvendo limite a grande maioria não possui uma compreensão ampla sobre este conceito. Mesmo quando trabalhada a definição formal, os alunos não conseguem relacioná-la com a representação gráfica e o seu significado.

2.4 Raiz Cognitiva

A ideia de raiz cognitiva elaborada por Tall (1989) é fundamental para uma proposta pedagógica centrada na teoria de imagem de conceito. Diagnosticar o conhecimento e as experiências dos alunos, em relação a um determinado conteúdo, seria o passo inicial para construirmos um plano de curso. Por exemplo, ao se aborda os conteúdos de sequência e série, um bom caminho poderia ser iniciar o trabalho com progressões aritméticas e geométricas, uma vez que, são conteúdos vistos no ensino médio. Por mais que os alunos não compreendam esses conceitos completamente, eles trazem experiências sobre estes conteúdos.

A introdução de um conteúdo matemático deve ser feita através de ideias que darão suporte para o aluno desenvolver suas imagens de conceito, que podem ser de fácil compreensão para o aluno. Essas ideias (ou conhecimentos prévios) são chamadas por Tall (1989) de raízes cognitivas.

Segundo Giraldo (2004), o conceito de raiz cognitiva foi se desenvolvendo em trabalhos posteriores e, com a formulação da ideia de *unidades cognitivas*, este passou a ser considerado como um caso especial de unidades cognitivas. Giraldo apresenta a definição de *unidades cognitivas*:

> [...] Tony Barnard e David Tall (BARNARD & TALL, 1997) introduziram o termo **unidade cognitiva** para designar *uma porção da imagem de conceito em que um indivíduo é capaz de focar atenção conscientemente em um determinado momento* [...]. (GIRALDO, 2004, p. 16) (grifo do autor).

De acordo com Giraldo (2004),

> [...] A ideia de raiz cognitiva foi desenvolvida em trabalhos posteriores. Após a formulação da teoria de unidades cognitivas, a noção de raiz cognitiva foi reformulada nestes termos, como um tipo especial de unidade cognitiva que se relaciona com o conhecimento familiar ao estudante que está começando um novo desenvolvimento conceitual, permitindo a conexão entre seus conhecimentos inicias e aqueles a serem desenvolvidos. Em (TALL, 2000), o autor redefine raiz cognitiva como *uma unidade cognitiva que tem significado para o estudante no estágio em questão, e ainda assim contém as sementes de expansões cognitivas para definições formais e desenvolvimento teórico posterior* [...]. (GIRALDO, 2004, p.22) (grifo do autor).

Comprimir informações matemáticas, gerando novas estruturas através da relação de dois ou mais elementos matemáticos é, segundo Giraldo (2004), de suma importância na teoria de *unidades cognitivas*. O aluno deve ser capaz de construir uma estrutura cognitiva relacionando dois ou mais conhecimentos prévios e, trabalhar com esta em sua forma geral, ou, quando precisar, reduzi-la à sua forma primária, olhando para os conhecimentos prévios que a constituíram.

Estimular os alunos a relacionar ideias prévias, que façam sentido para eles (ideias já compreendidas), construindo novas estruturas a respeito de um conteúdo matemático, passa a ser então o principal foco de uma metodologia baseada na noção de raiz cognitiva.

A noção de raiz cognitiva tem sido utilizada, geralmente, em ambientes educacionais com computadores. Nossa intenção foi adaptá-la a uma metodologia que não dependa do computador. Assim, para nós, raiz cognitiva são ideias ou conteúdos pelos quais os alunos tenham familiaridade e, por meio desses consigam expandir suas imagens de conceito. Assim voltando ao exemplo acima, iniciar o ensino de sequências e séries por meio de progressões aritméticas e geométricas pode ser bom pela familiaridade dos alunos com esses conteúdos e, a partir desses podemos expandir os estudos para sequências de números reais.

3 Minicurso

Segue abaixo a descrição do minicurso com os objetivos, características, plano de ação, procedimento metodológico e guia de trabalho.

3.1 Objetivos

Este produto tem como objetivo geral discutir e difundir tanto as pesquisas que basearam nossos estudos, quanto a nossa própria, ampliando as reflexões a respeito do Ensino de Análise e das teorias de imagens de conceito.

Apresentar as teorias de Imagens de Conceito e Definição de Conceito e, a influência dessas na elaboração e análise de atividades envolvendo sequências de números Reais, assim como mostrar a pesquisa de campo realizada com alunos de licenciatura em matemática, são os objetivos principais desse trabalho. A ideia é fazer com que os participantes reflitam tanto na visão do aluno, quanto na de professor, nas possibilidades que estas teorias podem nos fornecer. Difundindo, entre os educadores, as concepções presentes na pesquisa e discutir a papel dessa disciplina na formação de futuros professores de matemática.

3.2 Plano de ação

O plano de ação do minicurso será distribuído em quatro tempos, totalizando 4 horas.

1º tempo - 60 min: será feita uma apresentação expositiva de algumas concepções do Pensamento Matemático Avançado, em especial a teoria de imagens de conceito e definição de conceito. Também apresentaremos, neste momento, algumas literaturas sobre o processo de ensino-aprendizagem na disciplina Análise e algumas considerações a respeito da pesquisa de campo realizada com alunos de licenciatura em matemática.

2° tempo - 60 min: neste segundo momento, os participantes serão distribuídos em grupos (dois ou três participantes), para que possam trocar ideias e vivenciar algumas questões propostas no questionário e na Atividade de Ensino para sequências de números reais e, posteriormente, desenvolver a atividade nas salas de aula. Diante das questões os participantes serão incentivados a resolvê-las, como se fossem alunos de um curso de Análise e, depois pensar em novas situações e/ou até mesmo mudanças ou adaptações que pudesse explorar novos aspectos.

3° tempo - 90 min: no terceiro momento, cada grupo compartilhará com os demais o seu pensamento e suas resoluções, e poderemos comparar e discutir a relação entre as ideias presentes nas resoluções e as definições formais, para que possam perceber aspectos de nosso referencial teórico. Discutiremos também possibilidades para o ensino de sequências, na perspectiva da disciplina de Análise.

4º tempo – 30 min: os participantes terão a oportunidade de trocar experiências sobre suas vivências como alunos e/ou professores da disciplina Análise. É um momento rico para debatermos a importância dessa disciplina e seus aspectos, como, por exemplo, a forma como é trabalhado os conteúdos em cursos de formação de professores de matemática.

3.3 Procedimento metodológico do minicurso

Este minicurso resume-se em apresentar concepções e trabalhos acerca das teorias sobre imagens de conceito e definição de conceito que fazem parte da linha de pesquisa do Pensamento Matemático Avançado, familiarizando os participantes com o tema e partilhando uma experiência de campo realizada com alunos de licenciatura em Matemática, onde foi trabalhado o conteúdo de sequências de números reais. Os recursos didáticos utilizados serão: projetor multimídia e computador.

A abordagem escolhida para desenvolver este minicurso foi à troca de experiências, entre os autores e os participantes e vice-versa, visto que os participantes serão convidados a trabalhar em grupos realizando atividades sobre sequências de números reais e refletindo sobre elas. E depois, abrindo espaço para os participantes exporem suas ideias a todos os outros, formando um só grupo, incentivando a troca de experiências e os questionamentos a respeito da possibilidade de levar as teorias de imagens de conceito para as salas de aula de Análise. Discutir também o papel da disciplina Análise na formação de professores é outro aspecto importante que será trabalhado, por meio de relatos de experiência dos participantes, um assunto um tanto polêmico, mas que é levantado em algumas literaturas.

3.4 Guia de trabalho

1ª etapa: Apresentação e comentários

Nesta etapa, serão apresentadas as considerações teóricas explicitadas acima, com o objetivo de familiarizar os participantes com o Pensamento Matemático Avançado, em especial Imagens de Conceito e Definição de Conceito, enquanto uma alternativa tanto metodológica, quanto reflexiva para os educadores matemáticos. Para finalizar este primeiro momento, será apresentado também algumas considerações sobre a pesquisa de campo.

A exposição, nesta primeira etapa, será baseada nos autores cujas teorias fundamentam a futura dissertação de mestrado – Ensino de Análise, Pensamento Matemático Avançado, Imagens de Conceito e definição de Conceito – e a pesquisa de campo realizada. Além dos slides utilizados na apresentação teórica, será oferecido aos participantes o questionário e as atividades de ensino que foram trabalhados na pesquisa de campo, objetivando o suporte e auxílio para que os participantes possam refletir as possibilidades da utilização da teoria de Imagens de Conceito em seus ambientes de trabalho.

2ª etapa: Trabalho em grupos: possibilidades para o ensino de Análise

Como atividade prática, este minicurso vai propor aos participantes que se distribuam em grupos, para que possam realizar algumas atividades e vivenciar uma discussão em torno das mesmas, podendo levantar outras abordagens e sugestões para o trabalho com sequências na disciplina Análise.

3ª etapa: Debate sobre atividades de ensino

Os grupos serão convidados a partilhar entre si as experiências que elaboraram, sejam elas inéditas ou mesmo alguma situação que, por ventura, já tenham trabalhado como alunos ou como professores.

A troca de experiências é fundamental, pois todos terão a oportunidade de sair do minicurso com algumas ideias, para que possam iniciar um trabalho, ou mesmo prosseguir com ele, tendo as teorias do Pensamento Matemático Avançado como referencial.

4ª etapa: Debate sobre o ensino de Análise

Neste momento será proposto aos participantes que relatem suas experiências e o que pensam sobre a disciplina Análise, abrindo espaço para o debate a respeito do lugar dessa disciplina no currículo de cursos de licenciatura em Matemática.

REFERÊNCIAS

AMORIM, L. I. F. **A (re)construção do conceito de Limite do Cálculo para a Análise: Um estudo com alunos do curso de Licenciatura em Matemática.** Ouro Preto – MG, 2011. 133 f. Dissertação de Mestrado. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Universidade Federal de Ouro Preto.

AMORIM, L. I. F.; REIS, F. S. A (re)construção do conceito de limite do Cálculo para a Análise. In: FROTA, M. C. R.; BIANCHINI, B. L.; CARVALHO, A. M. F. T. (Orgs.). **Marcas da Educação Matemática no Ensino Superior.** 1. ed. Campinas, SP: Papirus, 2013. p. 277-306.

BOLOGNEZI, R. A. L. **A Disciplina de Análise Matemática na Formação de Professores de Matemática para o Ensino Médio.** Curitiba – PR, 2006. 101 f. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Educação. Pontifícia Universidade Católica do Paraná.

BRITO, A. B. **Questionando o Ensino de Conjuntos Numéricos em disciplinas de Fundamentos de Análise Real: Da abordagem dos livros didáticos para a sala de aula em cursos de Licenciatura em Matemática.** Ouro Preto – MG, 2010. 84 f. Dissertação de Mestrado. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Universidade Federal de Ouro Preto.

CORNU, B. Apprentissage de la notion de limite: modèles spontanés et modèles propres. **Actes du Cinquième Colloque du Groupe Internationale PME.** Grenoble - France, 1981. p. 322-326. Disponível em: http://www.er.uqam.ca/nobel/r21245/mat7191_fich/Cornu_1981.pdf Acesso em: 3 abr. 2013.

GIRALDO, V. **Descrições e Conflitos Computacionais:** O Caso da Derivada. Rio de Janeiro – RJ, 2004. 221 p. Tese (Doutorado em Ciências). COPPE. UFRJ.

MOREIRA, P. C.; CURY, H. N.; VIANNA, C. R. Por que análise real na licenciatura? **ZETETIKÉ,** Campinas – SP, v.13, n. 23, p. 11 – 42, 2005. Disponível em: http://www.researchgate.net/publication/228618120_Por_que_anlise_real_na_licenciatura/file/60b7d5149fdcaa877e.pdf Acesso em: 16 jul. 2013.

OTERO-GARCIA, S. C. **Uma Trajetória da Disciplina de Análise e um Estado do Conhecimento sobre o seu Ensino.** Rio Claro – SP, 2011. 500 p. Dissertação de Mestrado. Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho.

PASQUINI, R. C. G. **Um tratamento para os números reais via medição de segmentos: uma proposta, uma investigação.** Rio Claro – SP, 2007. 209 p. Tese de Doutorado. Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista.

PINTO, M. M. F. Educação Matemática no Ensino Superior. In: **Dossiê: a pesquisa em Educação Matemática.** Educação em Revista, Belo Horizonte: Universidade Federal de Minas Gerais, 2002.

REIS, F.S. **A Tensão entre Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise:** A visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos. Campinas – SP, 2001. 302 p. Tese de Doutorado. Faculdade de Educação – UNICAMP.

TALL, D. Concept Images, Computers, and Curriculum Change. In: **For the Learning of Mathematics.** Warwick, 1989, p. 37 – 42. Disponível em: http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1989e-conim-genorg-flm.pdf Acesso em: 24 mar. 2013.

TALL, D.; VINNER, S. Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. In: **Educational Studies in Mathematics**. Dordrecht, vol. 3, n. 12, p. 151-169, 1981.

APÊNDICES

Apêndice I – Questionário.

1. Você já cursou a disciplina Análise na Reta ou é a primeira vez? Se já cursou, descreva sua(s) experiência(s) anterior(es) ou atual.

2. Ainda para os que já cursaram a disciplina em outra oportunidade, qual a importância que vocês vêm nesta disciplina?

3. Você já estudou o conteúdo de progressões aritméticas e geométricas? Conseguiria caracterizar os dois tipos de progressões? Lembra-se do somatório de cada uma dessas progressões?

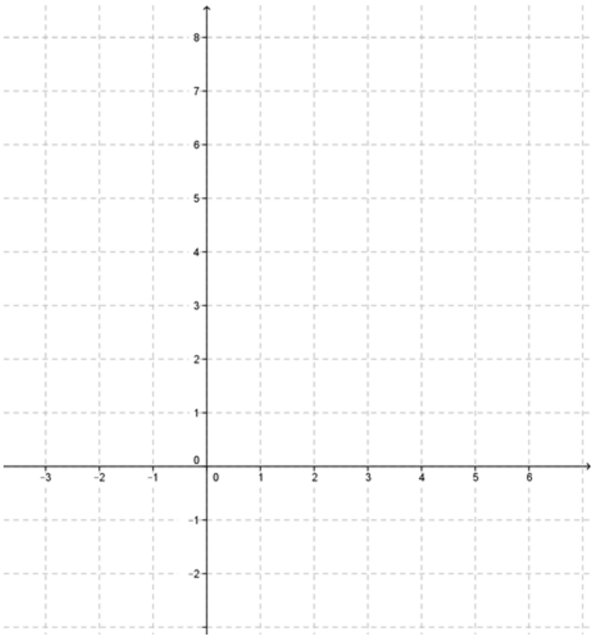
4. Você já estudou sequências? Qual o conceito que você possui sobre esses conteúdos matemáticos? Conseguem relacionar esses conteúdos com algum outro já estudado?

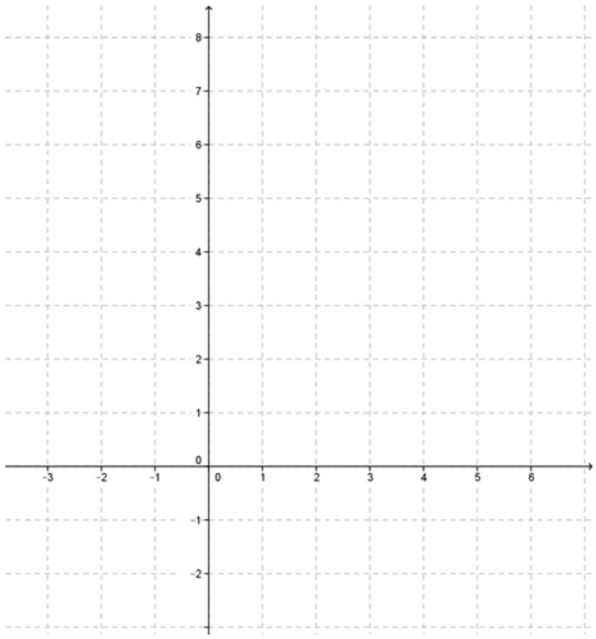
Apêndice II – Atividades de Ensino.

1. Observe as progressões aritméticas e geométricas abaixo.

$$(1,3,5,7,...),\ (16,8,4,2,1,...)$$

i) Faça o gráfico dessas progressões no plano cartesiano.





ii) As sequências acima são limitadas? Justifique.

2. A sequência $\left(a,a^2,a^3,...,a^n,...\right)$ é limitada inferior e/ou superiormente para $a>1$? E para $0<a<1$?

3. Seja (x_n) uma sequência tal que $\lim x_n = a$ e $\lim x_n = b$, qual é a relação entre a e b? Justifique.

4. Dado o número real $a<-1$, formemos a sequência $\left(a^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Se $\mathbb{N}'\subset\mathbb{N}$ é o conjunto dos números pares e $\mathbb{N}''\subset\mathbb{N}$ é o conjunto dos números ímpares, as subsequências $\left(a^n\right)_{n\in\mathbb{N}'}$ e $\left(a^n\right)_{n\in\mathbb{N}''}$ são limitadas? E a sequência $\left(a^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$?

5. Seja $\left(x_{n_k}\right)_{n_k \in \mathbb{N}'}$ uma subsequência de $\left(x_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$, com $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$. Se $\left(x_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para o número a, o que podemos dizer sobre o $\lim x_{n_k}$? Justifique.

6. Existe uma relação entre a convergência de uma sequência e o fato da mesma ser ou não limitada. Qual seria esta relação? Justifique.

7. No problema 6, se a sequência for monótona muda alguma coisa na relação estabelecida? Justifique.

8. Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente. Dentre os resultados já conhecidos por você, quais nos garante a veracidade da afirmação acima?

9. Utilize resultados já conhecidos para encontrar e explicar o limite de $\frac{1}{n}$ e de a^n, para $0 < a < 1$?

10. Seja $\lim x_n = a$. Se $a > b$, conseguiremos encontrar um n_0 onde para todo $n > n_0$ tenhamos $x_n > b$? Justifique.

11. Seja $\lim x_n = \lim y_n = a$. Se $x_n < z_n < y_n$ para todo n suficientemente grande, qual será o valor do $\lim z_n$? Justifique e demonstre o resultado.

12. Por meio da definição, calcule o $\lim\left(x_n . y_n\right)$ em cada uma das situações abaixo.

i) Para $x_n = \frac{1}{n}$ e $y_n = sen\left(x\right)$.

ii) Para $x_n = \frac{1}{n}$ e $y_n = n^2$.

13. Seja a sequência $\left(x_1, x_2, ..., x_n, ...\right)$ onde $x_1 > \sqrt{a}$ e $x_{n+1} = \left[x_n + \frac{a}{x_n}\right]/2$. Calcule o limite dessa sequência.

14. Demonstre os resultados abaixo.

i) Se $\lim x_n = +\infty$ e (y_n) é limitada inferiormente então $\lim(x_n + y_n) = +\infty$.

ii) Se $\lim x_n = +\infty$ e existe $c > 0$ tal que $y_n > c$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então $\lim(x_n . y_n) = +\infty$.

iii) Se $x_n > c > 0$, $y_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim(y_n) = 0$ então $\lim \frac{x_n}{y_n} = +\infty$.

iv) Se (x_n) é limitada e $\lim y_n = +\infty$ então $\lim \frac{x_n}{y_n} = 0$.

15. Com suas palavras explique o que é uma sequência convergente? Quais características assume uma sequência convergente?