UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
Pós-Graduação em Educação Matemática
Mestrado Profissional em Educação Matemática

Vitor Rezende Almeida
Cristiane de Andrade Mendes
Amarildo Melchiades da Silva

PRODUTO EDUCACIONAL

Curso de Serviço em Álgebra Linear: o estudo das transformações lineares

Juiz de Fora (MG)

2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
Pós-Graduação em Educação Matemática
Mestrado Profissional em Educação Matemática

Vitor Rezende Almeida
Cristiane de Andrade Mendes
Amarildo Melchiades da Silva

PRODUTO EDUCACIONAL

Curso de Serviço em Álgebra Linear: o estudo das transformações lineares

Produto Educacional apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Juiz de Fora (MG)
2013

SUMÁRIO

Apresentação

Caro(a) Professor(a) de Matemática,

Este trabalho é fruto da pesquisa de mestrado intitulada “Álgebra Linear como um Curso de Serviço para a Licenciatura em Matemática: o estudo das transformações lineares” (ALMEIDA, 2013) e parte integrante dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática. Neste trabalho, iremos apresentar nossa proposta de ensino do conteúdo transformações lineares para a formação matemática de estudantes da Licenciatura em Matemática, entendendo a disciplina Álgebra Linear como um Curso de Serviço.

O interesse de desenvolver esta pesquisa emergiu no interior do NIDEEM/UFJF (Grupo de Investigação, Desenvolvimento e Estudos em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora), no subgrupo de estudo constituído pelos professores do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora Amarildo Melchiades da Silva e Cristiane de Andrade Mendes além dos licenciados em Matemática Aretha Fontes Alves e, por mim, Vitor Rezende Almeida.

Ao longo destes 2 anos (e mais alguns meses) de pesquisa, estivemos empenhados em refinar nosso olhar acerca da formação matemática do professor de Matemática, da constituição de Cursos de Serviço e sobre a produção de significados para noções em Álgebra Linear. Ao longo de toda esta pesquisa, estivemos orientados pelas noções do Modelo dos Campos Semânticos proposto pelo professor Romulo Campos Lins (1994, 1999, 2001, 2012) e sustentados por seus pressupostos.

A elaboração desta proposta de Curso de Serviço, contou com a participação de nossos orientadores e da pesquisadora Aretha, que realizou sua pesquisa de mestrado direcionada à investigação das características de um Curso de Serviço em Álgebra Linear para uma Licenciatura em Matemática, mas com foco no estudo dos espaços vetoriais (cf. ALVES, 2013). Acreditamos que esses dois conceitos – espaços vetoriais e transformações lineares são os conceitos principais a serem trabalhados em Álgebra Linear.

Esperamos que este material didático e nossa proposta de ensino do conteúdo transformações lineares, entendendo a disciplina Álgebra Linear como um Curso de Serviço, sejam utilizados por professores que compartilham nossas crenças acerca da formação matemática dos licenciandos em Matemática. Temos ainda a expectativa de que estes professores ampliem o material, produzindo tarefas de acordo com sua experiência, seus interesses e principalmente, com a realidade de seus alunos em sala de aula.

A você professor de Matemática e formador de professores de Matemática, fica o convite para nos auxiliar a concretizar nossa proposta.

A Formação Matemática do Professor de Matemática

Ao procurar pelos programas oficiais atuais que tratam da formação dos professores de Matemática do Brasil, deparamo-nos com as Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura, o Parecer 1302/2001 (BRASIL, 2001). Este documento tem o objetivo de "servir como orientação para melhorias e transformações na formação do Bacharel e do Licenciado em Matemática" (BRASIL, 2001, p.1).

Segundo o Parecer 1302/2001, os cursos de Bacharelado e de Licenciatura em Matemática têm objetivos explicitamente distintos. De acordo com esse documento, os cursos de Bacharelado em Matemática "existem para preparar profissionais para a carreira de ensino superior e pesquisa, enquanto os cursos de Licenciatura têm como principal objetivo a formação de professores para a Educação Básica" (BRASIL, 2001, p.1).

Assim, para esclarecer as distinções entre os bacharelados e as licenciaturas, este documento estabelece o "Perfil do Formando" de cada modalidade. Enquanto o perfil do formando do bacharelado em Matemática reside na "sólida formação de conteúdos de Matemática e em uma formação que lhes prepare para enfrentar os desafios das rápidas transformações da sociedade, do mercado de trabalho e das condições de exercício profissional" (BRASIL, 2001, p.3), o perfil do formando da Licenciatura consiste nos seguintes elementos:

Perfil do Formando da Licenciatura em Matemática

(i) visão de seu papel social de educador e capacidade de se inserir em diversas realidades com sensibilidade para interpretar as ações dos educandos;

(ii) visão da contribuição que a aprendizagem da Matemática pode oferecer à formação dos indivíduos para o exercício de sua cidadania;

(iii) visão de que o conhecimento matemático pode e deve ser acessível a todos, e consciência de seu papel na superação dos preconceitos, traduzidos pela angústia, inércia ou rejeição, que muitas vezes ainda estão presentes no ensino aprendizagem da disciplina.

(BRASIL, 2001, p.3)

Em relação às habilidades do bacharel e do licenciado em Matemática, as seguintes competências são comuns:

Competências Comuns dos Licenciando em Bacharelando em Matemática

a) capacidade de expressar-se escrita e oralmente com clareza e precisão;
b) capacidade de trabalhar em equipes multidisciplinares;
c) capacidade de compreender, criticar e utilizar novas ideias e tecnologias para a resolução de problemas;
d) capacidade de aprendizagem continuada, sendo sua prática profissional também fonte de produção de conhecimento;
e) habilidade de identificar, formular e resolver problemas na sua área de aplicação, utilizando rigor lógico-científico na análise da situação-problema;
f) estabelecer relações entre a Matemática e outras áreas do conhecimento;
g) conhecimento de questões contemporâneas;
h) educação abrangente necessária ao entendimento do impacto das soluções encontradas num contexto global e social;
i) participar de programas de formação continuada;
j) realizar estudos de pós-graduação;
k) trabalhar na interface da Matemática com outros campos de saber.

(BRASIL, 2001, p.3-4).

As seguintes características competem apenas aos licenciandos em Matemática:

Competências esperados aos Licenciandos em Matemática

(a) elaborar propostas de ensino-aprendizagem de Matemática para a educação básica;

(b) analisar, selecionar e produzir materiais didáticos;

(c) analisar criticamente propostas curriculares de Matemática para a educação básica;

(d) desenvolver estratégias de ensino que favoreçam a criatividade, a autonomia e a flexibilidade do pensamento matemático dos educandos, buscando trabalhar com mais ênfase nos conceitos do que nas técnicas, fórmulas e algoritmos;

(e) perceber a prática docente de Matemática como um processo dinâmico, carregado de incertezas e conflitos, um espaço de criação e reflexão, onde novos conhecimentos são gerados e modificados continuamente;

(f) contribuir para a realização de projetos coletivos dentro da escola básica.

(BRASIL, 2001, p.4)

Dentre as competências referentes aos licenciandos em Matemática, destacamos os itens (d) e (e), pois convergem com nossas preocupações centrais acerca da formação do professor de Matemática. Para nós, o professor de Matemática em sua prática profissional não deve orientar-se apenas por fórmulas ou técnicas, mas sim pela preocupação em utilizar metodologias alternativas de ensino que propiciem aos alunos uma oportunidade de leitura e ampliação dos modos de produção de significados deles, considerando a prática docente como um processo dinâmico, onde não só os conteúdos e noções matemáticos estão envolvidos.

Entre as orientações para a proposta de currículo, que podem ser distribuídas ao longo do curso de cada Instituição de Ensino Superior nas modalidades de formação, observamos que a disciplina Álgebra Linear está presente em ambas. Entretanto, corroborando com as ideais de Linardi (2006), acreditamos que tanto no bacharelado, quanto na licenciatura em Matemática, essas disciplinas são ministradas somente sob uma perspectiva: a do matemático, pois:

> No Brasil, grande parte dos futuros professores de matemática realiza, em sua formação, cursos sobre Cálculo, Álgebra Abstrata, Álgebra Linear, Análise, Espaços Métricos, Topologia e assim por diante, ministrados quase sempre na perspectiva da Matemática do matemático, ou seja, o que ainda se espera dos alunos-professores é a reprodução dos modos definicional, internalista e simbólico de produção de significado. (LINARDI, 2006, p. 187).

E ainda:

> [...] as disciplinas matemáticas nos cursos de licenciatura, mesmo aquelas voltadas para a educação básica, são tratadas de forma internalista, excessivamente rigorosa e preocupadas com o uso preciso da linguagem matemática, não considerando as necessidades específicas da formação e da futura prática docente. (PROCÓPIO, 2011, p.23).

Procurando por uma filiação que tratasse a Álgebra Linear em uma perspectiva diferente da atual, deparamo-nos com a noção de Curso de Serviço. A princípio, a terminologia Curso de Serviço era utilizada para caracterizar apenas as disciplinas de conteúdo matemático voltadas para áreas específicas como, por exemplo, Cálculo para Geologia (CABRAL & CATAPANI, 2003) ou Álgebra Linear para a Ciência da Computação (SILVA, 1999), só para citar dois exemplos de pesquisas no Brasil.

Entretanto, para esta pesquisa, utilizaremos a terminologia Curso de Serviço para denotar "as disciplinas que tenham como foco a formação do professor de matemática, mas que não se limitam a desenvolver conteúdo matemático. Ela se propõe a intervir, também, na sua formação didático-pedagógica" (SILVA, 2011, p.2), visto que consideramos que as perspectivas de um curso de Álgebra Linear voltado para o Bacharel em Matemática são distintas de um curso de Álgebra Linear para a Licenciatura em Matemática.

O Modelo dos Campos Semânticos

> Onde estão meus alunos? Não sei, mas preciso saber. Não por eles, mas por mim. Se eu não conseguir falar com eles, só me resta espiá-los desde aqui, onde nós estamos, à busca de uma *fatalidade*, uma *coincidência* que faça algum deles vir até onde nós esperamos. (LINS, 2011, p. 324, grifos do autor).

A citação acima, retirada do artigo *Ensaio sobre como Macunaíma me ajudou a falar sobre Educação Matemática,* traz à tona uma de nossas preocupações centrais em relação ao papel do professor de Matemática em sua sala de aula. Lins acredita que o centro da prática do professor de Matemática é a "leitura do que os alunos estão dizendo/fazendo de modo que a interação possa acontecer" (LINS, 2004c, tradução nossa). Mas como realizar essa leitura dos alunos com a intenção de interagir em seus processos de aprendizagem e não apenas ficar esperando alguma “coisa” acontecer? Assim, sentindo a necessidade de um suporte teórico e epistemológico para embasar nossas leituras dos processos de produção de significados dos indivíduos, falaremos um pouco sobre as noções do referencial teórico que orientou toda esta pesquisa, o Modelo dos Campos Semânticos.

O Modelo dos Campos Semânticos (MCS) começou a ser concebido pelo professor Romulo Campos Lins em sua tese de doutoramento em Educação Matemática intitulada: *A framework for understanding what algebraic thinking is* (Um quadro de referência para entender o que é pensamento algébrico) e concluída na University of Nottingham (UK) em 1992. Neste trabalho, Lins procurou estabelecer uma caracterização para o pensamento algébrico.

Algumas das noções do atual modelo já estavam presentes em sua tese de doutoramento, mas não de forma explícita. Em junho de 1994, Lins publicou na revista *Dynamis* (BLUMENAU, v.1, n.7) o primeiro artigo enfatizando o MCS: *O Modelo Teórico dos Campos Semânticos: uma análise epistemológica da Álgebra e do pensamento algébrico*.

O MCS foi caracterizado por Lins como sendo:

> [...] uma simples, ainda que poderosa, ferramenta para pesquisa e desenvolvimento na educação matemática [...] para

> guiar práticas de sala de aula e para habilitar professores a produzir uma leitura suficientemente fina, assim útil, do processo de produção de significados em sala de aula. (LINS, 2001, p. 59).

Mais recentemente, fortalecendo sua crença de que o MCS é exatamente uma ferramenta para a pesquisa e desenvolvimento da Educação Matemática, Lins caracterizou o modelo como constituído por “um pequeno número de noções e nas relações entre elas, [...] o Modelo apenas existe enquanto está em movimento, em ação” (LINS, 2012).

Com a intenção de esclarecer algumas destas noções do MCS, apresentamos um breve glossário das ideias centrais do Modelo dos Campos Semânticos, que utilizamos ao longo de nossa leitura da produção de significados dos sujeitos envolvidos nesta pesquisa.

Significado e Objeto

Segundo Lins, o “significado de um objeto é aquilo que efetivamente se diz a respeito de um objeto no interior de uma atividade[1]” Já objeto, “é aquilo para que se produz significados” (LINS, 2012, p.28, grifo do autor). Como consequência disso, dizemos que um indivíduo produziu significados quando ele produziu ações enunciativas a respeito de um objeto no interior de uma atividade.

No MCS, um objeto pode ser qualquer coisa sobre a qual uma pessoa está falando, seja ela "concreta", por exemplo, uma mesa em nossa frente, ou "simbólica", como, por exemplo, palavras e desenhos em um livro. Desta forma, os objetos são constituídos na produção de significados, durante a fala dos sujeitos, no interior de uma atividade.

Para o MCS, “não existe o significado de um “objeto” sem referência ao contexto em que se fala de um objeto” (LINS, 2012, p. 28, grifo do autor). Para Lins, o significado é sempre uma noção local.

Sendo assim, o “significado de um objeto, no interior de uma atividade, não é tudo que poderia ser dito a respeito da coisa da qual se fala (nesta ou em

[1] Sobre a noção de atividade cf. (ALMEIDA, 2013).

outra atividade)" (LINS, 2012, p.28). Isto remete a situações nas quais determinados modos de produzir significado fazem sentido, são legítimos, e em outros não, pois "qualquer dada cultura aceita alguns, mas nunca todos os modos possíveis de produzir significados" (LINS e GIMENEZ, 1997, p. 143).

Conhecimento

"Um conhecimento consiste em uma crença-afirmação (o sujeito enuncia algo em que acredita) junto com uma justificação (aquilo que o sujeito entende como lhe autorizando a dizer o que diz)" (LINS, 2012, p.12).

Para Lins, o conhecimento existe apenas e simplesmente na enunciação e deixa de existir quando ela termina. Já a justificação, não é uma justificativa ou uma explicação para o que um sujeito diz, mas sim, aquilo em que o sujeito acredita que o autoriza a dizer o que diz. Essa autoridade não tem a função de explicar, ela apenas empresta legitimidade ao que o sujeito diz.

A legitimidade da qual falamos "[...] se refere a que quando falamos algo – e agimos de acordo com o que dizemos – acreditamos que é *legítimo* dizer o que estamos dizendo" (LINS, 2004, p. 116).

Portanto, afirmamos que o conhecimento é do "domínio da enunciação, e não do enunciado. Livros de matemática não possuem conhecimento; são "apenas" resíduos de enunciação daqueles que os produziram." (OLIVEIRA, 2011, p. 18). Por isso, acreditamos na existência do sujeito do conhecimento (aquele que o produz, o enuncia), pois dessa forma podemos distinguir, por exemplo, o conhecimento de um matemático e de uma criança quando afirmam que 2 + 3 = 3 + 2. Neste caso, a justificativa da criança provavelmente seria diferente da justificativa do matemático e por isso, na perspectiva do MCS, eles produziriam conhecimentos diferentes.

Resíduo de Enunciação e Texto

Segundo Lins, um resíduo de enunciação é "algo com que me deparo e que acredito ter sido dito por alguém" (LINS, 2012, p.27). Considerando isso, um resíduo de enunciação pode ser:

> “[...] sons, rabiscos de todo tipo, arranjos de coisas, gestos, imagens, construções. Mas também a borra de café ou chá no fundo da xícara, o resultado do lançamento de moedas ou varetas, a disposição dos planetas no céu, [...] e assim por diante” (LINS, 2012, p.27).

Quando, no interior de uma atividade, são produzidos significados para resíduos de enunciação, tais resíduos tornam-se texto para quem produz significados para eles. Ou seja, no MCS:

> [...] um resíduo de enunciação é texto *para quem produz significado* (embora quem diga isso seja quem lê a atividade). Por isso dizermos que textos não possuem essências; e, portanto, não há o que muitos chamam de interpretações para um texto – há, sim, diferentes significados produzidos para um mesmo resíduo de enunciação. E é exatamente na/pela produção de significados para resíduos de enunciação que objetos são constituídos pelo sujeito que produz significados. Sob nossa ótica, expressões como “os significados contidos no texto” não fazem sentido; *textos* não possuem *significados*! (OLIVIERA, 2011, p.19).

Campo Semântico e Núcleo

Lins denotou a noção de campo semântico como sendo “um processo de produção de significado, em relação a um núcleo, no interior de uma atividade” (LINS, 2012, p.17).

Em outras palavras, talvez menos técnicas, um campo semântico:

> [...] é como se fosse um jogo no qual as regras (se existem) podem mudar o tempo todo e mesmo serem diferentes para os vários jogadores *dentro de limites*; que limites são estes, só saberemos *a posteriori*: enquanto a interação continua, tudo indica que as pessoas estão operando em um mesmo campo semântico (LINS, 2012, p.17, grifos do autor).

Utilizamos a noção de campo semântico para articular os processos de produção de conhecimento, produção de significados e constituição de objetos, pois é no interior de campos semânticos que se produzem conhecimento e significados e, sendo assim, objetos são constituídos.

Considerando um campo semântico como sendo um processo, segundo Vygotsky (1994), ele torna-se causa e consequência de sua própria transformação. Desta forma podemos falar de dinâmicas de processo, como visto em Silva (2003), ao definir nucleação, impermeabilização, entre outras noções que enunciaremos ao longo deste trabalho.

Ainda segundo o MCS, “o *núcleo* de um campo semântico é constituído por estipulações locais, que são, localmente, verdades absolutas, que não requerem, localmente, justificação” (LINS, 2012, p. 26, grifo nosso).

Silva (2003), após investigar a dinâmica da produção de significados em Matemática de sujeitos, considerou que “uma pessoa está operando em um Campo Semântico toda vez que ela estiver produzindo significado em relação a um núcleo no interior de uma atividade” (SILVA, 2003, p.63).

Outra coisa que Silva considerou importante em relação à noção de núcleo, é que este “não se refere a algo estático, um conjunto de coisas, e sim, a um processo que se constitui no interior de atividades e dissipa ao final delas. Em uma outra atividade, novo núcleo se constitui e esse é o processo”. (SILVA, 2003, p. 62). Assim:

> Na observação do núcleo, numa dada atividade, podemos identificar a maneira de operar dos sujeitos bem como a lógica das operações ligadas ao processo de produção de significados para um texto. As operações são o que o sujeito faz com os objetos e a lógica é o que garante que ele pode fazer. (SILVA, 2003, p. 62)

Dificuldades

De acordo com o MCS, as dificuldades são caracterizadas como sendo ou um *limite epistemológico* ou um *obstáculo epistemológico*.

Segundo Lins, um limite epistemológico é “a impossibilidade de um aluno produzir significado para uma afirmação ou um resíduo de enunciação, numa certa direção, devido à sua maneira de operar cognitivamente” (LINS, 1993). Já um obstáculo epistemológico, seria “o processo no qual um aluno operando dentro de um campo semântico, poderia potencialmente produzir significado para uma afirmação, mas não produz”. (LINS, 1993).

Processo Comunicativo

Na perspectiva do MCS, Lins relaciona um processo comunicativo que considera a existência de três elementos (autor-texto-leitor) numa dinâmica. Segundo Lins:

> Quem produz uma enunciação é o autor. O autor fala sempre na direção de um leitor, que é constituído (produzido, instaurado, instalado, introduzido) pelo o autor. Quem produz significado para um resíduo de enunciação é o leitor. O leitor sempre fala na direção de um autor, que é constituído (produzido, instaurado, instalado, introduzido) pelo o leitor (LINS, 2012, p.14).

Esse um leitor ou um autor é, na perspectiva do MCS, um *interlocutor*, isto é, uma direção na qual se fala. Além disso, "quando falo na direção de um interlocutor é porque acredito que este interlocutor diria o que estou dizendo e aceitaria/adotaria a justificação me que autoriza a dizer o que estou dizendo" (LINS, 2012, p.19). O diagrama abaixo representa tal situação:

AUTOR → ENUNCIAÇÃO → INTERLOCUTOR

Assim, em situação de comunicação, o autor produz uma enunciação para a qual um leitor produziria significados. Já o leitor, por meio de outra enunciação, constitui aquilo que o um autor disse em texto, produzindo assim, uma nova enunciação na direção de um autor, e assim sucessivamente.

O AUTOR → TEXTO ⇢ UM LEITOR

UM AUTOR ⇢ TEXTO → O LEITOR

Durante um processo comunicativo, ao "[...] colocarmos incessante e alternadamente na posição de o autor e de o leitor em cada um destes processos, terminamos por fundir as duas imagens, e os pontilhados desaparecem, restando a sensação psicológica de comunicação efetiva (LINS, 1999, p.82, grifos nosso). Considerando este processo, o diagrama seria:

O AUTOR ⟶ TEXTO ⟶ O LEITOR

Cabe resaltar que, se temos apenas uma “sensação psicológica de comunicação efetiva”, o que ocorre quando nos comunicamos uns com os outros e, por muitas vezes, somos capazes de nos de entender? O que ocorre, na concepção de Lins, é:

> A convergência se estabelece apenas na medida em que [autor e leitor] compartilham interlocutores, na medida em que dizem coisas que o outro diria e com autoridade que o outro aceita. É isto que estabelece um *espaço comunicativo*: não é necessária a transmissão para que se evite a divergência. (LINS, 1999, p.82, grifo nosso).

Fundamentados nesta visão de processo comunicativo, é que analisamos a produção de significados para as ações enunciativas dos sujeitos envolvidos em nossa pesquisa. Sendo assim, nossa análise é o resultado da nossa produção de significados para os resíduos de enunciação produzidos pelos sujeitos de pesquisa e esta análise será posta para o leitor deste trabalho produzir os seus significados em relação aos nossos resíduos de enunciação.

Ao colocarmos o MCS “em ação”, tivemos a oportunidade de realizar uma leitura da produção de conhecimentos e significados e observar os processos de constituição de objetos de nossos sujeitos de pesquisa, com um embasamento teórico e epistemológico do MCS.

Impermeabilização

Ao investigar a dinâmica do processo de produção de significados dos sujeitos envolvidos em sua pesquisa de doutorado, Silva (2003) destacou um fato que foi recorrente em sua investigação: a constituição do enunciado em texto, por parte dos sujeitos de pesquisa. Para Silva, foi esse o momento responsável pelo desencadeamento da constituição de objetos, núcleos, entre outras coisas. Segundo Silva, a produção de significados dos sujeitos, na interação face a face, revelou uma característica do processo de impermeabilização na produção de significados que influenciou fortemente a dinâmica e que chamou a atenção pela sua recorrência. Em relação ao termo impermeabilização*,* Silva denotou como sendo “a postura do sujeito de não compartilhar novos interlocutores, diferentes daqueles para o qual ele estava voltado, de não se propor a produzir significados numa outra direção” (SILVA, 2003, p.129-130).

Estranhamento e Descentramento

Oliveira (2012), em sua tese de doutoramento em Educação Matemática, recriou dentro do quadro teórico do MCS, as ideias de *estranhamento* e *descentramento*, com a intenção de compor elementos para uma discussão dos processos de formação do professor de matemática e de sua leitura do curso de extensão investigado em sua pesquisa.

Sobre o termo *estranhamento*, Oliveira (2011) considera como sendo um processo que “pode ser indicado ao imaginarmos uma situação em que existe, de um lado, aquele para quem uma coisa é natural – ainda que estranha – e de outro aquele para quem aquilo não pode ser dito.” (LINS apud OLIVEIRA, 2011, p.14). Já a noção de *descentramento* é considerada como sendo o processo “que passa pelo esforço de tornar-se sensível ao estranhamento do outro, de entender do que o outro fala, almejando que modos de produção de significados sejam compartilhados, que se crie um espaço comunicativo.” (OLIVEIRA, 2011, p.144).

Corroborando com Oliveira (2011), consideramos importante que o professor, em sua formação profissional, tenha a oportunidade de vivenciar e discutir o *estranhamento*. Dessa forma, esta seria uma forma de provocar no professor de Matemática um *descentramento*; ou seja, ao vivenciar o *estranhamento* e problematizá-lo, pretendemos com isso criar oportunidades para que o professor se dê conta de que seus alunos também experimentam o *estranhamento*. Sendo assim, “com o movimento de *descentramento* pretende-se que o professor de Matemática evite naturalizar seus modos de produção de significados [...]” (OLIVEIRA, 2011, p.142-143).

Por fim, acreditamos que as noções propostas pelo MCS e sua aplicação em sala de aula podem disponibilizar ao professor de Matemática ferramentas para que ele possa realizar uma leitura mais fina da produção de significados do que seus alunos estão dizendo e fazendo, com a intenção de que a interação e a intervenção possam acontecer. Isto é, para que ocorra uma partilha de modos de produção de significados entre alunos e professores.

As Características do Curso de Serviço em Álgebra Linear para uma Licenciatura em Matemática

Em nossa pesquisa de mestrado estivemos orientados pela questão de investigação "*quais características que deve possuir a disciplina Álgebra Linear para que ela seja considerada um Curso de Serviço para uma Licenciatura em Matemática?*".

Com a revisão da literatura que fizemos, pudemos constatar a carência de pesquisas que tratam especificamente desta formação, bem como a preocupação de se implantar metodologias alternativas ao modelo tradicional de ensino, principalmente quando elas levam a uma mudança de postura do professor e dos alunos durante a formação dos professores de Matemática.

Uma possibilidade que verificamos é que podemos entender a disciplina Álgebra Linear para uma Licenciatura em Matemática não apenas como sendo um curso de Matemática, mas sim de Educação Matemática, no qual, além das noções matemáticas a serem trabalhadas, exista a preocupação em que o estudante vivencie novos pressupostos e diferentes propostas didática e metodológica relacionados aos processos de ensino e aprendizagem. Para que isto ocorra acreditamos que seja necessário deslocar o foco do ensino, para direcioná-lo à aprendizagem do aluno.

Ainda em nossa revisão da literatura, pudemos constatar a existência de diferentes modos de produção de significados para um mesmo problema (resíduo de enunciação). Esta constatação foi observada em outras pesquisas que utilizaram o MCS como referencial teórico e que tiveram como estudo algumas noções relacionadas à Álgebra Linear, como Silva (1997, 2003), Oliveira (2002) e Julio (2007). Este fato reforça nossa crença de que, em um Curso de Serviço em Álgebra Linear, os objetivos do ensino devem ser direcionados à leitura da produção de significados dos alunos e não à exposição de conceitos pelo professor, já que para um mesmo resíduo de enunciação (definição, teorema, tarefa) os alunos possivelmente produzem significados em direções diferentes daquelas esperadas pelo professor.

Após a aplicação e análise de uma entrevista com três alunos de um curso de pós-graduação em Educação Matemática, constatamos a influência da postura e da metodologia de ensino do professor que leciona disciplinas de conteúdo matemático. Essas concepções, sejam elas um modelo tradicional de ensino ou a concepção epistemológica desse professor são, por muitas vezes, levadas para a prática profissional dos licenciandos, como verificamos nas falas dos sujeitos de pesquisa.

Assim, fundamentado pelo MCS, por nossa revisão da literatura e pela entrevista piloto, projetamos e executamos um Seminário de Álgebra Linear para dois alunos de uma Licenciatura em Matemática. Após a aplicação, análise e leitura das produções de significados dos alunos, verificamos que a metodologia alternativa que utilizamos ao longo do seminário mostrou-se funcional para apresentação, discussão e análise das principais ideias em Álgebra Linear, visto que os alunos foram capazes de produzir significados para as noções a eles apresentadas. Além disso, ao direcionarmos a prática do professor para a leitura da produção de significados dos alunos, ao invés de direcioná-la para a exposição do conteúdo em Álgebra Linear, acreditamos ter minimizado o que consideramos ser o assincronismo dos processos de ensino e aprendizagem, muito comum em nossas universidades.

Outro ponto fundamental oriundo da execução do Seminário foi que as noções propostas pelos MCS, a utilização de tarefas familiares e não-usuais e os exercícios de descentramento realizados pelo professor mostraram-se fundamentais para realização de suas leituras das falas/fazeres dos alunos. Foi somente a partir dessas leituras que fomos capazes de identificar as falas para interlocutores, a constituição de objetos, as lógicas das operações, além de criar a possibilidade de interação e intervenção efetiva no processo de produção de significados dos alunos, num sentido de sugestão de modos diversos de produção de significados.

Entendemos a Matemática - em particular a Álgebra Linear - como um resíduo de enunciação para o qual os alunos podem ou não produzir significados. Neste sentido, para nós, o papel do professor de Matemática é o de sugerir tarefas e ler a produção de significados de seus alunos. Esta é a interação que esperamos do professor de Matemática com seus estudantes nos processos de ensino e aprendizagem que ocorrem em sala de aula.

Neste momento, considerando nossa revisão da literatura, nosso referencial teórico e nossas duas saídas a campo, procuramos explicitar características que, para nós, deve possuir a disciplina Álgebra Linear para que ela seja considerada um Curso de Serviço para uma Licenciatura em Matemática.

A **primeira característica** é a mudança da postura do professor que leciona a disciplina Álgebra Linear para uma Licenciatura em Matemática. Não faz sentido, para nós, o professor trabalhar numa direção que ele próprio não considere legítima. Desta forma, acreditamos que, para que haja mudança na forma que a disciplina Álgebra Linear é lecionada para alunos de uma licenciatura, é fundamental que o professor da disciplina esteja aberto para mudanças em suas concepções metodológicas e epistemológicas relacionadas aos processos de ensino e aprendizagem, visto que seu papel como formador ultrapassa a matemática do matemático.

A **segunda característica** está relacionada ao fato de considerarmos este Curso de Serviço em Álgebra Linear como sendo a primeira experiência do licenciando em Matemática com as noções de estrutura em Álgebra. Acreditamos que seja suficiente trabalhar todas as noções da Álgebra Linear para os espaços vetoriais IR^n sobre o corpo IR com as operações usuais e de seus respectivos subespaços. A inserção de outros espaços vetoriais, como o espaço vetorial das matrizes, das funções, dos polinômios, outros corpos e operações não usuais, devem ser utilizadas pelo professor como ampliação dos modos de produção de significados para as noções e não como objetivo do estudo neste Curso de Serviço.

No caso particular das transformações lineares em Álgebra Linear, essas ampliações dos modos de produção de significados estão relacionadas, por exemplo, à importância de trabalhar os diferentes significados para as noções de "transformação", "função" e de "linearidade", pois acreditamos que os alunos produzam outros significados para essas noções e à importância de se discutir as noções de transformações lineares injetoras, sobrejetoras e bijetoras, não só na perspectiva dos resultados em Álgebra Linear, mas também num sentido amplo de funções. Dessa forma, o professor ao ensinar a Álgebra Linear e, em particular, as transformações lineares, tem que direcionar o ensino ao futuro professor de Matemática e não ao matemático profissional.

A **terceira característica** que consideramos fundamental é que o objetivo de um Curso de Serviço de Álgebra Linear para uma Licenciatura em Matemática deve ser direcionado a ampliar os modos de produção de significados dos alunos e não apenas para abordar conceitos e teoremas. Neste contexto, o papel do professor será propor tarefas e realizar leituras dessas produções de significados de seus alunos, com a intenção de identificar o que seus alunos estão fazendo/dizendo e realizar intervenções de acordo com suas concepções epistemológicas. A mediação e a intervenção são essenciais para criar em uma sala de aula de Matemática um espaço comunicativo, onde a interação e a produção de significados são negociadas.

Como **quarta característica**, indicamos que um dos papéis deste Curso de Serviço também é oferecer uma oportunidade ao licenciando de ampliar sua formação matemática. Para isto, cabe ao professor reconhecer a Álgebra Linear como estrutura matemática, na qual suas definições estão relacionadas à matemática do matemático e estimular a discussão de situações de estranhamento em sala de aula. É fundamental que o futuro professor de matemática vivencie estas situações de estranhamento frente às definições da Álgebra Linear, visto que, em sua futura prática profissional, seus alunos irão, possivelmente, vivenciar estranhamentos semelhantes ao se depararem com a Matemática de seu nível escolar. Assim, é importante criar no futuro professor de Matemática uma sensibilidade em entender o que seu aluno diz/faz, com a intenção de interagir nos processos de ensino e aprendizagem em Matemática de seus alunos.

Por fim, a **quinta característica** está relacionada com as noções do MCS e com os processos de ensino e aprendizagem das noções em Álgebra Linear. Para nós, o papel do professor, ao ensinar as noções em Álgebra Linear, é estimular a produção de significados e sugerir certos de produção de significados aos alunos. É neste sentido que consideramos a aplicação de tarefas familiares e não-usuais e as discussões relacionadas ao estranhamento frente às definições matemáticas como sendo um campo fértil para um ambiente de discussão e ampliação de modos de produção de significados na formação matemática do licenciando. Em consonância com nosso referencial teórico, os licenciandos estarão aprendendo as noções em Álgebra Linear quando estiverem internalizando modos legítimos de produção de significados para estas noções. Assim, pensamos uma formação matemática para o professor de matemática de forma ampliada, mas sempre num sentido de modos de produção de significados e não de conteúdos.

Fundamentado nessas características, acreditamos que a formação pedagógica do licenciando em Matemática aconteça de forma simultânea à sua formação matemática. Pensamos no professor de Matemática como um indivíduo que deve possuir uma formação matemática, mas em sua prática profissional, suas ações devem ser direcionadas a educar seus alunos por meio da Matemática e não direcioná-las para exposição de conteúdos.

Opções Metodológicas

A dinâmica e opções que iremos enunciar a seguir foram utilizadas, em grande parte, em nossa proposta de Seminário em Álgebra Linear com nossos sujeitos de pesquisa/alunos, de pseudônimos Simba e Euclides. Assumimos, desde o início do Seminário, que nossas concepções epistemológicas estavam sustentadas nas noções do MCS.

Dessa forma, em nossa proposta de Curso de Serviço em Álgebra Linear, assumimos as seguintes posições metodológicas:

(1) Tirar o foco da exposição dos conceitos e colocá-lo na produção de significados dos alunos, em relação aos elementos envolvidos em Álgebra Linear, em nosso caso, nas transformações lineares;

(2) Retirar o aluno de sua posição passiva frente ao processo de ensino e de aprendizagem, incentivando e oferecendo a ele oportunidades de participação efetiva e dando voz a eles, para termos condições de realizar uma leitura de sua produção de significados, com o objetivo de interagir e intervir em suas dificuldades de aprendizagem (limites e obstáculos epistemológicos);

(3) Utilizar, ao longo do Curso de Serviço, procedimentos metodológicos alternativos àqueles exclusivamente expositivo-explicativos;

(4) Trazer a tona oportunidades nas quais o futuro professor vivencie situações de *estranhamento* quando se depara com a Matemática Acadêmica. Essa preocupação é justificada pela nossa crença de que seus futuros alunos, possivelmente, também viverão situações semelhantes quanto estiverem em contato com a Matemática em seu nível de ensino. Dessa forma, acreditamos que esse futuro professor sentir-se-á sensível ao realizar sua leitura da produção de significados de seus alunos e que exercícios de *descentramento* aconteçam. Em outras palavras, acreditamos que a influência da postura e da

metodologia de ensino do professor que leciona disciplinas de conteúdo matemático nos curso de Licenciatura, são levadas para a futura prática profissional do licenciando em Matemática.

Em relação específica ao conteúdo da Álgebra Linear, acrescentamos ainda as seguintes posições metodológicas do Seminário:

(5) A importância de trabalhar com questões familiares e não-usuais;

(6) A preocupação com a justificação das ideias matemáticas;

(7) A consciência da existência de diferentes modos de produção de significados para um mesmo conceito ou problema (resíduo de enunciação) em Álgebra Linear.

Depois de assumidas essas posições metodológicas, temos condições de elaborar a estrutura de Curso de Serviço em Álgebra Linear voltado para Licenciatura em Matemática. Em nossa proposta de Curso de Serviço em Álgebra Linear, com foco no estudo das transformações lineares, sugerimos trabalhar os conceitos em 5 fichas:

Ficha de Trabalho 1 - (FT 1)

Definição e Propriedades das Transformações Lineares

Esta primeira ficha contém a definição e as propriedades básicas das Transformações Lineares. Além desses elementos, as tarefas propostas nesta ficha não têm como expectativa propor aos alunos que realizem as "contas" para mostrar, por exemplo, que uma dada função entre dois espaços vetoriais é ou não uma transformação linear, mas sim de provocar neles uma necessidade de se discutir a teoria.

Ficha de Trabalho 2 - (FT 2)

Teorema da Existência e Unicidade de uma Transformação Linear

A segunda ficha traz o enunciado e uma demonstração de um importante teorema relacionado ao estudo das transformações lineares: o teorema que nos permite afirmar que toda transformação linear fica completamente determinada se conhecermos sua atuação nos elementos de uma base do domínio. O interessante nesta ficha é que, em cada trecho da demonstração, desenhamos balões nos quais os sujeitos de pesquisa deveriam expor sua produção de significados relacionada aos passos da demonstração até determinado ponto. Nossa intenção é que os sujeitos produzam significados para cada passagem da demonstração, provocando neles uma sensação de estranhamento frente aos elementos ali postos de forma direta, visto que, ao construir uma demonstração, um matemático, por muitas vezes, constrói sua escrita fundamentado em técnicas de demonstração.

Ficha de Trabalho 3 - (FT 3)

Núcleo e Imagem de uma Transformação Linear

Nesta terceira ficha, enunciamos as definições de Núcleo e Imagem de uma transformação linear e particularidades desses conceitos em relação aos espaços vetoriais do domínio e contradomínio da transformação linear. Fechamos a ficha com o importante teorema do Núcleo e da Imagem. Cabe ressaltarmos que as tarefas dessa ficha tiveram o objetivo de propiciar aos alunos uma experiência com as “contas” que realizamos em Álgebra Linear.

Ficha de Trabalho 4 - (FT 4)

Transformações Lineares Injetoras, Sobrejetoras, Bijetoras

A quarta ficha contém a teoria relacionada às transformações lineares injetoras, sobrejetoras, bijetoras e o isomorfismo. Ao longo das aulas em que trabalhamos esta ficha, fizemos questão de discutir a relação entre a Álgebra Linear e o estudo das funções no ensino médio. Os próprios sujeitos mostraram-se surpresos ao verificar que a teoria proposta (as definições de injetividade, sobrejetividade e bijetividade) era, em certo sentido, a mesma que eles haviam estudado na educação básica. Novamente, as tarefas propostas nesta ficha não tinham apenas a característica de propor aos sujeitos os algoritmos de resolução, mas também a intenção de promover o diálogo sobre a teoria e as justificações das ideias matemáticas.

As duas fichas que enunciamos a seguir não foram trabalhadas em nossa proposta de Seminário em Álgebra Linear. Entretanto, apesar de considerarmos extremamente significativa a aplicação destas fichas, não pudemos trabalhá-la com os sujeitos, devido à incompatibilidade de horários entre pesquisadores e sujeitos de pesquisa.

Ficha de Trabalho 5 - (FT 5)

Isomorfismo e Transformações Lineares Inversas

Esta ficha não foi trabalhada integralmente em nossa proposta de Seminário de Álgebra Linear para alunos da Licenciatura (apenas a noção de isomorfismo foi discutido com os alunos), mas ao considerarmos que a formação matemática do licenciando deve ser direcionada à sua futura prática profissional, nesta ficha, o aluno terá a oportunidade de relacionar alguns dos conceitos específicos das transformações lineares, com os conceitos de funções reais, como a função inversa, estudados principalmente no ensino médio.

Ficha de Trabalho 6 - (FT 6)

Transformações no Plano e no Espaço

Nesta ficha de trabalho, enunciamos as principais transformações entre espaços vetoriais entre IR^n e IR^m, com n e m variando de 1 até 3 pois, nestes casos, será possível o aluno fazer analogias e produzir significados relacionadas às ideais trabalhadas em Geometria e Geometria Analítica, como as noções de ponto, reta, plano, dimensão, perpendicularidade, rotação, translação, projeção, dentre outras. Acreditamos que esta é uma outra forma de sugerir novos modos de produção de significados para as noções em transformações lineares na Álgebra Linear.

Como sugestão para trabalhar estas fichas com os alunos de uma Licenciatura em Matemática, iremos enunciar na próxima seção a dinâmica que utilizamos em nossa proposta de Seminário em Álgebra Linear, com a intenção de exemplificar o que entendemos como sendo uma dinâmica de um Curso de Serviço.

A Dinâmica do Curso de Serviço

A dinâmica que iremos enunciar a seguir foi utilizada, em grande parte, em nossa proposta de Seminário em Álgebra Linear com nossos sujeitos de pesquisa/alunos, de pseudônimos Simba e Euclides. Assumimos, desde o início do Seminário, que nossas concepções epistemológicas estavam sustentadas nas noções do MCS.

Considerando que ao longo do Seminário desejávamos utilizar procedimentos metodológicos alternativos àquele exclusivamente expositivo-explicativos, a dinâmica do nosso Seminário em Álgebra Linear era a seguinte: no início da aula, os alunos eram convidados a ler e produzir significados para a teoria proposta na ficha de trabalho. Após a leitura individual dos alunos, o professor propunha aos alunos que expusessem sua produção de significados para os resíduos de enunciação em questão. A partir desse momento, começava um processo de comunicação e interação entre os sujeitos do grupo, mesmo quando, em alguns momentos, os sujeitos produziam significados e constituíam objetos distintos para o mesmo resíduo de enunciação. Toda essa discussão tinha o objetivo, para nós, de buscar criar um espaço comunicativo durante os encontros.

Após essa discussão inicial, os alunos eram convidados a trabalhar com as tarefas propostas em cada seção das fichas de trabalho. Essas tarefas, como dito anteriormente, foram pensadas e construídas para nos possibilitar realizar uma leitura do que os alunos estão produzindo de significados em relação aos resíduos de enunciação dos conceitos em Álgebra Linear. Acreditamos também que, por considerarmos essas tarefas como sendo familiares e não-usuais, os alunos tenham a necessidade de ampliar sua forma de produzir significados para os conceitos, visto que em grande parte das tarefas, os alunos não deveriam simplesmente repetir um algoritmo, mas sim, fazer uso de seus conhecimentos produzidos para justificar suas escolhas e resultados obtidos.

Ao final de cada encontro, deixávamos algumas tarefas para que Euclides e Simba resolvessem em casa, pois pudemos perceber que estavam motivados e envolvidos na atividade do Seminário. Essas questões eram discutidas no início do encontro seguinte e eram, posteriormente, analisadas pelo pesquisador responsável por aquela ficha de trabalho. Caso houvesse alguma consideração a ser feita pelo pesquisador em relação às resoluções dos alunos, retomávamos essas questões na aula seguinte. Este fato ocorreu várias vezes, principalmente em relação às justificações de suas respostas e ao rigor necessário na escrita de soluções de questões em Álgebra Linear.

Outro recurso que utilizamos ao longo do Seminário foi o uso do quadro para demonstrações de alguns teoremas e construção de exemplos e contraexemplos relacionados com a teoria em Álgebra Linear. Todos os envolvidos, pesquisadores e sujeitos de pesquisa, tinham a liberdade de ir ao quadro e expor sua produção de significados. Em geral, estes momentos foram extremamente ricos para todos, pois além de oferecer ao pesquisador uma oportunidade de participar como mediador do processo de produção de significados dos sujeitos, permitiam aos sujeitos uma forma mais ampla de compartilhar seus modos de produção de significados e interagir com os participantes do Seminário, além de inverter algumas características oriundas do ensino tradicional vigente, no qual, em grande parte, é conduzido pelo professor expondo o conteúdo e o aluno copiando. Agora era o aluno que expunha suas produções de significados e o professor/pesquisador que copiava e discutia a produção do aluno.

Outro fato recorrente em nossos encontros foram as conversas sobre situações que podem vir a acontecer com os alunos quando estiverem atuando em sua futura prática profissional. Estes momentos surgiam, em grande parte, de forma espontânea pelos pesquisadores, que dada uma determinada discussão, viam uma relação com os acontecimentos de sua própria prática profissional na educação básica e no ensino superior. Algumas situações comentadas eram situações em que os próprios sujeitos se encaixavam ou já haviam vivenciado. Por exemplo, quando definimos o simétrico aditivo de um vetor *u* como sendo o único vetor *u'* do espaço vetorial, tal que $u + u' = \bar{o}$, surgiu a discussão sobre o ensino dos números inteiros no Ensino Fundamental. Simba foi o que se mostrou extremamente interessado por essa discussão e logo perguntou: "*eu sempre quis saber porque menos vezes menos dá mais! Nunca ninguém me explicou isso".* Já em transformações lineares, um tema que foi questionado é "*por que nem toda função do primeiro* *grau pode ser considerada uma função linear, já que seu gráfico é uma reta, ou seja, é linear?”*, disse Euclides em um encontro.

As Fichas de Trabalho (FT)

Nesta seção, iremos apresentar as 6 (seis) fichas de trabalho (FT) que projetamos para esta proposta de Curso de Serviço em relação ao estudo das transformações lineares em Álgebra Linear, voltado para um Licenciatura em Matemática.

Ao longo destas 6 (seis) fichas, iremos enunciar os principais conceitos, definições, proposições, teoremas e tarefas relacionadas aos temas. Além disso, em todo o corpo das fichas de trabalhos realizamos comentários, exibimos sugestões de intervenção, experiências já realizadas e questionamentos que acreditamos ser um recurso adicional para a prática pedagógica do professor. Todos os nossos comentários serão realizados numa barra lateral ao longo das fichas de trabalho. O professor que irá fazer uso deste material deve ficar à vontade na forma que vai utilizar o material. Em todos estes comentários, estivemos orientados por nossos pressupostos teóricos, o MCS, e pelos resultados de nossa pesquisa de mestrado.

Esperamos que o professor que venha a trabalhar com estas fichas tenha total liberdade de alterar o material, visto que nossa versão foi fundamentada em nossa realidade de alunos da licenciatura em Matemática, como descrevemos na seção anterior. Nossa pretensão é que o professor sinta-se estimulado a produzir suas próprias tarefas, acrescente ou retire definições ou teoremas, sempre orientado por sua experiência, seus interesses e principalmente, com a realidade de seus alunos e sala de aula.

Ficha de Trabalho 1

Definição e Propriedades das Transformações Lineares

TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Neste momento, estudaremos um tipo especial de função onde o domínio e o contradomínio são espaços vetoriais. Assim, tanto a variável independente como a variável dependente são vetores, razão pela qual essas funções serão denominadas transformações lineares.

1. DEFINIÇÃO

Sejam V e W subespaços vetoriais de IR^n e IR^m respectivamente, com n, m inteiros positivos.

Uma transformação linear T de V em W, denotada por T: V → W, é uma função que satisfaz as seguintes condições:

i) T(u + v) = T(u) + T(v), para todo u e v em V.

ii) T(k.u) = k.T(u), para todo k em IR e todo u em V.

<u>Observações</u>:

(1) Uma função é linear se, e somente se, preserva (ou "é fechada" para) soma vetorial (i) e multiplicação por escalar (ii).

(2) Daremos o nome de *operador linear* à transformação linear na qual o domínio e o contradomínio são o mesmo espaço vetorial.

Isto é, uma transformação linear T: V → V, onde V é um subespaço de IR^n.

(3) Nesta proposta, estaremos interessados em trabalhar com as transformações lineares cujo domínio e o

Professor(a), antes de definir as condições de uma transformação linear, pergunte aos alunos o que eles entendem pelas palavras "transformação" e "linear". Você poderá se surpreender com as falas dos alunos.

Pergunte aos alunos as diferenças entre as funções que eles trabalharam no Ensino Médio com esta definição de transformação linear. Peça para os alunos criarem exemplos de funções entre espaços vetoriais que são e que não são transformações lineares.

Podemos substituir as condições (i) e (ii) por:

T(k.u+v) = k.T(u) +T(v), para todo u e v em V e k em IR?

A resposta é... sim! Peça aos alunos que justifiquem suas afirmações.

Pergunte aos alunos se eles conseguem imaginar, por exemplo, alguma transformação entre matrizes de ordem 2x2, com coeficientes reais e com as operações usuais das matrizes.

Relacione a propriedade do fechamento em relação a outros conjuntos que não são espaços vetoriais, mas familiares aos alunos, como por exemplo, o conjunto dos números Irracionais que não é fechado para adição. Exiba um contra exemplo dessa situação. ($\pi - \pi = 0$, por exemplo) contradomínio são os espaços IR^n ou seus respectivos subespaços. Mas podemos definir uma transformação linear entre dois espaços vetoriais quaisquer, desde que estes espaços vetoriais sejam trabalhados sobre o mesmo corpo.

TAREFAS

T1) Como você descreveria uma transformação linear? Construa uma função de IR^n em IR^m e verifique se tal função é uma transformação linear.

T2) Sejam os espaços vetoriais IR^3 e IR^2, com as operações usuais sobre IR e considere a função:
F: $IR^3 \rightarrow IR^2$, definida por F(x, y, z) = (x, y + z).
A função F definida acima pode ser considerada uma transformação linear?

T3) É possível construir uma transformação linear de IR em IR^2?

T4) A função G: $IR^n \rightarrow IR^m$ definida por G(v) = 0 (vetor nulo de IR^m), para todo v em IR^n, pode ser considerada uma transformação linear?

T5) Analise e discuta a seguinte afirmação: **"**toda transformação linear T: V → W leva o vetor nulo de V no vetor nulo de W".

T6) Se T: V → W é uma transformação linear, então podemos afirmar que se T(0) ≠ 0, então T não é linear?

T1

O objetivo desta tarefa é propiciar aos alunos uma oportunidade de dizer, com suas palavras, o que ele produziu de significados para a definição matemática de transformação linear. Discuta com os alunos as semelhanças e diferenças entre os exemplos de transformações lineares criadas por eles.

T2

O objetivo desta tarefa é oferecer ao aluno um exercício no qual ele deve trabalhar a álgebra das operações relacionadas à lei de formação da função entre dois espaços vetoriais. Além disso, por meio da resolução desta tarefa, o aluno terá a chance de verificar as condições para que uma função seja considerada transformação linear. Ao término desta tarefa, pergunte aos alunos se eles conseguem criar uma função F: $IR^3 \rightarrow IR^2$ que não seja considerada uma transformação linear.

T3

Professor(a), após os alunos construírem uma transformação linear de IR em IR^2, pergunte a eles sobre a representação geométrica desta transformação. Alguns questionamentos interessantes seriam: o que a possível transformação de IR em IR^2 faz com os vetores de IR? E o vetor nulo, é associado a qual vetor do IR?

T4

Pretendemos com a aplicação desta tarefa, verificar se os alunos produzem significados para a transformação linear nula. Professor, pergunte aos alunos se a dimensão de IR^n e IR^m importam nesta situação.

T5

A afirmação enunciada nesta tarefa é uma importante propriedade decorrente da definição de uma transformação linear. Pergunte aos alunos se essa afirmação é válida para espaços de qualquer dimensão e peça aos alunos para justificarem suas considerações.

T7) É possível existir uma função T: $IR^n \to IR^m$, entre os espaços vetoriais IR^n e IR^m tal que T(0) = 0, mas que T não seja uma transformação linear?

T8) Seja L: $IR^n \to IR^m$ uma transformação linear. Se existe um vetor $u \in IR^n$ tal que L(u) = 0 (vetor nulo de IR^m), podemos então concluir que u = 0 (vetor nulo de IR^n)?

2. PROPRIEDADES DE UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR:

Sejam V e W subespaços de IR^n e IR^m respectivamente. Seja T: V → W é uma transformação linear. São consequências da definição de uma transformação linear, as seguintes propriedades:

P1) T(0) = 0.

Prova

Se $0 \in V$, então:

$T(0) = T(0 + 0) = T(0) + T(0) \Rightarrow T(0) = T(0) + T(0) \Rightarrow$

$\Rightarrow T(0) - T(0) = T(0) \Rightarrow T(0) = 0.$

P2) T(-v) = - T(v), para todo v em V.

Prova

$T(-v) = T(-1.v) = -1.T(v) = - T(v).$

P3) T(u - v) = T(u) - T(v), para todo u e v em V.

Prova

$T(u - v) = T[u + (-v)] = T(u) + T(-v) = T(u) + [-T(v)] =$

$= T(u) – T(v).$

T6

Esta tarefa é a recíproca da afirmação da tarefa anterior. Professor(a), ao ler a produção de significados de seus alunos, verifique se os alunos relacionaram as duas tarefas. Se necessário, trabalhe a noção de contraexemplo com os alunos.

T7

Nesta tarefa, o aluno tem a possibilidade de relacionar os resultados produzidos nas duas tarefas anteriores. Professor(a), após ler/ouvir as resoluções de seus alunos, sugira a eles um momento de diálogo entre as possibilidades de resolução desta tarefa.

T8

O objetivo desta tarefa é verificar a produção de significados dos alunos em relação a uma afirmativa falsa. Além disso, desejamos que os alunos produzam exemplos de transformações lineares para negar esta afirmativa.

Professor(a), pergunte aos alunos se eles podem inferir alguma coisa em relação às tarefas 5, 6 e 7. Mostre a eles que (P1) é consequência da definição, isto é, independe da transformação tomada.

Professor(a), relembre as propriedades do vetor simétrico aditivo, nas operações com vetores. Pergunte aos alunos se eles se lembram das funções pares e ímpares. Verifique com os alunos que toda transformação linear é uma função ímpar.

Em (P4), aproveite este momento para relembrar o processo de "indução finita" com seus alunos.

P4) Uma transformação linear $T: V \rightarrow W$ "preserva" combinações lineares, isto é,

se $v_1, v_2, ..., v_n$ são vetores em V e $a_1, a_2, ..., a_n$ são escalares, então:

$$T(a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n) = a_1T(v_1) + a_2T(v_2) + ... + a_nT(v_n)$$

<u>*Prova*</u>

Provemos por indução sobre *n.* ($n \in IN$)

Para $n = 1$, temos $T(a_1v_1) = a_1T(v_1)$.

Para $n = 2$, temos $T(a_1v_1 + a_2v_2) = T(a_1v_1) + T(a_2v_2) = a_1T(v_1) + a_2T(v_2)$.

Supondo a igualdade ser verdadeira para *n*, mostremos que para *(n +1)* essa igualdade também é verdadeira.

Como para *n* é verdadeira, temos que:

$$T(a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n) = a_1T(v_1) + a_2T(v_2) + ... + a_nT(v_n)$$

.

Ora, tomando v_{n+1} em V e a_{n+1} escalar, podemos escrever:

$$T(a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n + a_{n+1}v_{n+1}) =$$

$$= T \quad a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n \quad + a_{n+1}v_{n+1} \quad =$$

$$= T(a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n) + T \quad a_{n+1}v_{n+1} \quad =$$

$$= \quad a_1T(v_1) + a_2T(v_2) + ... + a_nT(v_n) \quad + a_{n+1}T \quad v_{n+1} \quad =$$

$$= a_1T(v_1) + a_2T(v_2) + ... + a_nT(v_n) + a_{n+1}T \quad v_{n+1} \quad .$$

Logo, para *(n + 1)* a igualdade é verdadeira e pelo princípio da indução a igualdade é verdadeira para todo *n* natural.

Esta é uma propriedade muito utilizada nos exercícios de Álgebra Linear. Lembre aos alunos que ao utilizar esta propriedade em uma tarefa, é importante que ele escreva em sua passagem que é possível realizar tal operação, pois estamos trabalhando com transformações lineares.

Ficha de Trabalho 2 (FT 2)

Teorema da Existência e Unicidade de uma Transformação Linear

Sejam V e W subespaços vetoriais de IR^n e IR^m respectivamente. O teorema a seguir nos permite afirmar que toda transformações linear T: V → W fica completamente determinada se conhecermos a atuação dessa transformação nos elementos de uma base de V.

Professor(a), o objetivo principal desta ficha de trabalho é oferecer aos alunos uma oportunidade de vivenciar o processo de demonstração de um teorema em Álgebra Linear. Para isso, dividimos a demonstração deste teorema em partes, para as quais os alunos serão convidados a produzirem significados para as passagens. Antes de iniciar a leitura da demonstração, peça aos alunos para produzirem significados em relação ao enunciado do teorema. Perguntas do tipo: "quantas coisas temos que provar neste teorema (a existência e a unicidade)?" ou "qual é a importância de tomarmos uma base de V e não apenas um conjunto qualquer de vetores em V?" estimulam a produção de significados dos alunos.

TEOREMA 1: Sejam V e W subespaços vetoriais de IR^n e IR^m respectivamente, $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ uma base de V (dim V = k), e $w_1, w_2, ..., w_k$ vetores arbitrários de W. Então existe uma única transformação linear T: V → W tal que $T(v_1) = w_1, T(v_2) = w_2, ..., T(v_k) = w_k$.
Esta transformação é dada da seguinte maneira: se $v = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_kv_k$, então, $T(v) = a_1T(v_1) + a_2T(v_2) + ... + a_kT(v_k) = a_1w_1 + a_2 w_2 + ... + a_kw_k$.

<u>Demonstração:</u>

Provemos, inicialmente, a existência de tal transformação linear.

Dado $v = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_kv_k$ em V, com $a_1, a_2, ..., a_k$ escalares em IR definiremos a função $T(v) = a_1w_1 + a_2 w_2 + ... + a_kw_k$.

1

Mostremos que a função T acima é linear.

(i) para todo $u = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_kv_k$ e $v = b_1v_1 + b_2v_2 + ... + b_kv_k$, vetores em V, com $a_i, b_i \in IR$ e i = 1,..., k, teremos:

$$T(u + v) = T\,(a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_kv_k + b_1v_1 + b_2v_2 + \dots + b_kv_k) =$$

$$= T\ \ (a_1 + b_1)v_1 + (a_2 + b_2)v_2 + \dots + (a_k + b_k)v_k \ =$$

$$= (a_1 + b_1)Tv_1 + (a_2 + b_2)Tv_2 + \dots + (a_k + b_k)Tv_k =$$

$$= (a_1 + b_1)\,w_1 + (a_2 + b_2)\,w_2 + \dots + (a_k + b_k)w_k =$$

$$= (a_1w_1 + a_2w_2 + \dots + a_kw_k) + (b_1w_1 + b_2w_2 + \dots + b_kw_k) =$$

$$= T(u) + T(v).$$

(ii) para todo $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_kv_k$ e $\alpha \in$ IR, temos:

$$T(\alpha u) = T\left[\alpha.\ a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_kv_k\ \right] =$$

$$= T\ \ \alpha.a_1\ v_1 + \ \alpha.a_2\ v_2 + \dots + \ \alpha.a_k\ v_k \ =$$

$$= \alpha.a_1Tv_1 + \alpha.a_2Tv_2 + \dots + \alpha.a_kTv_k =$$

$$= \ \alpha.a_1\ w_1 + \ \alpha.a_2\ w_2 + \dots + \ \alpha.a_k\ w_k =$$

$$= \alpha.\ a_1w_1 + a_2w_2 + \dots + a_kw_k \ =$$

2

$$= \alpha.T(v)$$

Peça aos alunos que justifiquem essas igualdades. Verifique se eles observam as propriedades das Transformações Lineares sendo utilizadas em passagem de (i) e (ii).

De (i) e (ii) obtemos que T é linear.

Mostremos agora que T é única.

Suponhamos exista uma outra transformação linear $S: V \to W$ tal que $S(v_1) = w_1$, $S(v_2) = w_2, \dots, S(v_k) = w_k$.

Ora, dado $v \in V$ temos $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_kv_k$, e, assim:

Pergunte aos alunos, se existe uma outra forma de mostrar a unicidade de algo. Neste momento podem surgir significados não matemáticos para a noção de unicidade. Aproveite este momento.

$$S(v) = S(a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_kv_k) =$$

$$= a_1S(v_1) + a_2S(v_2) + \ldots + a_kS(v_k) =$$

$$= a_1w_1 + a_2w_2 + \ldots + a_kw_k =$$

$$= T(v)$$

3

Assim, as Transformações S e T são idênticas e, portanto, T é única.

TAREFAS

T9) Qual a afirmação que você considerou mais importante no enunciado do teorema 1?

T10) Explique o que você entendeu dos passos realizados na demonstração até o balão 1.

T11) Explique o que você entendeu dos passos realizados na demonstração até o balão 2.

T12) Explique o que você entendeu dos passos realizados na demonstração até o balão 3.

T13) O texto que precedia o teorema 1 dizia que "toda transformações linear T: V → W fica completamente determinada se conhecermos a atuação dessa transformação nos elementos de uma base de V" . Para você, o que essa afirmação quer dizer?

T9

O objetivo nesta tarefa é verificar qual afirmação o aluno destacou em sua produção de significados a partir do enunciado do teorema. Em alguns casos, o fato da transformação obtida ser única, pode causar um estranhamento para os alunos.

T10

Na demonstração enunciada acima (teorema 1), o autor da demonstração define uma função específica e trabalha com o objetivo de mostrar que tal função é a transformação linear que satisfaz as condições impostas pelo teorema. Professor(a), ao ler a produção de significados de seus alunos, pergunte a eles se os w_i precisam ser elementos de uma base para W. A resposta dessa pergunta é.... não! Mas se fossem, o que aconteceria?

T11

Nesta tarefa, desejamos observar quais os significados que os alunos produzem a partir das operações algébricas efetuadas para mostrar que a função criada satisfaz as duas condições de uma transformação linear.

T12

Esta tarefa está relacionada à demonstração da unicidade da transformação linear que satisfaz as condições do teorema. Desejamos verificar se os alunos legitimam a técnica de demonstração. Pergunte aos alunos se a técnica utilizada é de fato eficaz para afirmar a unicidade.

T13

Professor(a), realize sua leitura da produção de significados de seus alunos em relação à afirmativa "fica completamente determinada", visto que este é o resultado principal do teorema proposto.

T14) É possível obter uma transformação linear $T: IR^2 \rightarrow IR^3$ tal que $T(1,-1) = (3,2,-2)$ e $T(-1,2) = (1,-1,3)$? Se sim, obtenha a lei de formação da transformação. A transformação assim obtida é única?

Caso não seja possível obter tal transformação linear, justifique sua afirmação com base no teorema 1.

T14

Nesta tarefa, o aluno deverá trabalhar vários tópicos relacionados com os Espaços Vetoriais, como: verificar se os vetores (1,-1) e (-1,2) formam uma base para o IR^2; escrever um vetor do IR^2 como combinação linear dos elementos da base em questão; aplicar a possível transformação T nos vetores de IR^2 em relação à base trabalhada; operar com vetores até obter uma lei de formação para a possível transformação.

Pergunte aos alunos se é preciso provar que tal transformação é linear ou se o teorema já confirma isso.

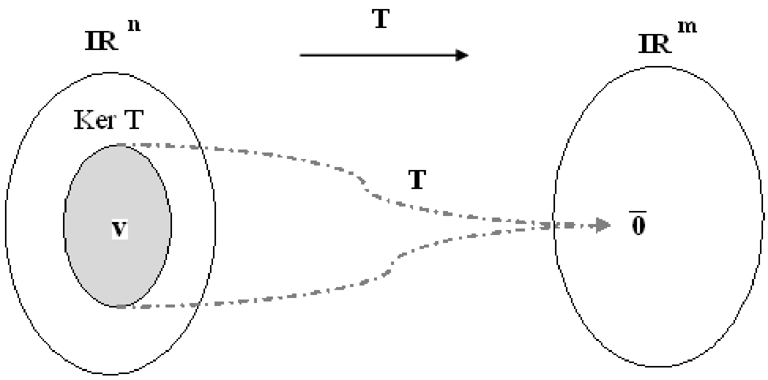
Ficha de Trabalho 3 (FT 3)

Núcleo e Imagem de uma Transformação Linear

Neste momento, iremos analisar as transformações lineares, definindo e enunciando resultados úteis e interessantes para a Álgebra Linear. Para começar, definiremos os conceitos de núcleo e de imagem, que são dois subconjuntos especiais dos espaços vetoriais envolvidos na transformação linear.

DEFINIÇÃO 2 (Núcleo): Seja T: $IR^n \to IR^m$ uma transformação linear. O conjunto de todos os vetores v ∈ IR^n tais que T(v) = 0 é chamado núcleo de T, sendo denotado por Ker T. Isto é,

$$\text{Ker } T = \{v \in IR^n \ / \ T(v) = 0\}$$



Em outras palavras, o núcleo de uma transformação linear T é o conjunto formado por todos os vetores v ∈ IR^n que são "levados" por T no vetor nulo de IR^m.

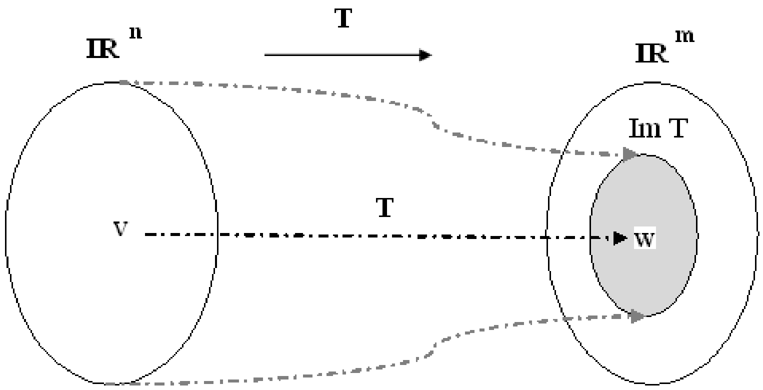
Professor(a), questione aos alunos se eles produzem significados para a noção de núcleo em relação ao conjunto de raízes de uma função do 1º ou 2º graus que eles trabalharam na educação básica. Há alguma relação? A resposta é... SIM! Considerando, por exemplo, uma função linear f(x) = ax, de IR em IR, onde IR é um espaço vetorial sobre o corpo dos reais, o conjunto das raízes de uma função de IR em IR é exatamente o núcleo da transformação linear f de IR em IR.

Foi recorrente em nossa pesquisa situações nas quais os alunos tinham dificuldades em visualizar qual era o espaço vetorial que continha os vetores do núcleo. A visualização pelo diagrama ao lado pode ampliar a forma do aluno produzir significados para as noções de núcleo e posteriormente de imagem de uma transformação.

Pergunte aos alunos o porquê de não utilizarmos a noção de núcleo para definir o conjunto de raízes de função de IR em IR, por exemplo. Uma justificação é que nem toda função de IR em IR, sobre o corpo dos reais representa um transformação linear, como as funções quadráticas entre outros exemplos.

DEFINIÇÃO 3 (Imagem): Seja T: $IR^n \rightarrow IR^m$ uma transformação linear. A imagem de T, denotada por Im T, é o conjunto dos vetores w ∈ IR^m tais que existe um vetor v em IR^n, que satisfaz T(v) = w.

$$Im\ T = \{ T(v) \in IR^m / v \in IR^n \}$$



TEOREMA 2: Seja T: $IR^n \rightarrow IR^m$ uma transformação linear. Então:

i) O núcleo de T é um subespaço vetorial de IR^n;

ii) A imagem de T é um subespaço vetorial de IR^m.

Professor(a), pergunte aos alunos se é possível escrever o conjunto imagem de uma transformação linear de forma distinta a enunciada na ficha. Por exemplo, esta definição é equivalente a:

Im T = {w ∈ IR^m / T(v) = w para algum v em IR^n}

Instigue os alunos a falarem sobre as relações e possíveis diferenças entre a definição de imagem de uma transformação linear e a definição da imagem de uma função real trabalhada na educação básica.

Em nossa proposta de Seminário em Álgebra Linear, os alunos sugeriam que os professores fizessem a demonstração deste teorema (teorema 2). Mas após um breve diálogo, os próprios alunos sentiram-se motivados em demonstrá-lo no quadro. Acreditamos que ao oferecer ao aluno uma oportunidade de enunciar suas produções de significados em relação ao resultado do teorema 2 e na construção de uma demonstração matemática, surge uma oportunidade rica de criação de um espaço comunicativo e de interação entre os envolvidos no processo de ensino, sejam alunos ou professores.

TAREFAS:

T15) Seja T: $IR^2 \to IR^2$ definida por T (x, y) = (x, 2x - y).

a) Encontre o Ker T e determine uma base e a dimensão do Ker T;

b) Encontre o Im T e determine uma base e a dimensão da Im T;

c) Verifique se o vetor (1, 1) ∈ Im T.

T16) Determine o núcleo e a imagem da transformação linear T: $IR^3 \to IR^2$ dada por T (x, y, z) = (x + y, z).

T17) Seja T: $IR^2 \to IR^2$ o operador linear definido por T(x,y) = (x,0).

a) Determine o núcleo e a imagem de T.

b) Represente graficamente o núcleo e a imagem de T.

T18) Seja a transformação linear T: $IR^2 \to IR^3$ definida por T(x,y) = (0, x - y, 0).

Determine o núcleo e a imagem de T e apresente uma representação geométrica da transformação e de seu núcleo.

T15

Esta tarefa proporcionou uma rica discussão e sobre a teoria em Álgebra Linear e as definições de núcleo e imagem de uma transformação linear. Um dos objetivos desta tarefa é oferecer ao aluno uma oportunidade de produzir significados a partir das definições de núcleo e imagem. Mas uma outra situação que ocorreu em nossa aplicação desta tarefa, foi em relação à produção de significados para as noções uma base e da dimensão do núcleo desta transformação. Ao determinar o Ker T, os alunos obtiveram o conjunto Ker T = {(0,0)}. Um dos alunos produziu significados na direção que a o conjunto {(0,0)} formaria um base para o Ker T e sua dimensão seria 1, pois em sua produção de significados, ele afirmava que o vetor (0, 0) gerava o Ker T. No momento em que a professora afirmou que o conjunto Ker T = {(0,0)} não possuía base e sua dimensão era 0, este aluno encontrou-se frente limite epistemológico e estava impermeabilizado em relação ao fato conjunto ao não ter base ele não deveria ter dimensão. Acreditamos que esta tarefa nos propiciou uma oportunidade de discutir toda a teoria em Álgebra Linear, desde combinação linear de vetores, dependência e independência linear, conjunto gerador, base e dimensão de um espaço vetorial.
Além disso, no item (c), peça que os alunos justifiquem sua afirmação, pois é possível esta verificação produzindo significados em várias direções.

T16

O objetivo desta tarefa é familiarizar os alunos com os processos algébricos que envolvem a obtenção do núcleo e da imagem de uma transformação linear, reforçando os objetos que foram constituídos pelos alunos na tarefa anterior.

T17

Uma direção verificada em relação à produção de significados nesta tarefa foi em relação ao núcleo de T, visto que ao tomarmos T(x, y) = (0, 0), a coordenada "y" fica "livre", podendo assumir qualquer valor real. Esta consideração é fundamental para construção do conjunto Ker T. A representação geométrica do núcleo e imagem é vista como uma forma de ampliar a forma dos produzir significados dos alunos em relação a associação de um conjunto (espaço vetorial) e os eixos coordenados no plano cartesiano.

TEOREMA 3 (Teorema do núcleo e da imagem): Sejam IR^n e IR^m espaços vetoriais de dimensão finita. Dada uma transformação linear T: $IR^n \rightarrow IR^m$, então:

$$\dim IR^n = \dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T$$

TAREFAS:

T19) Existe uma transformação linear T: $IR^3 \rightarrow IR^2$ tal que Ker T = $[\, 1, 2, 0 \,]$ e Im T = $[\, 0, -1 \,]$?

T20) Dê um exemplo de uma transformação linear T: $IR^2 \rightarrow IR^2$ tal que Im T $\subset$ Ker T.

T18

O objetivo desta tarefa é semelhante ao da tarefa anterior, pois oferecemos aos alunos uma outra oportunidade de operar algebricamente com as definições de núcleo e imagem de uma transformação linear. Ressaltamos que neste momento, o professor pode perceber que algumas noções já trabalhas ao longo do curso de Álgebra Linear, como base e conjunto gerador são estipulações locais para alguns alunos, visto que eles já operam sem justificar estes elementos.

A demonstração do teorema 3 é um pouco mais refinada que as outras demonstração de teoremas trabalhados até agora neste Curso de Serviço. Sugerimos ao professor que, caso os alunos se interessem pela demonstração, crie uma ficha de trabalho relacionada a este teorema, como fizemos na ficha de trabalho 2.

T19

O objetivo desta tarefa é trabalhar com os alunos o resultado do teorema 3. Sugira aos alunos que justifiquem suas crenças-afirmações com base no resultado do teorema.

T20

Existem infinitas transformações que satisfazem a condição imposta nesta tarefa. Após os alunos determinarem suas candidatas, sugira que eles troquem as transformações obtidas uns com os outros e verifiquem se a resolução do colega satisfaz a tarefa. Esta é uma forma de criar em sala de aula um ambiente propício a compartilhar seus modos de produção de significados. Professor(a), sugira também uma transformação, mas que não satisfaça a tarefa. Discuta com os alunos as justificações para resolver tal situação.

Ficha de Trabalho 4

Transformações Lineares Injetoras, Sobrejetoras e Bijetoras

Devido ao fato de toda transformação linear ser uma função (mesmo sendo um tipo “especial” de função), podemos também classificá-la como injetora, sobrejetora ou bijetora, utilizando exatamente as definições que estudamos no Ensino Médio. Porém, devido às particularidades das transformações lineares, poderemos utilizar outras ferramentas para essas classificações.

Ao longo dessa seção, para simplificar a notação, estaremos considerando V e W subespaços vetoriais de IR^n e IR^m respectivamente, com as operações usuais e ambos sobre o corpo IR.

DEFINIÇÃO:

Uma transformação linear $T: V \to W$ será:

(i) INJETORA (ou injetiva) quando vetores distintos de V possuírem imagens distintas pela T, isto é, se dados $u, v \in V$, com $u \neq v$, então $T(u) \neq T(v)$.

(ii) SOBREJETORA (ou sobrejetiva) quando a imagem de T for todo o espaço W, ou seja, para cada $w \in W$, existe $v \in V$ tal que $T(v) = w$.

(iii) BIJETORA (ou bijetiva) quando T for injetora e sobrejetora.

Abaixo, apresentaremos alguns resultados que nos ajudarão a classificar uma transformação linear como injetora, sobrejetora ou bijetora. Devemos ter atenção com esses resultados: eles só poderão ser utilizados no

Professor(a), em nosso Seminário em Álgebra Linear começamos a apresentação de transformações lineares injetoras, sobrejetoras e bijetoras, perguntado aos alunos quais eram suas experiências em relação à estas noções. Isto foi de grande valia em nossa proposta, pois os alunos estiveram estimulados a observar as particularidades e distinções entre as funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras e as transformações lineares injetoras, sobrejetoras e bijetoras.

Discuta com os alunos o que eles sabem sobre as funções reais injetoras, sobrejetoras e bijetoras e como eles provavam se uma determinada função satisfazia estas particularidades.

caso de estarmos trabalhando com transformações lineares; eles não valem para funções em geral.

TEOREMA 4:

Seja T: V → W uma transformação linear.

Então, T é injetora se, e somente se, Ker T = $\bar{0}$.

PROPOSIÇÕES:

Sejam V e W subespaços vetoriais tais que

dim V = dim W. Então:

(i) Uma transformação linear T: V → W é injetora se, e somente se, T é sobrejetora.

(ii) Uma transformação linear T: V → W é injetora se, e somente se, T "leva" bases de V em bases de W, isto é, se $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ é uma base de V, então $\{T(v_1), T(v_2), ..., T(v_k)\}$ é uma base de W.

Trabalhar a demonstração do teorema 4 com os alunos é uma oportunidade deixá-los produzir significados para teoremas da forma "se e somente se", além de relacionar a noção de injetividade com núcleo de uma transformação linear.

Pergunte aos alunos se é possível determinar uma função real f de IR em IR tal que f(x) = 0 somente para x = 0, mas f não é uma função injetora. A resposta é... sim! Um exemplo é a função $f(x) = x^2$. Esta função não é injetora, mas a única raiz é x = 0. Essa função (transformação) não satisfaz o teorema, pois a função $f(x) = x^2$ não é uma função linear.

Verifique o que os alunos produzem de significados em relação à afirmação "T leva bases de V em bases de W", do item (ii).

Professor(a), pergunte aos alunos se eles observaram o fato de que a hipótese "ser injetora" está presente nos itens (i) e (ii) e dessa forma, o fato da transformação linear ser injetora implica as duas consequências (ser sobrejetora e "levar" bases de V em bases de W.

Além disso, você pode trabalhar esta proposição com seus alunos da seguinte forma:

(a) T é sobrejetora.
(b) T é injetora.
(c) T é bijetora.
(d) T "leva" bases de V em bases de W, ou seja, se {v1, v2, . . . , vn} é uma base de V então $\{T(v_1), T(v_2), . . . , T(v_k)\}$ é base de W .

Para provar esta proposição basta provar as implicações (a) implica (b), (b) implica (c), (c) implica (d) e (d) implica (a).

Pergunte aos alunos o que eles podem dizer a respeito dessa implicação "em cadeia".

TAREFAS:

T21) Seja T: $IR^3 \rightarrow IR^2$ a transformação linear definida por:

$$T(x,y,z) = (x + y\ ,\ 2x - y + z)$$

a) Determine uma base e a dimensão de Ker T;

b) Determine uma base e a dimensão de Im T.

c) Verifique se: i) T é injetora? ii) T é sobrejetora? iii) T é bijetora?

d) Existe alguma relação entre as dimensões do domínio, imagem e núcleo de T?

T22) Pode existir uma transformação linear T: $IR^3 \rightarrow IR^4$ injetora?

T23) Uma transformação linear T: $IR^2 \rightarrow IR$ não nula é sempre sobrejetora?

T21

O objetivo desta tarefa é proporcionar aos alunos a oportunidade de relacionar os conceitos de dimensão e núcleo de uma transformação linear, com as definições e condições especiais das transformações lineares em relação aos conceitos de injetividade e sobrejetividade.

Sempre questione seus alunos que exibam suas justificações para suas crenças-afirmações. Discuta com a turma as possíveis justificações distintas que ocorrerão em sala de aula.

T22

Caso os alunos não produzam significados para esta tarefa, instigue-os com questionamentos da forma: "caso exista tal transformação linear injetora, qual deve ser a dimensão do seu núcleo? E da imagem?" ou "a transformação T: T: $IR^3 \rightarrow IR^4$, definida por $T(x, y, z) = (x, y, z, w)$ é injetora? Qual é seu núcleo?". Após todos os alunos exibirem suas crenças-afirmações, sugira que eles troquem suas resoluções com os colegas, para que eles próprios verifiquem as resoluções uns dos outros. Se possível, crie debates em sala de aula, baseado nas possíveis soluções distintas apresentadas.

T23

Em nosso Seminário, quando os alunos produziram significados para a condição "ser sempre sobrejetora", eles o fizeram em direções distintas. Uns produziram significados na direção de que se eles exibissem uma transformação linear T de IR^2 em IR que não fosse nula, a tarefa já estaria resolvida. Outros produziram significados na direção de provar essa afirmativa utilizando o recurso de redução ao absurdo, isto é, supor que se uma transformação linear T de IR^2 em IR, não nula, não é sobrejetora, então chegaremos num absurdo. Logo, T deve ser, necessariamente, sobrejetora.

Caso os alunos tenham dificuldades (limites ou obstáculos epistemológicos) nesta tarefa, sugira a eles que trabalhem as possíveis dimensões do núcleo e da imagem de uma T de IR^2 em IR^3.

Ficha de Trabalho 5

Isomorfismo e Transformação Linear Inversa

DEFINIÇÃO (Isomorfismo):

Chama-se Isomorfismo uma transformação linear

T: V → W que é bijetora.

PROPOSIÇÃO: Se T: V → W é um isomorfismo, então dim V= dim W .

TAREFAS:

T24) Seja T: $IR^3 \rightarrow IR^3$ dada por

T (x, y, z) =(x – 2y, z, x + y).

Verifique se T é um isomorfismo.

T25) Seja T: $IR^2 \rightarrow IR^3$ uma transformação dada por T(x,y) = (x - y, -y, 0). Verifique se T é um isomorfismo.

T26) Podemos afirmar que "toda transformação linear T: $IR^n \rightarrow IR^n$ é um isomorfismo" ?

Professor(a), comente com os alunos às condições relacionadas a transformações lineares injetoras, sobrejetoras e bijetoras. Pergunte aos alunos se é possível definir uma transformação linear de uma forma diferente, alterando ou acrescentando hipóteses a definição. Por exemplo, se dim V = dim W e T: V → W é injetora então T é um isomorfismo.

Esta proposição é uma oportunidade de trabalhar alguns conceitos relacionados às transformações lineares injetoras e sobrejetoras. Por exemplo, pergunte aos alunos o que podemos afirmar sobre as dimensões de V e W se T: V → W é somente injetora (ou somente sobrejetora).

T24

Ao ler a produção de significados dos seus alunos na resolução dessa tarefa, verifique como ele utiliza os conceitos de transformações injetoras, sobrejetoras e bijetoras e suas relações. Caso considere apropriado, sugira aos alunos que utilizem os resultados específicos dessas transformações lineares, como:

(1) Então, T é injetora se, e somente se, Ker T = {0};
(2) Uma transformação linear T: V → W é injetora se, e somente se, T é sobrejetora.

T25

Nesta tarefa, oferecemos uma oportunidade ao aluno de produzir significados em relação a uma das condições necessárias para a existência de um isomorfismo: o fato da transformação linear ser definida entre espaços de mesma dimensão, o que não ocorre nesta tarefa.

DEFINIÇÃO (Transformação Inversa):

Seja T: V $\rightarrow$ W um isomorfismo. Então a transformação T é bijetora e, portanto admite uma função inversa (que será também bijetora) T^{-1}: W $\rightarrow$ V, sendo $T^{-1}(T(v)) = v$ para todo $v \in V$ e $T(T^{-1}(w)) = w$ para todo $w \in W$.

TAREFAS:

T27) A função T^{-1} definida acima representa uma transformação linear de W em V?

T28) Seja T: IR² $\rightarrow$ IR² a transformação linear dada por T(x,y) = (4x - 3y, -2x + 2y).

a) Verifique se T é invertível.

b) Determine a transformação inversa de T, se possível.

c) A transformação obtida no item (b) é linear? Justifique suas afirmações.

T26

O objetivo desta tarefa é novamente questionar o aluno acerca das condições necessárias e suficientes da existência de um isomorfismo. Uma das direções em que o aluno pode produzir significados para resolução da questão é trabalhando o conceito de contraexemplo. Professor(a), confronte as soluções de seus alunos e os questione a produzirem diversas transformações lineares de IR^n em IR^n que não representam um isomorfismo.

Professor(a), consideramos este momento uma rica oportunidade de relacionar o conceito de transformação inversa em Álgebra Linear com o conceito de função real inversa, estudada pela aluno no ensino médio. Sugira aos alunos que apontem semelhanças ou distinções entre as definições.

T27

O objetivo desta tarefa é um que o aluno tenha a possibilidade de produzir significados a partir de um importante resultado em Álgebra Linear: a transformação inversa de uma transformação linear bijetora, também é linear, isto é, preserva a soma vetorial e o produto por um escalar.

T28

Nesta tarefa, o aluno terá a oportunidade trabalhar o conceito de transformação inversa num caso particular. Além disso, o aluno deverá trabalhar com vários conceitos relacionados às transformações lineares, como: relacionar os conceitos de injetividade, sobrejetividade, núcleo e imagem de uma transformação linear; combinação linear de vetores em relação à vetores de uma base; aplicação da definição de uma transformação linear em vetores e em soma de vetores e; obtenção da lei de formação de uma transformação linear (a transformação linear inversa procurada).

Ficha de Trabalho 6

Transformações no Plano

Professor(a), o objetivo desta ficha é sugerir um novo modo para produzir significados em relação à uma transformação linear. O que enunciaremos nesta ficha, são as principais transformações que podemos visualizar plano, para que os alunos observem a transformação "agindo" no vetor.

Entende-se por transformações no plano as transformações de IR^2 em IR^2. Veremos algumas de especial importância e suas correspondentes interpretações geométricas que sugerem que certas deformações podem ser descritas por transformações lineares.

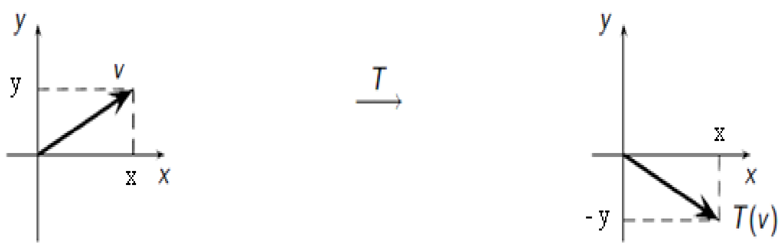
A) REFLEXÕES

a.1) Reflexão em torno do eixo dos x:

Essa transformação linear leva cada vetor (x,y) na sua imagem (x, -y) simétrica em relação ao eixo dos x. É a transformação definida por

$$T: IR^2 \rightarrow IR^2$$

$$T(x, y) = (x, -y).$$



Fizemos questão de apresentar a transformação T em dois planos cartesianos evidenciar que a "alteração" do vetor só ocorre após a aplicação da transformação nele. Além disso, por estarmos trabalhando no IR², decidimos associar as componentes dos vetores às coordenadas do par ordenado.

T, assim definida, é linear.

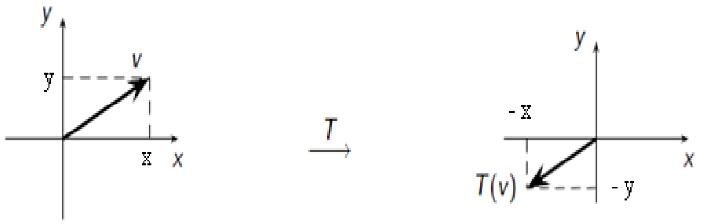
a.2) Reflexão em torno da origem:

É a transformação definida por

$$T: IR^2 \rightarrow IR^2$$

$$T(x, y) = (- x, - y).$$

Sugira aos alunos definirem e esboçarem a reflexão em torno do eixo y.



T, assim definida, é linear.

Se os alunos não "acreditarem" se as transformações enunciadas são, de fato, lineares, peça aos alunos que verifiquem as condições trabalhadas na ficha 1.

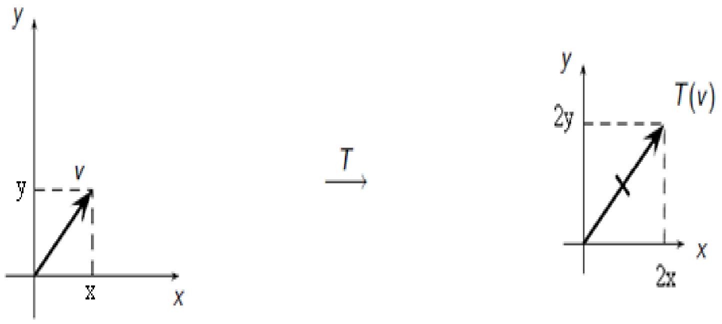
B) DILATAÇÕES E CONTRAÇÕES

b.1) Dilatação ou contração na direção do vetor:

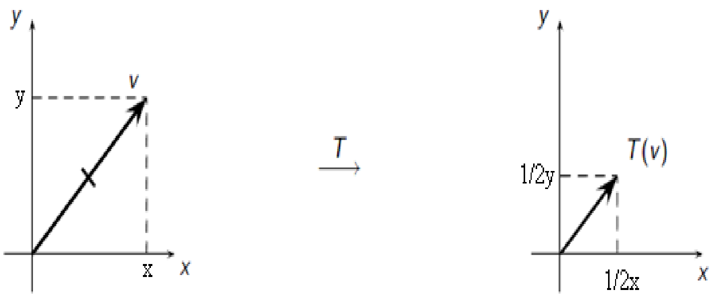
É a transformação definida por

$$T: IR^2 \rightarrow IR^2$$
$$T(x, y) = \alpha.(x, y), \quad \alpha \in IR.$$

Assim, por exemplo, a transformação T: $IR^2 \rightarrow IR^2$ dada por $T(x, y) = 2(x, y)$ leva cada vetor do plano num vetor de mesma direção e sentido de v, mas de módulo maior. Isto é, T dilata o vetor.



Já a transformação T: $IR^2 \rightarrow IR^2$ dada por $T(x, y) = (1/2)(x, y)$ é um exemplo de contração.



Note que em ambos os casos, T assim definida é linear.

Além disso, no caso geral, observemos que:

- se $|\alpha|$ > 1, T dilata o vetor;
- se $|\alpha|$ < 1, T contrai o vetor;
- se α = 1, T é a identidade I;
- se α < 0, T troca o sentido do vetor;

Professor(a), caso ache necessário, revise com os alunos a noção de módulo de um número Real.

b.2) Dilatação ou contração na direção do eixo x

É a transformação definida por

$$T: IR^2 \rightarrow IR^2$$
$$T(x, y) = (\alpha x, y), \ \ \alpha > 0.$$

Essa transformação é também chamada dilatação ou contração na direção 0x (ou horizontal) de fator α .

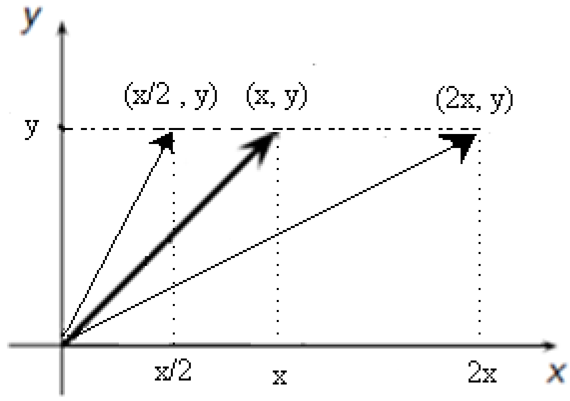
T assim definida é linear.

Observe que:

- Se α = 0 teríamos (x, y) ↦ (0, y), T seria a projeção ortogonal do plano sobre o eixo dos y.

Peça aos alunos que definam a dilatação (ou contração) na direção do eixo Oy.

A figura abaixo sugere uma dilatação de fator $\alpha = 2$ e uma contração de fator $\alpha = 1/2$.



C) ROTAÇÃO

Rotação de um ângulo (no sentido anti-horário):

A rotação do plano em torno da origem (figura abaixo), que faz cada ponto descrever um ângulo, determina uma transformação linear dada por

$R_\theta : IR^2 \rightarrow IR^2$
R_θ (x, y) = (x cosθ - y senθ , y cosθ + x senθ), com $\theta > 0$.

Neste momento você pode aproveitar e trabalhar e revisar as expressões de seno e cosseno da soma de dois arcos.

De fato, pois:

$x' = r.\cos(\alpha + \theta) = r \cos \alpha . \cos\theta - r.\text{sen } \alpha . \text{sen } \theta$

Mas, r.cosα = x e r.sen α = y.

Então x' = x.cos θ - y.sen θ .

Analogamente, y' = r.sen ($\alpha + \theta$) =

= r.(senα . cos θ + cosα .sen θ) =

= y.cosθ + x.senθ.

Assim, R_θ (x, y) = (x cosθ - y senθ, y cosθ + x senθ)

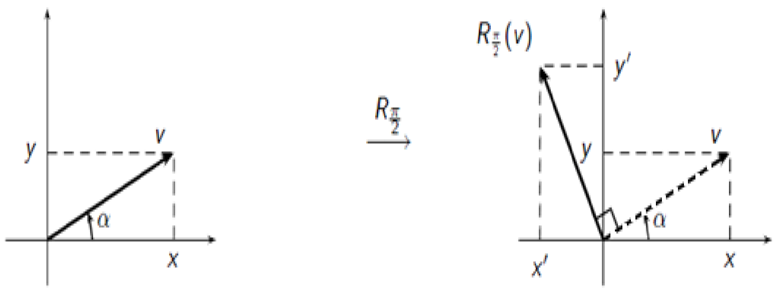
Como exemplo, consideremos o caso em que $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

Neste caso $\cos\theta = 0$ e $sen\theta = 0$.

Assim: $R_{\frac{\pi}{2}}(x, y) = \left(x\cos\dfrac{\pi}{2} - y\,\text{sen}\dfrac{\pi}{2},\ y\cos\dfrac{\pi}{2} + x\,\text{sen}\dfrac{\pi}{2} \right)$

$R_{\frac{\pi}{2}}(x, y) = \ x.0 - y.1\ ,\ y.0 + x.1 \quad \Rightarrow \quad R_{\frac{\pi}{2}}(x, y) = \ -y\ ,\ x\ .$

Geometricamente ficaria:



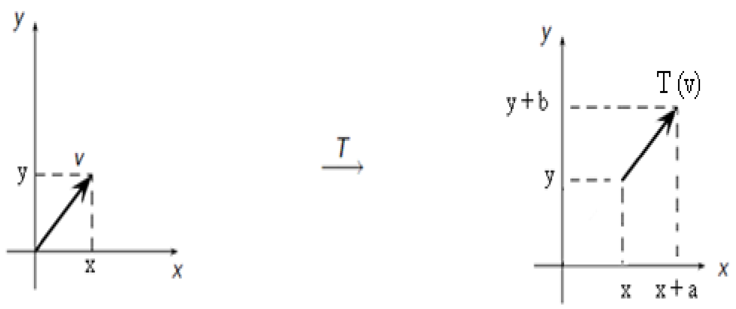
Veremos a seguir um exemplo de uma transformação de IR² em IR² que não é linear.

D) TRANSLAÇÃO

É a transformação definida por

$$T: IR^2 \rightarrow IR^2$$

$$T(x, y) = (x + a\ ,\ y + b).$$



T assim definida não é linear.

Professor(a), pergunte aos alunos se eles conseguem criar alguma outra transformação no plano que não seja linear.

Caso os alunos tenham provado que as transformações enunciadas nesta ficha são ou não lineares, desconsidere as quatro primeiras tarefas.

TAREFAS:

T29) Mostre que a **reflexão em torno do eixo dos x** é uma transformação linear.

T30) Mostre que a **reflexão em torno da origem** é uma transformação linear.

T31) Mostre que a **dilatação do vetor** é uma transformação linear.

T32) Mostre que a **translação** não é uma transformação linear.

T33) A projeção ortogonal do IR^3 sobre o plano xy é dada pela transformação:

$$T: IR^3 \rightarrow IR^3$$

$$T\,(x, y, z) = (x, y, 0).$$

Verifique se T é linear.

T33

Professor, caso os alunos sintam-se interessados com as transformações no IR^3, pergunte a eles se é possível determinar outras transformações lineares de IR^3 em IR^3.

T34) O **cisalhamento da direção do eixo dos x** (ou cisalhamento horizontal de fator), é a transformação definida por

$$T: IR^2 \rightarrow IR^2$$

$$T(x, y) = (x + \alpha\, y, y), \text{ com } \alpha > 0.$$

Mostre que T assim definida é linear.

REFERÊNCIA SUGERIDA

ALMEIDA, V. R. **Álgebra Linear como um Curso de Serviço para a Licenciatura em Matemática: o Estudo das Transformações Lineares.** 2013. ??p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Minas Gerais, 2013.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOLDRINI, J. L. **Álgebra Linear**. São Paulo: Editora Harper & Row do Brasil Ltda., 1978.

HALLACK, A. A. & FEITOSA, F. S. **Álgebra Linear.** Apostila, Universidade Federal de Juiz de Fora. Minas Gerais, 2006.

HOFFMAN, K. & KUNZE, R. **Linear Algebra**. 2a ed., Prentice Hal, São Paulo, 1971.

LANG, S. **Álgebra Linear**. Trad. Frederic Tsu. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda., 1971.

LIMA, E. L. **Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1998.

LIPSCHUTZ, S. **Álgebra Linear**. Trad. Roberto Ribeiro Baldino. São Paulo: McGraw-Hill, 1972.

REFERÊNCIAS

ALVES, A. F., **Álgebra Linear como um Curso de Serviço para uma Licenciatura em Matemática: o Estudo dos Espaços Vetoriais.** 2013. ??p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Minas Gerais, 2013.

BRASIL, Parecer n° CNE/CES 1.302/2001, de 06 de novembro de 2001. Dispõe sobre as Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura. **Diário Oficial da União**, Brasília, DF, 05 dez. 2001. Seção 1e, p.13.

CABRAL, T.C.; CATAPANI, E. Imagens e olhares em uma disciplina de cálculo em Serviço. **Zetetiké**. Campinas: Editora da UNICAMP, v.11, n.19, jan-jun, 101-116, 2003.

JULIO, R. S. **Uma leitura da produção de significados matemáticos e não matemáticos para "dimensão".** 2007. 118p. Dissertação (Mestrado em

Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

LEONTIEV, A. N. **O Desenvolvimento do psiquismo**. São Paulo: Moraes, 1978.

LINARDI, P. R. **Rastros da formação matemática na prática profissional do professor de matemática**. 2006, 279p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – IGCE/UNESP: Rio **c**laro, 2006.

LINS, R. C. **A framework for understanding what algebric thinking is**. 1992. 330p. Thesis (Phd) – University of Nottingham, Nottingham.

LINS, R. C. O modelo teórico dos campos semânticos: uma análise epistemológica da álgebra e do pensamento algébrico. **Revista Dynamis**, Blumenau, v.1(7), p.29-39, abr./jun., 1994.

LINS, R. C. Por que discutir teoria do conhecimento é relevante para a Educação Matemática. In: Bicudo, M. A. V. (org.). **Pesquisa em Educação Matemática:** concepções e perspectivas. São Paulo: Editora da UNESP, 1999. (Seminários e Debates). p.75-94.

LINS, R. C. **The production of meaning for Algebra: a perspective based on a Theoreticall Model of Semantic Fields**. In: R. Sutherland et al. Perspectives on School Algebra. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2001.

LINS, R. C. Um quadro de referência para as disciplinas de Matemática no curso de Licenciatura em Matemática. In: LINS, R. C. **Projeto de Pesquisa Integrado submetido como parte de solicitação de renovação de bolsa de concessão de auxilio financeiro ao CNPq.** 2002, p. 01-40.

LINS, R. C. **A formação pedagógica nas disciplinas de conteúdo matemático, nas licenciaturas em Matemática**. In: VIII Encontro Paulista de Educação Matemática, 2004, São Paulo. Anais do VIII EPEM, 2004a.

LINS, R. C. Matemática, monstros, significados e educação matemática. In: Bicudo, M. A. V., Borba, M. C. (org.). **Educação Matemática:** pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004b. p.92-120.

LINS, R. C. **Characterising the mathematics of the teacher from the point of view of meaning production**. In: 10th International Congress on Mathematical Education, 2004c, Copenhagen. Plenary and Regular Lectures (abstracts).

LINS, R. C. A Formação Pedagógica em Disciplinas de Conteúdo Matemático nas Licenciaturas em Matemática. **Revista de Educação**. Campinas: n.18, p.117-123, 2005a.

LINS, R. C. Categories of everyday life as elements organizing mathematics teacher education and development projects. In: ICMI, 15., 2005, Águas de Lindóia - Brazil. **Proceedings…** Brazil, 2005b. 1CD.

LINS, R. C. Design e implementação de um programa de formação continuada de professores de Matemática. In: LINS, R. C. **Projeto de Pesquisa Integrado submetido como parte de solicitação de concessão de bolsa de Produtividade em Pesquisa ao CNPq.** 2006a.

LINS, R. C. **A diferença como oportunidade para aprender**. In: XIV ENDIPE, 2008, Porto Alegre. Trajetórias e processos de ensinar e aprender: sujeitos, currículos e culturas. Porto Alegre: Edi PUCRS, v.3. p. 530 550, 2008.

LINS, R. C. Ensaio sobre como Macunaíma me ajudou a falar sobre Educação Matemática. **BOLEMA**, Rio Claro – SP, v. 25, n. 45, p. 251,298, dez. 2011.

LINS, R. C. **O Modelo dos Campos Semânticos: estabelecimentos e notas de teorizações.** In: Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática: 20 anos de História. ANGELO, C. L. et al. São Paulo: Midiograf, p. 11, 30. 2012.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas, SP: Papirus, 1997. (Perspectivas em Educação Matemática).

OLIVEIRA, V. C. A. **Sobre a produção de significados para a noção de transformação linear em Álgebra Linear**. 2002. 187p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

OLIVEIRA, V. C. **Uma Leitura sobre a Formação Continuada de Professores de Matemática Fundamentada em uma Categoria do Cotidiano**. 2011. 207f. Tese. (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

OLIVEIRA, V. C. **Sobre Ideias de Estranhamento e Descentramento na Formação de Professores de Matemática**. In: Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática: 20 anos de História. ANGELO, C. L. et al. São Paulo: Midiograf, p. 199, 216. 2012.

PROCÓPIO, R. B. **Geometria como um Curso de Serviço para a Licenciatura de Matemática: Uma Leitura da Perspectiva do Modelo dos Campos Semânticos**. 2011. 82p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Minas Gerais, 2011.

SILVA, A. M. **Uma análise da produção de significados para a noção de base em álgebra linear**. 1997. 163p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Santa Úrsula, Rio de Janeiro.

SILVA, A. M. **Sobre a dinâmica da produção de significados para a matemática**. 2003, 243p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.

SILVA, A. M. Uma Análise dos processos de ensino e aprendizagem a partir da produção de significados. In: XXI Seminário de Investigação em Educação Matemática. Aveiro. **XXI Seminário de Investigação em Educação Matemática**. Lisboa: Associação dos professores de matemática, v. único, p.587-596, 2010.

SILVA, A. M. Um Curso de Serviço para a Licenciatura em Matemática. **XIII Conferência Interamericano de Educação Matemática**. Recife: CIAEM, p.1-7, 2011.

SILVA, R. H. **Álgebra Linear como Curso de Serviço para a Computação**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP, Rio Claro, 1999.