Universidade Federal de Juiz de Fora
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Contextualizando Funções Matemáticas

Paulo Tadeu Gandra Campos

Juiz de Fora (MG)
Julho, 2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

Pós-Graduação em Educação Matemática

Mestrado Profissional em Educação Matemática

Paulo Tadeu Gandra Campos

Contextualizando Funções Matemáticas

Orientador(a): Prof^{a} Dr^{a}: Chang Kuo Rodrigues

Produto oriundo da Dissertação de Mestrado cujo título é A influência do cotidiano nas questões de função do Exame Nacional do Ensino Médio, apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Juiz de Fora (MG)

Julho, 2014

Paulo Tadeu Gandra Campos

Contextualizando Funções Matemáticas

Produto oriundo da Dissertação de Mestrado cujo título é A influência do cotidiano nas questões de função do Exame Nacional do Ensino Médio, apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Comissão Examinadora

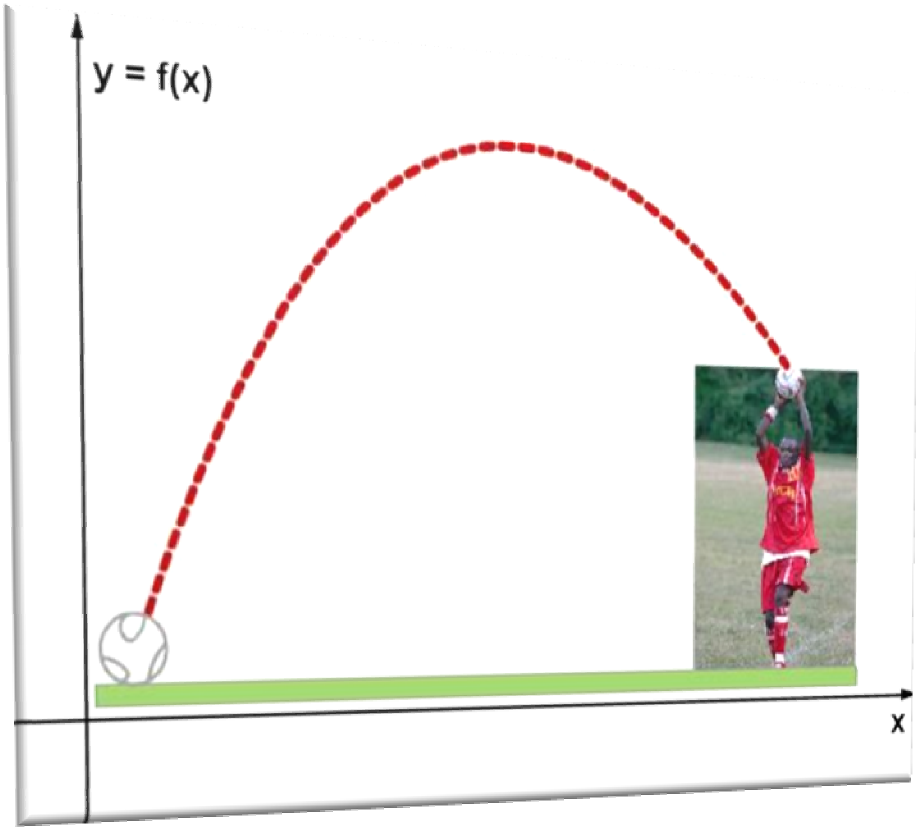
____
Prof(a). Dr(a). Chang Kuo Rodrigues.
Orientador(a)

____
Prof(a). Dr(a). Patrícia Nunes da Silva
Convidado(a) externo UFJF

____
Prof(a). Dr(a). Maria Cristina Araújo de Oliveira
Convidado(a) interno UFJF

Juiz de Fora, 11 de Julho de 2014.

Contextualizando Funções Matemáticas



Paulo Tadeu Gandra Campos

Chang Kuo Rodrigues

APRESENTAÇÃO

Este encarte de atividades integra a dissertação de Mestrado Profissional do Programa de Pós-Graduação *strictu sensu* da Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), cujo título é “A Influência do Cotidiano nas Questões de Função do Exame Nacional do Ensino Médio”.

A dissertação acima mencionada se originou a partir da percepção das mudanças ocorridas na Educação Básica, mais precisamente no Ensino Médio, provenientes da substituição da maioria dos clássicos vestibulares das universidades federais do país pelo Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Percebemos mudanças nos conteúdos, na fala dos professores, no livro didático e no modelo das questões, uma vez que, concordando ou não, o exame que seleciona os estudantes para o ingresso no ensino superior é quem, na maioria das vezes, dita os conteúdos a serem trabalhados na Educação Básica do nosso país.

Essa dissertação teve as seguintes questões de pesquisa (i) “as questões de matemática contextualizadas com situações do cotidiano e/ou de outras áreas do conhecimento podem ser mais eficazes, atingindo positivamente uma parcela maior de alunos com relação à aprendizagem dessa disciplina?” e (ii) “Nessa direção, eles desenvolveriam mais a *sensibilidade numérica*?”. Na tentativa de respondê-las, propomos aos estudantes do terceiro ano de uma escola particular de Viçosa a resolução de dois tipos de atividades. A primeira delas por nós classificada como “atividades de contexto matemático” e a segunda, classificada como “atividades de contexto cotidiano”, formada por questões que formulamos ou adaptamos.

Nesse sentido, apontamos um critério de equivalência para cada par de questões (contexto matemático e contexto cotidiano), utilizando as Competências e as Habilidades da Matriz de Referência do ENEM, a saber:

Para um par de questões ser considerado equivalente:

- As mesmas devem apresentar, no mínimo, uma competência em comum e mesmas habilidades segundo a matriz de referência do ENEM. Exceto, as habilidades que se referem à intervenção da realidade e a situações-problema, uma vez que estas não podem ser contempladas em questões de contexto matemático, pois as questões de contexto matemático são voltadas apenas para a matemática, não havendo conexão com o cotidiano.

- As mesmas devem apresentar o mesmo objeto matemático, diferindo, apenas, pelo contexto e conceitos em que estão inseridas.

Direcionamos tais questões para professores da Educação Básica com o intuito de deixar sugestões sobre como aproximar questões de contexto matemático das de contexto cotidiano, além de criar um modo de compará-las. Acreditamos que de posse de pares de questões equivalentes os professores poderão servir melhor seus alunos quanto ao novo modelo de questão praticado pelo ENEM, além de poder, junto de seu aluno, complementar os estudos dos conteúdos com questões que exigem maior interpretação (questões de contexto cotidiano).

Também deixamos a sugestão da utilização da Teoria Antropológica do Didático (TAD) tanto para a formulação de avaliações como para a correção das mesmas, pois a referida teoria permite ao professor analisar se os conteúdos trabalhados foram aprendidos, além de facilitar a identificação dos possíveis obstáculos apresentados pelos estudantes.

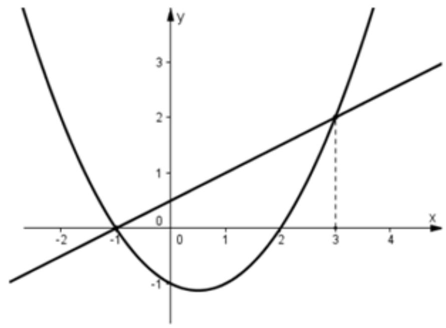
Dessa maneira, acreditamos estar contribuindo, para os docentes da Educação Básica, por deixar sugestões para a criação de atividades nos moldes do Exame Nacional do Ensino Médio.

Seguem abaixo os três pares de questões trabalhados durante o desenvolvimento da dissertação a qual esse produto é fruto, além de dois outros pares, exclusivos desse encarte.

A Questão 1, Figura 1, foi retirada do clássico vestibular da Universidade Federal de Juiz de Fora-UFJF, do ano de 2010.

Figura 1 – Questão 1 – UFJF 2010

Questão 1 (UFJF 2010) No plano cartesiano abaixo, estão representados os gráficos de uma função f, do 1º grau, e de uma função g, do 2º grau.



Considerando o conjunto $S = \{x \in \mathbb{R} : f(x) - g(x) > 0\}$, é correto afirmar que:

a) $S =]-1, 3[$ b) $S =]-1, 2[$ c) $S =]-\infty, -1[\cup]3, +\infty[$ d) $S =]3, +\infty[$ e) $S = \emptyset$

Disponível em: http://www.vestibular.ufjf.br/antenado/vestibular-e-pism/edicoes-anteriores/provas-e-gabaritos/pg2009/. Acesso em: 15 out 2013.

Para a resolução à luz da Teoria Antropológica do Didático, destacamos na Questão 1, Figura 1:

- *Tarefa* (*T*): Distinguir a função cujo gráfico é uma reta da função cujo gráfico é uma parábola e identificar para quais valores de x os valores numéricos da função f são superiores aos da função g.
- *Técnica* (τ):

A reta é o esboço do gráfico da função f. (1)

A parábola é o esboço do gráfico da função g. (2)

Sabendo quais são os gráficos de f e g, por meio de análise de gráficos, observamos que f está acima de g, para x variando de -1 até 3.

- *Tecnologia* (θ): Na passagem (1), concluímos que o gráfico de f é a reta, pois toda função do primeiro grau possui por gráfico uma reta.

Na passagem (2), concluímos que o gráfico de g é a parábola, pois toda função do segundo grau possui por gráfico uma parábola.

- *Teoria* (Θ): Na *tecnologia* (θ) utilizamos, primeiramente, o conceito de função polinomial do primeiro grau que é uma função cuja expressão geral é $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$. Devido ao alto grau de complexidade na demonstração de que toda função do primeiro grau possui por gráfico uma reta, deixamos tal explicação para a dissertação “A Influência do Cotidiano nas Questões de Função do Exame Nacional do Ensino Médio”, trabalho que gerador desse encarte.

Na segunda parte da *tecnologia* (θ) utilizamos o conceito de função polinomial do segundo grau, cuja expressão geral é $g(x) = ax^2 + bx + c$, a, b, c $\in \mathbb{R}$ e a $\neq$ 0. Devido ao alto grau de complexidade na demonstração de que toda função do segundo grau possui por gráfico uma parábola, deixamos tal explicação para a dissertação “A Influência do Cotidiano nas Questões de Função do Exame Nacional do Ensino Médio”, trabalho que gerador desse encarte.

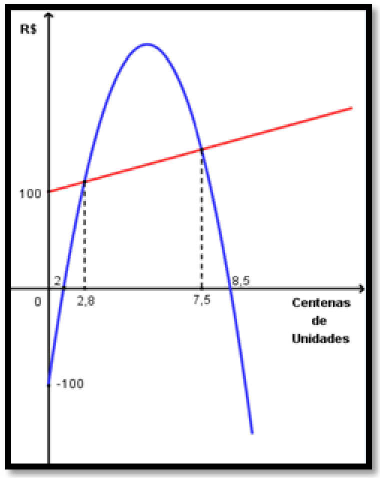
Segundo a Matriz de Referência do ENEM, essa questão apresenta as competências e as habilidades:

- Competência de área 5, “modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômica ou técnico-científicas, usando representações algébricas”. Abarcando as habilidades: “Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas” (H20) e “Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação” (H22).
- Competência de área 6, “interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação”. Com habilidades: “Resolver problemas com dados apresentados em tabelas e gráficos” (H25) e “Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos” (H26).

A seguir, segue a Questão proposta 1, Figura 2, que formulamos, nos baseando a partir da Questão 1 do clássico vestibular da Universidade Federal de Juiz de Fora-UFJF de 2010.

Figura 2 – Questão proposta 1

Questão proposta 1 O Departamento Financeiro de uma empresa de cosméticos apresentou um relatório referente aos lucros e/ou prejuízos do ano de 2010. O gráfico abaixo, contido no relatório, apresenta a função Lucro (L), do 2º grau e a função Custo (C), do 1º grau para a produção e venda de x centenas de unidades de cosméticos.



A faixa de número de peças produzidas e vendidas que compreende lucro superior aos custos dessa empresa é:

a) Entre -100 e 100. b) Entre 0 e 280. c) Entre 200 e 850.
d) Entre 280 e 750. e) Entre 280 e 850.

Fonte: Dados da pesquisa.

Para a resolução à luz da Teoria Antropológica do Didático, destacamos na Figura 2, o desenvolvimento da Questão proposta 1 elaborada por nós:

- *Tarefa* (*T*): Distinguir a função cujo gráfico é uma reta da função cujo gráfico é uma parábola, identificar em que faixa de número de cosméticos produzidos e vendidos teremos lucro maior que os custos e reconhecer a escala gráfica utilizada no eixo horizontal.
- *Técnica* (τ): Chamaremos Lucro (L) e Custo (C).

O gráfico de C é a reta (3)

O gráfico de L é a parábola. (4)

Sabendo quais são os gráficos de L e C, por meio de análise de gráficos, observamos que L está acima de C, entre 2,8 (x 100) e 7,5 (x 100) unidades de cosméticos produzidos e vendidos.

- *Tecnologia* (θ): Na passagem (3), concluímos que o gráfico de C é a reta, pois toda função do primeiro grau possui por gráfico uma reta.

Em (4), concluímos que o gráfico de L é uma parábola, pois toda função do segundo grau possui por gráfico uma parábola.

- *Teoria* (Θ): Primeiro, na *tecnologia* (θ), utilizamos o conceito de função do primeiro grau, que é uma função cuja expressão geral é y = ax + b, a $\neq$ 0, a, b $\in \mathbb{R}$. Pelos mesmos motivos apresentados na *Teoria* (Θ) da Questão 1, p.7, deixamos tal explicação para a dissertação "A Influência do Cotidiano nas Questões de Função do Exame Nacional do Ensino Médio", trabalho que gerador desse encarte.

Em um segundo momento, utilizamos o conceito de função do segundo grau, que é uma função cuja expressão geral é $y = ax^2 + bx + c$, a, b, c $\in \mathbb{R}$ e a $\neq$ 0. Devido ao alto grau de complexidade na demonstração de que toda função do segundo grau possui por gráfico uma parábola, deixamos tal explicação para a dissertação "A Influência do Cotidiano nas Questões de Função do Exame Nacional do Ensino Médio", trabalho que gerador desse encarte.

Quanto à Matriz de Referência do ENEM, essa questão apresenta as seguintes competências e as habilidades, assim como na questão anterior, Figura 2.

- Competência de área 5, "modelar e resolver problemas que envolvem variáveis <u>socioeconômicas</u> ou técnico-científicas, usando representações algébricas" (<u>grifo nosso</u>). Abarcando as habilidades: "Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas" (H20) e "Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação" (H22).
- Competência de área 6, "interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação". Com habilidades: "Resolver problemas com dados apresentados em tabelas e gráficos" (H25) e "Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos" (H26).

Assim, o par de questões apresentados acima contem as mesmas competências e habilidades segundo a Matriz de Referência do ENEM, além de apresentarem o mesmo objeto matemático função do primeiro e segundo graus, ou seja, são classificadas como equivalentes.

A Questão 2, Figura 3, foi retirada do vestibular da Universidade Federal de Juiz de Fora-UFJF, na modalidade Educação à Distância do ano de 2010.

Figura 3 – Questão 2 – UFJF EAD 2010

Questão 2 (UFJF EAD 2010) O valor máximo da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 7 - 2 \cdot sen(x)$, é igual a:

a) 5 b) 6 c) 7 d) 9 e) 11

Disponível em: http://vestibular.brasilescola.com/downloads/universidade-federal-juiz-fora.htm. Acesso em: 15 out 2013.

A seguir, a resolução, à luz da Teoria Antropológica do Didático, da Questão 2 do Programa Seletivo para Educação à Distância da Universidade Federal de Juiz de Fora, 2010, Figura 3:

- *Tarefa* (*T*): Calcular o máximo valor numérico da função f(x) fornecida.

- *Técnica* (τ):

$$-1 \leq sen(x) \leq 1 \quad (5)$$

$$sen(x) \geq -1 \quad E \quad sen(x) \leq 1 \quad (6)$$

$$2 \cdot sen(x) \geq -2 \quad E \quad 2 \cdot sen(x) \leq 2 \quad (7)$$

$$-2 \cdot sen(x) \leq 2 \quad E \quad -2 \cdot sen(x) \geq -2 \quad (8)$$

$$7 - 2 \cdot sen(x) \leq 7 + 2 \quad E \quad 7 - 2 \cdot sen(x) \geq 7 - 2 \quad (9)$$

$$\underbrace{7 - 2 \cdot sen(x)}_{f(x)} \leq 9 \quad E \quad \underbrace{7 - 2 \cdot sen(x)}_{f(x)} \geq 5 \quad (10)$$

$$5 \leq f(x) \leq 9 \quad (11)$$

- *Tecnologia* (θ): Em (5), a função trigonométrica seno é limitada, variando de -1 até 1.

Em (6), separação das desigualdades sucessivas em duas.

Em (7), a multiplicação de números positivos, no caso 2, em desigualdades, não altera o sentido das mesmas.

Em (8), a multiplicação de números negativos, no caso -1, em desigualdades altera o sentido das mesmas.

Em (9), a adição de valores iguais nos dois membros das desigualdades preserva o sentido das últimas.

Em (10), reconhecimento da expressão f(x) em cada uma das desigualdades.

Em (11), junção das duas desigualdades em uma única.

- *Teoria* (Θ): Para justificar a *tecnologia*, devido ao alto grau de complexidade na demonstração de que a função trigonométrica f(x) = sen(x), é limitada, deixamos tal explicação para a dissertação “A Influência do Cotidiano nas Questões de Função do Exame Nacional do Ensino Médio”, trabalho que gerador desse encarte.

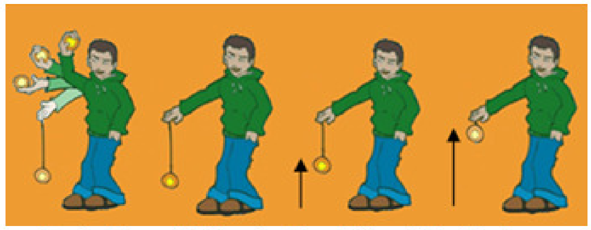
No que se refere à Matriz de Referência do ENEM, apontamos para a competência e habilidades:

- Competência de área 5 “modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnicos-científicas, usando representações algébricas”. Com as habilidades: “Identificar representações algébricas que expressam a relação entre grandezas” (H19) e “utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação” (H22).

A seguir, segue a Questão proposta 2, Figura 4, que surgiu inspirada nas ideias apresentadas na Questão 2, Figura 3.

Figura 4 – Questão proposta 2

Questão proposta 2 O ioiô é um brinquedo constituído de uma corda ou barbante conectado a uma peça de plástico ou acrílico, por exemplo, que amarrada a um dos dedos da mão pode criar bons momentos de diversão. Com movimentos de subida e descida, pessoas treinadas em manejar um ioiô são capazes de executar várias manobras.



Fonte: http://www.facebook.com/TulaBombonieereeCia (modificado). Acesso em: 03 Mai 2013.

A imagem acima mostra um garoto brincando com seu ioiô, no qual o brinquedo é arremessado para baixo até que atinja uma altura mínima e, assim, retorna para sua mão, ou seja, atinge a altura máxima. Suponha que a distância da mão do garoto até o chão se mantenha constante e que o movimento de descida e de subida do ioiô seja descrito pela função h(t) = 1 – 0,2 · sen(t), sendo h a altura em metros, do brinquedo, e t, o tempo decorrido, em segundos, após o lançamento do mesmo. A altura mínima alcançada por esse ioiô está entre:

a) 0,6 m e 0,8 m. b) 0,7 m e 0,9 m. c) 0,8 m e 1,0 m. d) 0,9 m e 1,1 m. e) 1,0 m e 1,2 m.

Fonte: Dados da pesquisa.

Segundo a Teoria Antropológica do Didático, a resolução da Questão proposta 2, Figura 4, é:

- *Tarefa* (*T*): Calcular a altura mínima alcançada pelo ioiô.
- *Técnica* (τ):

$$-1 \leq \mathrm{sen}(t) \leq 1 \qquad (12)$$

$$-1 \leq \mathrm{sen}(t) \quad \text{e} \quad \mathrm{sen}(t) \leq 1 \qquad (13)$$

$$-0{,}2 \leq 0{,}2 \cdot \mathrm{sen}(t) \quad \text{e} \quad 0{,}2 \cdot \mathrm{sen}(t) \leq 0{,}2 \qquad (14)$$

$$0{,}2 \geq -0{,}2 \cdot \mathrm{sen}(t) \quad \text{e} \quad -0{,}2 \cdot \mathrm{sen}(t) \geq -0{,}2 \qquad (15)$$

$$1 + 0{,}2 \geq 1 - 0{,}2 \cdot \mathrm{sen}(t) \quad \text{e} \quad 1 - 0{,}2 \cdot \mathrm{sen}(t) \geq 1 - 0{,}2 \qquad (16)$$

$$1{,}2 \geq \underbrace{1 - 0{,}2 \cdot \mathrm{sen}(t)}_{h(t)} \quad \text{e} \quad \underbrace{1 - 0{,}2 \cdot \mathrm{sen}(t)}_{h(t)} \geq 0{,}8 \qquad (17)$$

$$0{,}8 \leq h(t) \leq 1{,}2 \qquad (18)$$

- *Tecnologia* (θ): (12) A função trigonométrica seno é limitada, variando de -1 até 1.

(13) Separação da dupla desigualdade em duas.

(14) A multiplicação de números positivos, no caso, 0,2, em desigualdades, não altera o sentido das mesmas.

(15) A adição de valores iguais nos dois membros das desigualdades preserva o sentido das mesmas.

(16) Soma e subtração de números fracionários de mesmo denominador.

(17) Reconhecimento da expressão h(t) em cada uma das desigualdades.

(18) Junção das duas desigualdades em uma única.

- *Teoria* (Θ): Para justificar a *tecnologia* (θ), devido ao alto grau de complexidade na demonstração de que a função trigonométrica f(x) = sen(x), é limitada, deixamos tal explicação para a dissertação “A Influência do Cotidiano nas Questões de Função do Exame Nacional do Ensino Médio”, trabalho que gerador desse encarte.

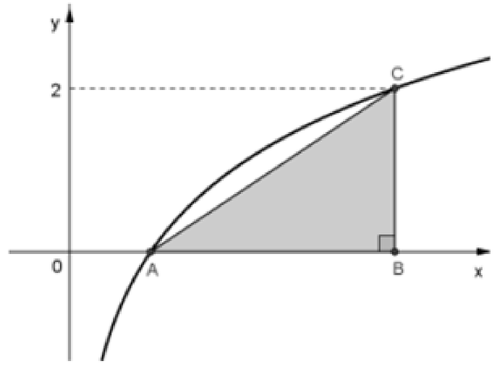
No que se refere à Matriz de Referência do ENEM, apontamos para a competência e habilidades:

- Competência de área 5 “modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnicos-científicas, usando representações algébricas”. Com as habilidades: “Identificar representações algébricas que expressam a relação entre grandezas” (H19), “utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação” (H22) e “avaliar propostas de intervenção na realidade por meio de conhecimentos algébricos” (H23).

A Questão 3, Figura 5, foi retirada do Programa de Ingresso Seriado Misto-PISM, do ano de 2009.

Figura 5 – Questão 3 – PISM I 2009

Questão 3 (PISM I 2009) No plano cartesiano abaixo, onde os eixos estão graduados em centímetros, está representado o gráfico da função f: $\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \log_2 x$.



O perímetro do triângulo ABC, retângulo em B, em centímetros, mede:

a) $5 + 2\sqrt{3}$ b) $5 + \sqrt{13}$ c) 5 d) 6 e) $6 + 2\sqrt{5}$

Disponível em: http://www.vestibular.ufjf.br/antenado/vestibular-e-pism/edicoes-anteriores/provas-e-gabaritos/pg2009/. Acesso em: 15 out 2013.

A resolução à luz da Teoria Antropológica do Didático, da Figura 5, Questão 3 do Programa de Ingresso Seletivo Misto da Universidade Federal de Juiz de Fora, 2009, a qual consiste em destacar:

- *Tarefa* (*T*): Calcular o comprimento de cada um dos lados do triângulo ABC e somá-los.
- *Técnica* (τ): O comprimento do cateto $\overline{BC}$ já está determinado, bastando projetar o mesmo sobre o eixo vertical. Assim $\overline{BC}$ = 2 cm.

Para obtermos o comprimento do cateto $\overline{AB}$, calculemos os valores de A e B e a diferença B – A.

$$f(B) = 2 \quad (19)$$

$$\log_2 (B) = 2 \quad (20)$$

$$B = 2^2 \quad (21)$$

$$B = 4 \quad (22)$$

e,

$$f(A) = 0 \quad (23)$$

$$\log_2 (A) = 0 \quad (24)$$

$$A = 2^0 \quad (25)$$

$$A = 1 \quad (26)$$

Assim, $\overline{AB}$ = B – A = 4 – 1 = 3.

Para calcularmos o comprimento da hipotenusa $\overline{AC}$, temos: $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \rightarrow \overline{AC}^2 = 3^2 + 2^2 \rightarrow \overline{AC}^2 = 13 \rightarrow$ AC = $\sqrt{13}$.

Finalmente, $\overline{AC} + \overline{BC} + \overline{AB} = \sqrt{13} + 2 + 3 = 5 + \sqrt{13}$.

- *Tecnologia* (θ): Nas passagens (34) e (38), utilizamos as informações contidas no gráfico fornecido no enunciado da questão.

Nas passagens (20) e (24), substituímos o símbolo f(x) pela expressão que a determina, a saber, $\log_2 (x)$.

Nas passagens (21) e (25), usamos a definição de logaritmo, $\log_b a = x \leftrightarrow a = b^x$, para calcularmos o valor numérico dos respectivos logaritmos.

Em (22) e (26), efetuamos os cálculos apresentados em, respectivamente, (21) e (25).

Para o cálculo da hipotenusa $\overline{AC}$, foi utilizado o Teorema de Pitágoras.

- *Teoria* (Θ): A definição de logaritmo, $\log_b a = x \leftrightarrow a = b^x$, utilizada na *tecnologia* é um meio matemático de obtermos o valor de logarítmo de “a” na base “b” ($\log_b$ a) que é o número que a base “b” deve ser elevado para obtermos o logaritmando “a”. A Tecnologia utilizada para o cálculo de $\overline{AC}$, devido ao alto grau de complexidade na demonstração do teorema de Pitágoras, deixamos tal explicação para a dissertação “A Influência do Cotidiano nas Questões de Função do Exame Nacional do Ensino Médio”, trabalho que gerador desse encarte.

No que tange à Matriz de Referência do ENEM, apontamos para as competências e habilidades:

- Competência de área 2 “utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela; com a habilidade “Identificar características de figuras planas ou espaciais”(H7)
- Competência de área 5 “modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnicos-científicas, usando representações algébricas”; com as habilidades: “interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre

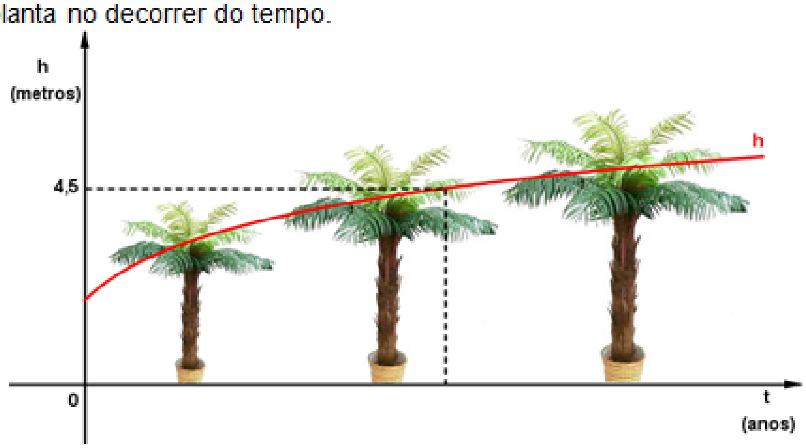
grandezas” (H20) e “utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação” (H22).

- Competência de área 6 “interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação”. Com as respectivas habilidades, (H24) e (H26), “usar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências” e “analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos”.

A seguir, segue a Questão proposta 3, Figura 6, que surgiu inspirada nas ideias apresentadas na Questão 3, Figura 5.

Figura 6 – Questão proposta 3

Questão proposta 3 (UFSCar/modificada) A altura média do tronco de certa espécie de árvore, que se destina à produção de madeira, evolui desde que é plantada, segundo o seguinte modelo matemático: $h(t) = 1{,}5 + \log_2(t + 1)$, com h em metros e t em anos.
O gráfico abaixo ilustra o ano em que uma árvore dessa mesma espécie foi plantada (t = 0 corresponde ao ano de 2005, t = 1 corresponde ao ano de 2006, ...) e a curva vermelha descreve o crescimento da planta no decorrer do tempo.



De acordo com o enunciado e o gráfico, considere as afirmativas a seguir:

I) A altura dessa árvore, em 2012, era de 4,5 metros.
II) Essa árvore foi plantada com 1,8 metros de altura.
III) O crescimento médio dessa árvore, nos três primeiros anos após o seu plantio, foi de aproximadamente 66 cm por ano.

Estão corretas as afirmativas:

a) Todas estão corretas. b) II e III estão corretas. c) I e II estão corretas.
d) I e III estão corretas. e) Nenhuma está correta.

Fonte: Dados da pesquisa.

A seguir, a resolução da Questão proposta 3, Figura 6, segundo a Teoria Antropológica do Didático:

- *Tarefa* (*T*): Analisar cada uma das três afirmativas decidindo por sua veracidade ou falsidade.
- *Técnica* (τ): I) Afirmação verdadeira, pois no ano de 2012, t = 7.

$$h(7) = 1{,}5 + \log_2(7 + 1) \quad (27)$$

$$h(7) = 1{,}5 + \log_2(8) \quad (28)$$

$$h(7) = 1{,}5 + 3 \quad (29)$$

$$h(7) = 4{,}5 \text{ metros} \quad (30)$$

II) Afirmação falsa, pois a árvore foi plantada em 2005 e t = 0.

$$h(0) = 1{,}5 + \log_2(0 + 1) \quad (31)$$

$$h(0) = 1{,}5 + \log_2(1) \quad (32)$$

$$h(0) = 1{,}5 + 0 \quad (33)$$

$$h(0) = 1{,}5 \text{ metros} \quad (34)$$

III) Afirmativa verdadeira. Em 2005, t = 0 e h(0) = 1,5 metros (visto na afirmação II). Em 2008, t = 3.

$$h(3) = 1{,}5 + \log_2(3 + 1) \quad (35)$$

$$h(3) = 1{,}5 + \log_2(4) \quad (36)$$

$$h(3) = 1{,}5 + 2 \quad (37)$$

$$h(3) = 3{,}5 \text{ metros} \quad (38)$$

Assim, o crescimento médio dessa árvore, nos três primeiros anos, após seu plantio é: $\frac{3{,}5 - 1{,}5}{3} \approx$ 0,66 metros = 66 centímetros por ano.

- *Tecnologia* (θ): Nas passagens (27), (31) e (35), substituímos os respectivos valores numéricos 7, 0 e 3 na função $h(t) = 1{,}5 + \log_2(t + 1)$ fornecida no enunciado da questão.

Nas passagens (28), (32) e (36), operamos com somas os valores substituídos nos respectivos passos anteriores.

Nas passagens (29), (33) e (37), usamos a definição de logaritmo, $\log_b a = x \leftrightarrow a = b^x$, para calcularmos o valor numérico dos respectivos logaritmos.

Em (30), (34) e (38), operamos com soma de números naturais.

A técnica (τ) utilizada em III ainda diz respeito à noção de Média Aritmética para calcularmos o crescimento médio da árvore nos três primeiros anos após seu plantio. Para tal, descobrimos o crescimento total nesses três anos, 3,5 – 1,5 = 2 metros, e dividimos pelo número de anos, 3.

- *Teoria* (Θ): A definição de logaritmo, $\log_b a = x \leftrightarrow a = b^x$, utilizada na *tecnologia* é um modo matemático de obtermos o valor de logarítmo de “a” na base “b” ($\log_b a$) que é o número que a base “b” deve ser elevado para obtermos o logaritmando “a”.

No que se refere à Matriz de Referência do ENEM, apontamos para as competências e habilidades:

- Competência de área 5 “modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnicos-científicas, usando representações algébricas”; com as habilidades: “interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas” (H20). “utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação” (H22) e “avaliar propostas de intervenção na realidade por meio de conhecimentos algébricos” (H23).
- Competência de área 6 “interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação”. Com as respectivas habilidades, (H24) e (H26), “usar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências” e “analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos”.
- Competência de área 7 “compreender o caráter aleatório e não-determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística”. Com a habilidade “utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação” (H29).

Seguem agora os dois pares de questões, nesta ordem, a primeira de contexto matemático e a segunda de contexto cotidiano, que são exclusivas deste encarte, mantendo-se o critério de equivalência apresentado nas páginas 4 e 5 desse encarte.

A Questão 4, Figura 6, foi retirada do Programa de Ingresso de Seleção Misto-PISM, do ano de 2009:

Figura 6 – Questão 4

Questão 4 (PISM I 2009) Dadas as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = x - 3$ e $g(x) = 2x - 8$, considere o conjunto $S = \{ x \in \mathbb{R} : f(x) \cdot g(x) > 0 \}$. Então:

a) $S = [3, 4]$ b) $S =]-\infty, 3[\cup]4, +\infty[$ c) $S = [4, +\infty[$

d) $S =]-\infty, 3]$ e) $S =]-\infty, 3] \cup [4, +\infty[$

Disponível em: http://www.vestibular.ufjf.br/antenado/vestibular-e-pism/edicoes-anteriores/provas-e-gabaritos/pg2009/. Acesso em: 15 out 2013.

No que se refere à Matriz de Referência do ENEM, apontamos para as competências e habilidades:

- Competência de área 5 “modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnicos-científicas, usando representações algébricas”; com as habilidades “interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas”(H20) e “usar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação” (H22).

A Questão 5, Figura 7, equivalente à Questão 4, Figura 6, foi retirada do clássico vestibular da Universidade Federal de Ouro Preto e adaptada para se enquadrar nos critérios de equivalência apresentados nas páginas 4 e 5:

Figura 7 – Questão 5

Questão 5 (UFOP 2009/modificada) A única sala de cinema de uma cidade tem capacidade para 400 expectadores e a média de público nos finais de semana é de 80 pessoas por sessão. Para aumentar a presença do público, o diretor do cinema resolveu reduzir o preço do ingresso, que custava R$ 6,00. Observou que, para cada redução de R$ 0,50 no preço do ingresso, o público aumentava em 40 pessoas. Considerando x a quantidade de descontos de R$ 0,50 dada no valor inicial do ingresso, uma empresa especializada em analisar o faturamento do comércio local forneceu as funções:

* $P(x) = 6 - \frac{x}{2}$, $x \geq 0$ que fornece o preço do ingresso, em reais, em função de x descontos de R$ 0,50;
* $N(x) = 400 + 40x$, $x \geq 0$ que fornece o número de pessoas frequentes ao cinema em função do número x de descontos de R$ 0,50.

A respeito da função $F(x) = P(x) \cdot N(x)$, $x \geq 0$, podemos afirmar:

a) A função F fornece a receita obtida com a venda dos ingressos e ela será positiva para valores de x entre 0 e 12.
b) A função F fornece o preço final do ingresso e ela será positiva para valores de x entre 0 e 12.
c) A função F fornece o número de ingressos vendidos e ela será positiva para valores de x entre 0 e 5.
d) A função F fornece o preço final do ingresso e ela será positiva para valores de x entre 0 e 5.
e) A função F fornece o número de ingressos vendidos e ela será positiva para valores de x entre -5 e 5.

Fonte: Dados da pesquisa.

No que tange à Matriz de Referência do ENEM, apontamos para as competências e habilidades:

- Competência de área 4 “construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano”; com a habilidade “analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação (H17).
- Competência de área 5 “modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnicos-científicas, usando representações algébricas”; com as habilidades “interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas”(H20) e “usar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação” (H22).

A Questão 6, Figura 8, foi retirada do vestibular da Universidade Federal de Juiz de Fora, versão Educação à Distância:

Figura 8 – Questão 6

Questão 6 (UFJF EAD 2010) No plano cartesiano, o gráfico de uma certa função

quadrática f : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f(x) = $ax^2 + bx + c$, é uma parábola que contém os pontos

Disponível em: http://www.vestibular.ufjf.br/antenado/vestibular-e-pism/edicoes-anteriores/provas-e-gabaritos/pg2009/. Acesso em: 15 out 2013.

No que tange à Matriz de Referência do ENEM, apontamos para a competência e habilidades:

- Competência de área 5 “modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas”; com a habilidade “Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos” (H21) e “utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação” (H22).

A Questão 7, Figura 9, equivalente à Questão 6, Figura 8, foi retirada do vestibular da Unicamp e adaptada para se enquadrar nos critérios de equivalência apresentados nas páginas 4 e 5:

Figura 9 – Questão 7

Questão 7 (Unicamp 2012/modificada) Um jogador de futebol chuta uma bola que descreve uma trajetória parabólica similar à de uma função quadrática, do tipo f(x) = $ax^2 + bx + c$. A bola que inicialmente se encontrava a 30 m do gol adversário, passa por cima desta trave e cai a uma distância de 40 m de sua posição original. Se, ao cruzar a linha do gol, a bola estava a 3 m do chão, a altura máxima por ela alcançada esteve entre:

a) 4,1 e 4,4 m.
b) 3,8 e 4,1 m.
c) 3,2 e 3,5 m.
d) 3,5 e 3,8 m.
e) 4,4 e 4,7 m.

Disponível em: http://vestibular.brasilescola.com/downloads/universidade-federal-juiz-fora.htm. Acesso em: 15 out 2013.

Em relação à Matriz de Referência do ENEM, apontamos para a competência e habilidade:

- Competência de área 2 “Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela”, com a habilidade “interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional”(H6).
- Competência de área 5 “modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas”; com a habilidade “Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos” (H21) e “utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação” (H22).

Finalizando, disponibilizamos um CD contendo todas as questões de função do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), de 2009 a 2013.