Razão como taxa:
Uma proposta de ensino para a sala de aula de matemática

Marilia Rios de Paula
Amarildo Melchiades da Silva

Juiz de Fora (MG)
Outubro, 2012

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

Pós-Graduação em Educação Matemática

Mestrado Profissional em Educação Matemática

Marilia Rios de Paula

Razão como taxa:
Uma proposta de ensino para a sala de aula de matemática

Orientador: Prof. Dr. Amarildo Melchiades da Silva

Produto Educacional apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Juiz de Fora (MG)

Outubro, 2012

SUMÁRIO

Apresentação

Caro professor,

Este texto que estamos apresentando é um produto educacional, isso significa que ele faz parte de uma dissertação de mestrado em Educação Matemática, intitulada *Razão como taxa: Uma proposta de ensino para a sala de aula de matemática,* e que tem o objetivo de informar sobre o tema e a proposta que elaboramos para o seu uso em sala de aula.

Sabemos hoje da necessidade das pesquisas chegarem até a sala de aula. A distância, que alguns professores dizem existir entre a pesquisa e a prática, a nosso ver, nesse momento, não ocorre.

Nosso objetivo é apresentar a você uma proposta de ensino sobre o conteúdo matemático Razão como taxa e suas aplicações.

Esperamos que este texto ajude em suas reflexões, e que ele o estimule a elaborar suas próprias tarefas.

Acreditamos ser esse um tema que possibilite a você, professor, explorar várias formas de produção de significados em sala de aula. Por isso, nosso projeto representa um estudo local na aritmética escolar, mas com objetivo de formar uma visão mais ampla do que acontece em sala de aula e informar a relevância desse conteúdo.

As observações que faremos – por exemplo, sobre a importância de se apresentar Razão como taxa no ensino fundamental – surgiram durante nossas pesquisas. Por isso, gostaríamos de recomendar que ao mesmo tempo em que você vai pensando durante o texto na sua prática de sala de aula, pense também de forma ampla, fora de seu contexto escolar.

Almejamos que a partir desse texto, possam surgir outras questões que nos farão continuar refletindo sobre esse tema. Vamos iniciar agora um processo sem data para terminar.

Pensamento Proporcional e Razão como Taxa

Nossa proposta de ensino passa por uma mudança na perspectiva de como o conteúdo Razão como taxa deve ser visto em sala de aula, pois junto à noção de Razão estão vinculadas a fração e o pensamento proporcional, que é o olhar diferenciado que nós temos para esse conteúdo e que queremos compartilhar agora com você.

Sobre as frações, vale ressaltar, que segundo Lins e Silva (2007), elas são um exemplo de como diferentes significados podem ser produzidos para um mesmo símbolo matemático. Você, como professor, já deve ter reparado as dificuldades que os alunos têm em lidar com os significados que podem ser produzidos para a fração.

Lins e Silva (2007) ressaltam a importância dos alunos produzirem alguns significados, percebendo suas diferenças e equivalências, pois isso é uma "característica importante das pessoas que pensam de forma autônoma" (LINS e SILVA, 2007, p.09). E esclarecem que com relação ao foco na aprendizagem dos números escritos em forma de fração:

> O que queremos é que a criança desenvolva *várias* maneiras de entender frações, que compreenda a relação entre elas e que saiba escolher qual delas é melhor numa determinada situação. (LINS e SILVA, 2007, p. 12).

Muitas vezes, a razão é apresentada ao professor, nos livros didáticos, no diálogo com outros colegas, apenas como uma fração com o conceito de parte-todo. Mas essa palavra "apenas" que nos deixa preocupados. Por mais que os professores observem em sua rotina que as frações são uma dificuldade para o aluno, raramente sabemos lidar com essa situação. A dificuldade dos alunos em lidar com frações se tornou um jogo de "empurra", em que, observando em nossa experiência, os professores procuram sempre um culpado para o fato do aluno não saber aquele determinado conhecimento.

Vamos expor nossa visão do tema Razão como taxa, junto ao pensamento proporcional. Sugerimos que esse conteúdo pode ser visto como parte de uma forma de pensar, que pode auxiliar você a lidar com esse tema de uma forma diferenciada.

A importância do pensamento proporcional está no fato do seu conceito ser formado pela ideia de razão e proporção, que apresenta diversas "representações fundamentais em nosso sistema numérico (valor de lugar, frações, números decimais, logaritmos) e que, gradualmente, tornaram-se parte da matemática tal como é ensinada hoje nas escolas" (CARRAHER, 2003, p.75)

Diferentemente de como é proposto hoje – um conteúdo dado no 7º ano do ensino fundamental – o pensamento proporcional é considerado um dos pilares fundamentais do currículo elementar e uma das bases do pensamento algébrico (BEHR et al,1995).

Segundo Behr et al (1995), antigas tentativas de definir o pensamento proporcional "levavam em conta primordialmente as respostas individuais a problemas de valor ausente" (BEHR et al, 1995, p.89), em que eram dados três valores de duas razões, para que o aluno encontrasse o quarto valor, por exemplo $\frac{x+1}{10}=\frac{6}{20}$. Porém, sabemos que essa visão é limitada e que serve apenas à resolução de algoritmos. Observamos também que o uso "prematuro de regras encoraja os estudantes a aplicar regras sem pensar e, desse modo, a habilidade de raciocinar proporcionalmente geralmente não se desenvolve" (WALLE, 2009, p. 384).

Para definirmos agora o que seria o pensamento proporcional, nos respaldamos em Walle (2009), que comenta que não é algo fácil de ser feito de forma breve ou que possamos fazer ou não, pois é um processo tanto qualitativo quanto quantitativo. Assim, o autor apresenta o que ele chama de características do pensamento proporcional, de acordo com Lamon (1999):

- Possuem um *senso de covariação*. Isto é, eles compreendem relações em que duas quantidades variam juntas e são capazes de perceber como a variação de uma coincide com a variação de outra.
- Reconhecem *relações proporcionais* como distintas de relações não-proporcionais em contextos do mundo real.
- Desenvolve uma ampla variedade de *estratégias* para resolver proporções ou comparar razões, a maioria baseada em estratégias informais em vez de algoritmos prescritos.
- Compreendem razões como entidades distintas representando uma relação diferente das quantidades que elas comparam. (WALLE, 2009, p.384)

Observamos então, que para o aluno desenvolver o pensamento proporcional "é útil ter uma boa ideia do que constitui uma razão e uma proporção e em que contextos essas ideias matemáticas aparecem" (WALLE, 2009, p. 383)

Segundo Walle (2009), o pensamento proporcional "representa a habilidade de começar a compreender as relações multiplicativas enquanto a maioria dos conceitos aritméticos é de natureza aditiva" (WALLE, 2009, p. 382)

Como exemplo, apresentaremos dois problemas.

Há um mês duas árvores que mediam 1m e 1,2m crescem, respectivamente, para 1,2m e 1,4m. Qual árvore cresceu mais?

Nesse contexto, podemos pensar em várias respostas, uma opção é que as duas cresceram a mesma coisa – *relação aditiva* – pois se adicionou a mesma quantidade nas duas. Outra opção é observar, qual a relação entre o que cresceu e o que era antes, a primeira cresceu dois décimos (2/10 ou 0,2) de sua altura original e a segunda cresceu um sexto (1/6 ou aproximadamente 0,17) de sua altura – *relação multiplicativa* – sendo então a primeira a crescer mais. A segunda opção é uma *visão proporcional* dessa situação.

Vamos pensar agora o outro problema:

Dois amigos fizeram uma aposta para ver quem emagreceria mais em três meses de dieta. Camila pesava 60 kg e perdeu 6 kg, Bruno pesava 100 kg e perdeu 9 kg. Quem emagreceu mais?

Com um pensamento *aditivo,* Bruno emagreceu mais, pois perdeu *mais* quilos que Camila. Porém, se pensarmos de forma *proporcional – relação multiplicativa* – Camila emagreceu mais, pois perdeu 10% do peso que tinha antes, enquanto Bruno perdeu 9%.

Observe que nos dois exemplos, todas as respostas são possibilidades, a habilidade de compreender a diferença entre elas é uma indicação de pensamento proporcional (WALLE, 2009).

Segundo Walle (2009), pesquisas fornecem algumas orientações aos professores de como ajudar os alunos a desenvolver processos de pensamento proporcional. Entre elas, gostaríamos de citar:

> - Forneça tarefas de razão e de proporção em uma grande variedade de contextos. Estes podem incluir situações envolvendo medidas, preços, contextos geométricos e outros elementos visuais e taxas de todos os tipos.
> - Encoraje a discussão e a experimentação em predizer e comparar razões. Ajude as crianças a distinguir entre comparações proporcionais e não proporcionais fornecendo exemplos de cada tipo e discutindo as diferenças. (WALLE, 2009, 385)

Considerando às orientações acima de Walle (2009), apresentaremos algumas tarefas como exemplo para serem usadas em sala de aula e para os professores elaborarem outras.

Dissemos anteriormente, que o pensamento proporcional tem em sua *base* o uso de razões e proporções. "*Resolver uma proporção* envolve aplicar uma razão conhecida a uma situação que seja proporcional" (WALLE, 2009, p. 383, grifos do autor). E "uma *razão* é um número que relaciona duas quantidades ou medidas dentro de uma dada situação através de uma relação multiplicativa (em contraste com uma relação de diferença ou aditiva)" (WALLE, 2009, p. 383).

Walle (2009) apresenta três ideias que se constituem de forma distinta, mas que podem se relacionar quando o aluno está começando a produzir significados para razão: Parte-todo, parte-parte e como taxa.

As Razões, como parte-todo, são uma comparação entre partes e o todo, como por exemplo, "a relação entre o número de meninas em uma turma" (WALLE, 2009, p. 383). Já as razões como parte-parte apresentam a relação entre uma parte de um todo e outra parte desse mesmo todo, por exemplo, o número de meninas e meninos de uma turma.

A ideia de razão como taxa que pode ser entendida como a "razão entre as variações de duas grandezas, das quais a primeira é dependente da segunda" (WALLE, 2009, p.383). Devemos observar que nas relações parte-todo e parte-parte estamos trabalhando com o mesmo tipo de grandeza, sendo esse o maior diferencial para o uso de razão como taxa que apresenta duas grandezas diferentes. Para essa perspectiva, o autor apresenta exemplos como: as taxas de velocidades, que são a comparação entre tempo e distância, o número de pessoas por barco, que é a comparação entre número de pessoas e espaço no barco, nesses exemplos, observamos a relação entre grandezas distintas.

Com relação à ideia de razão e proporção, o autor expõe que:

> uma razão é um número que expressa uma relação multiplicativa que pode ser aplicada a uma segunda situação onde as quantidades ou medidas *relativas* sejam as mesmas que na primeira situação. Uma proporção é uma declaração de igualdade entre duas relações. (...) *Resolver uma proporção envolve* aplicar uma razão conhecida a uma situação que seja proporcional (WALLE, 2009, p.383, grifos do autor)

Observamos que na definição de Razão como taxa, ela é *um número* que representa a relação entre dois *outros números*, em outras palavras, atividades com razões apresentam a criação de novas unidades pela comparação de duas anteriores; possibilitam criar contextos de várias formas e tarefas com possibilidades de diferentes produções de significados. Considere a seguinte tarefa.

Em uma viagem da cidade A para cidade B, que estão a uma distância de 360 km uma da outra, levou-se 4 horas para percorrer todo trajeto.

Distância e tempo são entidades distintas, ao realizar a razão entre elas podemos representar por 360/4 = 90 um número que não é representação nem de distância nem de tempo, e sim distância por tempo. Devemos nos questionar também, por que não utilizamos na forma contrária, tempo por distância, ou seja, no exemplo, 4/360= 0,0111..., seria dito 0,0111... horas por quilometro. As duas formas de se representar a razão estão corretas, e são chamadas de *razão como taxa,* cabe ao professor observar a que possibilitaria uma maior produção de significado nos alunos.

Quando optamos por apresentar o tema Razão como taxa, levamos em consideração o que se encontra no documento do National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) com relação ao desenvolvimento de atividades relacionadas a razões e proporções. Eles afirmam que estes temas são “de importância tão grande que merecia qualquer tempo e esforço gastos para assegurar o seu desenvolvimento cuidadoso" (NCTM, 1982, pg.82).

Olhando a sala de aula a partir de uma Teoria em Educação Matemática

Vamos apresentar aqui nosso referencial teórico que é parte fundamental nessa proposta de ensino, pois pode auxiliá-lo a entender melhor a dinâmica que ocorre em sala de aula.

Hoje sabemos que, mesmo ao apresentarmos um conteúdo matemático de forma organizada e linear não temos a garantia de que a aprendizagem irá ocorrer.

As dificuldades de nossos alunos nos parecem, às vezes, incompreensíveis. Por mais que sejam ensinados certos conteúdos, parece muitas vezes que os alunos não estão entendendo o que estamos falando.

Vamos refletir um pouco sobre nossa sala de aula.

Você, enquanto professor, depois de lecionar o conteúdo em uma aula que considerou ótima, já questionou ao aluno que estava mais atento o que ele entendeu?

Acredite: a resposta provavelmente não será o que você espera. A apresentação do conteúdo não é uma garantia de que o aluno, que quer aprender, irá conseguir entender o que você está expondo. O que estamos querendo salientar é que o processo comunicativo nunca ocorre de forma plena e o que você diz, nem sempre é o que o aluno entende.

Vamos apresentar um exemplo real de sala de aula.

Professora: - gente, para somar fração tem que ter o denominador igual, certo?

Alunos: - certo!

Professora: - temos então que encontrar as frações equivalentes para depois somar o numerador. (expõe no quadro $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\rightarrow \frac{3}{6}+\frac{2}{6}\rightarrow \frac{5}{6}$*)*

- entenderam?

Alunos: - sim!

Professora: - agora façam o seguinte exemplo para mim: $\frac{2}{3}-\frac{1}{4}$

Aluna:- professora olha o que eu fiz (no caderno $\frac{0,5}{0,75}-\frac{0,66}{1,33}$*)*

Professora: - por que você fez isso?

Aluna: - ué, na soma multiplica e na subtração dividi, mas deu isso, pode?

Veja que a aluna estava falando de outras operações e fez outras associações diferentes do que a professora esperava. Ao questionar, conseguiu entender como a aluna estava entendendo a questão.

É relevante, professor, que você observe que a aluna produziu um conhecimento mesmo não sendo o esperado. Partindo desse exemplo, configuramos a importância de ouvir o aluno, a fim de determinar sua compreensão sobre o conteúdo, e assim iniciarmos uma conversa.

Antes de continuar sua leitura, pense um pouco em sua sala de aula, será importante para nossa conversa a partir de agora.

Apresentaremos a seguir, as noções mais importantes do nosso referencial teórico, tais como as citadas anteriormente: *produção de significado, enunciação, conhecimento, afirmação e justificação.*

Nosso referencial teórico é o *Modelo dos Campos Semânticos (MCS)* proposto por Lins (1999, 2001, 2004, 2005), presente em Silva (2003), que compartilha ideias com as teorias desenvolvidas por Vygotsky (1993, 1994) e Leontiev (1984).

Nossa identificação com essa teoria se estabelece pelo fato de acreditarmos que ela apresenta elementos que nos permitem ter uma visão melhor do processo de ensino e aprendizagem em matemática que se estabelece na sala de aula.

Observamos em nossa prática docente um consenso entre Educadores Matemáticos da importância de se dar voz ao aluno. Na nossa perspectiva, o MCS nos permite isso, pois, apresenta noções que possibilitam uma análise, que a nosso ver, se torna mais consistente na medida em que apresenta categorias que nos possibilitam, por exemplo, entender a situação que foi exposta acima.

Por se tratar de um modelo teórico epistemológico, o entendimento do que venha ser conhecimento é apresentado nos seguintes termos:

> Conhecimento é entendido como uma **crença** - algo que o sujeito acredita e expressa, e que caracteriza-se, portanto, como uma **afirmação** – junto com o que o sujeito considera ser uma **justificação** para sua **crença-afirmação**. (LINS, 1993b, p.86, grifos do autor).

A crença, a afirmação e a justificação são, portanto, os três elementos constitutivos da caracterização de conhecimento. Destacamos o fato de que a justificação é importante para que aja crença e afirmação, não basta que o sujeito tenha a crença e apresente uma afirmação, sua justificação para elas, segundo Lins (1999), é que autoriza o sujeito a produzir a enunciação. Em outras palavras, "é nas justificações que a diferença ocorre quando examinamos conhecimentos enunciados a partir de um mesmo texto." (LINS, 1994, p.42)

A partir dessa caracterização, vão surgindo algumas implicações importantes, como o fato de que como uma crença-afirmação pode apresentar diferentes justificações, elas se constituem como conhecimentos diferentes (Lins, 1993). Para ilustrar, um exemplo que nos ocorre é: Quando afirmamos que $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$ (crença-afirmação), uma justificação dada por uma criança poderia ser: para somar essas frações encontro as frações equivalentes que apresentem denominadores iguais e depois somo o numerador; outra justificação dada por outra criança poderia ser: encontro o mínimo múltiplo comum entre os denominadores, esse resultado passa a ser o *novo denominador* e realizo a *receita:* divido pelo denominador e multiplico pelo numerador, depois somo os numeradores.

Assim, no exemplo anterior, apresentamos duas justificações para uma mesma crença-afirmação, e isso se apresenta em nossas salas de aula todos os dias. As justificações distintas podem fazer com que o professor analise como o aluno está pensando aquele determinado conteúdo, o que na nossa perspectiva, se faz de grande importância em uma sala de aula.

Outra implicação de se caracterizar conhecimento como proposto, segundo Lins, é que "conhecimento é algo do domínio da enunciação" (Lins, 1999, p.88) e, portanto, "não há conhecimento em livros enquanto objetos, pois ali há apenas enunciados. É preciso a enunciação efetiva daqueles enunciados para que eles tomem parte na produção de conhecimentos" (Lins, 1999, p.89).

Existem nos livros, resíduos de enunciação. Enfatizamos aqui, que também por isso a transmissão de conhecimento não é algo que seja possível, visto que quem adquiriu o conhecimento é o próprio sujeito da aprendizagem.

Como o conhecimento se dá a partir da produção de significados, observamos à necessidade de se esclarecer as noções de significado e produção de significados, para darmos continuidade à apresentação dessa teoria.

Segundo Silva (2003), em sua versão atual, a noção de significado de um objeto, deve ser entendida como aquilo que o sujeito pode e efetivamente diz sobre um objeto no interior de uma atividade[1]. Como consequência, dizer que um sujeito produziu significados é dizer que ele produziu ações enunciativas a respeito de um objeto no interior de uma atividade. Além disso, produzir significados não se refere a tudo o que numa dada situação o sujeito poderia ou deveria dizer de um objeto e sim o que ele efetivamente diz sobre aquele objeto no interior daquela atividade.

No parágrafo anterior, a palavra objeto é usada indiscriminadamente para ressaltar sua importância na produção de significado do sujeito, segundo Silva (2003) “os objetos são constituídos enquanto tal através do que o sujeito diz que eles são” (SILVA, 2003, p.9). Ou seja, quem define o objeto é o sujeito durante sua produção de significado.

A importância de se analisar a produção de significado é apresentada por Lins (1999) quando ele afirma que: “Para mim, o aspecto central de toda aprendizagem humana – em verdade, o aspecto central de toda cognição humana – é a produção de significados”. (LINS, 1999, p.86)

Outro pressuposto do MCS, segundo Lins (1999), está na posição de se acreditar que “somos todos diferentes” (cognitivamente), em uma perspectiva Vygotskyana, em oposição à perspectiva Piagetina em que “somos todos iguais”.

Lins observa que “somos todos diferentes” não se trata de personalidades ou aparências diferentes, esclarece afirmando que:

---

[1] A noção de atividade, proposta por Leontiev, “é uma forma complexa de relação homem-mundo, que envolve finalidades conscientes e atuações coletivas e cooperativas. (...) é realizada por meio de **ações** dirigidas por metas, desempenhas pelos diversos indivíduos envolvidos na atividade. O resultado da atividade como um todo, que satisfaz à necessidade do grupo, também leva à satisfação das necessidades de cada individuo, mesmo que cada um tenha se dedicado apenas a uma parte específica da tarefa em questão”. (OLIVEIRA, 2008, p. 98)

> Para mim, “somos todos diferentes” refere-se ao fato indicado por Vygotsky, de que, dada a plasticidade do cérebro humano, a menos que algo/alguém intervenha, nosso caminho natural é divergirmos fortemente nas constituições de nosso funcionamento cognitivo (LINS, 1999, p.79).

Ao assumir esse pressuposto, uma consequência imediata está na mudança de pensar os processos de ensino e aprendizagem. Sendo que “somos todos diferentes”, apresentamos significados diferentes, e muito importantes, *temos formas distintas de produzir significado* para a mesma coisa, o que torna a sala de aula um espaço de constante mudança e análise, pois para Lins “o que se aprende é a *legitimidade* de certos *modos de produção de significados*” (LINS, 2008, p. 543, grifos do autor), e não conteúdos, regras, técnicas, ou seja, existe uma mudança no foco da sala de aula.

Como exemplo, o posicionamento com relação à função da avaliação deve ser o de “buscar um olhar que permita ler o processo em andamento e em mudança” (LINS, 1999, p.86).

Sendo assim, não podemos mais dizer que na sala de aula o conhecimento é transmitido pelo professor, e sim, que o professor tem um papel em que ele se propõe a pensar de forma diferente durante a conversa com o aluno. Quanto a isso, completamos que:

> Na realidade, a psicologia nos ensina a cada instante que, embora dois tipos de atividades possam ter a mesma manifestação externa, a sua natureza pode diferir profundamente, seja quanto à sua origem ou à sua essência. Nesses casos são necessários meios especiais de análise científica para pôr nu as diferenças internas escondidas pelas similaridades externas. A tarefa da análise é revelar essas situações. (VIGOTSKI, 2007, p.66)

Segundo Lins (1999), com essa perspectiva, durante a atividade, o professor e o aluno estabelecem a seguinte relação:

> Não sei como você é, preciso saber. Não sei também onde você está (sei apenas que está em algum lugar); preciso saber onde você está para que eu possa ir até lá falar com você e para que possamos nos entender, e negociar um projeto no qual eu gostaria de estivesse presente a perspectiva de você ir a lugares novos (LINS, 1999, p.85)

Com isso, segundo Lins (2008) o professor, que ao ouvir uma resposta de um aluno, se interessar em saber os objetos constituídos e os significados produzidos para eles, pode estabelecer nesse momento um compartilhamento de modos de produção de significados, que podem ser diferentes, e com relação a essa diferença Lins (2008) propõem que:

> No compartilhamento da *diferença* está, eu penso, a mais intensa oportunidade de aprendizagem (para ambos): é apenas no momento em que posso dizer "eu acho que entendo como você está pensando" que se torna legítimo e simétrico dizer, à continuação, "pois eu estou pensando diferente, e gostaria que você tentasse entender como eu estou pensando" (LINS, 2008, p.543).

E completamos:

> Vou insistir em um ponto no qual já toquei: penso que a mais intensa oportunidade de aprendizagem acontece no momento em que o professor e aluno(s) compreendem que as *legitimidades* de cada um, naquele momento, são diferentes. (LINS, 2008, p.547)

Seguindo essa direção, para Lins, ensinar é sugerir modos de produção de significados e aprender é internalizar modos legítimos de produção de significados. (LINS, 2008, p. 543)

Outro ponto que Lins destaca, é que há situações em que "a pessoa já *sabia fazer*, mas não sabia que *podia fazer aquilo naquela situação* (contexto, atividade)" (LINS, 2008, p.543). Nesse caso, alguém mais experiente pode emprestar à pessoa a legitimidade que a situação requer e, a partir do momento que essa legitimidade for internalizada, o aprendiz dispensa a presença do outro. Segundo Lins, não cabe ao professor oferecer uma legitimidade que não lhe foi requerida. O papel do professor é conhecer as legitimidades do aluno, naquela atividade, e saber em que direção o aluno está falando (LINS, 2008).

Nesse contexto, devemos observar que para nosso referencial teórico não existe o erro na forma tradicionalmente vista e sim produções de significado distintas, nas palavras de Lins (2004):

> (...) eu aprendi que a diferença não deve ser eliminada, e sim *percebida e aceita*, para que possa estar presente a proposta de que você, eventualmente, seja capaz de pensar como eu *quando quiser*, assim como eu, enquanto professor, vou tentar o melhor que posso

> para entender como você pensa. Não quero *corrigir* você, e sim lhe ajudar a crescer, sem que você tenha que abandonar outras maneiras de produzir significado para o que lhe aparece" (LINS, 2004b, p.7).

Nossa análise da produção de significados dos alunos é feita com base nos pressupostos do Modelo dos Campos Semânticos.

Segundo Silva (2003):

> a partir do momento que uma pessoa se propõe a produzir significados para o resíduo de uma enunciação, é possível observar o desencadeamento de um processo – o processo de produção de significados – que envolve:
>
> i) A constituição de objetos – coisas sobre as quais o sujeito sabe dizer algo e diz – que permite observar tanto os novos objetos que estão sendo constituídos quanto os significados que estão sendo produzidos.
>
> ii) A formação de um núcleo: as estipulações locais, as operações e suas lógicas.
>
> iii) A produção de conhecimento.
>
> iv) Os interlocutores – quando discutimos o processo comunicativo.
>
> v) As legitimidades, isto é, o que é legítimo ou não dizer no interior de uma atividade. (SILVA, 2003, p. 66)

Esses são os elementos que utilizaremos em nossas análises da produção de significados dos sujeitos de pesquisa.

Com o objetivo de reforças nossas crenças, acrescentaremos um resumo dos principais elementos do MCS apresentados por Lins (1999) da seguinte forma:

> Os principais elementos do modelo estão postos: significado, conhecimento, interlocutores, núcleos/estipulações locais, objetos. E também outras noções essenciais: atividade, espaço comunicativo, texto, legitimidade.
>
> 1 o elemento-chave é a re-caracterização da noção "conhecimento": conhecimento é uma crença-afirmação junto com uma justificação que me autoriza a produzir aquela enunciação:
>
> - Conhecimento é algo do domínio da enunciação,
> - Sempre há um sujeito do conhecimento (e não do conhecer),
> - O papel da justificação é produzir legitimidade para a minha enunciação,
> - Um texto é constituído como um resíduo de uma enunciação;
>
> 2 toda produção de conhecimento é feita na direção de um interlocutor que, acredito, produziria a mesma enunciação com a mesma justificação:
>
> - O compartilhamento de interlocutores constitui um espaço comunicativo;
>
> 3 o conjunto de estipulações locais – que funciona como verdades absolutas locais – constitui um núcleo com relação ao qual produzo significados/conhecimentos:
>
> - Estas estipulações são compartilhadas com o interlocutor;
>
> 4 é na produção de significado que se constitui objetos:

- A produção de significados se dá sempre no interior de atividades. (LINS, 1999, p.88)

Para ilustrar como podemos utilizar o MCS, vamos retornar a um exemplo exposto anteriormente e o que seria a crença-afirmação e a justificação:

Quando afirmamos que $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$ (crença-afirmação), uma justificação dada por uma criança poderia ser: para somar essas frações encontro as frações equivalentes que apresentem denominadores iguais e depois somo o numerador; outra justificação dada por outra criança poderia ser: encontro o mínimo múltiplo comum entre os denominadores, esse resultado passa a ser o novo denominador e realizo a receita: divide pelo denominador e multiplica pelo numerador, depois somo os numeradores.

Note que os alunos apresentaram duas *justificativas* diferentes para uma mesma resposta, dizemos, então, que eles estão operando em *núcleos/estipulações locais* diferentes. Segundo Lins (1999),

> estas estipulações locais, com relação às quais se produzem significados, são sempre constituídas como tal dentro de atividades, e como parte do processo que é esta atividade. (LINS, 1999, p. 87)

Ao observar o *resíduo de enunciação* $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ e *produzir significado* para ele, o sujeito vai constituindo os *objetos* que vão surgindo durante a atividade. Em outras palavras, os objetos vão se formando a partir da produção de significado dos alunos.

E o *resido de enunciação* vai se constituindo em *texto* na medida em que o aluno vai produzindo significado para ele.

Assim o aluno apresenta $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$, pois ele tem uma *justificativa* para essa resposta.

O que queremos ressaltar nesse momento apresentando algumas noções do MCS, é que o professor deve observar a *justificativa* do aluno para o *conhecimento* que ele apresenta. Mesmo que o professor julgue *errado* o que foi proposto pelo aluno, é importante que ele saiba *de onde* veio aquele conhecimento, por isso, para nos não existe o *erro,* visto que o aluno tem uma *justificativa* para sua resposta, ele estava operando de alguma forma, que pode não ser a correta segundo a visão do professor, mas estava produzindo seus significados.

O MCS tem sua grande importância para nossa prática docente e para esta proposta de ensino quando possibilita, através de seus pressupostos, que olhemos para as coisas que acontecem em sala de aula de uma maneira diferente e não baseada no senso comum.

Nossa proposta de ensino

Apresentamos aqui dois momentos, que juntos formam nossa proposta de ensino.

A forma diferenciada de se pensar a Razão como taxa dentro de uma perspectiva em que esse conteúdo faz parte do pensamento proporcional, exige uma mudança de postura na sala de aula.

Nossa proposta consiste em um posicionamento na sala de aula pautado na produção de significado dos alunos. Ao professor cabe sugerir modos de produção de significados, para gerar discussões entre nossos alunos com relação ao pensamento proporcional, de forma especifica ao conteúdo Razão como taxa.

Nossas Tarefas e Sugestões de Temas

Projetamos algumas tarefas para a inserção da noção de razão como taxa, elaboradas a partir de nossos pressupostos teóricos e orientada por objetivos. Essas tarefas que serão apresentadas podem ser usadas pelo professor como sugestão de um primeiro contato dos alunos com o tema.

As tarefas foram produzidas baseadas em algumas características gerais, tais como:

> i) estimular a produção de significados dos alunos quando eles se propuserem a resolver as tarefas propostas;
> ii) possibilitar a ampliação das possibilidades de estratégias de resolução dos alunos (ou como dizemos sua maneira de operar), ao invés de reduzi-las;
> iii) possibilitar que vários elementos do pensar matematicamente estejam em ação, como a análise da razoabilidade dos resultados, a busca de padrões nas resoluções, o desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas. (LOTH, 2011, p. 64)

Além disso, uma “boa” tarefa, segundo Loth (2011), deverá permitir ao professor:

> a) Observar os diversos significados sendo produzidos pelos alunos. Este é um ponto importante pois será parte da função do professor que esses significados sendo produzidos se tornem objeto de atenção de todos os outros alunos;
> b) Sugerir a seus alunos que os significados produzidos por ele e/ou os significados oficiais da matemática, são um, entre os vários significados que podem ser produzidos a partir daquela tarefa;
> c) Discutir os significados matemáticos, junto com os significados não-matemáticos que possivelmente estarão presentes naquele espaço comunicativo. (LOTH, 2011, 64)

Na prática, então, o que estamos fazendo professor é produzir um protótipo de tarefa orientanda por objetivos e pressupostos teóricos.

Para analisar as potencialidades desse protótipo, desenvolvemos uma pesquisa de campo com a finalidade de investigar que significados são produzidos pelos sujeitos de pesquisa para a tarefa proposta que você pode ter acesso na dissertação ao qual esse produto é parte integrante.

A nossa motivação para a elaboração das tarefas possuiu como propósito principal a necessidade de atividades que estimulem os alunos a produzirem significados, e a apresentação ao professor de um conjunto de tarefas sobre razão como taxa, para que ele possa modificá-las e criar outras de acordo com suas necessidades.

Não usaremos os termos resolução de problemas ou modelagem matemática em nenhum momento, pois, não queremos sugerir nenhuma filiação com estas perspectivas em nosso trabalho.

Nossa ideia foi a de produzir tarefas com exemplo que podem ser usadas em sala de aula, e que nos permitam como professores, identificar na fala dos alunos sua maneira de operar e a lógica de suas operações, além de outros elementos do MCS que nos possibilitem identificar dificuldades de aprendizagem, e em que direção os alunos estão falando, por exemplo.

O processo de elaboração das tarefas foi norteado pelas seguintes características:

I- As tarefas foram pensadas de forma que fosse possível sua utilização em salas reais de matemática, sendo esse um dos objetivos da pesquisa de campo, observar as potencialidades e limitações que deveriam ser trabalhadas posteriormente para ter uma melhor aplicabilidade.

II- As tarefas apresentam uma contextualização que permitam ao aluno aprender matemática, produzindo significados que vão além da matemática a partir da observação do que aqueles números podem trazer de informação. O contexto não é utilizado como motivação, e sim por sua relevância ao proporcionar reflexões e debates, tornando possível:

> que os alunos venham a dominar um certo tipo de pensamento, certas formas de produzir significado – , e nos permitir falar dos significados que os alunos estão efetivamente produzindo – isto é, onde eles estão. (LINS e GIMENEZ, 1997, p.121)

III- Permitir que o aluno tenha a experiência com situações-problema que possibilitem diferentes tipos de respostas com a apresentação de distintos tipos de produção de significado, o que pode estimular o aluno na sua tomada de decisão nos momentos da atividade, pois ele não terá um algoritmo pronto para resolver as tarefas.

IV- Tecnicamente, segundo os pesquisadores que tem o MCS como referencial teórico, buscamos que as tarefas tivessem como características serem familiares e não usuais, visto que:

> Familiar, no sentido de permitir que as pessoas falem a partir daquele texto, e não-usual, no sentido de que a pessoa tenha que desprender um certo esforço cognitivo na direção de resolvê-lo.O fato de a tarefa ser não-usual tem como objetivo nos permitir – enquanto professores ou pesquisadores – observar até onde a pessoa pode ir falando. Além disso, será nosso caminho para investigar a dinâmica do processo de produção de significados do sujeito de pesquisa. È importante ressaltar que a crença de que uma tarefa seja familiar e não-usual está presente apenas nas expectativa do pesquisador através do seu entendimento dos sujeitos envolvidos e do contexto onde o problema será aplicado, pois, não a nada que garanta tal crença. (SILVA, 2003, p. 41)

V- A representação fracionária, com o tema razão como taxa, e os significados produzidos para ela constitui a estrutura subjacente das tarefas.

Observamos que procuramos explorar o tema de diferentes maneiras, de forma a criar um conjunto de tarefas que se trabalhe ao máximo o tema, diferente do que vemos em livros do ensino fundamental, em que a densidade demográfica é apresenta com um ou dois exercícios entre outras aplicações de razão como taxa.

O conjunto é formado por três tarefas, que devem ser apresentadas juntas aos alunos, para que eles possam comparar uma à outra.

A primeira tarefa, apresentada abaixo, é composta por um parágrafo inicial em que explicitamos o que é a densidade demográfica. Esse parágrafo tem como objetivo situar o aluno ao contexto das tarefas. O segundo parágrafo apresenta uma situação e pede para o aluno explicar o que seria densidade demográfica naquele contexto.

Tarefa 1

A densidade demográfica de uma determinada região (país, estado, cidade, etc) é estabelecida pela razão entre o número de habitantes e o espaço do território em questão. O resultado desta razão expressa o número médio de habitantes por quilômetro quadrado.

Se uma cidade possui 500 habitantes numa área de 20.000 km2. O que significa o resultado encontrado para a densidade demográfica.

Na tarefa 2, apresentamos uma tabela com os dados de Área territorial e população de 5 cidades que estão inseridas no contexto de vida dos alunos.

Tarefa 2

a) Considerando a tabela abaixo, calcule a densidade demográfica de cada cidade:

Cidade	Área territorial (km²)	População (2010)	Densidade Demográfica
São Paulo	1523,278	11253503	
Rio de Janeiro	1200,279	6320446	
Porto Real	50,748	16592	
Resende	1.095,254	119769	
Volta Redonda	182,483	257803	

b) Como você explicaria a uma pessoa o valor encontrado para a densidade demográfica de São Paulo?

c) Analisando os dados da tabela, é possível afirmar que o fato de uma cidade ter maior área territorial, significa que maior será sua densidade demográfica? Por que?

Na terceira tarefa, apresentamos a mesma tabela, mas com dados de países e com outro foco nas questões.

Tarefa 3:

a)Encontre a densidade demográfica dos países abaixo, sabendo que o país com maior densidade demográfica no mundo é o Principado de Mônaco e o menor é a Mongólia:

País	Área territorial (km²)	População (hab)	Densidade Demográfica
Brasil	8.514.215,3	190.732.694	
Portugal	92.391	10.223.980	
Estados Unidos	9.372.614	308.745.538	
Mongólia	1.564.100	2.800.114	
Principado de Mônaco	1,95	32.409	

b) Se um país tem uma alta densidade demográfica, dizemos que ele é muito povoado. Para se decidir se um país é muito ou pouco povoado usamos verificar se a densidade demográfica está acima ou abaixo da densidade do planeta que é de 44 hab/ km^2. Considerando esta informação, o que você pode afirmar a respeito dos países da tabela acima.

Algumas propostas e esclarecimentos quanto à aplicação das tarefas

Apresentadas nossas tarefas, optamos por listar algumas considerações de nossa experiência na aplicação das tarefas, a seguir, e gostaríamos de propor outros temas que também podem ser utilizados pelo professor para estimular a produção de significado.

Ao aplicar as tarefas para alunos do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Resende – RJ surgiram algumas observações que vamos listar a seguir.

I. Quanto ao uso da calculadora, o ponto e a vírgula foram consideradas barreiras na execução das tarefas, na divisão em que eles encontravam vírgula, não sabiam se era referente a mil, milhões ou décimos milésimos.

II. As tarefas estimularam a discussão e a produção de significado dos alunos, como era nosso objetivo principal ao criá-las. Elas possibilitam também ao professor, observar a relação do aluno com a operação de divisão, pois durante a resolução das tarefas, o que mais foi discutido entre os sujeitos de pesquisa foi à dificuldade de entender o resultado da divisão, que foi feita na calculadora.

III. Observamos que ao compartilharem o mesmo espaço comunicativo, os alunos estavam impermeáveis às ideias uns dos outros. Ao escolherem a resposta final, não discutiram seus resultados, e simplesmente, escolhiam uma das respostas para constar no trabalho.

IV. Foi-nos possível avaliar também que nosso tema passa despercebido pelos alunos, o conceito de razão era desconhecido por eles.

V. Observa-se também que os alunos realizaram as tarefas com objetivo final de terminar. A tarefa parecia ser tomada como uma obrigação que só a resolução permite ficar livre daquilo. Notamos que em nenhum momento eles parecem analisar os resultados, observar sua razoabilidade e refletir sobre o que o contexto da tarefa que dizer.

VI. Ressaltamos também a importância do aluno se inserir no processo, infelizmente, de nada adiantariam as pesquisas e as tarefas se os alunos não estivessem dispostos a produzirem significados para a tarefa que lhes foi apresentada.

Ao apresentar essas observações sobre o que ocorreu durante a aplicação das tarefas esperamos que você, professor, possa fazer suas próprias reflexões e alterações nas tarefas que julgar necessário, para que elas possam ser usadas em sua sala de aula.

Gostaríamos de sugerir alguns temas que também podem ser usados em tarefas sobre Razão como Taxa tais como: a Razão entre o valor dos combustíveis Álcool e Gasolina, taxas de velocidade, mililitros por litros, etc. De uma forma geral, razões entre duas grandezas diferentes, quilometro por litro de gasolina, metros quadrados pintados por galão de tinta, passageiros por lotação, rosas por boque, alunos em recuperação por alunos aprovados.

As possibilidades com Razão como taxa não se esgotam, por se tratar de um conteúdo que está diretamente aplicado em coisas do cotidiano, cabendo ao professor definir o quê seria aplicável em sua realidade escolar.

Sugestões de leitura

LINS, Romulo Campos; GIMENEZ, Joaquim. **Perspectivas em aritmética e àlgebra para o século XXI.** Campinas: Papirus, 1997 (Coleção perspectivas em Educação Matemática).

LINS, R. C.; SILVA, H. **Pró-Letramento: Programa de Formação Continua de Professores dos Anos/ Séries Iniciais do Ensino Fundamental: Matemática, Fascículo 4: Frações.** Brasília: Ministério da Educação. Secretária de Educação Básica, 2007.

Loth, M. H. M. (2011) **Uma Investigação Sobre a Produção de Tarefas Aritméticas para o 6º ano do Ensino Fundamental.** Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Juiz de Fora. Disponível no site www.ufjf.br/mestradoedumat/dissertacoes-defendidas

Paula, M. R. **Razão como taxa: Uma proposta de ensino para a sala de aula de matemática.** Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Juiz de Fora.
Disponível no site www.ufjf.br/mestradoedumat/dissertacoes-defendidas

Ramos, M. R. (2011) **Uma Investigação Sobre a Produção de Tarefas Algébricas para o 6º ano do Ensino Fundamental.** Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Juiz de Fora. Disponível no site www.ufjf.br/mestradoedumat/dissertacoes-defendidas

WALLE, J. A. V. **Matemática no ensino fundamental: Formação de professores e aplicação em sala de aula.** 6ª edição, Porto Alegre, 2009.

Visite os produtos educacionais produzidos no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UFJF disponíveis no site http://www.ufjf.br/mestradoedumat/produtos-educacionais/

Referências

BEHR, M. POST, T. LESH, R. **A Proporcionalidade e o Desenvolvimento de Noções Pré-álgebra.** In: COXFORD, A. SHULTE, A. As ideias da álgebra. Atual. São Paulo, 1995.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática.** 1ª a 4ª séries. Brasília: MEC / SEF, 1997.

CAMPOS, T. MAGINA, S. **A Fração nas Perspectivas do Professor e do Aluno dos Dois Primeiros Ciclos do Ensino Fundamental.** BOLEMA, Ano 21,nº 31, p.23 a 40, Rio Claro (SP), 2008.

CARRAHER, D. **Relações entre Razão, divisão e Medida.** In: SCHLIEMANN, A. CARRAHER, D. (org.) A Compreensão de conceitos aritméticos – Ensino e Pesquisa. 2ª edição, Campinas (SP), 2003.

DAVID, M. M. S. MOREIRA, P. C. **A Formação Matemática do Professor**: **licenciatura e prática docente escolar**. Autêntica. Belo Horizonte (MG), 2005.

LINS, Romulo Campos; **Epistmologia, História e Educação Matemática**: tornando mais sólidas as bases de pesquisa. Revista da SBEM – SP Campinas, v.1, p. 75-91, set., 1993.

_________________ **O Modelo Teórico dos Campos Semnticos**: Uma análise espistemológica da álgebra e do pensamento algébrico. Dynamis. Blumenau, V.1, n.7, p. 29-39, abr/jun 1994

__________________**Por que discutir teoria do conhecimento é relevante para a Educação Matemática**. In: Bicudo, M. A. V. (org). Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: Editora da UNESP, 1999. p. 37-60

__________________**Matemática, Monstros, Significados e Educação Matemática**. In:BICUDO, Maria aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo C. (orgs) Educação Matemática: Pesquisa em Movimento. São Paulo: Cortez, 2004a. p. 93-120

__________________**A diferença como oportunidade para aprender**. In: XIV ENDIPE, 2008, Porto Alegre. Trajetórias e processos de ensinar e aprender: sujeitos, currículos e culturas. Porto Alegre: Edi PUCRS, v.3. p. 530-550, 2008.

LINS, Romulo Campos; GIMENEZ, Joaquim. **Perspectivas em aritmética e àlgebra para o século XXI.** Campinas: Papirus, 1997 (Coleção perspectivas em Educação Matemática).

LINS, R. C.; SILVA, H. **Pró-Letramento: Programa de Formação Continua de Professores dos Anos/ Séries Iniciais do Ensino Fundamental: Matemática, Fascículo 4: Frações.** Brasília: Ministério da Educação. Secretária de Educação Básica, 2007.

LOTH, M. H. M. **Uma Investigação sobre a Produção de Tarefas Aritméticas para o 6º ano do Ensino Fundamental.** Dissertação de mestrado, UFJF, Juiz de Fora (MG)

NUNES, T. **Diferentes Significados de Frações e sua Influencia sobre o ensino e a aprendizagem.** Anais do 8º Encontro Nacional de Educação Matemática. Recife: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2004.

SILVA, Amarildo Melchiades. **Sobre a dinâmica da produção de significados para a Matemática**. Tese de doutorado, UNESP, Rio Claro – SP, 2003.

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**. 7.ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

WALLE, J. A. V. **Matemática no ensino fundamental: Formação de professores e aplicação em sala de aula.** 6ª edição, Porto Alegre, 2009.