INVESTIGANDO ERROS EM MATEMÁTICA: fatores que interferem na aprendizagem dos educandos

Felipe Corrêa da Cruz Escobar

Marco Aurélio Kistemann Jr.

Resumo

O objetivo deste trabalho, de cunho qualitativo, é analisar erros ocorridos com tanta frequência em certos conteúdos do Ensino Fundamental. Para a real compreensão do que o estudante entende com esses conteúdos, foram aplicados alguns testes com alunos do Ensino Fundamental da E. E. Mercedes Nery Machado, localizada no município de Juiz de Fora, para averiguar sua compreensão diante de um problema e o sentido que alguns conteúdos fazem para os mesmos. Nosso embasamento teórico-metodológico está no livro do psicólogo Daniel Kahneman, intitulado *Rápido e Devagar: duas formas de pensar*, a partir do qual faremos uma análise de como funciona o pensamento humano, a fim de tentar compreender o que passa pela mente de nossos alunos, durante seu aprendizado.

Palavras-chave: Educação Matemática. Erros em Matemática. Livros Didáticos.

Abstract

The objective of this qualitative qualification is to analyze errors that have occurred frequently in certain contents of Elementary School. For a real understanding of what the student understands with these contents, some tests were applied with the students of the Elementary School of EE Mercedes Nery Machado, located in the city of Juiz de Fora, to ascertain their understanding of a problem and the sense that some conteins in For them Our theoretical-methodological background is in the book of psychologist Daniel Kahneman, entitled Fast and Slow: two ways of thinking, from which an analysis of how human thought works, an end to try what goes through the mind of Our students, during their apprenticeship.

Keywords: Mathematics Education. Errors in Mathematics. Didatic books.

1. INTRODUÇÃO

Nesta pesquisa, de cunho qualitativo (pesquisa exploratória, portanto, não tem o intuito de obter números como resultados, mas insights – muitas vezes imprevisíveis – que possam nos indicar o caminho para a tomada da decisão correta sobre uma questão-problema), sobre erros em Matemática, analisaremos o erro nos "pré-requisitos[1]", em conteúdos usados, frequentemente, na vida escolar, seja no Ensino Fundamental ou Médio, tendo como objetivo convidar os professores a refletirem sobre sua postura em sala de aula, perante o erro, respondendo, assim, à nossa pergunta diretriz: "*Como podemos contribuir com a prática docente, de modo a propor uma reflexão desse profissional na busca de alternativas que auxiliem os alunos a aprender com seus erros em Matemática?*". Analisaremos algumas atividades que nos façam compreender o sentido que alguns conteúdos têm para os estudantes, a fim de que possibilitemos a sua compreensão e, com isso, sejam diminuídas as sucessivas ocorrências dos erros.

Acreditamos na importância desta pesquisa tanto para o professor, em sala de aula, quanto para a Educação Matemática, pois nela apresentamos um novo ponto a se investigar em análise de erros, que é a ilusão cognitiva (Kahneman, 2011), quando tomamos decisões automáticas e, muitas das vezes, erradas, sem termos a consciência do que estamos fazendo. Ao expormos, neste trabalho, diferentes fatores que podem estar contribuindo para a grande ocorrência de certos erros, estamos oferecendo ao professor um suporte que o ajude a entender a real dificuldade de seus alunos,

Para analisar os erros cometidos pelos discentes, montaram-se testes para cada ano do Ensino Fundamental, todos com questões tiradas de livros didáticos; as atividades foram aplicadas na E. E. Mercedes Nery Machado, localizada em Juiz de Fora (MG), para alunos do 6° ao 9° ano, ao final do ano letivo de 2014.

2. UMA VISÃO SOBRE AVALIAÇÃO E ERROS NA DISCIPLINA DE MATEMÁTICA

Compartilhamos, aqui, uma leitura bastante contemporânea, que nos fez refletir sobre os erros. *RÁPIDO e DEVAGAR – duas formas de pensar*, de Kahneman, um livro que corrobora com nosso ponto de vista sobre o processo da aprendizagem. Kahneman, um renomado psicólogo, fez alguns trabalhos, ao lado de seu grande amigo, Amos Tversky, e ganhou o prêmio Nobel de Economia, em 2002, por suas obras sobre tomadas de decisão (Amos não compartilhou de tal prêmio, pois faleceu antes do ocorrido). Sobre seu trabalho, Kahneman (2011, p. 13) relata: *"nosso objetivo era identificar e analisar a resposta*

[1]Conteúdos utilizados com bastante frequência durante a resolução de outros conteúdos em Matemática.

intuitiva, a primeira que viesse à mente de um e de outro, aquela que nós sentíamos tentados a dar mesmo quando sabíamos estar errada".

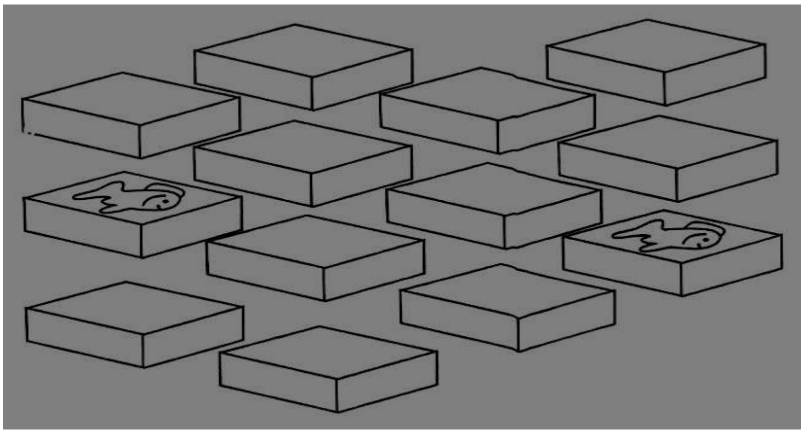
Nesta obra, Kahneman explica como funciona o pensamento de uma pessoa, ao tomar alguma decisão, e explica que muitas escolhas são feitas pelo que ele chamou de Sistema 1, responsável pelas decisões automáticas, aquelas primeiras imagens que vêm à nossa cabeça, a primeira opinião a ser formada, sem nenhum embasamento, que simplesmente ocorre e, em alguns momentos, não nos dá a resposta correta. Segundo Kahneman (2011, p. 10), "A maioria das impressões e pensamentos surge em sua experiência consciente sem que você saiba como foram parar lá". O Sistema 2, relatado pelo autor como nosso sistema "preguiçoso", por ser o que menos nós usamos, é o momento em que paramos para analisar alguma situação e, diante de tal, pensamos todos os prós e contras que uma decisão acarretará; podemos, assim, dizer que é um sistema cauteloso, receoso, o qual nos faz refletir e analisar, para tomarmos a melhor decisão, ou procurarmos a resposta para algum problema.

Dois exemplos simples, a fim de entendermos um pouco como funcionam esses dois Sistemas, são os seguintes:

1 – Qual é o maior vaso de plantas ilustrado a seguir?

Tal atividade não gerou nenhum esforço em nosso cérebro, ao deduzirmos espontaneamente qual, entre os três vasos acima, é o maior. Com uma simples olhada para a figura, já identificamos que o maior deles é o que se encontra no centro. Para tal avaliação ser feita, recorremos ao nosso Sistema 1, como mencionado, de resposta rápida e espontânea; sem precisarmos de esforço, a resposta nos veio imediatamente, no momento em que olhamos a figura, sendo que a resposta fornecida está correta.

2 – Quantas caixas aparecem na imagem?



Tal exemplo, apesar de ser relativamente simples, já requer que tenhamos alguma concentração, a resposta não é intuitiva, como na primeira atividade. Para respondê-la, precisamos gastar alguns segundos de análise.

Segundo o autor, uma das principais funções de nosso Sistema 2 é tentar controlar os pensamentos ocorridos pelo Sistema 1.

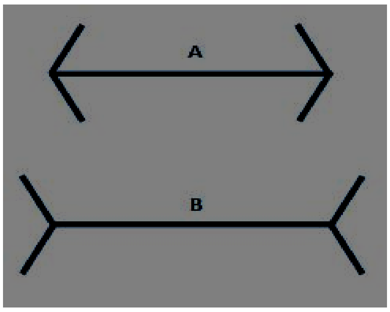
Um exemplo de como ocorrem esses pensamentos foi tirado de uma breve atividade introdutória ao assunto, do próprio livro de Kahneman (2011, p. 59):

Um bastão e uma bola custam 1,10 dólar.
O bastão custa um dólar a mais que a bola.
Quanto custa a bola?

A primeira resposta que nos vem à cabeça é a de que a bola custa 10 centavos, assim como queria Kahneman, quando relata que essa resposta é intuitiva, atraente e errada. Entretanto, ao mesmo tempo em que tal resposta nos vem à cabeça, checamos sua veracidade, constatando logo seu erro, pois se a bola fosse 10 centavos de dólar, o bastão deveria custar 1 dólar, fugindo, assim, de uma das restrições de que o bastão deveria custar 1 dólar a mais do que a bola. Portanto, a resposta correta é a de que o bastão deve custar $1,05 e a bola, $0,05.

Esse primeiro pensamento ocorrido foi produzido pelo Sistema 1, já o Sistema 2 nos fez analisar sua veracidade e chegar à conclusão correta; essa análise ocorreu por sermos professores, gostarmos de Matemática e querermos verificar se a resposta intuitiva tinha procedência, porém, e quando esse tipo de pensamento automático ocorre por parte de nossos alunos, será que eles verificam sua veracidade? Provavelmente, não. Pois se sua intuição (Sistema 1) lhes diz uma resposta sobre algum problema, é porque ela reconheceu alguma semelhança com algum outro problema já vivenciado e a confiança no acerto faz com que, em nenhum momento, parassem e constatassem equívoco em alguma decisão tomada, pois a resposta foi natural e segura para eles, já que reconheceram, nesse problema, outro que teve essa forma de resolução.

Caso nossos exemplos ainda não tenham sido convincentes na comprovação de que nosso Sistema 1 é realmente poderoso, ofereceremos mais um caso com que muitas pessoas já se depararam, por isso sabem qual é a resposta correta, mas sua intuição ainda lhes diz o contrário.



O que tem demais nessas linhas horizontais de diferentes tamanhos, com setas em suas extremidades? Conhecidas como ilusão de Müller-Lyer e suas linhas, como podem ser comprovadas com o auxílio de uma régua, têm exatamente o mesmo tamanho, e mesmo já sabendo do resultado, nossa mente se nega a aceitar o fato; continuamos tendo o impulso de nosso Sistema 1, de tentar nos convencer de que a linha B é maior que a linha A.

Ilusões cognitivas podem ser mais renitentes do que ilusões visuais. O que você descobriu sobre a ilusão de Müller-Lyer não mudou o modo como vê as linhas, mas mudou seu comportamento. (KAHNEMAN, 2011, p. 271)

Segundo Kahneman (2011, p. 37), nem todas as ilusões são visuais. Há ilusões de pensamento, que chamamos de *ilusões cognitivas*.

> A pergunta que se faz com mais frequência sobre as ilusões cognitivas é se elas podem ser dominadas. A mensagem desses exemplos não é encorajadora. Como o Sistema 1 opera automaticamente e não pode ser desligado a seu bel-prazer, erros do pensamento intuitivo muitas vezes são difíceis de prevenir. Os vieses nem sempre podem ser evitados, pois o Sistema 2 talvez não ofereça pista alguma sobre o erro. Mesmo quando dicas para prováveis erros estão disponíveis, estes só podem ser prevenidos por meio do monitoramento acentuado e da atividade diligente do Sistema 2. (KAHNEMAN, 2011, p. 38)

Kahneman (2011, p. 39) completa que o melhor que podemos fazer é um acordo: aprender a reconhecer situações em que os enganos são prováveis e nos esforçar mais para evitar enganos significativos, quando há muita coisa em jogo. “A premissa [...] é de que é mais fácil reconhecer os enganos das outras pessoas do que os nossos”. De acordo com Kahneman (2011, p. 10), “a maioria das impressões e pensamentos surge em sua experiência consciente sem que você saiba como foram parar lá”.

Diante do que vimos sobre tomada de decisões, fica claro que a ocorrência dos erros perante uma Avaliação que influencia diretamente no emocional, no humor de nossos alunos, existirá com maior frequência do que se eles estiverem mais relaxados, durante uma atividade que lhes proporcione satisfação.

Disponibilizar atividades que motivem os discentes é tarefa dos professores, para ajudarem-nos em sua aprendizagem. Segundo Kahneman (2011, p. 91), “Conforto cognitivo e sorrisos ocorrem juntos, mas será que de fato as sensações boas levam a intuições de coerência? Sim, levam.”

Em nossa experiência, temos percebido que, em geral, as formas mais usuais de se verificar o aprendizado são testes, provas e listas de exercícios, mas o ato de avaliar é muito mais amplo do que isso. Nesses tipos de avaliações, não está sendo levado em conta o real esforço do aluno em entender algum conteúdo, ou mesmo se ele está com alguma dificuldade epistemológica. Nem todos os alunos têm afinidade com a área de exatas, muitos encontram na Matemática sua grande dificuldade. O mesmo já não ocorre em outros conteúdos, da mesma forma como nos deparamos com alunos com muita facilidade em exatas e extrema dificuldade na compreensão de outras áreas. Para isso, ao avaliarmos, devemos ter a clareza de que cada aluno a quem tentamos ensinar tem sua matéria preferida, a qual o mesmo julga ser mais fácil e, por mais que se esforce, a compreensão desses conteúdos (no nosso caso, a Matemática) é de extrema dificuldade.

De acordo com Bransford, Brown e Cocking (2007, p. 22), “Em momentos diferentes da história, os estudiosos demonstraram preocupação com o fato de que os ambientes educacionais formais eram mais bem-sucedidos em selecionar talentos do que em desenvolvê-los”; nesse ponto, sim, os testes avaliativos se destacavam, pois eles apenas classificavam os alunos pelo que sabiam, em vez de ajudá-los a desenvolver seus conhecimentos.

Diversas vezes, já ouvimos alunos dizerem “não precisa estudar isso, pois não irá cair na prova”, o que passa a impressão de que o ato de estudar é apenas para conseguir a nota, aprender nem sequer passa por suas cabeças.

Ao fazermos as correções de testes e provas, devemos tomar muito cuidado com nossos critérios, para não sermos tendenciosos:

> Eu pegava um caderno de questões de cada vez e lia todas as respostas daquele aluno em imediata sucessão, dando notas para cada questão à medida que prosseguia. Depois eu calculava o total e passava ao aluno seguinte. Acabei por perceber que minhas avaliações das questões em cada prova eram surpreendentemente homogêneas. Comecei a desconfiar que meu sistema de notas exibia efeito halo, e que cada primeira pergunta avaliada por mim tinha um efeito desproporcional na nota geral. O mecanismo era simples: se eu tivesse dado uma nota alta para a primeira questão, eu proporcionava ao aluno o benefício da dúvida sempre que me deparava com uma afirmação vaga ou ambígua posteriormente. Isso parecia razoável. Certamente um aluno que se saíra tão bem na primeira questão não cometeria um erro tolo na segunda. A falta de coerência me deixou inseguro e frustrado. (KAHNEMAN, 2011, p. 108)

Durante nossas correções, temos nossos impulsos; se um aluno começa errando as primeiras questões, temos a tendência de valorizar mais as últimas e se o mesmo começa acertando, temos um rigor maior pelo que está por vir. Portanto, o ideal é ir corrigindo por questão (ou página), para termos o mesmo critério em cada questão, com todos os alunos.

> ao corrigir qualquer prova, teste ou trabalho de Matemática, muitas vezes o professor costuma apontar os erros cometidos pelos alunos, passando pelos acertos como se estes fossem esperados. Mas quem garante que os acertos mostram o que o aluno sabe? E quem diz que os erros mostram somente o que ele não sabe? (CURY, 2007, p. 13)

Hadji (1994, p. 125) afirma que, se quisermos “gerir' o erro, para lá do desempenho registrado, é preciso tentar determinar as razões que lhe deram origem, e dizer o que ele revela dos conhecimentos adquiridos ou das falhas do aluno. Não há gestão possível senão por este meio”.

Parafraseando Kistemann Jr. (2004, p. 15), “não se propõe, neste estudo, de forma alguma, a sacralização do erro, mas o reconhecimento de seu potencial pedagógico, que carece de ser melhor explorado, explicando e dando sentido às vivências e experiências de atividades discentes”.

3. EMBASAMENTOS TEÓRICOS DA PESQUISA

Além de saber interpretar sobre os conteúdos estudados, acreditamos que saber efetuar a parte operacional dos conteúdos se faz de grande importância, mas apenas a parte operacional não é suficiente para se julgar a real compreensão sobre o tema estudado, pois,

> [...] especialmente no Cálculo, acredito ser a compreensão dos conceitos o objetivo

> mais importante. No entanto, sem a técnica, o aluno não tem ferramentas para trabalhar com os conceitos, e o desenvolvimento de habilidades de lidar com regras (para cálculo de limites, derivadas ou integrais, por exemplo) parece estar sendo prejudicada pela falta de habilidades no trabalho com propriedades operatórias básicas (CURY, 2007, p. 57).

Segundo Barbosa (2008, p. 21), "ideias mal concebidas inicialmente se constituirão em obstáculos para a compreensão de futuros conceitos".

Nossa inquietação, fato motivador para a pesquisa acerca desse tema, são os erros ocorridos com produtos notáveis, porque, em geral, ocorrem com alunos do Ensino Médio, e por serem tão importantes na resolução de diversas atividades, como em Geometria Plana, Espacial e Analítica, em Álgebra, ou mesmo em Trigonometria.

Alunos do 1º ano do Ensino Médio – com Função Quadrática –, do 2º ano – estudando o conteúdo de Geometria Espacial – e do 3º ano – com Geometria Analítica – deparam-se com produtos notáveis em diversos momentos, e, mesmo assim, os erros são constantes. Ao efetuarem uma operação da forma [illegible], o desenvolvimento é completamente vazio de significados; quando eles conseguem se lembrar da "regrinha" (novamente ela) – quadrado do primeiro (termo), mais duas vezes o primeiro (termo), vezes o segundo, mais o quadrado do segundo (termo) –, a qual, em alguns momentos, chega a ser exigida pelo professor, o resultado correto ocorre ($x^2 + 10x + 25$), porém, caso não se lembrem, é bem comum que a resposta dada seja $x^2 + 25$, resultado que, apesar de espontâneo e automático, é a solução para $(x)^2 + (5)^2$. Os alunos elaboram essa reposta com a convicção de que estão certos e, muitas vezes, não conseguem encontrar o erro cometido, seja ao final do problema, constatando que seu resultado não está correto, ou após alguma intervenção por parte do professor, a fim de alertá-lo sobre o fato. Para Kahneman (2011, p. 11), "muitas vezes estamos confiantes mesmo quando estamos errados, e um observador objetivo tem maior probabilidade de detectar nossos erros do que nós mesmos". Tal erro acontece porque a definição de uma operação com produtos notáveis não está clara e nem faz sentido para o aluno, ele está "preso" apenas à operação de potência, sem conseguir interpretar o que está sendo elevado a essa potência.

Para Piaget (1975, p. 194), "numa pedagogia ativa, o erro tem um caráter nobre e deve ser reconhecido como elemento integrante da elaboração dos esquemas cognitivos".

Fiorentini (2006, fl. 4) observa que o:

> (...) erro escolar, na verdade, resulta do esforço dos alunos em participar do processo de aprendizagem, produzindo e negociando, a partir de seu mundo e de sua cultura, sentidos e significados sobre que se ensina e aprende na escola. E,

> nesse sentido, o erro não poderia ser visto como um mal a ser erradicado, mas como parte do processo de aprender e desenvolver-se intelectualmente.

Dessa forma, devemos entender que o erro estará sempre presente e terá grande importância durante o processo de ensino-aprendizagem e, como docentes, faz-se necessário estarmos preparados para discutir e esclarecer as diferentes formas (em alguns momentos, erradas) que nossos alunos encontrarão.

3.1 Uma Hipótese de Como os Professores Lidam com o Erro

Muitos professores encaram o erro como "falta de aprendizado" por parte dos alunos e recriminam os mesmos por estarem cometendo-o, isentando-se, assim, de qualquer conivência com o erro. Poucos professores buscam formas de diminuírem o ocorrido ou de mudarem sua metodologia de ensino, a fim de obterem melhores resultados. "Poucas vezes, um professor tem se preocupado em averiguar se o Erro cometido por seus alunos são equívocos de informação, deficiente interpretação do vocabulário dos enunciados ou mesmo falhas acontecidas em cálculos" (Kistemann Jr., 2004, p. 6).

> É o professor quem cria as oportunidades para a aprendizagem – seja na escolha de atividades significativas e desafiadoras para seus alunos, seja na gestão de sala de aula: nas perguntas interessantes que faz e que mobilizam os alunos ao pensamento, à indagação; na postura investigativa que assume diante da imprevisibilidade sempre presente numa sala de aula; na ousadia de sair da "zona de conforto" e arriscar-se na "zona de risco". (MENGALI; NACARATO; PASSOS, 2009, p. 35)

Para Luckesi (2011, p. 22), a diferença entre "dar aulas" e "ensinar" é que, dando aula, espera-se que o aluno aprenda; já no ato de ensinar, deseja-se que ele aprenda, sendo assim, o professor investe na busca por esse resultado.

Em nossa cultura, geralmente, só valorizamos o sucesso. Para muitos professores, o aluno já deve chegar até ele "pronto", sem nenhuma dificuldade em conteúdos anteriores e, se possível, sem dificuldades até mesmo no que ele irá ensinar. Sendo assim, o que estaria fazendo tal aluno em sala de aula? O aluno está lá para aprender, é um ser em desenvolvimento, que terá suas dificuldades para compreender o que for novo.

> [...] admitidamente, todos nos esforçamos para evitar erros; e deveríamos ficar tristes ao cometer um engano. Todavia, evitar erros é um ideal pobre, se não ousarmos atacar problemas tão difíceis que o erro seja quase inevitável, então não haverá crescimento do conhecimento. De fato, é com nossas teorias mais ousadas, inclusive as que são errôneas, que aprendemos. Ninguém está isento de cometer enganos, a grande coisa é aprender com eles. (POPPER, 1996, p. 20)

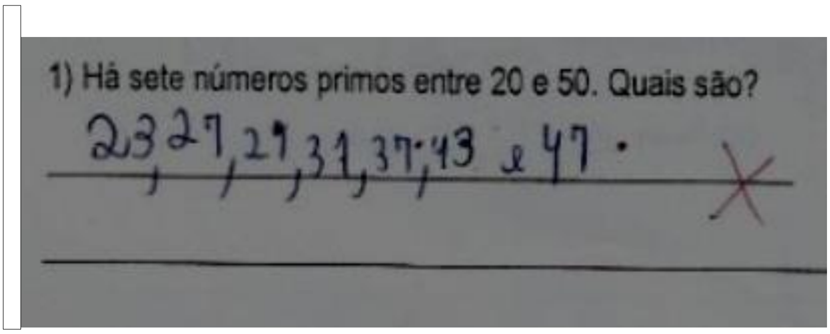
Temos, ainda, segundo Cury:

> Ao apresentar regras, siglas e desenhos prontos, o professor está impedindo o aluno de fazer suas próprias conjecturas e testá-las. Logicamente, o aluno errará algumas vezes, mas é a partir desses erros que se dará a construção do conhecimento. Portanto, quando a Matemática é considerada um corpo de conhecimento que deve ser “passado” aos alunos, os erros são estigmatizados e só a correção absoluta das respostas é esperada. Por outro lado, se a Matemática é vista como um processo, uma caminhada plena de acertos e erros até atingir o conhecimento, os erros são aceitáveis como passos inevitáveis na obtenção das soluções de problemas. (1990, p. 20)

Em nossas aulas particulares, convivemos com estudantes de diversos colégios da rede pública e particular e de diversos graus de escolaridade, desde os alunos do Ensino Fundamental (Segundo Segmento) e Médio, até alunos do Ensino Superior. Com isso, observamos como o erro do aluno chega a ser ignorado ou valorizado negativamente pelo professor. Nenhuma das duas opções citadas é de real ajuda para o aluno.

Quando o professor ignora o erro, na maioria das vezes, está deixando de intervir para que o aluno supere algum obstáculo epistemológico. E quando relatamos que ele valoriza o erro, não é no sentido de lhe dar importância e trabalhá-lo, para que não haja mais a ocorrência do mesmo, mas esquecendo todo o resto do desenvolvimento feito pelo aluno e centralizando o desenvolvimento nesse erro, portanto, acaba por cortar (riscar) a atividade realizada com caneta vermelha (em geral), para haver um maior destaque de seu “fracasso”.

Nas palavras de Luckesi (1995 apud KISTEMANN Jr., 2004, p. 59), “na escola, examina-se e qualifica-se muitas vezes, porém, nela, se avalia muito pouco”.



(1) Questão de teste de aluno.

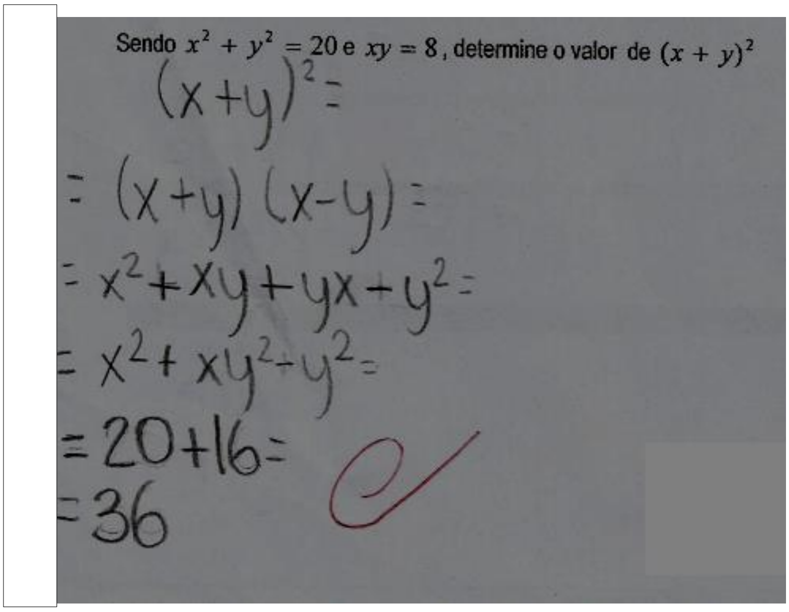
O erro ocorrido na atividade anterior (1) é que o aluno, ao ter de indicar os sete números primos (números com exatamente dois divisores, o 1 e o próprio número) compreendidos entre 20 e 50, errou um. O 27 não é primo, pois tem mais de dois divisores (em seu lugar, deveria estar o 41); por esse erro, o aluno perdeu toda a questão, sem terem sido considerados os outros seis números, que estavam corretos.

DE LA TORRE (1994) analisa o erro da seguinte forma:

- **Negativa:** Erro usado para punir o aluno, humilhá-lo e alertá-lo sobre futuros males (reprovação);
- **Positiva:** Erro construtivo, oportunidade para se refazer o percurso e ampliar o raciocínio, além de possibilitar a regulação das aprendizagens, tornando mais claras as inter-relações do processo educativo.

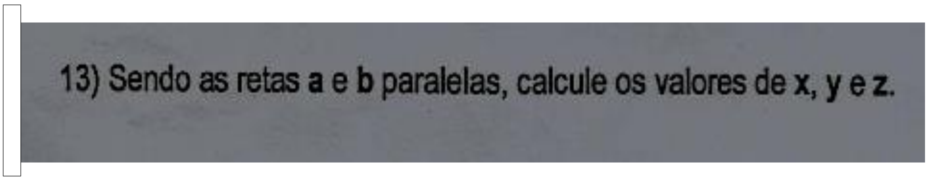
A cultura que temos de vangloriar o acerto e desprezar o erro não ocorre apenas por parte dos professores, mas por toda a comunidade escolar, que engloba desde os demais funcionários de uma escola, como os pais e responsáveis, e quem mais fizer parte da vida dos estudantes. O acerto é tratado com alegria e parabenizado, o erro, como desgosto e motivo de punição; em nenhum momento se discute a forma como o acerto foi alcançado (se realmente foi merecido) ou o porquê de o erro estar ocorrendo, pois o importante é o resultado final.

Analisaremos outra atividade em que há um clássico exemplo de que o foco da correção foi somente a resposta final.

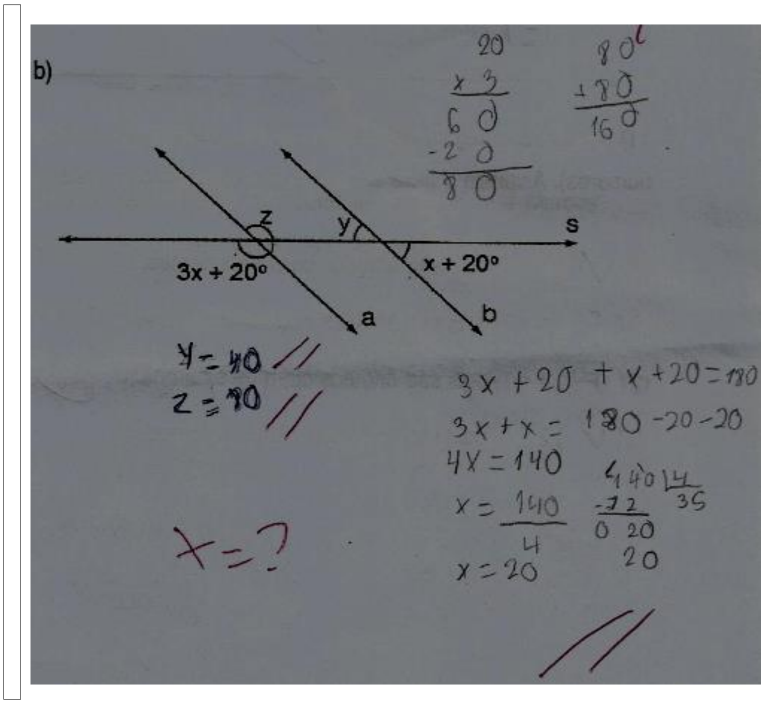


(2) Questão de teste de aluno.

Diferente da análise feita pelo professor, ao considerá-la correta, a atividade está completamente incoerente, porque, ao efetuar $(x + y)^2$, como está na primeira linha de desenvolvimento, o próximo passo seria $(x + y) . (x + y)$, já que um número ao quadrado é a multiplicação dele por ele mesmo, sendo diferente de (x + y) . (x – y); mesmo assim, ao efetuar a multiplicação proposta pelo aluno, o resultado obtido deveria ser $x^2 - xy + yx - y^2$, o que levaria ao cancelamento de – xy com + yx, já que a multiplicação de xy ou yx gera o mesmo resultado, e como – xy e + yx são números opostos, sua soma resultaria em 0, sobrando, ao final dessa soma, $x^2 - y^2$. Mesmo errando em sua multiplicação, o passo adiante, para $x^2 + xy + yx + y^2$, deveria ser $x^2 + 2xy + y^2$ para que, ao final, quando substituísse o xy por 8, pudesse multiplicar por 2 a fim de, então, chegar a 16. Apesar dessas constatações, que verificaram a ocorrência de erros em todas as etapas de resolução, a resposta final foi a esperada, o suficiente para o professor considerar a atividade como correta.


13) Sendo as retas **a** e **b** paralelas, calcule os valores de **x**, **y** e **z**.

(3) Questão de teste de aluno.



(4) Questão de teste de aluno.

Assim como na atividade anterior (2), na proposta acima (3 e 4) só foi levada em conta a resposta final, mas, dessa vez, decidiu-se que a questão estava errada.

A análise feita pelo aluno foi de que a soma dos ângulos representados por 3x + 20° e x + 20° deveria ter 180° como resultado. Tal análise está correta, já que os ângulos são colaterais externos e sua soma resulta em 180º. Ao representar a equação e depois resolvê-la, o aluno se deparou com a seguinte divisão: 140 : 4. Para efetuá-la, foi ao canto da folha, fazer um rascunho; na divisão, como podemos observar, seu resultado deu 35, o que está correto, mas, ao anotar seu resultado como solução para o valor de x, o aluno anotou o número 20, que era o final da multiplicação de 5 vezes 4, para obter resto 0.

Na parte superior, para obter o valor de Z, o estudante fez todos os passos certos: substituiu o valor de x (20°), encontrado em 3x + 20°, o que resultou em 80° e assim encontrou Z, já que Z e 3x + 20° são opostos pelo vértice, portanto, são iguais. Da mesma forma que, ao substituir o valor de x (20°) em x + 20°, encontrou o valor y = 40. Porém, pelo fato de o aluno ter usado o valor errado para x, já que fez uma confusão ao anotar o seu valor encontrado na divisão, a questão foi dada como errada pelo professor, sem que nenhum passo do desenvolvimento, o qual foi todo efetuado corretamente, fosse valorizado.

Para MENGALI, NACARATO e PASSOS (2009, p.73), “Muitas vezes, aquilo que parece ser uma resposta incorreta pode se tratar de falta de capacidade para expressar-se”.

Diversos professores que repudiam o erro evitam ouvir as dúvidas dos alunos; para eles, aula boa e bem dada é aquela em que ele é o centro das atenções, nenhum aluno tem o direito de falar e nem de manifestar alguma dúvida durante sua fala, ou pior, há aulas em que impera o medo, por parte dos alunos, de fazerem alguma pergunta e sofrerem represália do professor, ou serem alvo de risadas por parte dos colegas de classe, atos que devem ser remediados pelos docentes.

Segundo Kistemann Jr. (2004, p. 24), “o medo de errar e os constrangimentos advindos desse ato são adquiridos por alguns alunos, os quais, na ânsia de acertar, muitas vezes, acabam por não assimilar o que lhes foi proposto”.

> Para que o processo de negociação de fato ocorra, o ambiente de diálogo e confiança mútua é fundamental. O professor precisa estar predisposto a ouvir e dar ouvido ao aluno, estimulando-o a explicitar suas ideias e seus argumentos de forma que o aluno se sinta encorajado a posicionar-se, sem medo de errar, pois sabe que suas contribuições são importantes para o processo. (MENGALI; NACARATO; PASSOS, 2009, p. 83)

Sendo assim,

> é importante que o trabalho em sala seja feito, que os alunos cheguem ao final das tarefas, que participem das lições e das atividades coletivas, cumprindo assim seu ofício de aluno. Entretanto, a regulação proferida em sala pelos professores, tem priorizado as atividades e a progressão nas tarefas e não as atividades subjacentes. Dessa forma o professor assume a postura de condutor da tarefa, substituindo o aluno, ao passo que, de fato, deveria auxiliá-lo na progressão das tarefas. Tal auxílio dá ao aluno, a impressão de dominar tarefas, mas na verdade, não aprendem na sua totalidade, por que todas as decisões importantes foram sugeridas

> pelo professor, todos os erros foram prevenidos ou corrigidos rapidamente, todos os obstáculos difíceis foram ultrapassados "sob vigilância", desmerecendo a construção do saber pela atividade autônoma do aluno". (PERRENOUD, 1996, p. 85)

Para Kistemann Jr. (2004) e Nunes (1997), a quantidade de erros cometidos na aritmética oral é menor do que na aritmética escrita, pois a criança utiliza mais os raciocínios lógico-matemáticos por meio de sua linguagem oral. Sendo assim, a participação e a fala dos alunos são de suma importância para a aprendizagem escolar, pois é nesse momento que o professor consegue saber o que estão pensando quando cometem um erro, podendo interferir e ajudá-los a esclarecer alguma dúvida, ou superar algum obstáculo epistemológico. Seguimos acreditando que a melhor forma de aprender é falando e a melhor forma de ensinar é ouvindo.

> [...] cada vez que ensinamos prematuramente a uma criança alguma coisa que poderia ter descoberto por si mesma, esta criança foi impedida de inventar e consequentemente de entender completamente. Isto obviamente não significa que o professor deve deixar de inventar situações experimentais para facilitar a invenção e compreensão de seus alunos. (PIAGET, 1995 apud KISTEMANN Jr., 2004, p. 20)

O professor não transfere conhecimentos, é um mediador de conhecimentos, portanto, precisa entender que cada aluno tem sua própria vivência e história de vida. O tempo que cada um leva para construir seu conhecimento acerca de certo conteúdo varia de aluno para aluno, cabendo ao professor encontrar esse tempo e saber trabalhar com os diversos níveis de aprendizado encontrados por ele em um mesmo ambiente. De acordo com Freire (1996, p. 47), "saber que ensinar não é transferir conhecimento mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou sua construção" é fator importante para a aprendizagem do aluno.

Assistir ao professor explicar seu conteúdo e resolver problemas de listas de exercícios sem questionamentos não faz com que o aluno compreenda tais atividades, uma vez que ele não foi estimulado a fazer o mesmo, criando suas próprias compreensões, pois o professor já tem sua experiência e já cometeu seus erros, para saber qual o caminho certo (ou passo a passo) a seguir na resolução de um problema, sem cometer nenhum erro. O escritor Kahneman cita Simon (2011, p. 20): "A situação forneceu um indício; esse indício deu ao especialista acesso à informação armazenada em sua memória, e a informação fornece a resposta. A intuição não é nada mais, nada menos que reconhecimento". Quando o aluno só se depara com sua dificuldade ao tentar resolver por si só sua atividade, percebe um pouco tarde a sua incompreensão do que lhe foi exposto.

Segundo Machado (1999, p. 92), “além da interação entre professor-aluno, a interação aluno-aluno, através dos trabalhos em grupo, desempenha papel fundamental no desenvolvimento das capacidades cognitivas e afetivas”.

Dessa forma, as atividades realizadas em duplas ou grupos são deveras importantes, por darem aos alunos mais liberdade de diálogo, pois é mais fácil para eles perguntarem uma dúvida ao colega do que se exporem para o professor, perante a turma inteira. De acordo com Machado (1999, p. 92), “as aprendizagens só se concretizam à medida que o professor proporcione um ambiente de trabalho que estimule o aluno a criar, comparar, discutir, rever, perguntar e ampliar suas ideias”. Mas os professores devem acompanhar tais atividades de perto, pois alguns alunos (não sua totalidade), ao serem questionados, em vez de explicarem o desenvolvimento com seu próprio linguajar para seu(s) colega(s), preferem mostrar-lhes suas atividades já prontas, enquanto o aluno que não entendeu a atividade prefere copiar o desenvolvimento, em lugar de debater sua dúvida, atitude que o ajudaria a construir seus próprios conceitos.

Segundo Mengali, Nacarato e Passos (2009, p. 88), “se, desde os primeiros anos do ensino fundamental, o aluno for colocado em situações em que tenha de justificar, levantar hipótese, argumentar, convencer o outro, convencer-se, ele produzirá significados para a matemática escolar”.

Dessa forma, as discussões dos assuntos, seja com um colega ou com o professor, fará o aluno refletir e argumentar sobre seus pensamentos, criando, assim, seus próprios significados.

Para Bertoni (2000, p. 98), “a superação do erro tem uma participação significativa do professor, pois é ele quem encontrará novas formas que proporcionem ao aluno atuar sobre suas ações e erros”.

Mengali, Nacarato e Passos (2009, p. 74) também acreditam que “propiciar um ambiente de comunicação e de interação na sala de aula é acreditar que os alunos aprendam uns com os outros quando se comunicam”. Essa é a grande justificativa para a importância dos trabalhos em grupo: eles estimulam a aprendizagem e tornam o ambiente escolar mais agradável.

Portanto, cabe ao professor escolher as atividades que serão trabalhadas em sala, para que elas produzam interesse e estimulem os alunos a resolvê-las e debatê-las, quando assim for necessário, sem temerem nenhuma represália por parte do professor ou demonstrarem vergonha de serem alvos de deboche dos colegas.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998, p. 42) do Ens. Fundamental – Matemática, "é consensual a ideia de que não existe um caminho que possa ser identificado como único e melhor para a aquisição dos conceitos matemáticos oferecidos no ambiente escolar", portanto devemos procurar alternativas que viabilizem a compreensão de nossos alunos.

3.2 Sugestão de leitura

São escassos, na literatura da educação brasileira, os estudos sobre erros e formas de abordagem de erros cometidos pelos estudantes, durante o processo de ensino-aprendizagem. (MIRANDA 2007, p. 29) Apesar de as publicações sobre erros terem aumentado bastante nos últimos anos, poucas foram as que se encaixavam com nosso trabalho. A grande maioria trabalha com algum conteúdo específico, ou com alguma série específica. Em nossa Revisão de Literatura, analisamos duas dissertações, um trabalho de conclusão de curso, um livro e um artigo, os quais se encaixaram de forma incrível, embasando nossas ideias.

> [...] questiono a falta de discussões sobre erros em cursos de formação de professores. Parece que cada erro cometido por um futuro professor de Matemática é apontado, é riscado em vermelho, e a ele se atribui alguma pontuação negativa, mas raramente há tempo para voltar ao erro e partir dele para reconstruir algum conhecimento. (CURY, 2007, p. 93)

Kistemann Jr, com o trabalho intitulado *O Erro e a Tarefa Avaliativa em Matemática: uma abordagem qualitativa*, o qual apresenta fundamentações de Piaget e Perrenoud, expressa várias ideias que completam as nossas. Em seu trabalho, de cunho qualitativo, Kistemann Jr. (2004) faz uma investigação, com vinte professores da cidade de Juiz de Fora (MG) respondendo sobre suas metodologias de ensino, dificuldade dos alunos, avaliações, entre outras questões que envolvem sua pesquisa. Dessa forma, Kistemann Jr. (2004) constatou que, para grande parte dos professores, os Pré-requisitos constituem o maior causador do Erro (superando Linguagem Matemática e Fragmentação de Conteúdos), sendo um obstáculo para a construção de novos conceitos matemáticos.

> O objetivo geral é conhecer como as tarefas avaliativas de Matemática, nas suas mais variadas formas, auxiliam o professor a regular a aprendizagem através dos erros cometidos e de que forma esses erros constituem-se como agentes na construção (ou não) do conhecimento matemático, na perspectiva docente. (KISTEMANN Jr., 2004, p. 82)

Kistemann Jr. (2004, p. 95 e 96) expõe algumas opiniões dos professores entrevistados sobre obstáculos cognitivos como pré-requisitos:

- O Pré-requisito é o grande problema para o desempenho de novos conteúdos.
- Os alunos apresentam muita dificuldade de estabelecer uma relação com o que já sabem, apresentando também a famosa "falta de base".
- Quando ele (o aluno) percebe que os conteúdos dos anos anteriores são necessários para o entendimento do novo conteúdo que ele não assimilou.
- O aluno tem dificuldades em utilizar dentro do conteúdo, conhecimentos que deveriam ter sido pré-adquiridos.

Segundo Kistemann Jr. (2004, p. 8),

> Um estudo do Erro na disciplina de Matemática, através de condutas docentes investigativas pode revelar que o Erro é tão valioso instrumento de construção de conceitos quanto o acerto, pois o primeiro constitui-se como hiato que falta para colocar abaixo as praticadas *hierarquias de excelência* (PERRENOUD, 2000) pelas escolas. Denuncia, ainda, o pouco conhecimento e o despreparo dos professores em lidar com o Erro, não utilizando-o como ente rico para o norteamento de sua conduta pedagógica, assim como regulador da aprendizagem do aluno.

Com essa citação, percebemos o quanto nosso trabalho pode ir ao encontro de Kistemann Jr. (2004), pois estamos tentando mostrar a importância que os erros dos alunos têm, o que já foi investigado com docentes da disciplina de Matemática. Como constatou Kistemann Jr. (2004), o principal causador do erro (de acordo com a pesquisa feita com os professores), é a falta dos pré-requisitos, ponto esse em que nossa pesquisa e nossas atividades estão focadas.

O trabalho *Erros e Obstáculos: Os conteúdos Matemáticos do Ensino Fundamental no Processo de Avaliação*, de MIRANDA, W. S. (2007), tem um foco análogo ao nosso, apesar de ser de cunho quantitativo.

Miranda (2007, p. 12) baseia-se em Pochulu (2005), que apresenta alguns conteúdos das séries finais do Ensino Fundamental como contendo erros constantes:

1. Aplicação das regras de sinais da multiplicação, ao efetuar soma com números inteiros;
2. Somam números racionais, efetuando a adição de numeradores de um lado e denominadores por outro;
3. Dividem números racionais, aplicando o algoritmo da multiplicação;
4. Resolvem divisão onde o dividendo é um zero, pensando como 1, ou ignorando sua presença;
5. Simplificam frações, dividindo numerador e denominador por números

diferentes;

6. Associam que um decimal periódico se obtém, em todos os casos, como uma fração cujo numerador é igual ao seu período truncado, expressando a parte inteira como numerador e o período como denominador;

7. Consideram que tem um número negativo elevado a certo expoente quando o sinal de menos antecede a potência;

8. Recuperam o esquema de multiplicação reiterada, como fatores negativos, quando o expoente da potência é um número negativo;

9. Assumem que toda potência de expoente nulo dá por resultado certo a base da mesma;

10. Aplicam a propriedade distributiva da radiciação em operações de soma e/ou subtração;

11. Estimam que a raiz com radicando negativo e índice ímpar tem duplo resultado, ou que não possui solução no conjunto dos reais;

12. Decodificam incorretamente os valores representados por letras, em uma reta numérica;

13. Não conseguem determinar hierarquias, nem tipos de operações que intervêm nos termos de uma equação;

14. Consideram que um fator negativo se transpõe dividido e combinando o sinal; ou que forma parte de um resto, por isso passam-no somando para o outro membro;

15. Transpõem fatores como dividendo e não como divisores;

16. Não identificam as figuras geométricas elementares quando em posição "não estudada";

17. Supõem que a altura de um triângulo é sempre um segmento interior à figura;

18. Truncam respostas que prescindem das unidades de medida, em problemas que envolvem magnitudes.

Dentre os itens apresentados no trabalho de Miranda (2007), o 2, o 3 e o 13 até se assemelham com os conteúdos que queremos analisar, mas Miranda (2007), apesar de ter proposto testes para as turmas da 5ª a 8ª série do Ensino Fundamental (atual 6º ao 9º ano), nos moldes em que aplicamos, fez uma análise sobre o operacional, enquanto nós, além do operacional, quisemos ver a interpretação dada pelos alunos, diante de certos problemas.

Miranda (2007, p. 28) descreve que "o estudo do erro não deve se limitar apenas a identificá-lo, através da comparação de respostas dadas com o padrão esperado, mas procurar as suas causas, sendo essa a nossa busca, neste trabalho".

Miranda (2007, p. 13) tinha como foco os seguintes itens:

a) que tipos de erros vêm ocorrendo entre nossos estudantes;
b) quais os erros cometidos pelos alunos de matemática podem se constituir como obstáculo didático e
c) se há coincidência entre os tipos de erros por ele encontrados e os erros encontrados por Pochulu (2005).

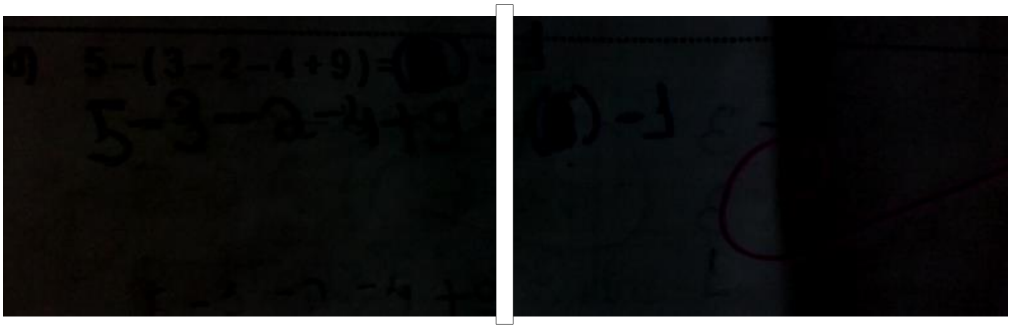
Portanto, estava claro que o objetivo do autor era comparar a parte procedimental dos alunos de sua pesquisa com os erros citados por Pochulu. Ao final, o autor constata que, dos dezoito erros mencionados por Pochulu, onze ocorreram em sua pesquisa: os de número 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 13, 14 e 15.

Para detalhar melhor seu estudo, Miranda (2007) representa cada questão aplicada em seus testes, através de tabelas, e mostra o número de erros ocorridos em cada item e em cada série; em nosso trabalho, iremos expor os resultados analisados em gráficos de setores, interpretando que tipo de erros ocorrem em cada um dos itens analisados. Assim como Miranda (2007), analisamos turmas do 6º ao 9º anos – antiga 5ª a 8ª séries abordadas por Miranda (2007).

Azevedo (2009) apresenta-nos o trabalho *Análise de Erros Matemáticos: interpretação das respostas dos alunos* e já em seu resumo menciona que muitos professores encaram o erro como algo negativo e inaceitável. Para a autora (assim como é defendido em nosso trabalho), muitas vezes, o aluno não gosta de estudar Matemática, por não encontrar sentido e significado nas atividades que está realizando.

> Com a compreensão do que levou determinado estudante a cometer o erro, torna-se mais fácil elaborar atividades que visem trabalhar melhor as dificuldades dos alunos, uma vez que há mais probabilidade de detectar qual parte do conteúdo em questão não está sendo entendida pelo aluno. (AZEVEDO, 2009, p. 6)

Em consonância com nossa pesquisa, Azevedo (2009) está preocupada com a interpretação que os alunos estão tendo diante de algum exercício e, dessa forma, a autora espera conseguir atividades que facilitem o entendimento dos conteúdos por nossos alunos, entendendo que a análise de erros pode servir como recurso para os professores compreenderem melhor as respostas dos discentes, pois, ao analisar seus erros, "o professor deixa de apenas dizer o que está certo e o que está errado, para acompanhar o aluno no processo de construção de conhecimento". (Azevedo, 2009, p. 10)



A imagem anterior reflete claramente o que foi dito por Azevedo: somente foi analisada a resposta final, o que não comprova que o aluno está compreendendo o conteúdo, pois, tanto a resposta, quanto o desenvolvimento, estão incorretos. Efetuando as contas escritas pelo aluno, “5 – 3 – 2 – 4 + 9”, podemos ver que seu resultado deveria dar “5”, diferente do “– 1” exposto no final e que foi o suficiente para o aluno ter acertado a questão. A resposta “– 1” é a correta, mas, para o aluno encontrá-la, ele poderia ter efetuado dentro dos parênteses, primeiro, chegando a obter “5 – (6)”, que daria “– 1”, ou, se fosse para cancelar os parênteses, como foi pensado, o aluno deveria ter trocado o sinal de todos os elementos que estão dentro dos parênteses, ficando dessa forma: “5 – 3 + 2 + 4 – 9”, em que também teria encontrado o “– 1” esperado pelo professor, só que, dessa vez, com o desenvolvimento correto.

> Como a matemática, muitas vezes, é considerada uma ciência exata e pronta, os professores avaliam apenas a resposta final, ao invés de considerar o processo intermediário que o aluno teve para chegar àquela resposta, a interpretação do aluno não é levada em conta, pois, devido a essa concepção da matemática, pensa-se que a resposta final deve ser única. (AZEVEDO, 2009, p. 13)

Portanto, a preocupação de Azevedo (2009) com os erros dos alunos e com a forma como os professores estão lidando com eles converge com nosso trabalho, assim como o pensamento de que, para saber onde os estudantes cometem os erros, faz-se necessário encontrar atividades que tornam seu aprendizado menos difícil. No desenvolvimento de suas ideias, Azevedo (2009) baseou-se muito nos trabalhos de Helena Cury, nosso próximo foco.

Assim como em nossa pesquisa, Cury (2007, p. 13), em sua obra *Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos*, também questiona o fato de o acerto garantir que o aluno está sabendo e o erro, que não está;

> [...] destaco a ideia de que o erro se constitui como um conhecimento, é um saber que o aluno possui, construído de alguma forma, e é necessário elaborar intervenções didáticas que desestabilizem as certezas, levando o estudante a um questionamento sobre as suas respostas. (CURY, 2007, p. 80)

A autora menciona o que foi dito por Hadamard (1945, p. 24): “Eu faço muito mais (erros) do que meus estudantes; só que eu sempre os corrijo, de forma que nenhum traço deles permaneça no resultado final”. Dessa forma, temos a noção de que nós, professores, também erramos (de fato), mas já somos capazes de corrigir nossos erros e não deixá-los transparecer.

Cury (2007, p. 42), ao fazer uma análise sobre os pesquisadores que têm o erro como foco, cita Del Puerto e colaboradores (2006), que consideram que “uma ‘biblioteca de erros típicos’ pode ajudar o professor a planejar atividades que auxiliem os alunos em suas dificuldades”, fato que coincide com os objetivos desse trabalho, pois queremos encontrar atividades que nos ajudem a entender um pouco a visão dos alunos sobre os conteúdos que selecionamos.

O objetivo da investigação, além de analisar e classificar os erros apresentados pelos alunos participantes, é desenvolver estratégias de ensino que possam auxiliá-los em suas dificuldades [...] (CURY, 2007, p. 50); segue, ainda, que “[...] analisar as respostas produzidas pelos alunos, em qualquer conteúdo, é uma das formas de auxiliá-los a construir o conhecimento básico necessário para transitar pelos conteúdos específicos de suas áreas de formação” (CURY, 2007, p. 73).

Concordando com a citação de Cury, percebemos a importância que este trabalho pode ter, ratificando que nosso objetivo é mostrar aos docentes a importância do erro no processo de aprendizagem. Conforme mencionado pela autora, uma biblioteca de erros pode ajudar o professor a encontrar atividades que auxiliem seus alunos, assim como nossas atividades avaliativas mostrarão recorrentes erros e onde o mesmo possa ocorrer nos conteúdos que escolhemos pesquisar.

O artigo de PASSOS (2014), *O Estudo do Erro/Erros em Pesquisas em Educação Matemática e Áreas Afins*, apresenta

> [...] alguns dos resultados encontrados por meio de uma busca no site da Capes por trabalhos que tratam do erro/erros nos processos de ensino e de aprendizagem de matemática. Essa pesquisa foi realizada com a intenção de identificar o tratamento que tem sido dado ao erro/erros dos estudantes na elaboração do conhecimento matemático. Foram selecionados principalmente os trabalhos relacionados à Educação Matemática, Educação e Psicologia. (PASSOS, 2014, p. 1)

A autora faz uma busca no site da Capes, até junho de 2012, à procura de pesquisas que tenham como foco o erro/erros no processo de ensino e aprendizagem de Matemática e os categoriza de forma a ter uma biblioteca de pesquisas sobre o respectivo tema, tendo os seguintes resultados – Passos (2014, 4) –:

Quadro 1: Trabalhos acadêmicos, segundo tipo ou área

Tipo de trabalho / área	**nº**
Teses em Educação Matemática ou áreas afins	14
Dissertações (mestrado acadêmico) em Educação Matemática ou áreas afins	129
Dissertações (mestrado profissionalizante) em Educação Matemática ou áreas afins	24
Teses em outras áreas	73
Dissertações (mestrado acadêmico) em outras áreas	312
Dissertações (mestrado profissionalizante) em outras áreas	3
Total	555

Fonte: Capes

Para Passos (2014, p. 2), "análise dos erros não é uma fórmula mágica, mas um caminho para nortear o trabalho do professor para favorecer a aprendizagem dos alunos".

4. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA E ANÁLISE DE DADOS

Neste estudo, de cunho qualitativo, fomos a campo, com atividades relacionadas a certos conteúdos considerados pré-requisitos na Matemática, foco de nossa pesquisa. Mas não objetivamos somente o desenvolvimento do algoritmo, também tentamos entender a compreensão do aluno sobre esses conteúdos, a fim de, futuramente, desenvolvermos atividades em sala de aula que diminuam a frequência de erros nessas resoluções, contribuindo ainda mais com nossa pergunta diretriz: "*Como podemos contribuir com a prática docente, de modo a propor uma reflexão desse profissional na busca de alternativas que auxiliem os alunos a aprender com seus erros em Matemática?*". Observamos se, nesses conteúdos, o aluno consegue ter um pensamento conceitual e não apenas procedimental, utilizando-o apenas como uma ferramenta de resolução.

O público-alvo, o qual colaborou com esta pesquisa, foram alunos do Ensino Fundamental da Escola Estadual Mercedes Nery Machado, onde lecionamos para turmas de 6º e 7º Anos. Elaboramos atividades de diferentes formas, de um mesmo conteúdo matemático de cada série do Ensino Fundamental. Algumas atividades foram apresentadas para alunos das séries seguintes, a fim de termos uma compreensão do quanto esses conteúdos fazem sentido para os estudantes, tendo passado algum tempo, desde que os mesmos lhes foram apresentados. Portanto, o conteúdo do 6º ano será aplicado (em parte) ao aluno do 7º ano; o conteúdo do 7º, ao aluno do 8º; e assim sucessivamente.

A análise dos erros não é uma fórmula mágica, mas um caminho que norteia o trabalho do professor, para favorecer a aprendizagem dos alunos. Em uma perspectiva de avaliação, como oportunidade de aprendizagem, diferentes instrumentos avaliativos são utilizados para diagnosticar a relação do aluno com os saberes escolares e as eventuais dificuldades, de modo que ele possa compreender "os seus erros e, em função disso, tornar-se capaz de os ultrapassar" (HADJI, 1994, p. 123).

A análise dos dados coletados objetiva chamar a atenção para os conteúdos selecionados e alertar os professores a darem mais ênfase aos mesmos, não importando a série em que os alunos se encontrem. As atividades foram aplicadas para, aproximadamente, duzentos e cinquenta participantes, da E. E. Mercedes Nery Machado, em Juiz de Fora, ao final do ano letivo de 2014, pois, dessa forma, conseguimos abordar uma aprendizagem recente de todo o conteúdo, para estabelecermos as comparações desejadas. Todos os alunos fizeram as atividades no mesmo horário, tendo em torno de uma hora para a realização das mesmas. Contamos com a colaboração de todo corpo docente e da direção da escola, para realizar tais atividades, que envolviam toda a escola, e desenvolvê-las ao mesmo tempo.

Os conteúdos escolhidos, por apresentarem erros de diversos alunos, ano após ano, foram:

- 6º Ano – Frações.
- 7º Ano – Equações.
- 8º Ano – Produtos notáveis.
- 9º Ano – Aplicação do método de resolução de uma equação do 2º grau.

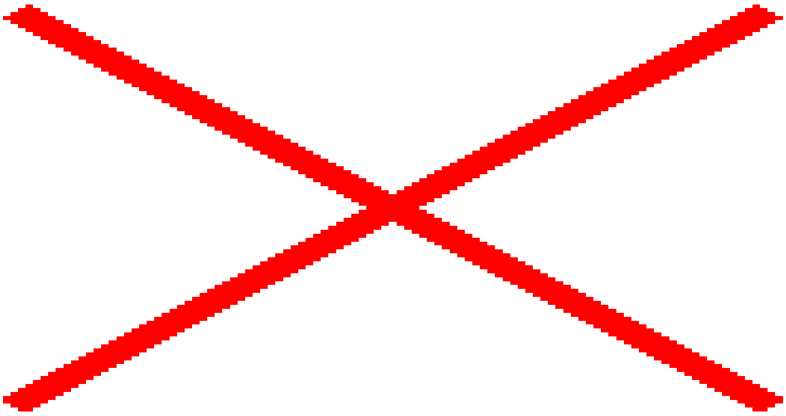
Alguns dados obtidos na pesquisa

1 Efetue as seguintes operações com frações:

a $\frac{2}{3}.\frac{2}{5}$ b) $\frac{10}{3}-\frac{6}{3}$ c) $\frac{8}{10}:\frac{2}{5}$

d) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}$ e) $\frac{2}{10}+\frac{1}{2}.\frac{6}{5}$ f) $\frac{7}{9}x\frac{3}{6}$

Na primeira questão do 6º ano, na qual deveriam ser resolvidas as quatro operações envolvendo frações, dos noventa e sete alunos que fizeram a atividade, quatro deixaram-na em branco; vinte e cinco acertaram as opções de multiplicação e divisão; onze, multiplicação e soma; trinta e quatro, apenas multiplicação; e onze acertaram as quatro operações, sendo que, desse grupo final, apenas quatro acertaram a letra E, que envolvia soma e multiplicação, pois só esses se lembraram de operar a multiplicação antes da soma, enquanto dos onze que acertaram soma e multiplicação, apenas um aluno conseguiu resolver corretamente esse item.



Análise dos testes dos alunos 1

2 Num colégio do Rio de Janeiro, $\frac{3}{5}$dos alunos torcem pelo Flamengo e, dos restantes, $\frac{2}{3}$torcem pelo Vasco. O colégio tem 1 275 alunos.

a) Que fração dos alunos torce pelo Vasco?

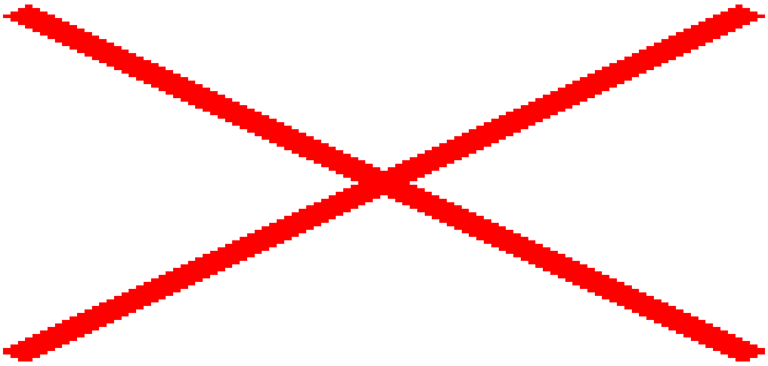
b) Quantos torcem pelo Flamengo? E pelo Vasco?

c) Quantos são torcedores do Fluminense?

3 Gilberto plantou $\frac{1}{4}$de sua horta com tomates, $\frac{1}{5}$com cenouras e o restante com verduras. Que parte da horta foi plantada com verduras?

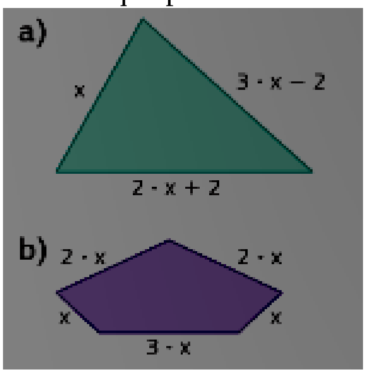
Erros análogos aos alunos do 6° ano se repetiram com os do 7°, nas questões de números 2 e 3 (atividades do 7º ano) com problemas envolvendo equações (que estavam nas atividades do 6° ano). Vinte alunos deixaram-nas em branco; quarenta e nove erraram as duas, sendo que doze, dos quarenta e nove, tentaram somar as frações na questão 3 (errando o processo da soma), mas só dois completaram o inteiro, para dar a resposta, sendo que os mesmos já haviam errado na soma; sete dos que erraram as duas multiplicaram as frações na questão 3; quatorze acertaram a 3; quatro acertaram a B do número 2, com um deles acertando, ainda, o número 3.

Dos sessenta e sete alunos que responderam às questões, trinta e três marcaram $\frac{2}{3}$para a fração correspondente ao Vasco, assim como ocorreu com o 6° ano (o Sistema 1, mais uma vez, fez-se presente). Na questão 3, confirmando o grande problema em interpretação de problemas, os alunos tentaram somar ou multiplicar a quantidade de tomate com cenoura, achando que seu resultado seria a quantidade de verdura.



Análise dos testes dos alunos 2

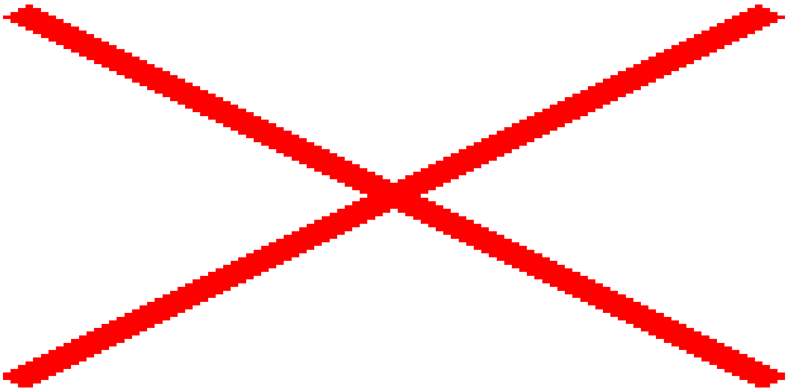
7) Sabendo que perímetro é a soma de todos os lados, calcule o perímetro de cada figura.



8) Reduza os termos semelhantes:

$$2(x - 5) + 3x - 18 + 8$$

O 8º ano é uma série na qual as expressões são bastante estudadas e, como essas atividades foram aplicadas ao final do ano letivo, as questões 7 e 8, que continham tal conteúdo, não deveriam trazer problemas para os estudantes, correto? Não foi o que ocorreu, pois os mesmos conseguiram se sair melhores nas equações do que em expressões, ainda que o enunciado da questão 7, que pedia o perímetro, explicasse sua definição.



Análise dos testes dos alunos 3

O equívoco entre expressão e equação ainda é forte por parte dos alunos, uma vez que, dos vinte e cinco que erraram as duas questões, onze transformaram as atividades em equações, tentando encontrar um valor para as letras.

No 9º ano, em resoluções de equação do 1° grau, a turma inteira soube desenvolver as atividades, mas, no momento de efetuarem um problema, conforme ocorrido com as frações, ninguém conseguiu encontrar o resultado esperado, havendo 10 questões erradas e 3 com respostas sem sentido, e, assim como na questão de futebol em fração, foram induzidos a uma resposta mecânica, que se encontrava no enunciado, e a paciência de usar o Sistema 2, para verificar a veracidade da resposta, não esteve presente.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Muitos alunos veem a Matemática como uma disciplina difícil, com desafios além de suas capacidades, alcançada apenas por “iluminados”. Reconhecemos que o raciocínio, em qualquer área do conhecimento, envolve atenção e motivação. Por isso, para responder a nossa pergunta diretriz – “*Como podemos contribuir com a prática docente, de modo a propor uma reflexão desse profissional na busca de alternativas que auxiliem os alunos a* *aprender com seus erros em Matemática?*" –, escolhemos estudar os erros cometidos pelos estudantes, investigando se há um motivo para tais ocorrências e de que forma a correção dos docentes influi no rendimento dos estudantes, nessa disciplina.

Acreditamos ter alcançado o objetivo de abrir um campo de discussão e reflexão para os professores, podendo fazer os mesmos pensarem sobre os erros dos alunos, em busca de estratégias que diminuam a ocorrência desses erros, além de fazer uma autocrítica sobre sua postura como docente.

A exposição das ilusões cognitivas abre uma nova janela para pesquisas em análises de erros, uma vertente pouco ou ainda não explorada em cima desse tema. Dessa forma, vemos mais um ponto positivo neste trabalho e o quanto ele pode ser importante para a Educação Matemática.

Com a leitura desta pesquisa, muitos professores podem se identificar com o que ocorre em suas próprias salas de aula, com isso, cresceria o número de pesquisas e discussões acerca desse tema, grande benefício para docentes e alunos. Quem sabe, assim, encontraremos ferramentas para uma melhor compreensão de nossos estudantes e, consequentemente, diminuiremos a quantidade de erros cometidos por eles.

REFERÊNCIAS

AZEVEDO, D. S. *Análise de Erros Matemáticos:* Interpretação das respostas dos alunos. 2009. 65 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Instituto de Matemática – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rio Grande do Sul, 2009.

BARBOSA, G. S. *O Teorema Fundamental da Aritmética:* jogos e problemas com alunos do sexto ano do ensino fundamental. 2008. Tese (Doutorado). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

Brasil. *Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs).* Matemática. Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BERTONI, N. *O erro como estratégia didática*. Campinas: Papirus, 2000.

BRANSFORD, J. D.; BROWN, A. N.; COCKING, R. R. *Como as pessoas aprendem:* cérebro, mente, experiência e escola. São Paulo: SENAC São Paulo, 2007. 381 p.

CURY, Helena Noronha. Erros em soluções de problemas de cálculo diferencial e integral: análise, classificação e tentativas de superação. Porto Alegre: PUCRS, Instituto de Matemática. Relatório de pesquisa, 1990.

_____. *Análise de erros:* o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2007. 112 p. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

DE LA TORRE, S. et allii. *Errores Y Currículo – Tratamiento Didáctico De Los Errores Em La Ensenãnza.* Barcelona: Ppu, 1994.

FIORENTINI, D. *Erros e acertos no ensino-aprendizagem da matemática*: problematizando uma tradição cutural. In: Jornada Nacional de Educação Matemática e XIV Jornada Regional de Educação Matemática, 2006, Passo Fundo. *Anais*...Universidade de Passo Fundo, 2006.

FREIRE, Paulo. *Pedagogia da Autonomia:* Saberes Necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

IMENES, L. M. LELLIS, M. *Matemática:* Imenes & Lellis. 2° ed. São Paulo: Moderna, 2012.

KAHNEMAN, D. *Rápido e Devagar*: duas formas de pensar. Rio de Janeiro: Objetiva, 2011. 610 p.

KISTEMANN Jr. M. A.*O Erro e a Tarefa Avaliativa em Matemática:* uma Abordagem Qualitativa. 2004. 120 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. 2004.

HADJI, C. *A avaliação, regras do jogo:* das intenções aos instrumentos. 4. ed. Porto: Porto, 1994.

LUCKESI, C. C. *Avaliação da aprendizagem:* componente do ato pedagógico. São Paulo: Cortez, 2011. 448 p.

MACHADO, N. J. *Epistemologia e Didática*. Tese de Livre Docência. São Paulo: Fac. de Educação – Usp, 1999.

MIRANDA, W. S. *Erros e Obstáculos:* Os conteúdos Matemáticos do Ensino Fundamental no Processo de Avaliação. 2007. 122f. Dissertação (Mestrado em Ciências e Matemáticas) – Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico – Universidade Federal do Pará, Belém. 2007.

NACARATO, B. L. S.; MENGALI, A. M.; PASSOS, C. L. B. *A matemática nos anos iniciais do ensino fundamental:* tecendo fios do ensinar e do aprender. Belo Horizonte: autêntica, 2009. 159 p. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

PASSOS, A. Q. *O estudo do erro/erros em pesquisas em Educação Matemática e áreas afins*. In: EPREM – ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2014. Campo Mourão. *Anais*...Universidade Estadual de Londrina, 2014.

PIAGET, J. *Lógica e Conhecimento*. Porto: Liv. Civilização Ed. 1975.

POPPER, K. *Conhecimento Objetivo:* uma abordagem evolucionária. Belo Horizonte: Itatiaia, 1975.