

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

Pós-Graduação em Educação Matemática

Mestrado Profissional em Educação Matemática

Camila de Almeida Franco

Amarildo Melchiades da Silva

**Educação Financeira Escolar: Discutindo a Noção de Juros no
Ensino Médio**

Juiz de Fora (MG)

Setembro, 2018

Camila de Almeida Franco

Educação Financeira Escolar: A Noção de Juros no Ensino Médio

Orientador: Prof. Dr. Amarildo Melchiades da Silva

Produto Educacional apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Juiz de Fora (MG)

Setembro, 2018

Sumário

APRESENTAÇÃO	4
AS TAREFAS PROPOSTAS	6
As noções-categorias do Modelo dos Campos Semânticos	7
A Produção das Tarefas: concepções, objetivos e construção	7
TAREFA 1	9
TAREFA 2	10
TAREFA 3	11
TAREFA 4	13
TAREFA 5	16
TAREFA 6	19
TAREFA 7	21
TAREFA 8	23
TAREFA 9	25
ENCARTE	27
CONSIDERAÇÕES FINAIS	44
REFERÊNCIAS	46

APRESENTAÇÃO

Este Produto Educacional é resultado de uma Dissertação de Mestrado intitulada Educação Financeira Escolar: A Noção de Juros no Ensino Médio. Que é constituído por um conjunto de tarefas sobre Educação Financeira.

Nossa finalidade é apresentar atividades para serem aplicadas nas escolas públicas e particulares com o intuito de ajudar na formação de alunos educados financeiramente.

A elaboração dessas tarefas visou alguns objetivos específicos, como:

- 1- Recolher informações dos alunos sobre juros, juros compostos, e suas opiniões, de maneira a não influenciar em suas respostas;
- 2- Fazer com que eles discutam e repensem sobre situações que envolvam suas tomadas de decisões sobre o assunto;
- 3- Trazer definições e concepções sobre juros simples, compostos e taxa de juros, para que possamos verificar, se tais conhecimentos teóricos serão incorporados a suas falas na reflexão e na prática desses alunos em situações futuras de demanda de produção de significados;
- 4- Estimular os alunos a aprender a realizar os cálculos sobre juros;
- 5- Introduzir a fórmula matemática de juros compostos, a partir da reflexão e discussão do seu significado.

AS TAREFAS PROPOSTAS

As noções-categorias do Modelo dos Campos Semânticos

A elaboração de nossas tarefas teve como objetivo estimular o aluno consiga produzir significados para juros. A leitura dos significados dos estudantes para as tarefas foi realizada considerando noções-categorias do MCS. Como observa Silva (2013):

quando uma pessoa se propõe a produzir significados para o resíduo de uma enunciação, observa-se, da perspectiva do MCS, o desencadeamento de um processo – o de produção de significado – que envolve:

1.A constituição de objeto – coisas sobre as quais sabemos dizer algo e dizemos – que nos permite observar tanto os novos objetos que estão sendo constituídos quanto os significados produzidos para esses objetos;

2.A formação de um núcleo: processo que envolve as estipulações locais, as operações e suas lógicas;

3.A fala na direção dos interlocutores;

4.As legitimidades, isto é, o que é legítimo ou não dizer no interior de uma atividade (SILVA; LINS, 2013, p.10)

São com essas noções categorias que leremos a produção de significados de nossos estudantes.

A Produção das Tarefas: concepções, objetivos e construção

Para discutir sobre a maneira como elaboramos as tarefas, recordamos que nossa perspectiva sobre o ensino de educação financeira na sala de aula de matemática considera a visão de um currículo em que as principais noções sobre o assunto, retornem a discussão em anos diferentes e com o enfoque ampliado na discussão com os estudantes. No caso da noção de juros, a proposta é que o tema seja discutido no ensino fundamental como proposto por Dias (2015), em que foi introduzida a ideia de juros e discutido os juros simples. Dando continuidade a este processo, nosso objetivo principal será a discussão sobre juros até a discussão sobre juros compostos com os alunos do ensino médio.

Para dar início a elaboração das tarefas consideramos inicialmente o perfil dos estudantes para o qual as tarefas seriam destinadas. Nosso interesse está em pensar um ensino voltado para alunos de escola pública municipais e estaduais.

Nossa experiência em docência na escola pública informa que os alunos do ensino médio possuem muitas dificuldades em matemática e, em particular, em matemática financeira. As avaliações em larga escala internas e externas têm identificado este problema indicando o que a nossa experiência já vinha constatando. Sendo assim, entendemos que este seria um ponto que considerariamos em nossa elaboração.

Segundo, desenvolvemos uma análise de livros de Matemática Financeira com o objetivo de analisar o tratamento dado ao tema juros. Citamos, por exemplo, os autores SAMANEZ (2010), MATHIAS; GOMES (2002); ARAMAN e SAMPAIO (2009). A perspectiva encontrada nos livros tem como objetivo ensinar pela via do exemplo, da explicação e da reprodução dos exemplos. Muitas vezes esta é também a metodologia de ensino de muitos professores que se apoiam na crença da transmissão de conhecimento e do reforço pela execução de muitos exemplos e exercícios. Ficou claro também pela leitura dos livros que a importante noção de taxa de juros deveria ser discutida mais detidamente com os alunos de modo tornar a ideia objeto de atenção deles.

Nesse momento, entra em cena nossos pressupostos teóricos; noção concepção de conhecimento como sendo do domínio da enunciação, nosso entendimento de processo comunicativo considerando de que as tarefas devam ser entendidas como resíduo de enunciação, mas que elas devem ter o potencial para estimular os estudantes a produzirem significados.

Assim, de maneira consciente e proposital escolhemos alguns exemplos apresentados nos livros citados e os transformamos em problemáticas a serem discutidas, mudando assim a perspectiva da apresentação ao estudante (leitor) para colocar em discussão a tarefa. Entendida como demanda de produção de significados.

Portanto, a primeira tarefa teve como finalidade observar se o aluno conseguiria identificar a ideia de juros em uma situação cotidiana, de modo a possibilitar ao professor identificar quais os significados produzidos pelo estudante para o termo juros.

Com o intuito de auxiliar as aplicações dessas tarefas, resolvemos apresentar algumas respostas possíveis, o que esperávamos obter por parte dos alunos em cada questionamento.

TAREFA 1

Tarefa 1: Iniciando a discussão

Você ouve o seguinte diálogo entre seu pai e um amigo:

Amigo: Estou precisando de dois mil reais emprestados, você tem?

Pai: Tenho, mas está na poupança.

Amigo: Você pode me emprestar? Te pagarei quando completar um ano, ok?

Pai: Ok! Vou pegar para você amanhã.

Pergunta:

- a) O que você tem a dizer deste diálogo?

Meu pai está ajudando um amigo. Mas faltaram conversar sobre os termos do empréstimo.

Qual o juros que seu amigo vai pagar? Deveria ser no mínimo o juros da poupança. Amigos, amigos, negócios a parte.

- b) Se você interviesse no diálogo, que perguntas importantes você faria a seu pai e a seu amigo a respeito da negociação que estão fazendo?

Qual é o juros que será pago pelo o empréstimo?

- c) O que você espera que aconteça quando o período de um ano terminar?

Que meu pai receba o dinheiro de volta com juros.

A segunda tarefa tem como objetivo saber o que os estudantes podem dizer sobre juros, lhes fazendo uma pergunta direta sobre o tema

TAREFA 2

Tarefa 2: O que é juros?

Responda as seguintes perguntas:

- a) O que você entende por “juros”?

Opção pessoal.

- b) Em quais situações do dia a dia você diria que a noção de juros é usada pelas pessoas?

Quando uma pessoa pede dinheiro emprestado para outra ou para um banco ela deve pagar juros.

Quando compramos alguma coisa em uma loja e não pagamos a vista.

- c) Os termos juros e taxa de juros significam coisas diferentes ou têm o mesmo significado para você?

Não. Eles significam coisas diferentes.

As duas tarefas seguintes é uma resposta às questões colocadas na tarefa 2. Porém, em vez de dizer para os estudantes o que é juros e taxa de juros, eles são estimulados a ler e a debater sobre os temas. Observamos, que a leitura de textos e posterior discussão é uma proposta constante em trabalhos de nosso grupo e tem o objetivo claro estimular o aluno a ler e falar sobre o que leu.

TAREFA 3

Tarefa 3: Entendendo a noção de Juros

Texto para Leitura¹

Uma operação financeira comum em nossa sociedade é o empréstimo de dinheiro. Empréstimo, neste caso, significa confiar a alguém certa soma de dinheiro para que faça uso dele durante um tempo, restituindo-o depois ao dono. As pessoas pedem dinheiro emprestado a outras pessoas e também aos bancos.

Em geral, quem empresta dinheiro recebe o valor emprestado de volta, no tempo que foi combinado para devolvê-lo, acrescido de uma quantia, a mais, chamada juro pelo tempo que o dinheiro ficou com a pessoa que foi beneficiada pelo empréstimo.

A existência de juros, em uma transação financeira, decorre de vários fatores como, por exemplo:

- Pela necessidade ou preferência de uma pessoa em consumir bens e serviços no presente a poupar para consumi-los no futuro;
- A inflação, que faz com que o dinheiro sofra desvalorização no tempo. Em consequência disso, o dinheiro que fica emprestado com outra pessoa, vai diminuindo o seu valor naquele período de tempo. Isto é, se uma pessoa empresta R\$100,00 para outra num certo dia e recebe de volta depois de um ano, o que ela compraria com esse valor quando emprestou não vai ser a mesma coisa que ela comprará depois de um ano; é sempre menos;
- Os riscos que quem empresta corre nessa ação. E os juros produzidos compensam esses possíveis riscos que a pessoa ou o banco pode ter com a operação de empréstimo;
- A possibilidade de gerar um lucro para quem empresta como forma de compensar a privação do seu dinheiro por determinado período de tempo.

Para discutir:

a) Para uma pessoa que pede um empréstimo em um banco ou para outra pessoa, que benefícios ela obtém?

¹Texto adaptado da tarefa de Dias (2015)

Aquele que recebe um empréstimo se beneficia da possibilidade de poder fazer um investimento que não conseguiria fazer sem o dinheiro obtido.

A partir do empréstimo, trocar uma dívida com juros alto, pela atual com juros mais baixo.

b) Considerando o texto acima, quais são os possíveis riscos que uma pessoa ou um banco podem ter ao emprestar o seu dinheiro?

Desvalorização do dinheiro com relação o tempo.

Deixar de investir, ou usar seu dinheiro.

O não pagamento desse empréstimo.

c) Quando as pessoas compram um produto em uma loja a prazo, por que elas pagam juros por isso? Você acha que existe nesta transação uma operação de empréstimo?

Sim, acho que essa operação se caracteriza um empréstimo. Pois a pessoa irá usufruir de um produto, antes que ocorra o pagamento do mesmo.

TAREFA 4

Tarefa 4: O que é Taxa de Juros?

Quando falamos em juros, estão envolvidos outros termos que precisamos conhecer, tais como, capital, montante e taxa de juros. O capital (C) é entendido como qualquer valor monetário que uma pessoa empresta a outra durante certo tempo. E o montante (M) é o resultado da adição do capital inicial com o juro recebido pelo período do empréstimo. Outro termo importante é o de taxa de juros que passaremos a discutir.

Suponha que você tenha emprestado R\$ 100,00 a uma amiga por um mês. No dia combinado sua amiga, por agradecimento, devolve a você R\$ 105,00. O R\$5,00 que você recebeu a mais pode ser entendido como o juro pelo tempo que seu dinheiro ficou com ela. Mas o que significa este valor recebido a mais em relação ao valor emprestado?

Matematicamente respondemos a esta pergunta comparando o valor do juro obtido com o do dinheiro emprestado, isto é, fazemos a seguinte divisão:

$$\frac{\text{Juro}}{\text{Capital}} = \frac{5}{100} = 0,05$$

Este número encontrado pode ser interpretado da seguinte maneira: o valor do juro é de cinco centavos para cada um real de empréstimo.

Lembrando que 5/100, em termos de porcentagem, representa 5% está é uma outra maneira de interpretar a pergunta que fizemos: podemos dizer que cinco reais representa 5% do valor emprestado.

Chamamos o valor 0,05 ou 5% de **taxa de juro**, que possui estas duas representações: a primeira é chamada de *taxa unitária* e a segunda é chamada de *taxa percentual*.

Assim, a taxa de juros é o resultado da divisão do valor dos juros pelo capital emprestado. Assim, representando-se a taxa de juro pela letra **i**, o valor dos juros pela letra **J** e o valor do capital pela letra **C**, tem-se que:

$$i = \frac{J}{C}$$

É importante observar que a taxa de juros calculada no exemplo anterior e nas tarefas dessa seção consideram o cálculo do **juro no prazo de um único período de tempo** (um mês, um ano, ...) a que se refere a taxa. Quando o período de tempo for, por exemplo, três meses, cinco anos, a fórmula acima será alterada. (veja depois na tarefa 5)

Analise as seguintes situações abaixo determinando as taxas unitária e percentual e interpretando o que querem dizer.

i) Um empréstimo de R\$ 2000,00 **por um mês** em que o valor devolvido foi de R\$ 2040,00. Qual é a taxa de juros?

Serão devolvidos R\$ 40,00 a mais.

$$40/2000 = 0,02 = 2/100 = 2\%$$

Taxa percentual:

O capital de R\$ 2000,00 tem 20 centos. Como cada um deles rende 2, o juro total da aplicação no período de um mês é $2 \times 20 = 40$.

Taxa unitária:

Quando dizemos que a taxa de juros é de 0,02, estamos dizendo que o valor dos juros é de 2 centavos para cada 20 reais.

ii) O valor de R\$ 3.000,00 aplicado **por um ano** em um banco rendeu R\$ 750,00 de juros (simples). Qual é a taxa de juros?

Taxa percentual:

$$750/3000 = 0,25 = 25/100 = 25\%$$

O capital de R\$ 3000,00 tem 30 centos. Como cada um deles rende 25, o juro total da aplicação no período de 1 ano é $30 \times 25 = 750$

Taxa unitária:

Quando dizemos que a taxa de juros é de 0,25, estamos dizendo que o valor dos juros é de 25 centavos para cada 30 reais.

iii) Um capital de R\$ 4.500,00 gerou um juro de R\$ 3.600,00 **em um ano**. Qual é a taxa de juro?

$$3600/4500 = 0,8 = 80/100 = 80\%$$

Taxa percentual:

O capital de R\$ 4500,00 tem 45 centos. Como cada um deles rende 80, o juro total da aplicação no período de 1 ano é $45 \times 80 = 3600$.

Taxa unitária:

Quando dizemos que a taxa de juro é de 0,8, estamos dizendo que o valor dos juros é de 80 centavos para cada 45 reais.

Na próxima tarefa retomamos a discussão de juros simples, considerando que os estudantes já possam ter discutido antes em algum momento. Porém, se isto não ocorreu, eles têm a oportunidade de entender sobre o assunto aqui. Por outro lado, nas tarefas seguintes, estaremos comparando a ideia de juros simples e compostos como modo de, pela diferença, levar a uma melhor compreensão das duas noções.

TAREFA 5

Tarefa 5: Juros Simples

Texto para leitura

Os juros são normalmente classificados em simples ou compostos, dependendo do processo de cálculo utilizado. Aqui discutiremos os juros simples.

Como você resolveria a seguinte situação: Sua amiga quer que você empreste novamente a ela R\$ 100,00. Nas mesmas condições anteriores, isto é, a taxa mensal de 5%. Porém com a nova condição que ela devolverá o montante no final de **três meses**.

a) Qual seria os juros que ela deveria pagar pelo empréstimo?

Nesta tarefa sugerimos que deixem os alunos livres para realizar os cálculos.

b) Explique se alguma coisa muda na relação que envolve a taxa i , os juros J e o capital C considerando a tarefa anterior?

Analisando a resposta anterior do aluno, convidamos todos para discutir suas soluções.

Após a aplicação das letras A e B, mostraremos uma resolução para verificar se irá influenciar na maneira de responder a letra C.

Resolução: Sabemos que o empréstimo por um mês, nos levou a taxa de juros dada pela igualdade:

$$i = \frac{J}{C}$$

Em que podemos escrever:

$$J = C \times i.$$

Sendo assim, o capital de R\$ 100,00, à taxa de 5% durante os três meses, teremos os seguintes resultados em cada mês:

$$J_1 = C \times i = 100 \times 0,05 = 5$$

$$J_2 = C \times i = 100 \times 0,05 = 5$$

$$J_3 = C \times i = 100 \times 0,05 = 5$$

Assim, o valor total dos juros J é

$$J = J_1 + J_2 + J_3 = R\$15,00.$$

Note que poderíamos chegar a este valor considerando que

$$J = 100 \times 0,05 \times 3$$

Assim, o cálculo do juro, como no exemplo acima, em que os juros de cada período são calculados sempre sobre o capital inicial (R\$ 100,00) é denominado regime de **juros simples**.

De um modo geral, se aplicarmos ou emprestarmos um capital durante t períodos a que se refere a taxa de juros, o juro ou rendimento poderá ser calculado da seguinte maneira:

$$J = C \times i \times t$$

Note que nos juros simples os juros de cada período são calculados sempre em função do capital inicial.

c) Com base na noção de juros simples, resolva as situações problemas a seguir:

i) Seu pai emprestou a um amigo R\$ 2.000,00 que estavam na poupança rendendo um juro mensal de 0,5%. Considerando que seu pai vai aplicar o regime de juros simples para emprestar o dinheiro, qual deveria ser a taxa de juros (mensal ou anual) que ele deveria cobrar e qual seria o juro e o montante do dinheiro que ele receberá no final do empréstimo?

A taxa deveria ser no mínimo igual a da poupança, 0,5%

$$C = 2000,00$$

$$i = 0,5\% = 0,005 \text{ a.m}$$

$$t = 12 \text{ meses}$$

$$J = 2000 \cdot 0,005 \cdot 12 = 22$$

ii) Qual o capital que, aplicado à taxa de juros simples de 1,5% ao mês, rende R\$ 900,00 em um semestre?

Temos que:

$$i = 1,5\% = 0,015$$

$$t = 6$$

$$J = 900$$

$$C = ?$$

$$900 = c \cdot 0,015 \cdot 6$$

$$c \cdot 0,09 = 900$$

$$c = 10000$$

O valor aplicado é R\$ 10000,00

iii) O capital de R\$ 5.000,00 foi aplicado a taxa de juros simples de 6% ao ano no período de 36 meses. Qual foi o juro obtido?

$$C = 5000$$

$$i = 6\% \text{ a. } a = 0,06$$

$$t = 36 \text{ meses} = 36/12 = 3$$

$$t = 3 \text{ anos}$$

$$J = 5000 \cdot 0,06 \cdot 3 = 900$$

O juro obtido foi de R\$ 900,00

TAREFA 6

Tarefa 6: Juros Compostos (introdução de juros compostos)

Duas pessoas precisavam fazer um empréstimo de R\$ 1.000,00. Elas aceitaram o dinheiro para ser devolvido nas mesmas condições: ao final de 5 meses e a uma taxa de juros de 10% ao mês. Porém, uma delas pegou o dinheiro emprestado com um amigo no regime de juros simples e a outra pessoa pegou o dinheiro em uma financeira. A tabela abaixo informa a maneira como os juros e o valor a ser devolvido foram calculados. Analise as contas:

Mês	Juros simples	Financeira
1º mês	$J_1 = 1.000 \times 0,10 = 100,00$	$J_1 = 1.000 \times 0,10 = 100,00$; $C_1 = 1100,00$
2º mês	$J_2 = 1.000 \times 0,10 = 100,00$	$J_2 = 1.100 \times 0,10 = 110,00$; $C_2 = 1210,00$
3º mês	$J_3 = 1.000 \times 0,10 = 100,00$	$J_3 = 1.210 \times 0,10 = 121,00$; $C_3 = 1331,00$
4º mês	$J_4 = 1.000 \times 0,10 = 100,00$	$J_4 = 1.331 \times 0,10 = 133,10$; $C_4 = 1464,10$
5º mês	$J_5 = 1.000 \times 0,10 = 100,00$	$J_5 = 1.464,10 \times 0,10 = 146,41$; $C_5 = 1610,51$
Montante	$M = C + J = 1500,00$	$M = C_5 = 1610,51$

- a) Explique como foi feito o cálculo pela financeira.

Vamos analisar o cálculo do juro feito mês a mês. O valor do juro no primeiro mês é calculado sobre o capital inicial. A partir do segundo mês o valor usado para o cálculo do juros (J_2) não é o valor do capital inicial, mas sim o capital gerado ao final do primeiro mês (C_1) e isso se repete nos meses seguintes: pegamos os montantes parciais anteriores (C_2 , C_3 , C_4) para calcular os juros posteriores. Observamos que é a partir do segundo mês que aparece a diferença entre juros simples e os juros compostos.

- b) Como você explicaria a uma pessoa os cálculos nas duas situações para que ela entenda a diferença?

No juros simples você sempre calcula o juros mês a mês sobre o capital inicial. No juros compostos, não, é juros sobre juros. E como podemos ver na tabela o montante vai ser maior nos juros compostos. Assim, se eu precisar pagar algum juros prefiro que seja em juros simples; se for para receber, prefiro que seja em juros compostos.

IMPORTANTE: NA TAREFA 7, O TEXTO PARA A LEITURA VAI RESPONDER EXATAMENTE A ESSAS PERGUNTAS.

TAREFA 7

Tarefa 7 – Juros Compostos (texto sobre juros compostos e fazendo as contas com juros compostos)

Texto para leitura

Os juros simples e os juros compostos diferem entre si na maneira como os cálculos são feitos. O juro é **simples** quando os juros de cada período (dia, mês, ano, etc.) são calculados sempre sobre o capital inicial. No regime de **juros compostos**, os juros de cada período são somados ao capital para o cálculo de novos juros nos períodos seguintes de modo a encontrar no final do período fixado o valor do montante. Esse processo de cálculo é conhecido como “**juro sobre juro**”.

O regime de juros compostos é o cálculo utilizado pelo sistema financeiro nas transações financeiras em geral. Pois, o rendimento gerado por uma aplicação em um banco ou por um empréstimo, no cálculo de juros sobre juros, gera sempre um acréscimo no montante para o período seguinte, gerando um lucro maior para quem vai receber. Dizemos então que os juros são capitalizados. Assim, chama-se de **capitalização** o momento em que os juros são incorporados ao capital inicial no processo de cálculo de juros.

Para discutir:

a) Os bancos são instituições financeiras que guardam nosso dinheiro, pagando juros para nós por deixar o dinheiro em seus cofres. Eles também nos emprestam dinheiro quando precisamos e pagamos a eles juros pelo empréstimo. Investigue quais são as taxas de juros praticadas em uma e outra situação e diga que conclusões você pode tirar.

A taxa de juros da poupança é de 0,65% ao mês (ver) e o empréstimo do cheque especial é de 10% ao mês (ver). Assim, para pagar pelo nosso dinheiro eles pagam pouco, mas para receber eles cobram muito. Sabemos que os bancos têm gastos, mas os juros poderiam ser menores.

b) O que você acha que os bancos fazem com nosso dinheiro quando, por exemplo, aplicamos um certo valor na poupança?

Eles emprestam nosso dinheiro da poupança para os clientes cobrando juros mais altos e ainda tem lucro sobre o nosso dinheiro. Os bancos do governo como a Caixa Econômica Federal, usa esse dinheiro para emprestar às pessoas para comprar a casa própria.

c) Agora que você conhece mais sobre juros, sua resposta a tarefa 1 sofreria alguma mudança?

Esta resposta é livre. Mostre novamente a tarefa 1.

TAREFA 8

Tarefa 8 – Juros Compostos (Em busca de uma fórmula de Montante em Juros compostos)

Texto para Leitura

Uma questão importante ligada a juros compostos é se há uma maneira de conhecer o montante por um caminho mais direto do que aquele utilizado na tabela da tarefa 6. Recordando as contas tivemos:

Término do 1º período:

$$C_1 = C + J_1 = C + C.i = C (1 + i) = 1.000 \times (1,1) = 1100,00$$

Término do 2º período:

$$C_2 = C_1 + C_1.i = C_1 (1 + i) = C (1 + i)(1+i) = C (1 + i)^2 = 1.100 \times (1,1) = 1210,00$$

Término do 3º período:

$$C_3 = C_2 + C_2.i = C_2 (1 + i) = C (1 + i)^2(1+i) = C (1 + i)^3 = 1.210 \times (1,1) = 1331,00$$

Término do 4º período:

$$C_4 = C_3 + C_3.i = C_3 (1 + i) = C (1 + i)^3(1+i) = C (1 + i)^4 = 1.331 \times (1,1) = 1464,10$$

Término do 5º período:

$$C_5 = C_4 + C_4.i = C_4 (1 + i) = C (1 + i)^4(1+i) = C (1 + i)^5 = 1.464,10 \times (1,1) = 1610,51$$

Podemos generalizar o raciocínio anterior para se obter o montante final **M** de um capital **C** colocado a juros compostos no final de **n** períodos à taxa **i** de juros:

$$M = C (1 + i)^n$$

Assim, com esta fórmula podemos calcular o montante diretamente. Note ainda que o “n” não representa o tempo, e sim o número de períodos. Em cada período de capitalização teríamos $t = 1$. No exemplo acima, $M = 1.000 (1 + 0,10)^5 = 1.610,15$

O cálculo do juro composto (J) pode ser determinado pela diferença entre o montante e o capital, isto é: $J = M - C$, mas como $M = C (1 + i)^n$ temos que:

$$J = C (1 + i)^n - C = C [(1 + i)^n - 1].$$

Considerando as ideias discutidas aqui, resolva as situações abaixo:

a) Carlos aplicou R\$ 400,00 num investimento que rende 2% ao mês, a juros compostos. Qual será o montante ao final de 6 meses e ao final de 1 ano?

Ao final de 6 meses:

$$M = 400 \cdot (1 + 0,02)^6 = 400 \cdot (1,02)^6 = \text{R\$ } 450,46$$

Ao final de 1 ano (12 meses):

$$M = 400 \cdot (1 + 0,02)^{12} = 400 \cdot (1,02)^{12} = \text{R\$ } 507,29$$

b) No dia 1º de março João fez uma aplicação no valor de R\$ 3.000,00. Nesse mês a taxa de rendimento foi de 1,2% e, em abril, foi de 1,4%. Qual será o saldo de João em 1º de maio?

ESTA É UMA PEGADINHA DO BEM!

Em um problema como esse, NÃO podemos aplicar a fórmula do montante de juros compostos, pois as taxas de rendimento NÃO SÃO IGUAIS; entretanto, o princípio de capitalização composta (acumulada) é mantido. Logo,

i) Em 1º de abril, serão capitalizados os juros correspondentes ao rendimento de março e incidentes sobre o valor inicialmente aplicado, gerando um total de:

$$M_1 = 3000 + (12\% \text{ de } 3000) = 3000 + (0,012 \times 3000) = 3000 \times 1,012 = 3036,00$$

ii) Em 1º de maio, serão capitalizados os juros correspondentes ao rendimento de abril e incidentes sobre o último “saldo”, produzindo um total de:

$$M_2 = 3036 + (14\% \text{ de } 3036) = 3036 + (0,014 \times 3036) = 3036 \times 1,014 = 3078,50$$

c) Qual é o juros pago pelo empréstimo de R\$ 2500,00 à taxa de juros compostos de 2% ao mês e pelo prazo de 10 meses?

$$\begin{aligned} J &= C [(1 + i)^n - 1] = 2500 [(1 + 0,02)^{10} - 1] = 2500 [(1,02)^{10} - 1] \\ &= 2500 (1,21899 - 1) = 2500 (0,21899) = 547,47 \end{aligned}$$

TAREFA 9

Tarefa 9 – Juros Compostos (comparando juros simples com juros compostos)

A tabela abaixo informa os montantes de um capital de R\$1.000,00 aplicado por um período de 5 meses a juros simples e a juros compostos.

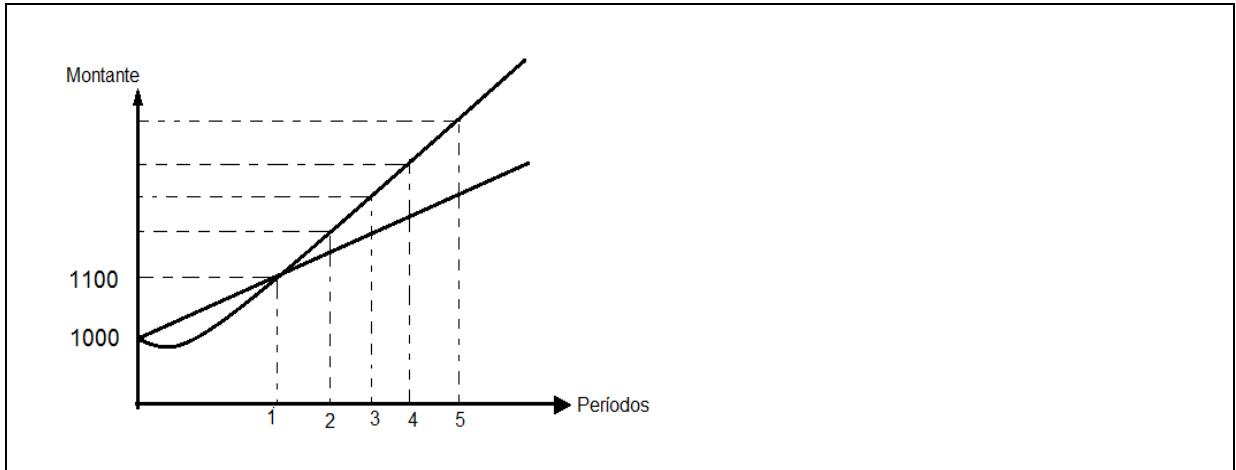
Tempo	Juros simples	Juros compostos
0,30 de um mês	$M_{0,3} = 1.030,00$	$M_{0,3} = 1.029,00$
0,50 de um mês	$M_{0,5} = 1.050,00$	$M_{0,5} = 1.048,80$
0,80 de um mês	$M_{0,8} = 1.080,00$	$M_{0,8} = 1.079,23$
1 mês	$M_1 = 1.100,00$	$M_1 = 1.100,00$
2 meses	$M_2 = 1.200,00$	$M_2 = 1.210,00$
3 meses	$M_3 = 1.300,00$	$M_3 = 1.331,00$
4 meses	$M_4 = 1.400,00$	$M_4 = 1.464,10$
5 meses	$M_5 = 1.500,00$	$M_5 = 1.610,51$

a) Analise a tabela e diga quais são as diferenças percebidas entre juros simples e composto?

Observei que quando o tempo é menor que 1, os juros simples são maiores que os juros compostos. Quando $t = 1$ mês, o juro simples é igual aos juros compostos. E para valores de t maiores que 1 os juros compostos são maiores que o simples.

b) A tabela acima nos permite fazer uma análise gráfica dos juros simples e composto entendendo o montante como função do tempo. Tente esboçar um gráfico relacionando os dois juros como funções.

O valor pago a cada período está em função do tempo e da taxa de juros. No eixo das abscissas (x) será representado pelo período de tempo t , e no eixo das ordenadas (y), o valor que deveria ser pago M , a cada mês. O comportamento dos juros simples sugere uma função linear e o do juros compostos o de uma função exponencial.



c) Considere a situação em que o capital de R\$1.000,00 é aplicado à taxa de 20% ao ano por um período de 4 anos a juros simples e a juros composto. Preencha a tabela abaixo e apresente um esboço gráfico dos juros simples e composto.

ENCARTE

Nessa seção apresentaremos as tarefas prontas para a aplicação com as modificações que identificamos necessárias a partir da análise da aplicação das tarefas na pesquisa de campo.

Tarefa 1: Iniciando a discussão

Você ouve o seguinte diálogo entre seu pai e um amigo:

Amigo: Estou precisando de dois mil reais emprestados, você tem?

Pai: Tenho, mas está na poupança.

Amigo: Você pode me emprestar? Te pagarei quando completar um ano, ok?

Pai: Ok! Vou pegar para você amanhã.

Pergunta:

- a) O que você tem a dizer deste diálogo?

- b) Se você intervisse no diálogo, que perguntas importantes você faria a seu pai e a seu amigo a respeito da negociação que estão fazendo?

- c) O que você espera que aconteça quando o período de um ano terminar?

Tarefa 2: O que é juros?

Responda as seguintes perguntas:

a) O que você entende por “juros”?

b) Em quais situações do dia a dia você diria que a noção de juros é usada pelas pessoas?

c) Os termos juros e taxa de juros significam coisas diferentes ou têm o mesmo significado para você?

Tarefa 3: Entendendo a noção de Juros

Texto para Leitura²

Uma operação financeira comum em nossa sociedade é o empréstimo de dinheiro. Empréstimo, neste caso, significa confiar a alguém certa soma de dinheiro para que faça uso dele durante um tempo, restituindo-o depois ao dono. As pessoas pedem dinheiro emprestado a outras pessoas e também aos bancos.

Em geral, quem empresta dinheiro recebe o valor emprestado de volta, no tempo que foi combinado para devolvê-lo, acrescido de uma quantia, a mais, chamada juro pelo tempo que o dinheiro ficou com a pessoa que foi beneficiada pelo empréstimo.

A existência de juros, em uma transação financeira, decorre de vários fatores como, por exemplo:

- Pela necessidade ou preferência de uma pessoa em consumir bens e serviços no presente a poupar para consumi-los no futuro;
- A inflação, que faz com que o dinheiro sofra desvalorização no tempo. Em consequência disso, o dinheiro que fica emprestado com outra pessoa, vai diminuindo o seu valor naquele período de tempo. Isto é, se uma pessoa empresta R\$100,00 para outra num certo dia e recebe de volta depois de um ano, o que ela compraria com esse valor quando emprestou não vai ser a mesma coisa que ela comprará depois de um ano; é sempre menos;
- Os riscos que quem empresta corre nessa ação. E os juros produzidos compensam esses possíveis riscos que a pessoa ou o banco pode ter com a operação de empréstimo;
- A possibilidade de gerar um lucro para quem empresta como forma de compensar a privação do seu dinheiro por determinado período de tempo.

Para discutir:

a) Para uma pessoa que pede um empréstimo em um banco ou para outra pessoa, que benefícios ela obtém?

²Texto adaptado da tarefa de Dias (2015)

b) Considerando o texto acima, quais são os possíveis riscos que uma pessoa ou um banco podem ter ao emprestar o seu dinheiro?

c) Quando as pessoas compram um produto em uma loja a prazo, por que elas pagam juros por isso? Você acha que existe nesta transação uma operação de empréstimo?

Tarefa 4: O que são Taxa de Juros?

Quando falamos em juros, estão envolvidos outros termos que precisamos conhecer, tais como, capital, montante e taxa de juros. O capital (C) é entendido como qualquer valor monetário que uma pessoa empresta a outra durante certo tempo. E o montante (M) é o resultado da adição do capital inicial com o juro recebido pelo período do empréstimo. Outro termo importante é o de taxa de juros que passaremos a discutir.

Suponha que você tenha emprestado R\$ 100,00 a uma amiga por um mês. No dia combinado sua amiga, por agradecimento, devolve a você R\$ 105,00. Os R\$5,00 que você recebeu a mais pode ser entendido como o juro pelo tempo que seu dinheiro ficou com ela. Mas o que significa este valor recebido a mais em relação ao valor emprestado?

Matematicamente respondemos a esta pergunta comparando o valor do juro obtido com o do dinheiro emprestado, isto é, fazemos a seguinte divisão:

$$\frac{\text{Juro}}{\text{Capital}} = \frac{5}{100} = 0,05$$

Este número encontrado pode ser interpretado da seguinte maneira: o valor do juro é de cinco centavos para cada um real de empréstimo.

Lembrando que 5/100, em termos de porcentagem, representa 5%. Está é uma outra maneira de interpretar a pergunta que fizemos: podemos dizer que cinco reais representa 5% do valor emprestado.

Chamamos o valor 0,05 ou 5% de **taxa de juro**, que possui estas duas representações: a primeira é chamada de *taxa unitária* e a segunda é chamada de *taxa percentual*.

Assim, a taxa de juros é o resultado da divisão do valor dos juros pelo capital emprestado. Assim, representando-se a taxa de juro pela letra **i**, o valor dos juros pela letra **J** e o valor do capital pela letra **C**, tem-se que:

$$i = \frac{J}{C}$$

É importante observar que a taxa de juros calculada no exemplo anterior e nas tarefas dessa seção consideram o cálculo do **juro no prazo de um único período de tempo** (um mês, um ano, ...) a que se refere a taxa. Quando o período de tempo for, por exemplo, três meses, cinco anos, a fórmula acima será alterada. (veja depois na tarefa 5)

Analise as seguintes situações abaixo determinando as taxas unitária e percentual e interpretando o que querem dizer.

i) Um empréstimo de R\$ 2000,00 **por um mês** em que o valor devolvido foi de R\$ 2040,00. Qual é a taxa de juros?

ii) O valor de R\$ 3.000,00 aplicado **por um ano** em um banco rendeu R\$ 750,00 de juros (simples). Qual é a taxa de juros?

iii) Um capital de R\$ 4.500, 00 gerou um juros de R\$ 3.600,00 **em um ano**. Qual é a taxa de juros?

Tarefa 5: Juros Simples

Texto para leitura

Os juros são normalmente classificados em simples ou compostos, dependendo do processo de cálculo utilizado. Aqui discutiremos os juros simples.

Como você resolveria a seguinte situação: Sua amiga quer que você empreste novamente a ela R\$ 100,00. Nas mesmas condições anteriores, isto é, a taxa mensal de 5%. Porém com a nova condição que ela devolverá o montante no final de **três meses**.

a) Qual seria os juros que ela deveria pagar pelo empréstimo?

b) Explique se alguma coisa muda na relação que envolve a taxa i , os juros J e o capital C considerando a tarefa anterior?

Após a aplicação das letras (a) e (b), mostraremos uma resolução para verificar se irá influenciar na maneira de responder a letra (c), que apresentaremos a seguir.

Resolução: Sabemos que o empréstimo por um mês, nos levou a taxa de juros dada pela igualdade:

$$i = \frac{J}{C}$$

Em que podemos escrever:

$$J = C \times i.$$

Sendo assim, o capital de R\$ 100,00, à taxa de 5% durante os três meses, teremos os seguintes resultados em cada mês:

$$J1 = C \times i = 100 \times 0,05 = 5$$

$$J2 = C \times i = 100 \times 0,05 = 5$$

$$J3 = C \times i = 100 \times 0,05 = 5$$

Assim, o valor total dos juros J é

$$J = J1 + J2 + J3 = R\$15,00.$$

Note que poderíamos chegar a este valor considerando que

$$J = 100 \times 0,05 \times 3$$

Assim, o cálculo do juro, como no exemplo acima, em que os juros de cada período são calculados sempre sobre o capital inicial (R\$ 100,00) é denominado regime de **juros simples**.

De um modo geral, se aplicarmos ou emprestarmos um capital durante t períodos a que se refere a taxa de juros, o juro ou rendimento poderá ser calculado da seguinte maneira:

$$J = C \times i \times t$$

Note que nos juros simples os juros de cada período são calculados sempre em função do capital inicial.

c) Com base na noção de juros simples, resolva as situações problemas a seguir:

i) Seu pai emprestou a um amigo R\$ 2.000,00 que estavam na poupança rendendo um juro mensal de 0,5%. Considerando que seu pai vai aplicar o regime de juros simples para emprestar o dinheiro, qual deveria ser a taxa de juros (mensal ou anual) que ele deveria cobrar e qual seria o juro e o montante do dinheiro que ele receberá no final do empréstimo?

ii) Qual o capital que, aplicado à taxa de juros simples de 1,5% ao mês, rende R\$ 900,00 em um semestre?

iii) O capital de R\$ 5.000,00 foi aplicado a taxa de juros simples de 6% ao ano no período de 36 meses. Qual foi o juro obtido?

Tarefa 6: Juros Compostos (introdução de juros compostos)

Duas pessoas precisavam fazer um empréstimo de R\$ 1.000,00. Elas aceitaram o dinheiro para ser devolvido nas mesmas condições: ao final de 5 meses e a uma taxa de juros de 10% ao mês. Porém, uma delas pegou o dinheiro emprestado com um amigo no regime de juros simples e a outra pessoa pegou o dinheiro em uma financeira. A tabela abaixo informa a maneira como os juros e o valor a ser devolvido foram calculados. Analise as contas:

Mês	Juros simples	Financeira
1º mês	$J_1 = 1.000 \times 0,10 = 100,00$	$J_1 = 1.000 \times 0,10 = 100,00$; $C_1 = 1100,00$
2º mês	$J_2 = 1.000 \times 0,10 = 100,00$	$J_2 = 1.100 \times 0,10 = 110,00$; $C_2 = 1210,00$
3º mês	$J_3 = 1.000 \times 0,10 = 100,00$	$J_3 = 1.210 \times 0,10 = 121,00$; $C_3 = 1331,00$
4º mês	$J_4 = 1.000 \times 0,10 = 100,00$	$J_4 = 1.331 \times 0,10 = 133,10$; $C_4 = 1464,10$
5º mês	$J_5 = 1.000 \times 0,10 = 100,00$	$J_5 = 1.464,10 \times 0,10 = 146,41$; $C_5 = 1610,51$
Montante	$M = C + J = 1500,00$	$M = C_5 = 1610,51$

- a) Explique como foi feito o cálculo pela financeira.

- b) Como você explicaria a uma pessoa os cálculos nas duas situações para que ela entenda a diferença?

Tarefa 7 – Juros Compostos (texto sobre juros compostos e fazendo as contas com juros compostos)

Texto para leitura

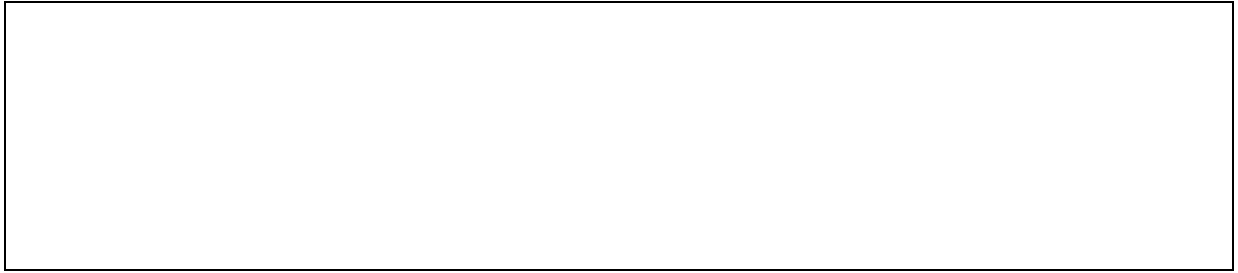
Os juros simples e os juros compostos diferem entre si na maneira como os cálculos são feitos. O juro é **simples** quando os juros de cada período (dia, mês, ano, etc.) são calculados sempre sobre o capital inicial. No regime de **juros compostos**, os juros de cada período são somados ao capital para o cálculo de novos juros nos períodos seguintes de modo a encontrar no final do período fixado o valor do montante. Esse processo de cálculo é conhecido como “**juro sobre juro**”.

O regime de juros compostos é o cálculo utilizado pelo sistema financeiro nas transações financeiras em geral. Pois o rendimento gerado por uma aplicação em um banco ou por um empréstimo, no cálculo de juros sobre juros, gera sempre um acréscimo no montante para o período seguinte, gerando um lucro maior para quem vai receber. Dizemos então que os juros são capitalizados. Assim, chama-se de **capitalização** o momento em que os juros são incorporados ao capital inicial no processo de cálculo de juros.

Para discutir:

a) Os bancos são instituições financeiras que guardam nosso dinheiro, pagando juros para nós, por deixar o dinheiro em seus cofres. Eles também nos emprestam dinheiro quando precisamos e pagamos a eles juros pelo empréstimo. Investigue quais são as taxas de juros praticadas em uma e outra situação e diga que conclusões você pode tirar.

b) O que você acha que os bancos fazem com nosso dinheiro quando, por exemplo, aplicamos um certo valor na poupança?



c) Agora que você conhece mais sobre juros, sua resposta a tarefa 1 sofreria alguma mudança?



Tarefa 8 – Juros Compostos (Em busca de uma fórmula de Montante em Juros compostos)

Texto para Leitura

Uma questão importante ligada a juros compostos é se há uma maneira de conhecer o montante por um caminho mais direto do que aquele utilizado na tabela da tarefa 6. Recordando as contas tivemos:

Término do 1º período:

$$C_1 = C + J_1 = C + C.i = C(1 + i) = 1.000 \times (1,1) = 1100,00$$

Término do 2º período:

$$C_2 = C_1 + C_1.i = C_1(1 + i) = C(1 + i)(1+i) = C(1 + i)^2 = 1.100 \times (1,1) = 1210,00$$

Término do 3º período:

$$C_3 = C_2 + C_2.i = C_2(1 + i) = C(1 + i)^2(1+i) = C(1 + i)^3 = 1.210 \times (1,1) = 1331,00$$

Término do 4º período:

$$C_4 = C_3 + C_3.i = C_3(1 + i) = C(1 + i)^3(1+i) = C(1 + i)^4 = 1.331 \times (1,1) = 1464,10$$

Término do 5º período:

$$C_5 = C_4 + C_4.i = C_4(1 + i) = C(1 + i)^4(1+i) = C(1 + i)^5 = 1.464,10 \times (1,1) = 1610,51$$

Podemos generalizar o raciocínio anterior para se obter o montante final **M** de um capital **C** colocado a juros compostos no final de **n** períodos à taxa **i** de juros:

$$\mathbf{M = C (1 + i)^n}$$

Assim, com esta fórmula podemos calcular o montante diretamente. Note ainda que o “n” não representa o tempo, e sim o número de períodos. Em cada período de capitalização teríamos $t = 1$. No exemplo acima, $M = 1.000 (1 + 0,10)^5 = 1.610,15$

O cálculo do juro composto (J) pode ser determinado pela diferença entre o montante e o capital, isto é: $J = M - C$, mas como $M = C(1 + i)^n$ temos que:

$$\mathbf{J = C (1 + i)^n - C = C [(1 + i)^n - 1].}$$

Considerando as ideias discutidas aqui, resolva as situações abaixo:

a) Carlos aplicou R\$ 400,00 num investimento que rende 2% ao mês, a juros compostos. Qual será o montante ao final de 6 meses e ao final de 1 ano?

b) No dia 1º de março João fez uma aplicação no valor de R\$ 3.000,00. Nesse mês a taxa de rendimento foi de 1,2% e, em abril, foi de 1,4%. Qual será o saldo de João em 1º de maio?

c) Qual é o juro pago pelo empréstimo de R\$ 2500,00 à taxa de juros compostos de 2% ao mês e pelo prazo de 10 meses?

Tarefa 9 – Juros Compostos (comparando juros simples com juros compostos)

A tabela abaixo informa os montantes de um capital de R\$1.000,00 aplicado por um período de 5 meses a juros simples e a juros compostos.

Tempo	Juros simples	Juros compostos
0,30 de um mês	$M_{0,3} = 1.030,00$	$M_{0,3} = 1.029,00$
0,50 de um mês	$M_{0,5} = 1.050,00$	$M_{0,5} = 1.048,80$
0,80 de um mês	$M_{0,8} = 1.080,00$	$M_{0,8} = 1.079,23$
1 mês	$M_1 = 1.100,00$	$M_1 = 1.100,00$
2 meses	$M_2 = 1.200,00$	$M_2 = 1.210,00$
3 meses	$M_3 = 1.300,00$	$M_3 = 1.331,00$
4 meses	$M_4 = 1.400,00$	$M_4 = 1.464,10$
5 meses	$M_5 = 1.500,00$	$M_5 = 1.610,51$

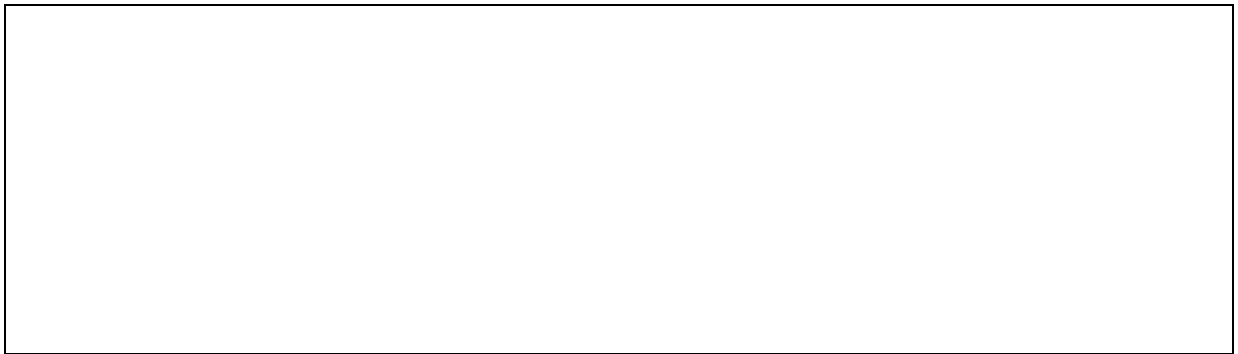
Fonte: Tabela Adaptada de Araman; Sampaio (2009, p.134)

a) Analise a tabela e diga quais são as diferenças percebidas entre juros simples e composto?

b) A tabela acima nos permite fazer uma análise gráfica dos juros simples e composto entendendo o montante como função do tempo. Tente esboçar um gráfico relacionando os dois juros como funções.

c) Considere a situação em que o capital de R\$1.000,00 é aplicado à taxa de 20% ao ano por um período de 4 anos a juros simples e a juros

composto. Preencha a tabela abaixo e apresente um esboço gráfico dos juros simples e composto.



CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para finalizar, gostaríamos de mencionar que a ideia desse conjunto de tarefas foi a de discutir a noção de juros, partindo daquilo que os estudantes podem falar sobre o tema e caminhar na direção de trazer a discussão as ideias centrais do tema se que com isso os estudantes tivessem que, como no ensino tradicional, exercitar as fórmulas através de um número exaustivo de exercícios repetitivos.

Desse modo, tendo uma visão geral dos tipos de juros avançar na compreensão de novas ideias.

Ressaltamos também, que ao contrário dos livros didáticos, não seguimos na direção de ser um guia para o professor. As tarefas aqui propostas têm o objetivo de deflagrar o processo de produção de significados dos estudantes sobre juros. Daí cabe a cada professor, de acordo com sua turma, dar continuidade na discussão de problemas considerando as necessidades de seus alunos.

REFERÊNCIAS

ARAMAN, Eliane M.; SAMPAIO, Helenara, R. **Matemática financeira**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2009.

DIAS, J. N. M. **Educação Financeira Escolar: A Noção de Juros**. 2015. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Juiz de Fora.

MATHIAS, Washington F.; GOMES, José M. **Matemática financeira**. 3 ed. São Paulo: Atlas, 2002.

MORGADO, Augusto C. et al. **Progressões e matemática financeira**. Rio de Janeiro: Gráfica Wagner Ltda, 1993.

SAMANEZ, Carlos P. **Matemática financeira**. 5 ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

SILVA, A. M.; LINS, R. C. **Sobre a dinâmica da produção de significados para a matemática**. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*. v.6(2), 2013.