Álgebra Linear como um Curso de Serviço para a Licenciatura em Matemática: o estudo dos Espaços Vetoriais

Aretha Fontes Alves

Cristiane de Andrade Mendes

Amarildo Melchiades da Silva

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

Pós-Graduação em Educação Matemática

Mestrado Profissional em Educação Matemática

Aretha Fontes Alves

Cristiane de Andrade Mendes

Amarildo Melchiades da Silva

Produto Educacional apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Juiz de Fora (MG)

Novembro, 2013.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Este Produto Educacional faz parte de nossa pesquisa[1] de pós-graduação em Educação Matemática de uma universidade pública brasileira. Portanto, a base teórica que o sustenta é a mesma da utilizada em nossa dissertação de mestrado.

Nosso propósito ao escrever este Produto Educacional é apresentar um material didático de Álgebra Linear / Espaços Vetoriais que, junto com um conjunto de características teórico-metodológicas, constituem uma proposta de curso de serviço de Álgebra Linear, alternativa ao Ensino Tradicional Vigente[2] na maioria de nossas universidades e empregado, principalmente, às disciplinas de cunho matemático, para as quais voltamos nosso olhar.

Acrescentamos que este rol de características foram estruturadas sobre a concepção de curso de serviço, entendidos por nós, em concordância com Silva (2011), como “disciplinas que tenham como foco a formação do professor de matemática, mas que não se limitam a desenvolver conteúdo matemático. Elas se propõem a intervir, também, na sua formação didático-pedagógica”. (SILVA, 2011, p.2).

Ressaltamos que para a construção deste Produto Educacional contamos com o suporte das notas de aula utilizadas por Silva (2010) criadas a partir de suas pesquisas de mestrado e doutorado, aliadas a sua experiência de sala de aula, como educador universitário. Além disso, destacamos que esta proposta foi elaborada em parceria com o pesquisador Almeida (2013) o qual desenvolveu um estudo em parceria conosco e voltado às Transformações Lineares.

Antes de apresentarmos as características do curso, gostaríamos de descrever alguns conceitos imprescindíveis à compreensão e condução desta proposta, pertencentes à teoria do Modelo dos Campos Semânticos, nosso referencial teórico-epistemológico.

[1] Ver mais em Alves (2013).

[2] Resumidamente pode ser descrito como sendo uma metodologia baseada em aulas expositivo-explicativas e com principal foco no ensino do conteúdo.

O Modelo dos Campos Semânticos

O Modelo dos Campos Semânticos (MCS) foi construído a partir da pesquisa de doutorado do professor Romulo Campos Lins [3] denominada "A Framework for understanding what algebraic thinking is"[4] (LINS, 1992) e desenvolvida no Shell Centre for Mathematical Education em Nottingham na Inglaterra. Segundo Silva (1997) o modelo "não aparece explicitamente no corpo da tese de Lins, mas não só o germe da idéia se encontra lá como a coerência global do trabalho de pesquisa é garantida exatamente pelas premissas do modelo." (SILVA, 1997, p.10).

Esta pesquisa foi realizada no período de janeiro de 1988 a junho de 1992 e tinha como objetivo desenvolver um modo de caracterizar álgebra e pensamento algébrico.

> Ao término do doutorado, Lins passou a se dedicar à elaboração da teoria[5]. Preocupou-se, em particular, com a coerência interna das noções que havia formulado, o que o levou a algumas reformulações [...] (SILVA, 2003).

Dentre as noções centrais do MCS está a noção de conhecimento, segundo a qual

> Conhecimento é entendido como uma **crença** – algo que o sujeito acredita e expressa, e que caracteriza-se, portanto, como uma **afirmação** – junto com o que o sujeito considera ser uma justificação para sua **crença-afirmação**. (LINS, 1993, p.86, grifos do autor).

Destacamos que a justificação tem o papel de tornar a crença-afirmação legítima para quem a enuncia, pois, justificações distintas representam e determinam conhecimentos distintos.

Apoiados por Lins, acreditamos que a Educação Matemática que praticamos deva ser intencional. E, quando dizemos isso, estamos interessados em propiciar – enquanto professores – em sala de aula um ambiente de interação constante com nossos alunos, para que possamos ler sua produção de significados, de forma plausível, procurando compreender o porquê de eles apresentarem esta ou aquela resposta para um problema proposto, por exemplo, e, se necessário intervir no processo de aprendizagem.

Esta forma de ler nossos alunos, "plausivelmente" também pode ser entendida como antônima de leitura pela falta, pelo erro. Seu objetivo, por assim dizer, é

---

[3] Atualmente é Livre Docente da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP de Rio Claro, São Paulo).

[4] Um quadro de referência para se compreender o que é pensamento algébrico (tradução nossa).

[5] Silva destaca duas consequências da tese de Lins: o nascimento de uma teoria e a contribuição desta pesquisa no campo da educação algébrica em Educação Matemática (Cf: SILVA, 2003, p.22).

> mapear o terreno ao mesmo tempo que trata de saber onde o outro está. Em contraste, as teorias piagetianas dão o mapa e só nos resta saber onde, naquele mapa, o outro está; se a localização que ele nos dá não se encaixa, estamos perdidos. (LINS, 2012, p.24).

A partir disso, o professor deve assumir a postura de estabelecer um diálogo com os alunos e procurar ampliar sua produção de significados e não em substituí-la pela sua.

Neste ponto, ressaltamos a importância de criar no futuro professor a sensibilidade de ler sua sala de aula e perceber que seus alunos podem produzir significados muito distintos dos seus, pois, do mesmo modo que ele vivencia situações de estranhamento quando se depara com a Matemática Acadêmica – do Matemático –, enquanto aluno de Graduação, seus alunos vivenciarão situações muito similares quando em contato com a matemática correspondente ao seu nível de ensino.

Segundo Oliveira (2012),

> esse processo de estranhamento pode ser indicado ao imaginarmos uma situação em que existe, de um lado, 'aquele para quem uma coisa é natural – ainda que estranha – e de outro aquele para quem aquilo não pode ser dito.' (OLIVEIRA, 2012, p.200).

Analisando outro aspecto da formação inicial do professor de matemática, destacamos uma situação recorrente em sala de aula , aquela onde professor e aluno não compartilham dos mesmos significados produzidos. Esta situação foi descrita e analisada por Silva (2003), a qual o autor chamou de processo de impermeabilização. Segundo ele,

> Chamaremos de impermeabilização ao processo que leva os alunos a não compartilharem novos interlocutores em situação de interação face a face, diferente daqueles para o qual eles estavam voltados; de não se propor a produzir significados numa outra direção. (SILVA, 2012, p.79).

Silva (2003) destaca que há várias maneiras que podem levar à impermeabilização no processo de produção de significados

> ou por acreditar na legitimidade do que diz, por entender que não há por que dizer de outra forma; ou por não poder produzir significados em outras direções – por estar, naquele momento, frente a um limite epistemológico –, ou ainda, por entender que não seja legítimo falar naquela direção. (SILVA, 2003, p. 142).

Apoiados por este autor, ressaltamos que

> a importância da identificação e do entendimento deste processo está na possibilidade do professor perceber que isto está acontecendo com seus alunos e auxiliá-los em suas dificuldades de aprendizagem, caracterizadas pelo Modelo dos Campos Semânticos como um obstáculo ou limite epistemológico. (SILVA, 2012, p.79).

Percebemos, portanto, que deve haver um deslocamento do foco do professor para o aluno, surgindo assim, a necessidade de estabelecer um novo modo de ler a produção de significados de nossos estudantes. Este deslocamento é definido por Oliveira como o processo de *descentramento*. Processo este que "passa pelo esforço de tornar-se sensível ao estranhamento do outro, de entender do que o outro fala, almejando que modos de produção de significados sejam compartilhados, que se crie um espaço comunicativo." (OLIVEIRA, 2012, p.207).

Os licenciandos devem ter consciência de que situações de estranhamento, de impermeabilização, ou apenas de surgimento de modos distintos de produção de significados acontecem a todo o momento na sala de aula. Além disso, cremos que as propostas que proporcionam a vivência do estranhamento e sua problematização, criam "oportunidades para que o professor/futuro professor se dê conta de que seus alunos também experimentem o estranhamento e, a partir daí, ele se coloque num exercício de descentramento." (OLIVEIRA, 2012, p.212).

De acordo com Lins (2008), ao experimentar o descentramento

> o professor terá um interesse genuíno por como seus alunos estão pensando, no "acerto" e no "erro", e isso quer dizer bem mais do que comparar suas respostas com os padrões de uma taxonomia, não importa o quanto esta seja detalhada e atraente, "didaticamente reconfortante". (LINS, 2008, p. 548, grifos do autor).

Outro conceito de grande relevância dentro da teoria do Modelo dos Campos Semânticos é a concepção de processo comunicativo, proposta por Lins no bojo da construção do próprio modelo.

Devemos ressaltar que esta não é só uma forma de ver e conceber o ato de se comunicar, mas é um modo de se portar diante de situações de interação, orais, escritas, gestuais, etc.

Com o intuito de dinamizar nossa descrição deste processo partiremos de uma situação ficcional para retratar na prática de sala de aula qual é a abordagem dada pelo MCS para as noções constituintes do mesmo.

Neste ponto, podemos dizer que as principais noções envolvidas no processo de comunicação são *autor*, *leitor e texto*. Além disso, à medida que formos descrevendo o exemplo citado iremos definindo-as.

Imaginemos uma sala de aula de Álgebra Linear de um curso de Graduação onde o professor propõe a seus alunos a seguinte tarefa:

> A partir do subespaço vetorial de IR^3, $W = \{(x,y,z) \in IR^3, x = y\}$[6], responda:
>
> Como podemos descrever os elementos deste conjunto?

O professor que enunciou esta questão será o autor, e diremos, apoiados por Lins (1999), que

> Quando o autor fala, ele sempre fala para alguém, mas por mais que o autor esteja diante de uma platéia este alguém não corresponde a indivíduos nesta platéia, e sim a um leitor que o autor constitui: e é para este “um leitor” que “o autor” fala. (LINS, 1999, p.81).

Ao enunciar a questão, o professor está falando numa direção que ele constitui, dirigida *para alguém* denominado *interlocutor*; este é segundo Lins (2012) “uma direção na qual se fala. Quando falo na direção de um interlocutor é porque acredito que este interlocutor diria o que estou dizendo e aceitaria/adotaria a justificação que me autoriza a dizer o que estou dizendo.” (LINS, 2012, p.19).

Devemos ressaltar que interlocutor é um ser cognitivo e não biológico – constituído pelo professor, neste exemplo – e que “não deve ser entendido como ‘aquele com quem se conversa’ ou ‘aquele que participa (conosco) de um diálogo’ (no sentido comum). Para o MCS, ‘dialogar com o interlocutor’ é tão impróprio (e impossível) quanto ‘dialogar com o texto’ [...]” (LINS, 2012, p.30).

Podemos representar este primeiro momento por meio do seguinte diagrama:

O AUTOR	→	PROBLEMA ou TAREFA	⇢	UM LEITOR
(Professor)		(Resíduo de Enunciação para o qual o professor produziu significado)		(Interlocutor “constituído” pelo professor)

Devemos ressaltar que a tarefa tal como a representamos – em forma de palavras escritas – ou falada oralmente pelo professor, constitui-se para os alunos como um *resíduo de enunciação*[7] da fala do mesmo, ou seja, os alunos podem internalizar apenas

[6] Estaremos considerando IR^3 e W, como espaço e subespaço sobre o corpo dos reais munido das operações usuais de adição e multiplicação por escalar.

[7] Algo com que me deparo e que acredito ter sido dito por alguém. Um resíduo de enunciação não é nem menos, nem mais importante que uma enunciação: ele é *de outra ordem*. (LINS, 2012, p.27, grifos do autor).

alguns elementos desta fala. Por isso, representamos de forma pontilhada a linha que liga "texto" a "um leitor".

Se analisarmos agora o lado do aluno que dialoga com este professor, podemos dizer que ele pode produzir, ou não, significados para os resíduos de enunciação. No momento em que ele se sente autorizado a produzir ações enunciativas a partir dos resíduos de enunciação estes passam a constituir-se em *texto* para ele. Logo, o leitor – os alunos – pode definir como texto apenas os resíduos de enunciação para os quais produz significado.

Antes de passarmos à análise das falas de alguns alunos presentes nesta situação ficcional, queremos destacar que as definições de alguns conceitos presentes na teoria do MCS também importantes para a compreensão do processo comunicativo estão descritos e analisadas em nossa dissertação.

Anderson: "Professor, eu acho que os elementos deste conjunto são vetores de três coordenadas, pois W é um subespaço do IR^3 e este possui três coordenadas."

Júlia: "Quando eu olho para este conjunto a primeira coisa que vejo é a reta x = y bissetriz dos quadrantes ímpares, só que em forma de plano do IR^3, com três dimensões."

Pedro: "Eu penso que os elementos são ternas ordenadas cujas coordenadas são números reais nos quais as duas primeiras devem ser iguais."

Alice: "Professor, eu não sei te responder."

A partir de suas falas descreveremos que elementos constituem o núcleo em que operam cada um dos alunos na atividade [8] de produzir significado para a tarefa apresentada.

Para Anderson, o fato mais relevante é que os elementos têm três coordenadas, pois parece que ele constitui em sua fala um núcleo com os seguintes elementos: "vetores", "coordenadas", "subespaço" e "IR^3". Percebemos também que ele, ou não considera, ou pouco releva o fato de que o subespaço W possui uma restrição/definição[9] diferente de IR^3, o fato de x ser igual a y.

Júlia inicia sua fala dizendo que "visualiza" o conjunto e, partindo daí vemos que é notável o apelo geométrico. Esta situação é corroborada pela constituição de um núcleo com elementos geométricos, pois percebemos em sua fala as palavras: "reta", "bissetriz",

[8] Atividade segundo Leontiev (2001).
[9] Chamaremos aqui de Restrição/Definição do Espaço (ou Subespaço) Vetorial a condição a qual os elementos do mesmo devem satisfazer.

"quadrantes", "plano" e "três dimensões". Além disso, ela leva em consideração a restrição/definição de W, mas direciona sua fala apenas para o aspecto geométrico, em detrimento do aspecto algébrico, lembrando que não estamos priorizando o último deles, apenas citando.

O terceiro aluno, Pedro, produz significados algébricos para caracterizar os elementos de W. Percebemos que ele leva em conta o número de coordenadas dos elementos, sua natureza (números Reais) e a restrição/definição do conjunto, pois em sua fala há expressões como: "ternas ordenadas", "números reais" e "as duas primeiras devem ser iguais".

Pela fala de Alice, percebemos que ela aparentemente[10] não produz significado para os elementos presentes no enunciado da tarefa. Neste caso, ressaltamos que Alice pode estar frente a um *obstáculo epistemológico* ou frente a um *limite epistemológico*.

Para diferenciar estes dois conceitos, devemos compreender que diante de um *obstáculo epistemológico*, podem ocorrer duas situações: ou o aluno não produz significados numa determinada atividade ou produz significados em uma direção distinta da do professor, mas que num segundo momento, após interagir com alguém – seja o professor ou a leitura de um livro, por exemplo – ou mesmo sozinho, poderá *transpor* este *obstáculo* e produzir significado em *alguma* direção, mudando seu modo de operar.

Em contrapartida, frente a um limite epistemológico, ou o aluno não consegue mudar sua maneira de operar (e, portanto, nem mesmo realizando interações, altera sua produção de significados) ou ele continua sem produzir significado em alguma direção.

É relevante dizer que estamos considerando que o aluno deve ser acompanhado por um período razoável de tempo durante o processo de aprendizagem para que se caracterize uma situação de *limite epistemológico* e, ainda, que esta situação possa ser caracterizada apenas considerando-se um intervalo de tempo estipulado. Ou seja, não podemos garantir que este aluno jamais produzirá algum significado para o texto em questão, ou que mudará seu modo de operar, pois analisamos sua produção de significados no interior de uma atividade preestabelecida como unidade de análise[11],

[10] Dizemos que a aluna "aparentemente" não produz significado, pois ela diz apenas que não sabe responder, portanto, não temos elementos suficientes para refinar a leitura de sua fala.

[11] Assim como Silva (2003), optaremos por utilizar o conceito de atividade como unidade de análise, e "com essa posição queremos dizer, primeiro, que a análise do processo de produção de significados é considerada sempre no interior de uma atividade. Segundo, queremos dizer que, em nossa análise, não é possível "olhar menor", isto é, a atividade é considerada no MTCS[11] como um todo mínimo. E terceiro, nossa opção por esta unidade de análise se baseia na prática, no fato de que, se a atividade muda, a produção de significados também pode mudar." (SILVA, 2003, p.64).

portanto, em outra situação, outro processo será desencadeado e não cabe ao professor/pesquisador antecipá-lo.

É importante lembrarmos que o professor/pesquisador que utiliza a teoria do MCS, ao vivenciar situações como esta, busca compreender que elas constituem processos e que "sendo um processo, ao ser colocado em marcha crias as condições para sua própria transformação" (VYGOTSKY apud LINS, 2012, p.17). E que não busca antecipar o que poderá ou não acontecer, mas lê o processo com os elementos disponibilizados na situação de interação.

Cada aluno representa *leitores* desta situação, e

> O leitor constitui sempre um autor, e é em relação ao que este "um autor" diria que o leitor produz significado para o texto (que assim se transforma em texto). Outra vez, o um autor é um ser cognitivo e não biológico, e não precisa corresponder de fato a nenhum outro real. (LINS, 1999, p.82).

Isto pode ser representado pelo seguinte diagrama

UM AUTOR	- - - - - -▸	PROBLEMA ou TAREFA	——————▸	O LEITOR
(Cada um dos alunos)		(Resíduo de Enunciação para o qual cada um dos alunos pode produzir significado)		(Interlocutor "constituído" por cada um dos alunos)

Lins ressalta que

> o pontilhado indica uma transmissão que só se concebe enquanto tal no *imaginário* do leitor. E vale a pena enfatizar que é apenas na medida em que o leitor fala, isto é, produz significado para o texto, colocando-se na posição de autor, que ele se constitui como leitor. (LINS, 1999, p. 82, grifo nosso).

Para finalizar concordamos com Silva (1997) quando diz

> Para o pesquisador que analisa as justificações dos alunos a partir do MTCS[12], ele não se interessa pela questão dicotômica entre o certo e o errado; isto é secundário e pouco relevante. Não interessa também se o aluno justificou ou não da maneira padrão. Por isso, uma resposta em branco tem um significado completamente diferente de uma resposta considerada absurda [...] o pesquisador interessa-se muito mais pelo que foi dito a respeito do que foi perguntado. Na verdade, o que nos interessa é aquilo que o sujeito do conhecimento disse e porque disse. Pois, caso ele apresente algo que não é capaz de justificar o que afirmou, não há razão

[12] O Modelo dos Campos Semânticos foi inicialmente denominado Modelo Teórico dos Campos Semânticos.

> para acreditarmos que ele possui esse conhecimento. (SILVA, 1997, p.87, grifo nosso).

Portanto, acreditamos, concordância com Lins (2001), que o Modelo dos Campos Semânticos constitui

> [...] uma simples, ainda que poderosa ferramenta para pesquisa e desenvolvimento na educação matemática [...] para guiar práticas de sala de aula e para habilitar professores a produzir uma leitura suficientemente fina, assim útil, do processo de produção de significados em sala de aula. (LINS, 2001, p. 59, tradução nossa).

As características do Curso

Estas características foram levantadas em nossa dissertação e constituem a base desta proposta voltada a educadores universitários que se dedicam a ministrar disciplinas a alunos de licenciatura em Matemática.

São elas:

1) A metodologia da sala de aula:

- ao analisar o processo comunicativo da perspectiva do MCS, o professor deve ter a compreensão de que o conhecimento não pode ser transmitido;

- o professor deve se esforçar em praticar o descentramento como forma de direcionar seu olhar a aprendizagem dos alunos;

- a dinâmica da sala de aula deve proporcionar momentos de interação entre os alunos e entre alunos e professores;

- entendemos que o processo de ensino se caracteriza como um momento no qual o professor tem a oportunidade de sugerir novos modos de produzir significados a seus alunos e o processo de aprendizagem ocorre quando os alunos conseguem internalizar e legitimar significados;

- acreditamos que ao dar voz à fala do aluno o processo de ensino torna-se muito diferente do modo como vêm sendo feito no ETV, portanto, neste curso o olhar do professor deve se voltar a ler o aluno, refletir sobre sua fala, procurando fazer uma leitura plausível da sala de aula, não procurando por erros ou acertos;

- como este curso terá alunos que serão professores, devemos destacar que o professor do mesmo deve analisar estes alunos sob dois enfoques: um como aluno e outro como professor. Portanto, as características metodológicas devem ser conduzidas de modo a possibilitar a aprendizagem deste aluno e proporcionar a ele uma postura de sala de aula que lhe direcione a embasar sua futura prática em sala de aula.

2) O que esperamos do professor de matemática:

O professor de matemática deve possuir uma formação que lhe permita ser autônomo e reflexivo, portanto, este curso deverá proporcionar momentos em que o licenciando:

- reflita sobre sua prática de sala de aula, suas expectativas e sua postura frente a seus alunos;

- ao vivenciar a estranhamento possa refletir em como levar futuramente esta vivência para sua sala de aula;

- entenda que intervir no processo de aprendizagem não é falar pelo outro e sim modificar seu modo de operar;

- tome uma postura crítica e exploratória quanto ao conteúdo, de forma a compreender que os elementos ali envolvidos são importantes para a compreensão da mesma. Procurando sempre lembrar que, no futuro, será importante estimular seus alunos a terem esta postura.

- consiga visualizar a importância da formação continuada, em serviço, como forma de ampliar, refletir e melhorar constantemente sua prática como docente.

3) O estudo dos Espaços Vetoriais:

A teoria de Espaços Vetoriais possui um conteúdo que, se conduzido em acordo com a metodologia proposta por nós, pode oferecer ao licenciando oportunidades de ampliar seu de produção de significados. Acreditamos que as principais características que este curso deve possuir são:

- A possibilidade de conviver com conceitos que oferecem uma discussão acerca de significados matemáticos e não-matemáticos, como as noções de Espaço, Vetor, Base e Dimensão;

- A manipulação dos conceitos discutindo sua natureza: algébrica ou geométrica;

- A oportunidade de vivenciar momentos de estranhamento por esta se tratar de uma teoria com uma linguagem muito particular, um modo de produzir significados muito singular;

- A manipulação da definição de definições (em especial a de Espaços Vetoriais) com a oportunidade de ampliação das mesmas, vendo ganhos ou perdas ao modifica-las;

- A oportunidade de manipular o conjunto dos números reais de forma distinta do que é deito em outras disciplinas e ter a oportunidade de analisar suas propriedades e refletir sobre sua aplicação.

- Estender a ideia anterior ao manipular operações de adição e multiplicação em n-uplas de números reais;

- Além disso, destacamos a importante discussão de tarefas as quais foram formuladas a partir de um levantamento de dificuldades recorrentes em cursos de Álgebra Linear apontados por autores[13] que se dedicaram a analisar estas dificuldades.

Gostaríamos de ressaltar que estas características metodológicas devem ser refletidas pelo educador universitário, sempre procurando adequá-las à realidade de seu trabalho, de sua universidade e de seus alunos. E dizer que nossa intenção é proporcionar a estes educadores, que ministram disciplinas a alunos de Licenciatura em Matemática (especialmente Álgebra Linear), uma proposta alternativa, ao ETV, que visa um novo modo de se conceber as disciplinas de conteúdo matemático, bem como um suporte didático aliado a uma postura de sala de aula embasada por pressupostos teórico-epistemológicos bem definidos. Procuramos com isso, proporcionar a estes educadores momentos de reflexão acerca do conteúdo estudado/ensinado e de sua estreita relação com a futura prática profissional de seus alunos, licenciandos em Matemática.

[13] Silva (1997, 2003, 2012), Oliveira (2012) e Julio (2007), por exemplo.

O Espaço Vetorial IR^n:

Antes de iniciarmos o estudo dos Espaços Vetoriais IR^n e de seus subespaços correspondentes, entendemos que é relevante apresentar e proporcionar momentos de discussão a cerca dos elementos constituintes desses – e de outros – Espaços Vetoriais.

Por elementos constituintes estamos entendendo: o conjunto de vetores que dá nome ao Espaço, o corpo de Escalares e as operações de adição e multiplicação por escalar envolvendo vetores e escalares. Um dos motivos que nos leva a isso é a oportunidade de ampliar a compreensão de que um Espaço Vetorial não é apenas um conjunto, mas uma estrutura que possui “quatro componentes”.

Com relação às operações envolvidas na definição de Espaços Vetoriais, acreditamos que o fato de apresentar a definição de corpo também pode deixar claro que a multiplicação envolvida é uma multiplicação por escalar e que o escalar deve pertencer a um corpo. Além disso, é importante ressaltar o fato de que as propriedades envolvidas na definição de Espaços Vetoriais são as mesmas às quais os Corpos devem satisfazer, com a ressalva de que na Multiplicação por Escalar operamos com elementos de naturezas distintas, um vetor e um escalar.

Como o foco de nossa pesquisa foi voltado aos espaços vetoriais IR^n sobre o corpo dos Reais e munido das operações usuais de adição e multiplicação por escalar, sugerimos que, se bem conduzida – em acordo como os pressupostos sugeridos em nossa dissertação –, a discussão acerca da definição de corpo pode se estender a outros corpos e, portanto, no fim deste produto teremos a definição mais geral de espaços vetoriais contemplando essa ampliação de foco, não só em relação ao corpo, mas também com relação às operações e o conjunto de vetores.

A partir de nossa experiência, acreditamos ser importante levantar estas e outras questões – as quais discutiremos ao longo deste trabalho – para que o aluno tenha mais familiaridade com as definições e teoremas e tenha “lucidez matemática” ao operar com elementos de Espaços Vetoriais.

O Espaço Vetorial IR^n

Consideremos o conjunto $R^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n);\ x_i \in R \quad i = 1, 2, ..., n\}$ de todas as n-uplas de números reais, onde n pertencente a N é um número fixado. Ou seja, quando nos referirmos ao IR^n estaremos falando de cada um dos conjuntos IR, IR^2, IR^3, IR^4, e assim por diante, variando-se o valor do índice n, como definido acima.

Por exemplo, se n = 4 teremos o IR^4 e seus elementos são da forma: (x, y, z, t), onde cada uma das quatro coordenadas é um número real. Podemos citar a quadra $(\frac{1}{2}, \sqrt{2}, 4, \frac{\sqrt{3}}{2})$ como um elemento de IR^4.

- Atribuiremos a IR^n duas operações:
-

❖ **Adição**: associa a cada par de elementos $u = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $v = (y_1, y_2, ..., y_n)$ em R^n , um elemento u + v ∈ R^n dado por u + v = $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$

❖ **Multiplicação por Escalar**: associa a cada escalar ***a*** pertencente ao corpo de escalares IR e cada elemento ***u = (x₁, x₂, ..., xₙ)*** de R^n, um elemento ***a.u*** **=** $(ax_1, ax_2, ..., ax_n)$ pertencente a R^n.

> **Neste ponto, devemos analisar a possível familiaridade que o aluno possa ter com este "tipo" (usual) de operação. Além disso, devemos buscar ler sua fala no sentido de compreender se ele entende que ao efetuar uma adição ou multiplicação por escalar, sejam elas quais forem, está criando um novo elemento, um novo vetor, que deve pertencer obrigatoriamente ao conjunto trabalhado.**

Propriedades:

Observemos que, os elementos de IR^n, com escalares em IR e munidos das operações definidas acima, satisfazem as seguintes propriedades:

(P.1) Para todo u, v em R^n: u + v = v + u

(P.2) Para todo u, v, w em R^n: w + (u + v) = (w + u) + v

(P.3) Existe um único $\overline{0}$ em R^n tal que $\overline{0}$ + u = u para todo u em R^n

(P.4) Para todo u em R^n, existe um único u' em R^n, tal que: u + u' = $\overline{0}$

(P.5) Para todo u em R^n, temos que: 1.u = u com 1 em R

(P.6) (a.b).v = a.(b.v), para todo v em R^n e a,b em R

(P.7) a.(u + v) = a.u + a.v para todo a em R e todo u,v em R^n

(P.8) (a + b).v = a.v + b.v para todo a, b em R e todo v em R^n

Como as operações definidas para IR^n satisfazem as 8 propriedades listadas acima, dizemos que IR^n, com as operações descritas anteriormente, é um **Espaço Vetorial** sobre o corpo de escalares IR. E seus elementos serão chamados de vetores.

Ao analisar a definição de Espaços Vetoriais, é importante lembrar, segundo Julio (2007), que

> ***As noções do cotidiano ou as noções naturalizadas (que também estão presentes no cotidiano) são como um porto seguro, um chão firme, um lugar onde as pessoas estão ou sempre podem voltar, pois essas noções são estipulações locais para elas e, em um curso de matemática, uma definição matemática nem sempre se transforma em uma estipulação local por parte dos alunos, pois no nosso mundo ela, na maioria das vezes, não é utilizada. (JULIO, 2007, p.95).***

Tópicos de discussão:

1) As operações definidas acima, por serem mais comumente utilizadas em IR^n, são chamadas de operações usuais.

2) IR^n, sobre o corpo IR e com as operações usuais é apenas um exemplo de Espaço Vetorial e denotaremos este Espaço Vetorial da seguinte maneira: (**IR^n, IR, +, .**).

3) Ressaltamos que, ao alterarmos qualquer um dos quatro elementos envolvidos em sua estrutura, teremos um Espaço Vetorial diferente do anterior, podendo, como vimos até conseguir que a estrutura modificada deixe de ser um Espaço Vetorial. Ou seja, se trocarmos pelo menos uma das operações ou ainda, trocarmos o conjunto ou o Corpo de escalares o Espaço constituído por estes elementos poderá ser ou não um novo Espaço Vetorial.

4) Apesar de os quatros elementos envolvidos da definição de Espaço Vetorial serem igualmente importantes o nome do Espaço Vetorial é dado pelo conjunto analisado, no nosso caso específico algum dos IR^n – em anexo, a definição mais abrangente de Espaço Vetorial.

Sugerimos observar a definição de Corpo apresentada no Anexo I. Este conceito surge em disciplinas distintas como, por exemplo, em Análise e Estruturas Algébricas. Esta discussão pode vir a ampliar a importância de conceitos em contextos distintos.

Observar ainda que:

O elemento $\overline{0} \in IR^n$ da propriedade (3) é chamado de vetor nulo do Espaço. Exemplo: para n = 4, $\overline{0}$ = (0,0,0,0).

O elemento u' $\in IR^n$ da propriedade (4) é chamado de simétrico aditivo de u em R^n. Exemplo: se u $\in IR^3$ e u = (1,1,1) , u' = (-1,-1,-1). Denotamos: u' = -u.

Para todo u, v $\in IR^n$ vamos definir: u – v = u + (- v).

5) Discutir as notações e suas diferenças:

Operações de Adição e Multiplicação "usuais" de escalares

(IR, +, .) - Corpo dos Reais

(IR^n, IR, +, .) - Espaço Vetorial IR^n

Operações de Adição e Multiplicação por escalar "usuais" definidas para um Espaço Vetorial

6) Ressaltamos o fato de que como os elementos de IR^n são n-uplas de números reais, ao somarmos coordenada a coordenada, como definida a Adição usual, na propriedade (P.1), por exemplo, o que estamos fazendo é a comutatividade de números reais e, por isso, é válida a comutatividade de n-uplas. E, da mesma forma ao multiplicarmos um escalar real a uma "n-upla real" obteremos também uma "n-upla real".

Exemplo: sejam dados u = (1,2) e v = (0,1) pertencentes a IR^2 e o escalar 2 pertencente a IR. Ao operarmos a Adição e a Multiplicação acima definidas, teremos:

$$u + v = (1,2) + (0,1) = (1 + 0,\ 2 + 1) = (0 + 1,\ 1 + 2) = (0,1) + (1,2) = v + u$$

Comutatividade aditiva de números reais

$$2.\ u = 2.(1,2) = (2.1,2.2) = (2,4)$$

Multiplicação de números reais

Lembrando que as ideias acima discutidas podem ser estendidas às demais propriedades de um Espaço Vetorial.

Propriedades decorrentes da definição de Espaço Vetorial:

Seja o Espaço Vetorial R^n sobre R, munido das operações usuais de adição e multiplicação por escalar. Temos:

i) Para todo $a \in R$, a. $\overline{0}$ = $\overline{0}$

ii) Para todo $v \in R^n$ e $0 \in R$, 0.v = $\overline{0}$

iii) a.v = $\overline{0}$, com $a \in R$ e $v \in R^n$ se, e somente se, a = 0 ou v = $\overline{0}$

iv) Para todo $a \in R$ e todo $v \in R^n$,
(- a).v = a.(- v) = - (a.v)

v) Para todo u $\in R^n$: - u = - 1.u

vi) Quaisquer que sejam $a,b \in R$ e $v \in R^n$:
(a – b).v = a.v – b.v

vii) Quaisquer que sejam $a \in R$, $u,v \in R^n$:
a.(u – v) = a.u – a.v

Acreditamos que, um dos pontos que também possibilitam o diálogo da Matemática Acadêmica com a formação inicial do professor de Matemática são as demonstrações e sua compreensão. Portanto, entendemos que é interessante incluir algumas das demonstrações das propriedades para que o aluno tenha familiaridade com esse modo de produção de significados e tenha possibilidade de ampliar seu escopo de significados matemáticos, a partir desse contato e da estranhamento envolvida em algumas delas.

Sugerimos também que o professor discuta com seus alunos sobre o que cada uma destas propriedades querem dizer. Por exemplo, a propriedade v) nos indica que o inverso aditivo de um vetor u é o mesmo que este vetor multiplicado pelo escalar – 1.

Lembrarmos que o contexto da Álgebra Linear sugere um novo modo de operar e muitos são os conceitos os quais os alunos levam um tempo – que não deve ser apressado – para internalizar.

O professor deve ter em mente que, em geral, o tempo de aprendizagem não condiz com o tempo de ensino.

TAREFA:

1) Sejam u = (0, ***b***) e v = (***c***, 1) pertencentes a R^2. Determine quais os valores de ***b*** e ***c*** satisfazem as seguintes relações:

a) $2.u - v = \overline{0}$ b) $u + v = v$

c) $u + v = u$ d) $(2 + 5).(u + v) = 5.u + 2.v$

A tarefa proposta tem como objetivo apresentar alguns exemplos de como as operações entre elementos de Espaços Vetoriais pode ser problematizada.

Neste momento, é importante discutir a análise da solução de um sistema de equações lineares. Em anexo, segue a teoria correspondente.

Daqui em diante, vamos considerar sempre o espaço vetorial IR^n sobre o corpo de escalares IR munido das operações usuais de adição e multiplicação por escalar. Quando dissermos IR^n, estaremos nos referindo a este espaço vetorial.

Subespaços Vetoriais de IR^n:

Introdução:

A partir do estudo dos Espaços Vetoriais IR^n conseguimos construir outros subespaços correspondentes a eles.

A importância do estudo dos subespaços vetoriais se dá pelo fato de conseguirmos preservar algumas características do IR^n sem que tenhamos que trabalhar com todos os elementos do mesmo.

Definição: Dizemos que W é um subespaço vetorial de R^n, quando

$\mapsto$ W é um subconjunto não vazio de R^n;

$\mapsto$ dados u, v pertencentes a W, então: $u + v \in W$;

$\mapsto$ dados u em W e a em R, então: $a.u \in W$.

Tópicos de discussão:

i) As operações de adição e multiplicação por escalar consideradas na definição acima são exatamente as mesmas daquelas do espaço considerado.

ii) Se W é um subespaço vetorial de IR^n, então W é um Espaço Vetorial sobre IR, munido com as operações usuais de IR^n. (Lembrar que as operações podem não ser as usuais , mas elas devem ser as do Espaço trabalhado).

iii) Dado um subespaço vetorial W de IR^n, observe que ele (W) sempre conterá o vetor nulo de R^n. Discutir esta afirmação constitui um bom momento de ler a produção de significados dos alunos quanto a definição de Espaços Vetoriais e “demonstração”.

Uma discussão interessante seria a análise das três condições para uma estrutura ser considerada um subespaço vetorial. O professor pode propor aos alunos que pontuem a importância individual de cada uma delas.

Sugerimos, ainda que se discuta o fato de que somente quando todas estas condições são satisfeitas é que um conjunto W poderá ser considerado um subespaço, e que se pelo menos uma delas não for satisfeita, já podemos dizer que o mesmo não poderá ser subespaço.

iv) O Espaço Vetorial R^n e o conjunto formado apenas por seu vetor nulo são subespaços de R^n. Generalizando, dado um Espaço Vetorial W, o conjunto formado pelo vetor nulo de W e o próprio W são subespaços de W. Estes dois subespaços particulares são chamados de subespaços triviais do espaço considerado.

TAREFAS:

1) Analise quais dos seguintes itens abaixo constitui um exemplo de Subespaço Vetorial para IR^3, sobre IR e munido das operações usuais de Adição e Multiplicação por escalar:

a) $L = R^2$

b) $J = \{(x, y, z) \in R^3; x = y^2\}$

c) $M = \{(x, y, z) \in R^3; x + y = z\}$

d) $T = \{(x, y, z) \in R^3;\ x + y = 0,\ z < 0 \quad e \quad z > 0\}$

2) Determine se o conjunto formado pelo vetor nulo de IR^2, juntamente com todos vetores w = (x, y) de IR^2 para os quais $\frac{y}{x}$ tem um valor constante, é ou não um subespaço de IR^2.

3) Analise o seguinte conjunto e determine se ele pode ser um subespaço do IR^3.

$$H = \{(x,y,z) \in IR^3,\ x = y \text{ e } z \neq 0\}$$

4) Verifique se o conjunto formado por todos os números reais positivos é um subespaço de IR.

A tarefa 1 tem como objetivo apresentar alguns exemplos de problematizar as condições da definição de subespaço. O que sugerimos aqui é que o professor, a partir dos conjuntos apresentados, discuta questões que envolvam os conceitos de: subconjunto, desigualdade/diferença, entre outros.

Na tarefa 2, sugerimos uma discussão da questão de escrever um dado elemento como combinação linear de outro.

Nas questões 3 e 4, propomos que o professor analise a produção do significados de seu aluno – bem como nas outras tarefas –, como forma de verificar a aplicação dos conceitos vistos até aqui.

Geração de Espaços Vetoriais

Introdução:

Acreditamos que a definição de Combinação Linear que é tão utilizada como "ferramenta" matemática possui um papel importante no estudo dos Espaços Vetoriais.

O professor pode lançar mão de tarefas que envolvam as operações definidas na definição de Espaços Vetoriais, pois é importante ressaltar que por estarmos combinando vetores de forma linear, estamos envolvendo ali uma multiplicação por escalar particular, aquela a qual o Espaço considerado "se associa", além de lembrar que, ao somar este novo vetor resultante desta multiplicação operamos uma adição, aquela também "associada" ao Espaço em questão.

Em particular na Álgebra Linear, dois são os conceitos fortemente apoiados na ideia de combinação linear. São eles: o de Conjunto Gerador e de Conjuntos Linearmente Dependentes / Independentes. Por isso, é importante que o aluno tenha a oportunidade de compreender o que é e como se utiliza uma combinação linear.

Ressaltamos o fato de que a compreensão acerca de resolução e discussão de sistemas de equações lineares pode propiciar um "ambiente familiar" ao se trabalhar com tais conceitos e, consequentemente proporcionar a ampliação dos significados produzidos pelos estudantes.

Combinação Linear

Definição: Sejam $v_1, v_2, ..., v_k$ vetores de IR^n e $a_1, a_2, ..., a_k$ escalares reais. Então o vetor: $a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_kv_k$, pertencente a IR^n é chamado de combinação linear dos vetores $v_1, v_2, ..., v_k$.

Sugerimos que o professor levante a discussão de que, mesmo tendo-se um número finito de vetores (v_1, v_2, ..., v_k), a combinação linear ($a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_kv_k$) dos mesmos gerará uma infinidade de vetores (desde que a_1, a_2, ..., a_K sejam reais quaisquer).

<u>Tópicos de discussão</u>:

i) As operações de Adição e Multiplicação por Escalar, envolvidas numa combinação linear são aquelas definidas para o Espaço Vetorial considerado.

ii) Ao resolver as tarefas, lembre-se que tanto os Espaços Vetoriais IR^n, quanto seus respectivos subespaços, estão associados ao corpo IR de escalares e são munidos das operações usuais de Adição e Multiplicação por Escalar, definidas no início deste capítulo.

<u>TAREFAS:</u>

1) A partir dos vetores u = (1,2) e v = (-1,0) de R^2, encontre os escalares reais a, b, e h que satisfaçam as seguintes combinações lineares:

a) a.u + b.v = - v

b) e.u + h.v = (1,1)

2) Sejam $v_1 = (1,2)$ e $v_2 = (2,4)$. Verifique se é possível escrever todos os vetores de R^2 como combinação linear de v_1 e v_2. Se não for possível, determine um conjunto gerado por estes vetores.

3) Dado o conjunto H = {(1,2), (0,1), (1,1)}, analise a possibilidade de escrever o vetor (1,0) como combinação linear dos vetores de H, variando-se os escalares envolvidos.

4) Seja V um subespaço Vetorial de IR^n e P = {v_1,v_2, ..., v_n }, um conjunto de vetores de IR^n. Analise e discuta a seguinte afirmação:

"Existe uma única forma de se escrever os vetores de V como combinação linear dos vetores de P."

Na tarefa 3, indicamos uma análise mais detalhada e uma discussão atenta da resolução, pois, se bem conduzida, esta discussão poderá levar o aluno a compreender os conceitos de dependência e independência linear.

Na tarefa 4, esperamos que os alunos a partir da análise da afirmação apresentada concluam a importância de escolhermos "adequadamente" os vetores que tomamos.

Indicamos, que ao discutir as noções de dependência e independência linear, o professor retome este questionamento, que pode ser associado à tarefa 2.

Conjunto Gerador

A seguir apresentaremos a definição de Conjunto Gerador a qual poderá nos indicar de que maneira um Espaço Vetorial munido de operações de Adição e Multiplicação por Escalar e um corpo pré-estabelecidos pode ser criado a partir de vetores particulares.

Definição: Seja W um subespaço vetorial de R^n. Dizemos que um conjunto de vetores $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ de R^n gera W se todo vetor de W puder ser escrito como combinação linear dos vetores do conjunto $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$.

Ou seja, se para todo vetor v em W, existirem escalares $a_1, a_2, ..., a_k$ em R tais que

$V = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_kv_k$.

Tópicos de discussão:

i) Os vetores $v_1, v_2, ..., v_k$ são chamados de geradores de W e vamos denotar: $W = [v_1, v_2, ..., v_k]$. O conjunto $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ é chamado de conjunto gerador de W.

ii) Se $v_1, v_2 ..., v_k$ são vetores de R^n, então o conjunto indicado por $W= [v_1, v_2, ..., v_k]$ pode ser descrito da seguinte forma:

$W = \{a_1v_1 + a_2v_2 +... + a_kv_k; a_1, a_2, ..., a_k \in IR\}$.

No tópico ii) é interessante chamar atenção ao fato de que as duas notações apresentadas são equivalentes para representar um conjunto gerador para W.

Cabe aqui uma discussão sobre as notações e seu entendimento, bem como o fato de podermos representar dois conjuntos – em especial, geradores – com notações distintas.

TAREFAS:

1) Em cada item determine se o conjunto formado pelos vetores dados gera, ou não, R^2.

a) u = (1,2), v = (0,1) e w = (1,1)

b) u = (1,0), v = (2,0)

c) u = (- 1,1), v = (1,0)

d) u = (0,- 1)

Se em algum dos itens o conjunto de vetores não gerar R^2, determine qual é o subespaço de R^2 gerado por ele.

2) Observe o seguinte conjunto $H = [(1,0),(2,1),(3,0),(1,2)]$, e responda:

a) Os vetores $(1,0),(2,1),(3,0),(1,2)$ estão em H?

b) Quantos vetores possui H?

3) Sejam os vetores u = (1,0) e v = (0,-2). O conjunto W gerado por u e v pode ser representado por: W = { a(1,0) + b(0,-2) ; a,b $\in R$ }.

a) O vetor (0,-2) pertence a W?

b) O vetor (1,1) pertence a W?

4) É possível encontrar vetores de IR^3 que não pertençam a F = [(1,0,1),(2,1,1),(1,1,0)]?

5) Demonstre que os dois subconjuntos abaixo geram o mesmo subespaço de R^3.

N = {(1, -1, 2), (3, 0, 1)}; J = {(-1, -2, 3), (3, 3, -4)}

6) Exprima o vetor z = (1,-3,10) como combinação linear dos vetores u = (1,0,0), v = (1,1,0) e w = (2,-3,5). E responda: z $\in$ [u,v]? Justifique.

7) Dados os vetores v = (1,2,3), u = (1,1,1) e w = (1,0,-1) em R^3, obtenha um conjunto "mais simples" (se possível menor) de vetores que gere o mesmo subespaço que v, u, w. A partir daí, descreva essa subespaço e verifique se o vetor t = (2,2,1) está nesse subespaço.

Independência / Dependência Linear

Independência Linear

<u>Definição</u>: Sejam $v_1, v_2, ..., v_n \in IR^n$. Dizemos que o conjunto $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ é Linearmente Independente (L.I.) se, toda vez que

$a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_kv_k = 0$, sendo $a_1, a_2, ..., a_k$ escalares reais, tivermos $a_1 = a_2 = ... = a_k = 0$.

Por outro lado, se algum dos escalares a_i for diferente de zero, diremos que o conjunto $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ é Linearmente Dependente (L.D.).

Uma maneira de se compreender o que é um conjunto Linearmente Independente é dizer que dados os vetores $v_1, v_2, ..., v_n \in IR^n$, a única combinação linear destes vetores que resulta no vetor nulo de IR^n é aquela na qual os escalares utilizados na combinação são iguais a zero.

<u>Teorema 1</u>:

Um conjunto de vetores $S = \{v_1, v_2, ..., v_k\} \subset IR^n$ $(K > 1)$ é Linearmente Dependente se, e somente se, pelo menos um dos vetores desse conjunto for uma combinação linear dos outros vetores do conjunto. Ou ainda, quando $S = \{\overline{0}\}$.

<u>Tópicos de discussão</u>:

i) Um conjunto formado por um único vetor não-nulo de R^n é Linearmente Independente.

ii) O conjunto formado apenas pelo vetor nulo de R^n é Linearmente Dependente.

iii) Qualquer conjunto de vetores de R^n que contenha um subconjunto de vetores Linearmente Dependente será Linearmente Dependente.

Com base em nossa pesquisa, acreditamos que uma forma de se apresentar um Teorema é fazendo exemplos particulares e/ou um esboço da demonstração mostrando sua importância e aplicação na teoria.

Também nos tópicos de discussão, indicamos a demonstração ou mesmo a realização de exemplos numéricos de alguns deles como forma de analisar suas consequências nos conceitos de dependência e independência linear, bem como sua aplicação em ideias que serão posteriormente discutidas.

iv) Se um conjunto de vetores contém o vetor nulo de R^n, então ele é Linearmente Dependente. (Lembramos que é interessante discutir que esta afirmação é uma consequência do tópico anterior).

TAREFAS:

1) Demonstre que os vetores (a, b) e (c, d) de R^2 são Linearmente Independentes se, e somente se, $a.d - b.c \neq 0$.

2) Prove que se {u, v} é Linearmente Independente, então {u + v, u – v} é Linearmente Independente.

Neste ponto queremos lembrar, em acordo com Lins e Oliveira, que

> ***As disciplinas de Matemática 'avançada' têm um potencial único na formação de professores de Matemática, desde que não sejam entendidas em si mesmas, apenas como 'de conteúdo'; ou ainda, a Matemática do matemático oferece uma oportunidade única de viver o estranhamento peculiar ao encontro com noções que contrariam em tudo o senso comum do cotidiano (...). (LINS apud OLIVEIRA, 2012, p.200).***

Portanto, acreditamos que num curso de Álgebra Linear para licenciandos em Matemática há espaço para questões demonstrativas (consideradas tradicionais), se discutidas e analisadas pelos alunos da perspectiva da Educação Matemática, com o objetivo de dar ao futuro professor segurança para falar e operar com a matemática do matemático.

Base e Dimensão

Introdução:

Um dos conceitos mais importantes da teoria de Espaços Vetoriais é o conceito de Base. Essa importância deve-se ao fato de que a Base de um Espaço Vetorial nos oferece informações sobre o mesmo. Além disso, este conceito interliga os conceitos chave da Álgebra Linear, tornando-o de imprescindível compreensão para entender a totalidade desta disciplina.

Aliado ao conceito de Base, apresentaremos nesta seção a noção de Dimensão. Este conceito pode ser discutido em diversos ambientes, matemáticos ou não, e também pode contribuir para que o estudante de Álgebra Linear tenha lucidez global dos conceitos.

Ressaltamos aqui um bom momento de se discutir que o apelo geométrico "dá conta" de apoiar a compreensão de conceitos algébricos até a dimensão 3, e entender que a partir daí, apenas teremos apenas a "visualização" algébrica. Além disso, lembramos que o contato com elementos geométricos associados a elementos algébricos podem ser feitos, até mesmo, com uma retomada da definição de subespaço e sua dimensão em relação ao espaço considerado.

Base

Definição: Seja W um subespaço de IR^n. Uma base de W é um subconjunto β de vetores contidos em W para os quais as seguintes condições se verificam:

1) β gera W e

2) β é Linearmente Independente.

Sugerimos que o professor discuta a seguinte afirmação: "Todo subespaço W ≠ {0} de IR^n possui uma base."

É comum os alunos de Álgebra Linear dizerem que o espaço vetorial nulo tem dimensão 1, pois têm apenas o vetor nulo. Acreditamos que a discussão desta questão pode ser rica para os alunos no sentido de ampliarem sua visão de dependência e independência linear e, consequentemente de base.

Teorema 3:

Sejam $v_1, v_2, ..., v_k \in W$ vetores que geram o subespaço Vetorial W de IR^n. Então, dentre estes vetores podemos extrair uma base de W.

Teorema 4:

Seja W um subespaço de IR^n gerado por um conjunto de vetores $v_1, v_2, ..., v_k \in V$. Então, qualquer conjunto com mais de k vetores é necessariamente L.D. e, portanto, qualquer conjunto L.I., tem no máximo k vetores.

Teorema 5:

Seja W um subespaço de IR^n. Então qualquer base de W tem o mesmo número de vetores.

TAREFAS:

1) Determine um subespaço de IR^3 cuja base é formada pelos vetores:

(1, -1, 0) e (0, 0, 1).

2) Encontre uma base para o subespaço Vetorial $V = \{(x, y, z) \in R^3;\ x = y;\ z = 0\}$.

3) Dados os vetores $x_1 = (2, 0, 1, 1)$ e $x_2 = (1, 1, 0, 3)$ de IR^4, encontre vetores x_3 e x_4 tais que x_1, x_2, x_3 e x_4 formem um base para IR^4.

Ao discutir os teoremas, indicamos a "rediscussão" do conceito de subespaço, bem como da importância de se analisar o espaço vetorial considerado e a restrição a qual o subespaço deve satisfazer.

Lembramos que neste momento pode ser interessante o professor sugerir ao aluno uma análise de como esta restrição pode ser visualizada/apresentada. Nestas tarefas, os subespaços podem identificados a partir de suas bases, e pela representação em forma de conjunto, por exemplo.

Dimensão

<u>Definição</u>: Seja W um subespaço de IR^n. Denomina-se dimensão de W o número de vetores de uma (qualquer) base de W.

Teorema 6:

Qualquer conjunto de vetores L.I. de um Subespaço Vetorial W de R^n pode ser completado de modo a formar uma base para W.

Corolário 1:

Seja V um subespaço de IR^n. Se dim V = g, então qualquer conjunto com g vetores L.I. formará uma base para V.

Observações:

i) A dimensão de um Subespaço Vetorial W de IR^n será denotada por dimW.

ii) Seja W um Subespaço Vetorial de IR^n cuja dimensão é "g". Se um conjunto B com n vetores gera o subespaço W, então B é LI e, portanto, é uma base para W.

iii) Seja W um subespaço de IR^n.

Então W $\neq IR^n$ se, e somente se dim W < n = dim IR^n.

Segundo Julio (2007),

> ***Assim como no cotidiano, em uma sala de aula de matemática podemos ver que <u>dimensão</u>, de acordo com as produções de significados pelas pessoas que cursaram uma disciplina matemática, também assume significados diferentes da matemática do matemático. (JULIO, 2007, p.95, grifo da autora).***

Tópicos de discussão:

Nossa experiência nos mostrou que ao discutir o conceito de dimensão o professor deve sempre estar atento que, para o aluno, este pode não ser um conceito familiar no contexto da Álgebra Linear. Portanto, indicamos a discussão que pode ser pautada, pelos seguintes tópicos:

- em quais contextos o aluno já se deparou com a palavra "dimensão"?

- quais os significados de “dimensão” é familiar para este aluno?

- quais outros conceitos matemáticos os alunos conhecem que possuem significados diferentes, dependendo do contexto ao qual se inserem? (Por exemplo, pode se citar os conceitos de função e razão.)

- em que circunstâncias o índice do conjunto que dá nome ao espaço vetorial é igual ao valor da dimensão? (Por exemplo, quando a dimensão de um espaço/subespaço de IR^2 é 2?)

- o que o IR^3 representa para você? (Os alunos tendem a produzir significados para o IR^3 imaginando-o como o espaço geométrico, ou ainda, como aconteceu em nossa pesquisa, concebê-lo como o espaço físico e não acreditar ser legítimo afirmar que ele possua “apenas” a dimensão 3, com operações usuais de adição e multiplicação, sobre o corpo IR.)

Em consonância com Lins (2004c) acreditamos que

> **a Matemática do professor de matemática é caracterizada por nela serem aceitos, além dos significados matemáticos, significados não - matemáticos. Há os tradicionais exemplos, como o de que ‘fração é pizza’, ‘decimais são dinheiro’ e ‘números negativos são dívidas’. Mas isto não basta, porque o professor não tem que dar conta apenas do que concorda com o que ele diz, com o que está ‘certo’. O professor precisa ser capaz de ler o que seu aluno diz, mesmo que esteja ‘errado’, tanto quanto como quando está ‘certo’. (LINS, 2004c, p. 01-13).**

Portanto, sugerimos que o professor sempre procure explorar os significados matemáticos e não matemáticos dos conceitos envolvidos na teoria que estiver estudando.

TAREFAS:

1) Determine a Dimensão dos seguintes Subespaços Vetoriais de IR^n:

a) $K = \{(x, y, z) \in R^3;\ x = y;\ z = 0\}$

b) $S = \{(x, y, z, t) \in R^4;\ x = 2y;\ z = t\}$

c) A= [(2, 1, -1), (3, 2, 1), (1, 0, -3)]

d) D= [(2, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0)]

2) Seja W = [v_1 = (1,−1, 0, 0), v_2 = (0, 0, 1, 1), v_3 = (−2, 2, 1, 1), v_4 = (1, 0, 0, 0)].

a) (2,−3, 2, 2) $\in$ W ? Justifique.

b) Exiba uma base para W. Qual a dimensão de W?

c) W = IR^4 ? Por quê ?

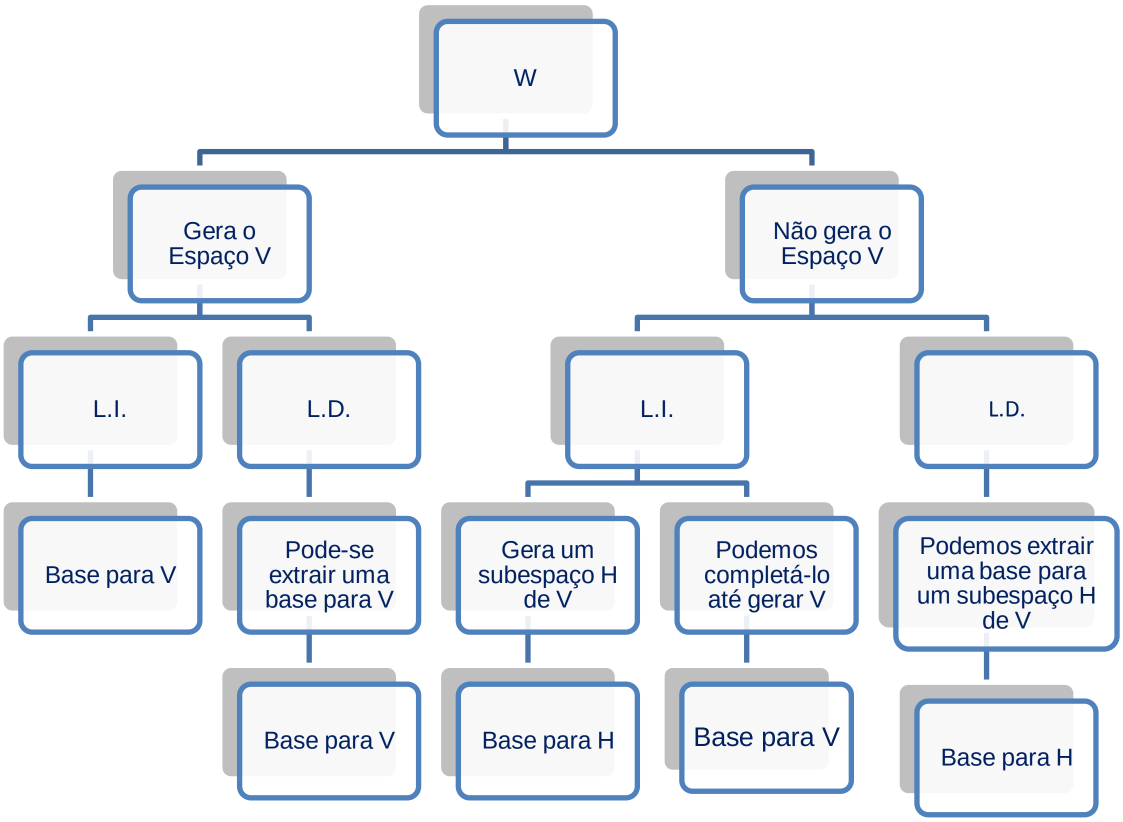
3) Determine o subespaço de IR^3 cuja base é γ = {(-1,-1,0); (0,1,1)}. É possível construir uma base para o subespaço W = {(x,y,z) $\in$ IR^3; x – y = 0} a partir de γ?

4) Analise e discuta a seguinte afirmação:

“Como o conjunto V = {(x,y,z) $\in$ IR^3; x = 2y – z} é um subespaço de IR^3, podemos extrair uma base para V, a partir da base canônica de IR^3.”

ESQUEMA – RESUMO:

Dado um conjunto W, candidato a conjunto gerador de um Espaço Vetorial V podemos analisar as seguintes possibilidades:



Sugerimos que o professor utilize este esquema-resumo para discutir com seus alunos as conexões existentes entre os conceitos de Álgebra Linear envolvidos na teoria de Espaços Vetoriais. Destacamos alguns pontos importantes dados como sugestão para motivar esta discussão:

- num primeiro momento, questionar aos alunos: o que entendem deste esquema?

- a partir de suas respostas encaminhar a discussão propondo que eles analisem as relações entre os conceitos e as implicações consequentes da “falta” de uma condição, ou uma condição diferente da esperada naquele momento. Por exemplo: ao tomar um conjunto gerador, mas L.D., poder extrair uma base para o mesmo.

- sugerir a análise dos enunciados dos Teoremas e sua aplicação neste esquema.

Referências:

ALMEIDA, V. R. **Álgebra Linear como um Curso de Serviço para a Licenciatura em Matemática: um estudo das Transformações Lineares. 2013**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora.

ALVES, A. F. **Álgebra Linear como um Curso de Serviço para a Licenciatura em Matemática: o estudo dos Espaços Vetoriais. 2013**. p. 178. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora.

JULIO, R. S. **Uma leitura da produção de significados matemáticos e não-matemáticos para "*dimensão*"**. 2007. 96 P. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Campus de Rio Claro.

LINS, R. C. **A framework for understanding what algebric thinking is.** 1992. 330p. Thesis (Phd) – University of Nottingham, Nottingham.

_____________. (1993). **Epistemologia, História e Educação Matemática: tornando mais sólidas as bases de pesquisa**. Revista SBEM – SP, Campinas, v.1 (1), 75-79.

_____________. Por que discutir teoria do conhecimento é relevante para a Educação Matemática. In: Bicudo, M. A. V. (org.). **Pesquisa em Educação Matemática:** concepções e perspectivas. São Paulo: Editora da UNESP, 1999. (Seminários e Debates). p.75-94.

_____________. **The production of meaning for Algebra: a perspective based on a Theoreticall Model of Semantic Fields**. In: R. Sutherland et al. Perspectives on School Algebra. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2001.

_____________. **A diferença como oportunidade para aprender**. In: XIV ENDIPE, 2008, Porto Alegre. Trajetórias e processos de ensinar e aprender: sujeitos, currículos e culturas. Porto Alegre: Edi PUCRS, v.3. p. 530 550, 2008.

_____________. **O Modelo dos Campos Semânticos: Estabelecimentos e notas de teorizações.** In: Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática – 20 anos de história. Midiograf. São Paulo, 2012. 1ª Edição, p. 11-30.

LEONTIEV, A.N. **Uma contribuição à teoria do desenvolvimento da psique infantil**. In:

OLIVEIRA, V. C. A. **Sobre as ideias de estranhamento e descentramento na Formação de Professores de Matemática**. In: Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática – 20 anos de história. Midiograf. São Paulo, 2012. 1ª Edição, p. 199-216.

SILVA, A. M. **Uma análise da produção de significados para a noção de base em álgebra linear**. 1997. 163p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Santa Úrsula, Rio de Janeiro.

_____________. **Sobre a dinâmica da produção de significados para a matemática**. 2003, 243p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.

_____________. **Notas de Álgebra Linear**, UFJF. Juiz de Fora. 2010.

_____________. Um Curso de Serviço para a Licenciatura em Matemática. **XIII Conferência Interamericano de Educação Matemática**. Recife: CIAEM, p.1- 7, 2011.

_____________. **Impermeabilização no Processo de Produção de Significados para a Álgebra Linear.** In: Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática – 20 anos de história. Midiograf. São Paulo, 2012. 1ª Edição, p. 79-90.

VIGOTSKII, L.S., LURIA, A.R. & LEONTIEV, A.N. Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem. 7ª ed. São Paulo: Ícone, 2001.

ANEXOS:

ANEXO I: Espaços Vetoriais

Ao fim do curso sugerimos que o professor busque apresentar a definição de Espaço Vetorial em sua forma mais geral, indicando a importância de um segundo e mais aprofundado curso de Álgebra Linear.

<u>Definição</u>: Um ESPAÇO VETORIAL sobre um Corpo IK é um conjunto V, cujos objetos são denominados VETORES, munido de duas operações:

• Adição de vetores: que associa a cada par de vetores u, v em V um vetor u + v ∈ V;

• Multiplicação por escalar: que associa a cada escalar a ∈ IK e cada vetor u ∈ V um vetor a.u ∈ V, as quais possuem as seguintes propriedades:

P.1) u + v = v + u, para todo u, v ∈ V.

P.2) u + (v + w) = (u + v) + w, para todo u, v,w ∈ V.

P.3) Existe um único vetor 0 ∈ V , chamado o VETOR NULO, tal que u + 0 = u, para todo u ∈ V.

P.4) Para cada vetor u 2 V , existe um único vetor − u ∈ V tal que u + (−u) = $\bar{\mathbf{0}}$.

P.5) 1.u = u, para todo u ∈ V.

P.6) (a.b).u = a.(b.u), para todo a, b ∈ IK e para todo u ∈ V.

P.7) a.(u + v) = a.u + a.v, para todo a ∈ IK e para todo u, v ∈ V.

P.8) (a + b).u = a.u + b.u, para todo a, b ∈ IK e para todo u ∈ V.

ANEXO II: Corpo

Seja IK um conjunto de elementos x, y, z, ..., com duas operações:

Adição: associa a cada par de elementos x, y $\in$ IK um elemento x + y $\in$ IK.

Multiplicação: associa a cada par de elementos x, y $\in$ IK um elemento x.y $\in$ IK.

Suponhamos que estas duas operações possuam as seguintes propriedades:

1) $x + y = y + x$ para todo x, y $\in$ IK (comutatividade da adição);

2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ para todo x, y, z $\in$ IK (associatividade da adição);

3) Existe um único elemento nulo 0 (zero) em IK tal que $0 + x = x$ para todo x $\in$ IK (elemento neutro da adição);

4) A cada x $\in$ IK corresponde um único elemento $(-x) \in$ IK tal que $x + (-x) = 0$ (simétrico na adição);

5) $x.y = y.x$ para todo x, y $\in$ IK (comutatividade da multiplicação);

6) $x.(y.z) = (x.y).z$ 8x, y, z $\in$ IK (associatividade da multiplicação);

7) Existe um único elemento não-nulo 1 (um) em IK tal que $x.1 = x$ para todo x $\in$ IK (elemento neutro da multiplicação);

8) Para cada $x \neq 0$ em IK existe um único elemento x^{-1} (ou 1/x) em IK tal que $x.x^{-1} = 1$ (inverso na multiplicação);

9) $x.(y + z) = x.y + x.z$ para todo x, y, z $\in$ IK (distributividade da multiplicação em relação à adição).

O conjunto IK, munido das duas operações com as propriedades acima, é denominado CORPO.

ANEXO III: Sistemas Homogêneos e Independência/Dependência Linear.

Equação linear real é toda equação da forma:

$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$, na qual

i) $a_1, a_2, a_3, ... , a_n$ são números reais, que recebem o nome de coeficientes;

ii) $x_1, x_2, x_3, ... , x_n$ são números reais, que recebem o nome de incógnitas;

iii) e b é um número real chamado termo independente.

Um sistema de equações lineares é chamado de sistema homogêneo quando todos os termos independentes de suas equações foram nulas.

$$\begin{cases} a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + ... + a_{1n}.x_n = 0 \\ a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + ... + a_{2n}.x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}.x_1 + a_{n2}.x_2 + ... + a_{nn}.x_n = 0 \end{cases}$$

Observações:

a) Um sistema de equações lineares e homogêneas sempre possuirá solução.

b) Se o número de equações "independentes" (p) for igual ao número de incógnitas (n), então o sistema possuirá apenas a solução nula ou trivial: $S = \{\overline{0}\}$.

c) Se o número de equações "independentes" (p) for menor do que o número de incógnitas (n), então o sistema possuirá infinitas soluções.

Resumindo,

$p = n \rightarrow$ sistema homogêneo, possível e determinado, e admite somente a solução trivial.
$p < n \rightarrow$ sistema homogêneo, possível e indeterminado, e admite outras soluções além da solução trivial.

d) A partir da análise do determinante da matriz associada (A) ao sistema homogêneo também podemos determinar as soluções do mesmo:

* Se det A ≠ 0, então o sistema é Possível e Determinado e possui apenas a solução nula ou trivial.

* Se det A = 0, então o sistema é Possível e Indeterminado e possui infinitas soluções.

Observe que podemos ampliar a análise das equações lineares do sistema homogêneo tomando as incógnitas como vetores de um Espaço Vetorial IR^n, sobre o Corpo IR e munido das operações usuais de Adição e Multiplicação por Escalar.

O objetivo de ampliar a análise desta “teoria” é que esta pode ser muito útil ao estudo da Independência/Dependência Linear, pois dada uma equação da forma:

(*) $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = 0$, com $(x_1, x_2, ..., x_n) \in IR^n$ e $a_1, a_2, ..., a_n \in IR$

podemos realizar análise similar àquela feita anteriormente no sistema homogêneo.

Ou seja, ao montarmos a matriz associada ao sistema homogêneo produzido a partir da equação (*), poderemos analisar as duas possibilidades de solução:

i) Se o sistema é Possível e Determinado, então ele possui apenas a solução nula:

$$a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$$

E o conjunto de vetores: $\{ x_1, x_2, ..., x_n\}$ é Linearmente Independente.

ii) Se o sistema é Possível e Indeterminado, então ele possui infinitas soluções e existe pelo menos um $a_i \in IR$ com i = 1, 2, ..., n, tal que $a_i \neq 0$.

E o conjunto de vetores: $\{ x_1, x_2, ..., x_n\}$ é Linearmente Dependente.