ANEXO

PROPOSTA DE UMA OFICINA

Um olhar para as Representações decimais de números reais[1]

Willian José da Cruz[2]
Universidade Federal de Juiz de Fora
lukinha@barbacena.com.br
Carlos Alberto Santana Soares[3]
Universidade Federal de Juiz de Fora
carlos.soares@ufjf.edu.br

Resumo

Esta oficina se caracteriza por desenvolver um trabalho com as representações decimais de números reais, propondo uma melhor compreensão dos conceitos e das concepções atribuídos a este conteúdo no âmbito do ensino fundamental e médio. Dispõem-se neste trabalho utilizar de vários recursos, quer seja humanos quer seja tecnológicos, contribuindo para formação inicial ou continuada do professor de matemática. Esta oficina vem como proposta anexa ao trabalho de pesquisa para obtenção do grau de mestre profissional em Educação Matemática pela Universidade Federal de Juiz de Fora. Configura-se como suporte à possibilidade de iniciar uma reflexão sobre como poderia ser o trabalho da disciplina Análise Real nos cursos de licenciatura em matemática. É também um convite ao professor do ensino fundamental e médio a entender aspectos formais na apresentação das dízimas periódicas e obter uma maior compreensão na diferença de definições e conceituações entre os decimais infinitos periódicos (dízimas periódicas) e os decimais infinitos não periódicos (os números irracionais) identificando consequências destas, na matemática produzida no ambiente escolar.

Palavras-chave: Educação Matemática, Matemática Escolar, Análise Real, Representação decimal, Densidade.

Justificativa

Ao desenvolver uma pesquisa para obtenção do grau de mestre no programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática pela Universidade Federal de Juiz de Fora, na qual, o autor apresenta a construção dos Números Reais nas estruturas "algébrica e topológica", a proposta desta oficina surgiu, aliada à

[1]Esta oficina foi aceita para publicação no XIII CIAEM – XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática – Recife 2011.
[2]Willian José da Cruz; Mestrando em Educação Matemática pela Universidade Federal de Juiz de Fora; Professor efetivo da Prefeitura Municipal de Barbacena – MG e Professor substituto da Universidade Federal de Juiz de Fora.
[3]Prof. Dr. Carlos Alberto Santana Soares, docente do programa de mestrado profissional em Educação Matemática – UFJF.

necessidade pessoal do autor em entender certos aspectos na construção dos números decimais infinitos periódicos e não periódicos e também compreender a noção de densidade, tão presente no estudo de limite, continuidade, derivada e integral de funções reais de variável real e pouco comentada nas aulas de matemática do ensino fundamental e médio. Na oportunidade, buscar-se-á elucidar situações apresentadas em livros textos de matemática adotados no ensino fundamental e médio, para uma melhor compreensão das questões envolvendo números reais nas representações decimais periódicas e não periódicas.

Cursando um mestrado profissional em Educação Matemática, que tem por característica aproximar o professor das leituras e pesquisas na área e por consequência, incentivá-lo a propor materiais de apóio às práticas pedagógicas que poderão servir de suporte para dinâmica da matemática, produzida no seio escolar, o autor se sentiu motivado a unir sua necessidade pessoal, à oportunidade de desenvolver esta oficina, visando buscar uma melhor compreensão das representações decimais, em seus aspectos formais e práticos, e compreender as leituras referentes a esse assunto, apresentadas nos livros didáticos.

Atribuir certos aspectos formais ao desenvolvimento das representações decimais pode contribuir para elucidar questões que ainda não foram totalmente discutidas ou compreendidas pelos professores que lecionam esta matéria, no ensino fundamental e médio (grifo nosso).

Penteado e Silva (2007, p.1) trazem, no seu trabalho intitulado “O Estudo da Densidade dos Números Reais no Ensino Médio”, que tem como tema a abordagem da densidade dos números reais, no sentido da existência de infinitos números racionais e infinitos irracionais entre dois números reais distintos que, algumas pesquisas realizadas em Israel e na França, apontam certas dificuldades dos alunos em compreender alguns conteúdos, devido à falta de conhecimento a respeito dos números reais e das suas propriedades. Os autores destacam algumas confusões sobre a noção da distinção entre números racionais e irracionais e a noção de densidade. Essas confusões estão associadas, segundo os autores, às concepções e às crenças dos pesquisados, de que um número irracional tem uma representação decimal ilimitada, a dificuldade de distinção entre a cardinalidade dos naturais e dos reais, a associação do número irracional como número não exato, a concepção de que o número irracional não é inteiro ou é negativo dentre outras destacadas pelos autores.

No Brasil, destaca-se a pesquisa feita por Igliori e Silva (2001), realizada com alunos recém-ingressos nos cursos de ciência da computação e com os formandos dos cursos de licenciatura em matemática. Esta pesquisa evidenciou a confusão existente entre os conceitos de números racionais e irracionais em relação à representação decimal, ao sucessor e a existência de infinitos números.

Igliori e Silva (2001) evidenciaram a forma pela qual os alunos confundiam a definição de número irracional, sendo para eles, números infinitos, ou seja, aquele que contem infinitos dígitos após a vírgula, ou ainda raízes. Nesta mesma pesquisa, os alunos definiram números racionais como sendo exatos ou inteiros. No caso do uso das reticências, os autores Igliori e Silva (2001) afirmaram que os alunos pesquisados ficaram desconfortáveis, causando instabilidade nas respostas proferidas.

Segundo Moreira e David (2005, p. 90), os números decimais desempenham uma função ambígua, até certo estágio da aprendizagem escolar, sendo um tópico de grande importância. Tem o papel de ajudar na construção abstrata de número, quando se consideram certos decimais finitos, sendo um subconstruto associado a números racionais, ou como representação quando considerados registros de números racionais ou reais e ainda podem ser identificados com a própria noção de número, no caso em que se conceituam os irracionais como decimais infinitos e não periódicos.

A representação decimal dos reais se reduz primariamente a uma compreensão do sistema decimal de registros de números naturais, não passando de uma extensão dessa ideia básica (MOREIRA & DAVID, 2005, p. 90). O grande desafio é construir de forma coerente tal significado na apresentação desse elemento no âmbito do ensino fundamental e médio, diminuindo as dificuldades de compreensão dos estudantes.

No ensino fundamental, há o costume de apresentar aos estudantes, primeiro as frações ordinárias e consequentemente os números decimais, determinados a partir destas frações.

De acordo com Ávila (2006, p.23) a conversão de uma fração ordinária em decimal se faz dividindo o numerador da fração pelo denominador. Se o denominar da fração, na forma irredutível, só contiver os fatores primos de 10 (2 e/ou 5), a decimal resultante será finita. Se o denominador da fração ordinária em forma irredutível tiver um fator primo diferente de 2 e 5, encontrar-se-á um decimal infinito e periódico, ou seja, o resultado será uma dízima periódica.

Para Moreira e David (2005, p. 92), a identificação da representação decimal como resultado de uma divisão continuada é uma das formas eficientes para a atribuição da qualidade de número às dizima periódica, identificando esse número como racional, pois é resultado da divisão dois inteiros que previamente já foram identificados como números racionais.

Ao conceber a representação decimal para números irracionais, Ávila (2006, p. 25), considera não ser nem finita e nem periódica. Esse mesmo autor considera que o primeiro número irracional apresentado ao aluno no ensino fundamental e médio é o numero PI (π), razão do comprimento de uma circunferência pelo seu diâmetro, porém, no sentido formal, a demonstração da irracionalidade desse número está fora do alcance da matemática para esse nível de ensino.

Ainda no ensino fundamental e médio, o aluno é apresentado aos radicais e novamente é informando a ele que raízes não exatas, como $\sqrt{3}, \sqrt{2}, \sqrt{5}$, etc, são números irracionais. Segundo Ávila (2006, p. 35), o aluno tem condições suficientes para entender a demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$, assim como outras demonstrações.

Para Ávila (2006), a apresentação dos números irracionais, da forma como foi discutida no parágrafo anterior, pode deixar no aluno a impressão de que só existem o Pi (π) e alguns radicais como números irracionais, formando talvez a ideia de que o conjunto dos número irracionais seja bem reduzido, no máximo enumerável.

Essa visão dicotomizada também está presente em livros didáticos de matemática adotados em algumas escolas públicas do Brasil. A imagem seguinte foi retirada do livro “Tudo é Matemática” do autor Luiz Roberto Dante (2010, p. 34).

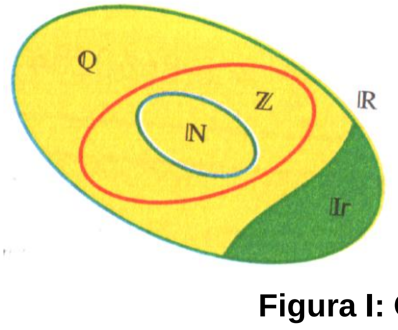

Figura I: O conjunto dos números reais

Segundo o autor, o diagrama acima relaciona os conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$ e $\mathbb{R}$, sendo o conjunto $\mathbb{I}$ dos números irracionais. Com base nessa apresentação, o livro traz uma imagem de que o conjunto dos números irracionais é bem pequeno, sugerindo ao leitor que esse conjunto tem poucos elementos, deixando a impressão que esse conjunto é enumerável[4], o que de fato não é verdade, pois trata se de um conjunto não enumerável, ou seja, a cardinalidade[5] do conjunto dos números irracionais é diferente da cardinalidade de $\mathbb{N}$, demonstrada por Cantor em 1874.

Outra ilustração do mesmo livro (DANTE, 2010, p. 34) vem acompanhada da definição do autor que conjunto dos números reais é a reunião do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais. Essa ilustração pode causar também algumas dúvidas, pois a imagem pode levar a subentender que os dois conjuntos têm o mesmo tamanho.

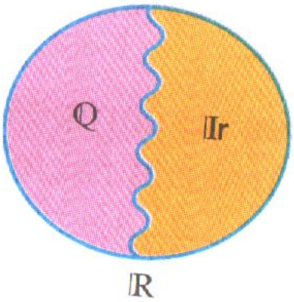

Figura II: Racionais e irracionais

Esta oficina abre campo para várias discussões, porém, para um recorte da mesma, este trabalho se pautará na compreensão das representações decimais dos números reais, fundamentando-se na observação e na apresentação das dízimas periódicas e na discussão de certos aspectos desenvolvidos nos estudos dos números decimais infinitos e não periódicos.

Moreira e David (2005, p. 96) apontam que, em outros estudos feitos para classificar números como racionais ou irracionais, é comum a identificação de dízimas periódicas como números irracionais. Segundo os mesmos autores, os alunos assumem que todos os números, os quais aparentemente apresentam certa

[4]Chama-se conjunto enumerável todo conjunto equivalente ao conjunto dos números naturais (ÁVILA, 2006, p. 33).
[5]Dois conjuntos têm a mesma cardinalidade se seus elementos podem ser colocados em correspondência biunívoca, ou seja, quando é possível estabelecer uma correspondência que leva elementos distintos de um conjunto a elementos distintos do outro, tal que todos os elementos de um e do outro conjunto sejam objetos dessa correspondência.

anomalia, são classificados como irracionais, ou seja, a infinidade de casas decimais significa que um valor efetivamente nunca é atingido. Da mesma maneira, a aceitação dos números negativos, que, de certa forma não faz parte da intuição dos alunos, são considerados também um número irracional.

Presentes nos livros de matemática do ensino fundamental e médio, as representações decimais despertam interesses, principalmente na forma pela qual são caracterizadas. Apesar de ser um assunto bastante trabalhado no ensino fundamental e médio, confusões entre as representações de números racionais e irracionais ainda causam dúvidas e é nesta perspectiva que esta oficina pode oferecer ao professor do ensino fundamental e médio em formação (continuada ou inicial), uma compreensão de certos aspectos desse tema.

Objetivos

Objetivando esta oficina apresentar as representações decimais de números reais em um desenvolvimento formal e discutir questões que envolvem este assunto no âmbito do ensino fundamental e médio, destacam-se também outros objetivos:

- desenvolver, junto ao professor do ensino fundamental e médio, uma relação de proximidade entre o conteúdo Análise Real e a matemática produzida no seio escolar, discutindo as ideias e noções sobre números racionais e irracionais em suas respectivas representações decimais.
- Sugerir uma melhor compreensão na noção da densidade dos números reais.

Plano de ação

O plano de ação para o desenvolvimento desta oficina será divido em três etapas, preenchendo o tempo de trabalho destinado à mesma.

1º tempo - 60 min: Será feita uma apresentação expositiva da escolha do tema e/ou motivos que contribuíram para o desencadear desta oficina, bem como a apresentação das dízimas periódicas e dos decimais infinitos não-periódicos, sendo abordadas algumas considerações que possam ser importantes no decorrer do trabalho.

2º tempo - 1h 30 min: Serão apresentadas, neste segundo momento, cinco situações de sala de aula, na forma de questões, as quais serão discutidas e resolvidas durante esse tempo.

- A primeira, relacionada à transformação de frações em dízimas periódicas.
- A segunda, referente à transformação de dízimas periódicas na forma de frações geratrizes.
- A terceira, envolvendo decimais finitos escritos na forma infinita
- A quarta, envolvendo o período da dízima.
- A quinta, relacionada à densidade dos números reais e representação decimal dos números irracionais.

3º tempo - 30 min: debate final em relação aos problemas propostos, apresentação formal das dízimas periódicas e das definições de números decimais infinitos (periódicos e não-periódicos) encontradas em livros didáticos do ensino fundamental e médio e a apresentação da noção de densidade em no conjunto dos números reais**.**

Procedimento metodológico da oficina

Esta oficina se resume em apresentar as representações decimais e em entender aspectos da densidade dos números reais. Através de uma estrutura mais formal, busca-se compreender e validar os aspectos pedagógicos na aplicação desses tópicos, contribuindo para identificação de elementos estudados no âmbito do ensino fundamental e médio.

Para o desenvolvimento desta oficina, a abordagem, inicialmente escolhida, foi o desenvolvimento das dízimas periódicas, que, ao longo do processo, oportunizará tanto ao professor do ensino fundamental e médio quanto ao licenciando em matemática, identificar elementos em livros didáticos e outros, os quais utilizam, com ou sem rigor, tal estrutura.

Dando sequência, estudar-se-ão as representações decimais dos números irracionais, em contraste com as dízimas periódicas, no intuito de desvelar concepções e/ou consequências na aplicação deste assunto, no âmbito do ensino fundamental e médio.

Finalizando, serão conduzidas discussões em torno dos assuntos dízimas periódicas, números irracionais na forma decimal e densidade do conjunto dos números reais, formalizando alguns procedimentos e mostrando, não de forma impositiva, as possibilidades de entender questões formais**.**

Alguns conceitos a considerar

Limites: Uma aproximação para séries geométricas infinitas

Pense na representação decimal do número racional $\frac{1}{3}$. Esse número é aproximado por uma sequência de outros números racionais, no qual os índices n vão se tornando cada vez maiores, seguindo os valores consecutivos $1, 2, 3, \ldots$. De uma forma generalizada, pode-se considerar que certo número racional s é aproximado por uma sequência de outros números racionais s_n, sendo n todos os valores consecutivos $1, 2, 3, \ldots$.

Para começar, tome um segmento unitário e divida-o ao meio, pegue uma das metades, e divida-o novamente ao meio. Sempre pegando uma das metades restantes de cada divisão, vá dividindo-o ao meio, ate que os intervalos menores obtidos tenham comprimento de 2^{-n}, no qual n é escolhido arbitrariamente grande; pode-se exemplificar, $n = 1000$, $n = 100000$, ou qualquer número que se desejar.

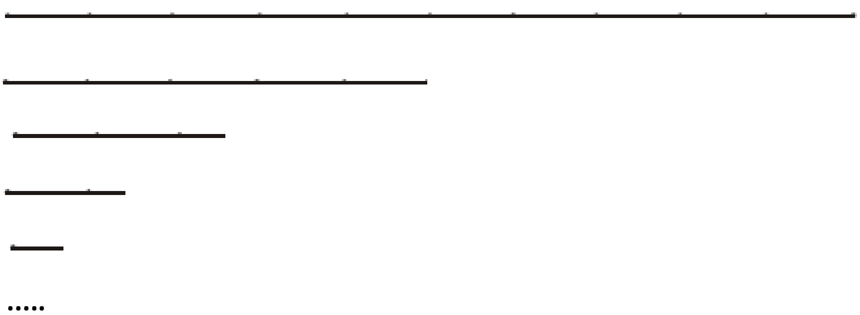

Figura III: Dividindo o segmento unitário ao meio

Adicionando os comprimentos de todos os intervalos exceto o último, obtém-se um comprimento total da sequência S_n, ou seja: $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$.

Considere a sequência S_n para $n = 1$; note que S_1 difere de 1 por $\left(\frac{1}{2}\right)^1$, ou $|S_1 - 1| = \left|\frac{1}{2} - 1\right| = \frac{1}{2}$; para $n = 2$, $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$; S_2 difere de 1 por $\left(\frac{1}{2}\right)^2$, ou $|S_2 - 1| = \left|\frac{3}{4} - 1\right| = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ e para $n = 3$, $S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$; S_3 difere de 1 por $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ ou $|S_3 - 1| = \left|\frac{7}{8} - 1\right| = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$ continuando o mesmo raciocínio acima, observa-se que a sequência S_n, difere de 1 por $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ e esta diferença vai diminuindo, se tornando arbitrariamente pequena, ou tendendo a zero, à medida que n aumenta de forma indefinida. O infinito considerado é o procedimento sem fim, não simbolizando uma quantidade efetiva, logo não faz sentido afirmar que a diferença é zero se n for infinito.

O comportamento da sequência S_n é descrito como a soma S_n aproximando do limite 1 à medida que n tende para o infinito, logo faz sentido a escrita $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots$, no qual à direita tem-se uma série infinita, não significando que efetivamente vai ser adicionado os infinitos termos, pois trata-se apenas de uma expressão, que segundo Courant e Robbins (2000, p. 73) é abreviada para o fato de que 1 é o limite da soma infinita da sequência S_n, à medida que n tende ao infinito.

Nota-se que na igualdade $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots$ a forma de apresentar o símbolo incompleto $(+\cdots)$ é meramente uma estenografia[6] matemática para afirmar precisamente que 1 é o limite à medida que n tende ao infinito da quantidade $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$. Pode-se usar de forma abreviada, a simbologia $S_n \to 1$ quando $n \to \infty$, ou a forma $\lim_{n\to\infty} Sn = 1$. Essa última simbologia é utilizada dentro de um rigor matemático que não será descrito nesta oficina.

Para tornar geral o conceito de limite, considera-se um número q no intervalo de $(-1{,}1)$, logo as potências sucessivas de q, denotada por $q, q^2, q^3, q^4, \ldots, q^n, \ldots$, se aproxima de zero, quando n aumentar. Se q for negativo, haverá uma alternância dos valores das potências de q em valores positivos e negativos, os quais tenderão para zero pela esquerda ou pela direita alternadamente. O limite de q^n, à medida que n tende ao infinito é zero. Simbolicamente indica-se por $q^n \to 0$ com $n \to \infty$, para $-1 < q < 1$.

Se considerar $q > 1$ ou $q < -1$, será que q^n, à medida que n tende a ao infinito, tende a zero? Para uma análise mais detalhada, pode-se pensar em $q = 2$. Escrevendo as potências sucessivas de q, tem-se $2, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots, 2^n, \ldots$, pode-se verificar que os valore crescem, se afastando de zero, logo não tende a zero, porém para uma prova rigorosa da relação $q^n \to 0$ com $n \to \infty$, para $-1 < q < 1$, usa-se da desigualdade de Bernoulli, a qual afirma que $(1 + p)^n \geq 1 + np$, para qualquer

[6] Técnica de escrita abreviada segundo sinais convencionais que permite a rápida transcrição de um discurso (LAROUSSE, 2001, P. 401).

$p > -1$ e n natural. Fixando q entre 0 e 1, tem-se $q = \frac{1}{1+p}$, para $p > 0$. Logo, $\frac{1}{q^n} = (1+p)^n \geq 1 + np > np \Rightarrow \frac{1}{q^n} > np$, ou $0 < q^n < \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{n}$. Logo, pode-se concluir que q^n está situado entre os valores fixos 0 e $\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{n}$, sendo este último se aproximando de zero à medida que n aumenta arbitrariamente sem fim, dado que o ponto p é fixo e evidentemente $q^n \to 0$. No caso de q ser negativo, tem-se $q = -\frac{1}{1+p}$ e os valores fixos se tornam $\left(-\frac{1}{p}\right) \cdot \left(\frac{1}{n}\right)$ e $\left(\frac{1}{p}\right) \cdot \left(\frac{1}{n}\right)$, o invés de 0 e $\left(\frac{1}{p}\right) \cdot \left(\frac{1}{n}\right)$, caso contrário, segundo Courant e Robbins (2000, p.75), o raciocínio não se altera.

Considerando a série geométrica $S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$, sendo $-1 < q < 1$, pode-se expressar a soma S_n de uma forma mais simples e consistente. Esta representação aparece com frequência nos estudos de progressões geométricas que é um dos conteúdos de sequências do ensino médio.

Se multiplicar S_n por q, a igualdade $S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$, passará a ser de forma equivalente $qS_n = q + q^2 + \cdots + q^{n+1}$. Subtraindo as duas igualdades, tem-se $\begin{cases} S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n \\ -qS_n = q + q^2 + \cdots + q^{n+1} \end{cases} \Rightarrow (1-q)S_n = 1 - q^{n+1}$. Multiplicando membro a membro por $(1-q)^{-1}$, tem-se $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q}$. Pelo conceito de limite, aumentando n tem-se $q^{n+1} = q^n \cdot q$ tendendo a zero, logo, passando ao limite $S_n \to \frac{1}{1-q}$ quando $n \to \infty$, para $-1 < q < 1$.

Esta linguagem permite escrever que uma série geométrica infinita $1 + q + q^2 + q^3 + \cdots = \frac{1}{1-q}$, para $-1 < q < 1$. Voltando ao caso em que $q = \frac{1}{2}$, tem-se a série geométrica infinita $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{2-1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.

Considera-se agora a série geométrica $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots$. Colocando o fator $\frac{1}{2}$ em evidência, tem-se $S_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$

O intuito desta oficina é aproximar, tanto ao licenciando quanto ao professor de matemática do ensino fundamental e médio, do desenvolvimento formal das dízimas periódicas e identificar conceitos e caracterizações dadas a este assunto nos livros didáticos do ensino fundamental e médio.

Dízimas periódicas: um olhar diferenciado

Transformação de frações ordinárias em frações decimais infinitas dá origem ao fenômeno curioso das dízimas periódicas, gerando controvérsias, provocando questões e desencadeando problemas.

Como seria a representação decimal infinita e periódica do número 1? Para ilustrar o desenvolvimento das dízimas periódicas, considere o fato de que numa divisão de um número por ele mesmo, cujo resultado é 1, a exigência de que o resto seja sempre menor que o divisor fosse substituída por um fenômeno heterodoxo[7], em que o resto[8] seria igual ao divisor, como por exemplo, na divisão de 5 por 5. Observe:

$$\begin{array}{l|l} 5{,}0 & 5 \\ \cline{2-2} \;\;5 & 0{,}9999... \\ \;\;\;5 & \\ \;\;\;\;..... & \end{array}$$

$5 \div 5 = 0{,}999\ldots$, como $5 \div 5 = 1,$ então é facilmente compreensível que 0,9999... = 1. Na linguagem de série geométrica, escreve-se o número 0,999... como a soma infinita $\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}+\frac{9}{10^4}+\cdots=\frac{9}{10}\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\cdots\right)=\frac{9}{10}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}}\right)=1$. Logo, 0,9999.... = 1.

Ao pensar na representação decimal de um número, seria possível considerar que a decimal finita 0,34 e a decimal infinita 0,33999.... representa o mesmo número? Uma questão a ser discutida e poderia causar dúvidas se não estivesse bem definido o conceito de números decimais.

Pode-se dizer que um número decimal finito pode ser escrito na forma infinita, bastando, para isso, considerar a dízima periódica 0,999... . No caso do exemplo, observa-se que 0,33999... é o mesmo que $\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{9}{10^3}+\frac{9}{10^4}+\cdots=\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{9}{10^3}\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\cdots\right)=\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{9}{10^3}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}}\right)=\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{9}{10^3}\left(\frac{10}{9}\right)=\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{1}{10^2}=\frac{3}{10}+\frac{4}{10^2}=0{,}34.$

---

[7]Heterodoxo é que ou aquele que se manifesta contrário a doutrina ortodoxa ou uma opinião tradicional (LAROUSSE, 2001, P. 509).

[8] Em cada etapa da divisão, o resto considerado é o divisor, divido por 10, isto é, o resto de 5 dividido por 5, na questão acima, não é 5, e sim cinco décimos.

De uma forma generalizada, um número racional inteiro ou decimal finito, pode ser escrito na forma de uma dízima periódica, representando o período desta dízima por 9.

Algumas considerações sobre as dizimas:

Os números racionais $\frac{p}{q}$ que não são frações decimais finitas podem ser desenvolvidos como frações decimais infinitas, realizando o processo elementar do algoritmo da divisão. Em cada etapa, há a necessidade de haver um resto não nulo, pois caso contrário, a fração decimal seria finita.

$$\begin{array}{r|l} p & \qquad q \\ \hline r_i & c, a_1a_2a_3a_4a_5 \ldots a_k\overline{b_1b_2b_3 \ldots b_j} \end{array}$$

Os restos r_i que surgem no processo da divisão serão 1, 2, 3,..., q – 1(todos inteiros), de tal forma que haja no máximo $q - 1$ possibilidades diferentes para valores dos restos, significando que algum resto r aparecerá uma segunda vez, fazendo com que todos os restos subsequente repitam novamente, mostrando que a expressão decimal para qualquer número racional é periódica.

O traço em cima dos dígitos $b_1 \ldots b_j$ indica que esse conjunto repete infinitamente, determinando, dessa forma, o período da dízima. Um exemplo a considerar $\frac{1}{3} = 0{,}33333 \ldots$ outro exemplo é o número racional $\frac{11}{90} = 0{,}1222222 \ldots$..

Na sequência, serão apontadas algumas situações para uma melhor percepção do desenvolvimento das dízimas periódicas, aproximando do formalismo conceitual exigido nos cursos de Análise e abrindo campo para novas considerações.

Considere $p < q$ números primos entre si, logo $\frac{p}{q} = 0, a_1a_2a_3a_4a_5 \ldots a_k\overline{b_1b_2b_3 \ldots b_j}$. Se se multiplicar membro a membro por 10^k, implicar-se-á na seguinte igualdade: $10^k \cdot \frac{p}{q} = a_1a_2a_3a_4a_5 \ldots a_k\overline{, b_1b_2b_3 \ldots b_j} \Leftrightarrow 10^k \cdot \frac{p}{q} = a_1a_2a_3a_4a_5 \ldots a_k + 0\overline{, b_1b_2b_3 \ldots b_j}$.

O número $0\overline{, b_1b_2b_3 \ldots b_j} = \frac{b_1b_2 \ldots b_j}{10^j} + \frac{b_1b_2 \ldots b_j}{10^{2j}} + \frac{b_1b_2 \ldots b_j}{10^{3j}} + \cdots = \frac{b_1b_2 \ldots b_j}{10^j} \cdot \Big(1 + \frac{1}{10^j} +$
1102j+...=b1b2...bj10j·11−110j=b1b2...bj10j·10j10j−1=b1b2...bj10j−1.

Novamente, retorna-se a igualdade $10^k \cdot \frac{p}{q} = a_1a_2a_3a_4a_5 \dots a_k + 0,\overline{b_1b_2b_3 \dots b_j}$ e verifica-se que:

$10^k \ \frac{p}{q} = a_1a_2a_3a_4a_5 \dots a_k + 0,\overline{b_1b_2b_3 \dots b_j} = \ 10^k \ \frac{p}{q} = a_1a_2a_3a_4a_5 \dots a_k + \frac{b_1b_2 \dots b_j}{10^j - 1}$.
Multiplicando membro a membro por $10^j - 1$, tem-se a nova igualdade $(10^j - 1) \cdot$ *10k· pq=(10j−1)·a1a2a3a4a5...ak+b1b2...bj*. Multiplicando membro a membro por q, tem-se: $(10^j - 1) \cdot 10^k \ \cdot p = q \cdot \left[\left(10^j - 1\right) \cdot (a_1a_2a_3a_4a_5 \dots a_k) + (b_1b_2 \dots b_j)\right]$ significando que q é divisor de $(10^j - 1) \cdot 10^k$. Se q for uma potência de 2 ou 5 ou de 2 e 5, então q é divisor de 10^k, e desta forma, o decimal é exato, ou seja, não tem a parte infinita e periódica. Porém se q não for múltiplo somente de 2 e 5, encontra-se a parte periódica, pois q será divisor de $(10^j - 1)$. Um exemplo a destacar é a representação decimal da fração $\frac{1}{6}$. Sabendo que 6 é múltiplo de 2 e 3, logo escreve-se que $2 \cdot 3$ é divisor de $(10^j - 1)10^k$, para $j = 1$ e para $k = 1$. Se se analisar as condições de j e k, pode-se afirmar que a representação decimal da dízima terá um elemento decimal que não repete indefinidamente e um elemento decimal que faz parte do período da dízima. De fato, se se dividir o numerador da fração pelo denominador, será encontrada a representação decimal de $\frac{1}{6} = 0{,}1666 \dots$. Outras situações acompanham o mesmo raciocínio.

A fração que dá origem a dízima é denominada fração geratriz (IEZZI, 2007, p. 12). Dada a dízima periódica $0,\overline{b_1b_2b_3 \dots b_j}$; essa dízima é considerada simples, pois o período inicia-se imediatamente logo após a vírgula. Considere m, sendo a geratriz desta dízima. A forma geral de encontrar m é dada por $m = \frac{b_1b_2 \dots b_j}{10^j - 1}$, logo, se período tiver 4 termos, ou seja, $j = 4$, o denominador da dízima será $10^4 - 1 = 9999$. Isso explica o fato da geratriz da dízima periódica simples apresentar noves em seu denominador.

Aplicando o conceito anterior, ao exemplo que segue, encontra-se a geratriz da dízima 0,161616... Sabendo que o período é 16 e que $j = 2$, pois j corresponde à quantidade de algarismos do período, tem-se $\frac{16}{10^2 - 1} = \frac{16}{100 - 1} = \frac{16}{99}$.

Quando, logo após a vírgula, uma parte, sendo um algarismo ou um grupo de algarismos não se repete, ou seja, não pertence ao período tem-se as dízimas periódicas compostas, fazendo, como o próprio nome diz uma composição entre não-período e período. Essas dízimas de forma geral, são representadas por $0, a_1a_2a_3a_4a_5 \ldots a_k\overline{b_1b_2b_3 \ldots b_J}$.

Considere n, geratriz da dízima composta $0, a_1a_2a_3a_4a_5 \ldots a_k\overline{b_1b_2b_3 \ldots b_J}$; a forma geral de escrever n é dada por $n = \frac{\left[(10^j-1)(a_1a_2a_3a_4a_5 \ldots a_k)+b_1b_2 \ldots b_j\right]}{(10^j-1)10^k}$. Como exemplo, a dízima 0,16666... tem como geratriz $n = \frac{\left[(10^1-1)\cdot 1 \quad +6\right]}{(10^1-1)10^1} = \frac{9\cdot 1+6}{9\cdot 10} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$.

A proposta não é substituir a ideia de usar as séries geométricas para encontrar frações geratrizes, mas elucidar situações que ocorrem em salas de aulas de matemática. Cabe ao professor decidir qual a melhor forma de trabalhar com suas turmas, ficando claro que esta oficina serve como apoio para as práticas pedagógicas.

Guias de trabalho

1ª etapa: Apresentação e comentários

Representação decimal de um número real α não negativo é uma expressão que se caracteriza pela forma $\alpha = \sum_{I=0}^{\infty} \frac{a_i}{10^i}$, que pode ser escrita compactamente como $\alpha = a_0, a_1a_2a_3 \ldots a_n \ldots$, em que a_0 é um número inteiro maior ou igual a zero e os índices $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ são dígitos, ou seja, são números inteiros tais que $0 \leq a_n \leq 9$.

As frações que tem 10, 100, 1000 no denominador podem ser representadas na forma decimal. Essas frações são denominadas frações decimais. Com relação a fração decimal, sua representação decimal é finita, logo $\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = 0{,}4$ e $\frac{9}{8} = \frac{1125}{1000} = 1{,}125$.

Todas as frações equivalentes às frações decimais têm denominadores que podem ser escritos como potências de 2 ou 5, ou de 2 e 5. Se houver algum denominador que apresenta, pelo menos um fator diferente de 2 e 5, então a fração não pode ser equivalentemente escrita na forma de fração decimal.

2ª etapa: Atividades

1) Faz sentido escrever 1/3 = 0,33333...? Qual o sentido de infinitas casas decimais?

Discussão: De acordo com os PCN´s (1998) de matemática para o ensino fundamental, as dificuldades encontradas no processo de aprendizagem dos números racionais, em especial, dos decimais finitos e infinitos se deve ao fato de que a aprendizagem dos números racionais supõem rupturas com ideias construídas para os números naturais. Ao trabalhar como os números racionais, os alunos acabam tendo que enfrentar obstáculos dos quais se destaca a representação do número racional na forma finita e infinita.

2) Escreva $12{,}314157\overline{237}$ na forma $\frac{a}{b}$.

Discussão: Ao se observar cálculos numéricos com aproximações, observa-se que no campo dos racionais ocorrem duas representações, a fracionária e a decimal, sendo essa última, finita ou infinita periódica (BRASIL, 1998).

3) Mostre que 0,999...= 1. E que 2,5 = 2,4999... e 1,48 = 1,47999...

Discussão: As representações infinitas (tanto de racionais como de irracionais) dão origem ao problema da aproximação numérica, mostrando a necessidade de considerar apenas um número finito de ordens decimais na representação do número. Essa é uma oportunidade apropriada para se abordar o conceito de arrendamento e as consequências nos resultados das operações (BRASIL, 1998).

4) Responda, justificando a resposta. A representação decimal de 3/17 é infinita e periódica? Caso afirmativo, quantos algarismos têm o período dessa dízima?

Discussão: Destacam-se as importâncias de centrar as situações de aprendizagem na elaboração de estratégias. De acordo como PCN´s de matemática do ensino fundamental (1998), é preciso que o aluno desenvolva processos importantes como intuição, analogia, indução e dedução, e não atividades voltadas para a memorização, desprovidas de compreensão ou de um trabalho que privilegie uma formalização precoce dos conceitos.

5) Existe algum número real entre $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$? E entre 0,333... e 0,444...? Justifique suas respostas. Como seria representação decimal dos números $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$?

Discussão: Um conjunto é denso, se, entre dois de seus elementos quaisquer, exista uma infinidade de elementos do mesmo conjunto (CARAÇA, 1951, p. 56).

As discussões são apenas nortes motivadores para o desenvolvimento do debate que se abrirá depois de respondidas às questões.

3º tempo: Debate final

Nesta etapa, serão discutidos os pontos formais na apresentação das representações decimais, buscando refletir sobre como pode ser trabalhado esse assunto, associado às aulas de Análise Real nos cursos de licenciatura.

<table>
<tr><th colspan="2">INFORMAÇÃO GERAL</th></tr>
<tr><td colspan="2">Título da oficina: Um olhar para as dízimas periódicas: convite ao professor do ensino fundamental e médio</td></tr>
<tr><td colspan="2">Instituições dos autores: Universidade Federal de Juiz de Fora</td></tr>
<tr><td colspan="2">Nome dos autores: Willian José da Cruz e Carlos Alberto Santana Soares</td></tr>
<tr><td colspan="2">País ou países dos autores: Brasil</td></tr>
<tr><td>Número de horas mais convenientes:</td><td>3 horas</td></tr>
<tr><td>Nível de escolarização para o qual será dirigido (educação infantil, anos iniciais do ensino, Anos finais do ensino fundamental, ensino médio, ensino superior, ou geral).</td><td>ensino fundamental e médio</td></tr>
<tr><td>Número máximo de pessoas.</td><td>20 pessoas</td></tr>
<tr><td>Equipamentos audiovisuais ou informáticos necessários (Projetor multimídia, TV)</td><td>Projetor multimídia, computador</td></tr>
</table>

REFERÊNCIAS

ÁVILA, Geraldo Severo de Souza. **Análise matemática para licenciatura.** 3ª ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2006.

BARTLLE, Robert G. **Elementos de Análise Real**. Tradução de Alfredo A. de Farias. – Rio de Janeiro: Campus, 1983.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática** / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília : MEC /SEF, 1998, 148 p.

BRASIL. Secretaria de Educação Média. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. v 2. Brasília: MEC, 1998.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa, 1951.

COURANT, Richard e ROBBINS, Herbert. **O que é Matemática?** Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna LTD, 2000.

DANTE, Luiz Roberto. **Tudo é matemática**. (Coleção do ensino fundamental). São Paulo: Ática, 2009.

_______. **Matemática**. (Ensino médio – volume único). São Paulo: Ática, 2009.

GIOVANNI, José Ruy Junior e CASTRUCCI, Benedito. **A conquista da matemática**. (coleção do ensino fundamental). São Paulo: FTD, 2009.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto. **Matemática**. (Ensino médio – volume único). 4ª ed. São Paulo: Atual, 2007.

IGLIORI, S. B. C.; SILVA, B. A. **Concepções dos alunos sobre números reais.** In: LAUDARES, João Bosco, LACHINI, Jonas. *Educação matemática: a prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo.* Belo Horizonte: FUMARC, 2001. p. 39-67.

LAROUSSE, Ática: **Dicionário da língua portuguesa** – São Paulo: Ática, 2001.

LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise; v.1. 12 ed**. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2009.

_______. **Explorando o ensino da Matemática:** artigos: volume 1 Brasília : Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2004. 240 p.

MOREIRA, Plínio Cavalcanti e DAVID Maria Manuela Martins Soares **A formação matemática do professor.** Belo Horizonte: Autentica, 2005.

_______. **O conhecimento matemático do professor.** (Artigo), Revista Brasileira de Educação nº 28, 2005.

_______. **Matemática escolar, matemática científica, saber docente e formação de professores.** (Artigo), Revista Zetetike - Cempem – FE – Unicamp – v.11 – n. 19, - Jan./Jun. 2003.

MOREIRA, Plínio Cavalcanti; CURY, Helena Noronha; VIANNA, Carlos Roberto. **Por que análise real na licenciatura?** (Artigo), Revista Zetetike - Cempem – FE – Unicamp – v.11 – n. 23, - Jan./Jun. 2005.

PENTEADO, C. B; **Reações de Professores do Ensino Médio frente a questões relativas à Densidade dos Números Reais**, CIEM, 2000.

PENTEADO Cristina Berndt; SILVA, Benedito Antonio da; **O estudo da densidade dos números reais no ensino médio**. in: anais IX ENEM – encontro nacional de educação matemática, Rio de Janeiro, 2007**.**

PENTEADO, Cristina Berndt; **Percepções dos professores do ensino médio relativas a densidade do conjunto dos números reais e suas reações frente a procedimentos para a abordagem desta propriedade.** 2004. 247 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática/PUC – São Paulo.

REIS, F. S. **A tensão entre rigor e intuição no ensino de cálculo e análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos**. 2001. 604 f. Tese (Doutorado em Educação) - FE/Unicamp, Campinas (SP), 2001.

_______. **Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates**. Recife: SBEM, 2009.p. (81 – 97).