UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
Pós-Graduação em Educação Matemática
Mestrado Profissional em Educação Matemática

Vitor Rezende Almeida

Álgebra Linear como um Curso de Serviço: o Estudo das Transformações Lineares

Orientadora: Profa. Dra. Cristiane de Andrade Mendes
Coorientador: Prof. Dr. Amarildo Melchiades da Silva

Juiz de Fora (MG)

2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
Pós-Graduação em Educação Matemática
Mestrado Profissional em Educação Matemática

Vitor Rezende Almeida

Álgebra Linear como um Curso de Serviço: o Estudo das Transformações Lineares

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Cristiane de Andrade Mendes
Coorientador: Prof. Dr. Amarildo Melchiades da Silva

Juiz de Fora (MG)

2013

COMISSÃO EXAMINADORA

Profª. Dra. Cristiane de Andrade Mendes (Orientadora)

Prof. Dr. Amarildo Melchiades da Silva (Coorientador)

Profª. Dra. Viviane Cristina Almada de Oliveira

Profª. Dra. Janete Bolite Frant

Prof. Dr. Antonio Olimpio Junior

Juiz de Fora, 14 de Novembro de 2013.

RESULTADO: Aprovado

AGRADECIMENTOS

Penso que um trabalho como este não se faz sozinho. Ainda que a responsabilidade pelos erros e omissões seja minha, uma vez que sou o autor desta dissertação e boa parte do que está aqui escrito seja fruto das minhas crenças e reflexões, há pessoas que colaboraram com sua elaboração de tal forma que preciso creditar uma parte do resultado a elas. De alguma forma, tenho de ordenar os agradecimentos, por isso uns virão à frente de outros; entretanto, agradeço a todos com o mesmo sentimento. Então agradeço:

À minha orientadora Cristiane que desde os meus primeiros passos no mestrado, esteve ao meu lado e acreditou no meu trabalho. Não poderia ser guiado por mãos melhores que as suas.

Ao professor, coorientador, guru e amigo Amarildo, por ter sido principal idealizador desta dissertação. Foi somente por meio de suas ideias e orientações, fui capaz de concluir este trabalho.

Faço minha referência ao professor Romulo Lins, por transformar, por meio do Modelo dos Campos Semânticos, minha forma de ver o mundo e principalmente refletir sobre minha prática profissional.

À professora Viviane que aceitou fazer parte desse trabalho como membro da banca. Sua contribuição foi ainda maior que suas sugestões na qualificação e na defesa: você serviu de exemplo para mim.

À Aretha com a qual trabalhamos de forma cooperativa e amiga ao longo de todo este trabalho.

À todos professores, colegas do Mestrado Profissional em Educação Matemática da UFJF. Este trabalho tem pedaços de nossas vivências.

Aos meus colegas de todas as escolas em que trabalho e trabalhei, em especial aos amigos das escolas Hermenegildo Vilaça e do Dante Jaime. Grande parte do profissional e homem que sou hoje devo ao meu dia a dia com vocês.

Aos sujeitos de pesquisa, que participaram da pesquisa e são peças fundamentais deste trabalho.

À todos meus alunos que, talvez de forma inconsciente, são a causa e motivo deste trabalho.

Aos meus amigos que apesar de ficarem bravos com minhas desculpas esfarrapadas de não ter tempo (e não tinha mesmo), sempre estiveram ao meu lado em meus pensamentos e nas mais divertidas lembranças. Valeu moçada!

À todos meus parentes, em especial à minha madrinha Nilza e meu primo afilhado Guilherme, por estarem sempre ao meu lado.

Ao meu irmão caçula e verdadeiro amigo Cícero. Obrigado por todos nossos momentos e por ser uma das pessoas que mais acreditou em mim. Te amo meu irmão!

Ao meu pai Márcio, que sempre esteve ao meu lado e que sempre desejei que sentisse orgulho de mim. Toda essa calma que tenho hoje acho de devo creditar e agradecer a você, pois se puxasse minha mãe, certamente teria surtado com tantas datas e compromissos. Obrigado meu pai!

À minha amiga, companheira, namorada e amor: Vanessa. Você esteve presente em todos os momentos neste mestrado e teve a paciência e o carinho necessários para entender todas as dificuldades que passei. Você me incentivou e foi capaz de ficar ao meu lado sempre, mesmo quando estava caindo de sono. Tenho a certeza que minha caminhada é, e sempre será, ao seu lado. Eu te amo.

Por fim, à minha mãe Marta. Foi sua voz no meu ouvido ao longo de todos os dias de minha vida que me trouxe até aqui. Você é de longe a quem mais credito este trabalho. Só faltou você sentar na minha mesa e digitar o trabalho para mim, pois você ao longo desses anos SEMPRE esteve ao meu lado, me apoiou em TUDO que estava ao seu alcance. Para você mãezinha, meus mais sinceros e puros agradecimentos.

“Você deve ser a própria mudança que deseja ver no mundo"

Mahatma Gandhi

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

RESUMO

Neste trabalho investigamos quais são as características que deve possuir a disciplina Álgebra Linear para que ela seja considerada um Curso de Serviço para uma Licenciatura em Matemática. Caracterizamos esta pesquisa pelo desenvolvimento de uma abordagem qualitativa de investigação, na qual realizamos uma leitura de entrevistas com alunos de uma Pós-Graduação em Educação Matemática, projetamos, executamos e analisamos um Seminário de Álgebra Linear com alunos de uma Licenciatura em Matemática. A leitura da produção de significados de todos envolvidos nesta pesquisa foi desenvolvida tomando como referencial o Modelo dos Campos Semânticos. O produto educacional, elaborado a partir dessa investigação, é uma proposta de ensino do conteúdo transformação linear direcionada para a formação matemática de estudantes da Licenciatura em Matemática, entendendo a disciplina Álgebra Linear como um Curso de Serviço.

Palavras-Chave: Educação Matemática. Curso de Serviço. Licenciatura em Matemática. Formação de Professores. Álgebra Linear.

ABSTRACT

In this work, we investigate which characteristics the discipline Linear Algebra must have to be considered a Service Course for a Major in Mathematics. We characterize this research by developing a qualitative research approach in which we put into practice a reading of interviews with students of a Graduate course in Mathematics Education, and besides, we developed, put into practice and analyzed a Seminary on Linear Algebra with students of a Mathematics course. The reading of the meanings produced by all involved in this research was developed taking as a reference the Model of Semantic Fields. The educational product, drawn from this research, is a proposal for teaching in linear transformation directed to students in Mathematics who are preparing themselves to be teachers, understanding the discipline Linear Algebra as a Service-Course.

Keywords: Mathematics Education. Service Course. Major in Mathematics. Teacher Training. Linear Algebra.

INTRODUÇÃO

O interesse de desenvolver esta pesquisa emergiu no interior do NIDEEM/UFJF (Grupo de Investigação, Desenvolvimento e Estudos em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora), no subgrupo de estudo constituído pelos professores do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora Amarildo Melchiades da Silva e Cristiane de Andrade Mendes, por mim e pela licenciada em Matemática Aretha Fontes Alves. O objetivo do grupo era pesquisar os processos de ensino e aprendizagem em disciplinas do Ensino Superior e a formação matemática do professor de Matemática, em particular, em relação à disciplina Álgebra Linear.

Com o meu ingresso e o ingresso da Aretha no programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática da UFJF no ano de 2011, os estudos do grupo tornaram-se propostas de pesquisa para nós. Após conversas com os membros do grupo, ficou decidido que o ideal seria que cada um dos alunos delimitasse sua pesquisa em algum dos conteúdos centrais da Álgebra Linear. Dessa forma, considerando a experiência de cada aluno em relação à disciplina e às suas práticas profissionais, decidiu-se que a mestranda Aretha trabalharia, especificamente, com os Espaços Vetoriais e eu ficaria com o estudo das Transformações Lineares. Desde então, os mestrandos trabalharam de forma conjunta em suas pesquisas.

Tomados pela questão da formação matemática do licenciando em Matemática em relação à disciplina Álgebra Linear, procuramos, num primeiro momento, compreender as características da formação do professor de Matemática, buscando informações nos documentos oficiais atuais que regulam a formação dos professores de Matemática no Brasil. Em seguida, procuramos pesquisas relacionadas com nossa inquietação. Foi então que convergimos com a proposta de pesquisa dos professores Amarildo Melchiades da Silva e Romulo Campos Lins, bem como alguns dos trabalhos orientados por eles. Em particular, Silva, que coorientou esta pesquisa, nos forneceu um suporte que consideramos indispensável para a pesquisa: a constituição de Cursos de Serviço.

A terminologia Curso de Serviço surgiu para denominar as disciplinas voltadas para a formação em uma área específica. Entretanto, utilizaremos a caracterização de Curso de Serviço como vista em Silva (2011) e Procópio (2011), nos quais esses cursos são caracterizados como sendo as disciplinas de conteúdo matemático que também se preocupam com a formação didática e pedagógica do futuro professor de Matemática.

Para fundamentar epistemologicamente nossa pesquisa, assumimos como pressupostos as noções do Modelo dos Campos Semânticos (MCS) proposto por Lins (1994, 1999, 2001, 2012) e presente em Silva (2003), e a Teoria da Atividade de Leontiev (1978).

Ao longo deste trabalho, buscamos responder à questão de investigação que orientou nossa pesquisa: "**quais características que deve possuir a disciplina Álgebra Linear para que ela seja considerada um Curso de Serviço para uma Licenciatura em Matemática?**". Em particular, nosso foco foi direcionado para a noção de transformação linear em Álgebra Linear.

Assim, o presente trabalho tem a seguinte estrutura:

No capítulo 1 - *A Proposição do Problema de Pesquisa* - situamos nossa questão de investigação no campo da Educação Matemática e refinamos nosso olhar acerca da formação do professor de Matemática. Além disso, neste capítulo, esclarecemos alguns dos pressupostos teóricos que orientaram e deram suporte para nossas análises: o Modelo dos Campos Semânticos (MCS) e a Teoria da Atividade.

O capítulo 2 – *Uma Revisão da Literatura* - é dedicado à revisão da literatura relacionada com nossa pesquisa. Esta revisão foi dividida em três seções: as pesquisas relacionadas à produção de significados em Álgebra Linear; as pesquisas relacionadas à constituição de Cursos de Serviço e; as pesquisas relacionadas à formação Matemática do professor de Matemática.

No capítulo 3 - *Metodologia da Pesquisa* – começamos por caracterizar a perspectiva metodológica que utilizamos ao longo desta pesquisa: a pesquisa qualitativa. Na segunda seção, descrevemos como foi elaborada e executada nossa entrevista. Esta entrevista teve como objetivo refinar nosso olhar a respeito das possíveis contribuições da disciplina Álgebra Linear na formação de três professores de Matemática e ajudar na elaboração do Seminário de Álgebra que projetamos. Finalizando este capítulo, esclarecemos nossa proposta de Seminário de Álgebra Linear para alunos de uma Licenciatura em Matemática. Nessa seção, descrevemos nossas posições metodológicas, os instrumentos utilizados na investigação, as condutas que orientaram nossas ações, a descrição dos sujeitos de pesquisa, o conjunto de tarefas que foram aplicadas e a dinâmica da execução do Seminário.

No Capítulo 4 - *Leitura da produção de significados: Entrevista* – apresentamos nossa leitura da produção de significados produzidos pelos três alunos envolvidos na entrevista mencionada anteriormente. Toda esta análise teve como suporte teórico o MCS.

O Capítulo 5 - *Leitura da produção de significados: Seminário de Álgebra Linear* – é dedicado à nossa leitura da dinâmica do Seminário de Álgebra Linear para alunos de uma Licenciatura em Matemática, em particular, em relação à noção de transformação linear. Como realizado na entrevista, todas as análises e leituras das produções de significados dos sujeitos de pesquisa foram embasadas no Modelo dos Campos Semânticos.

No Capítulo 6 - *Um Curso de Serviço para o Estudo das Transformações Lineares em Álgebra Linear* – de posse das informações coletadas em nossa revisão da literatura, de nossas análises da entrevista e, principalmente, do Seminário de Álgebra Linear, tecemos nossas conclusões dos resultados da pesquisa. Na segunda seção, respondemos a questão de investigação que orientou nossa pesquisa, enunciando as características que, acreditamos, deve possuir a disciplina Álgebra Linear para ser considerada um Curso de Serviço para uma Licenciatura em Matemática. Num terceiro momento, descrevemos nossa proposta de ensino de transformações lineares para a formação matemática de estudantes da Licenciatura em Matemática.

Nas *Considerações Finais*, retomamos e apresentamos, de forma sucinta, as etapas que compuseram nosso trabalho, os novos questionamentos que surgiram ao longo de nosso percurso e as perspectivas relacionadas ao nosso trabalho. Finalizamos nossas considerações indicando algumas novas questões de investigação relacionadas à formação matemática de professores de Matemática oriundas de nosso estudo.

CAPÍTULO 1
A PROPOSIÇÃO DO PROBLEMA DE PESQUISA

1.1. A Formação Matemática do Professor de Matemática

Incomodados com a questão da formação do professor de Matemática em relação a uma disciplina considerada de conteúdo matemático comum às modalidades de licenciatura e bacharelado, a Álgebra Linear, buscamos uma filiação que pudesse refinar nosso olhar sobre as características de um curso de Álgebra Linear, voltado para uma Licenciatura em Matemática, em relação ao estudo das Transformações Lineares, no qual fosse possível aproximar este curso de conteúdo matemático em um curso de Educação Matemática.

A partir deste interesse, tentamos buscar subsídios para fundamentar nossa proposta de pesquisa nos documentos oficiais. Ao procurar pelos programas oficiais atuais que tratam da formação dos professores de Matemática do Brasil, deparamo-nos com as Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura, o Parecer 1302/2001 (BRASIL, 2001). Este documento tem o objetivo de "servir como orientação para melhorias e transformações na formação do Bacharel e do Licenciado em Matemática" (BRASIL, 2001, p.1).

Segundo o Parecer 1302/2001, os cursos de Bacharelado e de Licenciatura em Matemática têm objetivos explicitamente distintos. De acordo com esse documento, os cursos de Bacharelado em Matemática "existem para preparar profissionais para a carreira de ensino superior e pesquisa, enquanto os cursos de Licenciatura têm como principal objetivo a formação de professores para a Educação Básica" (BRASIL, 2001, p.1).

Assim, para esclarecer as distinções entre os bacharelados e as licenciaturas, este documento estabelece o "Perfil do Formando" de cada modalidade. Enquanto o perfil do formando do bacharelado em Matemática reside na "sólida formação de conteúdos de Matemática e em uma formação que lhes prepare para enfrentar os desafios das rápidas transformações da sociedade, do mercado de trabalho e das condições de exercício profissional" (BRASIL, 2001, p.3), o perfil do formando da Licenciatura consiste nos seguintes elementos:

> (i) visão de seu papel social de educador e capacidade de se inserir em diversas realidades com sensibilidade para interpretar as ações dos educandos; (ii) visão da contribuição

> que a aprendizagem da Matemática pode oferecer à formação dos indivíduos para o exercício de sua cidadania; (iii) visão de que o conhecimento matemático pode e deve ser acessível a todos, e consciência de seu papel na superação dos preconceitos, traduzidos pela angústia, inércia ou rejeição, que muitas vezes ainda estão presentes no ensino aprendizagem da disciplina. (BRASIL, 2001, p.3).

Em relação às habilidades do bacharel e do licenciado em Matemática, as seguintes competências são comuns:

> a) capacidade de expressar-se escrita e oralmente com clareza e precisão; b) capacidade de trabalhar em equipes multidisciplinares; c) capacidade de compreender, criticar e utilizar novas idéias e tecnologias para a resolução de problemas; d) capacidade de aprendizagem continuada, sendo sua prática profissional também fonte de produção de conhecimento; e) habilidade de identificar, formular e resolver problemas na sua área de aplicação, utilizando rigor lógico-científico na análise da situação-problema; f) estabelecer relações entre a Matemática e outras áreas do conhecimento; g) conhecimento de questões contemporâneas; h) educação abrangente necessária ao entendimento do impacto das soluções encontradas num contexto global e social; i) participar de programas de formação continuada; j) realizar estudos de pós-graduação; k) trabalhar na interface da Matemática com outros campos de saber. (BRASIL, 2001, p.3-4).

Já as seguintes características competem apenas aos licenciandos em Matemática:

> a) elaborar propostas de ensino-aprendizagem de Matemática para a educação básica; b) analisar, selecionar e produzir materiais didáticos; c) analisar criticamente propostas curriculares de Matemática para a educação básica; d) desenvolver estratégias de ensino que favoreçam a criatividade, a autonomia e a flexibilidade do pensamento matemático dos educandos, buscando trabalhar com mais ênfase nos conceitos do que nas técnicas, fórmulas e algoritmos; e) perceber a prática docente de Matemática como um processo dinâmico, carregado de incertezas e conflitos, um espaço de criação e reflexão, onde novos conhecimentos são gerados e modificados continuamente; f) contribuir para a realização de projetos coletivos dentro da escola básica. (BRASIL, 2001, p.4).

Dentre as competências referentes aos licenciandos em Matemática, destacamos os itens (d) e (e), pois convergem com nossas preocupações centrais relacionadas com formação do professor de Matemática. Para nós, o professor de Matemática em sua prática profissional não deve orientar-se apenas por fórmulas ou técnicas, mas sim pela preocupação em utilizar metodologias alternativas de ensino que propiciem aos alunos uma oportunidade de leitura e ampliação dos modos de produção de significados deles, considerando a prática docente como um processo dinâmico, onde não só os conteúdos e noções matemáticos estão envolvidos.

Entre as orientações para a proposta de currículo, que podem ser distribuídas ao longo do curso de cada Instituição de Ensino Superior nas modalidades de formação, observamos que a disciplina Álgebra Linear está presente em ambas. Entretanto, corroborando com as ideais de Linardi (2006), acreditamos que tanto no bacharelado, quanto na licenciatura em Matemática, essas disciplinas são ministradas somente sob uma perspectiva: a do matemático, pois:

> No Brasil, grande parte dos futuros professores de matemática realiza, em sua formação, cursos sobre Cálculo, Álgebra Abstrata, Álgebra Linear, Análise, Espaços Métricos, Topologia e assim por diante, ministrados quase sempre na perspectiva da Matemática do matemático, ou seja, o que ainda se espera dos alunos-professores é a reprodução dos modos definicional, internalista e simbólico de produção de significado. (LINARDI, 2006, p. 187).

E ainda:

> [...] as disciplinas matemáticas nos cursos de licenciatura, mesmo aquelas voltadas para a educação básica, são tratadas de forma internalista, excessivamente rigorosa e preocupadas com o uso preciso da linguagem matemática, não considerando as necessidades específicas da formação e da futura prática docente. (PROCÓPIO, 2011, p.23).

Procurando por uma filiação que tratasse a Álgebra Linear em uma perspectiva diferente da atual, deparamo-nos com a noção de Curso de Serviço. A princípio, a terminologia Curso de Serviço era utilizada para caracterizar apenas as disciplinas de conteúdo matemático voltadas para áreas específicas como, por exemplo, Cálculo para Geologia (CABRAL & CATAPANI, 2003) ou Álgebra Linear para a Ciência da Computação (SILVA, 1999), só para citar dois exemplos de pesquisas no Brasil.

Entretanto, para esta pesquisa, utilizaremos a terminologia Curso de Serviço para denotar "as disciplinas que tenham como foco a formação do professor de matemática, mas que não se limitam a desenvolver conteúdo matemático. Ela se propõe a intervir, também, na sua formação didático-pedagógica" (SILVA, 2011, p.2), visto que consideramos que as perspectivas de um curso de Álgebra Linear voltado para o Bacharel em Matemática são distintas de um curso de Álgebra Linear para a Licenciatura em Matemática.

Neste sentido, na próxima seção, enunciamos nosso problema de pesquisa e caracterizamos sua importância no contexto da formação de professores no Brasil e nas pesquisas em Educação Matemática.

1.2. O Problema de Pesquisa e as Questões de Investigação

Como visto na seção anterior, nosso problema de pesquisa se encontra na formação matemática do licenciando em Matemática, especificamente em relação à disciplina Álgebra Linear. Dessa forma, nosso problema de pesquisa pode ser sintetizado nas seguintes questões de investigação:

i. Investigar quais características que deve possuir a disciplina Álgebra Linear para que ela seja considerada um Curso de Serviço para uma Licenciatura em Matemática.
ii. Desenvolver uma proposta de ensino do conteúdo Transformações Lineares para a formação matemática de estudantes da Licenciatura em Matemática, entendendo a disciplina Álgebra Linear como um Curso de Serviço (Produto Educacional).

Para a investigação das possíveis características da disciplina Álgebra Linear para que ela seja considerada um Curso de Serviço para uma Licenciatura em Matemática, foram propostas duas ações: inicialmente, realizamos uma entrevista com alunos de um curso de Pós-Graduação em uma universidade pública brasileira, com a intenção de obter informações relacionadas com a produção de significados para a noção de transformações lineares em Álgebra Linear e sobre a formação matemática dos sujeitos de pesquisa. Num segundo momento, projetamos, executamos e realizamos uma leitura de uma proposta da disciplina Álgebra Linear, com ementa livre, realizada na modalidade de Seminário, na mesma universidade pública, para alunos de Licenciatura em Matemática. Detalhamos a metodologia dessas propostas de pesquisa no capítulo 3 deste trabalho.

As informações obtidas em nossas análises nos forneceram subsídios para a elaboração de um material didático para o professor de Matemática que leciona Álgebra Linear para uma Licenciatura em Matemática. Devido ao fato desta pesquisa estar inserida em um programa de Mestrado Profissional, caracterizamos este material de apoio como sendo nosso produto educacional.

Na próxima seção esclarecemos os pressupostos teóricos que assumimos nesta pesquisa.

1.3. Pressupostos Teóricos

1.3.1 O Modelo dos Campos Semânticos

> Onde estão meus alunos? Não sei, mas preciso saber. Não por eles, mas por mim. Se eu não conseguir falar com eles, só me resta espiá-los desde aqui, onde nós estamos, à busca de uma *fatalidade*, uma *coincidência* que faça algum deles vir até onde nós esperamos. (LINS, 2011, p. 324, grifos do autor).

A citação acima, retirada do artigo *Ensaio sobre como Macunaíma me ajudou a falar sobre Educação Matemática,* traz à tona uma de nossas preocupações centrais em relação ao papel do professor de Matemática em sua sala de aula. Lins acredita que o centro da prática do professor de Matemática é a "leitura do que os alunos estão dizendo/fazendo de modo que a interação possa acontecer" (LINS, 2004c, tradução nossa). Mas como realizar essa leitura dos alunos com a intenção de interagir em seus processos de aprendizagem e não apenas ficar esperando alguma “coisa” acontecer? Assim, sentindo a necessidade de um suporte teórico e epistemológico para embasar nossas leituras dos processos de produção de significados dos indivíduos, falaremos um pouco sobre as noções do referencial teórico que orientou toda esta pesquisa, o Modelo dos Campos Semânticos.

O Modelo dos Campos Semânticos (MCS) começou a ser concebido pelo professor Romulo Campos Lins em sua tese de doutoramento em Educação Matemática intitulada: *A framework for understanding what algebraic thinking is* (Um quadro de referência para entender o que é pensamento algébrico) e concluída na University of Nottingham (UK) em 1992. Neste trabalho, Lins procurou estabelecer uma caracterização para o pensamento algébrico.

Algumas das noções do atual modelo já estavam presentes em sua tese de doutoramento, mas não de forma explícita. Em junho de 1994, Lins publicou na revista *Dynamis* (BLUMENAU, v.1, n.7) o primeiro artigo enfatizando o MCS: *O Modelo Teórico dos Campos Semânticos: uma análise epistemológica da Álgebra e do pensamento algébrico*.

O MCS foi caracterizado por Lins como sendo:

> [...] uma simples, ainda que poderosa, ferramenta para pesquisa e desenvolvimento na educação matemática [...] para guiar práticas de sala de aula e para habilitar professores a produzir uma leitura suficientemente fina, assim útil, do processo de produção de significados em sala de aula. (LINS, 2001, p. 59).

Mais recentemente, fortalecendo sua crença de que o MCS é exatamente uma ferramenta para a pesquisa e desenvolvimento da Educação Matemática, Lins caracterizou o modelo como constituído por “um pequeno número de noções e nas relações entre elas, [...] o Modelo apenas existe enquanto está em movimento, em ação” (LINS, 2012).

Com a intenção de esclarecer algumas destas noções do MCS, apresentamos um breve glossário das ideias centrais do Modelo dos Campos Semânticos, que utilizamos ao longo de nossa leitura da produção de significados dos sujeitos envolvidos nesta pesquisa.

Significado e Objeto

Segundo Lins, o “significado de um objeto é aquilo que <u>efetivamente</u> se diz a respeito de um objeto no interior de uma atividade[1]” Já objeto, “é aquilo

[1] A noção de atividade será trabalhada na seção 1.3.2 A Teoria da Atividade.

para que se produz significados” (LINS, 2012, p.28, grifo do autor). Como consequência disso, dizemos que um indivíduo produziu significados quando ele produziu ações enunciativas a respeito de um objeto no interior de uma atividade.

No MCS, um objeto pode ser qualquer coisa sobre a qual uma pessoa está falando, seja ela "concreta", por exemplo, uma mesa em nossa frente, ou "simbólica", como, por exemplo, palavras e desenhos em um livro. Desta forma, os objetos são constituídos na produção de significados, durante a fala dos sujeitos, no interior de uma atividade.

Para o MCS, “não existe o significado de um “objeto” sem referência ao contexto em que se fala de um objeto” (LINS, 2012, p. 28, grifo do autor). Para Lins, o significado é sempre uma noção local.

Sendo assim, o “significado de um objeto, no interior de uma atividade, não é tudo que poderia ser dito a respeito da coisa da qual se fala (nesta ou em outra atividade)” (LINS, 2012, p.28). Isto remete a situações nas quais determinados modos de produzir significado fazem sentido, são legítimos, e em outros não, pois “qualquer dada cultura aceita alguns, mas nunca todos os modos possíveis de produzir significados” (LINS e GIMENEZ, 1997, p. 143).

Conhecimento

“Um conhecimento consiste em uma crença-afirmação (o sujeito enuncia algo em que acredita) junto com uma justificação (aquilo que o sujeito entende como lhe autorizando a dizer o que diz)” (LINS, 2012, p.12).

Para Lins, o conhecimento existe apenas e simplesmente na enunciação e deixa de existir quando ela termina. Já a justificação, não é uma justificativa ou uma explicação para o que um sujeito diz, mas sim, aquilo em que o sujeito acredita que o autoriza a dizer o que diz. Essa autoridade não tem a função de explicar, ela apenas empresta legitimidade ao que o sujeito diz.

A legitimidade da qual falamos “[...] se refere a que quando falamos algo – e agimos de acordo com o que dizemos – acreditamos que é *legítimo* dizer o que estamos dizendo” (LINS, 2004, p. 116).

Portanto, afirmamos que o conhecimento é do “domínio da enunciação, e não do enunciado. Livros de matemática não possuem conhecimento; são “apenas” resíduos de enunciação daqueles que os produziram.” (OLIVEIRA, 2011, p. 18). Por isso, acreditamos na existência do sujeito do conhecimento (aquele que o produz, o enuncia), pois dessa forma podemos distinguir, por exemplo, o conhecimento de um matemático e de uma criança quando afirmam que 2 + 3 = 3 + 2. Neste caso, a justificativa da criança provavelmente seria diferente da justificativa do matemático e por isso, na perspectiva do MCS, eles produziriam conhecimentos diferentes.

Resíduo de Enunciação e Texto

Segundo Lins, um resíduo de enunciação é “algo com que me deparo e que acredito ter sido dito por alguém” (LINS, 2012, p.27). Considerando isso, um resíduo de enunciação pode ser:

> “[...] sons, rabiscos de todo tipo, arranjos de coisas, gestos, imagens, construções. Mas também a borra de café ou chá no fundo da xícara, o resultado do lançamento de moedas ou varetas, a disposição dos planetas no céu, [...] e assim por diante” (LINS, 2012, p.27).

Quando, no interior de uma atividade, são produzidos significados para resíduos de enunciação, tais resíduos tornam-se texto para quem produz significados para eles. Ou seja, no MCS:

> [...] um resíduo de enunciação é texto *para quem produz significado* (embora quem diga isso seja quem lê a atividade). Por isso dizermos que textos não possuem essências; e, portanto, não há o que muitos chamam de interpretações para um texto – há, sim, diferentes significados produzidos para um mesmo resíduo de enunciação. E é exatamente na/pela produção de significados para resíduos de enunciação que objetos são constituídos pelo sujeito que produz significados. Sob nossa ótica, expressões como “os significados contidos no texto” não fazem sentido; *textos* não possuem *significados*! (OLIVIERA, 2011, p.19).

Campo Semântico e Núcleo

Lins denotou a noção de campo semântico como sendo “um processo de produção de significado, em relação a um núcleo, no interior de uma atividade” (LINS, 2012, p.17).

Em outras palavras, talvez menos técnicas, um campo semântico:

> [...] é como se fosse um jogo no qual as regras (se existem) podem mudar o tempo todo e mesmo serem diferentes para os vários jogadores *dentro de limites*; que limites são estes, só saberemos *a posteriori*: enquanto a interação continua, tudo indica que as pessoas estão operando em um mesmo campo semântico (LINS, 2012, p.17, grifos do autor).

Utilizamos a noção de campo semântico para articular os processos de produção de conhecimento, produção de significados e constituição de objetos, pois é no interior de campos semânticos que se produzem conhecimento e significados e, sendo assim, objetos são constituídos.

Considerando um campo semântico como sendo um processo, segundo Vygotsky (1994), ele torna-se causa e consequência de sua própria transformação. Desta forma podemos falar de dinâmicas de processo, como visto em Silva (2003), ao definir nucleação, impermeabilização, entre outras noções que enunciaremos ao longo deste trabalho.

Ainda segundo o MCS, “o *núcleo* de um campo semântico é constituído por estipulações locais, que são, localmente, verdades absolutas, que não requerem, localmente, justificação” (LINS, 2012, p. 26, grifo nosso).

Silva (2003), após investigar a dinâmica da produção de significados em Matemática de sujeitos, considerou que “uma pessoa está operando em um Campo Semântico toda vez que ela estiver produzindo significado em relação a um núcleo no interior de uma atividade” (SILVA, 2003, p.63).

Outra coisa que Silva considerou importante em relação à noção de núcleo, é que este “não se refere a algo estático, um conjunto de coisas, e sim, a um processo que se constitui no interior de atividades e dissipa ao final delas. Em uma outra atividade, novo núcleo se constitui e esse é o processo”. (SILVA, 2003, p. 62). Assim:

> Na observação do núcleo, numa dada atividade, podemos identificar a maneira de operar dos sujeitos bem como a lógica

> das operações ligadas ao processo de produção de significados para um texto. As operações são o que o sujeito faz com os objetos e a lógica é o que garante que ele pode fazer. (SILVA, 2003, p. 62)

Dificuldades

De acordo com o MCS, as dificuldades são caracterizadas como sendo ou um *limite epistemológico* ou um *obstáculo epistemológico*.

Segundo Lins, um limite epistemológico é “a impossibilidade de um aluno produzir significado para uma afirmação ou um resíduo de enunciação, numa certa direção, devido à sua maneira de operar cognitivamente” (LINS, 1993). Já um obstáculo epistemológico, seria “o processo no qual um aluno operando dentro de um campo semântico, poderia potencialmente produzir significado para uma afirmação, mas não produz”. (LINS, 1993).

Processo Comunicativo

Na perspectiva do MCS, Lins relaciona um processo comunicativo que considera a existência de três elementos (autor-texto-leitor) numa dinâmica. Segundo Lins:

> Quem produz uma enunciação é o autor. O autor fala sempre na direção de um leitor, que é constituído (produzido, instaurado, instalado, introduzido) pelo o autor. Quem produz significado para um resíduo de enunciação é o leitor. O leitor sempre fala na direção de um autor, que é constituído (produzido, instaurado, instalado, introduzido) pelo o leitor (LINS, 2012, p.14).

Esse um leitor ou um autor é, na perspectiva do MCS, um *interlocutor*, isto é, uma direção na qual se fala. Além disso, “quando falo na direção de um interlocutor é porque acredito que este interlocutor diria o que estou dizendo e aceitaria/adotaria a justificação me que autoriza a dizer o que estou dizendo” (LINS, 2012, p.19). O diagrama abaixo representa tal situação:

AUTOR $\longrightarrow$ ENUNCIAÇÃO $\longrightarrow$ INTERLOCUTOR

Assim, em situação de comunicação, o autor produz uma enunciação para a qual um leitor produziria significados. Já o leitor, por meio de outra enunciação, constitui aquilo que o um autor disse em texto, produzindo assim, uma nova enunciação na direção de um autor, e assim sucessivamente.

O AUTOR → TEXTO ⇢ UM LEITOR

UM AUTOR ⇢ TEXTO → O LEITOR

Durante um processo comunicativo, ao "[...] colocarmos incessante e alternadamente na posição de o autor e de o leitor em cada um destes processos, terminamos por fundir as duas imagens, e os pontilhados desaparecem, restando a sensação psicológica de comunicação efetiva (LINS, 1999, p.82, grifos nosso). Considerando este processo, o diagrama seria:

O AUTOR → TEXTO → O LEITOR

Cabe resaltar que, se temos apenas uma "sensação psicológica de comunicação efetiva", o que ocorre quando nos comunicamos uns com os outros e, por muitas vezes, somos capazes de nos de entender? O que ocorre, na concepção de Lins, é:

> A convergência se estabelece apenas na medida em que [autor e leitor] compartilham interlocutores, na medida em que dizem coisas que o outro diria e com autoridade que o outro aceita. É isto que estabelece um *espaço comunicativo*: não é necessária a transmissão para que se evite a divergência. (LINS, 1999, p.82, grifo nosso).

Fundamentados nesta visão de processo comunicativo, é que analisamos a produção de significados para as ações enunciativas dos sujeitos envolvidos em nossa pesquisa. Sendo assim, nossa análise é o resultado da nossa produção de significados para os resíduos de enunciação produzidos pelos sujeitos de pesquisa e esta análise será posta para o leitor deste trabalho produzir os seus significados em relação aos nossos resíduos de enunciação.

Ao colocarmos o MCS “em ação”, tivemos a oportunidade de realizar uma leitura da produção de conhecimentos e significados e observar os processos de constituição de objetos de nossos sujeitos de pesquisa, com um embasamento teórico e epistemológico do MCS.

1.3.2. A Teoria da Atividade

A teoria psicológica da Atividade, desenvolvida inicialmente por Leontiev, Rubinstein e Luria, é geralmente considerada como uma continuidade da escola histórico-cultural iniciada por Vygotsky.

Na perspectiva do MCS, para falarmos sobre os significados produzidos por alguém para um determinado objeto, tomaremos a noção de atividade como sendo a menor unidade de análise, visto que, por exemplo,

> [...] uma pessoa que, ao olhar para um artefato, pronuncie a palavra cadeira. Não faz sentido dizer que, nesse instante, a pessoa produziu significado para cadeira simplesmente porque falou cadeira. A pronúncia verbal não implica na produção de significados (OLIVEIRA, 2011, p. 6).

Entretanto, para Leontiev (1978):

> Nem todo processo é uma atividade. Nós designamos apenas por este termo os processos que, realizando tal ou tal relação com do homem com o mundo, respondem a uma necessidade particular que lhes é própria. Assim, os processos de memorização não são, propriamente falando, uma atividade, pois não realizam, regra geral, qualquer relação autônoma com o mundo e não respondem a qualquer exigência particular. (LEONTIEV, 1978, p.315).

Com isso, designamos pelo termo atividade “os processos que são psicologicamente determinados pelo fato de aquilo para que tendem no seu conjunto (o seu objeto) coincidir sempre com o elemento objetivo que incita o paciente a uma dada atividade, isto é, com o motivo” (LEONTIEV, 1978, p.315).

Para exemplificar a noção de atividade, tomemos o exemplo:

> Suponhamos o caso de um estudante que, preparando-se para um exame, lê um livro de História. Trata-se psicologicamente de um destes processos que convencionamos a chamar por atividade? [...] Suponhamos que o nosso estudante recebe

> uma visita de um camarada que o informa que o livro que ele está lendo não é absolutamente necessário para a preparação do exame. Pode então ocorrer o seguinte: ou abandonará imediatamente o livro ou continuará a lê-lo ou talvez o ponha de lado, mas de má vontade, com desgosto. Nos últimos dois casos, é evidente que aquilo para que estava dirigida a leitura, isto é, o conteúdo do livro, era o que o incitava a lê-lo e constituía o motivo [...]. Se pelo contrário, após ter sabido que o conteúdo do livro não faz parte do programa das provas, o estudante não hesita e deixa de o ler, é claro que o motivo que o incitava a ler era, não o conteúdo do livro, enquanto tal mas apenas a necessidade de passar no exame. O fim da leitura não coincidia, portanto com o que levava a aluno a ler. A leitura não era neste caso, preciso, uma atividade, propriamente dita. A atividade aqui era a preparação do exame e não a leitura do livro. (LEONTIEV, 1978, p.315-316).

Dessa forma, Leontiev distingue das atividades os processos designados pelo termo *ação*. Segundo ele, uma *ação* "é um processo cujo motivo não coincide com seu objeto (isto é, com aquilo que visa), pois pertence à atividade em que entra a ação considerada" (LEONTIEV, 1978, p.316). Assim, utilizando o exemplo da leitura do estudante citado anteriormente:

> [...] se o estudante continua a ler só até o momento em que sabe que a sua leitura não é necessária para a prestação do exame, trata-se de uma ação. Pois para ele aquilo que tende de fato (tomar conhecimento do conteúdo do livro) não é o motivo do estudante. O que o incita a ler é a necessidade de passar no exame (LEONTIEV, 1978, p.316).

Para Leontiev, o sujeito da atividade pode ser um indivíduo concreto, um grupo social ou a sociedade em geral, que não se encontra isolado, visto que está inserido na rede de relações sociais diversas. Assim, o sujeito é um sujeito em um contexto social e histórico.

Ainda segundo Leontiev (1978), o objeto da atividade é para onde é dirigida a ação. É, segundo ele, o elemento mais importante que distingue uma atividade da outra. Em outras palavras, o objeto de uma atividade é seu motivo real.

No exemplo da leitura do aluno, o objeto é o livro e sua leitura, o objetivo da leitura é o domínio do conteúdo e esse alvo tem uma relação direta com o motivo da atividade, que é passar no exame.

Os *motivos* como componentes da atividade têm de existir no sujeito, pois se não existirem motivos e necessidades, não haverá ação. Leontiev (1978) interpreta o motivo da atividade não só como uma necessidade do sujeito em relação a algo, mas como uma necessidade objetivada.

Dessa forma, para Leontiev (1978), o que caracteriza a verdadeira atividade é a coincidência entre seu objetivo e seu motivo. O objetivo é a representação imaginária dos resultados possíveis a serem alcançados com a realização de uma ação concreta. Uma ação se converte em atividade quando o objetivo e o motivo coincidem, possibilitando o desenvolvimento de habilidades e capacidades relacionadas com determinados conhecimentos. Quando não coincidem, são ações, e não atividades.

Apresentadas as noções que consideramos centrais do MCS e da noção de atividade que assumimos nesta pesquisa, retomamos à nossa questão de investigação sobre a formação matemática do professor de matemática, em nosso próximo capítulo: Uma Revisão da Literatura.

CAPÍTULO 2
UMA REVISÃO DA LITERATURA

Este capítulo tem como objetivo fundamentar nossa pesquisa com base nos trabalhos já realizados que expõem algumas das considerações que acreditamos serem essenciais para um melhor entendimento da nossa questão.

Dividimos nossa revisão da literatura em três temas: as pesquisas sobre a produção de significados por alunos no interior de atividades que envolvam a Álgebra Linear; as pesquisas sobre a noção de Curso de Serviço e; as pesquisas que discutem a Matemática do professor de Matemática, destacando os tipos de experiências que podem ser consideradas para seu desenvolvimento e sua formação profissional.

2.1. Pesquisas Relacionadas à Produção de Significados para Noções em Álgebra Linear.

Neste momento inicial de nossa revisão, procuramos trabalhos que se identifiquem com nosso referencial teórico, que é o Modelo dos Campos Semânticos (MCS) e que se preocuparam em investigar os processos de produção de significados especificamente para ideias relacionadas com o estudo da Álgebra Linear.

Num primeiro momento, deparamo-nos com a dissertação de Silva (1997), intitulada "**Uma Análise da Produção de Significados para a Noção de Base em Álgebra Linear**". Para tal investigação, Silva considerou um estudo histórico das produções de alguns matemáticos dos séculos XVIII e XIX, analisou livros didáticos de Álgebra Linear e realizou um estudo de caso com dois estudantes de graduação que cursaram a disciplina Álgebra Linear.

Após suas análises, Silva identificou diferentes modos de produção de significados para a noção de base e, considerando esta situação, o autor nos alerta sobre a possibilidade de valorização de alguns modos específicos de produção de significados que são na direção da matemática do matemático e/ou com o professor que leciona a disciplina e não valorização ou até mesmo exclusão dos demais modos de produção de significados. Segundo o autor, esta situação em sala de aula pode proporcionar um afastamento do aluno que não produz significados em determinada direção eleita pelo professor.

Oliveira (2002), em sua dissertação de mestrado intitulada "**Sobre a Produção de Significados para a noção de Transformação Linear em Álgebra Linear"**, apresenta sua leitura da produção de significados de alunos de uma Licenciatura em Matemática em relação às transformações lineares.

Além dessa leitura, Oliveira realizou um estudo histórico juntamente com uma análise de livros didáticos, com a intenção de verificar como influenciaram e influenciam os significados produzidos para a ideia de transformação linear em Álgebra Linear. Segundo Oliveira, a noção de transformação surgiu em três momentos distintos: (1º momento) as transformações para causar certo efeito, com as transformações de soluções das equações cúbicas e o começo da geometria analítica e das transformações de coordenadas; (2º momento) as transformações e o estudo dos invariantes, com destaque para a geometria projetiva e o interesse em transformações de figuras e; (3º momento) as transformações e espaços vetoriais, com destaque para o *Calcolo Geométrico* (1888) de Giusseppe Peano e seu capítulo sobre as transformações de sistemas lineares.

Oliveira realizou uma análise dos livros didáticos que abordam o conceito de transformação linear. Foram selecionados: Halmos (1958), Herstein (1964), Lang (1971), Searle (1966), Hoffman & Kunze (1967), Batschelet (1978), Boldrini et al (1978), Banchov & Wermer (1992), Lipschutz (1994), Steinbruch & Winterle (1987), Lawson (1996) e Lima (1998). Após a análise desses livros, a autora constatou que uma transformação linear pode ser apresentada como: um sistema de equações lineares, uma função especial entre espaços vetoriais, um homomorfismo de espaços vetoriais e uma matriz.

Finalizando sua pesquisa, a autora descreve como foi seu estudo de caso com duas alunas do curso de Matemática da UNESP de Rio Claro. Esse estudo foi realizado com base nas falas e na escrita dessas alunas em relação a cinco tarefas propostas pela pesquisadora. Todas as tarefas foram elaboradas com a finalidade de propiciar às sujeitas de pesquisa a oportunidade de *falar* sobre transformações lineares. A análise dessas tarefas foi feita segundo o MCS.

Após sua pesquisa e análise, Oliveira (2002) obteve as seguintes conclusões: primeiro, que os elementos obtidos a partir da análise da produção de significados para a noção de transformação linear forneceram mais elementos à discussão sobre quais questões devem estar relacionadas na formação do professor de Matemática; segundo, em relação à análise dos livros didáticos, foram observados tratamentos diferentes da noção de transformação linear. Dessa forma, os livros que os estudantes de Matemática têm à disposição apresentam encaminhamentos no estudo das transformações lineares que, provavelmente, levarão à produção de significados distintos; e por último, que em relação à leitura do texto que foi constituído a partir da fala de duas alunas de graduação em Matemática, embora ambas tenham feito a disciplina de Álgebra Linear e tenham obtido resultados satisfatórios, os significados produzidos para a transformação linear não condizem com as principais ideias trabalhadas na Álgebra Linear.

Acreditamos que o trabalho de Oliveira, além de ter nos fornecido uma riqueza de detalhes históricos e de análise de livros didáticos sobre as transformações lineares, deixou claro suas preocupações e sugestões para futuros trabalhos. Pois, segundo Oliveira, os cursos de Álgebra Linear:

> [...] não oferecem oportunidades para que o aluno se desenvolva matematicamente; desenvolver-se matematicamente seria ampliar os significados produzidos para idéias matemáticas, sem com isso eliminar ou corrigir as idéias naturalizadas. O papel das disciplinas matemáticas seria exatamente oferecer oportunidades para que os alunos possam entender as diferenças entre os significados de idéias. (OLIVEIRA, 2002, p. 103-104).

Em consonância com Oliveira, acreditamos que os cursos de conteúdo matemático não devem ser oferecidos ao licenciando em Matemática apenas na perspectiva do matemático. Esses cursos devem oferecer ao futuro professor a possibilidade de vivenciar o estranhamento causado pelas definições matemáticas, a oportunidade de observar os diferentes modos de produção de significados para as noções matemáticas e, com isso, internalizar a preocupação de sempre ler a produção de significados de seus futuros alunos com a intenção de com eles interagir.

Um trabalho considerado fundamental para nossa pesquisa é a tese de doutorado intitulada "**Sobre a Dinâmica da Produção de Significados em Matemática"** (SILVA 2003). Neste trabalho, além de realizar uma leitura da produção de significados na área de nosso interesse, Silva faz considerações significativas sobre o próprio referencial teórico por nós assumido, o MCS. Sob orientação do professor Dr. Romulo Campos Lins, a tese de doutorado de Silva buscou investigar como se dá o processo de produção de significados para a Matemática a partir da perspectiva do Modelo dos Campos Semânticos.

Silva ressalta a importância de se investigar a produção de significados quando cita Lins: “Para mim, o aspecto central de toda atividade humana – em verdade, o aspecto central de toda cognição humana – é a produção de significados” (LINS apud SILVA, 2003, p.9-10). Além disso, ao tomar como referencial o MCS, o pesquisador assume:

> i) O interesse em olhar para processos, em oposição a olhar para estados ou produtos; ii) O interesse por uma leitura positiva do processo de produção de significados para a matemática, isto é, o interesse em entender o que as pessoas dizem e por que dizem, em oposição a olhá-las pelo erro, pela falta; iii) A busca de uma explicação plausível para o processo de produção de significados para a matemática. (SILVA, 2003, p.10).

Com sua pesquisa direcionada à dinâmica da produção de significados, Silva pretendeu ampliar o entendimento de como as pessoas operam quando se propõem a produzir significados para matemática.

Silva (2003) caracterizou sua pesquisa como sendo qualitativa e realizou uma investigação de campo em uma turma formada por 18 alunos, com aulas ministradas uma vez por semana, com duração de 4 horas cada aula. Durante o curso, foram propostos e discutidos dois problemas pela turma, mas para a investigação de Silva, somente um problema foi considerado. O enunciado dessa questão foi:

> “Problema a se investigar:
> IR^2 é o conjunto dos pares ordenados de números reais:
> $IR^2 = \{(x,y)$ tal que $x, y \in IR\}$. Investigue se é possível existir um espaço vetorial real (isto é, IR é o corpo dos escalares) onde IR^2 é o conjunto de vetores desse espaço e que tenha dimensão 3.” (SILVA, 2003, p. 41).

Silva justifica a importância desse problema nas seguintes palavras:

> A importância desse problema reside, para nós, no fato de possuir duas características centrais para a observação da produção de significados de uma pessoa que se propõe a falar a partir daquele enunciado; são elas: ser familiar e não-usual. (SILVA, 2003, pag. 41).

Para Silva (2003), olhando da perspectiva dos significados que um matemático produziria para resolver esse problema, seria necessário passar pelas noções centrais da Álgebra Linear, entendida por ele como sendo os Espaços Vetoriais e as Transformações Lineares.

Após ser dado o problema à turma, Silva começou utilizar suas técnicas de coleta de dados que consistiam em: observação participante, filmagem das aulas, aplicação de um questionário e entrevista com os grupos com a intenção de investigar a dinâmica do processo de produção de significados dos alunos daquela turma, envolvidos na atividade de produzir significados para o referido problema. As análises desses dados tomaram como premissa uma “leitura positiva” da produção de significados dos sujeitos de pesquisa.

Para Silva, ao realizarmos uma *leitura positiva*, não direcionamos nosso olhar para o erro das pessoas que resolvem uma tarefa, ou para o que falta para resolvê-la corretamente, mas sim, para entender o que elas fizeram e principalmente o porquê de se ter feito daquela forma. Desse modo, Silva afirma que a *leitura positiva* não se pauta em um juízo de valor e que, teoricamente, essa prática busca fazer “uma leitura do outro através de suas legitimidades, seus interlocutores, compartilhando o mesmo espaço comunicativo”. (SILVA, 2003, p. 44).

Em suas considerações finais, Silva expõe suas observações/conclusões com base em sua análise. O primeiro aspecto retratado sobre a dinâmica do processo de produção de significados foi a constituição do enunciado em texto. Para Silva, foi esse o momento responsável pelo desencadeamento da constituição de objetos, núcleos, entre outras coisas. Além disso, a produção de significados dos sujeitos de pesquisa, na interação face a face, revelou uma característica do processo de produção de significados, pelo autor chamada de *impermeabilização,* segundo a qual influenciou fortemente a dinâmica, e chamou a atenção pela sua recorrência. Em relação ao termo *impermeabilização,* Silva o denota como sendo “a postura do sujeito de não compartilhar novos interlocutores, diferentes daqueles para o qual ele estava voltado, de não se propor a produzir significados numa outra direção” (SILVA, 2003, p.129-130).

Silva afirma que a legitimidade da produção de significados é considerada um dos fatores que determinaram a dinâmica. Ele cita, por exemplo, o fato de um dos sujeitos de pesquisa sugerir mudar o enunciado do problema por não acreditar ser legítimo “obter o IR^3 do IR^2”. Dessa forma, Silva acredita que “a legitimidade do que é dito é uma das características do processo de produção de significados”. (SILVA, 2003, p.130).

Em relação ao processo de *nucleação*, Silva constatou que:

> Nosso estudo do processo de nucleação – constituição e transformações de um núcleo – revelou que eles podem, ao longo do processo de produção de significados, sofrerem mudanças, transformações nas estipulações locais com maior ou menor intensidade, ou se manterem estáveis, no sentido de que as estipulações locais se mantêm as mesmas durante o processo. (SILVA, 2003, p.130).

Além disso, outro ponto importante destacado por Silva foi a mudança dos interlocutores, pois ao longo do processo, notavelmente foram identificados alguns sujeitos que iniciaram um processo de produção de significados na direção de alguns interlocutores, mas depois começaram a produzir significados em uma outra direção. Outros sujeitos voltaram sua fala para uma só direção em todo o processo e ainda existiram sujeitos que mudaram a direção de sua produção de significados na tentativa de resolver o problema.

Finalizando seu trabalho, Silva considera que a importância de sua pesquisa se encontra no fato de que, por meio dela, é possível se aproximar de um entendimento do processo de produção de significados dos nossos alunos e, com isso, fornecer informações e ferramentas para que seja possível uma interação e intervenção mais efetiva em suas produções de significados. Acreditamos que a análise da tese de Silva nos forneceu elementos essenciais para fundamentar e orientar nossa pesquisa, nos permitiu entender melhor a dinâmica da produção de significados de indivíduos no interior de uma atividade e de como realizar uma pesquisa tendo como referencial teórico o MCS.

Os trabalhos analisados (SILVA, 1993, 2003 e OLIVEIRA, 2002), relacionam-se diretamente com o grupo Sigma-t, liderado pelo Romulo Campos Lins. Inicialmente, Lins e os membros do grupo estavam envolvidos no projeto de pesquisa denominado “**Um quadro de Referências para as Disciplinas de**

Matemática no Curso de Licenciatura em Matemática" (2002), cuja proposta era investigar

> "[...] a natureza geral das disciplinas de Matemática para a licenciatura em Matemática. [...] Envolve, portanto, uma investigação sobre o papel e escolha dos conteúdos matemáticos trabalhados nas disciplinas e uma investigação sobre a forma como estes conteúdos participam dos processos de sala de aula da Licenciatura, de modo que não ao invés de disciplinas de Matemática de forma geral, elas se transformem em disciplinas de Educação Matemática e possam contribuir mais efetivamente na formação do futuro professor de Matemática. (LINS, 2002, p.3).

Além disso, o projeto do Sigma-t buscava:

> "[...] identificar os significados produzidos para determinados objetos matemáticos, [...], e a partir desta análise compreender de que forma é possível estruturar uma disciplina matemática da Licenciatura em Matemática para que ela ajude a desenvolver uma maior "lucidez matemática" do futuro professor; do ponto de vista de sua futura atuação profissional, essa "lucidez matemática" é essencial para que o professor tome decisões quanto a conteúdos, mas também quanto ao seu tratamento: ao invés de pensar nos conteúdos como serem coisas a serem ensinadas e aprendidas, pensar neles como meios de um processo educacional que é bastante mais amplo; [...] (LINS, 2002, p.4).

Em relação à "lucidez matemática" do professor de Matemática, Lins considera como sendo "[...] um entendimento flexível que lhe permitisse ser igualmente flexível e sentir-se seguro na sala de aula." (LINS, 2006, p.2).

Após as conclusões das pesquisas relacionadas a este projeto, em particular, após o trabalho de doutorado de Silva (2003), o grupo formula um novo projeto de pesquisa, denominado "**Design e Implementação de um Programa de Formação Continuada para Professores de Matemática**". Tal projeto foi considerado uma continuação do projeto anterior, mas continha novas componentes, como o interesse de "[...] produzir e avaliar um quadro de referências para a formação de professores de Matemática, centrada na prática profissional, de modo que se tenha um curso de Educação Matemática, e não um curso de "Matemática-mais Pedagogia"" (LINS, 2006, p. 4).

Dentre os trabalhos direcionados a esse projeto de pesquisa, destacamos a dissertação de Julio (2007), intitulada "**Uma leitura da produção**

de significados matemáticos e não-matemáticos para ‘dimensão’”, na qual foi apresentada uma reflexão teórica e sua leitura em relação à produção de significados matemáticos e não-matemáticos para a noção de dimensão, fundamentada no MCS. Dentre suas conclusões, Julio expressa sua preocupação em enfatizar e identificar os diferentes modos de produção de significados que podem ocorrer quando se fala em dimensão, com o intuito de mostrar que em uma sala de aula de Matemática, quando se fala uma palavra ou uma noção, existe a possibilidade de ocorrerem diversas produções de significados, sejam eles matemáticos ou não-matemáticos.

2.2. Pesquisas Relacionadas aos Cursos de Serviço

Nesta seção, estaremos interessados em três trabalhos. O primeiro, uma dissertação de mestrado, a qual traz algumas características de um Curso de Serviço para a Licenciatura em Matemática e ainda nos fornece uma detalhada revisão histórica de como os Cursos de Serviço vêm se constituindo. Em seguida, analisaremos dois artigos, que nos direcionaram para o caminho que prosseguimos ao longo da pesquisa.

Na dissertação de mestrado **“Geometria como um Curso de Serviço para a Licenciatura de Matemática: Uma Leitura da Perspectiva do Modelo dos Campos Semânticos”** (PROCÓPIO, 2011), o autor buscou investigar as possíveis características de um Curso de Serviço em Geometria para um curso da Licenciatura em Matemática.

Entretanto, ao analisar essa dissertação, estamos particularmente interessados em aproveitar sua riqueza de informações em relação ao estudo histórico da constituição dos Cursos de Serviços. Dessa forma, nosso interesse se encontra no capítulo 2 dessa dissertação.

Nele, Procópio (2011) traz uma análise detalhada de como os Cursos de Serviço foram idealizados. Em sua pesquisa, o autor afirma que esses cursos tinham inicialmente o objetivo de descrever os cursos universitários que utilizavam a Matemática para contribuir com a formação do profissional, principalmente após o final da II Guerra Mundial, onde houve praticamente um consenso em relação ao fato de que os estudantes universitários não deveriam apenas ter uma formação voltada para cidadania, mas também seria importante que tivessem um desenvolvimento em habilidades técnicas, especializadas e com conhecimentos matemáticos específicos. Mas foi somente em 1985, quando a ICMI (International Commission Mathematical Instruction) encaminhou um documento a instituições de diversos lugares do mundo, onde se iniciou a investigação da Matemática como uma disciplina de serviço. Questionamentos como escolha dos conteúdos, se a Matemática é utilizada como meio de seleção, quem leciona nos cursos, como os estudantes obtêm motivação, quais os papéis do matemático e do professor de matemática, como introduzir exemplos e aplicações, diferenças no modo de se ensinar a Matemática nos diferentes cursos, entre outras, foram questões que direcionaram a discussão em relação à Matemática como “Curso de Serviço”. Assim, essa terminologia passa a ser utilizada para caracterizar esta forma de desenvolvimento da disciplina.

No Brasil, Procópio citou, inicialmente, os trabalhos de Cabral & Catapani (2003) sobre alguns olhares em uma disciplina de Cálculo, lecionada para uma turma de Geologia e a dissertação de Silva (1999), sobre a Álgebra Linear para a Ciência da Computação, ambos como cursos de serviço.

Concordamos com Procópio ao afirmar que “as disciplinas de conteúdo nas Licenciaturas envolvem, além do saber matemático, saberes de diferentes naturezas, todos necessários e indispensáveis para a formação profissional.” (PROCÓPIO, 2011, p. 20). Sua afirmação é embasada em Schulman (1986). Para esse autor, saber Matemática para ser um matemático não é a mesma coisa que saber Matemática para ser professor de Matemática.

Em nossa pesquisa, consideramos que ao oferecer a disciplina de Álgebra Linear apenas na perspectiva do matemático, estamos reforçando o modelo tradicional de ensino - e segundo Silva (2011), predominante em nossas escolas – caracterizado como o ensino centrado no professor, considerando o aluno como sujeito passivo e orientado por teorias direcionadas para a transmissão do conteúdo.

Procópio (2011), em seu trabalho, fez uma importante crítica a esse modelo de ensino ao afirmar:

> [...] que os futuros professores vivem toda sua escolaridade, tanto no nível básico como no superior, sofrendo influências e

> tendendo a reproduzir este comportamento. Essa reprodução é, em muitos casos, o resultado do único procedimento metodológico que os alunos experimentam em sua prática escolar. (PROCÓPIO, 2011, p. 22).

Acreditamos que os professores universitários, ao lecionarem disciplinas de conteúdo matemático aos licenciandos em Matemática, influenciam não só em relação ao conteúdo ensinado, mas também em relação às suas concepções de ensino e aprendizagem. Assim, consideramos, em consonância com Procópio (2011), que até mesmo as práticas docentes – algumas vezes criticadas por seu tradicionalismo – são internalizadas e, consequentemente, reproduzidas pelos licenciandos quando se inserem na sala de aula como professores. Procópio sugere que "os professores das disciplinas de conteúdo específico das licenciaturas não devem desenvolver apenas estudos relativos à aprendizagem da Matemática, mas que devem também dar atenção aos processos didático-pedagógicos". (PROCÓPIO, 2011, p. 22).

Após nossa leitura do trabalho de Procópio, sentimo-nos mais confiantes em nossa proposta de pesquisa, pois a análise de seu trabalho forneceu-nos uma fundamentação histórica da constituição dos Cursos de Serviço e proporcionou uma oportunidade de enunciarmos o que consideramos ser importante na formação do professor de Matemática.

Ao continuar nossa revisão da literatura, deparamo-nos com uma proposta de um Curso de Serviço para a Licenciatura em Matemática no artigo "**Um curso de Serviço para a Licenciatura em Matemática"** (SILVA, 2011).

Neste artigo, Silva apresenta os resultados obtidos em sua pesquisa, intitulada *Cursos de Serviço para a Licenciatura em Matemática,* na qual investigou a possibilidade de mudanças nas atuais disciplinas e a criação de disciplinas que estejam voltadas para a formação do professor, as quais foram denominadas por ele como Cursos de Serviço.

Segundo Silva, a constituição de disciplinas voltadas para a formação inicial matemática do futuro professor vem como uma alternativa à atual formação desconectada com sua futura prática. As disciplinas de conteúdo matemático têm sido oferecidas de forma internalista, sob as características da Matemática do matemático, como explicitado em Lins (2004) e reforçado em Silva.

> [...] a grande maioria das disciplinas matemáticas ministradas nos cursos de licenciatura em Matemática possuem um abordagem internalista da matemática – a matemática por ela mesma – com ênfase excessiva no uso preciso da linguagem matemática e no rigor. (SILVA, 2011, p.3).

Consideramos que esse tipo de formação não oferece ao futuro professor de Matemática as ferramentas necessárias para que ele, em sua prática docente, seja capaz de realizar uma leitura fina da produção de significados de seus alunos e tomar decisões sobre o que está acontecendo e como seguir. Acreditamos que isso – em consonância com Lins (2004) – deve ser o principal papel do professor de Matemática.

Silva faz uso do termo “ensino tradicional vigente” (ETV) para descrever as características da atual formação dos professores de Matemática da seguinte forma:

> O ensino é centrado no professor que expõe e demonstra rigorosamente no quadro, em aulas predominantemente exposito-explicativas. O aluno deve ter uma postura passiva nas aulas e o seu papel no processo é o de reproduzir a linguagem e os raciocínios lógicos estruturados pelo professor. (SILVA, 2011, p.3).

Ainda sobre o ETV, Silva afirma que “na concepção epistemológica, o professor acredita que o conhecimento pode ser transmitido, mesmo que de forma inconsciente e baseada no senso comum” (SILVA, 2011, p.3).

A proposta de trabalho desenvolvido por Silva foi projetar, executar e avaliar uma disciplina voltada para estudantes de licenciatura. Após o encerramento da execução de sua proposta, Silva realizou uma leitura de todo o percurso nela realizado e do desenvolvimento de seus alunos. Dentre suas conclusões, destacamos:

- Sua pesquisa de campo evidenciou a importância de uma metodologia de ensino alternativa à tradicional, principalmente quando ela leva a uma mudança de postura do professor e dos alunos;
- Silva defende fortemente a importância de dar voz aos alunos em sala de aula, mas, além disso, é necessário que o professor possua condições de desenvolver uma leitura da produção de significados de seus alunos de modo a intervir em suas dificuldades de aprendizagem;

- O encaminhamento que foi dado às aulas e a proposta de deslocar o foco do conteúdo para colocá-lo na aprendizagem minimizou o que Silva denomina de *assincronismo* nos processos de ensino e aprendizagem;
- É preciso buscar nos conteúdos matemáticos “portas” para que os futuros professores desenvolvam noções fundamentais e importantes na sua formação matemática;
- As pesquisas ligadas à produção de Cursos de Serviço encontram um campo fértil nos mestrados profissionais em Educação Matemática, devido às características dessa modalidade de mestrado (produto educacional e a dissertação “ligada” à prática profissional do professor de Matemática).

Vemos, nas considerações de Silva, sua preocupação com as estruturas das atuais disciplinas voltadas à formação do professor de Matemática e a preocupação em romper com a estrutura do ETV, pois somente retirando o aluno de sua posição passiva frente ao ensino, o professor terá possibilidades de ler sua produção de significados com a intenção de auxiliá-lo no processo de aprendizagem.

O termo *assincronismo,* citado nas considerações de Silva (2011), foi caracterizado em seu artigo “**Uma Análise dos Processos de Ensino e Aprendizagem a partir da Produção de Significados”** (SILVA 2010), como sendo uma consequência do que ocorre quando colocamos nosso foco no ensino e não na aprendizagem dos alunos. Em suas palavras:

> [...] o fenômeno do assincronismo se estabelece sempre que colocamos nosso foco apenas no ensino e tentamos coincidir o que chamaremos de *tempo real de aprendizagem* – entendido como o tempo que levamos para produzir significados para os objetos de uma teoria – e o *tempo institucional de ensino*, que assumimos como o tempo que a instituição coloca de duração para o cumprimento da ementa de uma disciplina. Avaliamos nossos alunos como quem considera que esses tempos são coincidentes. Deslocar o foco do conteúdo para colocá-lo na aprendizagem tem sido nosso ponto de partida. (SILVA, 2010, p.9, grifos do autor).

Consideramos, em nossa pesquisa, várias das preocupações que foram destacadas por Silva (2011), como: romper com a estrutura do ETV;

proporcionar ao futuro professor uma oportunidade de se discutir diferentes modos de produção de significados que possam existir em uma aula de Matemática, para que dessa forma ele sinta a necessidade de ler a produção de significados de seus alunos, com o objetivo de com eles interagir; tirar o foco do conteúdo matemático – em nosso caso, as transformações lineares - por si só e deslocá-lo para a oportunidade de se ampliar modos de produção de significados dos futuros professores de Matemática e, dessa forma, realizar uma tentativa de minimizar o assincronismo existente entre os processos de ensino e de aprendizagem.

Convergindo com as conclusões de Procópio (2011) e Silva (2010, 2011), consideramos que é preciso pensar na formação do professor de Matemática de uma forma mais ampla, não apenas com o foco na formação internalista e rigorosa da Matemática. É preciso que o conteúdo matemático seja trabalhado não somente como conhecimento matemático, mas também como uma oportunidade de se ampliar os modos de produção de significados, sejam eles matemáticos ou não-matemáticos.

2.3. Pesquisas Relacionadas à Formação Matemática do Professor de Matemática.

Para concluir nossa revisão da literatura, nos direcionamos a pesquisas que trataram especificamente da formação matemática do professor.

Na tese de doutorado "**Rastros da Formação Matemática na Pratica Profissional de uma Professora de Matemática"** (LINARDI, 2006) realizada na UNESP - Rio Claro/SP, a pesquisadora teve como objetivo buscar e estudar características da Matemática do matemático existentes nas práticas de sala de aula de uma professora de matemática, com a intenção de preencher as lacunas existentes nas pesquisas sobre a formação do professor em relação a conteúdos específicos.

Seu trabalho teve origem nas ideias discutidas pelo grupo de pesquisa Sigma-t, relacionadas ao projeto "Design e Implementação de um Programa de Formação Continuada para Professores de Matemática". Assim, ao se preocupar com a formação do professor de Matemática e sua relação com as disciplinas de conteúdo matemático, Linardi afirma que:

> Os conteúdos matemáticos neste projeto passaram a ser olhados como elementos que são parte e não objetivo da formação do professor, e buscar nestes conteúdos subsídios ("portas") para que os professores desenvolvam certas noções fundamentais. (LINS apud LINARDI, 2006, p.4).

Instigada pelos objetivos do grupo de pesquisa em que estava inserida, Linardi (2006) explicita alguns trabalhos com foco na formação de professores e cita, em particular, o relatório de pesquisa de Wilson et al (2001). Os componentes de destaque deste relatório foram: a formação dos professores em disciplinas de conteúdo específico e a formação pedagógica do futuro professor. Como resultado de suas pesquisas, Wilson et al (2001) "propõem a necessidade urgente de pesquisas que estudem a natureza da formação em conteúdo específico e, de forma sistemática, o impacto dessa formação nas práticas de sala de aulas dos professores". (LINARDI, 2006, p.7).

Dessa forma, Linardi definiu seus dois objetivos de pesquisa que, embora fossem distintos, estavam inteiramente conectados. Inicialmente, ela buscava identificar, na prática profissional de uma professora de Matemática, traços daquilo que é chamado por Lins (2004) de Matemática do matemático. Em segundo lugar, desenvolver um conjunto de instrumentos "que permitissem realizar *uma leitura da prática profissional do professor de matemática* sem a necessidade de uma permanência prolongada nas atividades diárias desse professor". (LINARDI, 2006, p. 185, grifos da autora).

Após a constituição do conjunto de instrumentos e de sua aplicação, Linardi concluiu que:

> Com relação ao conjunto de instrumentos, eles se mostraram adequados para realizar *uma leitura da prática profissional da professora* e, em particular, uma leitura da utilização ou não, por essa profissional, de categorias da Matemática do matemático. (LINARDI. 2006, p.180-181).

Já em relação ao seu primeiro objetivo de pesquisa, que era a busca dos rastros da Matemática do matemático na prática de professor, a autora concluiu que:

> [...] as categorias da Matemática do matemático não participam da organização da prática profissional dessa professora. Porém, ao ser colocada ante essas categorias, a professora foi capaz de falar na direção da Matemática do matemático, mesmo que, evidentemente, nada possa ser dito sobre o

> quanto de Matemática ela conhece, apenas a partir dos dados obtidos com o instrumento 3. (LINARDI, 2006, p.182).

Em relação à prática e a formação matemática da professora, Linardi (2006) constatou que o professora investigada era capaz de tratar com a Matemática do matemático, mas esses modos de produção de significados não se revelaram como organizadores de sua prática como professora de Matemática.

Ao refletirmos sobre os resultados obtidos pela pesquisa de Linardi (2006), sentimo-nos motivados em relação ao nosso objetivo de pesquisa, visto que, baseados em sua análise e resultados da aplicação de seus instrumentos, não foi possível observar na prática da professora investigada a participação das categorias da Matemática do matemático em sua prática profissional.

Assim, interessados na formação dos futuros professores de Matemática em relação às disciplinas de conteúdo matemático (como Análise, Álgebra Linear etc.), deparamo-nos com o artigo de Lins intitulado "**A Formação Pedagógica em Disciplinas de Conteúdo Matemático nas Licenciaturas em Educação Matemática"** (LINS 2005a). Neste artigo, Lins apresenta ao leitor suas considerações a respeito da existência de cursos de "conteúdo matemático" totalmente desarticulados com a futura prática profissional do professor. Nesse cenário, Lins traz à tona algumas questões inerentes à formação matemática do futuro professor.

Nossa motivação em analisar tal artigo se deve justamente ao fato de que estamos preocupados com essa falta de sintonia entre os cursos de conteúdo matemático e a prática do (futuro) professor de Matemática. Acreditamos, em consonância com Lins, que os cursos de conteúdo matemático podem oferecer ao professor de Matemática muito mais do que o conteúdo em si, mas também um modelo de aula, de metodologia e de postura do professor frente aos seus alunos.

Mas qual seria então o papel dos cursos de conteúdo matemático? Segundo Lins, "o centro da atividade profissional do professor, seja qual disciplina for, é ler os alunos e tomar decisões sobre o que está acontecendo e como seguir" (LINS, 2005a, p. 120). E por isso, ele defende que "as disciplinas de Matemática "avançada" têm um potencial de formação de professores de

Matemática, desde que não sejam entendidas em si mesmas, apenas como de conteúdo" (LINS, 2005a, p. 120-121).

Dessa forma, os cursos de conteúdo matemático devem ser, para o futuro professor, uma oportunidade única de vivenciar o estranhamento causado pelo encontro com noções e definições que contrariam ao senso comum e ao viver este estranhamento, o professor sinta a necessidade de ler o que seus alunos dizem/fazem, não os classificando pela falta ou pelo que ele deveria ser[2].

Lins afirma que os cursos de conteúdo matemático não devem ser definidos apenas como cursos de Matemática, mas sim de Educação Matemática, nos quais o professor deve estar preparado para perceber, entender e aceitar as diferenças que, possivelmente, existirão entre seus alunos e seus diferentes modos de produção de significados. Assim, a diferença não seria um obstáculo a ser superado na sala de aula, mas sim uma oportunidade de aprender.

Embora essa seja uma perspectiva diferenciada, acreditamos em consonância com Lins, que esta proposta não foge ao tratamento dos conteúdos matemáticos; muito pelo contrário. Com essa proposta de formação, defendemos que:

> [...] o professor precisa saber mais e não menos Matemática, mas sempre esclarecendo que este mais não se refere a mais conteúdo, e sim a um entendimento, uma lucidez maior, e isto inclui a compreensão de que mesmo dentro da Matemática do matemático produzimos significados diferentes para o que parece ser a mesma coisa. (LINS, 2005a, p. 122).

Dessa forma, incentivados por este artigo, percebemos e acreditamos que é preciso refletir sobre as formas com as quais são estruturados os cursos de conteúdo matemático que são oferecidos aos futuros professores de Matemática. Mas, para que essa mudança seja realizada, é preciso, segundo Lins, "substituir a dicotomia Pedagogia/Matemática por Educação Matemática, e a dicotomia teoria/prática por teorizar". (LINS, 2005a, p. 123).

---

[2] Por exemplo, segundo a teoria piagetiana, a aquisição do conhecimento só ocorre mediante a consolidação de outras estruturas do pensamento. Dessa forma, a justificativa para um aluno não aprender algo é por que, provavelmente, ele não atingiu o estágio necessário para aprender este algo.

Neste momento, estamos interessados em caracterizar nosso ponto de vista sobre o que é a Matemática do professor de Matemática em relação aos nossos pressupostos assumidos no Modelo dos Campos Semânticos.

Nesta linha, o artigo “**Characterising the Mathematics of the Mathematics Teacher from the point of view of Meaning Production”** (LINS, 2004c) torna-se uma das referências centrais de nossa pesquisa, pois nele se encontram alguns dos nossos principais interesses, como quais são as características da Matemática do professor de Matemática e algumas sugestões para alterar o atual quadro de formação de professores.

Mas como podemos sugerir mudanças à atual formação dos professores de Matemática se, por nenhum momento, discutimos qual é a Matemática do professor de Matemática? É orientado por essa questão que Lins direciona seu trabalho neste artigo.

Lins (2004c) acredita e afirma que o matemático e o professor de Matemática têm preocupações distintas. Para o matemático, o importante é capturar a “essência” de algo que já está em vigor e está bem estabelecido como parte de uma prática social. Já para o professor de Matemática, além de capturar essa “essência”, ele deve ler a produção de significados de seus alunos no decorrer de uma atividade e tomar decisões com intenção de realizar intervenções relacionadas à educação matemática de seus alunos.

Entretanto, para realizar essa leitura da produção de significados de seus alunos, o professor deve ter instrumentos funcionais para tal tarefa. Dessa forma, Lins considera, em primeiro lugar, que o MCS funciona como uma ferramenta poderosa, que permite ao professor produzir leituras positivas do que os alunos estão dizendo e fazendo.

Em segundo lugar, a introdução do MCS tem um impacto, que é a compreensão de muito do que se tem na prática do professor de Matemática: que não é Matemática de um lado e pedagogia do outro. Pois, como o professor toma decisões e realiza ações, considerações de todos os tipos estão envolvidas. De uma forma direta, Lins afirma que o MCS é destinado a “compreensão do que os alunos pensam e estão pensando, com a intenção de interagir com eles” e não para a compreensão de “como ser capaz de explicar os erros, a fim de corrigi-los” (LINS, 2004c, p. 11, tradução nossa).

Para Lins, um professor de Matemática sempre deveria estar em posição de dizer aos seus alunos: “Eu acho que eu entendo o que você está pensando; eu estou pensando de forma diferente. Gostaria de dar uma olhada em como estou pensando? Isso pode ajudá-lo entender o que estou tentando ensinar-lhe”. (LINS, 2004c, p. 11, tradução nossa). É importante ressaltar que, segundo Lins, isso não significa uma tentativa de *apagar* as maneiras dos alunos de pensar, mas precisamente possibilidades de expansão de seus pensamentos.

Lins afirma que “A matemática do professor de matemática é caracterizada pela sua aceitação de significados não matemáticos para coisas que poderiam ser de outra maneira chamada ‘matemática’”. (LINS, 2004c, p. 11, tradução nossa). Em muitos casos, esses significados não-matemáticos são bem conhecidos e aceitos pelas escolas e, em geral, esses recursos são utilizados (supostamente) para facilitar a aprendizagem[3]. Por exemplo, números inteiros como lucro e prejuízo; equações como balanças equilibradas; números decimais como dinheiro; frações como fatias de bolo, entre outros exemplos.

Entretanto, ao caracterizar qual é a Matemática do professor de Matemática, surgem as questões: como deve ser a formação matemática de tais professores? Que tipo de experiências as disciplinas como Cálculo, Álgebra Abstrata, Álgebra Linear, Análise e Topologia podem oferecer aos futuros professores de Matemática?

Fundamentados nas ideias de Lins (2005a), acreditamos que o objetivo central da formação de professores é ampliar seu escopo de modos de produzir significados, visto que, em sua prática profissional, o professor, ao ler a produção de significados de seus alunos, irá se deparar com significados não-matemáticos, mas que são aceitos na sala de aula. Dessa forma, o centro da prática professor está em sua capacidade de leitura que é dirigida aos seus alunos e não simplesmente, na reprodução dos conteúdos em sala de aula.

[3] Lins argumenta que essa suposta facilitação pode acabar em tragédia, ao nos depararmos com situações do tipo: multiplicar R$2,20 por R$1,32 e obter como resultado R$ 2,904 como resultado. É importante que o professor se atente aos significados que podem ser produzidas enunciações desse tipo.

Essas considerações estão incorporadas e foram fortemente assumidas em nossa pesquisa.

Mas por que as disciplinas de conteúdo matemático são trabalhadas na perspectiva do matemático e não na do professor de Matemática? Segundo Lins (2004c), essa matemática do matemático é hoje o resultado do processo de "limpeza" que começou, aproximadamente, na primeira metade do século XIX e foi um pouco resolvida por volta da década de 1930 com a iniciativa do grupo Bourbaki. Este processo, segundo Lins, foi dirigido para restringir os significados que eram legítimos para certos objetos dentro da Matemática como, por exemplo, os números Reais, o limite, o infinito etc. Dessa forma, restringiram a autoridade para falar sobre "matemática" apenas para aqueles que trabalhavam com o modo de produção de significados abstrato e não-concreto, pois "a Matemática do matemático circunscreve o que as coisas são, optando por um modo de produção de significados e sendo assim, as definições da Matemática do matemático são usadas para constituir objetos, não para descrevê-los". (LINS, 2004c, p. 15, tradução nossa).

Derivado desse processo, criou-se uma cultura de que tudo que o Matemático diz sobre Matemática é o que é certo, tornando o matemático o único indivíduo que têm a autoridade de dizer o que é certo e o que é errado em Matemática. Dessa forma, os futuros professores deveriam aprender essa forma de se falar sobre a Matemática. Entretanto, os alunos e as demais pessoas do mundo podem ter outros pontos de vista sobre os objetos matemáticos que, possivelmente, podem ser diferentes do ponto de vista do matemático. É papel do professor de Matemática saber lidar com essas situações.

Por fim, Lins acredita ter fornecido, ao longo de seu artigo, elementos para uma compreensão da prática do professor de Matemática, que foge da concepção tradicional. Ao invés de ensinar seus alunos uma parte da Matemática – seja ela qual for – e em seguida verificar se os alunos estão respondendo "bem" ao ensino e, se necessário, corrigir o que está errado, Lins propõe que o centro da atividade do professor deve ser ler o que os alunos estão dizendo/fazendo, de modo que a interação possa acontecer. Essa interação deve ser entendida como "partilha de modos de produção de significados", para que o ensino se torne uma questão de imersão cultural. (LINS, 2004c).

Concordamos, ainda, com Lins ao caracterizar a Matemática do professor de matemática não como sendo "matemática" mais "pedagogia", mas sim Educação Matemática. Nesse sentido, pretendemos oferecer ao futuro professor de matemática oportunidades de se discutir os processos de produção de significados, sejam eles matemáticos, não-matemáticos e principalmente entender as diferenças e utilizá-las como oportunidade de aprender. Assim, acreditamos que a formação pedagógica do licenciando em Matemática deva acontecer de forma simultânea com sua formação matemática.

Finalizando nossa revisão da literatura, outro trabalho relacionado com o projeto "Design e Implementação de um Programa de Formação Continuada para Professores de Matemática", é a tese de doutorado de Oliveira (2011), intitulada "**Uma Leitura da Formação Continuada de Professores de Matemática Fundamentada em uma Categoria da Vida Cotidiana**". Neste trabalho, a autora realizou um estudo de parte de um curso de formação continuada para professores de Matemática assentado em uma categoria da vida cotidiana, chamada pelo proponente do curso, de *tomada de decisão*.

Além deste estudo, Oliveira (2011) realizou uma extensa revisão da literatura relacionada aos trabalhos publicados dentro e fora do Brasil, relacionados com o conteúdo matemático na formação do professor de Matemática. A autora observou que muitos dos autores analisados consideram o conteúdo matemático em seus trabalhos e realizam uma aproximação do conteúdo matemático buscando problematizá-lo. Nesse sentido, a autora constatou que nestes trabalhos:

> * identificam-se e reconhecem-se como legítimas e importantes certas formas de conhecimento, distintas das da matemática acadêmica;
> * participa-se da análise e da tematização dos significados da matemática da rua e do desenvolvimento de novos significados, possivelmente matemáticos, que coexistirão com os da rua ("não-matemáticos"), sem querer substituí-los;
> * examinam-se permanentemente as inter-relações entre diferentes matemáticas, tendo como parâmetro as relações de poder envolvidas no uso de cada uma delas;

> * toma-se como elemento articulador das disciplinas específicas da licenciatura a prática social do professor de Matemática;
> * elaboram-se sequencias didático-pedagógicas que problematizam as concepções e representações conceituais dos licenciandos sobre conteúdos matemáticos, aprofundando as visões intuitivas dentro da prática docente;
> * desloca-se a importância dada ao conteúdo matemático para os significados para ele produzidos; e,
> * utilizam-se noções (como conhecimento pedagógico do conteúdo e conhecimento matemático para ensino) buscando-se compreender como alunos aprendem, como alunos entendem, visando ao aprimoramento da prática docente. (OLIVEIRA, 2011, p. 96).

Em contrapartida, Oliveira (2011) afirma que, na extensa gama de trabalhos revisados, muitos deles não discutem o conteúdo matemático. No geral, ele é tomado como dado, já estabelecido. Essa situação, por muitas vezes:

> [...] possibilita o avigoramento da visão de uma matemática universal, inquestionável, essência de todo o resto, que deve prevalecer diante de qualquer outra manifestação imperfeita ou parcial de seus saberes. Uma entidade intocável, principalmente ao professor de Matemática; conteúdo é conteúdo, não há o que se discutir a seu respeito, ele já está pronto, definido, determinado. (OLIVEIRA, 2011, p. 97)

Com isso, Oliveira considera que sua pesquisa contribui fortemente para mostrar que a chamada matemática do matemático (LINS, 2004) tem sua força manifestada até mesmo em trabalhos sobre formação de professores, ao não se tocar na onipotência dos conteúdos matemáticos já estabelecidos e considerados como oficiais. Para ela, “não discutir o conteúdo matemático passa também por não se discutir possíveis modos de produção de significados para tal conteúdo.” (OLIVEIRA, 2011, p. 182).

Nestes casos, segundo a autora:

> “[...] podemos inferir que o silêncio seja um forte indício da existência de uma crença no conteúdo matemático como indiscutível, inquestionável, posto seu estabelecimento e reconhecimento como tal, tanto nos meios acadêmicos quanto no meio escolar.” (OLIVEIRA, 2011, p. 182-183).

Em seu estudo de caso, a autora recriou dentro do quadro teórico do MCS, as ideias de *estranhamento* e *descentramento*, com a intenção de compor elementos para uma discussão dos processos de formação do professor de matemática e de sua leitura do curso de extensão investigado em sua pesquisa, cujo título era: “Espaço, Aritmética, Álgebra e Tomada de Decisão: Um Curso de Desenvolvimento Profissional para Professores de Matemática”.

Sobre o termo *estranhamento*, Oliveira (2011) considera como sendo um processo que “pode ser indicado ao imaginarmos uma situação em que existe, de um lado, aquele para quem uma coisa é natural – ainda que estranha – e de outro aquele para quem aquilo não pode ser dito.” (LINS apud OLIVEIRA, 2011, p.14). Já a noção de *descentramento* é considerada como sendo o processo “que passa pelo esforço de tornar-se sensível ao estranhamento do outro, de entender do que o outro fala, almejando que modos de produção de significados sejam compartilhados, que se crie um espaço comunicativo.” (OLIVEIRA, 2011, p.144).

Oliveira (2011) considera importante que o professor, em sua formação profissional, tenha a oportunidade de vivenciar e discutir o *estranhamento*. Assim, esta seria uma forma de provocar no professor de Matemática um *descentramento*; ou seja, ao vivenciar o *estranhamento* e problematizá-lo, pretendemos com isso criar oportunidades para que o professor se dê conta de que seus alunos também experimentam o *estranhamento*. Sendo assim, “com o movimento de *descentramento* pretende-se que o professor de Matemática evite naturalizar seus modos de produção de significados [...]” (OLIVEIRA, 2011, p.142-143).

Após suas leituras e análises, Oliveira acredita ter apresentado “elementos suficientes para afirmar que é possível se realizar um curso no qual os processos de produção de significados – e não os conteúdos matemáticos – sejam centrais ao seu desenvolvimento” (OLIVEIRA, 2011, p. 197).

Compactuando com Oliveira (2011), acreditamos que a formação matemática do professor precisava ser pensada em termos de processos de produção de significado. Sentimos então, a necessidade de propor alternativas, mas não imaginando que melhore a atual situação do ensino superior brasileiro ou a formação de professores de Matemática, pois no artigo “A ideologia da melhora do ensino da matemática”, Baldino nos chama a atenção que:

> O discurso da *melhora* do ensino da Matemática dirige-se à legião dos que acham que tal necessidade é evidente. Tem por efeito reforçar-lhes a crença nessa evidência. Atendendo pelo apelo desse discurso, as pessoas acorrem a participar de ações de *melhora*. Como nunca se diz **para quem** fica *melhor*, essa ideologia, como qualquer outra, reforça a concepção religiosa de um bem comum, universal, imanando as pessoas que se reconhecem adeptas da *melhora* [...] A necessidade de *melhorar* mantêm a expectativa da *melhora*, logo mantêm o fracasso. A sociedade que define a expectativa é a mesma que denuncia o fracasso. À medida em que evita enfrentar essa questão, é a produção do fracasso que a ideologia da *melhora* contribui. Faz sentido: o fracasso e a expectativa nascem no mesmo movimento histórico, como a galinha e o ovo. Sem o fracasso não existiria o sucesso, não só o sucesso matemático, mas, também, o sucesso que alguns fazem ao propor a *melhora* do ensino da Matemática (BALDINO, 1992, p.1-2, grifos do autor).

Dessa forma, nosso objetivo se direciona em propor situações que possam transformar o atual quadro das atuais Licenciaturas em Matemática para que possamos fornecer aos futuros professores de matemática um ambiente propício à ampliação de seus modos de produção de significados.

CAPÍTULO 3

A METODOLOGIA DA PESQUISA

Na primeira seção deste capítulo, apresentamos a perspectiva metodológica que utilizamos em nossa pesquisa: a pesquisa qualitativa.

Na segunda seção, descrevemos como foi elaborada e executada nossa entrevista. Esta entrevista teve como objetivo refinar nosso olhar a respeito das possíveis contribuições da disciplina Álgebra Linear na formação de professores de Matemática, fundamentada na produção de significados de três professores de Matemática, alunos de um curso de Pós-Graduação. Apresentamos os instrumentos e opções metodológicas utilizados na realização destas entrevistas.

Por fim, na terceira seção, esclarecemos os procedimentos metodológicos adotados na pesquisa de campo - o Seminário em Álgebra Linear - que consiste na descrição de nossas posições metodológicas, na apresentação dos instrumentos utilizados para a investigação, nas condutas que orientaram nossas ações, na descrição dos sujeitos de pesquisa e do conjunto de tarefas que foram aplicadas e da dinâmica da execução de nossa proposta de Seminário em Álgebra Linear para alunos de uma Licenciatura em Matemática.

3.1. Caracterização da Pesquisa

As nossas opções metodológicas de pesquisa se deram devido aos nossos pressupostos teóricos. Desta forma, esta pesquisa será caracterizada como sendo qualitativa no sentido de Bogdan e Biklen (1994). Segundo eles, uma investigação qualitativa possui cinco características centrais:

> *1-* Na investigação qualitativa a fonte directa dos dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal.
> *2-* A investigação qualitativa é descritiva. Os dados recolhidos são na forma de palavras, imagens, com pouca ou nenhuma preocupação com os dados numéricos.
> *3-* Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos.
> *4-* Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva.
> *5-* O significado é de importância vital na abordagem qualitativa (BOGDAN e BIKLEN, 1994, p. 50-51).

Para Bogdan e Biklen (1994), o investigador (pesquisador) se insere no contexto a ser investigado tentando elucidar questões educativas e inerentes à pesquisa. Para eles, a “investigação qualitativa faz luz sobre a dinâmica interna das situações, dinâmica esta que é frequentemente invisível para o observador exterior” (BOGDAN e BIKLEN, 1994, p. 50). Um pesquisador que assume uma investigação qualitativa tende a analisar os dados em toda sua riqueza, respeitando a forma em que estes foram registrados ou transcritos. Assim, a preocupação do investigador qualitativo deve estar direcionada ao processo de observação e não simplesmente ao seu produto.

Considerando este tipo de abordagem metodológica, nosso trabalho de campo foi dividido em duas etapas. A primeira etapa consistia em uma entrevista realizada com três alunos de um programa de Pós-Graduação que cursaram um segundo curso de Álgebra Linear em sua formação acadêmica. Já a segunda etapa, foi constituída pela descrição do processo de elaboração, execução e análise de nossa pesquisa de campo, caracterizada como sendo uma proposta de Seminário de Álgebra Linear, para alunos de uma Licenciatura em Matemática. Os desdobramentos dessas etapas serão apresentados nas seções seguintes.

3.2. A Entrevista

Buscando coerência com a nossa preocupação com a formação matemática do professor de Matemática, em relação às disciplinas consideradas de cursos de conteúdo matemático, em particular a Álgebra Linear, esta entrevista teve como objetivo refinar nosso olhar sobre as possíveis contribuições da disciplina Álgebra Linear à prática profissional desses professores e para nos auxiliar na elaboração do Seminário de Álgebra Linear.

Tendo em consideração que esta entrevista foi utilizada nesta pesquisa e na pesquisa da mestranda Aretha (cf. ALVES, 2013) - como já foi dito na introdução deste trabalho, os dois pesquisadores trabalharam de forma conjunta em suas pesquisas – a formulação de todas as questões e questionamentos que ocorreram ao longo do processo, tanto em relação ao conteúdo espaços vetoriais quanto para as transformações lineares, foram elaboradas, discutidas e aplicadas pelos dois pesquisadores. Somente as análises da leitura da produção de significados dos sujeitos de pesquisa foram feitas de forma individual, respeitando assim o foco de cada pesquisador.

Desta forma, a entrevista foi feita com três alunos de um curso de pós-graduação em Educação Matemática de uma universidade pública brasileira, que haviam acabado de cursar um segundo curso de Álgebra Linear.

A entrevista foi elaborada de forma semi-estruturada e constou de duas fases. Na primeira fase, que aconteceu aproximadamente uma semana antes da entrevista, foram enviadas aos sujeitos de pesquisa duas tarefas sobre o conteúdo específico de Álgebra Linear (a tarefa 1 era sobre Espaços Vetoriais e a tarefa 2 sobre Transformações Lineares), com a intenção de que eles as resolvessem e enviassem suas resoluções para os pesquisadores. A escolha de enviar as questões aos sujeitos de pesquisa é justificada por dois motivos: primeiro, por nossa dificuldade em disponibilizar um momento presencial com os envolvidos, para que as tarefas fossem resolvidas e, segundo, pela possibilidade de criar nos sujeitos de pesquisa uma maior autonomia e propiciar a eles um maior tempo para reflexão em suas resoluções.

Após receber as resoluções dos sujeitos, os pesquisadores realizaram uma leitura da produção de significados dos registros. As questões propostas são por nós consideradas *familiares e não-usuais*, no sentido proposto por Silva (2003):

> Familiar, no sentido de permitir que as pessoas falem a partir daquele texto e, não-usual, no sentido de que a pessoa tenha que desprender um certo esforço cognitivo na direção de resolvê-lo. O fato de a tarefa ser não-usual tem como objetivo nos permitir – enquanto professores ou pesquisadores - observar até onde a pessoa pode ir falando. [...] É importante ressaltar que a crença de que uma tarefa seja familiar e não-usual está presente apenas nas expectativas do pesquisador através do seu entendimento dos sujeitos envolvidos e do contexto onde o problema será aplicado, pois, não há nada que garanta tal crença. (SILVA, 2003, p. 53).

As duas tarefas propostas aos sujeitos de pesquisa foram:

TAREFA 1:

A respeito de um conjunto definido como $W = \quad x,y,z \ \in IR^3;\ x+y=0 \text{ e } z=0$,

responda:

(a) É possível exibir infinitos pares de elementos de W, cuja soma resulta no vetor nulo de IR^3*?*

(b) Podemos afirmar que W é um subespaço de IR^3*, com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar, sobre o corpo dos Reais?*

TAREFA 2:

Investigue se é possível existir uma transformação linear de IR^3 *em* IR^2*, tal que seu núcleo seja gerado pelo vetor (1, -1, 0).*

Em nosso trabalho analisamos apenas a tarefa 2, pois ela está relacionada especificamente com a noção de transformação linear. Para maiores detalhes acerca da analise da tarefa 1 consulte (ALVES, 2013).

A justificativa da escolha da tarefa 2 deve-se a vários fatores. Inicialmente, devido ao fato de que o próprio enunciado da tarefa foi estruturado num formato não convencional, induzindo o sujeito de pesquisa a uma investigação e não em buscar um algoritmo de resolução. Segundo, a tarefa tem uma ligação direta com a tarefa 1 proposta aos sujeitos, visto que o vetor que gera o núcleo da transformação linear é exatamente uma base para o subespaço envolvido na tarefa 1. Outro motivo da escolha foi devido ao fato dessa tarefa não apresentar somente uma solução, visto que é possível exibir infinitas transformações lineares que satisfazem à condição imposta. Por fim, nesta tarefa, consideramos que os sujeitos de pesquisa são convidados a produzir significados em relação a vários conceitos centrais relacionados às transformações lineares, como definição de núcleo de uma transformação linear, a construção de um lei de formação da suposta transformação linear conhecendo-se apenas o que ela faz com os vetores da gerados por (1,-1,0), o uso do teorema do núcleo e da imagem em relação à uma transformação linear, as noções de base e dimensão de uma espaço vetorial e as propriedades de uma transformação linear. Após recebermos as duas tarefas resolvidas pelos sujeitos de pesquisa, elaboramos algumas perguntas sobre as soluções apresentadas, para serem feitas aos sujeitos no momento da entrevista.

A segunda fase da entrevista consistiu, num primeiro momento, em uma conversa com os sujeitos de pesquisa sobre os pontos considerados centrais nas resoluções das duas tarefas propostas. Num segundo momento, foi aplicado um questionário oral[4], com a intenção de identificar quais seriam as possíveis contribuições das disciplinas de conteúdo matemático na formação dos professores de Matemática e as influências de sua formação acadêmica em sua prática profissional, em particular em relação à disciplina Álgebra Linear.

As questões propostas no questionário tiveram como característica principal não antecipar a resposta dos entrevistados, no sentido de deixar o entrevistado produzir significados na direção que lhe fosse conveniente. Buscamos introduzir nossos temas de interesse ao longo da entrevista por meio de perguntas que permitissem ao entrevistado falar sobre os mesmos.

De uma forma geral, cada uma das três entrevistas durou em torno de 50 minutos, foram integralmente gravadas em áudio e posteriormente transcritas pelos pesquisadores. Em cada entrevista, estiveram presentes os dois pesquisadores e o sujeito de pesquisa em questão. Não tivemos problemas com horários e disponibilidade, visto que conseguimos propor aos sujeitos de pesquisa horários e locais para realizar as entrevistas que não alterassem suas rotinas profissional e acadêmica.

A análise da produção de significados dos sujeitos de pesquisa em relação à entrevista e nossa leitura das transcrições realizadas serão detalhadas no capítulo 4.

3.3. A Pesquisa de Campo

3.3.1 A Elaboração do Seminário

---

[4] As questões do questionário foram elaboradas em conjunto pelos dois pesquisadores envolvidos. Sua versão completa encontra-se no anexo II.

Nossa pesquisa de campo foi realizada no Laboratório de Pesquisa do programa de Mestrado, ao qual estamos vinculados, sempre com a participação dos quatro envolvidos no Seminário: eu, Aretha e os dois sujeitos de pesquisa[5].

O curso foi caracterizado como Seminário de Álgebra Linear, voltado para alunos da Licenciatura em Matemática. Tal seminário não teve ligação com as disciplinas do Departamento de Matemática (DM), não adicionado créditos para os alunos envolvidos, nem estava preso às ementas das disciplinas do DM. Todos os envolvidos participaram apenas com a intenção de ampliar sua forma de ver a Álgebra Linear e pelo interesse em nossa pesquisa.

O curso foi realizado em 9 (nove) encontros (22/11/12, 14/12/12, 21/12/12, 11/01/13, 14/01/13, 25/01/13, 26/01/13, 28/01/13 e 02/02/13), alternado entre segundas e sextas feiras, além de alguns encontros aos sábados, devido à disponibilidade dos envolvidos na pesquisa. Cada aula teve a duração aproximada de 2 horas e 30 minutos e, na maioria das vezes, terminava quando os envolvidos estavam satisfeitos com o trabalho realizado.
Como recursos metodológicos para a coleta de dados, utilizamos observação participante, a captação e gravação em áudio, coleta de dados através de folhas de tarefas (resoluções das tarefas) e no quadro (fotos das resoluções em sala) dos sujeitos, além do uso de um caderno de campo.

Todas as aulas foram integralmente gravadas em áudio, pois apesar do fato do pesquisador sempre estar presente nas aulas, acreditávamos que poderíamos perder informações em nossa análise posterior.

3.3.2. Os Sujeitos de Pesquisa

Nossa pesquisa de campo foi realizada com dois sujeitos de pesquisa cujos pseudônimos foram Euclides e Simba, alunos de uma universidade pública onde foi realizada a pesquisa.

Nosso primeiro sujeito de pesquisa foi Euclides. Euclides tem 26 anos e foi aluno do curso de Ciências da Computação, mas após 2 anos de curso, abandonou a Ciência da Computação e prestou vestibular para o curso de

[5] Salvo nosso primeiro encontro, que só contou apenas com Euclides e os pesquisadores.

Licenciatura em Matemática, no qual está no 4º período. Apesar de já ter um percurso considerável na Universidade, Euclides não havia cursado a disciplina Álgebra Linear.

Já nosso outro sujeito de pesquisa, Simba, também é aluno do 4º período, mas faz parte do novo curso de Ciências Exatas, criado a partir do projeto REUNI do Governo Federal, da universidade em questão. Neste curso, nos três primeiros períodos, os alunos têm como obrigatórias as disciplinas consideradas básicas para as Ciências Exatas, nas áreas de Matemática, Física, Química, Computação e Estatística. Após esse período, os alunos podem escolher sua formação complementar. Até a realização da pesquisa de campo, Simba ainda não havia feito sua escolha, mas segundo o próprio aluno, provavelmente sua escolha seria a Licenciatura em Matemática, escolha justificada pelo fato de já estar cursando disciplinas específicas dessa formação. Ao contrário de Euclides, Simba já havia cursado a disciplina Álgebra Linear uma vez, não tendo obtido a aprovação e estava novamente cursando a disciplina, mas com outro professor. Mesmo já tendo um contato com os conteúdos específicos da Álgebra Linear, Simba afirmava que *“eu fiz (a disciplina Álgebra Linear), mas é como eu não tivesse feito, porque eu realmente não entendo nada”*.

No interesse inicial, tínhamos a intenção de formar uma turma, mas apenas dois alunos (Euclides e Simba) tiveram a disponibilidade para participar da pesquisa. Assim, o Seminário foi dirigido para os dois alunos; o que na graduação (Licenciatura e Bacharelado) em Matemática ocorre com frequência.

3.3.3. Posições Metodológicas

Fundamentados pela revisão da literatura e por nossa análise da entrevista, projetamos uma estrutura de um Seminário para alunos da Licenciatura em Matemática, em relação à disciplina Álgebra Linear. Essa elaboração foi realizada de forma cooperativa com a mestranda Aretha Fontes Alves e por nossos orientadores.

Na elaboração deste Seminário, estivemos orientados por nossa crença de que cursos de conteúdo matemático para uma Licenciatura não devem ser definidos apenas como cursos de Matemática, mas sim de Educação Matemática, nos quais, além do objeto matemático a ser trabalhado, há uma preocupação em esclarecer objetivos, pressupostos epistemológicos, questões didáticas e metodológicas relacionados aos processos de ensino e aprendizagem. Dessa forma, ao elaborar este Seminário, pretendemos:

(1) Tirar o foco da exposição dos conceitos e colocá-lo na produção de significados dos alunos, em relação aos elementos envolvidos em Álgebra Linear, em nosso caso, nas Transformações Lineares;

(2) Retirar o aluno de sua posição passiva frente ao processo de ensino e de aprendizagem, incentivando e oferecendo a ele oportunidades de participação efetiva e dando voz a eles, para termos condições de realizar uma leitura de sua produção de significados, com o objetivo de interagir e intervir em suas dificuldades de aprendizagem (limites e obstáculos epistemológicos);

(3) Utilizar, ao longo do Curso, procedimentos metodológicos alternativos àqueles exclusivamente expositivo-explicativos[6];

(4) Trazer à tona oportunidades nas quais o futuro professor vivencie situações de *estranhamento* quando se depara com a Matemática Acadêmica. Essa preocupação é justificada pela nossa crença de que seus futuros alunos, possivelmente, também viverão situações semelhantes quanto estiverem em contato com a Matemática em seu nível de ensino. Dessa forma, acreditamos que esse futuro professor sentir-se-á sensível ao realizar sua leitura da produção de significados de seus alunos e que exercícios de *descentramento* aconteçam. Em outras palavras, acreditamos que a influência da postura e da metodologia de ensino do professor que leciona disciplinas de conteúdo matemático nos curso de Licenciatura, são levadas para a futura prática profissional do licenciando em Matemática.

(5) A importância de trabalhar com questões familiares e não-usuais;

(6) A preocupação com a justificação dos significados produzidos;

(7) A consciência da existência de diferentes modos de produção de significados para um mesmo conceito ou problema (resíduo de enunciação) em Álgebra Linear.

[6] Esses procedimentos serão discutidos na seção 3.3.5. A Dinâmica do Curso de Serviço.

Depois de assumidas essas posições metodológicas, começamos a elaborar a estrutura de um Seminário de Álgebra Linear voltado para Licenciatura em Matemática. O Seminário foi planejado e construído a partir de fichas de trabalho, nas quais os conteúdos foram separados e ordenados de acordo com nossas análises de trabalhos anteriores, com as discussões em nosso grupo de pesquisa e pela experiência em sala de aula de nossos orientadores. Assim, nosso material foi dividido em 8 (oito) fichas de trabalho, sendo as 4 (quatro) primeiras relacionadas com os Espaços Vetoriais e as 4 (quatro) últimas, com as Transformações Lineares.

Além dessa divisão em fichas, tomamos as seguintes decisões:

1ª) Considerando este Seminário como sendo um primeiro curso de Álgebra Linear, optamos por tomar os espaços vetoriais IR^n , com n variando de 1 ao infinito, sobre o corpo IR com as operações usuais e seus respectivos subespaços, pois nossa intenção era oferecer aos alunos (sujeitos de pesquisa) uma primeira experiência e primeiro contato com os conceitos e com modos de se operar em Álgebra Linear. A ampliação desse rol de elementos surgiria ao longo do Seminário, devido à própria necessidade dos sujeitos em ampliar sua forma de produzir significados para os elementos envolvidos;

2ª) O Seminário seria conduzido da seguinte forma: a primeira parte, correspondente aos Espaços Vetoriais, seria conduzida por mim, e a segunda parte – Transformações Lineares – seria conduzida pela mestranda Aretha. Essa escolha é justificada pelo foco da pesquisa de cada um. Quando um dos mestrandos estivesse conduzindo as aulas, o outro teria uma maior liberdade em fazer registros no caderno de campo e de realizar sua leitura do processo de produção de significados dos sujeitos;

3ª) Os conceitos da Álgebra Linear foram enunciados nas fichas e os sujeitos de pesquisa foram convidados e estimulados a ler e produzir significados para as definições, propriedades, teoremas, proposições e observações a respeito do conteúdo. Tentamos diminuir, na medida do possível, a influência do responsável em conduzir a ficha de trabalho nas produções de significados dos sujeitos, não realizando comentários ou direcionado a produção de significados dos sujeitos de pesquisa, para a direção que o professor produz significados. Na maioria dos casos, o(a) professor(a) permanecia em silêncio enquanto os sujeitos liam as fichas de trabalho e expunham suas considerações. Nosso objetivo era realizar uma leitura da produção de significados dos sujeitos e, a partir daí, observar os processos constituição de objetos, de estranhamento, de impermeabilização e as particularidades que poderiam surgir ao longo do processo.

4ª) Entre as tarefas propostas nas fichas de trabalho, algumas têm a característica de serem *usuais*, no sentido de oferecer ao aluno uma oportunidade de realizar os processos algébricos envolvidos na Álgebra Linear. Outras tarefas incluídas nas fichas tinham como principal característica o fato de serem consideradas por nós, *familiares e não-usuais*, visto que desejávamos que os sujeitos de pesquisa realizassem um certo esforço cognitivo na direção de resolvê-los, além de ter o objetivo de nos permitir – enquanto professores/pesquisadores - observar até onde o sujeito de pesquisa poderia ir falando sobre a teoria e seu *modos operandi*. Com isso, desejávamos que, por intermédio das tarefas, os sujeitos de pesquisa pudessem verificar definições, para os teoremas, observações; observar o rigor matemático; produzir justificações para suas crenças-afirmações e sugerir novos modos de produzir significados para determinado conceito, ampliando assim sua forma de ler uma definição matemática.

Para finalizar nossa construção do Curso de Serviço, elaboramos um total de 8 (oito) fichas de trabalho para utilizar em nossa pesquisa de campo, com os seguintes tópicos:

1ª ficha: Espaços Vetoriais de Subespaços Vetoriais;
2ª ficha: Combinação Linear e Geração de Subespaços;
3ª ficha: Dependência e Independência Linear;
4ª ficha: Base e Dimensão de um Espaço Vetorial;
5ª ficha: Definição e Propriedades das Transformações Lineares;
6ª ficha: Teorema da Existência e Unicidade de uma Transformação Linear;
7ª ficha: Núcleo e Imagem de uma Transformação Linear;
8ª ficha: Transformações Lineares Injetoras, Sobrejetoras, Bijetoras e Isomorfismo.

As quatro primeiras fichas foram desenvolvidas pela mestranda Aretha, e as restantes por mim. No processo de elaboração das fichas, todo nosso grupo discutia, revisava e refinava o material, como será detalhado na próxima seção, onde expomos nossa leitura da construção de cada uma das fichas de trabalho.

3.3.4. As Fichas de Trabalho

Nesta seção realizamos uma análise do material produzido para o Seminário: as fichas de trabalho.

Como havíamos comentado anteriormente, as fichas de trabalho foram produzidas respeitando o foco da pesquisa de cada pesquisador. Assim, a mestranda Aretha construiu as 4 primeiras fichas (relativas ao estudo dos Espaços Vetoriais) e ficaram as 4 últimas fichas sob minha responsabilidade (relativas ao estudo das Transformações Lineares).

Após a elaboração de uma ficha, o mestrando enviava aos demais membros do grupo (pesquisadores e orientadora) sua primeira versão da ficha em questão. Após a leitura individual dos membros, nosso grupo reunia-se e discutia a elaboração da ficha, como os enunciados, o rigor da escrita, as definições, teoremas, observações, as tarefas propostas e os elementos que desejávamos observar, mediante o estudo da ficha de trabalho, entre outros detalhes. Estes momentos foram, em geral, ricos para todos nós, pois eram neles em que expúnhamos o que acreditávamos ser importante em um primeiro curso de Álgebra Linear para uma Licenciatura, além de nossa preocupação relacionada à produção de significados a partir das ideias matemáticas envolvidas na teoria.

Devido ao fato desta pesquisa ter seu foco no estudo das Transformações Lineares, passaremos agora a descrever como foram feitas nossas escolhas para a elaboração das quatro fichas relacionadas a esta noção[7].

A quinta ficha continha a definição e as propriedades imediatas das Transformações Lineares. Além desses elementos, as tarefas propostas nesta ficha não tiveram como expectativa propor aos sujeitos que realizassem as “contas” para mostrar, por exemplo, que uma dada função entre dois espaços

[7] Todas as fichas de trabalho produzidas e trabalhadas ao longo do Seminário então no anexo III.

vetoriais é ou não uma transformação linear, mas sim de provocar neles uma necessidade de se discutir a teoria.

A sexta ficha trouxe o enunciado e uma demonstração de um importante teorema relacionado ao estudo das transformações lineares: o teorema que nos permite afirmar que toda transformação linear fica completamente determinada se conhecermos a atuação dessa transformação nos elementos de uma base do domínio. O interessante nesta ficha é que, em cada trecho da demonstração, desenhamos balões nos quais os sujeitos de pesquisa deveriam expor sua produção de significados relacionada aos passos da demonstração, até determinado ponto. Nossa intenção era que os sujeitos produzissem significados para cada passagem da demonstração, provocando neles uma sensação de estranhamento frente aos elementos ali postos de forma direta, visto que, ao construir uma demonstração, um matemático, por muitas vezes, constrói sua escrita fundamentado em técnicas de demonstração.

Na sétima ficha, intitulada Núcleo e Imagem de uma Transformação Linear, trouxemos aos sujeitos de pesquisa as definições de Núcleo e Imagem de uma transformação linear e particularidades desses conceitos em relação aos espaços vetoriais do domínio e contradomínio da transformação linear. Fechamos a ficha com o importante teorema do Núcleo e da Imagem. Cabe ressaltarmos que as tarefas dessa ficha tiveram o objetivo de propiciar aos sujeitos uma experiência com as “contas” que realizamos em Álgebra Linear, isto é, tarefas familiares e usuais.

A oitava ficha continha a teoria relacionada às Transformações Lineares Injetoras, Sobrejetoras, Bijetoras e o Isomorfismo. Fizemos questão de discutir nesta ficha a relação entre a Álgebra Linear e o estudo das Funções no Ensino Médio. Novamente, as tarefas propostas nesta ficha não tinham apenas a característica de propor aos sujeitos os algoritmos de resolução, mas também a intenção de promover o diálogo sobre a teoria.

Havíamos construído mais uma ficha sobre transformações lineares, que tratava exclusivamente sobre as transformações lineares no plano e seu possível apelo geométrico. Apesar de considerarmos importante a aplicação desta ficha, não pudemos trabalhá-la com os sujeitos, devido à incompatibilidade de horários entre pesquisadores e sujeitos de pesquisa, após o início do mês de fevereiro e do calendário escolar da Educação Básica, no qual os pesquisadores atuam como professores.

Ao trabalhar cada uma dessas fichas, as tarefas propostas aos sujeitos eram resolvidas em folhas especialmente preparadas para serem entregues aos pesquisadores, que iniciariam sua leitura dos registros da produção escrita e gravada em áudio dos sujeitos.

3.3.5. A Dinâmica do Seminário

Considerando que desejávamos utilizar procedimentos metodológicos alternativos àqueles exclusivamente expositivo-explicativos, a dinâmica do nosso Seminário em Álgebra Linear era a seguinte: no início da aula, os alunos eram convidados a ler e produzir significados para a teoria proposta na ficha de trabalho. Após a leitura individual dos alunos, o pesquisador responsável por conduzir aquela aula, propunha aos alunos que expusessem sua produção de significados para os resíduos de enunciação em questão. A partir desse momento, começava um processo de comunicação e interação entre os sujeitos do grupo, mesmo quando, em alguns momentos, os sujeitos produziam significados e constituíam objetos distintos para o mesmo resíduo de enunciação. Toda essa discussão tinha o objetivo, para nós, de criar um espaço comunicativo durante os encontros.

Após essa discussão inicial, os alunos eram convidados a trabalhar com as tarefas propostas em cada seção das fichas de trabalho. Essas tarefas, como dito anteriormente, foram pensadas e construídas para nos possibilitar realizar uma leitura dos significados produzidos pelos alunos para os resíduos de enunciação que nós lhes apresentávamos. Acreditamos também que, por considerarmos algumas dessas tarefas como sendo familiares e não-usuais, os alunos tenham a necessidade de ampliar sua forma de produzir significados para os conceitos, visto que em grande parte das tarefas, os alunos não deveriam simplesmente repetir um algoritmo, mas sim, fazer uso de seus conhecimentos produzidos para justificar suas escolhas e resultados obtidos.

Ao final de cada encontro, deixávamos algumas tarefas para que Euclides e Simba resolvessem em casa, pois pudemos perceber que estavam motivados e envolvidos na atividade do Seminário. Essas questões eram discutidas no início do encontro seguinte e eram, posteriormente, analisadas pelo pesquisador responsável por aquela ficha de trabalho. Caso houvesse alguma consideração a ser feita pelo pesquisador em relação às resoluções dos alunos, retomávamos essas questões na aula seguinte. Este fato ocorreu várias vezes, principalmente em relação às justificações de suas respostas e à escrita de soluções de questões em Álgebra Linear e, como, por exemplo, as diversas formas de representação de um mesmo conjunto, distinções existentes entre a representação entre chaves e entre colchetes em conjuntos geradores. Outras situações serão expostas em nossa leitura individual da produção de significados de Euclides e Simba a partir das fichas de trabalho, realizada no Capítulo 5.

Outro recurso que utilizamos ao longo do Seminário, foi o uso do quadro para demonstrações de alguns teoremas e construção de exemplos e contraexemplos relacionados com a teoria em Álgebra Linear. Todos os envolvidos, pesquisadores e sujeitos de pesquisa, tinham a liberdade de ir ao quadro e expor sua produção de significados. Em geral, estes momentos foram extremamente ricos para todos, pois além de oferecer ao pesquisador uma oportunidade de participar como mediador do processo de produção de significados dos sujeitos, permitiam aos sujeitos uma forma de compartilhar seus modos de produção de significados e interagir com os participantes do Seminário, além de inverter algumas características oriundas do ensino tradicional vigente, no qual, em grande parte, é conduzido pelo professor expondo o conteúdo e o aluno copiando. Agora era o aluno que expunha suas produções de significados e o professor (em nosso caso, os pesquisadores) que copiava e discutia a produção do aluno.

Outro fato recorrente em nossos encontros foram as conversas sobre situações que podem vir a acontecer com os alunos quando estiverem atuando em sua futura prática profissional. Estes momentos surgiam, em grande parte, de forma espontânea pelos pesquisadores, que dada uma determinada discussão, viam uma relação com os acontecimentos de sua própria prática profissional na Educação Básica e no Ensino Superior. Algumas situações comentadas eram situações em que os próprios sujeitos se encaixavam ou já haviam vivenciado, como, por exemplo, quando definimos o simétrico aditivo de um vetor *u* como sendo o único vetor *u’* do espaço vetorial, tal que $u + u' = \bar{0}$, surgiu a discussão sobre o ensino dos números inteiros no Ensino Fundamental. Simba se mostrou extremamente interessado por essa discussão e logo perguntou: “*eu sempre quis saber porque menos vezes menos dá mais! Nunca ninguém me explicou isso”.* Já em transformações lineares, um tema que foi questionado é “*por que nem toda função do primeiro grau pode ser considerada uma função linear, já que seu gráfico é uma reta, ou seja, é linear?”*, disse Euclides em um encontro.

Os dois capítulos seguintes são dedicados à nossas leituras da produção de significados dos sujeitos de pesquisa ao longo da Entrevista e do Seminário em Álgebra Linear.

CAPÍTULO 4

UMA LEITURA DA PRODUÇÃO DE SIGNIFICADOS: A ENTREVISTA

Neste capítulo, desenvolveremos uma análise da produção de significados dos sujeitos de pesquisa envolvidos em nossa entrevista. Nossa leitura de seus resíduos de enunciação será fundamentada e orientada pelos nossos pressupostos descritos nos capítulos anteriores. Será descrita a análise da produção de significados de cada um dos sujeitos - André, Letícia e Jordão - individualmente.

Os três entrevistados possuem idades distintas, cursaram a Licenciatura em Matemática em instituições e em períodos distintos e lecionam Matemática em diversos níveis de ensino. Estas particularidades forneceram uma diversidade de dados e informações para nossa pesquisa.

Em todas as entrevistas, os dois pesquisadores se alternaram na elaboração das perguntas e dos questionamentos, não havendo uma rigidez na ordem em que as perguntas foram feitas. Além disso, no início da cada entrevista, os sujeitos de pesquisa foram questionados a respeito de sua resolução da tarefa 1. Como o foco desta pesquisa está na tarefa 2, realizaremos apenas a leitura da produção escrita e falada nesta tarefa.

Passemos para a nossa leitura da produção de significados pelos sujeitos de pesquisa.

4.1. A Produção de Significados de André

O sujeito de pesquisa André tem 31 anos de idade, cursou a Licenciatura em Matemática no período de março de 2000 até dezembro de 2006 em uma universidade pública no Estado de Minas Gerais. Em sua prática profissional, atua lecionando Matemática para os ensinos médio e superior em escolas públicas e privadas de Minas Gerais.

André comentou sobre sua maneira de operar e os passos de sua resolução da tarefa:

TAREFA 2:

Investigue se é possível existir uma transformação linear de IR^3 em IR^2, tal que seu núcleo seja gerado pelo vetor (1, -1, 0).

André: Primeiro que eu olhei pra ver se eu ia conseguir alguma transformação. Se bem que a pergunta é essa, né. Se é possível ter a transformação, tal que o núcleo tá.

Então primeira coisa que eu fiz foi ver como é que se daria esse núcleo aí. Então eu escrevi o núcleo aqui né. Gerado por (1, -1 e 0), então, são todos os vetores da forma (x, -x e 0), reais, tais que a transformação vai levar no vetor nulo. Aí, é, é difícil explicar como é que eu fiz isso aqui cara, eu só sei que eu bati o olho nesse negócio e eu acho que a transformação que vai dar é essa aqui, uma das que vão dar é essa daqui. Porque eu pensei o seguinte, bom já que tem que levar o R^3 no R^2, aqui, seria um par ordenado e aí eu precisava de ter um zero aqui e de ter um zero aqui (apontando para a primeira e para a segunda coordenadas). Então o que que acontece, como zero é o próprio zero eu já coloquei o z aqui e como o x é o oposto do y eu peguei a soma dos dois e coloquei aqui, oh. Poderia, inclusive, ser o contrário aqui né? x + y e o z depois, mas, eu bati o olho aqui e falei, vou colocar este daqui e vai dar certo.

André foi capaz de descrever a lei de formação de uma transformação linear, cujo núcleo tinha os vetores gerados por (1, -1, 0) .

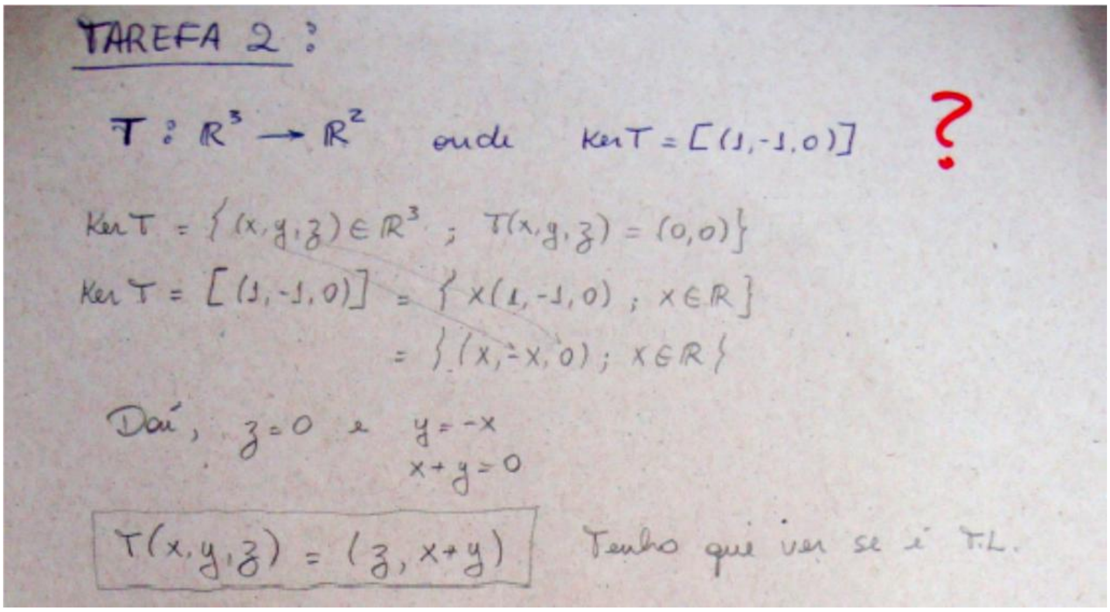


Figura 01 - Registro escrito de André - Tarefa 2

Consideramos que André obteve a lei de formação para candidata a transformação linear T de uma forma intuitiva, apenas obsevando as características que cada coordenada do vetor genérico do espaço vetorial do domínio da transformação T deveria ter em relação à condição imposta pela tarefa, isto é, que o núcleo fosse gerado pelo vetor (1,-1,0). Buscando uma outra justificação para a produção de significados de André em relação à construção da lei de formação da transformação T, tivemos o diálogo:

Pesquisador: Então explica melhor como que você montou a transformação em si. Como é que se deu esse, você falou que bateu o olho e montou.
André: Sim.

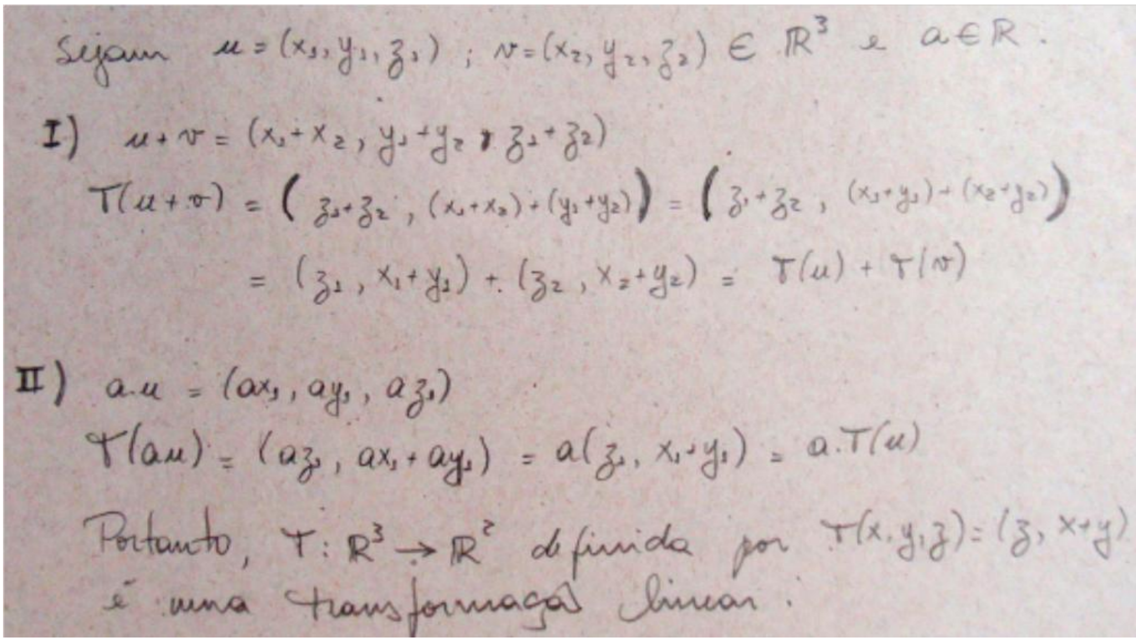
Pesquisador: A transformação. Mas, assim o que te levou a ter esse insight, vamos dizer assim, de optar por ser a primeira coordenada o z e a segunda coordenada o x + y?
André: Ah, na verdade, essa ordem aqui não tem pra mim, ela não tem muita, muito significado, assim, poderia ser o x + y aqui na abscissa e o z na ordenada, aqui, não ia fazer diferença, ia dar zero, zero do mesmo jeito. Mas é porque como eu já vi que o z era zero e a primeira é o zero, eu já coloquei logo o que vai ser zero, então. Então pra garantir aqui é zero, e aí depois eu coloquei o x + y aqui, porque o x e o y são opostos, eu só pensei isso, já que x é oposto do y então eu coloco x + y, já que são opostos vai zerar quando eu somar.
Pesquisador: Já que essa soma vai resultar em zero, você optou por colocar a soma na segunda coordenada.
André: Ahã.

Em suas palavras, André sugere que, apesar de ter obtido uma lei de formação específica para a candidata à transformação linear, ele acredita que aquela não é a única solução que poderia ser encontrada com as condições impostas na tarefa. Além disso, podemos observar que André trabalha com as estipulações locais relacionadas à definição de par ordenado (abscissa e ordenada), propriedades relacionadas à distributividade e associatividade, as operações de adição entre vetores e a multiplicação de um vetor por escalar.

Após enunciar a lei de formação da relação T de IR^3 em IR^2, André se mostrou preocupado em mostrar que tal relação era uma transformação linear de IR^3 em IR^2.

André: Aí depois que eu montei isso, eu falei eu só vou conferir se é uma transformação linear, porque eu já vi que qualquer vetor que tiver essa cara vai levar no vetor nulo, agora só tem, mas só tem que conferir se vai ser uma transformação linear. É, por isso, que eu demonstrei aqui.

Em nossa leitura da produção de significados de André, vemos que ele acreditava que qualquer vetor da forma (x, –x, 0) é levado no vetor nulo. Entretanto, não podemos afirmar se ele observou somente que os vetores dessa forma são levados no vetor nulo. Isto é, se ele preocupou-se com a existência de outros vetores que também são levados no vetor nulo do IR^2.



Sejam $u=(x_1,y_1,z_1)$; $v=(x_2,y_2,z_2) \in \mathbb{R}^3$ e $a \in \mathbb{R}$.

I) $u+v=(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$

$T(u+v) = (z_1+z_2, (x_1+x_2)+(y_1+y_2)) = (z_1+z_2, (x_1+y_1)+(x_2+y_2))$

$= (z_1, x_1+y_1) + (z_2, x_2+y_2) = T(u)+T(v)$

II) $a.u = (ax_1, ay_1, az_1)$

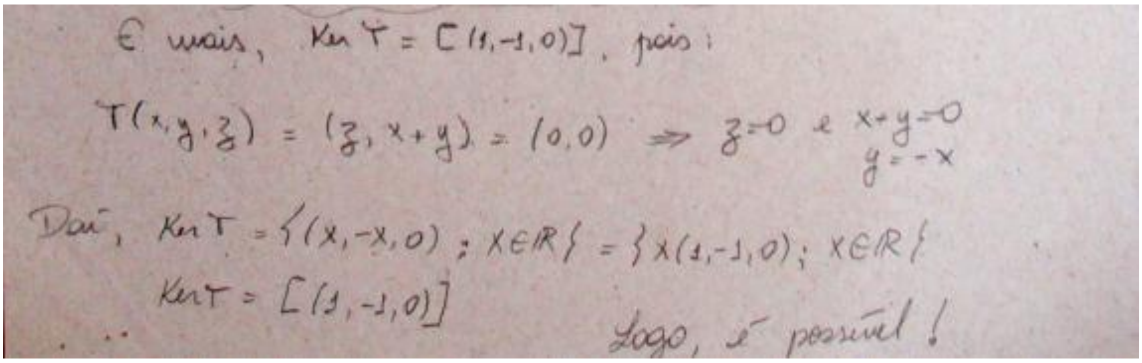
$T(au) = (az_1, ax_1+ay_1) = a(z_1, x_1+y_1) = a.T(u)$

Portanto, $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y,z)=(z,x+y)$ é uma transformação linear.

Figura 02 - Registro escrito de André - Tarefa 2

André definiu vetores u e v em IR^3 e mostrou que a transformação em questão, satisfazia as condições impostas para que ela fosse considerada uma transformação linear de IR^3 em IR^2.

Além disso, André sentiu a necessidade de justificar que a transformação linear obtida admitia realmente o núcleo gerado pelo vetor (1,-1,0) para afirmar que a transformação era uma solução para a tarefa. A justificação para essa sua crença-afirmação foi:



E mais, $\ker T = [(1,-1,0)]$, pois:

$T(x,y,z) = (z, x+y) = (0,0) \Rightarrow z=0$ e $x+y=0$, $y=-x$

Daí, $\ker T = \{(x,-x,0) ; x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,-1,0) ; x \in \mathbb{R}\}$

$\ker T = [(1,-1,0)]$

Logo, é possível!

Figura 03 - Registro escrito de André - Tarefa 2

Quando questionado sobre possibilidade de determinar uma transformação T de outra forma, André afirmou que aquela era a única forma que ele via para solucionar o problema.

Pesquisador: É porque você pegou uma transformação qualquer e tentou depois, ver se ela é linear. Bom, será que toda transformação só teria essa forma de fazer, você teria que "chutar" uma transformação?
André: Eu não pensaria em outra coisa não. Eu pensaria nisso aqui mesmo.

Para finalizar o primeiro momento da entrevista, André foi perguntado a respeito das possíveis dificuldades que ele encontrou ao resolver a questão e em relação aos conceitos utilizados em sua resolução. Ao ser questionado sobre isso:

André: Eu não vou falar que ela é difícil, mas eu também não vou falar que ela é tão simples quanto a número um. A questão que eu tive que pensar um pouco mais. Apesar de que, ao passo que eu fui fazendo, aí na hora que chegou aqui eu falei assim ah, beleza, eu acho que essa função aqui vai dar certo. Essa transformação aqui vai dar certo. Mas, ela não é uma questão tão, pra mim, simples quanto a número um. Pra mim, ela tem um nível de dificuldade um pouco maior, você tem que saber o que que é núcleo, por exemplo.
Pesquisador: Então completa aí pra nós, quais os conceitos que você usou aí, que você acha que sejam mais?
André: Transformação Linear, a questão do Núcleo, a questão do que que significa levar do IR^3 no IR^2, a questão de um vetor gerando, um vetor gera, um vetor gerando aqui um núcleo, ela tem inclusive, pra mim, pelo menos, tem mais coisa que a número um. Evidenciando assim no enunciado.

Observamos nas falas de André que ele, ao resolver a tarefa, isto é, ao tentar determinar uma transformação linear de IR^3 em IR^2 tal que seu o núcleo seja gerado pelo vetor (1,-1,0), ele produziu significados na direção de "levar" o IR^3 no IR^2. André afirmou que, nas tarefas propostas, estavam envolvidos vários conceitos centrais de todo o curso de Álgebra Linear.

Terminado o diálogo inicial a respeito da solução da tarefa 2, o foco da entrevista se voltou para o questionário sobre as possíveis contribuições das disciplinas de conteúdo matemático, em particular a disciplina Álgebra Linear, em sua formação, na formação dos professores de Matemática e sobre a influência de sua formação acadêmica em sua prática profissional.

Ao ser questionado, de uma forma geral, sobre as possíveis influências das disciplinas de conteúdo matemático em seu curso de Licenciatura, André afirmou:

André: Cara, assim, a verdade mesmo, é que são poucas as disciplinas que a gente faz na graduação e vira e fala assim, eu entendi esse negócio. Se você me perguntar qualquer coisa sobre Cálculo I, eu vou te falar, mas a verdade, na realidade é que a gente vai fazendo as disciplinas num sabe muito bem pra que que aquilo serve, também não existem esclarecimentos da parte dos professores, do porquê daquilo.

Então você vai fazendo, você vai fazendo prova e você esquece daquilo. Um dia, se você precisar, você vai voltar e vai estudar.

Para André, as disciplinas de conteúdo matemático eram cursadas por ele sem um sentido. Segundo ele, basicamente o que se produzia durante os cursos era uma mera reprodução do que cairia na prova e o papel durante a disciplina era o de conseguir a média para ser aprovado e pronto. Essa afirmação pode ser vista na seguinte fala:

André: [...] Então, assim, mas a grande maioria, e eu me incluo, nessa maioria, eu fiz Análise com o intuito de passar. Passei, tchau e benção. Álgebra II, por exemplo, a mesma coisa, eu não lembro quase nada de Álgebra II, não lembro mesmo.

Quando questionado sobre a disciplina Álgebra Linear:

Pesquisador: Então, vamos supor, uma disciplina de Álgebra Linear. Então você tá querendo dizer que se você não tivesse feito essa disciplina, você acha que você seria hoje o mesmo professor que você é?
André: Da graduação que você diz?
Pesquisador: É. Não tivesse feito na graduação, Álgebra Linear. Você acha que você seria e teria a mesma formação, o mesmo formato de aula?
André: Não. Eu acho que não. Porque, tipo assim, você vai vendo o que é e o que não é. De repente, tem um aspecto do professor que você olha e fala assim, isso eu nunca vou fazer com o meu aluno, esse tipo de metodologia eu nunca vou adotar, porque eu já to vendo que não vai dar certo, esse tipo de postura também. Agora é difícil falar, se eu nunca tivesse visto Álgebra Linear será que minha postura teria mudado? A verdade é que eu só vi sistema linear em Álgebra Linear, por exemplo, aquela questão de Regra de Cramer, Sistema Possível Determinado, Indeterminado que eu já tinha visto no Ensino Médio aquilo não fazia muito sentido, pra mim, tomou sentido quando eu fiz Álgebra Linear. Então, possivelmente, se eu não tivesse visto Álgebra Linear, por exemplo, continuaria até hoje sem sentido, e eu reproduziria esse sem sentido, e o meu aluno, também, pra ele não faria sentido algum.

Num primeiro momento, vemos que a metodologia e a postura do professor que leciona a disciplina são levadas fortemente em consideração. Para André, vivenciar uma metodologia que “não deu certo” em um curso de Álgebra Linear, serve como uma possibilidade de aprender o que não fazer com seus futuros alunos. Já em relação aos tópicos relacionados à Álgebra Linear, vemos que André acredita que as disciplinas de conteúdo matemático podem oferecer ao futuro professor esclarecimentos sobre alguns elementos da matemática do matemático, de ampliar a forma de produzir significados para aquelas noções, como ele citou em relação aos sistemas de equações lineares.

Ao ser questionado sobre os tópicos da Álgebra Linear que ele não iria trabalhar no Ensino Médio, André se mostrou indiferente sobre sua importância direta, mas acredita que indiretamente esses conteúdos podem enriquecer sua prática profissional. Entretanto, ele não foi capaz de justificar essa afirmação.

Pesquisador: [...] a parte de Espaços Vetoriais, de Transformações Lineares é algo que você não utiliza, por exemplo, no Ensino Médio. Se você não tivesse feito essa parte então?
André: Se eu não tivesse feito isso, eu nem saberia que isso existia.
Pesquisador: Você acha que não mudaria em nada a sua prática profissional?
André: Provavelmente não. Até porque eu não utilizo estes conceitos né. É, diretamente.
Pesquisador: E indiretamente?
André: Indiretamente você acaba usando, né. É tudo estrutura algébrica uai.
Pesquisador: Me dá um exemplo de como você usa isso indiretamente?
André: [*Após pausa para pensar*] Quando você próprio fala de matrizes, por exemplo, sistema linear, você tá trabalhando tudo isso, né. Essa questão do espaço vetorial, a questão das matrizes, esse tipo de coisa. Eu não sei explicar muito bem, porque eu também nunca parei pra pensar nessas coisas né.

Uma preocupação que se mostrou constante nas falas de André foi em relação à postura do professor ao lecionar uma disciplina de conteúdo matemático. André considerava a falta de esclarecimento, por parte de aluno, de como seria a disciplina, como um ponto agravante e que muito o incomodava. Além disso, ele retorna a sua afirmação que, durante sua graduação, o importante era ser aprovado na disciplina e não descobrir os porquês das coisas. Entretanto, ao fazer as mesmas disciplinas, só que agora em um curso de pós-graduação, o foco mudou. Vemos nas falas de André, após cursar um segundo curso, uma preocupação com a reflexão a respeito dos conteúdos matemáticos e não mais com a aprovação nas disciplinas.

André: [...] O grande problema é que eu enquanto aluno, não sei qual é esse porquê, os professores que dão essas disciplinas também não sabem o porquê dessas coisas. Eles podem até saber "n" aplicações da Álgebra Linear no Ensino Fundamental no Ensino Médio, em qualquer nível de Ensino. Mas, isso não é colocado pro aluno. Nunca um professor chegou pra mim e falou, ó gente nós vamos começar a ver Álgebra Linear aqui hoje, é uma disciplina, eu vou mostrar aqui pra vocês o cronograma da disciplina e isso e isso aqui a gente vai poder usar futuramente nisso, naquilo outro, isso vai fazer uma conexão com isso. [...] E, é claro, que não é tirando totalmente a responsabilidade do ombro dos alunos, mas nem os alunos têm essa conduta de buscar o porquê das coisas [...]. E eu também era assim, lógico. Eu tava preocupado em passar, em terminar logo e começar a trabalhar [...]. Mas, quando eu vim pro Mestrado, e eu decidi fazer a disciplina de Cálculo, eu queria fazer o Cálculo com outros olhos, [...] Então, depois que você passa você sai da graduação, os seus olhos mudam, lógico, lógico que mudam [...].

Outro ponto considerado por nós importante na fala de André é em relação à forma em que é oferecido o curso de Álgebra Linear e em relação às possíveis aplicações do conteúdo da Álgebra Linear em sua prática profissional. Para ele, os conteúdos matemáticos são oferecidos de forma fragmentada, dificultando ao aluno uma visão abrangente a respeito da matemática envolvida nas disciplinas.

André: Eu acho que assim, nem tudo vai ser, nem todas as coisas serão imediatamente aplicadas, algumas coisas, elas serão pré-requisitos, é, por exemplo, você vai falar disso, amanhã você vai falar daquilo outro, e aí, no dia de amanhã, quando você tiver condição de abranger a sua visão do todo, então aquilo ali tudo amarrado vai ganhar um sentido então, mas o problema é que a nossa conduta não é levada a isso, a impressão que dá é que você vai pegando pedacinhos e vai, tudo fragmento e vai guardando sempre em gavetas separadas, você nunca coloca numa gaveta, a gaveta da Álgebra Linear, não você vê o que, sistema aí dentro de sistemas tem lá, regra de Cramer, regra disso, regra daquilo, tal, tal, tal, aí você passa. Espaço vetorial, aí você vem, subespaço vetorial, aí você chega em núcleo, você vai passando, você vê anel, você vê corpo, você vê... várias estruturas, só que você vai jogando tudo cada um pra uma gaveta. E, depois você não consegue amarrar isso, então não é que isso é culpa dos professores, ou é culpa da disciplina, eu acho que é difícil achar um culpado, mas fato é que da maneira como a gente vê ou como a gente faz, ou como o ensino da graduação se dá, ela não contribui pra que o aluno veja o todo, ele sempre vai estancando as coisas, os professores também não adotam uma postura de tentar orientar e os alunos também adotam também uma postura de não buscar essa orientação, porque pra ele é muito mais cômodo só tirar a nota.

Ao ser perguntado sobre em que esse modelo de aula influenciou sua formação e prática profissional, André se considera aliviado por não engessar suas aulas. Para ele, o importante é ser capaz de produzir significados diversos sobre o conteúdo a ser trabalhado em sala de aula e não em sua capacidade de reprodução do conteúdo.

Pesquisador: E esse formato de curso te influenciou em que?
André: Em nada, graças a Deus. Porque, por exemplo, hoje inclusive eu faço questão de chegar em sala de aula sem nenhum livro, por exemplo, se alguém falar, o André dá uma aula de alguma coisa aí, de função e tal. E se falar, mas você se baseou em que pra dar essa aula de função? Eu não vou falar que eu me baseei no A, no B ou no C. Eu estudei, tem algumas coisas que estão na minha cabeça, tem alguns exemplos que estão na minha cabeça então, a partir disso eu construo.

Após nossa leitura da produção de significados da produção escrita de André e de suas considerações sobre os questionamentos da entrevista, ficou evidente para nós a influência do modelo tradicional de ensino em sua formação e em suas concepções em relação à sua prática profissional.

Acreditamos que André não teve problemas em sua formação baseada na perspectiva do matemático e não do professor de Matemática. Entretanto, fundamentado em nossa leitura de suas respostas, para André, as disciplinas de conteúdo matemático, incluindo neste grupo a Álgebra Linear, foram apenas obstáculos que deveriam ser ultrapassados em sua formação. Para André, o que mais o influenciou nestas disciplinas foi a postura metodológica e profissional que ele não queria assumir.

4.2. A Produção de Significados de Letícia

Letícia tem 32 anos e cursou a licenciatura em Matemática em uma universidade pública de Minas Gerais entre os anos de 1999 e 2002. Atualmente, trabalha como professora de Matemática do ensino médio de uma escola Estadual e do ensino fundamental em escola Municipal da cidade onde reside.

Entre os três sujeitos entrevistados nessa etapa, Letícia foi a que mais tempo ficou com as tarefas para serem resolvidas. Este fato foi justificado pela sua insatisfação com a formalização de sua escrita. Segundo ela:

Letícia: Como formalizar, entendeu? E aí, eu fiquei pensando, pensando, pensando, achei meio tosca até essa escrita aí. Não consegui me convencer de que seria a forma melhor de se escrever essa questão, e aí eu te confesso que eu fiquei agarrada mesmo.

Podemos notar na fala de Letícia sua preocupação inicial com o formalismo da escrita matemática, algo que acreditamos ter dito influência de sua experiência após cursar a disciplina Álgebra Linear na pós-graduação. Esta influência é justificada pelo rigor que a professora da disciplina exigia em relação à escrita dos alunos durante todo o curso.

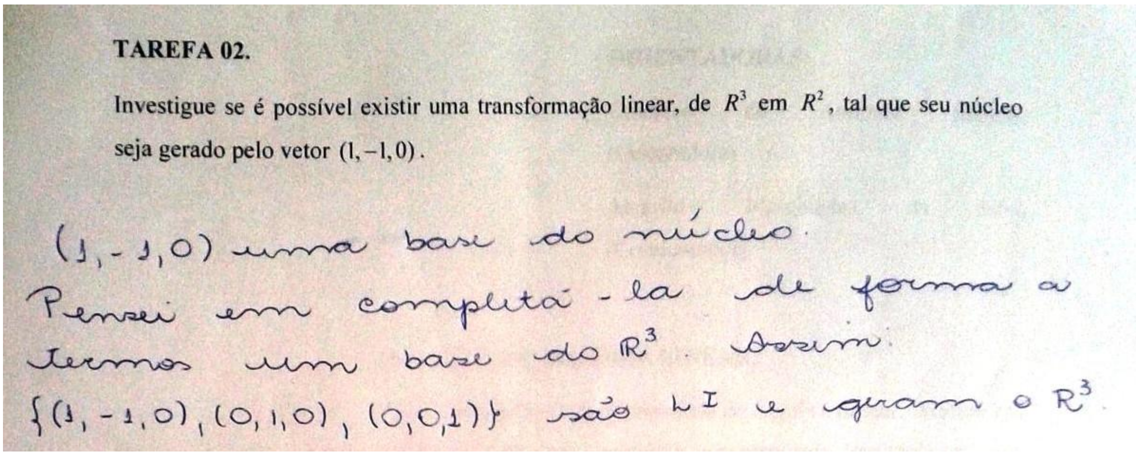
Nosso diálogo iniciou-se buscando dela uma relação entre suas dificuldades em resolver as duas tarefas:

Pesquisador: Tá ok então, tudo bem. Tarefa 2. Se fosse classificar a dificuldade dela você achou mais fácil ou mais difícil que a primeira
Letícia: Um pouco mais difícil que a primeira.
Pesquisador: Por que mais difícil? Por que você achou um pouco mais difícil?
Letícia: Não assim, é igual eu te falei, a princípio essa transformação aqui saiu sozinha, por conta própria praticamente. Olhando ali pro vetor né [*o vetor (1, -1, 0)*]. Que o núcleo deveria ser gerado por aquele vetor e ai eu consegui relembrado a

definição de núcleo e tal, de imagem né, eu tive que voltar nessa parte e ai eu consegui direto achar essa transformação que para mim, é que satisfaz o problema, mas aí depois eu fiquei pensando, gente eu não posso chegar direto nessa transformação. Eu tenho que fazer alguma coisa para poder chegar nela. Como eu vou provar que eu tirei ela do nada e tal. Porque a princípio, eu peguei ela e fui voltando, entendeu? Ai eu consegui chegar no núcleo gerado por (1, -1,0). Usei o teorema da dimensão, mas aí eu falei, não pode né. Não posso partir do final para chegar no que está sendo proposto na questão. Aí depois eu fiz o processo inverso do que tinha feito. Na verdade eu fiz daqui para lá. [*apontando inicialmente para a transformação pronta e depois na construção da transformação*].

Em nossa análise da fala de Letícia e da análise de sua produção escrita, no início de sua resolução, vimos que, apenas observando o vetor que gerava o núcleo da transformação e lembrando a definição de núcleo e imagem, ela foi capaz de obter uma transformação que satisfazia às condições da tarefa. Porém, ela acabou mudando seu modo de produção de significados para uma direção de construir a transformação e não simplesmente obtê-la diretamente de forma intuitiva. Acreditamos que Letícia considerava que sua resolução inicial não seria legítima em relação à matemática do matemático; o correto deveria ser construir a transformação, mesmo ela tendo feito o processo inverso.

Assim, para iniciar sua resolução, Letícia trabalhou buscando uma base para o IR³ de tal forma que o vetor que deveria gerar o núcleo da transformação estivesse presente nesta base. Assim:


TAREFA 02.

Investigue se é possível existir uma transformação linear, de R^3 em R^2, tal que seu núcleo seja gerado pelo vetor $(1,-1,0)$.

(1, -1, 0) uma base do núcleo.
Pensei em completá-la de forma a termos uma base do R^3. Assim:
$\{(1,-1,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ são LI e geram o R^3.

Figura 04 - Registro escrito de Letícia - Tarefa 2

Observamos na produção escrita de Letícia uma despreocupação (ou descuido) em relação à notação para a base de um espaço vetorial. Desde o início, ela acreditava que o vetor em questão formava uma base para o núcleo. Para Letícia, não foi necessário colocar o vetor (1, -1, 0) entre chaves, que é a notação matemática usual para representar um conjunto. Quando interrogada sobre sua afirmação "(1, -1, 0) é uma base do núcleo":

Pesquisador: Então deixa eu te perguntar sobre o seu andamento. Você pegou esse vetor aqui o vetor (1, -1 ,0) e afirmou que era uma base para o núcleo.
Letícia: Uhum.
Pesquisador: Como é que você afirmou isso? Porque você lendo a sua resolução, como você justificaria essa sua afirmação?
Letícia: Ah... porque foi gerado né, o núcleo foi gerado por ele, então ele poderia ser uma base para ele.
Pesquisador: Poderia?
Letícia: É uma base para ele.
Pesquisador: Porque o fato dele gerar indica que ele é uma base? Para você.
Letícia: [*reflexão*] Se é LI e gerasse W no caso gerasse o R^3.
Pesquisador: Então por que você acha então que esse vetor é uma base?
Letícia: Uai ele é LI, pois é único.
Pesquisador: Mas você não escreveu isso.
Letícia: Uhum...
Pesquisador: Parece que quando você escreveu isso, eu quando li parecia... parece que você tinha certeza, mas você não sentiu a necessidade de escrever. Por que você não teve a necessidade? É natural para você dizer que um vetor que gera é base?
Letícia: Ah... eu não sei te dizer, mas assim, para mim, no enunciado está claro. Se ele está sendo gerando por esse vetor então ele pode ser considerado a base e é LI.

Letícia, ao produzir significados para a noção de base de um espaço vetorial, o fez em uma direção de que se o vetor gera o espaço, então ele pode ser uma base daquele espaço vetorial. A condição de ser LI (linearmente independente) não esteve presente em sua resolução. Somente quando questionada sobre este fato, que Letícia afirmou que se um conjunto possui somente um vetor, então ele é LI. Além disso, nesse mesmo recorte, Letícia afirma que o conjunto {(1,-1,0), (0,1,0), (0,0,1)} é LI e gera o IR^3. Novamente, em nossa leitura, consideramos que Letícia continua operando com a lógica de que se o número de vetores for igual à dimensão do espaço, então o conjunto é uma base.

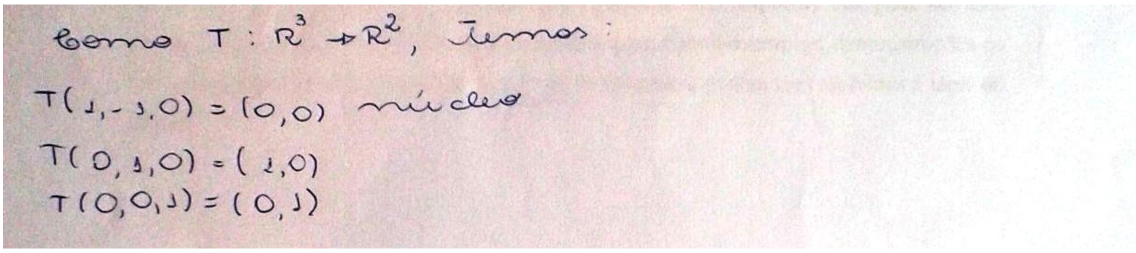
Ainda sobre o primeiro recorte de sua resolução, Letícia foi questionada em relação à escolha dos vetores utilizados para completar uma base para o IR^3 e sobre aplicação do resultado do Teorema do Núcleo e da Imagem de uma Transformação Linear:

Pesquisador: Você comentou no início da sua fala que você utilizou o teorema do núcleo e da imagem.

Letícia: Uhum.
Pesquisador: Ele não está enunciado em nenhum momento em sua resolução.
Letícia: Não tá, tava na minha primeira versão, digamos assim.
Pesquisador: E você acha que você utilizou ele aqui na sua resolução?
Letícia: Olha, eu utilizei porque a imagem no caso tem dimensão 2. No caso a dimensão do núcleo é 1 e do meu espaço é 3, no W lá no caso é 3. E aí, eu utilizando o teorema da dimensão, vejo que 3 é igual a 3 e aí é possível existir a transformação linear.
Pesquisador: Aí você pensou em completar essa base do núcleo para consegui uma base para o IR³?
Letícia: Aham.
Pesquisador: Então você precisa de mais dois vetores e escolheu esses dois vetores aqui. Por que eles?
Letícia: Os da base canônica. Ai eu não tenho muita chance de errar.
Pesquisador: Faria diferença se eu colocasse o vetor (1,0, 0) aqui?
Letícia: Não.
Pesquisador: Por quê?
Letícia: Não, Porque ele também seria, formaria uma... né, os três seriam ser LI, continuariam ser LI.
Pesquisador: Ao escrever isso aqui, para você não há necessidade de mostrar que esses três vetores são LI?
Letícia: Tem necessidade sim, mas isso eu fiz num papel a parte. Eu achei que não seria necessário colocar aí.

Neste momento da entrevista, Letícia afirma que realizou sim as operações necessárias para mostrar que um dado conjunto é ou não LI, porém continua acreditando que essa informação não é necessária para a resolução matemática da tarefa, sendo feita apenas à parte. Além disso, Letícia fez uso do resultado do teorema do núcleo e da imagem de uma transformação linear ao afirmar que se o núcleo tem dimensão 1 e a dimensão do domínio é 3, a dimensão da imagem tem que ser 2, o que coincide com a dimensão do contradomínio da transformação que é o IR². Assim, acreditava e afirmava que era possível determinar a transformação linear.

Após determinada uma base para o IR³, Letícia se direcionou para a construção da lei de formação da transformação linear. Observamos em sua escrita que, em momento algum, Letícia afirmou que tal relação T de IR³ em IR² era uma transformação linear; entretanto, ela operou considerando T uma transformação linear.



Como $T: R^3 \to R^2$, Temos:

$T(1,-1,0) = (0,0)$ núcleo

$T(0,1,0) = (1,0)$

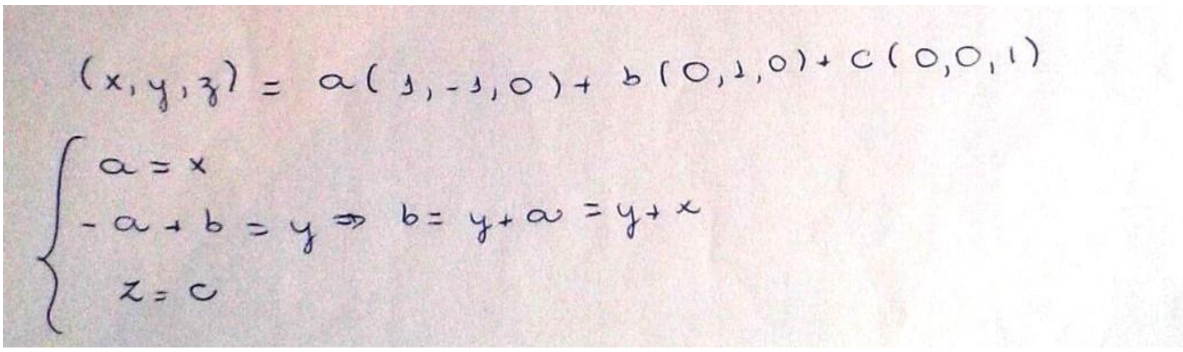
$T(0,0,1) = (0,1)$

Figura 05 - Registro escrito de Letícia - Tarefa 2

Quando interrogada sobre a escolha das imagens dos vetores (1,-1,0), (0,1,0) e (0,0,1), Letícia mostrou operar com a noção de que vetores são levados pela transformação linear e que como o vetor (1,-1,0) gerava o núcleo, ele deveria ser levado no vetor nulo do IR^2. Já em relação à escolha das imagens dos outros dois vetores da base, Letícia justificou sua escolha devido à facilidade de trabalhar com vetores da base canônica.

Pesquisador: Tá ótimo. E bom, deixa eu te falar, você falou que teria uma transformação de IR^3 no IR^2, né, e você colocou a T do vetor (1,-1,0) ia no (0,0) que você chamou no núcleo. Como você me explicaria essa passagem que você fez?
Letícia: Porque como o núcleo é gerado pelo vetor (1,-1,0) então a transformação tem que ser levada no vetor nulo do IR^2.
Pesquisador: E por que você escolheu os outros vetores da base, um deles indo no vetor (1,0) o outro dele indo no vetor (0,1)?
Letícia: Também utilizando a base canônica para os dois, poderia ser o contrário também, poderia ser outro, mas os da base canônica era mais fácil. Menos chance de errar.

Feito isso, Letícia começou construir a transformação linear. Seu primeiro passo foi escrever um vetor genérico do IR^3 como combinação linear dos vetores da base que ela construiu para o IR^3.



$$(x,y,z) = a(1,-1,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1)$$

$$\begin{cases} a = x \\ -a + b = y \Rightarrow b = y + a = y + x \\ z = c \end{cases}$$

Figura 06 - Registro escrito de Letícia - Tarefa 2

Em seguida, aplicou a suposta transformação linear T em um vetor genérico do IR^3, já escrito como combinação linear dos elementos de sua base construída e operou utilizando as propriedades operatórias de vetores, como multiplicação de um vetor por um escalar, adição de vetores e as propriedades da definição de uma transformação linear. Dessa forma, acreditamos que a preocupação principal de Letícia não estava direcionada em responder se era ou não possível obter tal transformação linear, mas sim, em determinar a lei de formação da suposta transformação linear.

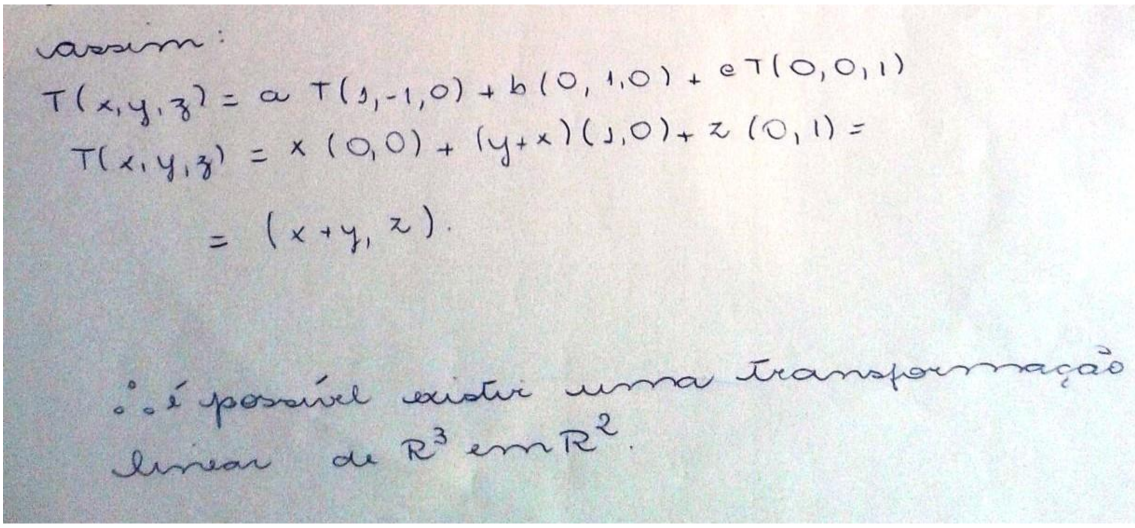


Figura 07 - Registro escrito de Letícia - Tarefa 2

Ao ser interrogada sobre sua conclusão, Letícia justificou sua crença-afirmação de T ser a transformação que satisfazia a tarefa por toda descrição da construção de T, pois tudo indica que, desde sua leitura inicial da tarefa, ela possivelmente já tinha vislumbrado a lei de formação da transformação linear T, mas acreditava que era necessário mostrar como determinar tal lei de formação.

Pesquisador: Bom, e como você chegou nessa transformação T(x,y,z) = (x+y,z). Você falou que essa já é a transformação linear de IR^3 em IR^2, cujo núcleo é gerado pelo vetor (1,-1,0). Quando você chegou nessa transformação, como você poderia me afirmar que ela é linear mesmo?
Letícia: Eu acho que sim né, eu fiz ali levando os vetores de IR^3 em IR^2, mas agora te explicar o porquê dela ser linear eu não sei não. [...] Eu acho que ela toda justifica chegar nessa transformação, acho que todos os passos ai, porque quando eu cheguei nela primeiro eu achei que não estava justificado corretamente.

Em seu processo de produção de significados, Letícia operou com vários conceitos da Álgebra Linear, constituindo os objetos vetores, base, dimensão, combinação linear, independência linear, teorema do núcleo e da imagem, definição e propriedades de uma transformação linear. Entretanto, observamos em sua resolução várias considerações relacionadas às definições e ao rigor matemático que envolvia a tarefa, como a notação de conjunto e a falta de justificativas em relação à determinação de uma base.

Ao ser questionada sobre as possíveis relações entre a tarefa 1 e a tarefa 2, Letícia afirmou não ter percebido nada. Quando foi citado o artigo do Romulo Lins, intitulado *Matemática, Monstros, Significados e Educação Matemática* (LINS, 2005b), já conhecido por Letícia, ela acabou desabafando em relação ao seu curso de Álgebra Linear.

Letícia: É, fazendo referência ao texto lá, com certeza isso aí para mim, foi um monstro. Assim, o curso de álgebra linear para mim, foi um monstro.
Pesquisador: Por que você acha isso?
Letícia: Ah, da forma como foi posta mesmo né. E o pouco tempo que nós tínhamos destinado para estudar. Assim, é incrível a gente pensar né, porque eu formei em 2002 e eu estudei essa disciplina na minha época e quando eu cheguei aqui novamente e, é lógico, minha trajetória não tem nada haver com o ensino superior então eu fiquei tão distante dessa parte acadêmica esses anos todos. Retornar para mim foi muito complicado. Muito difícil mesmo. Então assim, cada aula mesmo parecia um monstro, digamos assim. Na hora de resolver então um exercício eu ficava completamente paralisada. Essa era a noção que eu tinha, de impotência diante desses exercícios.
Pesquisador: Qual foi a estratégia que você utilizou para poder enfrentar esse monstro?
Letícia: Nossa, saí procurando apostila na internet em todo quanto era canto. Tudo que eu pude pegar, livros... tudo que eu pude pegar, tanto é que eu tenho um material ótimo de álgebra linear [*risos*] em casa. Apostila de tudo quanto é faculdade, vários exercícios, comprei livros. Essa foi a estratégia que eu usei. Mas eu te confesso [...] eu sentia muita necessidade de ver aquilo acontecendo no exercício. Eu senti muito falta disso, de parar, de falar. Não o exercício é para resolver dessa forma por causa disso, disso e disso. Então eu acho que ficou muito na teoria e alguns exemplos ao meu ver fáceis, que depois não condizia com a realidade da prova. Agora na segunda parte, tanto que eu quase fechei e aquilo para mim foi um título, [...], a gente precisa de nota para ser aprovado, então assim, ali houve uma maior ênfase, aulas destinadas às atividades. Aquilo ali me fez entender o que a teoria estava propondo e ai me ajudou muito nessa prova.

Em seu discurso, Letícia expõe seu estranhamento frente ao conteúdo da Álgebra Linear, principalmente em relação aos exercícios em que ela teria que resolver, diante dos quais ela ficava “paralisada”, retratando sua “impotência” em resolvê-los. Letícia começa justificando suas dificuldades baseando-se em sua formação acadêmica e em sua rotina profissional.

Entretanto, ao falar sobre suas estratégias para superar suas dificuldades, Letícia exaltou a sensação de impotência ao resolver os exercícios propostos. Em suas palavras, ela sentia a necessidade de expor suas dificuldades para o professor e não apenas aprender como resolver os exercícios. Essa carência parece ter sido inicialmente superada quando a professora da disciplina começou resolver mais exercícios durantes as aulas, visto que ela considerava a resolução dos exercícios um obstáculo.

Aproveitando o direcionamento de nossa conversa, foi perguntado à Letícia quais foram as contribuições que este curso de Álgebra Linear propiciou em sua prática profissional. Ela então disse:

Letícia: Para ver algumas coisas que eu não poderia fazer na prática. E outras também para abrir meus olhos com relação aos meus alunos, o que muitas vezes é trivial para gente em determinados conteúdos, é fácil não sei o que, mas a gente às vezes também peca nessa parte de não entender o aluno, de não dar vez ao aluno de falar e de se expor. Só preocupar mesmo em dar aquele conteúdo por conta de um tempo ou um programa que você tem que cumprir.

Em nossa leitura, vemos que a maior contribuição de seu curso de Álgebra Linear foi em relação à metodologia de ensino que ela não deveria utilizar com seus alunos. Além desta contribuição, devido sua posição de aluna, Letícia verificou a necessidade de direcionar seu olhar para os alunos e não somente para os conteúdos.

Já em relação aos conteúdos específicos da Álgebra Linear, em se trabalhar com a Matemática do matemático, Letícia não considerou importante para sua prática profissional, visto que:

Letícia: Não mudaria nada por eu não aplico isso lá embaixo. Mas eu falo assim para conhecimento próprio. Para mim foi bom. Mas assim, para aplicabilidade, nenhuma.

Tendo iniciado a segunda etapa de nossa entrevista, Letícia foi questionada sobre as possíveis influências da disciplina Álgebra Linear em sua formação acadêmica.

Pesquisador: Por que você acha que todo mundo que faz licenciatura tem que fazer álgebra linear? Se você tivesse o poder de alterar o currículo da licenciatura, você colocaria álgebra linear na licenciatura?
Letícia: Por que não colocar também?
Pesquisador: Então me dê um motivo para colocar e um motivo para não colocar?
Letícia: Ah, não sei... acho que poderia ter todos os conteúdos que a gente viu, todas as disciplinas que a gente via, mas da forma que a gente viu. Porque querendo ou não

gente, é falar que você não tem que saber mais, que você não... é eu acho que você tem que saber. Para você mesmo tem. Você escolheu o curso de matemática, tem certas coisas que você gosta, você gosta do desafio, você gosta... você gosta da matemática. Eu acho que para mim, assim, embora todo aquele modelo tradicional e tudo, mas eu achava magnífico os professores demonstrarem várias coisas no quadro, eu achava fantástico. Hoje eu não vejo muito por esse lado, mas na época que era estudante eu via. Eu achava brilhante assim, esse cara saca pra caramba. Mesmo às vezes não entendendo nada, mas na época eu era estudante eu acreditava nisso. E gostava do desafio entendeu? E assim, só porque eu vou dar aula no ensino básico eu vou ficar só naquelas matérias triviais? Eu acho que não.

Em nossa leitura dos resíduos de enunciação de Letícia, algumas considerações são: para ela, cursar a disciplina Álgebra Linear seria importante, mesmo se fosse pelo foco internalista da Matemática, visto que, para ela, "*Você escolheu o curso de matemática, tem certas coisas que você gosta, você gosta do desafio, você gosta... você gosta da matemática*". Além disso, encontramos na fala de Letícia considerações em relação à distinção da matemática acadêmica e da matemática escolar, ao afirmar que "*só porque eu vou dar aula no ensino básico eu vou ficar só naquelas matérias triviais? Eu acho que não*".

Para concluir nossa entrevista, Letícia foi perguntada sobre suas dificuldades em seu segundo curso de Álgebra Linear. Para ela, parecia que ela nunca havia visto o conteúdo de Álgebra Linear antes e que praticamente nenhum dos conceitos foram internalizados, pois segundo Letícia, o que ela havia trabalhado em seu primeiro curso de Álgebra Linear foi:

Letícia: Totalmente esquecido. Tanto é que assim, muita gente falou: poxa, você tá fazendo álgebra linear de novo e está tendo dificuldade? Entendeu? Aí fica aquele pergunta: o que eu aprendi naquela época? Tá certo que eu fiquei também mais de sete anos lá, mais de sete anos sem ver... mas e aí, não absorveu nada? Eu acho que um curso de maneira de diferenciada, mais preocupado com o aprendizado eu acho que não passaria tanto aperto.

Apesar de ter sido aprovada no final de seu segundo curso de Álgebra Linear, Letícia deixou claro ao longo de sua entrevista as dificuldades por ela enfrentadas. Além disso, muitas de suas dificuldades foram causadas pela metodologia empregada pela professora e não apenas pelo conteúdo matemático em si.

Assim, baseado em nossa leitura, vemos que em um curso de formação de professores de Matemática, devemos ter uma considerável preocupação com a metodologia de ensino empregada nos cursos de conteúdo matemático.

Além desse fato, ficou evidente para nós que a postura epistemológica tomada pelo professor de que seus alunos aprenderiam com base apenas na exposição dos conteúdos não propiciou contribuições favoráveis para sua formação profissional.

4.3. A Produção de Significados de Jordão.

Jordão tem 43 anos, cursou a Licenciatura em Matemática em uma faculdade privada de Minas Gerais no período de 1989 a 1994. Como professor de Matemática, já trabalhou em todos os níveis de ensino, mas atualmente leciona para turmas do ensino médio de uma escola Estadual mineira e do ensino superior em uma faculdade particular, também mineira.

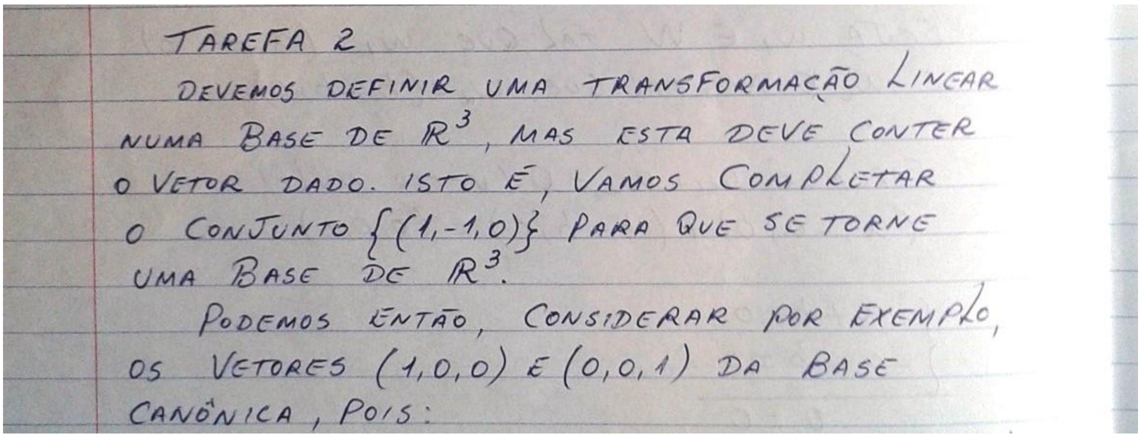
Jordão foi o último a ser entrevistado e a dinâmica de sua entrevista foi semelhante à dos outros sujeitos de pesquisa. Em nossa leitura prévia da solução entregue por Jordão, a primeira coisa que nos chamou a atenção foi a preocupação com suas justificações e com o rigor de sua escrita. Como tivemos a oportunidade de acompanhar Jordão ao longo de seu semestre cursando a disciplina Álgebra Linear, pudemos observar suas dificuldades em relação aos conteúdos trabalhados. Foi uma surpresa agradável ver sua solução. Passemos agora para esta discussão:

Pesquisador: E a sua segunda questão? O que você achou dela, achou difícil, achou mais fácil que a primeira?
Jordão: Achei mais difícil. [...] Foi a que me deu mais trabalho, porque essa eu tive realmente que olhar, pegar um livro e ler pra poder fazer, porque se eu não tivesse leitura um material (um livro clássico de Álgebra Linear) eu não faria não.
Pesquisador: Com a ajuda do livro você conseguiu trabalhar bem as definições?
Jordão: Claro. [...]. Até não sei, até uma coisa que eu não sei, por exemplo, essa parte de tanto que a professora batia de representar corretamente a parte simbólica, colchetes, com chaves, assim, eu até olhei isso né. Até fiquei assim, me policiando na hora ali, pra poder escrever isso certo, fiz uma leitura, não sei se ficou divergente aqui. Vocês olharam alguma coisa diferente?
Pesquisador: O quê?
Jordão: Por exemplo, representação de base.
Pesquisador: Não. Ficou legal, ficou padrão. Do jeito que as pessoas utilizam.
Jordão: Pois é, isso, essa foi uma questão que, no princípio eu não tinha noção, não ligava pra isso, se ia representar com colchetes, com chaves. Então isso foi pra mim, eu acho que foi uma evolução, porque a partir do momento que lá nas avaliações da professora, ela corrigiu isso, isso ficou marcado pra mim, essa maneira de representar. [...] Né, pra poder diferenciar a base de conjunto. Então isso ficou marcado e eu procurei fazer as coisas de acordo com o curso.

Logo no início de sua resolução, Jordão percebeu uma relação entre as tarefas 1 e 2, devido ao fato de que o vetor que gerava o subespaço W da tarefa 1 era o mesmo vetor de uma base do núcleo da transformação linear que se deveria investigar a possibilidade de existência. Em suas palavras:

Jordão: Aí nessa segunda questão, investigue se é possível existir uma transformação linear de IR^3 em IR^2, tal que seu núcleo seja gerado pelo vetor (1,-1,0). Bom, aí logo me veio na cabeça, deve ter uma continuidade do exercício anterior.
Pesquisador: E você viu alguma continuidade?
Jordão: Ah, eu não sei se foi por causa aqui do, desse, do W aqui, né, que ele é, pode ser gerado por esse vetor. Aí eu associei, aí fiquei com isso na cabeça, mas aí eu falei, como é que eu vou começar o exercício? Não tinha ideia, não. Aí, por isso, que eu peguei o livro e comecei a ler o livro pra poder ter assim, uma saída. Certo?
Pesquisador: Ahã.
Jordão: Bom, aí veio à cabeça, então vamos começar, já que tá perguntando se pode existir uma transformação linear, então vamos tentar definir essa transformação linear numa base de IR^3. Bom, então como isso aqui é núcleo né, esse já é um vetor da base, certo? E, como IR^3 tem dimensão 3, eu pensei, então eu preciso de mais dois vetores pra gerar o IR^3.
Pesquisador: Por que dessa afirmação?
Jordão: Porque esse aqui, apesar do núcleo ser levado no vetor nulo, certo? Ele já é, ele já está dentro do IR^3, no caso.
Pesquisador: Ahã.
Jordão: Ele já está, então eu preciso de mais dois. Bom, aí eu pensei assim, sempre a gente discutia na sala de aula que era melhor trabalhar com a base canônica. Bom, aí me veio na cabeça aqui também, aí eu falei assim, mas quais dos três vetores que eu vou, dos dois vetores dos três da base canônica que eu vou escolher? Porque, eu pensei assim, porque pode ser que algum, pode ser que algum conflito aí, mas aí eu escolhi, é, esses dois aqui (aponta para o exercício) aleatoriamente, certo?

Em sua dinâmica de produção de significados, Jordão operava com a noção de completar a base do IR^3, já conhecendo um vetor que deveria fazer parte dessa base, o vetor (1,-1,0). Além disso, Jordão trabalhava com as estipulações locais de que o IR^3 tem dimensão três e assim deve ter três vetores em sua base, os vetores gerados pelo vetor (1,-1,0) deveriam ser levados no vetor nulo e a definição de base canônica. Esses significados que Jordão produziu em relação ao resíduo de enunciação da tarefa 2 foram escritos da forma:



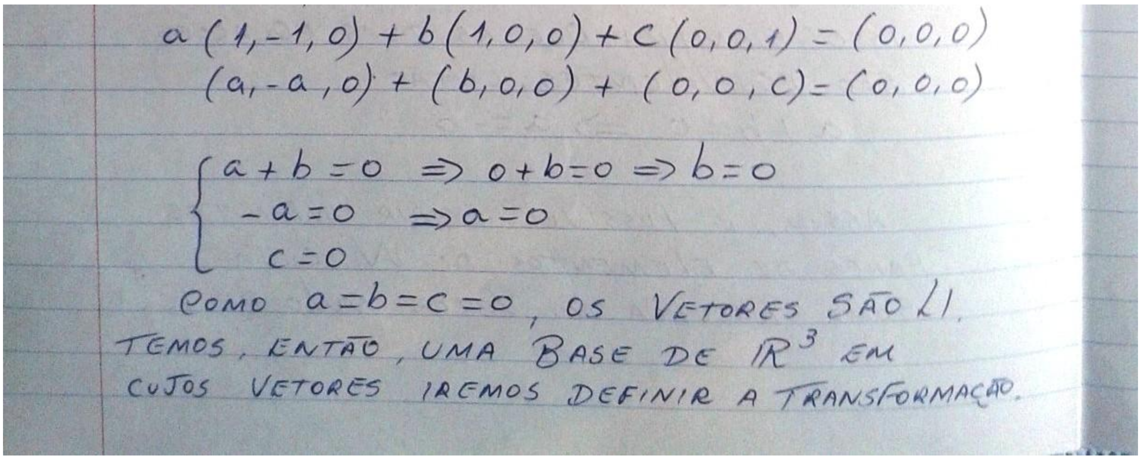
TAREFA 2

DEVEMOS DEFINIR UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR NUMA BASE DE $\mathbb{R}^3$, MAS ESTA DEVE CONTER O VETOR DADO. ISTO É, VAMOS COMPLETAR O CONJUNTO $\{(1,-1,0)\}$ PARA QUE SE TORNE UMA BASE DE $\mathbb{R}^3$.

PODEMOS ENTÃO, CONSIDERAR POR EXEMPLO, OS VETORES $(1,0,0)$ E $(0,0,1)$ DA BASE CANÔNICA, POIS:

Figura 08 - Registro escrito de Jordão - Tarefa 2

Após afirmar que o conjunto formado pelos vetores (1,-1,0), (1,0,0) e (0,0,1) formaria uma base para o IR³, Jordão sentiu a necessidade de mostrar que, de fato, esses vetores formariam uma base. Assim, Jordão tomou uma combinação linear desses três vetores, dando o vetor nulo do IR³ para em seguida mostrar que isso só seria possível se utilizássemos escalares todos nulos. Sendo assim, para ele, o conjunto {(1,-1,0), (1,0,0), (0,0,1)} forma uma base para o IR³. Essas justificativas podem ser observadas em sua produção escrita e falada:



$$a(1,-1,0)+b(1,0,0)+c(0,0,1)=(0,0,0)$$
$$(a,-a,0)+(b,0,0)+(0,0,c)=(0,0,0)$$

$$\begin{cases} a+b=0 \Rightarrow 0+b=0 \Rightarrow b=0 \\ -a=0 \Rightarrow a=0 \\ c=0 \end{cases}$$

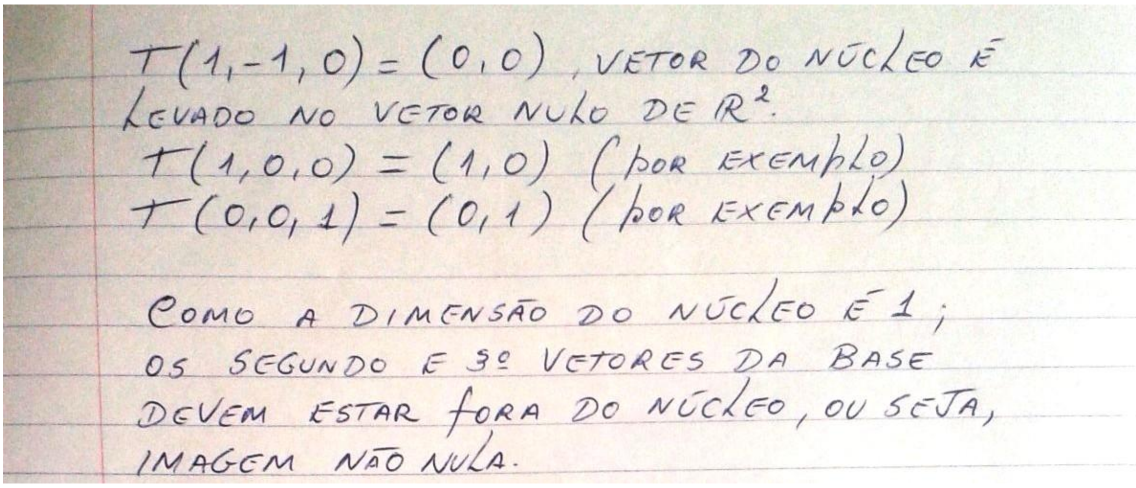
COMO $a=b=c=0$, OS VETORES SÃO LI. TEMOS, ENTÃO, UMA BASE DE $\mathbb{R}^3$ EM CUJOS VETORES IREMOS DEFINIR A TRANSFORMAÇÃO.

Figura 09 - Registro escrito de Jordão - Tarefa 2

Jordão: Aí eu falei, então vamos ver se eles vão funcionar aqui? Se vai dar linearmente independente aqui? Bom, aí eu fiz a verificação e então cheguei a conclusão “a” é igual, “b=c”, então...
Pesquisador: Você fez a combinação linear deles, pra ver se dava o vetor nulo?
Jordão: Então dava pra formar uma base, dava pra gerar o IR³.
Pesquisador: Ótimo, tendo a base, então você falou temos uma base do IR³. [*O pesquisador segue a resolução de Jordão*].
Jordão: Isso.

Pesquisador: Cujos vetores...
Jordão: Iremos definir a transformação.
Pesquisador: Aí você definiu a transformação.

Após encontrar uma base para o IR^3 que continha o vetor que deveria gerar o núcleo da possível transformação linear, Jordão passou para sua construção:


$T(1,-1,0) = (0,0)$, VETOR DO NÚCLEO É LEVADO NO VETOR NULO DE IR^2.
$T(1,0,0) = (1,0)$ (POR EXEMPLO)
$T(0,0,1) = (0,1)$ (POR EXEMPLO)

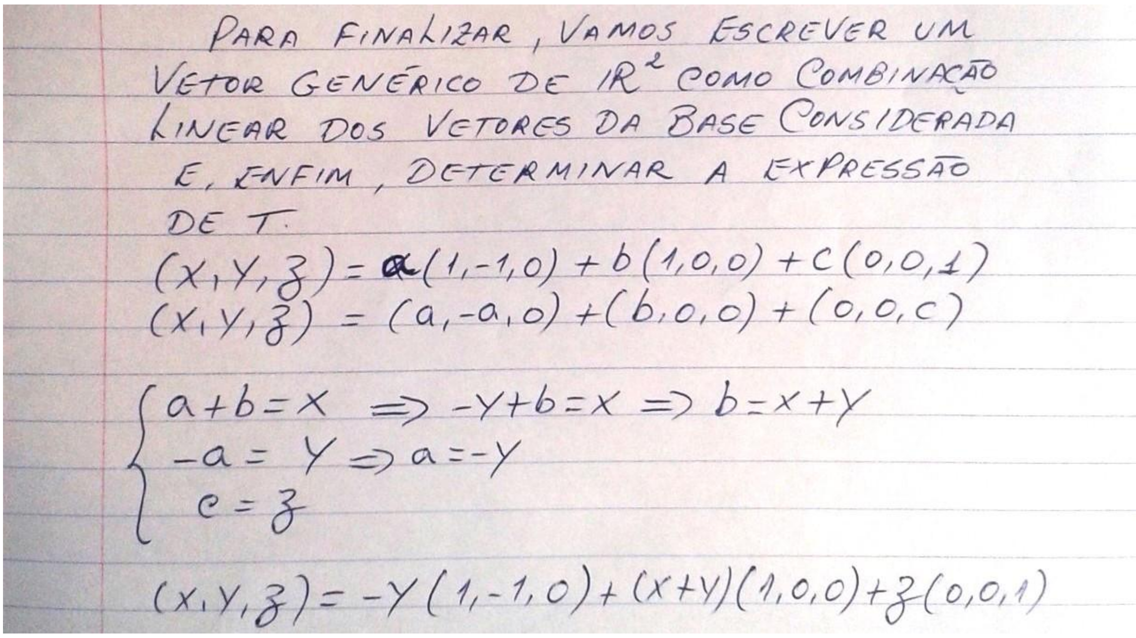
COMO A DIMENSÃO DO NÚCLEO É 1;
OS SEGUNDO E 3º VETORES DA BASE
DEVEM ESTAR FORA DO NÚCLEO, OU SEJA,
IMAGEM NÃO NULA.

Figura 10 - Registro escrito de Jordão - Tarefa 2

Jordão: Bom, como esse aqui é o núcleo, então ele vai ser levado no (0,0). E, esses outros dois pra facilitar aqui também eu peguei, por exemplo, ser levados na base canônica lá do R^2. E a dimensão do núcleo é um. Os segundos e terceiros vetores da base devem estar fora do núcleo. Porque a imagem é não nula. Bom, então aí eu comecei a trabalhar pra produzir a transformação linear, aí é aquela parte operacional, certo?

Em nossa leitura da produção de significados de Jordão, vemos que ele opera com estipulações locais relacionadas às propriedades do núcleo e da imagem de uma transformação linear, pois ao afirmar que "*e a dimensão do núcleo é um. Os segundos e terceiros vetores da base devem estar fora do núcleo. Porque a imagem é não nula.*", as definições de núcleo e imagem estão explícitas em sua produção de significados.

Jordão passa para a parte, considerado por ele, operacional da tarefa:



PARA FINALIZAR, VAMOS ESCREVER UM VETOR GENÉRICO DE IR^2 COMO COMBINAÇÃO LINEAR DOS VETORES DA BASE CONSIDERADA E, ENFIM, DETERMINAR A EXPRESSÃO DE T.

$$(x,y,z) = a(1,-1,0) + b(1,0,0) + c(0,0,1)$$
$$(x,y,z) = (a,-a,0) + (b,0,0) + (0,0,c)$$

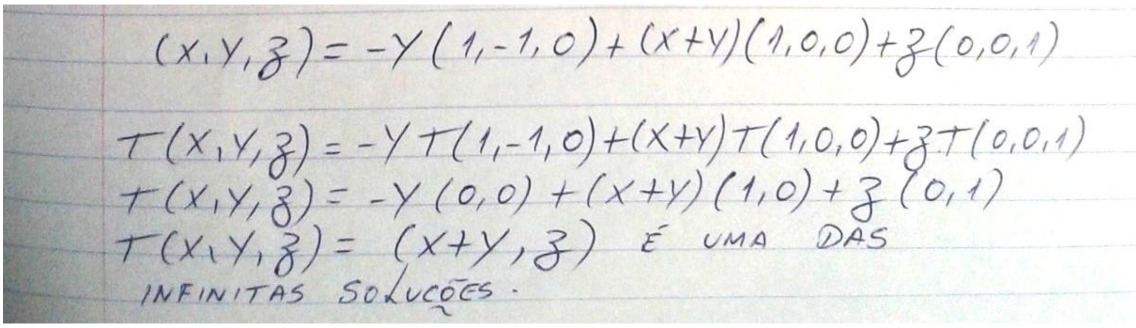
$$\begin{cases} a+b=x \Rightarrow -y+b=x \Rightarrow b=x+y \\ -a=y \Rightarrow a=-y \\ c=z \end{cases}$$

$$(x,y,z) = -y(1,-1,0) + (x+y)(1,0,0) + z(0,0,1)$$

Figura 11 - Registro escrito de Jordão - Tarefa 2

Pesquisador: Certo. Você escreveu o vetor genérico do IR³, né, como combinação linear [...]
Jordão: Exatamente.
Pesquisador: [...] dos vetores da base que você escolheu. Aí você aplicou a transformação né.
Jordão: Isso.

Assim, para então concluir a tarefa:



$$(x,y,z) = -y(1,-1,0) + (x+y)(1,0,0) + z(0,0,1)$$

$$T(x,y,z) = -y\,T(1,-1,0) + (x+y)\,T(1,0,0) + z\,T(0,0,1)$$
$$T(x,y,z) = -y(0,0) + (x+y)(1,0) + z(0,1)$$
$$T(x,y,z) = (x+y,z)$$ É UMA DAS INFINITAS SOLUÇÕES.

Figura 12 - Registro escrito de Jordão - Tarefa 2

Após finalizar sua resolução, o questionamos em relação ao fato de ter usado propriedades de uma transformação linear em uma, definida por ele, transformação. Jordão não soube justificar matematicamente o porquê de ter utilizado e sua justificação se encontrou no fato de que os próprios livros não se preocupavam com isto. Além disso, Jordão nos evidenciou que nessa parte ele seguiu um roteiro já feito no livro didático e talvez por isso ele não deva ter se questionado sobre este fato quando estava resolvendo. Seu objetivo era determinar a lei de formação da suposta transformação linear para afirmar a existência de soluções para a tarefa.

Pesquisador: Como você tinha certeza. Por exemplo, quando você pegou a transformação, você deixou o escalar pra fora, está vendo (e aponta para a resolução)? Está vendo? Esse – y, (x+y), z. Ele ficou pra fora. Pra poder fazer isso, que a transformação, quem faz isso é uma transformação linear. É a propriedade dela. Então você já estava considerando que a transformação é linear, é isso, ou não?
Jordão: Eu não prestei atenção nesse fato não.
Pesquisador: Não deu atenção?
Jordão: Não. Isso eu não olhei.
Pesquisador: Mas os livros também não prestam.
Jordão: Pois é, no material estava assim, simplesmente seguindo um roteiro. E assim, não tinha como tirar dúvidas né. Às vezes a gente tem dúvida, mas aí a gente tem que olhar ali pro material mesmo. Então o material me guiava, pra poder né, não discriminava isso, não chamava a atenção pra esse detalhe. Então, isso foi uma coisa que passou despercebida, realmente, eu não olhei pra isso não. [...] O que eu queria mesmo era chegar na transformação linear, o objetivo era esse.

Finalizando nosso diálogo em relação a tarefa 2, os indagamos a respeito de sua afirmação: "*é uma das infinitas soluções*".

Pesquisador: E você colocou aqui T(x, y, z) = (x+y, z), é uma das infinitas soluções. Por que é uma das infinitas?
Jordão: Ah, porque eu tomei como exemplo aqui esses dois vetores né.
Pesquisador: Ahã.
Jordão: Poderiam ser outros também.
Pesquisador: Tomar outros.
Jordão: Outros vetores. Pode funcionar também, eu pensei nisso. Mas, assim eu trabalhei com esses da base canônica, mas podem existir outros vetores que vão gerar outras transformações.
Pesquisador: E você foi influenciado pelo material, a ter essa conclusão, ou isso pra você também é claro?
Jordão: Não, isso aí não foi do material não, quando eu peguei essa coisa aqui, foi porque eu lembrei das aulas da professora, que ela falava que era sempre melhor trabalhar com vetores da base canônica. Mas, ela também falava, na sala de aula que outros vetores também poderiam produzir, né. Então, isso pra mim foi da aula mesmo. Foi coincidência que eu consegui produzir das aulas da professora. Então essa parte aí pra mim, não foi do material não, isso aí foi uma produção minha mesmo.

Em nossa leitura da produção de significados de Jordão, vemos que o fato de a tarefa admitir infinitas soluções era legítimo para ele, pois suas experiências na sala de aula ao cursar a disciplina Álgebra Linear o permitiram afirmar a existência de infinitas soluções, sem ter que explicitá-las. Jordão tinha a noção de que se os vetores escolhidos para a base de IR^3 fossem outros, a transformação linear seria outra também.

Consideramos em nossa leitura da produção de significados de Jordão vários pontos: sua preocupação com o rigor na escrita matemática e com as justificações para suas afirmações ao longo da resolução; no interior da atividade da resolução da tarefa, Jordão constituiu os objetos base, dimensão, completar base, independência e combinação linear, imagem de uma transformação e as propriedades oriundas da definição de uma transformação linear.

Encerrado o primeiro momento de nossa entrevista, direcionamo-nos para os questionamentos sobre sua formação acadêmica e as possíveis influências que as disciplinas de conteúdo matemática – em particular a Álgebra Linear – trouxeram para sua prática profissional.

Nossa primeira indagação foi sobre sua Licenciatura em Matemática. Jordão cursou sua Licenciatura em Matemática em uma faculdade privada em processo de construção. Essas condições parecem ter influenciado negativamente sua formação, tanto que logo ao terminar sua graduação, Jordão sentiu a necessidade de uma formação continuada, com a intenção de complementar seus estudos.

Após breve conversa sobre sua formação geral, direcionamos nossas perguntas para as disciplinas de conteúdo matemático e suas possíveis contribuições para sua prática profissional.

Pesquisador: Bom, com relação, especificamente, às disciplinas de conteúdo matemático, você acha que, do jeito que elas foram dadas, pra você, no início, na graduação. Elas te influenciaram bastante, na sua prática, positiva ou negativamente?
Jordão: Ah, eu não vou dizer que influenciou negativamente, porque, assim, a gente estuda e tira proveito daquilo que a gente estuda ali, forma algum conhecimento. Mesmo que a gente não dê conta, é, de tudo que a gente estudou no curso, depois eu acho que a gente pode caminhar um pouco né, por conta própria ali. Pegar algum material e estudar, mas a forma como foi dada, é, assim, não contribui muito, né. Porque você tinha, eu recebi um conhecimento pronto né, eu tinha que dar conta daquilo, eu tinha que justificar, demonstrar as coisas, provar as coisas, né. Saber dominar algumas fórmulas, pra poder usar em procedimentos operacionais e essa ideia aí, né, logo no início, quando eu comecei a dar aula, até achava que quando eu conseguia lá no quadro, que eu justificava que eu demonstrava, eu até achava aquilo bonito.

Observamos na fala de Jordão uma forte influência da postura metodológica e epistemológica dos professores das disciplinas de conteúdo matemático. Esta influência foi considerada por nós ao ler seu resíduo de enunciação: “*logo no início, quando eu comecei a dar aula, até achava que quando eu conseguia lá no quadro, que eu justificava que eu demonstrava, eu até achava aquilo bonito*”. O que indica que em determinados momentos, Jordão trabalhou o conteúdo com seus alunos exatamente da forma com que foi trabalhado com ele durante sua graduação.

Permanecendo na discussão sobre as disciplinas de conteúdo matemático, perguntamos para Jordão sua opinião a respeito da forma como essas disciplinas poderiam ser oferecidas para os futuros professores de Matemática.

Pesquisador: E aí você acha então que, essas disciplinas de conteúdo matemático, que nós estamos olhando mais especificamente, você acha que elas teriam condição de ser oferecidas de uma forma que contribuíssem mais para os licenciandos em matemática?
Jordão: Ah com certeza. Primeiro que eu acho que assim, essa parte que a gente estuda cálculo, análise, álgebra linear a gente estuda isso de uma forma muito, é lógico que a matemática tem essa essência de ser abstrata, mas assim, tentar dar um direcionamento disso, como que a gente pode tá usando isso na educação básica né, como que a gente pode tá fazendo associação. Porque a gente trabalha com a matemática na educação básica ali, até o terceiro ano de ensino médio que as justificativas estão muito ligadas, principalmente no ensino médio com questões de cálculo, de álgebra e que não tem essa visão lá, certo, você lá precisa olhar para uma coisa muito mais ampla e às vezes não tem essa relação com a prática docente que você assume de imediato que é a educação básica. Você não sai para ser professor de ensino superior. Você sai para poder atuar primeiro ali no ensino básico. Então eu vejo que, a exigência, é lógico que eu concordo que tem que ter uma exigência, porque você precisa ter primeiro um domínio. Não que você tenha que dominar o conteúdo matemático, mas você precisa produzir um conhecimento matemático para poder ensinar, porque senão você não tem esse casamento perfeito aí. Mas eu vejo assim, essa parte ela fica sem... fica solto. Não tem essa ponte, às vezes, em relação com que a gente pode tá olhando aqui no ensino básico.

Em nossa leitura dos resíduos de enunciação de Jordão, vemos sua preocupação com conteúdos matemáticos na prática profissional do professor de Matemática do ensino básico, principalmente em relação ao final do ensino médio. Para ele, o sujeito que faz a Licenciatura em Matemática deve estar preparado para trabalhar com o ensino básico e não com o superior. Dessa forma, Jordão acredita que as disciplinas de conteúdo matemático devem ter, além da preocupação com o rigor matemático e a Matemática por ela mesma, uma preocupação em relacionar o que é trabalhado na formação do licenciando, com a prática profissional do futuro professor de Matemática, na educação básica.

Perguntamos para Jordão as influências oriundas de suas experiências nesses cursos de conteúdo matemático, considerando o fato de que ele não trabalha com esses conteúdos específicos em sua prática profissional.

Pesquisador: Então o que você acha que mais te influenciou, já que você não trabalha esses conteúdos?
Jordão: Não, mas, por exemplo, um ponto positivo que eu acho é que você tem mais confiança. Essa parte você tem mais confiança, você olha para o conteúdo e você sabe falar sobre ele com mais propriedade. [...] Pode abrir mais, falar mais sobre aquilo ou até ele mesmo pode pesquisar aquilo, é uma de ele tá estudando, de ele ter condição depois de sem ter o contato ali com a universidade ela tá dando continuidade a sua formação.

Jordão destaca que, para o professor de Matemática, ter conhecimentos relacionados à matemática do matemático é de grande valia, pois permite ao profissional uma segurança e suporte daquilo que ele possa vir a trabalhar com suas turmas. Além disso, vemos que, para ele, é importante ter essa lucidez em relação aos conteúdos matemáticos, pois:

Jordão: Você não vê a relação de imediato. Mas ao mesmo tempo, você tem uma formação ali que lhe permite fazer aquela leitura ali que está no conteúdo programático seu com uma segurança maior. De produzir compreensão daquilo e até de você criar, criar com relação a, eu posso desenvolver esse exercício eu não quero dar esse exercício do livro, mas eu tenho condições de eu elaborar o meu exercício. A partir do que eu consigo produzir de significados ali da matemática, eu consigo elaborar um exercício e colocar ele na sala de aula.

Aproveitando que nossa conversa estava em torno das disciplinas de conteúdo matemático, perguntamos suas considerações à respeito da disciplina Álgebra Linear.

Pesquisador: E olhando especificamente para a disciplina de álgebra linear. O que você acha que ela pode oferecer? Você fez dois cursos, um curso na graduação e uma agora no mestrado. Se você pudesse caracterizar pra gente a influência do primeiro curso, o que que ele contribuiu especificamente e depois agora, depois desse curso que você fez no mestrado.
Jordão: Ah, no primeiro eu acho que assim, eu não absorvi o que precisava. O primeiro foi bem raso. O segundo, com uma maturidade, com uma vivência maior, apesar ainda de talvez precise tá estudando refazendo esse curso ou até pegando e estudando sozinho pra poder ir dando conta aos poucos do conteúdo, mas já serve pra mim começar a fazer uma outra leitura da álgebra linear que eu não tinha.
Pesquisador: Uhum.
Jordão: Certo? Igual aos exercícios quando foram propostos, eu sabia pelo menos que caminho tomar, que caminho percorrer. Certo? Não tava naquela situação de olhar pro exercício e não saber nem onde devo começar o exercício. Então, essa situação aá já mudou, porque eu agora posso, não pra todos os exercícios, mas

exercícios mais elementares de álgebra linear, eu posso pegar e dar conta, mesmo que às vezes eu tenho uma dúvida, olhando o material da conta de resolver.

Jordão compara seus dois cursos de Álgebra Linear e atribui sua maturidade como sendo um fator determinante em seu aproveitamento. Além desse fato, Jordão se considera capaz de produzir significados matemáticos para as noções em Álgebra Linear, como o fez nas tarefas propostas para esta entrevista.

Quando questionado a respeito da disciplina Álgebra Linear estar presente na maioria das Licenciaturas em Matemática do país, Jordão atribuiu este fato à amplitude de objetos matemáticos que são trabalhados ou simplesmente utilizados na disciplina.

Jordão: Olha, eu pelo que eu observei do conteúdo, é uma disciplina que envolve muita matemática. Trabalha com vários ramos da matemática, você envolve geometria, você envolve cálculo. Então assim, é uma disciplina que deve ser um dos pilares no curso de matemática.

Já sobre a metodologia de ensino empregada por grande parte dos professores que lecionam a disciplina Álgebra Linear para a licenciatura em Matemática, Jordão acredita que esta não é dada na perspectiva do futuro professor, mas sim na perspectiva do matemático.

Pesquisador: Você acha então se a metodologia do curso de álgebra linear for modificada ela pode vir a contribuir mais na prática profissional, do ensino básico mesmo?
Jordão: Eu acho que sim. Porque fica muito assim do jeito que nós estudamos aqui eu acho que fica muito mais voltada para assim, a parte mesmo de bacharelado do que a parte de licenciatura.

Para finalizar nossa entrevista, perguntamos para Jordão o que ele achou especificamente da disciplina Álgebra Linear que ele acabara de fazer em sua Pós-graduação.

Jordão: Assim, eu adorava as aulas. Impecável pra mim as aulas. Isso aí não vou falar que não gostava, tanto é que não faltei nenhuma. Mas a partir do momento que vai havendo uma evolução ali do conteúdo e você precisa tá dando conta de algumas coisas e o material vai acumulando, certo, eu acho que deveria ter um momento de parar, como eu não tenho assim, nunca, é, pensei ministrar álgebra linear. Eu acho que [...] Algumas partes do conteúdo são fundamentais para o professor saber se aluno tá dando conta ou não [...] então quando chegar nesses momentos ali que são fundamentais, que os alunos precisam estar dando conta, parar e fazer essa discussão. [...]. Eu acho que é a única, a melhor maneira de ele perceber como que anda aquilo que vem fazendo na sala de aula. Eu acho que isso aí é essencial.

Uma contribuição do curso de Álgebra Linear que Jordão considerou importante para sua prática profissional foi em relação à preocupação constante, por parte da professora, com o rigor da escrita matemática e com as justificações.

Jordão: Teve um significado importante para mim que a parte escrita, [...] ela corrigia a prova com uma precisão né, e com um rigor. E todas as aulas dela tinham uma justificativa voltada para esse sentido, para justificar o porquê disso e o porquê daquilo. Então, lógico que isso ficou pra mim. Então eu falei, eu tenho que usar esses argumentos, né. Pelo menos que seja escrevendo, que noção seja demonstrando mais seja escrevendo daquilo que estou pensando, para poder dar sentido.

Para finalizar nossa conversa, Jordão pediu a palavra para comentar suas considerações a respeito do processo de avaliação proposto pela professora da disciplina Álgebra Linear.

Jordão: Um ponto que eu achei assim que foi crítico, foi o primeiro dia de aula. Em que ela colocou uma assim postura de determinar toda a postura do curso com relação à avaliação que teria que ser duas provas mais as listas de exercícios. Então ela não deu uma abertura pra gente conciliar assim uma maneira de avaliar. Então ela deixou bem claro que ela não daria, que ela não abriria mão dessa postura. Quer dizer, isso deixa assim a gente desarmado, como é que você vai fazer um questionamento ou até propor uma situação diferente já com essa colocação.

Jordão se mostrou crítico, mas consciente do processo de avaliação para os alunos. Ele já havia anteriormente comentado sobre suas frustrações em relação à prova escrita e sobre sua preferência na atividade proposta em forma de seminário. Segundo Jordão, a prova escrita e individual era sim importante, mas deveria ser empregada:

Jordão: [...] Não no sentido é, de dar nota apenas, mas de reestruturar a prática do professor. Direcionar ele depois para o futuro. Pra ele saber: ah, ele não tá dando conta disso. Então é o momento da gente conversar, da gente retornar, da gente estruturar de novo o curso e até mesmo a nossa metodologia, coisas que não tão dando certo aqui, que não estão funcionando.

Em relação à proposta de ensino baseada na forma de seminário, pode propiciar ao aluno uma oportunidade de abandonar uma postura passiva durante as aulas e expor suas produções de significados. Segundo Jordão:

Jordão: E é um momento que você começa a perder a inibição, que você começa a entrosar com o professor ali. A ter liberdade de falar: ah, isso aqui eu não sei. Isso aqui eu não tô dando conta. [...]. Então naquele momento que você está sentado ali na carteira às vezes você não tem aquela coragem de falar isso: Oh, não tô dando conta disso aqui não, não tô conseguindo ver isso daqui não. Mas você tá ali na frente participando do processo de discussão, então você já começa ter olhares diferentes e percepção diferente para poder falar com o professor daquilo que está te angustiando ali.

Após nossa leitura da produção de significados de Jordão, acreditamos que conseguimos várias contribuições a respeito de nossa questão de pesquisa. Dentre essas contribuições, podemos citar: a preocupação com a metodologia de ensino empregada ao lecionar a disciplina Álgebra Linear, pois foi somente quando a professora rompeu com a postura expositivo-explicativa que Jordão se mostrou confiante em discutir sua produção de significados; a preocupação com o processo de avaliação; a importância do rigor e das justificações; a necessidade de se direcionar, em alguns momentos, o curso de Álgebra Linear para a futura prática profissional do professor, e não somente para o professor que trabalhará com o ensino superior, mas também com o professor que trabalhará no ensino básico.

Ao finalizar nossa leitura da dinâmica da produção de significados dos três sujeitos de pesquisa da entrevista e da análise de seus questionários, obtivemos valiosas informações a respeito da formação matemática de professores de Matemática, em específico na disciplina Álgebra Linear. Essas informações foram assumidas quando projetamos e executamos nossa proposta de Seminário em Álgebra Linear para alunos da Licenciatura em Matemática, além de ter nos fornecido uma direção para as possíveis características para um Curso de Serviço de Álgebra Linear para a Licenciatura em Matemática.

CAPÍTULO 5
UMA LEITURA DA PRODUÇÃO DE SIGNIFICADOS: O SEMINÁRIO DE ÁLGEBRA LINEAR

Neste capítulo, faremos uma análise da produção de significados de Euclides e Simba, registradas durante nossa pesquisa de campo - o Seminário em Álgebra Linear. Esta análise será dividida em seções, de acordo com a ordem das fichas de trabalho desenvolvidas pelos sujeitos de pesquisa, como descrito em nossa metodologia. Pretendemos, com essa leitura, transformar os resíduos de enunciação dos sujeitos, em texto para nós, para que possamos ao final de nosso trabalho, obter considerações relacionadas às possíveis características de uma proposta de Curso de Serviço de Álgebra Linear para uma Licenciatura em Matemática.

Em nossa leitura da produção de significados dos sujeitos de pesquisa, a partir das discussões das fichas de trabalho, destacamos as tarefas que, para nós, tiveram uma produção mais rica, no sentido da produção de significados envolvidos na atividade, visto que foram muitas as tarefas trabalhadas ao longo do Seminário.

5.1. A Produção de Significados a partir da Ficha de Trabalho 5

Como foi descrito em nossa metodologia da pesquisa, a Ficha de Trabalho 5 continha a apresentação da definição e as propriedades imediatas das Transformações Lineares.

Antes de o professor começar a falar das transformações lineares, os sujeitos de pesquisa foram perguntados se conheciam ou já tinham visto alguma definição que levasse o nome de “transformação”. Euclides lembrou-se de seu curso de Álgebra, quando o professor da disciplina havia comentado sobre homomofismo e havia tecido comentários em relação às transformações. Já quando os sujeitos de pesquisa foram perguntados sobre a palavra “linear”, a primeira coisa que veio na mente de Euclides foi a associação com reta.

Euclides: linear só penso em reta [..] fala em linear vem reta na minha cabeça.
Simba: É... também penso em reta.

Simba concorda rapidamente com a afirmação de Euclides. Logo após esse breve diálogo, pedimos aos sujeitos que discutissem à respeito do resíduo de enunciação da definição de transformação linear, posta para que eles produzissem significados.

Simba comentou que, apesar de na definição posta (uma transformação linear T de V em W, onde V e W subespaços vetoriais de IR^n e IR^m respectivamente), os espaços do domínio de do contradomínio não precisariam ter a mesma dimensão, desde que satisfizessem as duas condições impostas pela definição. Para exemplificar a possível existência dessas situações, o professor criou alguns exemplos de transformações lineares entre espaços vetoriais de dimensões diferentes e de mesma dimensão, como T de IR^2 em IR^3 e uma outra T de IR em IR.

Outra discussão existente após a leitura da definição de uma transformação linear, foi em relação à possibilidade de se definir uma transformação linear, entre espaços vetoriais sobre corpos diferentes. Ao serem colocados sobre esta situação, os sujeitos de pesquisa pensaram em algum exemplo no qual poderia acontecer algo diferente do que estava enunciado na definição. Simba expôs um exemplo no qual os espaços vetoriais envolvidos na transformação, estavam sobre o corpo dos números complexos. Além disso, discutimos a possibilidade de definir uma transformação linear na qual as operações que estivessem envolvidas, não fossem as usuais.

Após lerem e discutirem a definição matemática de uma transformação linear, Euclides e Simba foram convidados a responderem o seguinte questionamento:

1) Como você descreveria uma transformação linear? Construa uma função de IR^n em IR^m e verifique se tal função é uma transformação linear.

Inicialmente, Simba sentiu um desconforto em escrever sobre algo que já estava definido matematicamente, como verificamos no diálogo:

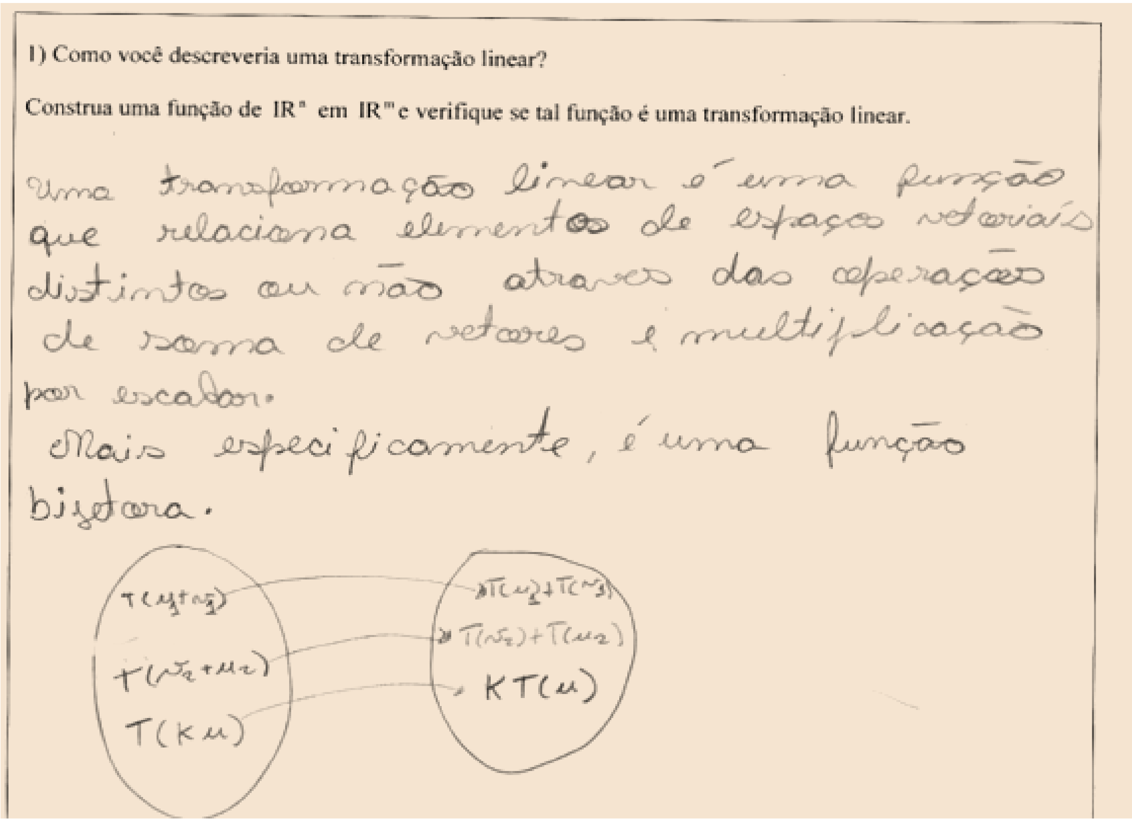
Vitor: Depois de ter lido a teoria, é para escrever com suas palavras mesmo.

Simba: O que é transformação linear? Tipo o que a gente falou antes?

Vitor: Não, agora depois de você ter lido.

Aretha: É, o que que mudou... Só com texto, por exemplo. Ao seu critério.
Simba: [*risos*] É muito estranho escrever sobre uma coisa que já está definida.
Vitor: Mas é com suas palavras.
Simba: Não tinha uma outra pergunta não Vitor? [*risos*]
Vitor: Imagina que você quer convencer alguém do que seja uma transformação linear. Imagina você dando aula e um aluno pergunta: "o que é uma transformação linear?" [...] É isso que o professor faz, essa é a diferença.
Simba: Primeiro estou pensando no que é uma função para mim.

Observamos nas palavras de Simba, que, para ele, não era legítimo falar qualquer outra coisa sobre transformação linear, que fosse diferente da definição. Para Simba, o que era legítimo era utilizar a definição dada. Durante essa conversa com Simba, Euclides esteve o tempo todo concentrado em sua resolução. Ele não sentia problema em responder um questionamento não usual. A resolução de Euclides foi:

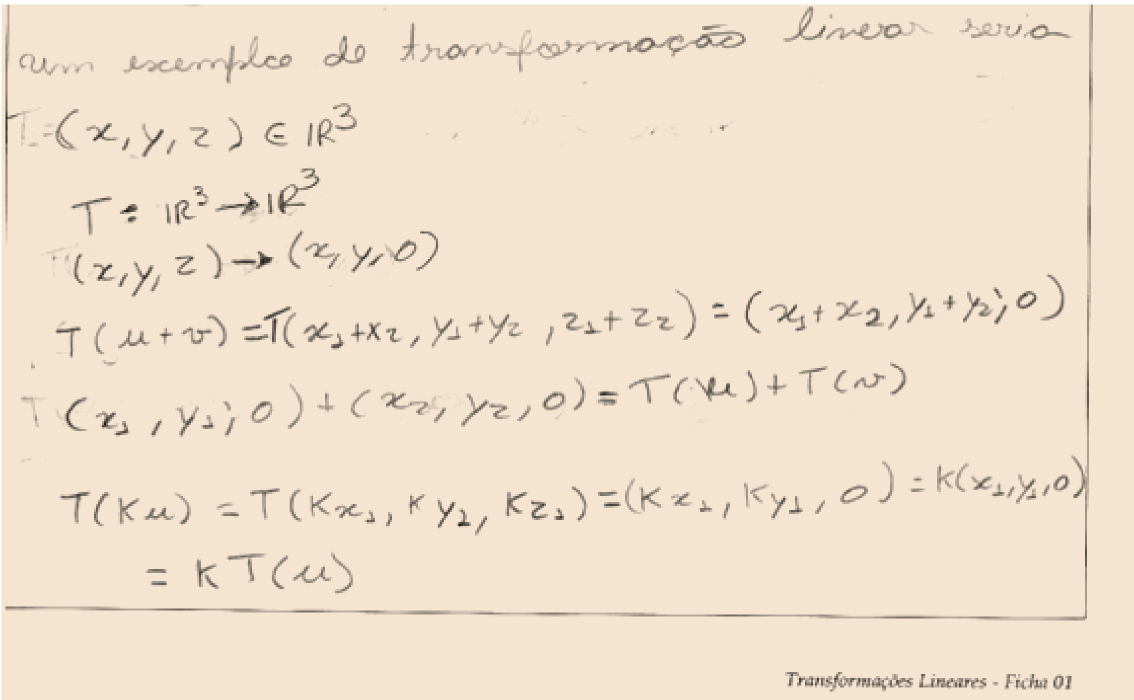

1) Como você descreveria uma transformação linear?

Construa uma função de IR^n em IR^m e verifique se tal função é uma transformação linear.

Uma transformação linear é uma função que relaciona elementos de espaços vetoriais distintos ou não através das operações de soma de vetores e multiplicação por escalar.
Mais especificamente, é uma função bijetora.

Figura 13 - Registro escrito de Euclides - Ficha de Trabalho 5 - Tarefa 1

Além disso, Euclides enunciou um exemplo de transformação linear:



um exemplo de transformação linear seria

$T = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$T(x, y, z) \to (x, y, 0)$

$T(u+v) = T(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2; 0)$

$T(x_1, y_1; 0) + (x_2, y_2, 0) = T(u) + T(v)$

$T(Ku) = T(Kx_1, Ky_1, Kz_1) = (Kx_1, Ky_1, 0) = K(x_1, y_1, 0)$

$= KT(u)$

Transformações Lineares - Ficha 01

Figura 14 - Registro escrito de Euclides - Ficha de Trabalho 5 - Tarefa 1

Em nossa leitura da produção de significados de Euclides, para a definição de uma transformação linear, observamos a influência de nosso diálogo inicial, em relação às possíveis transformações lineares entre espaços de dimensões distintas. Além disso, apesar de entender que uma transformação linear é uma função entre espaços vetoriais, Euclides produziu significados na direção de que uma transformação linear é, especificamente, uma função bijetora, e justificou sua afirmação ao desenhar um diagrama no qual $T(u_1+u_2)$ estava associado à $T(u_1) + T(u_2)$. Dessa forma, acreditamos que, nesta atividade, Euclides estava preocupado com o fato de uma transformação linear ser fechada para a soma vetorial e para a multiplicação por escalar, e não com o fato do que uma transformação T faz com os vetores do domínio.

Após nossa conversa sobre a definição de uma transformação linear, resolvemos perguntar novamente à Euclides o que para ele seria uma transformação linear. Entretanto, Euclides parece ter mudado a direção para qual havia produzido significados, como pudemos observar em nossa leitura do diálogo:

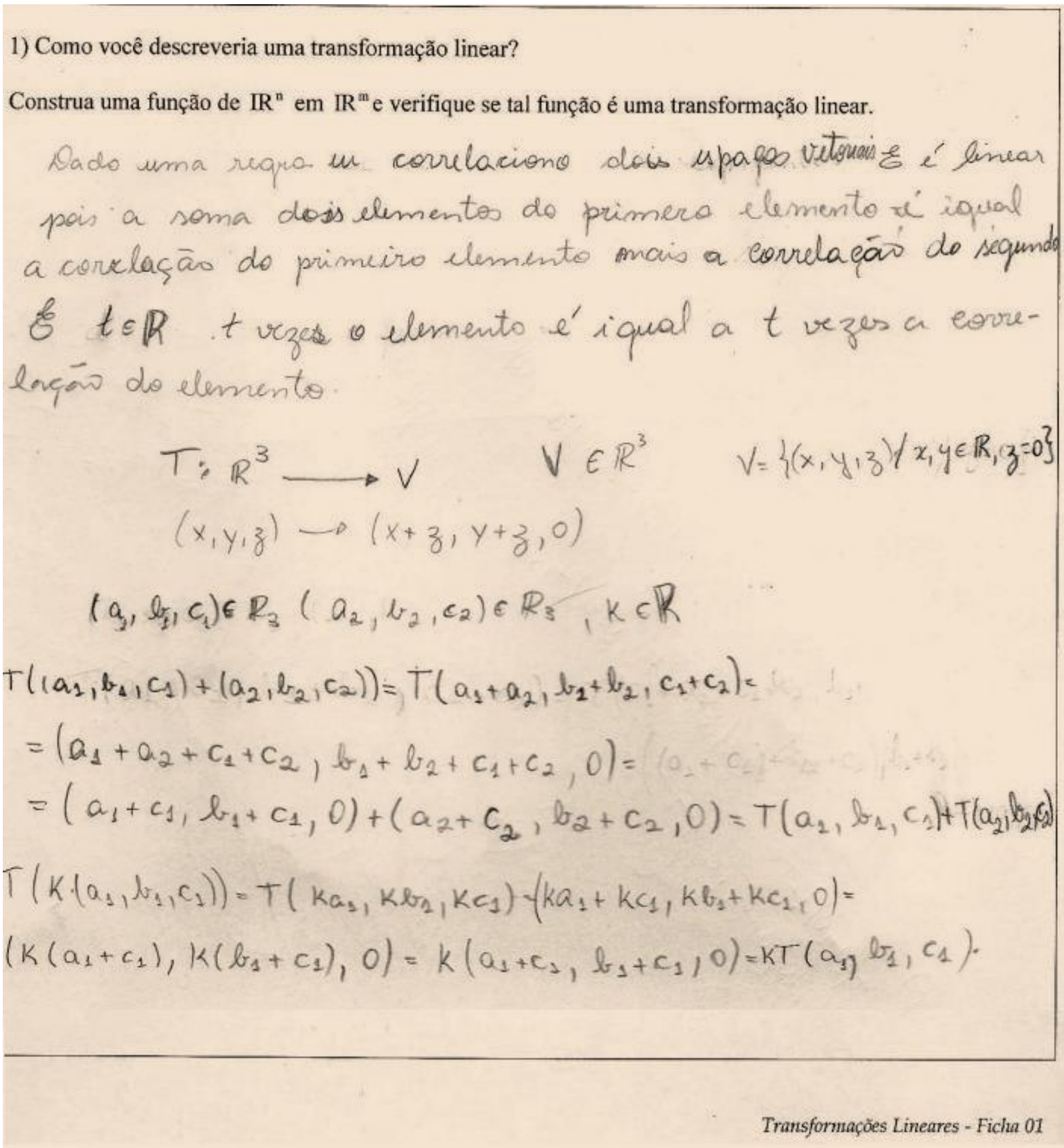
Vitor: Bom, isso então que é uma transformação. Transformação Linear para você então Euclides, seria o quê? Com suas palavras.

Vitor: Quando você pensa em transformação linear o que que vem na sua mente?
Euclides: Ah é, eu escrevi isso, eu vou colar.
Euclides: É mais ou menos isso aqui mesmo que eu acho. Uma transformação linear é uma que relaciona elementos de espaços vetoriais distintos, ou não, através de operação de soma e multiplicação por escalar. Mais especificamente, é uma função bijetora... Ah, eu botei bijetora aqui, mas agora eu não sei mais.
Vitor: Será que ela é bijetora?
Euclides: Não sei mais.

Apesar de Euclides mostrar não ter certeza de sua afirmação sobre uma transformação linear ser necessariamente uma função bijetora, ele não foi capaz de justificar sua dúvida. Ao exemplificar o que seria uma transformação linear, Euclides definiu uma T de IR^3 em IR^3 e deu uma lei de formação para ela. Um detalhe, a T criada por ele não era bijetora. Após definir a possível transformação linear T, Euclides mostrou, de forma matematicamente correta, que tal função satisfazia as duas condições impostas para ser considerada uma transformação linear de IR^3 em IR^3.

Assim, em nossa leitura, acreditamos que Euclides produziu significados na direção da matemática do matemático, ao mostrar que uma função entre espaços vetoriais é uma transformação linear, mas não foi capaz de justificar, com suas palavras, se uma transformação linear deveria ser necessariamente bijetora. Para Euclides, nesta atividade, não era legítimo negar essa afirmação, apesar de ter ficado na dúvida.

A resolução de Simba para esta tarefa foi:



1) Como você descreveria uma transformação linear?

Construa uma função de IR^n em IR^m e verifique se tal função é uma transformação linear.

Dado uma regra que correlaciona dois espaços vetoriais e é linear pois a soma dos elementos do primeiro elemento é igual a correlação do primeiro elemento mais a correlação do segundo e $t \in \mathbb{R}$. t vezes o elemento é igual a t vezes a correlação do elemento.

$T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow V$ $\quad V \in \mathbb{R}^3 \quad V = \{(x,y,z) / x, y \in \mathbb{R}, z=0\}$

$(x,y,z) \longrightarrow (x+z, y+z, 0)$

$(a_1, b_1, c_1) \in \mathbb{R}_3 \ (a_2, b_2, c_2) \in \mathbb{R}_3, \ k \in \mathbb{R}$

$T((a_1,b_1,c_1)+(a_2,b_2,c_2)) = T(a_1+a_2, b_1+b_2, c_1+c_2) =$

$= (a_1+a_2+c_1+c_2, b_1+b_2+c_1+c_2, 0) =$

$= (a_1+c_1, b_1+c_1, 0) + (a_2+c_2, b_2+c_2, 0) = T(a_1,b_1,c_1) + T(a_2,b_2,c_2)$

$T(k(a_1,b_1,c_1)) = T(ka_1, kb_1, kc_1) = (ka_1+kc_1, kb_1+kc_1, 0) =$

$(k(a_1+c_1), k(b_1+c_1), 0) = k(a_1+c_1, b_1+c_1, 0) = kT(a_1, b_1, c_1)$.

Transformações Lineares - Ficha 01

Figura 15 - Registro escrito de Simba - Ficha de Trabalho 5 - Tarefa 1

Ao analisar a resolução de Simba, pudemos entender melhor sua angústia em relação à tarefa. Simba opera com a lógica de que, para descrever o que seria uma transformação linear, não poderia utilizar explicitamente o termo função. Assim, Simba denotou uma transformação linear como sendo uma regra que correlaciona dois espaços vetoriais, e que ainda satisfaz o fechamento para a soma vetorial e para o produto por escalar.

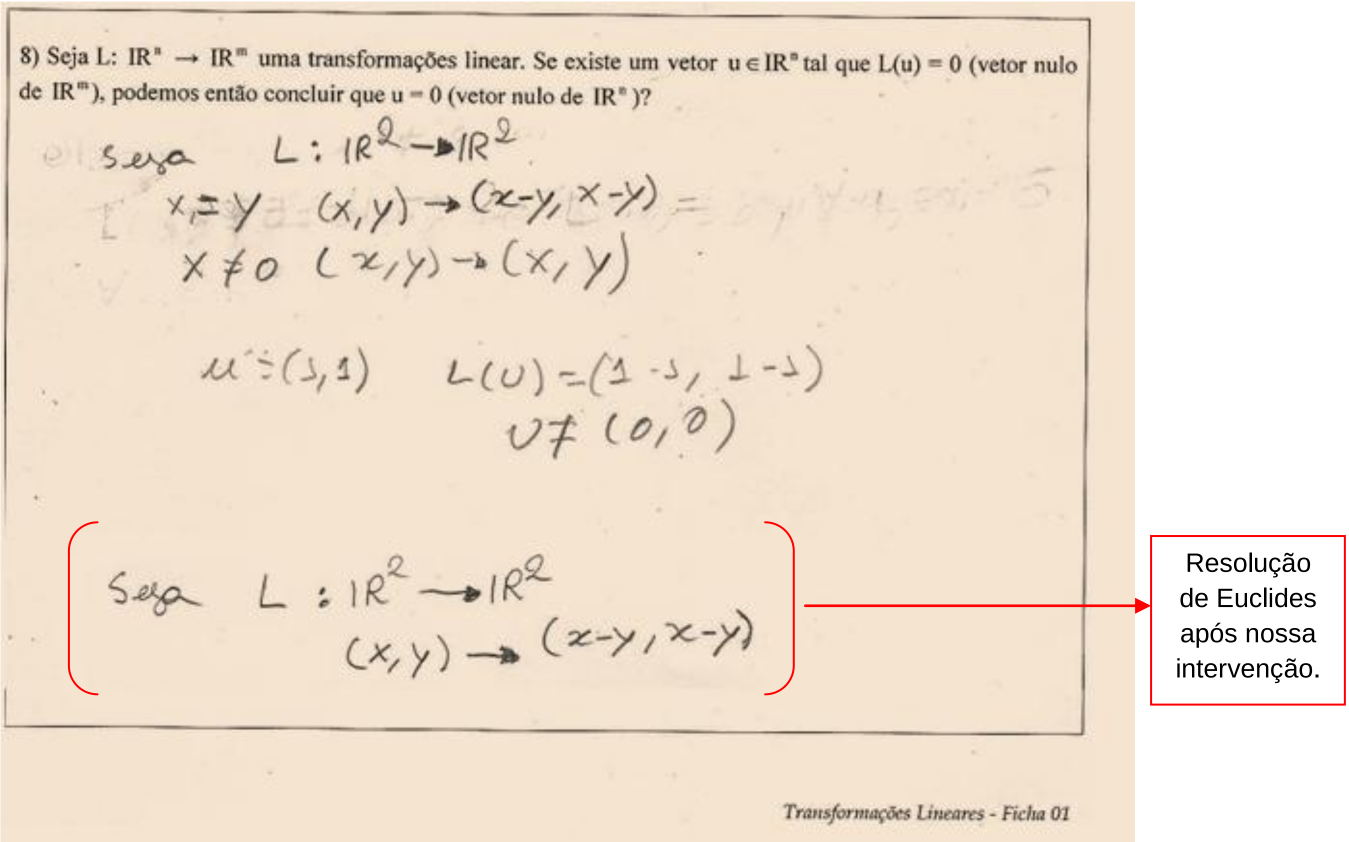
Em seu exemplo de transformação linear, Simba definiu uma T de IR^3 em um subespaço V de IR^3. Ele operou de forma semelhante à forma que utilizamos para exemplificar se uma função entre espaços vetoriais é ou não uma transformação linear.

Outra tarefa que destacamos nesta aula, foi a tarefa 8:

8) Seja L: $IR^n \rightarrow IR^m$ uma transformação linear. Se existe um vetor $u \in IR^n$ tal que L(u) = 0 (vetor nulo de IR^m), podemos então concluir que u = 0 (vetor nulo de IR^n)?

Euclides terminou sua resolução dessa tarefa e mostrou aos professores. Logo após nossa leitura, iniciamos o diálogo:

Vitor: Dá para fazer isso sem colocar as duas sentenças? Você precisaria disso aqui? Tirando isso será que funciona? [*apontando para uma das sentenças*]
Euclides: Tirando o quê?
Vitor: Uma dessas sentenças.
Euclides: Eu pensei em deixar só essa. [*novamente apontando*]
Vitor: Será que ela funciona?
Euclides: [*após pensar um pouco*] Funciona.
Vitor: Então tente escrever usando uma só sentença.



8) Seja L: $IR^n \rightarrow IR^m$ uma transformações linear. Se existe um vetor $u \in IR^n$ tal que $L(u) = 0$ (vetor nulo de IR^m), podemos então concluir que $u = 0$ (vetor nulo de IR^n)?

Seja $L: IR^2 \rightarrow IR^2$

$x = y$ $(x,y) \rightarrow (x-y, x-y) =$

$x \neq 0$ $(x,y) \rightarrow (x,y)$

$u = (1,1)$ $L(u) = (1-1, 1-1)$

$u \neq (0,0)$

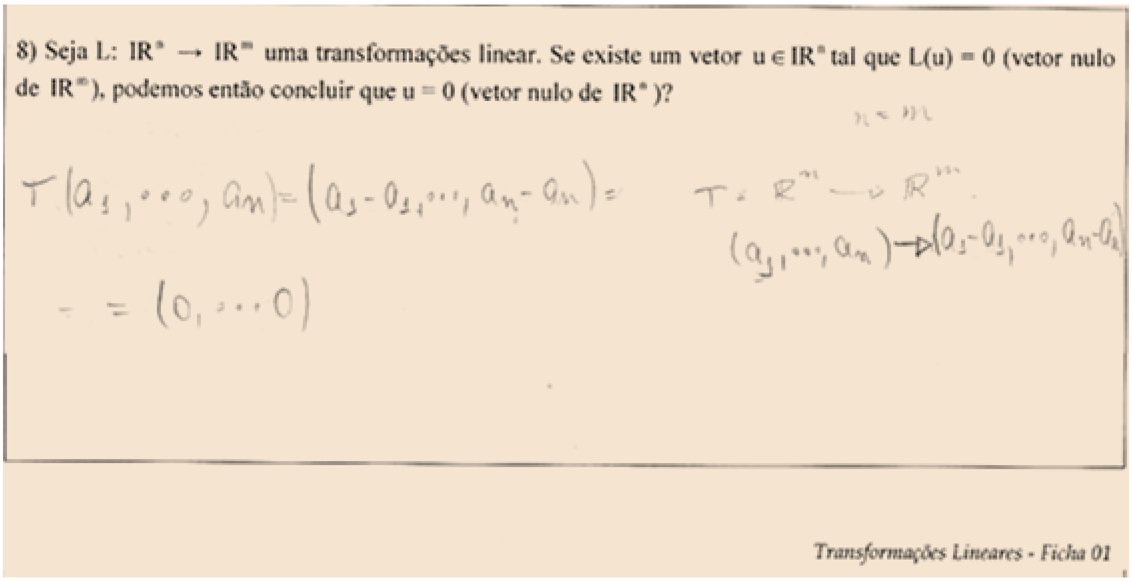
Seja $L: IR^2 \rightarrow IR^2$

$(x,y) \rightarrow (x-y, x-y)$

Transformações Lineares - Ficha 01

Figura 16 - Registro escrito de Euclides - Ficha de Trabalho 5 - Tarefa 8

Enquanto isso, Simba estava terminando sua resolução.



8) Seja L: $IR^n \rightarrow IR^m$ uma transformações linear. Se existe um vetor $u \in IR^n$ tal que $L(u) = 0$ (vetor nulo de IR^m), podemos então concluir que $u = 0$ (vetor nulo de IR^n)?

$n = m$

$T(a_1, \dots, a_n) = (a_1 - a_1, \dots, a_n - a_n) =$

$= (0, \dots 0)$

$T: R^n \rightarrow R^m$

$(a_1, \dots, a_n) \rightarrow (a_1 - a_1, \dots, a_n - a_n)$

Transformações Lineares - Ficha 01

Figura 17 - Registro escrito de Simba - Ficha de Trabalho 5 - Tarefa 8

Simba: Assim? [*mostrando sua resolução para Vitor*]

Vitor: Você pegou a transformação que é a mais simples de todas. Aliás, a mais simples que eu penso na minha cabeça: T de IR em IR, dada por T(x) = 0 para todo x.
Aretha: Essa atenderia essa condição.
Vitor: Por exemplo assim, quanto é T(1)?
Euclides: Zero
Vitor: 1 é o vetor nulo?
Euclides: Não, mas ela é tão tranquila que eu pensei que não podia!
Simba: [*risos*] É...
Vitor: Essa que você fez Simba, é a transformação nula para o IR^n.
Simba: Nossa, tá muito estranho... muito estranho fazer esse exercícios. Esses exercícios são muito diferentes.

Observamos na fala de Simba, um estranhamento causado pela proposta das tarefas familiares e não usuais. Por quase todo nosso trabalho nesta ficha, Simba fez perguntas sobre como proceder para resolver as tarefas, pois desde o início, achava estranho o formato dos enunciados.

Além disso, destacamos, ao término de nosso primeira aula, a existência de uma proposta diferenciada em relação à uma noção matemática de uma transformação linear. Desejávamos conversar e discutir sobre a definição, propriedades e exemplos de transformações lineares e não direcionar nossas ações para resoluções de exercícios, os quais os sujeitos deveriam apenas resolver usando um algoritmo. Pudemos observar que ao discutir a teoria, na perspectiva da produção de significados dos sujeitos, constatamos uma maior dedicação de todos envolvidos. Outra coisa que observamos, é que questionamentos que consideramos “simples”, não se mostraram tão simples, quando os sujeitos de pesquisa produziram significados para eles, como falar sobre a definição de transformação linear.

Terminamos nossa primeira aula discutindo sobre algumas questões da Matemática escolar, como adição de frações de denominares diferentes, operações entre números negativos e conversamos sobre nossas experiências na Educação Básica. Passando por esta discussão, iniciamos o trabalho na ficha de trabalho 6.

5.2. A Produção de Significados a partir da Ficha de Trabalho 6

Começamos a trabalhar esta ficha logo após o término de nossas discussões sobre as tarefas da ficha 5. De início, conversamos com os sujeitos sobre os teoremas em Álgebra Linear. Dissemos que, na maioria dos casos, as demonstrações em Álgebra Linear eram construtivas e utilizavam bastante da teoria.

Assim, o objetivo em trabalhar com essa ficha, era criar uma oportunidade de observar e realizar nossa leitura da produção de significados dos sujeitos de pesquisa em todos os passos de uma demonstração de teorema, destacando os objetos que são constituídos pelos sujeitos ao longo do processo. Dessa forma, Simba e Euclides foram convidados a ler o enunciado do teorema.

TEOREMA 1: Sejam V e W subespaços vetoriais de IR^n e IR^m respectivamente e $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ uma base de V (dim V = k), e $w_1, w_2, ..., w_k$ vetores arbitrários de W. Então existe uma única transformação linear $T: V \to W$ tal que $T(v_1) = w_1, T(v_2) = w_2, ..., T(v_k) = w_k$.
Esta transformação é dada da seguinte maneira: se $v = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_kv_k$, então, $T(v) = a_1T(v_1) + a_2T(v_2) + ... + a_kT(v_k) = a_1w_1 + a_2 w_2 + ... + a_kw_k$.

Comentamos um pouco sobre o enunciado do teorema e perguntamos aos sujeitos o que eles achavam sobre este resultado.

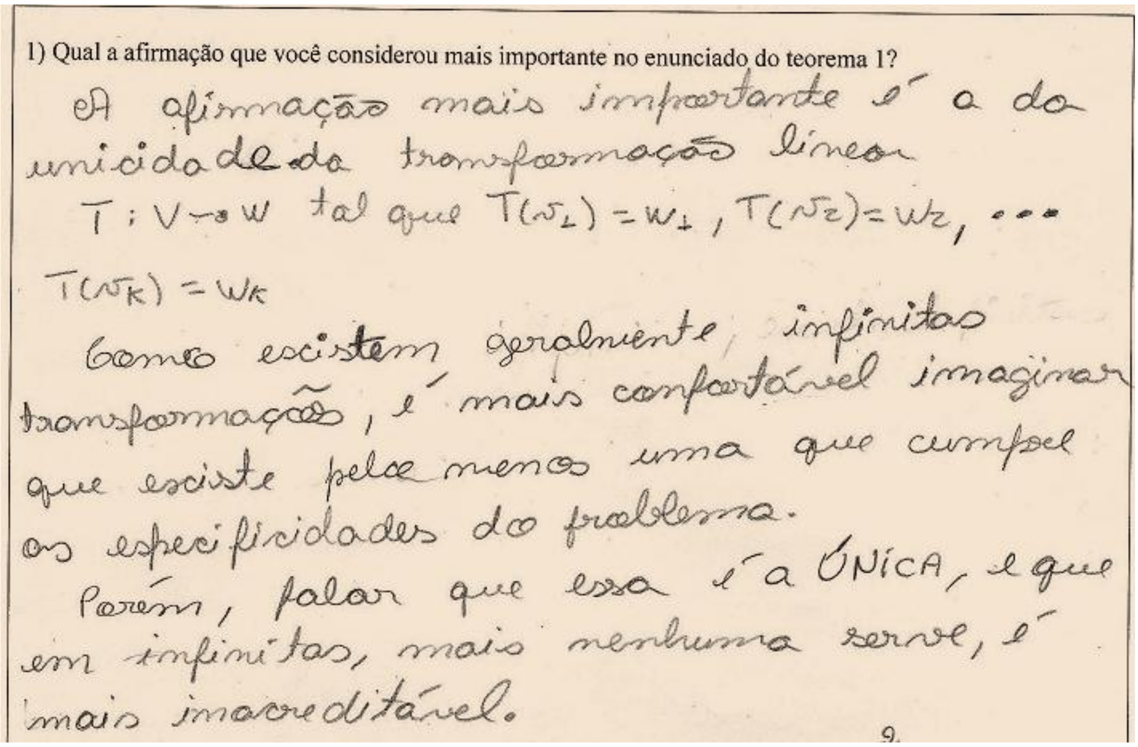
Simba: Então eu quero provar isso aqui... o teorema, eu tenho que provar a parte de baixo ou a parte de cima? Ou um quer dizer a mesma coisa que o outro?
Vitor: O que você acha?
Euclides: Primeira coisa que eu acho aqui é provar a unicidade aqui.
Vitor: Você tem que mostrar quantas coisas nesse teorema?
Simba e Euclides [*juntos*]: Que existe e é única.
Vitor: Bom, para você mostrar que é única, primeiro você tem que mostrar que existe, não é?
Euclides: Uhun.

Simba: Eu não consigo ver que só existe uma só transformação, entende. Eu acho estranho. Por que existe várias transformações.
Vitor: Pois é, o teorema diz que se existe uma outra que faz a mesma coisa, elas têm que ser iguais.

Simba retrata seu estranhamento frente ao enunciado do teorema e expõe algumas situações que poderiam acontecer. Discutimos bastante sobre as situações em que o teorema era aplicado, colocamos alguns exemplos para transformações de IR^2 em IR^2 em relação à base canônica, mas Simba estava impermeabilizado em relação ao enunciado do teorema. Para ele, não era legítimo afirmar que tal transformação linear era única, tanto que, ao ser questionado sobre o que ele considerou mais importante no enunciado do teorema, Simba afirmou:

Simba: O que foi mais estranho para mim, foi ter sido única!

Essa mesma consideração foi observada apenas na resolução de Euclides, pois no momento em que Simba expunha sua produção de significados, Euclides estava concentrado em sua escrita.


1) Qual a afirmação que você considerou mais importante no enunciado do teorema 1?

A afirmação mais importante é a da unicidade da transformação linear $T: V \to W$ tal que $T(v_1) = w_1$, $T(v_2) = w_2$, ... $T(v_k) = w_k$

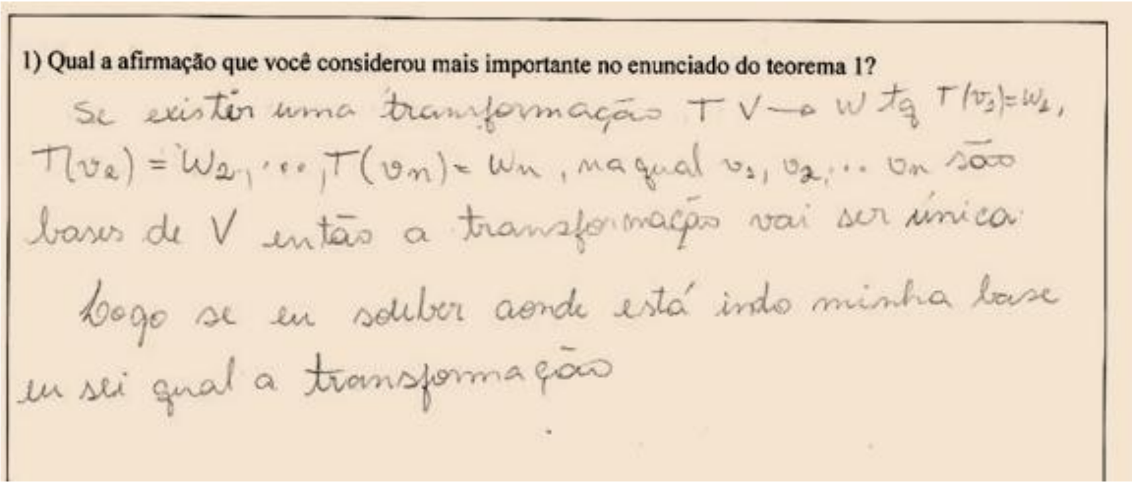
Como existem geralmente, infinitas transformações, é mais confortável imaginar que existe pelo menos uma que cumpre as especificidades do problema.

Porém, falar que essa é a ÚNICA, e que em infinitas, mais nenhuma serve, é mais inacreditável.

9.

Figura 18 - Registro escrito de Euclides - Ficha de Trabalho 6 - Tarefa 1

A resposta de Simba foi mais simples. Ela não destacou toda sua angústia ao produzir significados a partir do resultado do teorema.


1) Qual a afirmação que você considerou mais importante no enunciado do teorema 1?

Se existir uma transformação $T\ V \to W$ tq $T(v_1)=w_1$, $T(v_2) = w_2, \dots, T(v_n) = w_n$, na qual $v_1, v_2, \dots v_n$ são bases de V então a transformação vai ser única.

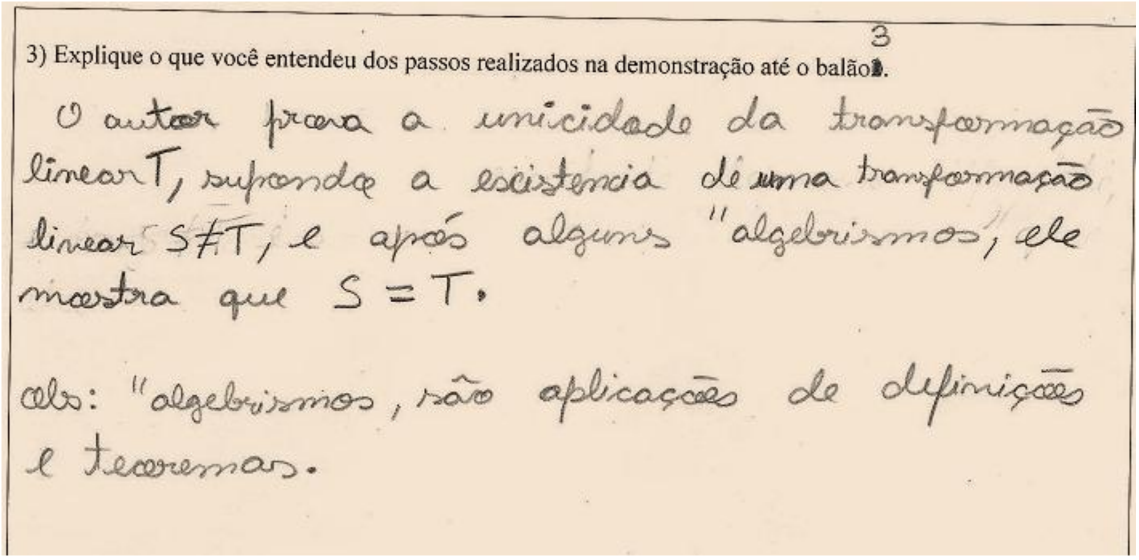
Logo se eu souber aonde está indo minha base eu sei qual a transformação

Figura 19 - Registro escrito de Simba - Ficha de Trabalho 6 - Tarefa 1

Neste ponto da aula, observamos diferenças entre os modos de produzir significados do sujeitos de pesquisa. Nas tarefas que consistiam em algoritmos matemáticos de resolução (nas “contas”), Simba tinha mais destreza em suas resoluções. Entretanto, nas questões de caráter mais explicativo, Euclides sentia mais confiança e resolvia as tarefas com mais “facilidade”.

Outro ponto que destacamos nesta aula, é que durante quase todo o tempo, Simba questionava o resultado do teorema, propunha situações nas quais o teorema poderia “furar” e imaginava particularidades para o teorema. Euclides preocupou-se mais em escrever suas resoluções.

Na ficha de trabalho, a demonstração do teorema foi dividida por balões, nos quais os sujeitos de pesquisa deveriam registrar os significados produzidos em cada etapa. Euclides trocou a ordem de suas respostas, mas notou o erro e corrigiu sua escrita. Dentre todas suas explicações, destacamos a relacionada até o 3º balão:


3) Explique o que você entendeu dos passos realizados na demonstração até o balão 3.

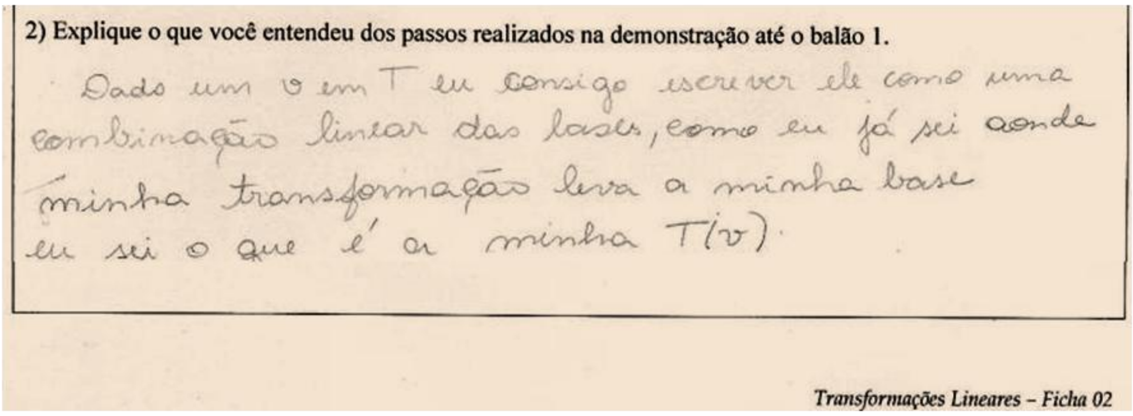
O autor prova a unicidade da transformação linear T, supondo a existência de uma transformação linear $S \neq T$, e após alguns "algebrismos", ele mostra que $S = T$.

obs: "algebrismos, são aplicações de definições e teoremas.

Figura 20 - Registro escrito de Euclides - Ficha de Trabalho 6 - Tarefa 3

Em nossa leitura da produção de significados de Euclides para a tarefa, obsevamos que ele constituiu os objetos tese e hipótese de um teorema, distinção entre existência e unicidade (apesar de Euclides ter achado "inacreditável" esta unicidade), além da ideia de "algebrismos", definida por Euclides como sendo os processos algébricos, como adição de vetores, produtos entre escalares e vetores entre outros, realizados ao longo da demonstração do teorema.

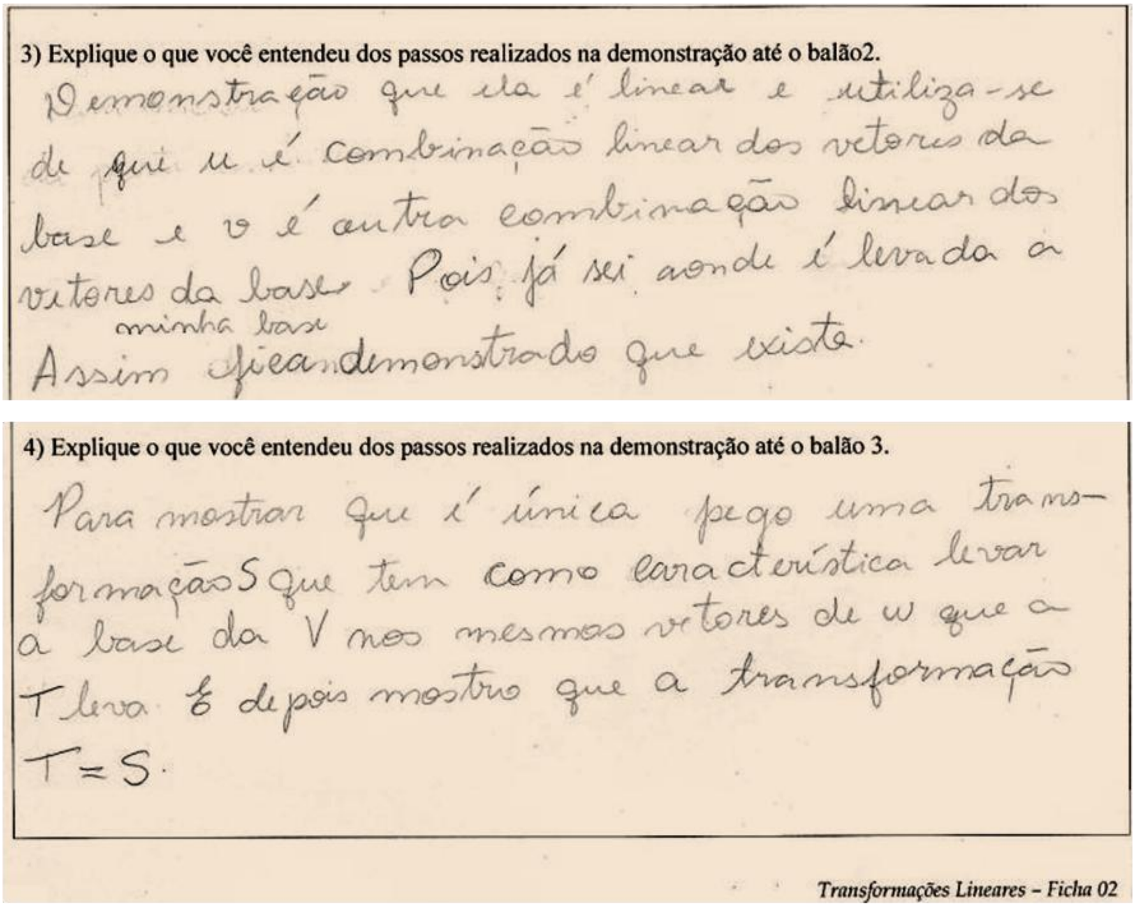
As resoluções de Simba foram:


2) Explique o que você entendeu dos passos realizados na demonstração até o balão 1.

Dado um v em T eu consigo escrever ele como uma combinação linear das bases, como eu já sei aonde minha transformação leva a minha base eu sei o que é a minha T(v).

Transformações Lineares – Ficha 02

Figura 21 - Registro escrito de Simba - Ficha de Trabalho 6 - Tarefa 2



3) Explique o que você entendeu dos passos realizados na demonstração até o balão2.

Demonstração que ela é linear e utiliza-se de que u é combinação linear dos vetores da base e v é outra combinação linear dos vetores da base. Pois já sei aonde é levada a minha base
Assim fica demonstrado que existe.

4) Explique o que você entendeu dos passos realizados na demonstração até o balão 3.

Para mostrar que é única pego uma transformação S que tem como característica levar a base da V nos mesmos vetores de W que a T leva & depois mostro que a transformação T = S.

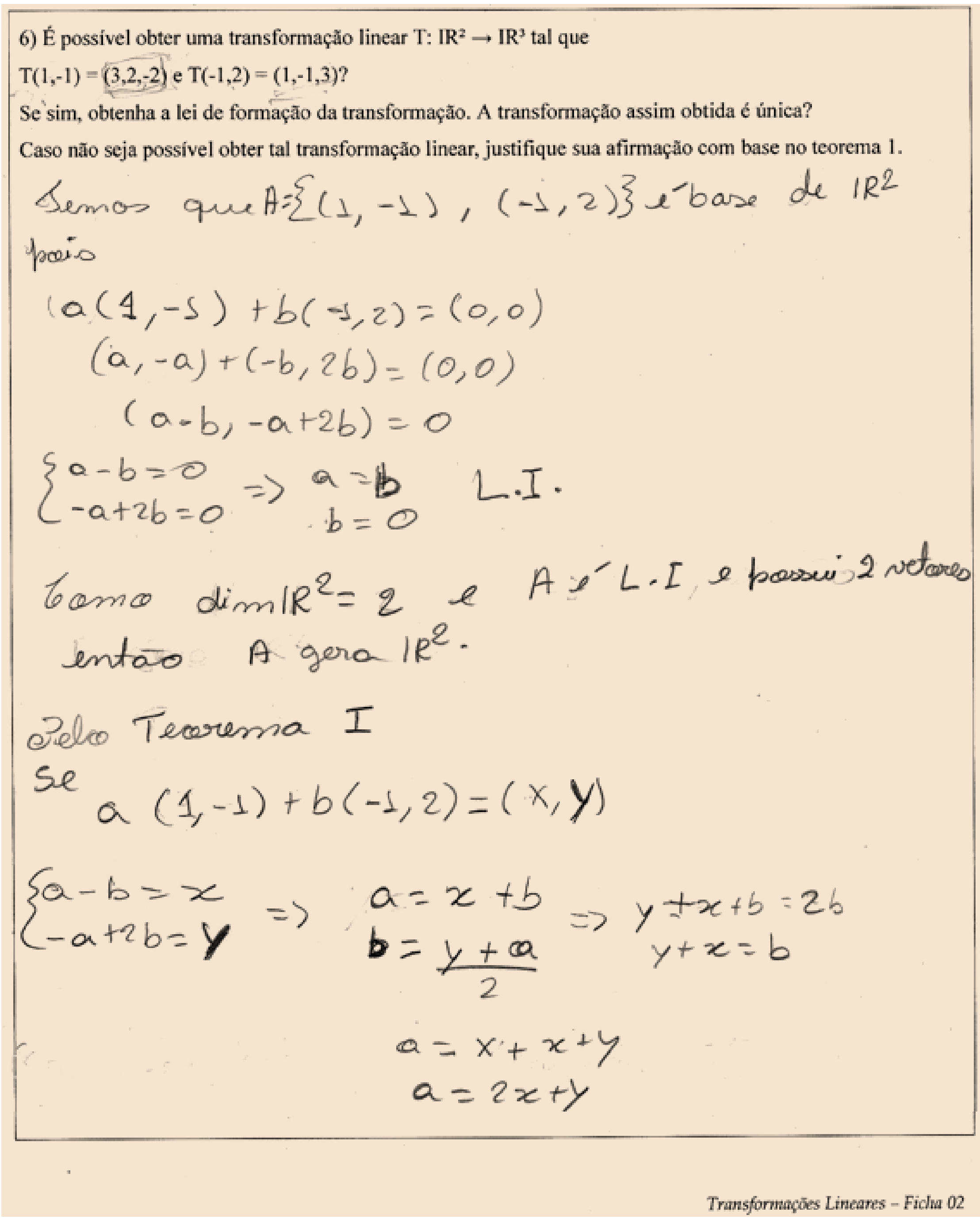
Transformações Lineares – Ficha 02

Figura 22 - Registro escrito de Simba - Ficha de Trabalho 6 - Tarefas 3 e 4

Simba mostrou-se mais preocupado em enunciar suas considerações à respeito de um vetor *u* como combinação linear dos vetores de uma base e *v* sendo uma outra combinação linear dos vetores dessa mesma base. Assim, em nossa leitura da produção de significados do Simba, acreditamos que ele constituiu os objetos base, combinação linear de vetores de uma base, a ideia de que uma transformação linear “leva” vetores de um Espaço Vetorial em outro Espaço Vetorial.

Após nossa análise, a partir da dinâmica da produção de significados dos sujeitos, pudemos observar uma riqueza de detalhamentos e informações sobre o entendimento dos sujeitos acerca das etapas da demonstração proposta. Acreditamos que isto ocorreu devido ao fato deles terem sido estimulados a falar sobre o que estavam lendo e entendendo, em cada parte da demonstração do teorema.

Uma situação que destacamos nesta nossa análise, é a resolução e discussão de Euclides, relativa a uma tarefa na qual perguntávamos se era possível obter uma lei de formação de uma transformação linear de IR² em IR³, conhecendo apenas a atuação dessa possível transformação em dois vetores distintos do IR². A resolução de Euclides para tal tarefa foi:



6) É possível obter uma transformação linear T: IR² → IR³ tal que

T(1,-1) = (3,2,-2) e T(-1,2) = (1,-1,3)?

Se sim, obtenha a lei de formação da transformação. A transformação assim obtida é única?

Caso não seja possível obter tal transformação linear, justifique sua afirmação com base no teorema 1.

Temos que $A=\{(1,-1), (-1,2)\}$ é base de IR²
pois

$$a(1,-1)+b(-1,2)=(0,0)$$
$$(a,-a)+(-b,2b)=(0,0)$$
$$(a-b,-a+2b)=0$$
$$\begin{cases} a-b=0 \\ -a+2b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a=b \\ b=0 \end{matrix} \quad L.I.$$

Como dim IR² = 2 e A é L.I e possui 2 vetores
então A gera IR².

Pelo Teorema I

Se $a(1,-1)+b(-1,2)=(x,y)$

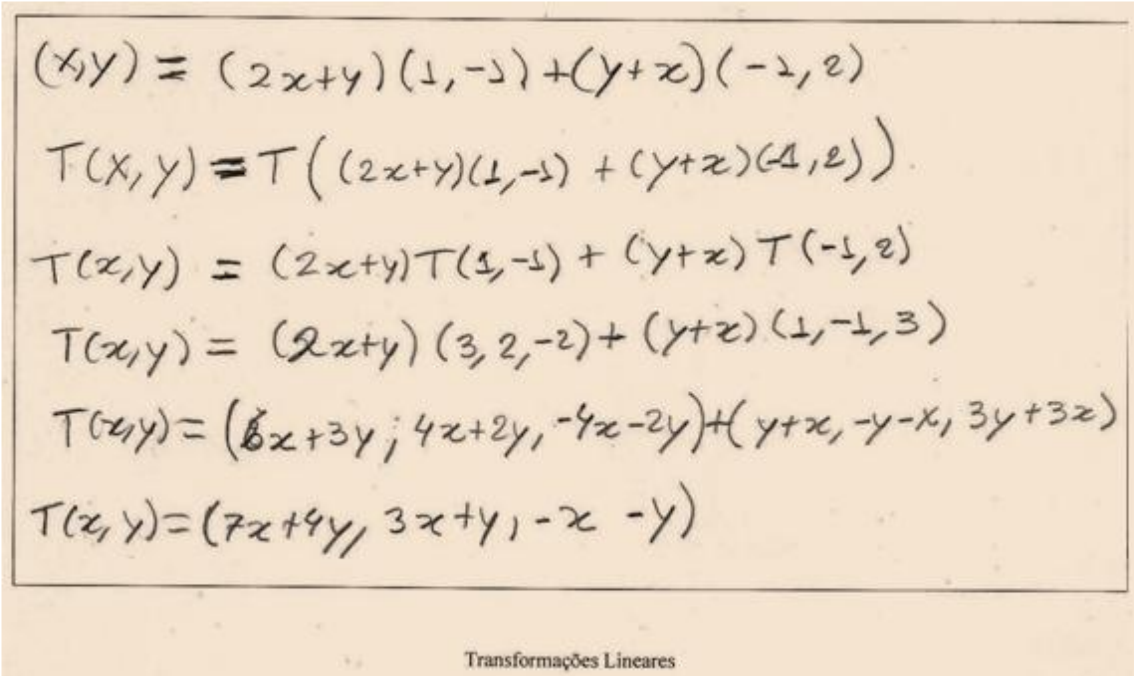
$$\begin{cases} a-b=x \\ -a+2b=y \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a=x+b \\ b=\dfrac{y+a}{2} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} y+x+b=2b \\ y+x=b \end{matrix}$$

$$a=x+x+y$$
$$a=2x+y$$

Transformações Lineares – Ficha 02

Figura 23 - Registro escrito de Euclides - Ficha de Trabalho 6 - Tarefa 6

Euclides termina sua resolução da seguinte forma:



$(x,y) = (2x+y)(1,-1) + (y+x)(-1,2)$

$T(x,y) = T\left((2x+y)(1,-1) + (y+x)(-1,2)\right)$

$T(x,y) = (2x+y)T(1,-1) + (y+x)T(-1,2)$

$T(x,y) = (2x+y)(3,2,-2) + (y+x)(1,-1,3)$

$T(x,y) = (6x+3y; 4x+2y, -4x-2y) + (y+x, -y-x, 3y+3x)$

$T(x,y) = (7x+4y, 3x+y, -x -y)$

Transformações Lineares

Figura 24 - Registro escrito de Euclides - Ficha de Trabalho 6 - Tarefa 6

Há um pequeno erro no sinal da lei de formação obtida por Euclides, ele deveria ter obtido T(x,y) = (7x + 4y, 3x + y, -x + y), mas este fato não influenciou sua produção de significados.

Após terminar sua tarefa, Euclides se colocou num exercício de refazer as etapas de sua resolução, buscando verificar seu entendimento sobre a tarefa e o resultado do teorema. Eis o nosso diálogo:

Euclides: Então deixa eu ver se eu entendi agora o teorema todo. Essa transformação [*apontando para lei de formação da transformação que ele construiu*], ela é a única que se eu aplicar em cima da base dos...

Aretha: Em cima dessa base aqui [*apontando para o conjunto A = {(1,-1), (-1,2)}*].

Euclides: Em cima dessa base... (1,-1), (-1,2), eu vou levar em qualquer, é... não, eu vou levar só nesses dois caras? [*referindo-se aos vetores (3,2,-2) e (1,-1,3)*]

Euclides: Ah não, se eu aplicar nesses dois caras [*os vetores (1,-1), (-1,2)*], eu vou levar nisso [*os vetores (3,2,-2) e (1,-1,3)*], mas como todos os vetores do troço é combinação disso, eu vou conseguir, ela vai levar em todo mundo.

Vitor: Eu consigo escrever todos os vetores como combinação linear desses dois. Se eu sei o que uma transformação faz com os vetores da base, eu sei o que essa transformação faz com...

Euclides: Com todos os vetores os vetores do Espaço! É, eu escrevi isso, mas agora eu vi.

Após nossa leitura da produção de significados de Euclides, observamos que ele produziu significados a respeito do resultado do teorema, a partir de sua resolução e leitura de um caso particular; um exemplo de como o teorema poderia funcionar. Simba também resolveu esta tarefa e obteve o mesmo resultado que Euclides, utilizando o mesmo processo de construção da transformação linear T em questão.

5.3. A Produção de Significados a partir da Ficha de Trabalho 7

Nesta aula, trabalhamos com nossos sujeitos de pesquisa as noções de núcleo e imagem de uma transformação linear, concluindo a aula com o teorema do núcleo e da imagem. Os sujeitos foram inicialmente convidados a ler as definições de núcleo e de imagem de uma transformação linear.

Euclides afirmou que não teve problemas com essas noções e fez analogias da imagem de uma transformação linear com a imagem de uma função "normal", como aquelas em que ele estudou no Ensino Médio.

Após as ler as definições, Simba nos pediu para demonstrar o teorema:

TEOREMA: Seja $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear, onde V e W subespaços vetoriais de IR^n e IR^m respectivamente. Então:

i) O núcleo de T é um subespaço vetorial de V;

ii) A imagem de T é um subespaço vetorial de W.

Sugerimos que eles próprios poderiam fazer as demonstrações no quadro e, ao longo das demonstrações, conversaríamos sobre as etapas e particularidades do teorema. As demonstrações dos sujeitos de pesquisa foram gravadas em vídeo.

Simba ficou responsável em demonstrar (i). Ele foi construindo sua demonstração e explicando seus passos. Ao longo de sua escrita, todos conversaram sobre as etapas da construção da demonstração, principalmente sobre detalhes na notação e rigor da escrita. Ao final de sua explicação, sua demonstração no quadro foi:

N(T) é um subconjunto vetorial de V.

$0 \in$ N(T), pois T(0) = 0, então N(T) $\neq \varnothing$

Sejam x, y $\in$ N(T) e k $\in$ IR.

$$T(x+y) \overset{T\ e'\ linear}{=} T(x) + T(y) \underset{pois\ x\ e\ y \in N(T)}{=} 0 + 0 = 0.$$

Logo x + y $\in$ N(T).

$$T(kx) \underset{T\ e'\ linear}{=} k.T(x) = k.0 = 0.$$

Então (k.x) $\in$ N(T).

Portanto, N(T) é subespaço de V.

Inicialmente, Simba escreveu N(T) é um subconjunto de V e começou provando que N(T) não era vazio. Para isso, Simba tomou 0 (vetor nulo) em V e considerando T uma transformação linear, afirmou que T(0) = 0. Logo 0 pertence à N(T) e portanto N(T) é diferente do conjunto vazio.

Depois dessa etapa, Simba tomou vetores x e y em N(T) e mostrou que T(x+y) = T(x) + T(y), utilizando a justificativa de T ser linear e T(x) = T(y) = 0, pois x e y pertencem ao núcleo de T. Logo x + y pertence ao núcleo de T. Além disso, mostrou que T(kx) = k.T(x) = k.0 = 0 e, portanto, (kx) pertence ao núcleo de T, utilizando as mesmas justificativas anteriores. Dessas duas considerações, Simba concluiu que N(T) é um subespaço de IR^n.

Euclides começou sua demonstração de (ii) “aproveitando” o início da demonstração de Simba, ao apagar o quadro e deixando apenas escrito Im(T) é um subconjunto de W. Sua demonstração completa foi:

Im(T) é subconjunto vetorial de W.

$0 \in$ Im(T), pois T(0) = 0.

Sejam x, y $\in$ W tal que x = T(u) e y =T(v), onde u e v $\in$ V.

Temos que

$$*\ x + y = T(u) + T(v) \overset{linear}{=} T(\underbrace{u+v}_{V\ e'\ subespaço}) \in Im(t)$$

$$*\ k(x) = k.T(u) = T(\underbrace{ku}_{\in V\ pois\ V\ e'\ subespaço}) \in Im(T).$$

Logo Im(T) é subespaço de W.

Euclides foi justificando seus passos na construção da demonstração, até o ponto que a professora Aretha perguntou a ele sobre o porquê de ele ter utilizado vetores x e y em W, ao invés de tomar T(u) e T(v) direto na Im(T).

Aretha: Euclides, olha só, quando a gente mostra que é um subespaço, você, lembra que eu ficava falando com você, quem é um subespaço de que? Entendeu? Que conjunto é um subespaço de que conjunto? Por quê? Por que aí, olha só, do jeito que você escreveu, a demonstração está correta, só que onde está que você tomou dois elementos no conjunto que você queria mostrar, a condição tá ali, mas você falou que pegou ali?
Euclides: [*tentando entender a pergunta*] Peraí...
Aretha: Você fez aparecer o símbolo ali da imagem.
Euclides: Eu não estou entendo o que que não tá...
Simba: Olha onde você tá pegando x e y.
Euclides: x e y? Tá dentro da imagem.
Simba: Mas você colocou em W.
Euclides: Só de eu falar isso aqui [*apontando para* $x,y \in W$ *tal que* $x = T(u)$ *e* $y = T(v)$], pra mim já está garantindo que eles estão na imagem.
Simba: Mas você tem que pegar x e y pertencentes à imagem.
Euclides: Só de eu colocar essa condição aqui, eles estão na imagem. Pra mim, dá no mesmo.

Euclides não muda seu modo de operar, mesmo após o diálogo com a professora e com Simba. Para ele é legítimo afirmar que os vetores x e y, da forma que ele definiu, são vetores da imagem. Ele justifica sua forma de escrever a demonstração da seguinte forma:

Euclides: É porque quando eu vejo demonstração, pegando assim, eu não gosto desse modo que você tá falando, por que parece que eu já estou pegando os caras que eu quero. Eu tô pegando o cara mais geral possível.
Aretha: Mais é isso que estou te falando.
Euclides: Sempre nas demonstrações, eu fico vendo os caras demonstrar, fica parecendo, tem hora, você sabe onde você quer chegar, aí você chega lá, mas na hora que você escreve, você escreve de um jeito elegante. Só que aí, fica parecendo que você tirou coisa. Eu fui pegando x e y do jeito que eu queria...

A professora continuou conversando sobre outra forma de escrever esta demonstração, entretanto Euclides não se convenceu que a proposta que a professora sugeriu seria a melhor forma de escrever a demonstração e manteve sua resolução. Simba concorda com o modo do Euclides de provar o teorema e sugere apenas uma mudança: colocar x e y pertencentes à Imagem de T, não pertencentes à W.

Simba: Eu colocaria isso daqui [*apontando para* $x,y \in W$ *tal que* $x = T(u)$ *e* $y = T(v)$], para ficar claro para as pessoas, depois na minha parte da demonstração ali. Entendeu?
Euclides: Eu também fiz isso.
Simba: Por que tem gente que, tipo assim, você fala que está na imagem, mas demora para captar o que isso significa.

Pudemos observar que Simba e Euclides falaram na mesma direção em relação à construção da demonstração deste resultado e, além disso, Euclides não mudou sua forma de operar e produzir significados para sua estrutura da demonstração, mesmo após as intervenções da professora.

Após a discussão sobre o teorema, os sujeitos de pesquisa começaram a trabalhar nas tarefas familiares e usuais, isto é, tarefas que envolviam as "contas" sobre os conceitos de núcleo e imagem. Em uma destas tarefas, Euclides e Simba tinham que determinar o núcleo e a imagem de uma transformação linear dada. Além disso, deveriam dizer quais eram suas dimensões e verificar se um determinado vetor pertencia ou não à imagem da transformação.

Um fato curioso que ocorreu foi em relação ao núcleo da transformação linear. Ambos os sujeitos afirmaram que o Ker T = {(0, 0)}, entretanto, ao serem perguntados sobre uma base para esse núcleo e sua dimensão, ocorreu a seguinte situação descrita no diálogo:

Vitor: [*perguntando ao Euclides*] Qual é a dimensão do Ker T?
Euclides: É 1 né? Qualquer vetor que você botar aqui, você faz o (0, 0). É... só tem um vetor, dimensão só tem 1.
Vitor: [*perguntando ao Simba*] O que você acha?
Simba: Eu coloquei dimensão zero e a base vazia.

Euclides: [*olhando para sua resolução*] Perai...
Aretha: Não tem base.
Simba: Não tem...
Aretha: Não é vazio, não tem.
Euclides: Peraí, isso que eu tava com dificuldade de fazer. Por que que não tem? Por que qualquer um que eu colocar... ah não, eu vou ter que voltar na definição de lá de trás.
Aretha: Vazio seria o conjunto vazio.
Euclides: Não, porque tá fora, a definição de base depende do... rapidim [*pegando suas fichas antigas e procurando a definição de base*].

Euclides não estava confortável com a ideia de um conjunto formado apenas pelo vetor (0, 0) tenha dimensão zero. Para ele, como qualquer vetor pode geral o vetor nulo, o próprio vetor (0, 0) constituiria uma base para o núcleo dessa transformação T. Além disso, devido ao fato desse conjunto só possuir um vetor, sua dimensão deveria ser igual a um. Entretanto, ao escutar a professora e Simba afirmarem que a dimensão seria zero, Euclides muda a direção de sua produção de significados e já não afirmaria o que havia afirmado, preferindo reler a definição de base de um Espaço Vetorial. Após sua leitura, ele disse:

Euclides: Qualquer vetor vai gerar o (0, 0), isso que eu tava...
Vitor: Pois é, mas o (0, 0) é LI? Esse conjunto [*o Ker T = {(0, 0)}*] é LI?
Euclides: Não porque o (0, 0) não é LI.
Vitor: Por isso, o conjunto formado só pelo vetor (0, 0) nunca pode ser base, porque ele sempre vai ser LD. Entendeu?
Euclides: Uhun.
Simba: Eu sabia que era 0 [*a dimensão do Ker T*], mas não sabia como expressar a base.
Vitor: Aí não teria base e a dimensão seria...
Euclides: Se não tem base ele não vai ter nem dimensão.
Aretha: Não teria base e a dimensão é zero.
Vitor: A dimensão é zero.
Euclides: É, poderia não ter dimensão também.
Vitor: Vai ter que ter dimensão, porque a gente vai relacionar a dimensão da base com a dimensão do núcleo.

Euclides: Ah tá...

Euclides operava com a ideia de que se um subespaço possui um único vetor, então esse vetor constitui uma base para esse subespaço. Após sua releitura da definição de base e do diálogo com os professores, Euclides começou a produzir significados na direção de que se um subespaço não possui base, então ele não possui dimensão. Mesmos após os professores afirmarem que o conjunto Ker T = {(0, 0)} não teria base e que sua dimensão seria zero, Euclides não se sentiu satisfeito com nossa justificativa, e reafirmou "É, poderia não ter dimensão também". Quando reafirmamos que o núcleo teria dimensão zero, ele respondeu apenas com um "Ah tá...", como se estivesse esperando por mais explicações que o convencessem.

Logo após essa discussão, apresentamos aos sujeitos de pesquisa o teorema que relaciona a dimensão do núcleo e da imagem de uma transformação linear e pedimos a eles que verificassem o resultado do teorema com suas resoluções das tarefas. Todos os resultados foram confirmados. Simba e Euclides resolveram mais algumas tarefas a respeito do resultado do teorema e, em seguida, terminamos esta 8ª aula do Seminário.

5.3. A Produção de Significados a partir da Ficha de Trabalho 8

Este foi o nono e último encontro do Seminário em Álgebra Linear. Neste momento, estávamos interessados em trabalhar com os sujeitos de pesquisa as noções de Transformações Lineares Injetoras, Sobrejetoras, Bijetoras e a noção de Isomorfismo.

Começamos a aula discutindo as tarefas da aula anterior. Os sujeitos mostravam-se motivados com o Seminário e sentiam-se confiantes e estimulados a falar sobre as teorias da Álgebra Linear. Neste momento de discussão, conversávamos sobre a escrita dos exercícios e sobre as estratégias utilizadas em suas resoluções.

Como realizado em todas nossas aulas, os sujeitos de pesquisa foram convidados a ler as definições de transformações lineares injetoras, sobrejetoras e bijetoras. Iniciamos o conteúdo desta ficha, com a seguinte pergunta da professora:

Aretha: Para começar hoje, antes que eu dê a ficha pra vocês, eu queria perguntar assim: qual é o contato que vocês tiveram com funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras? Quando vocês ouvem esses três conceitos, o que vocês lembram, o que vocês associam?
Euclides: Ah, a gente teve todo o contato que possível!
Simba: Tudo tem né? Começa com Fundamentos, aí você vê em Álgebra, você vê em Álgebra Linear, você vê em Exponenciais e Logaritmos, você vê em Análise...
Euclides: Você tá sempre vendo... Cálculo você vê.
Aretha: No Ensino Médio vocês lidavam já com esses conceitos? Por que a gente começa a ver né?
Simba: É, mas tipo assim, eu acho que eles não pegavam tanto isso lá embaixo.
Euclides: Eu fui aprender mesmo isso aqui em cima!
Simba: Aí você sempre vinha com aqueles conjuntinhos do diagrama de Venn, que quando eles iam explicar função, eles faziam lá com os diagramas de Venn e iam fazendo lá as implicões: ah, isso é uma função, isso é uma função com uma peculiaridade assim... isso não é função... é sempre pelos desenhinhos, mas nada formal né. Ficava assim.

Obsevamos nas falas dos sujeitos, uma familiaridade com os conceitos, visto que eles próprios afirmaram que já haviam trabalhado estes conceitos em várias disciplinas ao longo de suas graduações, como Fundamentos, Análise, Álgebra e Cálculo. Além disso, Simba lembrou-se de ter trabalhado estas noções no Ensino Médio, porém, segundo ele, elas foram trabalhadas de forma apenas ilustrativa, com diagramas. Para os dois sujeitos, o entendimento desses conceitos veio somente no ensino superior.

Uma situação interessante que aconteceu durante esta aula, foi quando Euclides leu o seguinte resíduo de enunicação:

Proposição 1:
Se dim V = dim W, então uma transformação linear
$T: V \to W$ é injetora se, e somente se, T é sobrejetora.

Euclides: É primeiro... é aquele negócio, nem parece que você tem que provar. Claro, a gente é matemático e tem que provar, mas é, tipo assim, os dois, um conjunto é igual ao outro. Então a quantidade de elementos que tem em um, é igual a quantidade de elementos que tem no outro. Se todos elementos de um, se ela é injetora, todos elementos de um tem que está ligado lá.

Ao produzir significados para este resídio de enunciação, Euclides começa a falar na direção de que, se dois espaços vetoriais possuem a mesma dimensão, então eles irão possuir a mesma quantidade de elementos (vetores). Nesta direção, sendo a transformação injetora, Euclides acredita e afirma que, devido à injetividade da tranformação, todos os elementos do subespaço domínio, foram associados a um, e somente um elemento no subespaço do contradomínio e, desta forma, a transformação deveria ser sobrejetiva.

Ao identificar a direção da produção de significados de Euclides, a professora realizou uma intervenção.

Aretha: Mas como assim você está olhando a quantidade de elementos?
Euclides: [*lendo a proposição 1 e pensando por alguns instantes*]
Aretha: Você falou assim que um conjunto tem a mesma quantidade de elemento que o outro.
Euclides: É... ah, não tá, beleza. Não, errei aqui. É a dimensão que é...
Aretha: É a dimensão que é igual.
Euclides: Não, beleza!

Pudemos observar que Euclides foi capaz de mudar a direção para a qual estava produzindo significados, após a intervenção da professora. Acreditamos que, ao ser questionado, Euclides procurou algum "erro" em sua afirmação, visto que a professora, mesmo que sutilmente, estava sugerindo que sua afirmativa não estava de acordo com a definição da dimensão de um subespaço, trabalhada ao longo do Seminário.

A professora procurou um exemplo que pudesse ilustrar a situação proposta pela proposição e que tivesse alguma relação com o que Euclides acabara de afirmar. Ela escreve no quadro uma transformação linear T de IR^2 em $W = (x, 0, z) \in IR^3$, definida por T(x, y) = (x, 0, y).

Aretha: E aí, será que vai dar?

Euclides: Você quer falar se é o quê?

Aretha: Será que dá pra verificar a primeira [*referindo-se a proposição 1*]? O que vocês acham?

Simba: Tipo assim, se for pensar naquilo, ela não é sobrejetiva.

Aretha: Ela não é sobrejetiva? Assim, olhando a princípio você acha que ela não é?

Simba: Não, por que o “y” ali do IR^3 ele vai ser sempre zero, então não tá todo no IR^3.

Aretha: Tá, essa é sua primeira consideração a fazer dessa transformação.

Simba: Ah, não, calma aí... A transformação tá em W e não em IR^3. Não, então ela poderia sim! Ele tem dimensão 2.

Aretha: E agora, que análise vocês fariam? A gente tá garantindo a primeira parte da proposição, pois ele já pega dois espaços vetoriais com dimensões iguais.

Simba: Uhum.

Aretha: E a T eu defini daquele jeito.

Simba: Tá, mas ela é injetora né?

Euclides: É.

Aretha: Vamos discutir isso...

Simba: Ela é injetora, eu tô afirmando.

Euclides: Uhun.

Aretha: T é injetora, por quê?

Simba: Por que o único que é levado lá é o (0, 0).

Aretha: Núcleo de T vai ser só o (0, 0). Então ela vai ser injetora.

Euclides: Uhun.

Aretha: E ela vai ser sobrejetora também?

Simba: Pela proposição sim. Pelo teorema do núcleo e da imagem também dá! Por que você tem o zero do coisa [*referindo-se ao núcleo*], você tem o dois...

Aretha: Isso, como que era lá? Dimensão de V, que é nosso domínio, ela é igual a dimensão do núcleo...

Simba: Mais da imagem.

Aretha: Quem que é a imagem?

Simba: A imagem é o W.

Aretha: Vou botar imagem. Aqui eu sei que é dois, aqui a gente viu que é?

Simba: É zero.

Aretha: Então a outra tem que ser dois.

Simba: Isso!

Aretha: Se ela é dois, a dimensão da imagem é igual a do contradomínio, então ela é sobrejetiva.

Verificamos na produção de significados de Simba que ele foi capaz de falar em duas direções: do resultado da proposição 1 e do resultado do teorema do núcleo e imagem de uma transformação linear. Em ambos os casos, Simba produziu significados “matematicamente corretos” para a solução da questão.

Na figura abaixo, temos os registros feitos no quadro a partir da produção de significados dos sujeitos de pesquisa, na discussão anterior.

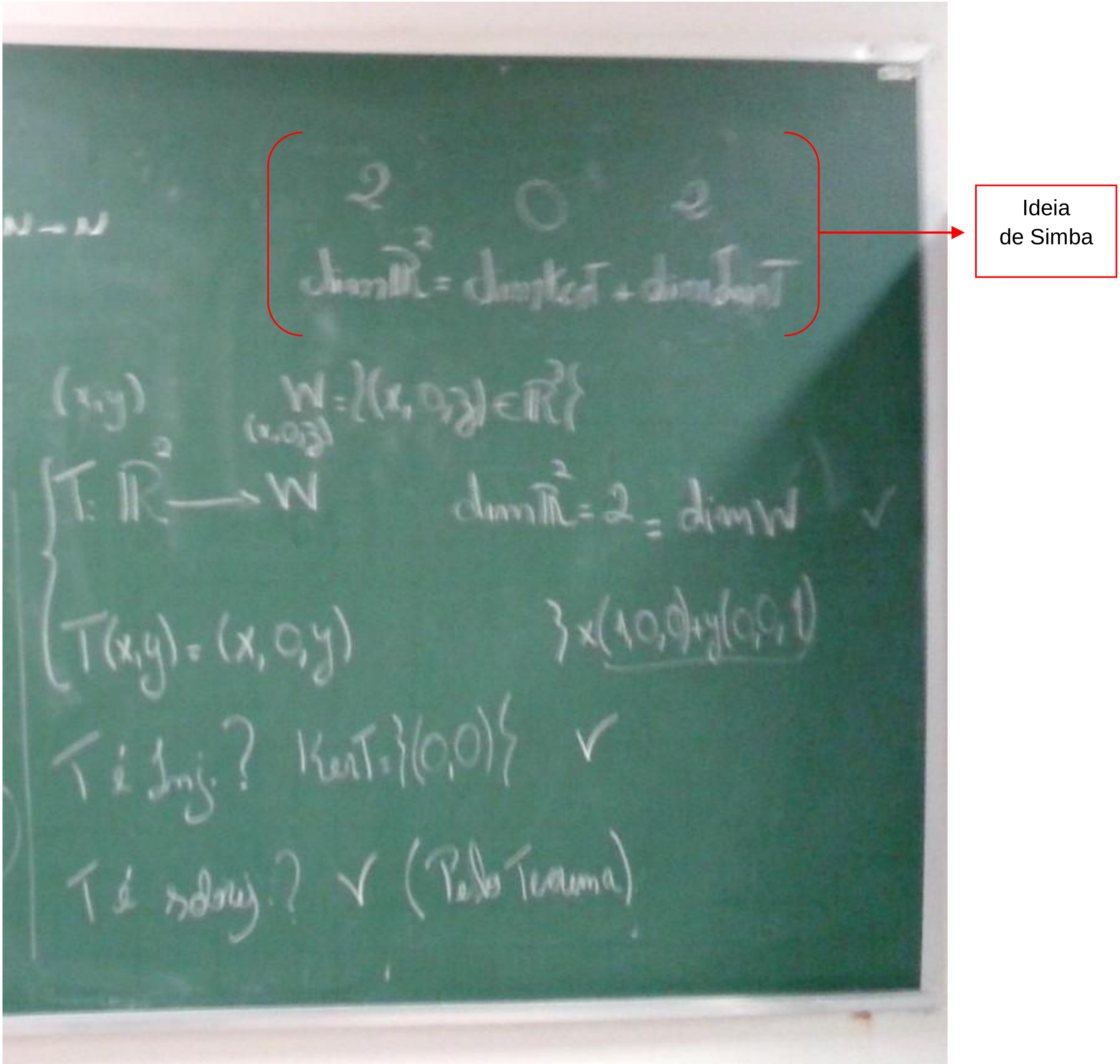


Figura 25 - Registro do quadro – discussão da proposição 1

Após as discussões relacionadas com as definições e proposições enunciadas na ficha de trabalhos, os sujeitos de pesquisa começaram a resolver as tarefas propostas. Em alguns momentos, Simba e Euclides pegavam o material e as tarefas já resolvidas por eles, para rever definições, resultados de teoremas e a forma como operaram em determinadas tarefas.

Como estávamos caminhando para o final do Seminário, Simba mostrou-se ainda motivado.

Simba: Ô gente, vocês vão terminar o curso assim, hoje assim, do nada? Eu já estou sentindo falta. Vocês poderiam terminar com a gente, assim tipo...
Vitor: Diagonalização...
Simba: Produto Interno [...] É... Vocês poderiam dar aula de tudo pra gente! [*risos*]
Euclides: [*risos*]. Eu falei com o Simba outro dia, qual é a melhor aula que você está tendo no período? E já ri, né? [*risos*]
Simba: É!
Euclides: E aí o pessoal, qual que é? É o Seminário de Álgebra Linear.
Vitor: E a aula que menos parece com a aula normal que a gente tem.
Simba: É a que mais dura. [*risos*]. A gente nem vê, quando viu, já acabou.
Vitor: É que vocês são os atores principais do processo, não é o professor. O foco não está no professor, no conteúdo, está em vocês trabalhando essas coisas.

Esse diálogo retrata um dos pressupostos que assumimos ao projetar e executar este Seminário, que era retirar o foco do conteúdo e do professor que expõe o conteúdo e para direcioná-lo para a produção de significados dos alunos. Para nós, o papel principal do professor de Matemática é ler a produção de significados dos alunos, com a intenção de observar os interlocutores e a constituição de objetos no interior da atividade, com a finalidade de, se necessário, realizar intervenções e sugerir novos modos de produção de significados.

Ao longo das tarefas resolvidas pelos sujeitos da pesquisa nesta ficha, destacamos a terceira tarefa, devido ao seu enunciado. Simba e Euclides produziram significados em direções diferentes para o mesmo resíduo de enunciação, como veremos a seguir.

3) Uma transformação linear T: $IR^2 \rightarrow IR$ não nula é sempre sobrejetora?

Num primeiro momento, Simba produziu significados para este resíduo de enunciação, na direção de que bastava ele exibir uma transformação linear T de IR^2 em IR, não nula, que seja sobrejetora. Ao mostrar sua resolução para a professora, tivemos o diálogo:

Aretha: Você chegou nessa aqui [*mostrando a transformação* $T: IR^2 \rightarrow IR$, *definida por* $T(x, y) = x$], você concluiu o seguinte, olha como você concluiu: "portanto é sobrejetora não nula". Mas aí o Vitor perguntou se é sempre. Você mostrou que tem uma. Essa aí ela é sobrejetora e é não nula. Mas será que todas elas?
Simba: Portanto nem sempre.
Aretha: Você mostrou uma não nula que é sobrejetora, tá certo! Eu tô perguntando assim, como é que você viu, se é que você conseguiu um jeito de colocar, que todas que são não nulas, são sobrejetoras. Problema meu está aí no sempre.
Vitor: Tá vendo, que é não nula, é sobrejetora.
Aretha: Mas assim, se você tivesse mostrado pra mim, uma que é não nula e que não é sobrejetora.
Vitor: Aí matava.
Simba: Ah tá, entendi!
Aretha: Entendeu? Agora, o que você fez tá certo, não tem nada errado. Só que assim, não garantindo pra mim, que sempre que uma transformação linear não nula, ela vai ser com certeza sobrejetora. Deixa esse exemplo pra você pensar como que é que você vai provar.
Simba: Tá.
Aretha: Mas você vê um jeito de explicar isso, essa... você tinha parado pra pensar nisso, o sempre?
Simba: Não, eu pensei que era pra provar o seguinte, que tipo assim... eu interpretei errado.
Aretha: Você entendeu que se você tomar uma...
Simba: Não nula...
Aretha: Não nula que não é, beleza, acabou!
Simba: É... isso.

Aretha colocou-se num exercício de descentramento em relação à produção de significados de Simba e foi capaz de produzir significados na direção em que Simba estava produzindo significados para a tarefa (resíduo de enunciação). Dessa forma, Aretha, em sua intervenção, foi capaz de sugerir novos modos de produção de significados para aquele resíduo, visto que, a resolução de Simba não respondia à pergunta da tarefa. Simba foi capaz de produzir significados na direção sugerida por Aretha, como vemos no diálogo a seguir:

Simba: Então eu quero uma que o núcleo seja igual ao IR^2.
Vitor: Qual que é a dimensão que tem que ter o núcleo?
Aretha: O IR^2? Por que o IR^2?
Simba: Mas aí, aí olha só, o que estou pensando. Por que se a dimensão, se elas for sobrejetora... é mas aí a dimensão da imagem vai ser a função nula.
Aretha: É nesse sentido que você tem que fazer mesmo Simba. Explora mais essas dimensões. É isso aí que você tá pensando, é nesse caminho mesmo.
Simba: Tá.

Simba começa a produzir significados na direção sugerida por Aretha, mas ainda encontrava algumas dificuldades (obstáculos epistemológicos) para escrever sua resolução.

Simba: Eu entendi o seguinte, para ela não ser sobrejetora, é... então a dimensão da imagem tem que ser zero. Já que eu tô trabalhando no IR né? Então a dimensão tem que ser zero. E o núcleo tem que ter dimensão 2, entendeu? Para que ela não seja sobrejetora, a dimensão aí vai tem que ser zero.
Aretha: Pensa nisso aqui [*indo ao quadro e organizando a resolução de Simba*].
Simba: Então Aretha, vai ter que ser zero a dimensão da imagem, para que ela não seja sobrejetora. Mas aí eu tenho que arrumar uma função não nula.
Vitor: Como?
Aretha: Mas aí pensa no geral.
Vitor: Se for zero [*a dimensão do da imagem*], vai ser a transformação nula, não vai ter jeito. Vai ser todo mundo no zero.
Simba: Han.
Vitor: Se a dimensão da imagem for zero, todo mundo vai ter que ir no zero, né?
Simba: Uhun.

Vitor: Tem outro caso, se a dimensão for 1, da imagem, o que você chegou em relação a dimensão do núcleo, tem que ser quanto?

Simba: Tem que ser 1.

Vitor: Por que a soma tem que dar 2, isso.

Simba: É. Só que a isso aqui ser zero...

Aretha: Mas pensa aqui, eu acho que você tá pensando num detalhe, olha só. Quem falou que a dimensão da imagem é 1?

Simba: Não, para ela ser sobrejetora, olha só...

Aretha: Tá, mas aí você não tá provando, você tá usando. É aí que você tem que pensar mesmo. Só que aí você que concluiu o do núcleo. Você consegue concluir do núcleo se você tiver certeza que a dimensão é isso. Pensa nisso. Você tem que pensar o seguinte, quais são as possíveis dimensões pra imagem?

Simba: Olha só, zero e um.

Aretha: Então trabalha com essas duas possibilidades.

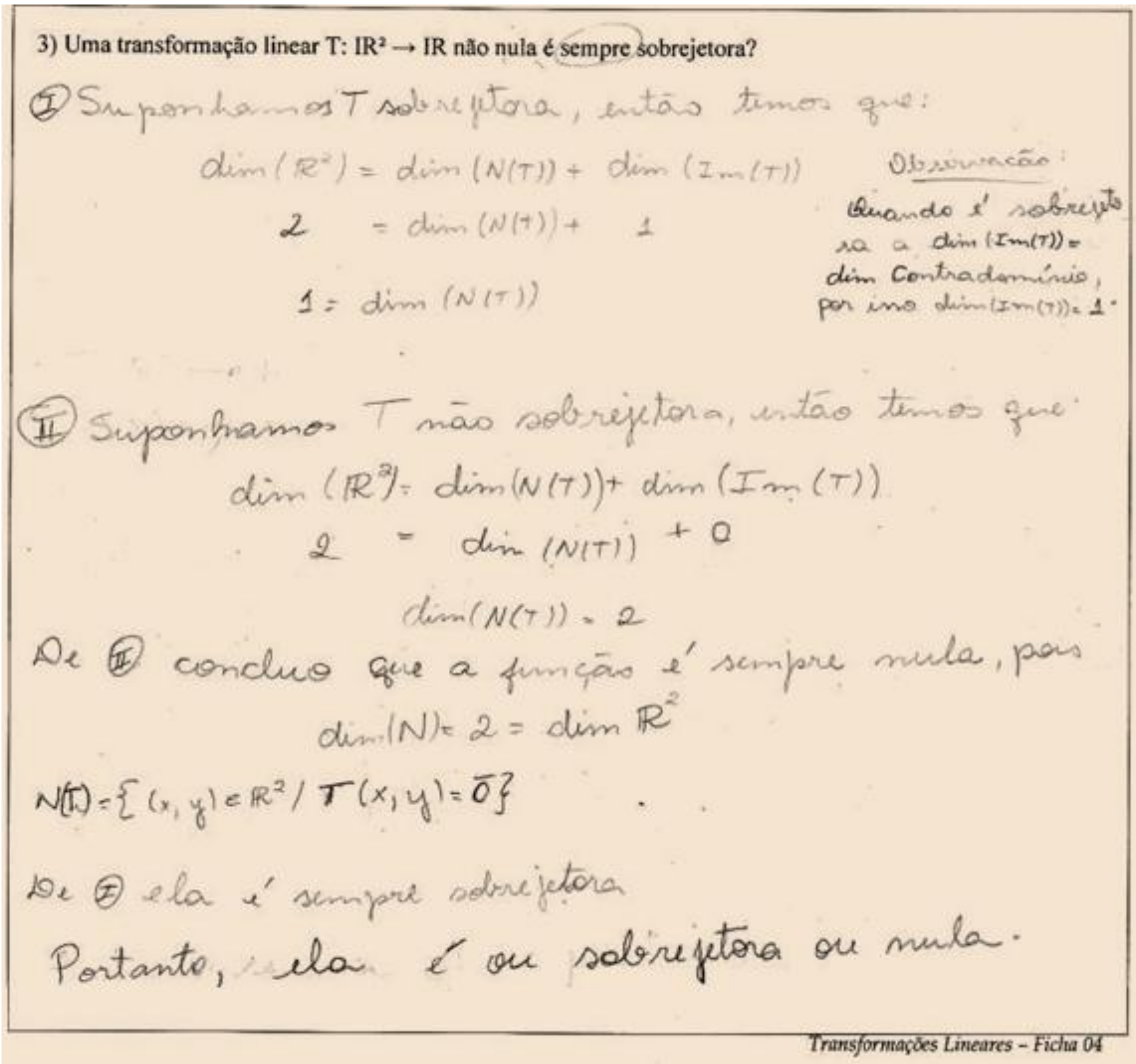
Simba: Então, é isso que estou falando, se a dimensão for zero, o núcleo tem que ser igual a dois. E se for um, o núcleo tem que ser igual a um.

Aretha: Trabalha com isso.

Simba: Então, se ela for sobrejetora, isso aqui tem que acontecer. Se ela não for sobrejetora, a dimensão tem que ser zero, a dimensão da imagem de T é igual a zero, então ela não é sobrejetora.

Aretha: Então você consegue separando em dois casos.

A resolução completa de Simba para esta tarefa foi:



3) Uma transformação linear T: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ não nula é sempre sobrejetora?

I Suponhamos T sobrejetora, então temos que:

$$\dim(\mathbb{R}^2) = \dim(N(T)) + \dim(Im(T))$$
$$2 = \dim(N(T)) + 1$$
$$1 = \dim(N(T))$$

Observação: Quando é sobrejetora a $\dim(Im(T)) =$ dim Contradomínio, por isso $\dim(Im(T)) = 1$.

II Suponhamos T não sobrejetora, então temos que:

$$\dim(\mathbb{R}^2) = \dim(N(T)) + \dim(Im(T))$$
$$2 = \dim(N(T)) + 0$$
$$\dim(N(T)) = 2$$

De II concluo que a função é sempre nula, pois

$$\dim(N) = 2 = \dim \mathbb{R}^2$$

$N(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / T(x, y) = \vec{0}\}$

De I ela é sempre sobrejetora

Portanto, ela é ou sobrejetora ou nula.

Transformações Lineares – Ficha 04

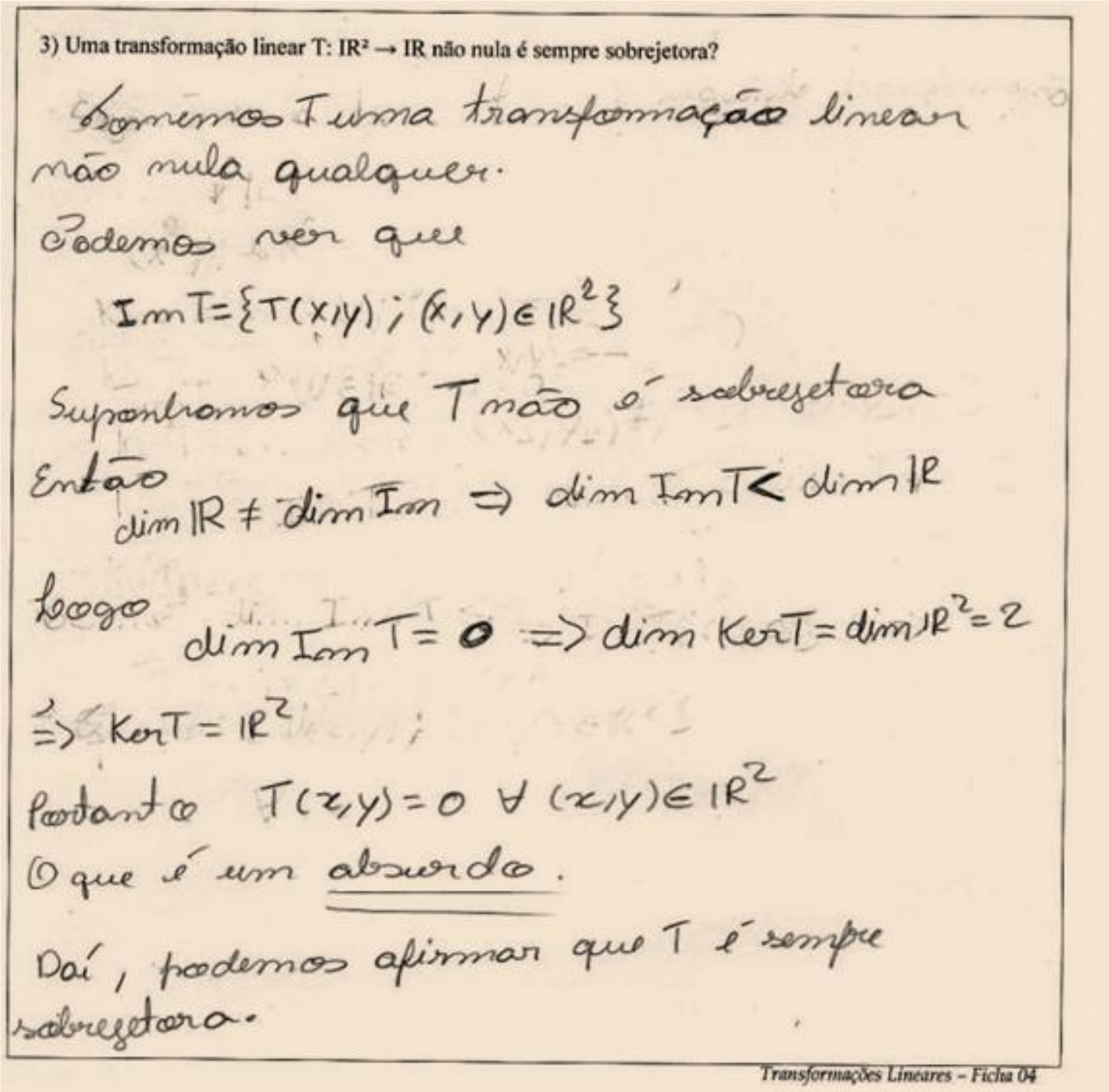
Figura 26 - Registro escrito de Simba - Ficha de Trabalho 8 - Tarefa 3

Em nossa leitura da produção de significados de Simba, pudemos obsevar a constituição dos objetos: dimensão, transformação linear sobrejetora, imagem e núcleo e o teorema do núcleo e imagem de uma transformação linear. Em sua dinâmica da produção de significados, Simba opera com a lógica de suposições, isto é, ele supõe todos os casos possíveis que podem acontecer em relação à tarefa, e trabalha a partir dessas suposições. Além disso, um detalhe importante ocorrido ao longo da resolução de Simba, foi a mudança na direção de sua produção de significados, após a intervenção da professora. Essa intervenção só foi possível, devido ao fato da professora ter se colocada num exercício de descentramento, frente à produção de significados de Simba.

Ao terminar sua resolução para a tarefa três, Euclides olhou a resolução de Simba e, como havia produzido significados em outra direção, ele resolveu expor suas considerações.

Euclides: Tá, mas, precisa... igual eu vim aqui, é isso aqui a definição da imagem, eu quero chegar que a imagem tem 1. Aí vai dar um W em IR, só que W é diferente de zero. Por que, por que é não nulo. Isso aqui já não é suficiente para eu afirmar que...?
Simba: Não!

Euclides estava produzindo significados numa outra direção. A princípio, ele acreditava que a resposta para esta tarefa era "não". Após perceber que estava considerando um contra exemplo "errado", Euclides muda a direção de sua produção de significados. Ele partiu da definição do que é uma transformação linear injetora e supôs, por absurdo, que seria possível existir uma transformação linear não nula tal que T não fosse sobrejetora. Sua resolução completa foi:



3) Uma transformação linear T: IR² → IR não nula é sempre sobrejetora?

Tomemos T uma transformação linear não nula qualquer.

Podemos ver que

$ImT=\{T(x,y)\ ;\ (x,y)\in \mathbb{R}^2\}$

Suponhamos que T não é sobrejetora

Então $\dim \mathbb{R} \neq \dim Im \Rightarrow \dim ImT < \dim \mathbb{R}$

Logo $\dim ImT = 0 \Rightarrow \dim KerT = \dim \mathbb{R}^2 = 2$

$\Rightarrow KerT = \mathbb{R}^2$;

Portanto $T(x,y)=0\ \forall (x,y)\in \mathbb{R}^2$

O que é um absurdo.

Daí, podemos afirmar que T é sempre sobrejetora.

Transformações Lineares – Ficha 04

Figura 27 - Registro escrito de Euclides - Ficha de Trabalho 8 - Tarefa 3

Em nossa leitura da produção de significados de Euclides, pudemos observar a constituição dos objetos imagem de uma transformação linear, relação entre as dimensões de subespaços (contradomínio e imagem) e em relação ao teorema do núcleo e da imagem de uma transformação linear. Euclides operou com a lógica de que, supondo uma transformação não sobrejetora, obtemos uma contradição e logo, considerando as dimensões do domínio de do contradomínio da transformação nesta tarefa, pode-se afirmar que a transformação linear é sobrejetora.

Após a resolução dessa tarefa, mudamos o foco de nossa aula e começamos a conversar sobre a Matemática escolar e o uso de símbolos matemáticos. Simba disse aos professores que sempre teve dificuldades em diferenciar os símbolos de “maior que” e “menor que”. Ele disse que ao longo de sua Educação Básica, ele “aprendeu” a diferença entre esses símbolos, por meio da regra: o “menor que” parece com um quatro e o “maior que” parece com o sete. Esse método de ensino foi criticado por todos nós, pois acreditávamos que essa regra permitia apenas uma forma de leitura: a da esquerda para a direita. Conversamos também sobre os símbolos de “contém” e “não contém”. Concluímos que essa situação era bem semelhante aos símbolos de “maior que” e “menor que”, e que nas salas de aula da Educação Básica, isto acontece o tempo todo.

Para terminar nosso Seminário, trabalhamos a definição matemática de Isomorfismo. Os sujeitos resolveram as tarefas propostas e mostraram-se com bastante desenvoltura na utilização dos resultados e teoremas anteriores. Terminamos nosso Seminário de Álgebra Linear ao término desta ficha de trabalho.

CAPÍTULO 6

UM CURSO DE SERVIÇO EM ÁLGEBRA LINEAR: O ESTUDO DAS TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Neste capítulo, inicialmente, tecemos nossas considerações a respeito de todas as etapas de nossa pesquisa, fundamentados nas informações coletadas em nossa revisão da literatura, em nossas análises da entrevista e, principalmente, do Seminário de Álgebra Linear,

Em seguida, buscaremos responder à questão de investigação que orientou nossa pesquisa: "*quais características deve possuir a disciplina Álgebra Linear para que ela seja considerada um Curso de Serviço para uma Licenciatura em Matemática?*".

Finalizaremos este capítulo descrevendo nossa proposta de ensino do conteúdo Transformações Lineares para a formação matemática de estudantes da Licenciatura em Matemática, fundamentada nos resultados obtidos por nós ao longo da pesquisa.

6.1. Nossas Considerações de (a) a (z)

Antes de enunciarmos as características que consideramos fundamentais para que a disciplina Álgebra Linear seja considerada um curso de Serviço para uma Licenciatura em Matemática, tecemos nossas conclusões sobre os nossos resultados de pesquisa.

Em relação à revisão da literatura, na qual buscamos um melhor entendimento de nossa questão de investigação, especificamente, em relação à formação matemática do professor de Matemática, da noção de Curso de Serviço e sobre a produção de significados de indivíduos e em relação às ideias em Álgebra Linear, pudemos constatar:

(a) a importância de nossa pesquisa relacionada aos Cursos de Serviço no campo da Educação Matemática e da formação matemática de professores de Matemática, verificada a carência de pesquisas que tratam especificamente desta formação;

(b) a preocupação de se implantar metodologias alternativas ao modelo tradicional de ensino, principalmente quando essa implantação leva a uma mudança de postura do professor e dos alunos durante a formação dos professores de Matemática;

(c) a necessidade de deslocar o foco do conteúdo para colocá-lo na produção de significados dos sujeitos envolvidos nos processos de ensino e de aprendizagem;
(d) que cursos de conteúdo matemático não devem ser definidos apenas como cursos de Matemática, mas sim de Educação Matemática, nos quais, além das noções matemáticas a serem trabalhadas, haja uma preocupação em esclarecer objetivos, pressupostos, questões didáticas e metodológicas relacionados aos processos de ensino e aprendizagem;
(e) que as noções propostas pelo MCS e sua aplicação em sala de aula podem disponibilizar ao professor de Matemática ferramentas para que ele possa realizar uma leitura mais fina da produção de significados do que seus alunos estão dizendo e fazendo, com a intenção de que a interação e a intervenção possam acontecer; isto é, para que ocorra uma partilha de modos de produção de significados entre alunos e professores.

Em relação à entrevista realizada, pudemos constatar:
(f) a existência de diferentes modos de produção de significados para um mesmo problema (resíduo de enunciação);
(g) a importância de trabalhar com os alunos questões familiares e não-usuais, visto que, num primeiro momento, estas questões são familiares ao ponto de permitir aos alunos falarem sobre os problemas, mas para resolvê-los, é necessário que o aluno realize algum esforço cognitivo na direção da solução;
(h) a influência da postura e da metodologia de ensino do professor que leciona disciplinas de conteúdo matemático, pois mesmo assumindo um modelo tradicional de ensino, a prática do professor expõe suas ideologias e concepções de ensino e aprendizagem. Essas concepções, por muitas vezes, são levadas para a prática profissional dos licenciandos;
(i) a preocupação com o rigor da escrita e com as justificações relacionadas às ideias matemáticas evidenciaram-se elementos expressivos nas soluções dos sujeitos de pesquisa, visto a influência dessa prática nas ações da professora;
(j) novamente, a constatação da necessidade de uma mudança na postura tradicional do professor, bem como a necessidade de esclarecer os processos de avaliação e principalmente a intenção (objetivos) do ensino.

E, finalmente, em relação à nossa projeção, execução e análise do Seminário de Álgebra Linear, constatamos que:

(k) a metodologia utilizada pelos professores/pesquisadores ao longo do Seminário, mostrou-se funcional para apresentação, discussão e análise das principais ideias em Álgebra Linear. Os alunos (sujeitos de pesquisa) foram capazes de produzir significados na direção da matemática do matemático, para as noções a eles apresentadas;

(l) o direcionamento da prática do professor para a leitura da produção de significados dos alunos, e não para a exposição do conteúdo, possibilitou aos professores uma oportunidade ampliada de acompanhar o processo de aprendizagem dos alunos, num sentido de internalização de modos legítimos de produção de significados por eles;

(m) as noções propostas pelos MCS e os exercícios de descentramento realizados pelo professor ao longo do Seminário mostraram-se fundamentais para realização de suas leituras das falas/fazeres dos alunos durante o Seminário. Foi a partir dessas leituras que o professor foi capaz de identificar as constituições de objetos, as lógicas das operações, além de criar a possibilidade de interação e intervenção efetiva no processo de produção de significados dos alunos, num sentido de sugestão de outros modos de produção de significados;

(n) a postura assumida pelos professores ao longo do Seminário influenciou positivamente a postura dos alunos. Os alunos estiveram motivados por todo o Seminário, visto que eram tratados como “atores principais do processo de ensino”;

(o) os resíduos de enunciação postos nas fichas de trabalho, para os quais os alunos produziram significados, forneceram ao Seminário uma estruturação ao mesmo tempo linear, num sentido de apresentação de ideias em Álgebra Linear, mas também espiral, pois os conceitos e ideias, consideradas por nós, fundamentais, estavam sempre correlacionados;

(p) nossa opção em trabalhar os Espaços Vetoriais e as Transformações Lineares apenas nos espaços vetoriais IR^n, sobre o corpo IR com as operações usuais e de seus respectivos subespaços, mostrou-se eficaz para nosso propósito, que era realizar uma leitura da produção de significados dos alunos em relação às principais noções em Álgebra Linear. A possibilidade de ampliação dessa estrutura surgiu pela necessidade dos próprios alunos em ampliar seus modos de produção de significados a partir dos conceitos apresentados;

(q) a utilização de tarefas familiares e não-usuais, ofereceu aos alunos uma oportunidade de vivenciar o estranhamento causado pelos conceitos matemáticos apresentados. Nossa proposta de trabalhar estas tarefas possibilitou, por exemplo, Simba vivenciar o estranhamento de falar, como suas próprias palavras, sobre a definição de transformação linear;

(r) a postura assumida pelos professores/pesquisadores diminuiu o que consideramos ser o assincronismo dos processos de ensino e aprendizagem, muito comum em nossas universidades. Os alunos foram capazes de chegar ao final de nosso Seminário produzindo significados para todos os conceitos trabalhados;

(s) por várias vezes, os alunos sentiram a necessidade de relacionar sua formação em disciplinas de conteúdo matemático com sua futura prática profissional. Neste ponto, a experiência do professor que leciona a disciplina foi um ponto fundamental para discutir e dar depoimentos sobre a futura prática profissional de seus alunos.

(t) para nós, ao longo do Seminário, estávamos ensinando, quando estávamos sugerindo novos modos de produção de significados para as noções e ideias trabalhadas pelos sujeitos de pesquisa. E eles estavam aprendendo, quando internalizavam seus modos legítimos de produção de significados.

Por fim, em relação específica ao estudo das Transformações Lineares ao longo do Seminário, constatamos:

(u) a importância de trabalhar diferentes significados para as noções de “transformação” e de “linearidade”, pois acreditamos que os alunos produzam outros significados para essas noções, como, por exemplo, disse Euclides ao afirmar que linearidade, para ele, está relacionada à reta.

(v) a importância em discutir a definição de transformação linear e as noções de transformações lineares injetoras, sobrejetoras e bijetoras, não só na perspectiva dos resultados em Álgebra Linear, mas também num sentido amplo de funções.

(w) oferecer aos alunos a possibilidade de experimentar a produção de significados para os teoremas e construções das demonstrações mostrou-se um recurso rico para leitura de seu entendimento sobre vários fundamentos em

Matemática, como, por exemplo, as noções de tese e hipótese, técnicas de demonstração, como indução, redução ao absurdo, verificações de hipóteses e construção de contra exemplos, entre outros.

(x) que a partir de um mesmo enunciado de uma tarefa (resíduo de enunciação), diferentes significados foram produzidos pelos alunos. Esse fato foi constatado a partir de nossa leitura do que eles diziam sobre os problemas propostos, na maneira de operar e nas diferentes resoluções apresentadas. Isso reforçou, ainda mais, nossa crença em dar/garantir voz aos alunos e considerar os significados por eles produzidos, valorizando suas estratégias.

(y) ao trabalhar os conceitos da Álgebra Linear, como espaço vetorial, subespaço vetorial, operações de adição e multiplicação por escalar, combinação linear, base, dimensão, entre outros, no interior do estudo das transformações lineares, pudemos constatar, por meio de nossa leitura da produção de significados dos sujeitos de pesquisa, uma ampliação dos modos de produção de significados deles em relação a esses conceitos. Assim, consideramos o estudo das transformações lineares um campo fértil para o professor que leciona esta disciplina trabalhar com seus alunos, desde as noções de funções entre conjuntos e formalização destes conceitos, até as transformações entre espaços vetoriais quaisquer, de características distintas, com as quais os alunos terão a oportunidade de produzir significados para estruturas onde não é possível uma visualização geométrica, por exemplo.

(z) acreditamos que outro recurso que possa ser utilizado pelo professor que leciona a disciplina Álgebra Linear, em relação específica ao tópico das transformações lineares, é trabalhar as transformações lineares entre IR^n e IR^m, com n e m variando de 1 até 3 pois, nestes casos, será possível o aluno fazer analogias com as ideais trabalhadas em Geometria e Geometria Analítica, como as noções de ponto, reta, plano, dimensão, perpendicularidade, rotação, translação, projeção entre outras. Acreditamos que esta é uma outra forma de sugerir novos modos de produção de significados para as noções em transformações lineares na Álgebra Linear.

6.2. Características do Curso de Serviço

Neste momento, considerando nossa revisão da literatura, nosso referencial teórico e nossas duas saídas a campo, procuramos explicitar características que, para nós, deve possuir a disciplina Álgebra Linear para que ela seja considerada um Curso de Serviço para uma Licenciatura em Matemática.

A **primeira característica** é a mudança da postura do professor que leciona a disciplina Álgebra Linear para uma Licenciatura em Matemática. Não faz sentido, para nós, o professor trabalhar numa direção que ele próprio não considere legítima. Desta forma, acreditamos que, para que haja mudança na forma que a disciplina Álgebra Linear é lecionada para alunos de uma licenciatura, é fundamental que o professor da disciplina esteja aberto para mudanças em suas concepções metodológicas e epistemológicas relacionadas aos processos de ensino e aprendizagem, visto que seu papel como formador ultrapassa a matemática do matemático.

A **segunda característica** está relacionada ao fato de considerarmos este Curso de Serviço em Álgebra Linear como sendo a primeira experiência do licenciando em Matemática com as noções de estrutura em Álgebra. Acreditamos que seja suficiente trabalhar todas as noções da Álgebra Linear para os espaços vetoriais IR^n sobre o corpo IR com as operações usuais e de seus respectivos subespaços. A inserção de outros espaços vetoriais, como o espaço vetorial das matrizes, das funções, dos polinômios, outros corpos e operações não usuais, devem ser utilizadas pelo professor como ampliação dos modos de produção de significados para as noções e não como objetivo do estudo neste Curso de Serviço.

No caso particular das transformações lineares em Álgebra Linear, essas ampliações dos modos de produção de significados estão relacionadas, por exemplo, à importância de trabalhar os diferentes significados para as noções de “transformação”, “função” e de “linearidade”, pois acreditamos que os alunos produzam outros significados para essas noções e à importância de se discutir as noções de transformações lineares injetoras, sobrejetoras e bijetoras, não só na perspectiva dos resultados em Álgebra Linear, mas também num sentido amplo de funções. Dessa forma, o professor ao ensinar a Álgebra Linear e, em particular, as transformações lineares, tem que direcionar o ensino ao futuro professor de Matemática e não ao matemático profissional.

A **terceira característica** que consideramos fundamental é que o objetivo de um Curso de Serviço de Álgebra Linear para uma Licenciatura em Matemática deve ser direcionado a ampliar os modos de produção de significados dos alunos e não apenas para abordar conceitos e teoremas. Neste contexto, o papel do professor será propor tarefas e realizar leituras dessas produções de significados de seus alunos, com a intenção de identificar o que seus alunos estão fazendo/dizendo e realizar intervenções de acordo com suas concepções epistemológicas. A mediação e a intervenção são essenciais para criar em uma sala de aula de Matemática um espaço comunicativo, onde a interação e a produção de significados são negociadas.

Como **quarta característica**, indicamos que um dos papéis deste Curso de Serviço também é oferecer uma oportunidade ao licenciando de ampliar sua formação matemática. Para isto, cabe ao professor reconhecer a Álgebra Linear como estrutura matemática, na qual suas definições estão relacionadas à matemática do matemático e estimular a discussão de situações de estranhamento em sala de aula. É fundamental que o futuro professor de matemática vivencie estas situações de estranhamento frente às definições da Álgebra Linear, visto que, em sua futura prática profissional, seus alunos irão, possivelmente, vivenciar estranhamentos semelhantes ao se depararem com a Matemática de seu nível escolar. Assim, é importante criar no futuro professor de Matemática uma sensibilidade em entender o que seu aluno diz/faz, com a intenção de interagir nos processos de ensino e aprendizagem em Matemática de seus alunos.

Por fim, a **quinta característica** está relacionada com as noções do MCS e com os processos de ensino e aprendizagem das noções em Álgebra Linear. Para nós, o papel do professor, ao ensinar as noções em Álgebra Linear, é estimular a produção de significados e sugerir certos de produção de significados aos alunos. É neste sentido que consideramos a aplicação de tarefas familiares e não-usuais e as discussões relacionadas ao estranhamento frente às definições matemáticas como sendo um campo fértil para um ambiente de discussão e ampliação de modos de produção de significados na formação matemática do licenciando. Em consonância com nosso referencial teórico, os licenciandos estarão aprendendo as noções em Álgebra Linear quando estiverem internalizando modos legítimos de produção de significados para estas noções. Assim, pensamos uma formação matemática para o professor de matemática de forma ampliada, mas sempre num sentido de modos de produção de significados e não de conteúdos.

Fundamentado nessas características, acreditamos que a formação pedagógica do licenciando em Matemática aconteça de forma simultânea à sua formação matemática. Pensamos no professor de Matemática como um indivíduo que deve possuir uma formação matemática, mas em sua prática profissional, suas ações devem ser direcionadas a educar seus alunos por meio da Matemática e não direcioná-las para exposição de conteúdos.

6.3. O Produto Educacional

Como mencionamos anteriormente, um dos nossos objetivos da pesquisa era desenvolver uma proposta de ensino do conteúdo Transformações Lineares para a formação matemática de estudantes da Licenciatura em Matemática.

Nosso produto educacional foi construído a partir de nossa pesquisa, principalmente após a realização do Seminário em Álgebra Linear para os alunos de uma Licenciatura em Matemática. Como dissemos em nossas considerações anteriores, a proposta de trabalhar com fichas relacionadas com as noções em Álgebra Linear mostraram-se um recurso eficaz para nosso objetivo.

Esta proposta de material didático tem como objetivo principal trazer à tona questões que julgamos serem propícias para mobilizar distintos modos de produção de significados e para desencadear situações de estranhamento em uma sala de aula de Matemática. Iremos, ao longo deste produto, esclarecer nossos pressupostos teóricos e metodológicos que orientam nossa proposta didático-pedagógica. Além disso, neste material, incluiremos as situações e tarefas com as quais desejamos que os alunos trabalhem ao longo do Curso de Serviço, e sugestões e comentários para o professor trabalhar essas competências. Todos nossos comentários serão realizados numa barra lateral ao longo das fichas de trabalho. O professor que irá fazer uso deste material tem total autonomia de aceitar ou não nossas sugestões.

Por fim, esperamos que este produto educacional não seja utilizado de forma engessada pelo professor que lecionará o Curso de Serviço. Nosso interesse é que o professor sinta-se estimulado a produzir suas próprias tarefas de acordo com sua experiência, seus interesses e principalmente, com a realidade de seus alunos e sua sala de aula.

Acreditamos que este produto possa influenciar pesquisadores a produzirem outros materiais didáticos relacionados não somente com a Álgebra Linear, mas com todas as disciplinas de conteúdo Matemático, existentes na formação dos professores de Matemática.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o objetivo de fornecer uma visão da totalidade de nosso estudo, retomaremos e apresentaremos, de forma sucinta, as etapas que o compuseram, os novos questionamentos que surgiram ao longo de nosso percurso e as perspectivas relacionadas ao nosso trabalho, indicando algumas novas questões de investigação a respeito da formação matemática de professores de Matemática.

Desde o início de nossa pesquisa, estávamos fundamentados pelas noções relacionadas ao referencial teórico do Modelo dos Campos Semânticos (MCS). Todas as nossas escolhas foram sustentadas por suas premissas.

Nosso primeiro passo foi investigar os documentos oficiais que tratam da formação dos professores de Matemática no Brasil. Ao realizar nossa leitura das Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura, o Parecer 1302/2001 (BRASIL, 2001), constatamos as distinções nas características das propostas de cursos de Licenciatura e de Bacharelado em Matemática.

Entretanto, baseado em nossa revisão da literatura, verificamos que em ambas as modalidades a disciplina Álgebra Linear vem sendo lecionada somente sob a perspectiva do matemático, e não a do professor de Matemática. Esta constatação diverge de nossa concepção de formação matemática do licenciando. Para nós, um curso de Álgebra Linear para uma licenciatura é (deveria ser) diferente de um curso de Álgebra Linear para o Bacharelado, não porque se deva estudar menos ou de forma superficial, mas porque se deva estudar de forma diferente.

Assim, incomodados com a questão da formação do professor de Matemática em relação à disciplina Álgebra Linear, deparamo-nos com a terminologia Curso de Serviço. Vislumbramos que, ao lecionar a disciplina Álgebra Linear na perspectiva de um Curso de Serviço, não estaremos interessados “apenas” em desenvolver os conteúdos matemáticos, mas também teremos uma preocupação em trabalhar a formação matemática dos alunos, intervindo na produção de significados a partir dos conceitos matemáticos, visando à formação pedagógica dos licenciandos.

Desta forma, ao longo deste trabalho, buscamos responder a questão de investigação “*quais características que deve possuir a disciplina Álgebra Linear para que ela seja considerada um Curso de Serviço para uma Licenciatura em*

Matemática?". Como segundo objetivo de pesquisa, buscamos "*desenvolver uma proposta de ensino do conteúdo Transformações Lineares para a formação matemática de estudantes da Licenciatura em Matemática, entendendo a disciplina Álgebra Linear como um Curso de Serviço"*. Esta proposta caracteriza o produto educacional do nosso trabalho.

Com a revisão da literatura que fizemos, pudemos constatar a carência de pesquisas que tratam especificamente desta formação, bem como a preocupação de se implantar metodologias alternativas ao modelo tradicional de ensino, principalmente quando elas levam a uma mudança de postura do professor e dos alunos durante a formação inicial dos professores de Matemática.

Uma possibilidade que verificamos é que podemos entender a disciplina Álgebra Linear para uma Licenciatura em Matemática não apenas como sendo um curso de Matemática, mas sim de Educação Matemática, no qual, além das noções matemáticas a serem trabalhadas, exista a preocupação em que o estudante vivencie novas experiências educativas e diferentes propostas didática e metodológica relacionados aos processos de ensino e aprendizagem. Para que isto ocorra acreditamos que seja necessário deslocar o foco do ensino, para direcioná-lo à aprendizagem do aluno.

Ainda em nossa revisão da literatura, pudemos constatar a existência de diferentes modos de produção de significados para um mesmo problema (resíduo de enunciação). Esta constatação foi observada em outras pesquisas que utilizaram o MCS como referencial teórico e que tiveram como estudo algumas noções relacionadas à Álgebra Linear, como Silva (1997, 2003), Oliveira (2002) e Julio (2007). Este fato reforça nossa crença de que, em um Curso de Serviço em Álgebra Linear, os objetivos do ensino devem ser direcionados à leitura da produção de significados dos alunos e não à exposição de conceitos pelo professor, já que para um mesmo resíduo de enunciação (definição, teorema, tarefa) os alunos podem produzir significados em direções diferentes daquelas esperadas pelo professor.

Após a realização da entrevista com três alunos de um curso de pós-graduação em Educação Matemática, constatamos a influência da postura e da metodologia de ensino do professor que leciona disciplinas de conteúdo matemático. O modelo de ensino ou a concepção epistemológica desse professor são, por muitas vezes, levados para a prática profissional dos licenciandos, como verificamos nas falas dos sujeitos de pesquisa.

Assim, fundamentado pelo MCS, por nossa revisão da literatura e pela entrevista, projetamos e executamos um Seminário de Álgebra Linear para dois alunos de uma Licenciatura em Matemática. Após a análise dos registros do Seminário, verificamos que a metodologia alternativa que utilizamos ao longo do seminário mostrou-se funcional para apresentação, discussão e análise das principais ideias da Álgebra Linear, visto que os alunos foram capazes de produzir significados para as noções com eles trabalhados. Além disso, ao direcionarmos a prática do professor para a leitura da produção de significados dos alunos, ao invés de direcioná-la para a exposição do conteúdo em Álgebra Linear, minimizamos o que consideramos ser um assincronismo dos processos de ensino e aprendizagem, muito comum em nossas universidades.

Outro ponto fundamental oriundo da execução do Seminário foi que as noções propostas pelos MCS, a utilização de tarefas usuais, de tarefas familiares e não-usuais e os exercícios de descentramento realizados pelo professor mostraram-se fundamentais para realização de nossas leituras das falas/fazeres dos alunos. Foi somente a partir dessas leituras que fomos capazes de identificar as falas para interlocutores, a constituição de objetos, as lógicas das operações, além de criar a possibilidade de interação e intervenção efetiva no processo de produção de significados dos alunos, num sentido de sugerir outros modos de produção de significados.

Assim, no Capítulo 6, considerando nossa revisão da literatura, nosso referencial teórico e nossas duas pesquisas de campo, explicitamos as características que, para nós, deve possuir a disciplina Álgebra Linear para que ela seja considerada um Curso de Serviço para uma Licenciatura em Matemática.

Entendemos a Matemática - em particular a Álgebra Linear - como um resíduo de enunciação para o qual os alunos podem ou não produzir significados. Neste sentido, para nós, o papel do professor de Matemática é o de sugerir tarefas e de ler a produção de significados de seus alunos. Esta é a interação que esperamos do professor de Matemática com seus estudantes nos processos de ensino e aprendizagem que ocorrem em sala de aula.

Esperamos que o material didático e nossa proposta de ensino do conteúdo transformações lineares para a formação matemática de estudantes da licenciatura em Matemática, entendendo a disciplina Álgebra Linear como um Curso de Serviço (produto educacional), sejam utilizados por professores que compartilham de nossas crenças acerca da formação matemática dos licenciandos em Matemática. Temos ainda a expectativa de que estes professores ampliem o material, produzindo tarefas de acordo com sua experiência, seus interesses e principalmente, com a realidade de seus alunos e sala de aula.

Como sugestão para novas pesquisas que tenham como interesse a formação matemática dos professores de Matemática, indicamos que as disciplinas de conteúdo matemático da licenciatura em Matemática, como Álgebra, Cálculo, Análise, Geometrias entre outras, também sejam tratadas como Cursos de Serviço para a Licenciatura. Isto é, que cursos de Matemática para a Licenciatura sejam tratados como cursos de Educação Matemática. Consideramos estas propostas de Cursos de Serviço e de materiais didáticos específicos uma oportunidade de sugerir transformações na atual formação Matemática dos professores de Matemática em nossas universidades.

REFERÊNCIAS

BALDINO, R. R. A Ideologia da Melhora. **A Matemática como Instrumento de Poder**, integrante do painel A Matemática como Prática Cultural e a Educação Matemática – IV ENEM. Blumenau: FURB, 1992.

BOGDAN, Robert C.; BIKLEN, Sari K. **Investigação Qualitativa em Educação.** Uma introdução à teoria e aos métodos. Portugal: Porto Editora, 1994.

BRASIL, Parecer n° CNE/CES 1.302/2001, de 06 de novembro de 2001. Dispõe sobre as Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura. **Diário Oficial da União**, Brasília, DF, 05 dez. 2001. Seção 1e, p.13.

CABRAL, T.C.; CATAPANI, E. Imagens e olhares em uma disciplina de cálculo em Serviço. **Zetetiké**. Campinas: Editora da UNICAMP, v.11, n.19, jan-jun, 101-116, 2003.

JULIO, R. S. **Uma leitura da produção de significados matemáticos e não matemáticos para "dimensão".** 2007. 118p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

LEONTIEV, A. N. **O Desenvolvimento do psiquismo**. São Paulo: Moraes, 1978.

LINARDI, P. R. **Rastros da formação matemática na prática profissional do professor de matemática**. 2006, 279p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – IGCE/UNESP: Rio **c**laro, 2006.

LINS, R. C. **A framework for understanding what algebric thinking is**. 1992. 330p. Thesis (Phd) – University of Nottingham, Nottingham.

LINS, R. C. O modelo teórico dos campos semânticos: uma análise epistemológica da álgebra e do pensamento algébrico. **Revista Dynamis**, Blumenau, v.1(7), p.29-39, abr./jun., 1994.

LINS, R. C. Por que discutir teoria do conhecimento é relevante para a Educação Matemática. In: Bicudo, M. A. V. (org.). **Pesquisa em Educação Matemática:** concepções e perspectivas. São Paulo: Editora da UNESP, 1999. (Seminários e Debates). p.75-94.

LINS, R. C. **The production of meaning for Algebra: a perspective based on a Theoreticall Model of Semantic Fields**. In: R. Sutherland et al. Perspectives on School Algebra. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2001.

LINS, R. C. Um quadro de referência para as disciplinas de Matemática no curso de Licenciatura em Matemática. In: LINS, R. C. **Projeto de Pesquisa Integrado submetido como parte de solicitação de renovação de bolsa de concessão de auxilio financeiro ao CNPq.** 2002, p. 01-40.

LINS, R. C. **A formação pedagógica nas disciplinas de conteúdo matemático, nas licenciaturas em Matemática**. In: VIII Encontro Paulista de Educação Matemática, 2004a, São Paulo. Anais do VIII EPEM, 2004a.

LINS, R. C. Matemática, monstros, significados e educação matemática. In: Bicudo, M. A. V., Borba, M. C. (org.). **Educação Matemática:** pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004b. p.92-120.

LINS, R. C. **Characterising the mathematics of the teacher from the point of view of meaning production**. In: 10th International Congress on Mathematical Education, 2004c, Copenhagen. Plenary and Regular Lectures (abstracts).

LINS, R. C. A Formação Pedagógica em Disciplinas de Conteúdo Matemático nas Licenciaturas em Matemática. **Revista de Educação**. Campinas: n.18, p.117-123, 2005a.

LINS, R. C. Categories of everyday life as elements organizing mathematics teacher education and development projects. In: ICMI, 15., 2005, Águas de Lindóia - Brazil. **Proceedings…** Brazil, 2005b. 1CD.

LINS, R. C. Design e implementação de um programa de formação continuada de professores de Matemática. In: LINS, R. C. **Projeto de Pesquisa Integrado submetido como parte de solicitação de concessão de bolsa de Produtividade em Pesquisa ao CNPq.** 2006.

LINS, R. C. **A diferença como oportunidade para aprender**. In: XIV ENDIPE, 2008, Porto Alegre. Trajetórias e processos de ensinar e aprender: sujeitos, currículos e culturas. Porto Alegre: Edi PUCRS, v.3. p. 530 550, 2008.

LINS, R. C. Ensaio sobre como Macunaíma me ajudou a falar sobre Educação Matemática. **BOLEMA**, Rio Claro – SP, v. 25, n. 41, p. 319, 329, dez. 2011.

LINS, R. C. **O Modelo dos Campos Semânticos: estabelecimentos e notas de teorizações.** In: Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática: 20 anos de História. ANGELO, C. L. et al. São Paulo: Midiograf, p. 11, 30. 2012.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas, SP: Papirus, 1997. (Perspectivas em Educação Matemática).

OLIVEIRA, V. C. A. **Sobre a produção de significados para a noção de transformação linear em Álgebra Linear**. 2002. 187p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

OLIVEIRA, V. C. **Uma Leitura sobre a Formação Continuada de Professores de Matemática Fundamentada em uma Categoria do**

Cotidiano. 2011. 207f. Tese. (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

OLIVEIRA, V. C. **Sobre Ideias de Estranhamento e Descentramento na Formação de Professores de Matemática**. In: Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática: 20 anos de História. ANGELO, C. L. et al. São Paulo: Midiograf, p. 199, 216. 2012.

PROCÓPIO, R. B. **Geometria como um Curso de Serviço para a Licenciatura de Matemática: Uma Leitura da Perspectiva do Modelo dos Campos Semânticos**. 2011. 82p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Minas Gerais, 2011.

SILVA, A. M. **Uma análise da produção de significados para a noção de base em álgebra linear**. 1997. 163p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Santa Úrsula, Rio de Janeiro.

SILVA, A. M. **Sobre a dinâmica da produção de significados para a matemática**. 2003, 243p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.

SILVA, A. M. Uma Análise dos processos de ensino e aprendizagem a partir da produção de significados. In: XXI Seminário de Investigação em Educação Matemática. Aveiro. **XXI Seminário de Investigação em Educação Matemática**. Lisboa: Associação dos professores de matemática, v. único, p.587-596, 2010.

SILVA, A. M. Um Curso de Serviço para a Licenciatura em Matemática. **XIII Conferência Interamericano de Educação Matemática**. Recife: CIAEM, p.1-7, 2011.

SILVA, R. H. **Álgebra Linear como Curso de Serviço para a Computação**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP, Rio Claro, 1999.

SHULMAN, Lee. Those who understand: Knowledge Growth. In: **Teaching Educacional Researcher**, v.15, n.2, p. 4-14, 1986. Disponível em: http://www.wiziq.com/tutorial/71617-Schulman-1986. PDF>. Acesso em: 15/07/2012.

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**. 5.ed. São Paulo: Martins Fontes, 1994.

WILSON, S. M.; FLODEN, R. E.; FERRINI-MUNDY, J. **Teacher preparation research: current knowledge, gaps and recommendations (document R-01-3)**; Washington: Center for the Study of Teaching and Policy/University of Washington, 2001. Disponível em: <http://www.ctpweb.org>. Acesso em: 21 mar. 2013.

ANEXOS

ANEXO I - TERMO DE COMPROMISSO ÉTICO

Este termo de compromisso tem o objetivo de esclarecer os procedimentos de coleta de dados envolvidos com a pesquisa desenvolvida no Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática/UFJF e sua utilização na mesma.

Os registros presentes nas tarefas e as transcrições provenientes das falas dos sujeitos de pesquisa servirão como material para nossa pesquisa, que procura investigar quais as características de um Curso de Serviço de Álgebra Linear para uma Licenciatura em Matemática, mais especificamente, em relação ao estudo das Transformações Lineares.

O acesso ao conteúdo acima citado será de uso exclusivo do pesquisador e dos pesquisadores do Núcleo de Investigação, Divulgação e Estudos em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora (NIDEEM-UFJF), que assumem o compromisso de não divulgarem dados que permitam identificar os sujeitos de pesquisa.

As informações provenientes da análise da coleta de dados poderão ser utilizadas pelos pesquisadores envolvidos no projeto em publicações e eventos científicos e divulgadas a todos aqueles que se interessarem pelas pesquisas, na forma acima indicada.

Juiz de Fora, 11 de maio de 2012.

______________________________ Vitor Rezende Almeida

______________________________ Cristiane de Andrade Mendes

______________________________ Sujeito de Pesquisa

ANEXO II - QUESTIONÁRIOS

QUESTIONÁRIO: ENTREVISTA

Sobre a estrutura da Licenciatura em Matemática

1. Você consegue caracterizar a estrutura do seu curso de Licenciatura em Matemática?
Sub-perguntas:
1.a. Você consegue descrever em grupos as disciplinas que cursou em sua licenciatura?
1.b. Você acha que as disciplinas de conteúdo matemático podem ser oferecidas de uma forma diferente da que você cursou? De que forma?

Sobre as influências de sua formação

2. Em que as disciplinas cursadas em sua Licenciatura mais o influenciaram em sua prática profissional?
Sub-perguntas:
2 a. Em relação aos professores das disciplinas, o que mais o influenciou? A metodologia empregada nas aulas? A postura assumida? Outras particularidades?
2 b. Em relação aos conteúdos ensinados, o que mais o influenciou?
2 c. Se você pudesse ordenar os elementos que mais influenciaram sua constituição como professor, como seria?

Sobre as disciplinas de conteúdo matemático

3. O que você pode dizer a respeito das disciplinas presentes no curso de Licenciatura em Matemática que tratam, especificamente, dos conteúdos matemáticos?
Sub-perguntas:

3 a. Se você tivesse que caracterizar a importância desses cursos em sua (futura) prática profissional, o que você diria?
3 b. O andamento dessas disciplinas dependiam da metodologia empregada pelo professor destes conteúdos? Se sim, por quê? Se não, qual o motivo?
3 c. Se você fosse estrutura um novo currículo em um licenciatura em Matemática, você incluiria essas disciplinas? Se sim, porque e com qual objetivo? Se não, porque você as considera desnecessárias?
3 d. Essas disciplinas mudaram o formato das suas aulas? Se sim, em que?

Sobre o estudo em Álgebra Linear

4. A disciplina Álgebra Linear é obrigatória na grande maioria das Licenciaturas do Brasil. Por que você acha que isso acontece?
Sub-perguntas:
4 a. Mas essa disciplina foi importante para sua formação? Se sim, por quê? Se não, por quê?
4 b. Quais os aspectos desse curso você colocaria em destaque? Justifique.
4 c. Se você não tivesse feito um curso de Álgebra Linear, isso mudaria sua prática profissional? Se sim, em que mudaria? Se não, qual o motivo disso?
4 d. Você consegue ver alguma aplicação de um curso de Álgebra Linear em sua pratica profissional?
4 e. Em que um curso de Álgebra Linear pode contribuir em sua (futura) prática profissional?

Entrevistas Individuais

SUJEITO DE PESQUISA: André

GERAL:
1) Como você classificaria a tarefa 1 em nível em nível de dificuldade?
2) Quais os conceitos que estão envolvidos na tarefa 1?

ESPECÍFICO:
Tarefa 2:

3) Como você obteve a transformação?

FINALIZANDO:

4) Você considera que as questões possuem alguma ligação? Quais?

5) O que você utilizou para resolver as tarefas?

SUJEITO DE PESQUISA: Letícia

GERAL:

1) Como você classificaria a tarefa 1 em nível de dificuldade?

2) Quais os conceitos que estão envolvidos na tarefa 1?

ESPECÍFICO:

Tarefa 2:

3) Para você, o vetor (1, -1, 0) é uma base do núcleo. Como você concluiu esse fato?

4) Por que você construiu uma base para o IR³? Por que esse vetor (1, -1, 0) deve fazer parte da base?

5) Em sua resolução, você não justificou o fato de o conjunto $(1,-1,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)$ ser uma base para o IR³. Por quê?

6) Como você estruturou a relação entre os elementos da base escolhida e suas respectivas imagens?

7) Você afirmou que a transformação $T\ x,y,z = x+y,z$ é linear. Por que você não justificou esse fato?

8) Como você pode garantir que o núcleo dessa transformação satisfaz a condição imposta pelo enunciado?

FINALIZANDO:

9) Você considera que as questões possuem alguma ligação? Quais?

10) O que você utilizou para resolver as tarefas?

SUJEITO DE PESQUISA: Jordão

GERAL:

1) Como você classificaria a tarefa 1 em nível em nível de dificuldade?

2) Quais os conceitos que estão envolvidos na tarefa 1?

ESPECÍFICO:

Tarefa 2:

3) Comente sobre sua afirmação: “Como a dimensão do núcleo é 1; os segundo e 3º vetores da base devem estar fora do núcleo, ou seja, imagem não nula.”

FINALIZANDO:

4) Você considera que as questões possuem alguma ligação? Quais?

5) O que você utilizou para resolver as tarefas?

QUESTIONÁRIO: SEMINÁRIO DE ÁLGEBRA LINEAR

Sujeitos de Pesquisa: Euclides e Simba

1. Nome:____

2. Pseudônimo:____

3. Telefone(s) para contato:______________________________________

4. e-mail:____

5. Naturalidade: ____

6. Idade: __________________________

7. Nível de Instrução:

( ) Estudante de Graduação em ________________________________

( ) Graduação em ____

( ) Especialização em ____

( ) Estudante de Mestrado ____________________________________

( ) Mestrado em ____

8. Você leciona Matemática? ( ) sim ( ) não

Se sim,

8.1 Em que nível ou níveis de Ensino leciona?

____

8.2 Há quantos anos leciona?

____

9. Você cursou a disciplina Álgebra Linear? ( ) sim ( ) não

Se sim,

9.1 Você se lembra de ter estudado os seguintes conteúdos?

i) Espaços Vetoriais: ( ) sim ( ) não

ii) Transformações Lineares: ( ) sim ( ) não

iii) Núcleo: ( ) sim ( ) não

iv) Dimensão: ( ) sim ( ) não

v) Imagem: ( ) sim ( ) não

vi) Base: ( ) sim ( ) não

Observações:

____

ANEXO III - FICHAS DE TRABALHO

Ficha de Trabalho 5 (FT 5)

Definição e Propriedades das Transformações Lineares

TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Neste momento, estudaremos um tipo especial de função onde o domínio e o contradomínio são espaços vetoriais. Assim, tanto a variável independente como a variável dependente são vetores, razão pela qual essas funções serão denominadas transformações lineares.

1. DEFINIÇÃO

Sejam V e W subespaços vetoriais de IR^n e IR^m respectivamente, com n, m inteiros positivos.

Uma transformação linear T de V em W, denotada por

T: V $\rightarrow$ W, é uma função que satisfaz as seguintes condições:

i) T(u + v) = T(u) + T(v), para todo u e v em V.

ii) T(k.u) = k.T(u), para todo k em IR e todo u em V.

Observações:

(1) Uma função é linear se, e somente se, preserva (ou "é fechada" para) soma vetorial (i) e multiplicação por escalar (ii).

(2) Daremos o nome de *operador linear* à transformação linear na qual o domínio e o contradomínio são o mesmo espaço vetorial.

Isto é, uma transformação linear T: V $\rightarrow$ V, onde V é um subespaço de IR^n.

(3) Nesta proposta, estaremos interessados em trabalhar com as transformações lineares cujo domínio e o contradomínio são os espaços IR^n ou seus respectivos subespaços. Mas podemos definir uma transformação linear entre dois espaços vetoriais quaisquer, desde que estes espaços vetoriais sejam trabalhados sobre o mesmo corpo.

TAREFAS

T1) Como você descreveria uma transformação linear? Construa uma função de IR^n em IR^m e verifique se tal função é uma transformação linear.

T2) Sejam os espaços vetoriais IR^3 e IR^2, com as operações usuais sobre IR e considere a função:

F: $IR^3 \rightarrow IR^2$, definida por F(x, y, z) = (x, y + z).

A função F definida acima pode ser considerada uma transformação linear?

T3) É possível construir uma transformação linear de IR em IR^2?

T4) A função G: $IR^n \rightarrow IR^m$ definida por G(v) = 0 (vetor nulo de IR^m), para todo v em IR^n, pode ser considerada uma transformação linear?

T5) Analise e discuta a seguinte afirmação: **"**toda transformação linear T: V → W leva o vetor nulo de V no vetor nulo de W".

T6) Se T: V → W é uma transformação linear, então podemos afirmar que se T(0) ≠ 0, então T não é linear?

T7) É possível existir uma função T: $IR^n \rightarrow IR^m$, entre os espaços vetoriais IR^n e IR^m tal que T(0) = 0, mas que T não seja uma transformação linear?

T8) Seja L: $IR^n \rightarrow IR^m$ uma transformação linear. Se existe um vetor $u \in IR^n$ tal que L(u) = 0 (vetor nulo de IR^m), podemos então concluir que u = 0 (vetor nulo de IR^n)?

2. PROPRIEDADES DE UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR:

Sejam V e W subespaços de IR^n e IR^m respectivamente. Seja T: V → W é uma transformação linear. São consequências da definição de uma transformação linear, as seguintes propriedades:

P1) T(0) = 0.

Prova

Se $0 \in V$, então:

$T(0) = T(0 + 0) = T(0) + T(0) \Rightarrow T(0) = T(0) + T(0) \Rightarrow$

$\Rightarrow T(0) - T(0) = T(0) \Rightarrow T(0) = 0.$

P2) $T(-v) = - T(v)$, para todo v em V.

Prova

$T(-v) = T(-1.v) = -1.T(v) = - T(v).$

P3) $T(u - v) = T(u) - T(v)$, para todo u e v em V.

Prova

$T(u - v) = T[u + (-v)] = T(u) + T(-v) = T(u) + [-T(v)] =$

$= T(u) – T(v).$

P4) Uma transformação linear $T: V \to W$ "preserva" combinações lineares, isto é,

se $v_1, v_2, ..., v_n$ são vetores em V e $a_1, a_2, ..., a_n$ são escalares, então:

$$T(a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n) = a_1T(v_1) + a_2T(v_2) + ... + a_nT(v_n)$$

Prova

Provemos por indução sobre *n.* ($n \in IN$)

Para $n = 1$, temos $T(a_1v_1) = a_1T(v_1)$.

Para $n = 2$, temos $T(a_1v_1 + a_2v_2) = T(a_1v_1) + T(a_2v_2) = a_1T(v_1) + a_2T(v_2)$.

Supondo a igualdade ser verdadeira para *n*, mostremos que para *(n +1)* essa igualdade também é verdadeira.

Como para *n* é verdadeira, temos que:

$$T(a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n) = a_1T(v_1) + a_2T(v_2) + ... + a_nT(v_n).$$

Ora, tomando v_{n+1} em V e a_{n+1} escalar, podemos escrever:

$$T(a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n + a_{n+1}v_{n+1}) =$$

$$= T\left(a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n + a_{n+1}v_{n+1}\right) =$$

$$= T(a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n) + T\left(a_{n+1}v_{n+1}\right) =$$

$$= \left(a_1T(v_1) + a_2T(v_2) + ... + a_nT(v_n)\right) + a_{n+1}T\left(v_{n+1}\right) =$$

$$= a_1T(v_1) + a_2T(v_2) + ... + a_nT(v_n) + a_{n+1}T\left(v_{n+1}\right).$$

Logo, para *(n + 1)* a igualdade é verdadeira e pelo princípio da indução a igualdade é verdadeira para todo *n* natural.

Ficha de Trabalho 6 (FT 6)

Teorema da Existência e Unicidade de uma Transformação Linear

Sejam V e W subespaços vetoriais de IR^n e IR^m respectivamente. O teorema a seguir nos permite afirmar que toda transformações linear T: V → W fica completamente determinada se conhecermos a atuação dessa transformação nos elementos de uma base de V.

TEOREMA 1: Sejam V e W subespaços vetoriais de IR^n e IR^m respectivamente, $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ uma base de V (dim V = k), e $w_1, w_2, ..., w_k$ vetores arbitrários de W. Então existe uma única transformação linear T: V → W tal que $T(v_1) = w_1, T(v_2) = w_2, ..., T(v_k) = w_k$.
Esta transformação é dada da seguinte maneira: se $v = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_kv_k$, então, $T(v) = a_1T(v_1) + a_2T(v_2) + ... + a_kT(v_k) = a_1w_1 + a_2 w_2 + ... + a_kw_k$.

<u>Demonstração:</u>
Provemos, inicialmente, a existência de tal transformação linear.
Dado $v = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_kv_k$ em V, com $a_1, a_2, ..., a_k$ escalares em IR definiremos a função $T(v) = a_1w_1 + a_2 w_2 + ... + a_kw_k$.

1

Mostremos que a função T acima é linear.
(i) para todo $u = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_kv_k$ e $v = b_1v_1 + b_2v_2 + ... + b_kv_k$, vetores em V, com $a_i, b_i \in IR$ e i = 1,..., k, teremos:

$T(u + v) = T\,(a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_kv_k + b_1v_1 + b_2v_2 + ... + b_kv_k) =$

$= T\ \ (a_1 + b_1)v_1 + (a_2 + b_2)v_2 + ... + (a_k + b_k)v_k \ \ =$

$= (a_1 + b_1)Tv_1 + (a_2 + b_2)Tv_2 + ... + (a_k + b_k)Tv_k =$

$= (a_1 + b_1)\, w_1 + (a_2 + b_2)\, w_2 + ... + (a_k + b_k)w_k =$

$= (a_1w_1 + a_2w_2 + ... + a_kw_k) + (b_1w_1 + b_2w_2 + ... + b_kw_k) =$

$= T(u) + T(v).$

(ii) para todo $v = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_kv_k$ e $\alpha \in$ IR, temos:

$T(\alpha u) = T\left[\alpha.\ a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_kv_k\ \right] =$

$= T\ \ \alpha.a_1\ v_1 + \ \alpha.a_2\ v_2 + ... + \ \alpha.a_k\ v_k \ =$

$= \alpha.a_1Tv_1 + \alpha.a_2Tv_2 + ... + \alpha.a_kTv_k =$

$= \ \alpha.a_1\ w_1 + \ \alpha.a_2\ w_2 + ... + \ \alpha.a_k\ w_k =$

$= \alpha.\ a_1w_1 + a_2w_2 + ... + a_kw_k \ =$

2

$= \alpha.T(v)$

De (i) e (ii) obtemos que T é linear.

Mostremos agora que T é única.

Suponhamos exista uma outra transformação linear

$S: V \to W$ tal que $S(v_1) = w_1$, $S(v_2) = w_2, ..., S(v_k) = w_k$.

Ora, dado $v \in V$ temos $v = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_kv_k$, e, assim:

$S(v) = S(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_k v_k) =$

$= a_1 S(v_1) + a_2 S(v_2) + \ldots + a_k S(v_k) =$

$= a_1 w_1 + a_2 w_2 + \ldots + a_k w_k =$

$= T(v)$

3

Assim, as Transformações S e T são idênticas e, portanto, T é única.

TAREFAS

T9) Qual a afirmação que você considerou mais importante no enunciado do teorema 1?

T10) Explique o que você entendeu dos passos realizados na demonstração até o balão 1.

T11) Explique o que você entendeu dos passos realizados na demonstração até o balão 2.

T12) Explique o que você entendeu dos passos realizados na demonstração até o balão 3.

T13) O texto que precedia o teorema 1 dizia que “toda transformações linear T: V → W fica completamente determinada se conhecermos a atuação dessa transformação nos elementos de uma base de V” . Para você, o que essa afirmação quer dizer?

T14) É possível obter uma transformação linear
T: IR² → IR³ tal que T(1,-1) = (3,2,-2) e T(-1,2) = (1,-1,3)?
Se sim, obtenha a lei de formação da transformação. A transformação assim obtida é única?

Caso não seja possível obter tal transformação linear, justifique sua afirmação com base no teorema 1.

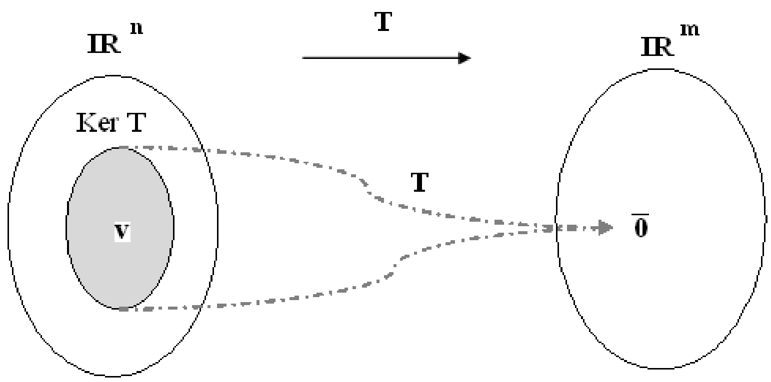
Ficha de Trabalho 7 (FT 7)

Núcleo e Imagem de uma Transformação Linear

Neste momento, iremos analisar as transformações lineares, definindo e enunciando resultados úteis e interessantes para a Álgebra Linear. Para começar, definiremos os conceitos de núcleo e de imagem, que são dois subconjuntos especiais dos espaços vetoriais envolvidos na transformação linear.

DEFINIÇÃO 2 (Núcleo): Seja T: $IR^n \rightarrow IR^m$ uma transformação linear. O conjunto de todos os vetores $v \in IR^n$ tais que T(v) = 0 é chamado núcleo de T, sendo denotado por Ker T. Isto é,

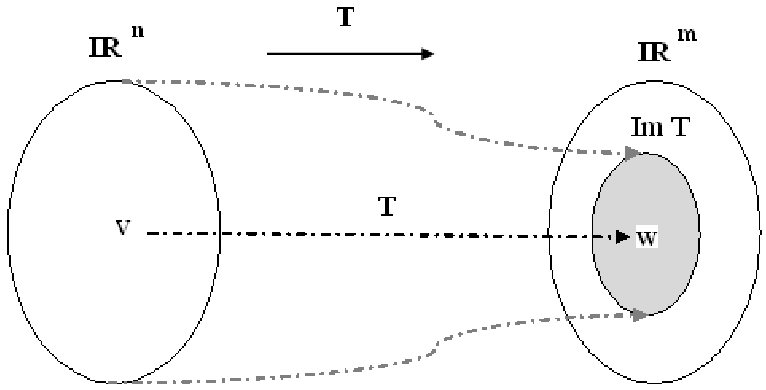
$$\text{Ker } T = \{v \in IR^n \ / \ T(v) = 0\}$$



Em outras palavras, o núcleo de uma transformação linear T é o conjunto formado por todos os vetores $v \in IR^n$ que são “levados” por T no vetor nulo de IR^m.

DEFINIÇÃO 3 (Imagem): Seja T: $IR^n \rightarrow IR^m$ uma transformação linear. A imagem de T, denotada por Im T, é o conjunto dos vetores w $\in IR^m$ tais que existe um vetor v em IR^n, que satisfaz T(v) = w.

$$\text{Im } T = \{ T(v) \in IR^m \; / \; v \in IR^n \}$$



TEOREMA 2: Seja T: $IR^n \rightarrow IR^m$ uma transformação linear. Então:

i) O núcleo de T é um subespaço vetorial de IR^n;

ii) A imagem de T é um subespaço vetorial de IR^m.

TAREFAS:

T15) Seja T: $IR^2 \rightarrow IR^2$ definida por T (x, y) = (x, 2x - y).

a) Encontre o Ker T e determine uma base e a dimensão do Ker T;

b) Encontre o Im T e determine uma base e a dimensão da Im T;

c) Verifique se o vetor (1, 1) $\in$ Im T.

T16) Determine o núcleo e a imagem da transformação linear T: $IR^3 \rightarrow IR^2$ dada por T (x, y, z) = (x + y, z).

T17) Seja T: $IR^2 \rightarrow IR^2$ o operador linear definido por T(x,y) = (x,0).

a) Determine o núcleo e a imagem de T.

b) Represente graficamente o núcleo e a imagem de T.

T18) Seja a transformação linear T: $IR^2 \rightarrow IR^3$ definida por T(x,y) = (0, x - y, 0). Determine o núcleo e a imagem de T e apresente uma representação geométrica da transformação e de seu núcleo.

TEOREMA 3 (Teorema do núcleo e da imagem): Sejam IR^n e IR^m espaços vetoriais de dimensão finita. Dada uma transformação linear T: $IR^n \rightarrow IR^m$, então:

$$\dim IR^n = \dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T$$

TAREFAS:

T19) Existe uma transformação linear T: $IR^3 \rightarrow IR^2$ tal que Ker T = $\left[\, 1, 2, 0 \,\right]$ e Im T = $\left[\, 0, -1 \,\right]$?

T20) Dê um exemplo de uma transformação linear
T: $IR^2 \rightarrow IR^2$ tal que Im T $\subset$ Ker T.

Ficha de Trabalho 8 (FT 8)

Transformações Lineares Injetoras, Sobrejetoras e Bijetoras

Devido ao fato de toda transformação linear ser uma função (mesmo sendo um tipo "especial" de função), podemos também classificá-la como injetora, sobrejetora ou bijetora, utilizando exatamente as definições que estudamos no Ensino Médio. Porém, devido às particularidades das transformações lineares, poderemos utilizar outras ferramentas para essas classificações.

Ao longo dessa seção, para simplificar a notação, estaremos considerando V e W subespaços vetoriais de IR^n e IR^m respectivamente, com as operações usuais e ambos sobre o corpo IR.

DEFINIÇÃO:

Uma transformação linear $T: V \to W$ será:

(i) INJETORA (ou injetiva) quando vetores distintos de V possuírem imagens distintas pela T, isto é, se dados $u, v \in V$, com $u \neq v$, então $T(u) \neq T(v)$.

(ii) SOBREJETORA (ou sobrejetiva) quando a imagem de T for todo o espaço W, ou seja, para cada $w \in W$, existe $v \in V$ tal que $T(v) = w$.

(iii) BIJETORA (ou bijetiva) quando T for injetora e sobrejetora.

Abaixo, apresentaremos alguns resultados que nos ajudarão a classificar uma transformação linear como injetora, sobrejetora ou bijetora. Devemos ter atenção com esses resultados: eles só poderão ser utilizados no caso de estarmos trabalhando com transformações lineares; eles não valem para funções em geral.

TEOREMA:

Seja $T: V \to W$ uma transformação linear.

Então, T é injetora se, e somente se, Ker T = $\bar{0}$.

PROPOSIÇÕES:

Sejam V e W subespaços vetoriais tais que

dim V = dim W. Então:

(i) Uma transformação linear $T: V \to W$ é injetora se, e somente se, T é sobrejetora.

(ii) Uma transformação linear $T: V \to W$ é injetora se, e somente se, T "leva" bases de V em bases de W, isto é, se $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ é uma base de V, então $\{T(v_1), T(v_2), ..., T(v_k)\}$ é uma base de W.

TAREFAS:

T21) Seja T: $IR^3 \rightarrow IR^2$ a transformação linear definida por:

$$T(x,y,z) = (x + y\ ,\ 2x - y + z)$$

a) Determine uma base e a dimensão de Ker T;

b) Determine uma base e a dimensão de Im T.

c) Verifique se: i) T é injetora? ii) T é sobrejetora? iii) T é bijetora?

d) Existe alguma relação entre as dimensões do domínio, imagem e núcleo de T?

T22) Pode existir uma transformação linear T: $IR^3 \rightarrow IR^4$ injetora?

T23) Uma transformação linear T: $IR^2 \rightarrow IR$ não nula é sempre sobrejetora?