

**A Construção e a Desconstrução das Ideias Geométricas:
Intervenção no Ensino e na Aprendizagem na Perspectiva da
Matemática Inclusiva**

MARIÂNGELA ASSUMPCÃO DE CASTRO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

MARIÂNGELA ASSUMPÇÃO DE CASTRO

**A Construção e a Desconstrução das Ideias Geométricas:
Intervenção no Ensino e na Aprendizagem na Perspectiva da
Matemática Inclusiva**

Orientadora: Prof^{fa}. Dr^a. Chang Kuo Rodrigues

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Ficha catalográfica elaborada através do Programa de geração automática da Biblioteca Universitária da UFJF, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Castro, Mariângela.

A Construção e a Desconstrução das Ideias Geométricas : Intervenção no Ensino e na Aprendizagem na Perspectiva da Matemática Inclusiva / Mariângela Castro. -- 2013. 105 f. : il.

Orientador: Chang Rodrigues

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, 2013.

1. Sólidos Geométricos. 2. Sequência Didática. 3. Engenharia didática. 4. Situações didáticas. 5. Ensino Médio. I. Rodrigues, Chang, orient. II. Título.

MARIÂNGELA ASSUMPCÃO DE CASTRO

**A Construção e a Desconstrução das Ideias Geométricas:
Intervenção no Ensino e na Aprendizagem na Perspectiva da
Matemática Inclusiva**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestra em Educação Matemática.

Comissão Examinadora

Prof^a Dr^a Chang Kuo Rodrigues (Orientadora)
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr Marco Aurélio Kistemann Júnior
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Júlio César da Silva
Universidade Severino Sombra – RJ

Juiz de Fora, 22 de agosto de 2013

AGRADECIMENTOS

À Banca Examinadora, composta pelos professores doutores Marco Aurélio Kistemann, Júlio César da Silva e Chang Kuo Rodrigues, à minha orientadora, pela disponibilidade de estarem presentes com suas respectivas contribuições para este singelo trabalho.

Às alunas que participaram diretamente desta investigação, por permitirem que fosse possível a concretização de um ideal profissional: viabilizar a aprendizagem em Matemática.

À minha família, pelo entusiasmo de me ver concentrada em mais um desafio: a conclusão desse trabalho.

Aos meus filhos, Fernando e Júlia, por estarem sempre comigo.

Ao meu marido, por ter compreendido minhas ausências.

“Educar não é transferir conhecimento, mas
criar as possibilidades para a sua própria
produção ou a sua construção.”

Paulo Freire

RESUMO

CASTRO, Mariângela Assumpção de. **A construção e a desconstrução das ideias geométricas:** intervenção no ensino e na aprendizagem na perspectiva da Matemática Inclusiva. 105f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.

Essa investigação tem como objetivo apresentar uma proposta de trabalho para o ensino da Geometria Espacial, de forma a auxiliar os professores em suas práticas e estimular a reflexão sobre a importância da representação e da visualização dos sólidos, nos cálculos de medidas de suas áreas e volume. A pesquisa foi aplicada aos alunos da 2ª série do Ensino Médio, os quais apresentaram, durante o ano letivo, muitos obstáculos para desenvolver atividades e avaliações referentes à Geometria Espacial. Para desenvolver esse trabalho, utilizamos uma sequência didática constituída de tarefas matemáticas, em ordem crescente de exigência, em sete encontros. O material lúdico - massa de modelar, cartolina, canudos, entre outros – foi usado para promover as habilidades matemáticas que envolvem os conceitos e as propriedades dos sólidos geométricos. Inicialmente, os alunos construíram os sólidos geométricos na massa de modelar, a partir das fotografias tiradas por eles, em perspectiva, em seguida, construíram um paralelepípedo reto-retângulo com hastes e canudos. Nos próximos encontros, cobriram as faces desse paralelepípedo com cartolina, planejaram, confeccionaram um molde do sólido e finalizaram a atividade construindo o sólido gerado pelo molde confeccionado. Nessa atividade, os alunos foram o agente produtor da tríade construção-desconstrução-construção dos sólidos geométricos. Como metodologia de pesquisa, foi utilizada a Engenharia Didática que, de posse das análises *à posteriori*, foi possível observarmos o crescimento dos pesquisandos quanto à visualização dos sólidos em perspectiva, sua planificação e o desenvolvimento das competências relacionadas aos cálculos das medidas das áreas e do volume do paralelepípedo reto-retângulo. Para conclusão do mestrado, foi elaborado um caderno de atividades. Neste trabalho, apresentamos uma sequência didática de atividades, com um material lúdico que tem como um dos objetivos desenvolver a percepção geométrica espacial, trabalhar a relação entre a representação tridimensional e bidimensional

Palavras-chave: Sólidos Geométricos. Sequência Didática. Engenharia didática. Situações didáticas. Ensino Médio.

ABSTRACT

This research aims to present a working proposal for the teaching of Geometry Space, in order to assist teachers in their practices and stimulate reflection on the importance of representation and visualization of solids in Calculations measures of their areas and volume . The study was applied to students in the 2nd year of high school, which had, during the school year, many obstacles to develop activities and evaluations related to the Spatial Geometry. To conduct this work, we use a didactic sequence consists of mathematical tasks, increasing order of requirement in seven meetings. The ludic material - modeling clay, cardboard, straws, among others - was used to promote math skills which involve the concepts and properties of geometric solids. Initially, the students built the geometric solids in modeling clay, from photographs taken by them in perspective, then built a rectangle-parallelepiped with straight shanks and drinking straws. In future meetings, the faces of this parallelepiped they covered with card stock and have planned, confected a mold solid and finished the activity building the solid generated by the mold confecting. In this activity, students were producing agent of the triad construction-deconstruction-construction of geometric solids. As a research methodology, we used the Didactic Engineering that possession of a posteriori analysis, it was possible to observe the growth of students regarding the visualization of solids in perspective, its planning and promotion skills related to the calculation of the measures of area and volume parallelepiped straight-rectangle. For completion of the master, has produced a book of activities. In this paper, we present a didactic sequence of activities, with a ludic material that has as a goal to develop geometric perception spatial working relationship between the three-dimensional and two-dimensional

Keywords: Geometric Solids. Didactic sequence. Didactic engineering. Teaching situations. High School.

APRESENTAÇÃO

Concluí o científico com a certeza de que faria algum curso ligado à Matemática, pois foi a matéria em que obtive o melhor desempenho até completar o 2º grau. No ano de 1980, fiz vestibular para Ciências Matemática em uma universidade pública. O curso começou com 25 alunos, e exigia dedicação quase integral, na parte da manhã e na parte da tarde. Havia muitas matérias, e matérias difíceis, que exigiam longas horas de estudo. Isso acabou fazendo com que a grande maioria desistisse, e, dos 25 alunos ingressos, apenas eu e mais duas amigas nos formamos.

A prática pedagógica dos professores se baseava em transmissão e recepção de conteúdo, nada que permitisse ao aluno participar da construção do conhecimento. A relação professor-aluno na sala de aula não se diferenciava do que já tinha vivenciado até aquele momento: o professor transmitia os conteúdos, posicionado como autoridade máxima do conhecimento e das normas disciplinares e o aluno permanecia voltado para a frente, com a responsabilidade de aprender o que o professor transmitia. Confesso que fiquei um pouco decepcionada com o curso e pensei até em desistir, não o fiz porque meus pais não o permitiram.

As disciplinas pedagógicas eram ministradas em outro setor da universidade, na Faculdade de Educação. Muita teoria e pouca prática. Devo confessar que eu achava aquelas matérias muito distantes da minha realidade. A maioria dos professores das disciplinas pedagógicas trabalhava o conteúdo em forma de seminários e, para nós, acostumados com aulas expositivas, ficava uma sensação de vazio.

O estágio no Ensino Fundamental consistiu em observações em sala de aula e elaborações de aulas, que foram ministradas no Colégio de Aplicação, sob a supervisão da professora responsável pela turma. Foi feito com muita seriedade, pois se buscava ali uma forma de “aprender” a lecionar. Já o estágio no Ensino Médio ficou restrito a aulas simuladas para o professor da disciplina.

Durante todo o curso de Matemática, só lecionei no estágio, pois meu pai não permitia que trabalhássemos enquanto estávamos estudando. Sendo assim, só comecei lecionar após formada. Isso ocorreu em dezembro de 1985. Dois meses depois, iniciava minhas atividades em uma escola estadual, na periferia de Juiz de Fora, quando me foram concedidas aulas de Matemática em duas classes de 5ª série e duas de 6ª série do Ensino Fundamental, hoje, 6º e 7º anos do Ensino Fundamental. Lembro que não consegui dormir na véspera, pois fiquei

muito ansiosa e, ao mesmo tempo, com medo. Estava diante de um desafio, tinha receio do que iria encontrar pela frente. Deparei-me com 45 alunos indisciplinados, carentes e sem nenhum interesse pelo conteúdo.

Na escola, não havia reuniões destinadas ao planejamento do trabalho pedagógico a ser desenvolvido durante o ano letivo. Cada professor ficava responsável por elaborar o plano de curso das séries em que atuava. Trabalhávamos da forma que queríamos, sem ter que prestar conta do que fazíamos ou deixávamos de fazer. Também não eram feitas exigências por parte da escola quanto ao cumprimento dos conteúdos. Inexperiente, tive muita dificuldade para preparar aulas, provas, “passar” o conteúdo e até nas rotinas mais simples como preencher os diários de classe.

E foi ali, no dia-a-dia, errando e procurando fazer cada dia melhor, que fui aprendendo e construindo o meu “ser professor”.

Nos primeiros dias de aula, senti-me muito “perdida” e desamparada. Os professores mais antigos, principalmente os efetivos, não ajudavam os novatos da instituição, principalmente se eram contratados. Sem apoio dos professores e sem experiência, recorri aos meus antigos mestres, lembrando como eles davam aula e como conseguiam disciplina, e acabei abrindo mão de algumas reflexões desenvolvidas durante minha formação. Tornei-me um mero transmissor de conteúdo. Para conseguir dar aula sem muito transtorno, ameaçava os alunos com provas e pontos negativos, o que para uns não tinha o menor valor, pois estavam ali para se alimentar ou porque a família mandava.

Essa experiência trouxe-me algumas inquietações. Percebi que, trabalhando da forma como fui formada, não conseguiria bons resultados. Mesmo buscando novos métodos de trabalhar a Matemática, acabei priorizando o método clássico: transmissão de conteúdos, priorizando o treino de exercícios e memorização de fórmulas. E, assim, não conseguia despertar o interesse dos alunos pela matéria. Quando pedia opinião de algum professor mais antigo na escola, a única coisa que escutava era: “Você está perdendo seu tempo. Esses alunos não querem nada, são muito mal educados e irresponsáveis. Qualquer problema de disciplina manda para fora de sala. Você não é paga para aguentar falta de educação de aluno.”

Dois anos se passaram e tive que deixar a escola, pois havia chegado uma professora efetiva para assumir as aulas que eu estava ministrando. Porém, já havia sido chamada para substituir um professor, de Matemática, em uma escola particular, onde estou até hoje. Foram-me oferecidas duas turmas, uma de 7ª série e outra de 8ª. Encontrei outra realidade, completamente diferente da anterior: infraestrutura material e pessoal para as minhas aulas. Toda 6ª feira, após a aula, os professores reuniam-se com seus respectivos coordenadores de

área para discutir o andamento dos conteúdos e os problemas ocorridos durante a semana. Eram momentos de troca de experiências, reflexão, discussão e de crescimento profissional. Depois que comecei a trabalhar nessa escola, fui incentivada a participar de encontros, seminários e congressos em Educação, em especial, na área da Educação Matemática. Do ponto de vista pedagógico, as experiências me trouxeram muitas mudanças. Meu relacionamento com os alunos passou a ter características de personalidade e atitudes que favorecessem o processo educacional. Porém, frente a essa nova realidade, pouca coisa havia mudado, mantinha-me ainda nas amarras do ensino clássico da Matemática.

Refletindo sobre a minha prática pedagógica, em 1995, depois de 10 anos de formada, resolvi fazer um curso de pós-graduação, Especialização em Matemática. Acabei reencontrando antigos professores do curso de graduação. Os conteúdos ministrados foram bem distantes da realidade do Ensino Fundamental e do Médio. O curso foi praticamente uma revisão da graduação, com um enfoque diferente, o que acabou me deixando um pouco decepcionada, pois estava em busca de algo voltado para a prática da Matemática em sala de aula, algo que me ajudasse em minhas aulas. Mas, ao final, o curso teve a sua importância, porque serviu como ponto de partida para que eu continuasse o meu percurso e participasse de uma seleção para um curso *Strito Sensu* em Educação oferecido por uma instituição privada. Na verdade, eu estava procurando a educadora matemática que havia em mim.

Foi a partir dessas inquietações que decidi procurar esse curso em educação e pesquisar a respeito da pessoa do professor e sua influência na escolha profissional do aluno. Esse projeto também tem suas raízes nos primeiros anos de minha vivência secundarista, quando, a partir de uma relação professor-aluno cheia de conflitos e desencontros, deparei-me com uma série de dificuldades e obstáculos em aprender a matéria, em especial, a de Física.

No decorrer do curso, acabei mudando o meu foco e pesquisei sobre quais os motivos que levam o professor a continuar ministrando suas aulas e qual a formação desses professores, o assunto desenvolvido foi “A permanência do professor em sala de aula: da não escolha a permanência em sala de aula”. Infelizmente, por motivo alheio à minha vontade, o curso não prosperou e o meu trabalho não foi validado. Contudo, para toda a experiência vivida, sempre há o lado positivo a ser aproveitado e, nesse sentido, o curso acabou me fazendo refletir acerca de minha prática docente, permitindo-me crescer como pessoa e educadora.

Em 1998, o grupo de professores de matemática da instituição, imbuído do espírito de mudança radical com relação ao ensino dessa disciplina, em prol da aprendizagem dos estudantes, sob a coordenação de uma profissional que assumiu as concepções advindas da

Educação Matemática, o grupo aceitou trilhar um caminho diferente do que estava sendo feito: adoção de uma grande mudança no ensino da Matemática a começar pela aceitação de um livro didático fora do padrão vigente, ou seja, passamos de um livro tradicional para um livro escrito por um educador matemático. Essa mudança foi motivo de comentários positivos e negativos por parte do corpo docente, inclusive colegas de Matemática; do corpo discente e também de seus responsáveis.

Esse novo projeto permitiu mudanças radicais no meu modo de ensinar, de avaliar, de agir e de pensar e trabalhar a Matemática. Saindo do tradicional para a construção do conhecimento com os alunos; mas, ao mesmo tempo, em função das críticas recebidas quanto à sua formação Matemática, essa experiência me proporcionou inquietações e vontade de mostrar que esse novo modo de trabalhar a Matemática não significava “perda” de conteúdos, muito pelo contrário, seria proporcionar o pensar e o raciocinar matematicamente substituindo uma gama de exercícios repetitivos tal como estava sendo feito no modelo de ensino vigente.

Daí, a busca por meios que me conduzissem a respostas para minhas inquietações me fez participar, em 2010, do processo seletivo para o Mestrado profissional em Educação Matemática na UFJF, Universidade Federal de Juiz de Fora. Com isso reforçou-se ainda mais o objeto de minha investigação que, a princípio, dizia respeito às novas tendências e concepções adotadas por um pequeno grupo de professores de Matemática do Ensino Fundamental, de uma escola de Juiz de Fora, ao deparar com uma das novidades temáticas pertencente ao currículo dessa disciplina e sugerida pelos Parâmetros Curriculares Nacionais: Espaço e Formas. Por outro lado, o esforço dos educandos para entender os objetos matemáticos também causava desconforto em minha prática.

Esta investigação está voltada para a linha de pesquisa “Ensino e Aprendizagem da Matemática, Análise dos condicionantes da sala de aula e Intervenção Pedagógica em Matemática”, buscando entender que tipos de restrições afetam a aprendizagem dos educandos, impedindo-os de atingir o sucesso nessa disciplina. Nesse sentido, tanto sob o ponto de vista do professor quanto do estudante, apontando as mudanças ocorridas durante a evolução do grupo que aceitou assumir essa postura. Além disso, apresentaria sequências de atividades que envolvessem o desenvolvimento de habilidades específicas de leitura e interpretação de gráficos para os estudantes e que serviriam também como propostas didáticas para os professores, sendo, portanto, a criação de um produto pedagógico, fruto dessa investigação.

Com o passar do tempo, essa ideia foi substituída pela vontade de ajudar alunos da segundo ano do ensino médio que apresentavam dificuldades em resolver os exercícios de geometria espacial. E, assim, surgiu a motivação para realizar o presente trabalho.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1-	Esquema de uma Sequência didática	48
FIGURA 2-	Foto 1 de Sofia	51
FIGURA 3--	Foto 2 de Sofia	52
FIGURA 4-	Foto 3 de Sofia	52
FIGURA 5-	Foto 4 de Sofia	53
FIGURA 6-	Foto 5 de Sofia	53
FIGURA 7-	Foto 1 de Luíza	54
FIGURA 8-	Foto 2 de Luíza	54
FIGURA 9-	Foto 3 de Luíza	54
FIGURA10-	Foto 4 de Luíza	55
FIGURA 11-	Foto 5 de Luíza	55
FIGURA 12-	Foto 6 de Luíza	56
FIGURA 13-	Foto 7 de Luíza	56
FIGURA 14-	Foto 1 de Antonieta	57
FIGURA 15-	Foto 2 de Antonieta	57
FIGURA 16-	Foto 3 de Antonieta	58
FIGURA 17-	Foto 4 de Antonieta	58
FIGURA 18-	Foto 5 de Antonieta	59
FIGURA 19-	Foto 6 de Antonieta	59
FIGURA 20-	Foto 1 de Vitória	60
FIGURA 21-	Foto 2 de Vitória	60
FIGURA 22-	Foto 5 de Vitória	61
FIGURA 23-	Foto 6 de Vitória	61
FIGURA 24-	Foto 3 de Vitória	62
FIGURA 25-	Foto 4 de Vitória	62
FIGURA 26-	Modelagem de Luísa	68
FIGURA 27-	Modelagem de Sofia	69
FIGURA 28-	Modelagem de Antonieta	69
FIGURA 29-	Hastes de Luíza	71
FIGURA 30-	Hastes de Sofia	71
FIGURA 31-	Hastes de Antonieta	72

FIGURA 32-	Revestimento do Sólido de Luísa	74
FIGURA 33-	Revestimento do Sólido de Sofia	74
FIGURA 34-	Revestimento do Sólido de Sofia	75
FIGURA 35-	Planificação do Sólido de Luísa	77
FIGURA 36-	Planificação do Sólido de Sofia	78
FIGURA 37-	Planificação do Sólido de Antonieta	78
FIGURA 38-	Paralelepípedo de Luísa	79
FIGURA 39-	Paralelepípedo de Sofia	80
FIGURA 40-	Paralelepípedo de Antonieta	80
FIGURA 41-	Fase da Validação-questão 1: área e volume do paralelepípedo	84
FIGURA 42-	Atividade realizada pela Luíza – questão 1	85
FIGURA 43-	Depoimento de Luísa na fase de Validação	86
FIGURA 44-	Atividade realizada pela Sofia – questão 1	87
FIGURA 45-	Depoimento de Sofia na fase de Validação	88
FIGURA 46-	Atividade realizada pela Antonieta – questão 1	89
FIGURA 47-	Depoimento de Antonieta na fase de Validação	90
FIGURA 48-	Depoimento de Luísa após as atividades	91
FIGURA 49-	Depoimento de Sofia após as atividade	92

LISTA DE QUADROS

QUADRO 1- Objetivo dos Encontros	49
--	----

SUMÁRIO

1- INTRODUÇÃO	16
2- REVISÃO DA LITERATURA E PROCEDIMENTOS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS	18
2.1- REVISÃO DA LITERATURA.....	18
2.2- GEOMETRIA	21
2.2- PROCEDIMENTOS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS.....	27
3- ANÁLISES PRÉVIAS	31
3.1- A DIDÁTICA DA MATEMÁTICA E A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS.....	31
3.2- CONTRATO DIDÁTICO	36
3.3- OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS E DIDÁTICOS	38
4- A PESQUISA	42
4.1- OS PARTICIPANTES	44
4.2- AS NARRATIVAS	46
4.3- O TRABALHO DE CAMPO	47
4.3.1- Fase da Experimentação	50
4.3.2- O Desenrolar dos Sete Encontros e as Análises <i>a Posteriori</i>	63
4.3.2.1- Análise <i>a posteriori</i> do Encontro 1	63
4.3.2.2- Análise <i>a posteriori</i> do Encontro 2	67
4.3.2.3- Análise <i>a posteriori</i> do Encontro 3	70
4.3.2.4- Análise <i>a posteriori</i> dos Encontros 4 e 5	73
4.3.2.5- Análise <i>a posteriori</i> do Encontro 6	75
4.3.2.6- Análise <i>a posteriori</i> do Encontro 7	79
5- VALIDAÇÃO DA INVESTIGAÇÃO	82
6- CONSIDERAÇÕES FINAIS	94
REFERÊNCIAS	97
ANEXOS	99

1 INTRODUÇÃO

Nós, professores de Matemática, sabemos das dificuldades dos alunos que cursam o 2º ano do Ensino Médio em resolver problemas envolvendo cálculo de área e volume de figuras espaciais. Tais dificuldades muitas vezes são frutos de uma formação inapropriada em geometria plana e dos obstáculos, por parte dos estudantes, em visualizar as figuras tridimensionais a partir de suas representações no plano. Essa dificuldade apresentada por um número significativo de estudantes, sempre nos deixou com uma sensação de desconforto e por que não questionar a nossa impotência diante dessa situação? Após 25 anos lecionando Matemática para o Ensino Fundamental e Médio, deparei-me com uma situação que me incomodou mais do que qualquer outra vivenciada até o momento. Uma aluna, com o pseudônimo Vitória, cursando a segundo ano do Ensino Médio apresentou muita dificuldade em acompanhar as aulas de Geometria Espacial. Essa dificuldade estava amparada por um laudo médico. Sua ansiedade e desespero em visualizar e entender tudo que estava sendo exposto no quadro gerava uma situação muito delicada, mas nos estimulou buscar soluções para amenizar seu sofrimento. No primeiro momento, pensamos em elaborar uma atividade específica para ela, em que as questões seriam mais objetivas e com desenhos detalhados. Esse modo de elaborar e avaliar proporcionou avanços no que diz respeito à aprendizagem de ideias e conceitos geométricos. Entretanto, as lacunas eram tantas que percebemos o quanto o raciocínio geométrico estava comprometido.

Com o passar do ano, percebemos outras alunas também com dificuldade nesse mesmo tema, causando-lhes frustrações e angústias quanto à aprendizagem de Geometria. Não podemos deixar de considerar que essas alunas eram dedicadas, apresentavam todas as atividades para casa e algumas tinham reforço extraclasse.

Diante do exposto e das inquietações em ajudar essas alunas, surgiram as primeiras ideias para este trabalho, que tem, como objetivo principal resgatar a autoestima dessas alunas e tornar o estudo da geometria, tanto plana quanto espacial, mais significativo, contribuindo, dessa forma, para uma Educação Inclusiva, um tema de extrema relevância na prática educativa, isto é, para todos os alunos e não só para aqueles amparados por laudo médico.

Sabemos que nossas aulas são as mesmas para todos, no entanto, temos a consciência de que não conseguimos atingir a todos, tendo em vista que o ideal na Educação seria valorizar o tempo de aprendizagem de cada um dos educandos, reconhecendo que ele é único e, portanto, sujeito de singularidade. Assim, defender essa postura inclusiva, como educadores e educadoras, passa a ser o grande desafio em prol da inclusão.

Em nosso estudo , trabalhamos com quatro alunas do segundo ano do ensino médio de uma escola particular com percursos diferentes na geometria, portanto é uma pesquisa qualitativa.

Assim, a questão motivadora desse estudo é um olhar mais atento sobre uma postura inclusiva na educação, buscando aceitar as diferentes maneiras de compreender a geometria. Consideramos esse estudo pertinente, pois desejamos verificar se existe alguma forma de alcançar o desenvolvimento da visualização geométrica na adolescência; utilizando, para isso, a construção dos sólidos com material concreto, dando oportunidade aos sujeitos da pesquisa de serem o construtores de seu conhecimento e ajudando-os a superar as dificuldades de aprendizagem, levando em consideração as particularidades dos mesmos. Também iremos comparar os tipos de dificuldades e as superações apresentadas pelas três alunas que não apresentam laudo médico e a aluna que apresenta.

Optamos como metodologia para o desenvolvimento desse estudo, a Engenharia Didática e) como referencial teórico a Teoria das Situações Didáticas (BROUSSEAU, 2008), tendo os conceitos de Contrato Didático e Obstáculos Epistemológicos e Didáticos como centrais em nossa análise/investigação.

A estrutura do trabalho é a seguinte: dividimos o presente trabalho em seis partes. A primeira é introdutória, de modo que situe o leitor sobre o tema da investigação. A segunda refere-se à revisão da literatura e os procedimentos teóricos e metodológicos, quando nos permitiu delinear o desenho do trabalho. A terceira constitui das análises preliminares da investigação, para conhecer até que ponto os sujeitos da pesquisa estavam a par da geometria que seria explorada. A quarta, é referente à pesquisa em si, permitindo a análise posteriori da Engenharia Didática, metodologia adotada para esse trabalho. A quinta parte, validação da investigação, há um confronto entre os dados obtidos na análise a priori e na análise posteriori. A sexta, e última etapa, fazemos algumas reflexões a respeito do trabalho e apresentamos uma questão para futuras pesquisas e apresentamos o produto.

2 REVISÃO DA LITERATURA E PROCEDIMENTOS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS

Neste capítulo, entraremos em contato com alguns trabalhos desenvolvidos nos últimos anos, enfocando o processo de ensino e de aprendizagem da geometria espacial. O foco da maioria das pesquisas, envolvendo Geometria Espacial, está no que diz respeito à visualização e representação dos sólidos.

O capítulo está dividido em três partes. Na primeira, buscamos delimitar a revisão da literatura. Na segunda, tratamos da história da geometria e de suas evoluções e, por fim, a terceira expõe os procedimentos teóricos e metodológicos.

2.1 REVISÃO DA LITERATURA

Pela revisão da literatura, diagnosticamos que várias pesquisas (BECKER, 2009; MORACO, 2006; RITTER, 2011;) em geometria espacial tinham como suporte teórico as teorias de Van Hiele, que defendia a ideia de que as pessoas desenvolvem o pensamento geométrico de acordo com cinco níveis: visualização, análise, dedução informal, dedução formal e rigor. Uma dessas pesquisas é a de Becker (2009) que tinha, como propósito, abordar a visualização geométrica e a representação de objetos tridimensionais em diagramas bidimensionais. Becker buscou nessa pesquisa produzir um conjunto de atividades que auxiliassem os alunos a desenvolverem sua capacidade de visualização e representação dos sólidos em diagramas bidimensionais. Para desenvolver a sua pesquisa, o autor preferiu trabalhar com a série em que atua, ou seja, participaram dessa pesquisa dezoito alunos do terceiro ano do ensino médio de uma escola particular de Porto Alegre. Apesar de seu estudo ter apoio em Van Hiele, Gutiérrez e Piaget, ele aprofundou-se nas teorias do primeiro. Essa teoria trata de um modelo que tem como característica descrever as diferenças no pensamento geométrico dos alunos e de que forma o professor pode auxiliá-los a elevarem o nível de seu raciocínio. Nesse trabalho ficou comprovado que muitos alunos, sujeitos desse estudo, desenvolveram significativamente sua capacidade de visualização e representação de objetos tridimensionais no plano, de forma que o objetivo do estudo proposto foi atingido.

Outra pesquisa, que foi elaborada a partir das teorias de Van Hiele e que merece destaque, foi desenvolvida por Moraco (2006), cujo título é: “Um Estudo sobre os Conhecimentos Geométricos adquiridos por Alunos do Ensino Médio”. Nessa pesquisa, Moraco analisou as dificuldades apresentadas pelos alunos do ensino médio em tarefas

envolvendo figuras geométricas planas e não planas como, por exemplo, pirâmide, cubo entre outros. Participaram, como sujeitos dessa pesquisa, 81 alunos das três séries do Ensino Médio de uma escola pública do Estado de São Paulo. Para a coleta de dados, foi aplicado um questionário inicial para identificação dos alunos, como idade, gosto pela geometria, entre outros, e uma avaliação matemática. Essa avaliação foi pontuada em uma escala de zero a dez e mostrou um desempenho muito baixo dos participantes quanto aos conceitos, à visualização e à representação geométricos. Para o desenvolvimento dessa pesquisa, a metodologia adotada foi a descritiva com abordagem qualitativa. Em seus estudos, Moraco diagnosticou um abandono do ensino da geometria espacial no Ensino Médio e evidenciou que, se a Geometria não for ensinada ou for ensinada de maneira inadequada, pode causar sérios prejuízos à formação dos indivíduos.

Muitos trabalhos em geometria espacial também estão voltados para o uso da tecnologia e das mídias digitais em sala de aula, como as pesquisas de Silva (2006), Ritter (2011) e Alves (2007).

Silva (2006) investigou um grupo formado por 10 alunos da 3ª série do ensino médio de uma escola particular de São Paulo, com o objetivo de apresentar sua experiência de construir e aplicar uma atividade WEBQUEST, analisando as dificuldades e as possibilidades no modo de ensinar. Nesse estudo, Silva explica que a WEBQUEST é uma metodologia de pesquisa orientada da *web*, em que quase todos os recursos utilizados para a pesquisa são provenientes da própria *web*. Trata-se de uma atividade didática de aprendizagem, que aproveita a imensa riqueza de informações do mundo virtual para se criar o conhecimento. Essas atividades podem ser desenvolvidas para o ensino fundamental, médio e superior. Geralmente, a WEBQUEST é elaborada por um professor, contendo questões para serem solucionadas pelos alunos. Ela sempre parte de um tema que delineará as tarefas; também envolve consultar fontes de informação como livros, vídeos e mesmo pessoas a entrevistar, entretanto, são mais comuns *sites* ou páginas na *internet*. Essas fontes são, em geral, selecionadas pelo professor. As WEBQUESTs possuem uma base teórica construtivista, pois os próprios alunos vão construindo seu conhecimento. No cumprimento das tarefas, eles vão transformando as informações, compreendendo-as e armazenando-as. Suas estratégias de aprendizagem ajudam os estudantes a desenvolver habilidades de cooperação para com o grupo e a entender que aprendemos mais e melhor com os outros do que sozinhos. Seu principal objetivo é desenvolver as habilidades cognitivas dos alunos.

Acreditando que a utilização em sala de aula de mídias digitais, entre elas a *internet* e o computador, apresenta vantagens em relação aos recursos tradicionais como giz, lousa e

livros, principalmente quanto à facilidade de acesso do aluno a essas mídias, Silva se deparou com as seguintes perguntas: “Como e qual a melhor forma de utilizar os diferentes recursos tecnológicos em sala de aula? Se o aluno aprender a partir das informações obtidas de tais fontes, como tornar esse conhecimento mais concreto? Como suprir as falhas que tenham ficado?” Silva defendeu que o uso da atividade de WEBQUEST, criada por Bernie Dodge, em que todas as informações com que os alunos interagem provêm da *internet*, é uma das tecnologias e das mídias digitais que podem ser utilizadas em sala de aula de forma a favorecer o ensino e a aprendizagem, ajudando na construção do conhecimento. Para análise desse trabalho o autor utilizou registros em vídeos para buscar detalhes que não foram observados durante a aplicação do WEBQUEST. Essa atividade foi realizada nos horários das aulas de matemática, duas aulas ao dia, durante quatro dias. Na primeira aula, os alunos trabalhavam no laboratório de informática e, na segunda aula, iam para a sala de aula desenvolver as atividades propostas. Nesse trabalho, Silva não só destacou os aspectos positivos como os negativos e evidenciou a necessidade de um trabalho, utilizando esses recursos na Matemática de forma que as aulas passam a ser mais significativas, proporcionando ao aluno a construção de seu próprio conteúdo.

O trabalho de Ritter (2011) apresenta uma proposta para o ensino da geometria espacial com a utilização de um *software* de geometria dinâmica denominado Calques 3D, que tem como foco desenvolver a habilidade de visualizar figuras tridimensionais, a partir de sua planificação. Para desenvolvimento dessa pesquisa, foi proposta uma sequência didática em ordem crescente de visualização dos sólidos, pela qual os estudantes, a princípio, construíram sólidos a partir de informações dadas através de desenhos em perspectivas; depois, em planificação e, por último, apenas as descrições dos sólidos. Para a elaboração dessa atividade, a autora utilizou a metodologia da Engenharia Didática devido a sua forma de organizar a pesquisa, partindo de uma análise preliminar e pelas análises posteriores diagnosticar o progresso dos alunos quanto à visualização dos sólidos. A questão motivadora para o desenvolvimento desse estudo foi buscar como auxiliar seus alunos na visualização dos sólidos e se trabalhos com *softwares* Geometria Dinâmica seriam válidos. Constatou-se uma melhora significativa nas habilidades de visualização dos sólidos envolvidos nos exercícios resolvidos, após a sequência didática realizada.

O trabalho de Alves (2007), intitulado: “Um estudo sobre o desenvolvimento da visualização geométrica com o uso do computador”, tinha como objetivo investigar se a combinação da sequência didática escolhida e a utilização de um *software* de geometria dinâmica realmente contribuiriam para melhor representação mental de conceitos e objetos

geométricos pelos alunos. Esse trabalho adotou como hipótese, que a geometria dinâmica possibilita ao aluno perceber as construções geométricas de diferentes pontos de vista, e se o Princípio de Cavalieri permite uma abordagem mais intuitiva para justificar as técnicas visando ao cálculo de volume dos sólidos. Constatou-se que os estudantes têm melhor compreensão das mesmas e são estimulados a desenvolver o raciocínio espacial. Participaram desse estudo 70 alunos que foram divididos em dois grupos aleatoriamente. O primeiro grupo, classificado como grupo de controle, era constituído por 31 estudantes, que presenciaram aulas clássicas de geometria espacial. O outro grupo, formado por 39 alunos e classificado como grupo experimental, utilizou a ferramenta computacional dinâmica. Para a observação e análise, foram utilizados um questionário para sondagem e caracterização dos grupos, um teste de conhecimento geométrico, as notas de provas realizadas com o conteúdo proposto, cálculo de volumes dos sólidos, durante dois bimestres; e os testes de raciocínio verbal, raciocínio abstrato, raciocínio numérico e espacial, da Bateria de Provas de Raciocínio (BPR-5) de Almeida e Pimi (2000).

Os resultados desse estudo mostraram que no pós-teste de conhecimento geométrico e na média das provas aplicadas, os sujeitos que utilizaram ferramentas computacionais obtiveram um desempenho significativamente superior em relação ao grupo que presenciou aulas clássicas de geometria. No entanto, essa diferença não foi significativa no pós-teste de raciocínio espacial. O pesquisador acredita que isso não foi tão significativo devido à utilização da sequência didática com o Princípio de Cavalieri nos dois grupos e o frequente incentivo para a participação dos estudantes, por meio de interações entre eles e deles com o professor, nas duas situações de sala de aula.

Essa revisão da literatura foi profícua, pois reforçou ainda mais a pertinência do tema de nossa investigação e, principalmente, a importância desse olhar cuidadoso sobre a aprendizagem.

2.2 A GEOMETRIA

Os primeiros registros sobre os estudos de geometria espacial foram feitos há dois mil anos antes de Cristo, pelos povos habitantes da Mesopotâmia (região situada no Oriente Médio, no vale dos rios Tigre e Eufrates). Boa parte do que se sabe hoje a respeito da geometria espacial se deve aos registros encontrados em documentos denominados papiros, entre eles o “papiro de Rhind” e o “papiro de Moscou”. Neles estão expostos problemas com suas resoluções.

O “papiro de Rhind” é considerado um dos documentos mais importante sobre os conhecimentos matemáticos egípcios, intitulado originalmente “instruções para conhecer todas as coisas secretas”. Esse documento apresenta informações sobre trigonometria, aritmética, equações, progressões e cálculo de área e volume.

No “papiro de Moscou” escrito em 1850 antes de Cristo e, devido à sua degradação, é impossível ler os 25 problemas nele registrados, entre esses problemas encontramos uma forma de cálculo do tronco de pirâmide quadrada, a saber: “Um tronco de pirâmide tem 6 cúbitos de altura, 4 cúbitos de base por dois cúbitos no topo. Qual o volume?”

A Geometria (do grego *medir a terra*), de origem egípcia, está ligada a problemas do cotidiano relacionados à reconstituição dos limites dos terrenos após as enchentes do rio Nilo para o plantio, ou seja,

Sem marcos fronteiros, os agricultores e administradores de templos, palácios e demais unidades produtivas fundadas na agricultura não tinham referência clara do limite das suas possessões para poderem cultivá-las e pagarem os impostos devidos. Os antigos faraós resolveram passar a nomear funcionários, os agrimensores, cuja tarefa era avaliar os prejuízos das cheias e restabelecer as fronteiras entre as diversas posses. Foi assim que nasceu a geometria. Estes agrimensores acabaram por aprender a determinar as áreas de lotes de terreno dividindo-os em retângulos e triângulos. (BRAZ, 2009, p.9)

Na Grécia, a busca por conhecimentos geométricos iniciam-se em 500 a.C., mas as primeiras tentativas para deduzir os fatos geométricos ocorreram em 600 a.C., com Thales de Mileto, que foi ao Egito calcular a altura da pirâmide a partir de cálculos feitos com a sua sombra. Mas, foi Euclides, por volta de 300 a.C., o primeiro a apresentar a geometria como uma matemática dedutiva, e ela passou a ser desenvolvida como um ramo da matemática quando escreveu “Os Elementos”, uma síntese do saber geométrico da sua época.

Gálvez (1996) lembra que:

Nesta obra, se parte de um número reduzido de axiomas, postulados e definições para construir, por via de dedução, o conjunto das proposições geométricas vigentes, as que aparecem como consequências necessárias das afirmações primitivas. (GÁLVEZ, 1996, p.237)

Na Grécia, Pitágoras e Platão, dois grandes filósofos, devido às formas irregulares dos sólidos, associavam o estudo da geometria espacial ao estudo da religião e da metafísica. Pitágoras trabalhou em especial com o tetraedro, o cubo, o dodecaedro e as esferas. Já Platão

acreditava que a explicação e a existência de tudo estavam nos cinco sólidos perfeitos: o cubo (terra), o tetraedro (fogo), o octaedro (ar), o icosaedro (água) e o dodecaedro (elemento que permearia todo o Universo).

Na Idade Média e no Renascimento, os estudos sobre geometria espacial voltaram a ser resgatados. Leonardo Fibonacci (1170-1240) é um dos diversos matemático que voltam a estudar a geometria espacial e, em 1220, escreve a “*Practica Geometriae*”, uma coleção sobre Trigonometria e Geometria (abordagem das teorias de Euclides e um análogo tridimensional do teorema de Pitágoras).

No século XVII, os matemáticos René Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat,(1601-1665) ao substituírem os pontos de um plano por pares de números e as curvas por equações, reduzem a geometria à álgebra. No séc XIX, Chasles e Poncelet “incorporam os sistemas de transformações como método fundamental da geometria com a finalidade de dotá-la da generalidade, flexibilidade e fecundidade próprias da geometria analítica.” (GÁLVEZ, 1996, p.238)

No século XIX, a busca pela demonstração do quinto postulado de Euclides fez surgir uma nova geometria. Johann Carl Friedrich Gauss (1777- 1875) acreditava no rigor das demonstrações matemáticas e foi o primeiro a denominar essa nova geometria como geometria não euclidiana. Gauss foi um dos matemáticos que tentou provar o quinto postulado de Euclides, usando o método da redução por absurdo. Ele escreve uma carta a F.A. Taurinus, em Gottingem, em 8 de novembro de 1824.

Assim como Gauss, Wolfgang Boylai (1775 - 1856), um grande amigo com quem Gauss trocava correspondências, também tentou demonstrar o quinto postulado, chegando inclusive enviar para Gauss uma suposta demonstração de seus estudos. Gauss apontou um erro em sua demonstração e W Boylai acabou colocando suas ideias em um livro , *Tentamen*.

Johann Boylai (1802 - 1860), filho de Wolfgang Boylai, também trabalhou na demonstração de quinto postulado, apesar de ter sido aconselhado pelo pai a não seguir esse caminho. Após muito tempo de estudo, em 1820, J. Boylai nega o quinto postulado e chega a duas possibilidades:

- I. Não existe qualquer reta paralela a uma reta dada passando por um ponto fora desta reta.
- II. Existe mais de uma reta paralela a uma reta dada passando por um ponto.

A possibilidade I é eliminada, pois a existência de retas paralelas é consequência dos quatro primeiros postulados. Apesar de sua descoberta ter sido elogiada por Gauss, J. Boylai publicou sua descoberta como um apêndice no *Tentamen*, pois a mesma já tinha sido descoberta.

Em 1826, o russo Nikolai Ivanovich Lobachewsky (1792 - 1856) nega o quinto postulado afirmando que por um ponto exterior a uma reta, passa mais do que uma paralela. Ele foi o primeiro a publicar suas ideias, criando assim, a geometria não euclidiana. Em 1838, Lobachewsky escreve “Novos Fundamentos da Geometria”; em 1840, “Investigações Geométricas Sobre a Teoria da Paralelas”; e, em 1855, “Pangeometria”.

O alemão David Hilbert (1862-1943) faz um estudo de todas as novidades incorporadas à matemática e a geometria é reescrita passando por uma grande reforma.

Em tempos remotos, a geometria era uma ciência empírica, uma coleção de regras práticas para obter resultados aproximados. Atualmente, definimos geometria como um ramo da Matemática que estuda as formas planas e espaciais com suas propriedades, pelo qual, a partir de conceitos elementares existentes, o indivíduo é capaz de construir e definir formas planas e espaciais mais complexas. Segundo Baldissera (2001, p.5) “A geometria permite-nos o uso dos conceitos elementares para construir outros objetos mais complexos como: pontos especiais, retas especiais, planos dos mais variados tipos, ângulos, médias, centros de gravidade de objetos”.

O mesmo autor, Baldissera (2001), reconhece que a Geometria sempre foi considerada um tabu dentro da sala de aula. Conectar a Geometria a outras áreas do conhecimento qualifica o aprendizado, capacita o aluno a ter uma visão mais ampla e íntegra, resgatando a Matemática do abstrato para o mundo concreto. Desse modo,

Efetivamente, a geometria é a ciência do espaço, trabalha com formas e medições. Mas [afirma ele] é ingênuo não reconhecer que nos tempos atuais a percepção de espaço é distinta [de outrora] e que se distinguem novas formas [geométricas], assim como se avalia e se quantifica de outro modo e se trabalham as quantidades com outra dinâmica. (PAVANELLO, 1993 apud BERNARDI, 2011, p.15)

O ensino da geometria está presente nos currículos escolares da Educação Infantil até o Ensino Médio e o que é e para que ensinar estão apontados nos Parâmetros Curriculares Nacionais, conjunto de competências a serem trabalhadas no ensino da Matemática.

O estudo da Geometria é um campo fértil para trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades etc. (BRASIL, 1998, p.51)

As aulas de matemática geralmente são expositivas, com o professor ensinando aquilo que julga importante e, em seguida, resolve exercícios considerados modelos para os alunos resolverem as tarefas propostas. Segundo D'Ambrósio (1989), esse modo de ensinar a Matemática faz com que os alunos acreditem que:

[...] aprendizagem de matemática se dá através de um acúmulo de fórmulas e algoritmos. Aliás, nossos alunos hoje acreditam que fazer matemática é seguir e aplicar regras. Regras essas que foram transmitidas pelo professor.

[...]

Em nenhum momento no processo escolar, numa aula de matemática geram-se situações em que o aluno deva ser criativo, ou onde o aluno esteja motivado a solucionar um problema pela curiosidade criada pela situação em si ou pelo próprio desafio do problema. Na matemática escolar o aluno não vivencia situações de investigação, exploração e descobrimento. (D'AMBROSIO, 1989, p.1-2)

No estudo da geometria espacial no Ensino Médio, os alunos em geral, apresentam dificuldades em compreender os conceitos, as aplicações e fazer a transposição do espaço bidimensional para o tridimensional. Esses conteúdos, na maioria das vezes, são trabalhados em salas de aulas de uma forma mecânica, deduzindo fórmulas e aplicando-as em forma de exercícios e problemas contextualizados. Os alunos apresentam dificuldades em desenhar, visualizar os sólidos descritos nos exercícios e fazer a relação das figuras com o que foi trabalhado nos conteúdos. Consensualmente, nas práticas escolares, não há uma intencionalidade e nem uma sistematização dos conhecimentos espaciais.

Assim,

[...] um dos maiores problemas na educação decorre do fato que muitos professores consideram os conceitos matemáticos como objetos prontos, não percebendo que estes conceitos devem ser construídos pelos estudantes [...] de alguma maneira os alunos devem vivenciar as mesmas dificuldades conceituais e superar os mesmos obstáculos epistemológicos encontrados pelos matemáticos [...] solucionando problemas, discutindo conjecturas e métodos, tornando-se conscientes de suas concepções e dificuldades, os alunos sofrem importantes mudanças em suas ideias. (VERGNAUD, 1990 apud BALDISSERA, 2001, p.2)

Consta nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio que “[...] o estudo da *Geometria* deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do cotidiano, [...]”. (BRASIL, 2006, p.75)

Acreditamos que uma das dificuldades dos alunos em aprender geometria espacial é visualizar os elementos nos sólidos geométricos e a planificação dos mesmos, conforme já fundamentado anteriormente.

A construção dos sólidos geométricos, com massinhas de modelar, a partir das fotos tiradas pelos alunos tem, como objetivo, compreender de que forma os alunos visualizam as figuras que estão representadas no espaço tridimensional. O contato com as figuras geométricas trabalhadas na massinha é uma forma de buscar os conceitos geométricos e desenvolver a percepção espacial que os alunos possuem.

A nossa investigação seguiu ao encontro das limitações que impedem alguns educandos de compreender as ideias e os conceitos geométricos, visando, sobretudo, buscar alternativas que possam indicar meios de superação referentes à apropriação do conhecimento matemático. A seguir, trataremos dos procedimentos teóricos e metodológicos.

2.3 PROCEDIMENTOS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS

A estrutura da Engenharia Didática foi a metodologia escolhida para o desenvolvimento dessa pesquisa. Faremos um breve relato a respeito de seus fundamentos, levando em consideração suas concepções originais e formas de aplicação no ensino.

Segundo Machado (2010), a Engenharia Didática é uma metodologia que tem como finalidade analisar as situações didáticas e, por isso, é empregada nas pesquisas que incluem uma parte experimental. Para Artigue (1988),

[...] este termo foi “cunhado” para o trabalho didático que é aquele comparável ao trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto preciso, se apóia sobre conhecimentos científicos de seu domínio, aceita submeter-se a um controle do tipo científico mas, ao mesmo tempo, se vê obrigado a trabalhar sobre objetos bem mais complexos que os objetos depurados da ciência e portanto a enfrentar praticamente, com todos os meios de que dispõe, problemas que a ciência não quer ou não pode levar em conta. (ARTIGUE, 1988 apud MACHADO, 2010, p.198)

Dessa forma, consideramos que essa metodologia nos auxiliou na verificação e nas análises do como o estudante elabora estratégias para resolver o problema proposto, investigando quais os conceitos usou para desenvolver a sua atividade.

Pantoja e Silva (s/d) consideram que, em toda pesquisa desenvolvida no campo da Educação Matemática, a qual tome a engenharia didática como metodologia, “articula-se a

construção do saber matemático a uma prática reflexiva investigativa diante de uma sequência didática experimental” e “possibilita ao professor fazer da sua ação pedagógica um objeto de investigação através do qual estabelece uma dependência entre saber teórico e saber prático na busca da construção de conhecimento”. Assim entendemos que,

A engenharia didática possibilita uma sistematização metodológica para a realização da pesquisa, levando em consideração as relações de dependência entre teoria e prática. Esse é um dos argumentos que valoriza sua escolha na conduta de investigação do fenômeno didático, pois sem articulação entre a pesquisa e a ação pedagógica, cada uma destas dimensões tem seu significado reduzido. (PAIS, 2001, p.99)

O uso da Engenharia Didática como metodologia nos possibilitou avaliar e analisar com mais precisão, se os saberes escolares ensinados pelo professor foram consolidados pelos estudantes; pois, no processo de ensino e de aprendizagem, é importante verificar se o estudante compreendeu o conteúdo trabalhado em sala de aula; bem como mostrará se esses saberes estão sendo usados de forma apropriada na prática.

Machado explica que o termo Engenharia Didática foi sendo constituído na Didática da Matemática com dupla função: como uma produção para o ensino e um produto resultante de uma análise *a priori* no caso da metodologia de pesquisa.

Para Artigue (1988 apud MACHADO, 2010, p.199), como esclarece Machado, a Engenharia Didática se caracteriza “[...] como um esquema experimental baseado sobre ‘realizações didáticas’ em sala de aula, isto é, sobre a concepção, a realização, a observação e a análise de sequências de ensino”.

O autor lembra que o pesquisador, ao fazer uso da Engenharia Didática para desenvolver seu trabalho, insere-se no *locus* da investigação e essa se perpassa por quatro fases:

- Análises preliminares
- Concepção e análise *a priori* das situações didáticas.
- Experimentação:
- Análise *a posteriori* e validação.

Na análise preliminar, além das considerações a respeito do quadro teórico didático geral, são feitas também considerações a respeito dos conhecimentos didáticos já adquiridos sobre o assunto a ser pesquisado; de que forma esse assunto vem sendo trabalhado em sala de aula; quais as dificuldades e obstáculos que os alunos apresentam diante do assunto

trabalhado; e, também, quais as dificuldades apresentadas no processo de ensino e de aprendizagem. Para Pais (2001):

Para melhor organizar a análise preliminar, é recomendável proceder a uma descrição das principais dimensões que definem o fenômeno a ser estudado e que se relacionam com o sistema de ensino, tais como a epistemologia cognitiva, pedagógica, entre outras. Cada uma dessas dimensões participa na constituição do objeto de estudo. (PAIS, 2001, p. 101).

Essa fase preliminar permitirá um estudo detalhado a respeito dos conhecimentos prévios que os estudantes possuem do conteúdo pesquisado, direcionando a ação do pesquisador numa sequência didática.

A segunda fase, análise *a priori*, consiste em fazer uma análise sobre o saber em estudo. Fazem parte dessa fase duas etapas: a primeira consiste na descrição do objeto em pesquisa; e a segunda busca colocar em evidência as problemáticas referentes ao objeto em estudo para, em seguida, construir hipóteses que serão verificadas na prática investigativa, visando a melhorias para o processo de ensino e de aprendizagem.

Segundo Machado (2010), nessa fase, o pesquisador, de acordo com as análises preliminares, delimita certo número de variáveis pertinentes ao sistema sobre o qual o ensino pode atuar. Essas variáveis, chamadas de variáveis de comando, podem ser de ordem geral ou específica, dependendo do conteúdo a ser ensinado. Artigue (1988 apud MACHADO, 2010) distingue as variáveis de comando como:

- variáveis macrodidáticas ou globais, concernentes à organização global da engenharia;
- variáveis microdidáticas ou locais, concernentes à organização local da engenharia, isto é, à organização de uma sessão ou de uma fase. (ARTIGUE, 1988 apud MACHADO, 2010, p.241)

Quanto à terceira fase, a da **experimentação**, Machado (2010) afirma que:

A fase da *experimentação* é clássica. É a fase da realização da engenharia com uma certa população de estudantes; ela se inicia no momento em que se dá o contato do pesquisador/professor/observador(es) com a população de alunos objeto da investigação.

A experimentação supõe que:

- a explicitação dos objetivos e condições de realização da pesquisa à população de alunos que participará da experimentação;
- o estabelecimento do contrato didático;
- aplicação dos instrumentos de pesquisa;

- registro de observações feitas durante a experimentação (observação cuidadosa descrita em relatório, transcrição dos registros audiovisuais, etc). (MACHADO, 2010, p. 244-245)

Essa fase corresponde à aplicação da sequência didática, em que o saber didático e teórico do professor são verificados na prática. Segundo Pais (2001):

Uma sequência didática é formada por um certo número de aulas planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem, envolvendo os conceitos previstos na pesquisa didática. Essas aulas são também denominadas sessões, tendo em vista o seu caráter específico para a pesquisa. Em outros termos, não são aulas no sentido da rotina da sala de aula. Tal como acontece na execução de todo projeto, é preciso estar atento ao maior número possível de informações que podem contribuir no desvelamento do fenômeno investigatório. (PAIS, 2001, p.102).

Pantoja e Silva (s/d) lembram que Artigue considera na fase experimental de uma sequência didática, a explicitação dos objetivos e condições de realização da pesquisa, estabelecimento do contrato didático, aplicação dos instrumentos de pesquisa e os registros das observações feitas durante a experimentação, pontos necessários a serem colocados com clareza, e seguidos pelos professores quando assumem essa metodologia de pesquisa.

A quarta e última fase é a análise *a posteriori* e a validação. Nessa fase, é verificado se houve aprendizagem por parte dos estudantes e se a autonomia intelectual foi alcançada, validando, dessa forma, a sequência didática utilizada. Para a execução dessa fase, é feita uma análise sobre os dados colhidos durante as aulas planejadas para o estudo do experimento e as atividades dos alunos desenvolvidas em sala de aula ou fora delas.

Durante todo o processo, a fase da validação de uma sequência didática é realizada confrontando-se os dados obtidos na análise *a priori* e na análise *a posteriori*, verificando se as hipóteses propostas no início da pesquisa foram confirmadas.

Assim, como Pantoja e Silva (s/d), podemos concluir que a Engenharia Didática constitui-se em um referencial metodológico importante e viável para o processo de ensino e de aprendizagem, já que viabiliza a compreensão dos efeitos causados pelas práticas docentes desenvolvidas em sala de aula.

Quando falamos do ensino da Matemática, devemos lembrar que alguns professores ainda fazem uso do clássico, acreditando que todos os estudantes adquirem conhecimento nas mesmas circunstâncias e, se por um acaso existirem diferenças, essas são tão insignificantes

que podem ser superadas pelos estudantes ao estudarem um pouco mais. Acreditamos que, esse modo de enxergar o ensino por parte de alguns professores, colabora de forma direta para o insucesso da aprendizagem, prejudicando a formação do indivíduo como um cidadão que a sociedade solicita; pois revela-se sem significado para o estudante.

Outros professores acreditam que utilizando recursos que facilitadores da transposição de um saber científico para um saber a ser ensinado, contextualizado e significativo, estariam criando situações que proporcionam uma aprendizagem mais eficiente, minimizando as abstrações tão presentes nas aulas de matemática.

Esse modo de enxergar o ensino nos remete a Guy Brousseau, considerado o pai da Didática da Matemática; que, desde cedo, demonstrou grande interesse em estudar a maneira como as crianças adquiriam os conhecimentos matemáticos e que veremos com mais detalhes no próximo tópico.

3 ANÁLISES PRÉVIAS

A primeira fase da Engenharia Didática é constituída pelas análises preliminares. Nessa fase, além de um estudo sobre o quadro teórico que embasará a pesquisa, ocorreu uma investigação sobre o conceito pesquisado. Neste caso, os conceitos e propriedades da geometria espacial. Para a elaboração das atividades que conduzem essa investigação, optamos por analisar os conhecimentos adquiridos sobre os sólidos estudados em geometria espacial.

3.1 A DIDÁTICA DA MATEMÁTICA E A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

Pais (2001) relata que “quando escrevemos sobre os conceitos criados por outros autores, seria bom preservar toda a essência das ideias originais e sempre esclarecer o que foi adicionado por conta da nossa interpretação.” (PAIS, 2001, p.9). Pelo fato de concordarmos com Pais e pela complexidade desta linha de pesquisa, pretendemos manter as suas concepções originais e, quando possível, tecer comentários que mostram a nossa concepção sobre o assunto. De acordo com Pais(2001),

A didática da matemática é uma das tendências da grande área de educação matemática, cujo objeto de estudo é a elaboração de conceitos e teorias que sejam compatíveis com a especificidade educacional do saber escolar matemático, procurando manter fortes vínculos com a formação dos conceitos matemáticos, tanto em nível experimental da prática pedagógica, como no território teórico da pesquisa acadêmica. (PAIS, 2001, p.11)

Para D’Amore (2007), a ideia de Comenius, de que um único método é suficiente para ensinar todas as matérias, custou a morrer e muitos séculos foram necessários para estabelecer definitivamente que as didáticas podem ser e são específicas. Para o autor, essa nova visão foi útil para a didática (geral) se libertar do jugo da pedagogia e para as didáticas específicas (disciplinares) chegarem a um status autônomo.

Gálvez (1996) relata que a Didática Matemática é uma área de conhecimento relativamente autônoma, uma proposta que teve sua origem no final dos anos 60, na França, a partir de atividades desenvolvidas por matemáticos no IREM – Instituto de Investigação acerca do Ensino das Matemáticas. Inicialmente, o IREM tinha, como objetivo inicial,

complementar a formação dos professores, que lecionavam nas escolas primárias e produzir materiais de apoio para os professores desenvolverem suas atividades em sala de aula. Com o passar do tempo, alguns integrantes, em reflexões a respeito da validade das ações desenvolvidas, passaram a atuar não só na produção dos materiais como também em atividades destinadas à produção de meios; atuando sobre o ensino e à produção de conhecimentos para controlar e produzir tais ações.

Brousseau (2008), um dos integrantes do IREM, quando estudante, participou de um estudo sobre psicologia cognitiva com Pierre Grego, e conheceu determinados dispositivos experimentais criados para destacar a originalidade do pensamento matemático das crianças nas diferentes etapas de desenvolvimento. Nesse estudo, Brousseau percebeu que ainda assim não analisavam os dispositivos e nem a relação entre eles e a noção da matemática estudada. Nessa perspectiva, o autor considera que o comportamento dos alunos permite-nos conhecer o funcionamento do meio e acredita que:

Assim, um problema ou exercício não pode ser considerado mera reformulação de um conhecimento, mas um dispositivo, um meio que responde ao sujeito, segundo algumas regras. Que jogo o sujeito deve jogar para precisar de um conhecimento determinado? Que aventura - sucessão de jogos - pode levá-lo a conceber ou adotar esse conhecimento? [...] Que informação, que sanção pertinente deve o sujeito receber do meio para orientar suas escolhas e comprometer tal conhecimento em vez de outro? Essas perguntas, pois, levam a considerar o meio como um sistema autônomo, antagônico ao sujeito, e é deste que convém fazer um modelo, visto como um tipo de autômato. (BROUSSEAU, 2008, p.19).

O autor denomina situação como o “modelo de interação de um sujeito com um meio específico que determina um certo conhecimento, como o recurso que o sujeito dispõe para alcançar ou conservar, nesse meio, um estado favorável.” (BROUSSEAU, 2008, p.19). Por exemplo, na década de 70, época em que Brousseau iniciou seus estudos, as situações que serviam para ensinar eram consideradas situações didáticas; e o material, textos usados para transmitir esse conhecimento, eram os “meios”. A Engenharia Didática tinha a função de estudar e produzir esses meios. Ainda nessa época, uma situação que levava o estudante a desenvolver uma atividade matemática, sem a intervenção do professor, era chamada de situação matemática. Assim, situações didáticas, na concepção do autor, são “todo contexto que cerca o aluno, nele incluídos o professor e o sistema educacional.” (BROUSSEAU, 2008, p.21).

Durante décadas, os estudos da teoria das situações didáticas evoluíram e permitiram diversos estudos que envolvem tanto o ensino quanto a aprendizagem. Nessa direção, Gálvez (1996) lembra que a didática da matemática tem como finalidade, estudar os fenômenos nos processos relativos ao ensino dessa matéria e, assim, melhorar a aprendizagem dos estudantes; e, como objeto de estudo, as situações didáticas que possuem o caráter intencional, de proporcionar um momento em que alguém aprenda algo, averiguando como os dispositivos didáticos funcionam e quais são as características que contribuem para a evolução do conhecimento do estudante.

Os estudos de Gálvez (1996) revelam que uma situação didática é:

Um conjunto de relações estabelecidas explícitas e/ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, um determinado meio (que abrange eventualmente instrumentos ou objetos) e um sistema educativo (representado pelo professor) com a finalidade de conseguir que esses alunos apropriem-se de um saber constituído ou em vias de constituição (GÁLVEZ, 1996, p.28)

D'Amore (2007) lembra que “entre os diversos objetos de estudo da didática, um papel completamente fundamental, embora às vezes implícito, pertence ao *Milieu*”. (D'AMORE, 2007, p.184), o meio, lugar de atuação do aluno e esclarece que:

Da teoria das situações sabemos que o professor tem que provocar no aluno comportamentos, que o próprio aluno, a fim de manifestar seu conhecimento, teria que adotar autonomamente. Parece um paradoxo. Aliás: é um paradoxo. A única solução consiste em envolver um terceiro elemento, o *milieu*, e fazer com que a resposta do aluno se refira exclusivamente às necessidades do *milieu*, que o professor conhece bem, ou que predispõe para esse fim. A arte do professor está então na organização de uma relação entre aluno e *milieu*, que:

- por um lado, deixa uma razoável incerteza que deve ser reduzida pelos conhecimentos do sujeito;
- por outro lado, faz com que essa redução possa realmente ocorrer, isto é, com um grau de incerteza limitado, do ponto de vista do professor. (D'AMORE, 2007, p.184)

Nessa direção, Pais (2001) confirma que uma situação didática é formada pelas relações pedagógicas entre o professor, o aluno e o saber em um determinado meio. Daí, Gálvez (1996) cita que essas relações estabelecidas entre alunos e professores, ocorrem a partir de negociações entre as partes, denominadas de contrato didático, em que são definidas as regras de funcionamento dentro da situação. Ela também salienta que o essencial em uma

situação didática é sua construção com o objetivo de o estudante aprender algo. E segue defendendo ser necessário desenvolver uma metodologia em que a situação seja um componente de análise e, para fazer essa análise das situações didáticas, Brousseau utiliza elementos da teoria dos jogos e da teoria da informação, modelizando-as e descrevendo as decisões dos estudantes durante a situação e as estratégias tomadas até o final do processo.

Para analisar as situações didáticas, Brousseau as modeliza, utilizando elementos da teoria dos jogos e da teoria da informação. Para uma situação didática determinada identifica-se um estágio inicial e o conjunto de diversos estágios possíveis, entre os quais se encontra o estágio final que corresponde à solução do problema envolvido na situação. Explicitam-se as regras que permitem passar de um estágio ao outro. A situação é descrita, então em termos das decisões que os jogadores (alunos) podem tomar a cada momento as diferentes estratégias que podem adotar para chegar ao estágio final (Gálvez, 1996, p.29)

Outro momento de análise de uma situação didática é a sua classificação e, nesse sentido, Brousseau (2008) apresenta quatro fases que se organizam na seguinte sequência: situação da ação, da formulação, da validação e da institucionalização.

Na fase da ação, o estudante atua de acordo com o meio e em função das suas motivações, é uma interação entre aluno e meio. Ele é capaz de relacionar algumas informações às suas decisões, antecipando assim, suas respostas e podendo usá-las em suas futuras decisões. Os conhecimentos são responsáveis por produzir e mudar essas antecipações. Vale ainda ressaltar que os processos em que os conhecimentos sofrem modificações são considerados aprendizagem.

Na situação da formulação, o estudante deverá ser capaz de retomar um conhecimento e reconstruí-lo em um sistema linguístico. A formulação dos conhecimentos envolve outro sujeito, a quem o estudante comunica a informação, nesse caso existe um emissor e um receptor.

Na validação, ocorre uma colaboração entre as partes, em busca da verdade, podendo haver confrontos, no caso de dúvidas.

E, por fim, a institucionalização é o momento de retomar e descrever os fatos observados, sistematizando o saber. Um momento importante no processo tanto do ensino quanto da aprendizagem. Nessa fase, Brousseau (2008) resalta que, no decorrer das experiências desenvolvidas na Escola Jules Michelet, os professores envolvidos necessitavam “rever o que já haviam feito” e precisavam dar conta da produção do estudante, descrevendo os fatos observados e tudo que está relacionado ao conhecimento; demonstrando, dessa forma,

“a necessidade de considerar as fases de institucionalização que deram a determinados conhecimentos o status indispensável ao saber” (BROUSSEAU, 2008, p.31).

Diante dessas quatro fases, Brousseau (2008) diz que o ensino é uma relação entre professor e estudante, na qual o professor é responsável por organizar o conhecimento a ser transmitido ao estudante. Esse conhecimento precisa ser planejado por um sistema educacional e, quando passa a ser comunicado ao estudante, deve gerar aprendizagem. Essa relação didática é interpretada como uma comunicação de informações, em que cada disciplina tem o seu papel bem definido. O autor lembra que psicólogos como Skinner, Piaget e Vygostky demonstraram, em diferentes perspectivas, a importância da tendência natural do indivíduo em adaptar-se ao meio e, a partir dessas perspectivas, o ensino passa a conciliar os processos de aculturação e de adaptação independente.

Para Gálvez (1996, p.32), Brousseau acredita que é “preciso criar situações didáticas que façam funcionar o saber, a partir dos saberes definidos culturalmente nos programas escolares”; considerando que todo o conhecimento adquirido pelo estudante corresponde a uma resposta a alguma situação disponível para o mesmo.

A teoria da situação didática nos mostra a importante relação professor-saber-aluno, em que há uma inter-relação entre os três, criando um meio no qual o estudante atua de forma autônoma. Pais (2001) ainda afirma que existem situações fora do controle pedagógico do professor, que também contribuem para o desenvolvimento intelectual do estudante. Essas variáveis auxiliam na formação de conceitos e são conhecidos como situação adidática. Nesse sentido, Brousseau (1986) esclarece:

Quando o aluno torna-se capaz de colocar em funcionamento e utilizar por ele mesmo o conhecimento que ele está construindo, em situação não prevista de qualquer contexto de ensino e também na ausência de qualquer professor, está ocorrendo então o que pode ser chamado de situação adidática. (BROUSSEAU, 1986 apud PAIS, 2001, p.8).

A seguir, vamos abordar um componente fundamental da Teoria das Situações Didáticas: o contrato didático, o qual subsidiará também o nosso trabalho.

3.2 CONTRATO DIDÁTICO

Segundo Infopédia¹, contrato vem do latim *contractu-*, transação, ato ou efeito de contratar; “acordo pelo qual duas ou mais pessoas se obrigam a cumprir os vários pontos estabelecidos por esse acordo, que podem incluir a cedência de poderes ou a observância de certas obrigações”. Fazendo um elo com o nosso tema, o contrato didático, pode ser considerado como um conjunto de regras implícitas ou explícitas que dirigem as responsabilidades e deveres dos indivíduos envolvidos no processo de ensino e de aprendizagem.

Segundo Pais (2001, p.77), a noção de contrato didático, descrita por Brousseau, refere-se “ao estudo das regras e das condições que condicionam o funcionamento da educação escolar; quer seja no contexto de uma sala de aula, no espaço intermediário da instituição escolar quer seja na dimensão mais ampla do sistema educativo”.

O contrato didático pode ser identificado durante uma situação didática, a partir do momento em que os sujeitos envolvidos, estudante e professor, estejam em uma interação com o saber e recebem influência de regras e condições muitas vezes não previsíveis pelo sistema didático. O mesmo autor, Pais (2001), reitera que o contrato didático tem suas raízes associadas ao conceito de contrato social, proposto por Rousseau e, também, ao conceito de contrato pedagógico analisado por Filloux que, ao propor uma forma de compreender as regras de funcionamento da sociedade e suas implicações na educação, acabou por distinguir três estados distintos no desenvolvimento intelectual do ser humano: o natural, o social e o contratual. O contratual deveria combater as injustiças do estado social, prevalecendo a vontade da maioria dos membros de uma sociedade. Na perspectiva de Pais (2001, p.79), o que parece ter prevalecido na passagem do contrato social para o contrato didático é “uma aparente impossibilidade dos sujeitos envolvidos participarem efetivamente da alteração das regras condicionantes da dinâmica das relações”.

O autor, ao falar do contrato didático proposto por Filoux, lembra que, ao descrevê-lo, Filoux destacou a inconveniência em prevalecer certa superioridade do professor em relação à posição do aluno e, assim, como no quadro social, o aluno que acata essa hierarquia é bem avaliado na escola. Dessa forma, o contrato pedagógico se resume a uma condição de determinação. O contrato didático retoma os sentidos desses contratos, considerando um nível específico da natureza do saber envolvido em uma situação de ensino.

¹ Disponível em: <http://www.infopedia.pt/pesquisa-global/contrato> Acesso em: 25 set. 2012

As regras do contrato didático não se identificam com as regras do contrato jurídico, já que, no meio escolar, “há também condições exigidas de uma forma implícita, o que aumenta a complexidade do sistema educativo” (PAIS, 2001, p.80). A dinâmica do ensino e da aprendizagem é totalmente alterada quando não há um conhecimento a respeito das regras. É imprescindível que o professor tenha conhecimento da especificidade da sua disciplina, pois essa consciência pode influenciar positivamente ou negativamente seu trabalho didático.

Segundo Pais (2001), Brousseau considera que explicitar a totalidade das regras que constituem um contrato didático não é mais importante do que delinear alguns pontos de sua ruptura, já que é praticamente impossível explicitar todas as regras, pois a natureza do contrato, além de envolver condições explicitadas pela norma, envolve interpretações subjetivas consideradas imprevisíveis, como também não é possível localizar os pontos de ruptura de um contrato didático. Nesse contexto, as “causas, os momentos e as condições dessa ruptura não podem ser previstos totalmente, pois ocorrem no transcorrer da dinâmica das situações didáticas e estão também relacionadas à dimensão subjetiva dos sujeitos envolvidos.” (PAIS, 2001, p.81)

O contrato didático pode ser exemplificado sob três aspectos diferenciados: no papel que o professor assume diante do aluno; a valorização do saber matemático; e as diferentes maneiras de conduzir a prática educativa escolar. O primeiro aspecto ocorre quando a ênfase é colocada sobre o conteúdo a ser ensinado e é efetivada pela relação professor / aluno. Nesse contrato, o professor detém o monopólio do conhecimento, ele acredita que o aluno não sabe nada do que vai ser ensinado, desconsiderando, dessa forma, o conhecimento prévio do conteúdo que o aluno possui. O que é ensinado em sala de aula pelo professor, apesar de no primeiro momento parecer fácil, não é suficiente para que o aluno desenvolva suas atividades. Conflitos entre professor e aluno são muito normais nesse contrato, no qual a avaliação é usada como um instrumento de controle da situação pelo professor.

No segundo aspecto de contrato didático, a ênfase é dada ao relacionamento entre o aluno e o saber com uma singela interferência do professor. Nesse contrato, o professor não é o responsável pela transmissão do conhecimento. O estudante, em grupo, deve desenvolver o conhecimento que já possui de forma efetiva, contribuindo assim, para a sua aprendizagem. O estudante é quem traça a sua trajetória e assume praticamente sozinho a dinâmica de toda aprendizagem. O professor quase não interfere nas atividades dos estudantes; ele apenas os orienta e estimula, sem a intenção de controlar pedagogicamente o processo de aprendizagem. Nesse contrato, ocorre uma confusão entre o saber cotidiano e o saber escolar.

No terceiro aspecto de contrato didático, descrito por Brousseau, há uma forte ênfase no relacionamento do aluno com o saber, já com uma intervenção maior do professor. A aprendizagem é considerada em todas as suas dimensões: individual, em pequenos grupos e na classe como um todo. Em alguns momentos, o professor não é considerado a fonte de conhecimento e, em outros, o professor não abre mão de acompanhar o processo de aprendizagem, exercendo assim, a sua função de docente. Há uma preocupação na qual o aspecto sócio-cultural do estudante está inserido e, nesse caso, há uma interferência com as atividades extra-escolares. O professor é quem planeja as situações didáticas a partir de uma vigilância entre a ação e a reflexão, escolhe as situações desafiadoras compostas por problemas, jogos, atividades etc., analisando possíveis erros e acertos que são reinvestidos na prática educativa. Nesse contrato, o estudante atua ativamente na elaboração dos conhecimentos matemáticos, pois ocorre uma valorização da resolução de problemas.

3.3 OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS

Gastão Bachelard (1996), um filósofo francês, publicou em sua obra *A Formação do Espírito Científico* as primeiras noções a respeito de obstáculos epistemológicos. Em seus estudos a respeito das condições da evolução das ciências, observou que “a evolução de um conhecimento pré-científico para em nível de reconhecimento científico passa, quase sempre, pela rejeição de conhecimentos anteriores e se defronta com um certo número de obstáculos” (BACHELARD, 1996 apud PAIS, 2001, p.39). Assim esses obstáculos são conhecimentos anteriores cristalizados pelo tempo, e se opõem ao recebimento de novas concepções que possam desestruturar a estabilidade intelectual de quem detém esse conhecimento e, não, a falta de conhecimento, como muitos acreditam.

Bachelard (1996) diz que “os primeiros obstáculos são aqueles provocados pelas primeiras experiências quando estas são realizadas ainda sem maiores reflexões e sem qualquer crítica” (BACHELARD, 1996 apud PAIS, 2001, p.47) e, no plano pedagógico, esses primeiros obstáculos estão relacionados a forma simples como os conteúdos são apresentados nos livros didáticos, nos quais o formalismo não corresponde aos desafios do fenômeno cognitivo.

A generalidade, como diz Pais (2001), também pode vir a ser um obstáculo epistemológico à formação do conhecimento científico e surge quando ocorre uma pressa em generalizar uma ideia que ainda está presa a um entendimento pré-reflexivo. Para a Educação Matemática, que busca apresentar as proposições em um maior grau de generalidade, essa é

uma questão de interesse. A falsa doutrina do geral, uma precipitação do pensamento indutivo, em que as observações de casos particulares são consideradas suficiente para generalizar, pode se constituir em um obstáculo.

A observação de casos particulares não serve para fundamentar uma demonstração, no máximo pode sugerir uma conjectura. No plano escolar, o risco de ocorrer uma generalização precipitada reside na tentativa de transformar o saber cotidiano em saber científico. De uma forma geral, as experiências vagas caracterizam o espírito não científico, pois estão ainda impregnadas de concepções voltadas mais para o saber cotidiano do que para a ciência. (PAIS, 2001, p.48)

Essa generalidade não está envolvida no saber matemático, já que a generalidade de um teorema não se trata de um conhecimento vago, pois essa só faz sentido como síntese da regularidade existente em uma infinidade de casos particulares.

Pais (2001) lembra que, no contexto matemático, a análise dos obstáculos deve ser realizada de uma forma especial, decorrência das próprias observações feitas por Bachelard, devido ao fato de essa ciência apresentar uma regularidade em seu desenvolvimento e escreve em seu artigo, em 2000:

[...] para analisar a noção de obstáculo no caso da matemática, é preciso fazer algumas considerações prévias, no sentido de esclarecer a forma como está sendo entendido a ruptura com os conhecimentos anteriores. Isto é necessário, pois, observando a evolução histórica da matemática pode-se ter a impressão de que o novo conhecimento nunca contradiz o anterior, de onde poderia se ter a falsa ideia de que tal conhecimento pudesse ser também aprendido ao curso dessa aparente regularidade. (PAIS, 2000, p.6)

Para fazer um estudo do conceito de obstáculo epistemológico que envolva os conceitos matemáticos, Pais (2001) diz que é necessário levar em consideração dois momentos distintos:

[...] um caracterizado pela elaboração de uma nova ideia, onde os problemas são efetivamente resolvidos e é por isso mesmo preenchido pela emoção da criatividade, em seguida, destaca-se a etapa de sua formalização atendendo aos rigores metodológicos pertinentes aos paradigmas da área científica (PAIS, 2000, p.7).

Nessa abordagem, os obstáculos na Matemática aparecem com mais veemência na fase da aprendizagem e síntese do conhecimento do que em seu registro histórico, pois os

obstáculos que aparecem durante a criação dos conceitos não estão presentes na redação do saber e os textos matemáticos apresentados à comunidade científica passam por um processo de redação traduzido pela demonstração. Nesse sentido,

Os avanços, retrocessos, dúvidas e erros cometidos na etapa em que as conjecturas são feitas pelo matemático, praticamente, desaparecem no resultado final apresentado pelo texto científico. Por outro lado, esses conflitos sinalizam possíveis obstáculos, mas como a história da matemática se baseia essencialmente nos registros textuais pode transparecer que, no transcorrer de sua descoberta, haja uma aparente regularidade. (PAIS, 2001, p.41)

No plano pedagógico, os obstáculos didáticos são definidos como “conhecimentos que se encontram relativamente estabilizados no plano intelectual e que podem dificultar a evolução da aprendizagem do saber escolar” (PAIS, 2001, p.44) e alerta quanto às diferentes fontes de dificuldades na aprendizagem escolar. O mesmo autor considera que, como a maioria das aulas de Matemática tem como objeto a aprendizagem de um determinado conceito, é necessário entender como esse novo conhecimento é adquirido pelo aluno e como são utilizados os anteriores, já que é nesse momento que os obstáculos se manifestam.

No caso das construções geométricas, Pais (2000) diz que os conceitos podem ser obstruídos por concepções predominantes no imaginário cognitivo, cuja origem possivelmente tem relação ao uso de desenhos e de materiais concretos. Além disso, no que diz respeito a alguns conceitos geométricos, há nos livros e materiais didáticos, a predominância de alguns desenhos geométricos em uma posição usual como, por exemplo, o retângulo com a base horizontal maior que a altura e o triângulo isósceles não equilátero, com o lado na posição horizontal menor que os lados congruentes.

Esses desenhos são denominados configurações geométricas, pois são características que ilustram “um conceito ou uma propriedade, possui fortes condicionantes de equilíbrio e trata-se de um desenho encontrado com relativa frequência no contexto do ensino e da aprendizagem escolar.” (PAIS, 2000, p.4). Quanto ao uso constante dessas configurações na posição usual, como nos exemplos citados anteriormente, o autor acredita que:

[...] pode tornar-se em um obstáculo adicional para a expansão da aprendizagem do conceito correspondente. Mas, segundo nosso entendimento, isto não significa dizer que tais figuras não tenham também uma importância expressiva na parte operacional da aprendizagem da geometria.

Quanto à existência de configurações na aprendizagem da geometria Audibert (1984) ressalta a existência de aspectos positivos mostrando uma estreita relação entre o uso de tais figuras e os procedimentos de resolução de problemas adotados por alunos em nível da escolaridade fundamental. Mas existem também aspectos negativos quando essas figuras particulares passam a ser usadas como verdadeiros estereótipos, dificultando ou obstruindo a formação de conceitos. (PAIS, 2000, p.5)

Na geometria espacial, Pais (2001) relaciona um obstáculo didático a aprendizagem, o fato de ser necessário utilizar uma representação por meio de uma perspectiva. Ele considera que a realização ou leitura de um desenho não é tão evidente para o estudante e complementa apresentando, como exemplo, um cubo, em uma perspectiva paralela, já que é usual aparecer com a face superior representada por um paralelogramo e, não, um quadrado. Assim, a visualização é que os ângulos não são retos e, principalmente, se medidos sobre a superfície do papel. Em contrapartida, representam os ângulos retos da face superior do cubo. Se o estudante fixar sua leitura nas particularidades do desenho em si, poderá ter dificuldades em compreender as propriedades deste sólido.

4 A PESQUISA

A escolha por esse estudo se deve ao fato de, após dez anos trabalhando no segundo ano do Ensino Médio e, mesmo buscando formas diferenciadas de trabalhar em sala de aula, em especial, a Geometria Espacial, percebemos as dificuldades de alguns estudantes em resolverem os problemas de aplicação relacionados a esse conteúdo.

Durante esses anos, buscamos abordar esse conteúdo em sala de aula de várias formas. Ora explorando o lúdico como, por exemplo, na montagem de sólidos a partir de sua planificação, na desconstrução dos sólidos, como caixas em forma de prismas e pirâmides; ora resolvendo exercícios contextualizados e do cotidiano, trabalhando na construção do enunciado por parte do estudante, a partir de um sólido. Resolvendo exercícios de exames para o Ensino Superior, além da apresentação de sólidos, usando ferramentas tecnológicas como, por exemplo, o *software Poly*, de acesso gratuito. Percebemos que alguns estudantes conseguiram aprimorar seus conhecimentos geométricos, embora tenham apresentado, algumas vezes, restrições ao resolverem tarefas que exigiam pensamento matemático mais refinado, com sólidos justapostos.

No entanto, entendemos que o maior desafio do educador matemático seja acompanhar o desenvolvimento cognitivo dos estudantes que se esforçam no sentido de superar os obstáculos de aprendizagem, mas malogram ao tentar resolver exercícios contextualizados, em que são solicitados conceitos geométricos mais elaborados, em sala de aula, ou que exijam deles, percepções no que tange às diferentes perspectivas dos sólidos, no que diz respeito à apresentação tridimensional.

As várias tentativas aplicadas em sala de aula, para amenizar os problemas apresentados pelos estudantes e as próprias inquietações pedagógicas em relação à prática em sala de aula, convergiram para os pressupostos teóricos da Educação, em especial, da Educação Matemática, adquiridos durante o curso de mestrado e, conseqüentemente, nos remeteram-nos a algumas questões norteadoras para esta investigação:

- ✓ Como ajudar os estudantes a compreender as ideias e os conceitos geométricos, a partir da visualização de sólidos geométricos, em uma perspectiva inclusiva na prática da sala de aula?
- ✓ Como ajudá-los a mudar de representação tridimensional para a bidimensional ou vice-versa?

Pelo fato de essa pesquisa requerer análises a respeito de etapas vivenciadas pelos sujeitos, quando participaram da construção e desconstrução de sólidos geométricos, usando materiais lúdicos, o presente trabalho está sob o jugo da pesquisa qualitativa, levando em consideração as particularidades de aprendizagem dos mesmos. Assim, partimos da hipótese de que trabalhar com materiais lúdicos, na construção e desconstrução de sólidos, é um forte aliado no processo de aprendizagem da Matemática.

A pesquisa qualitativa tem, como centro de sua proposta a interação pesquisador/pesquisado, em um processo dialógico, em que, a partir dela, procuramos compreender o fenômeno estudado. Tem como pressupostos alguns princípios básicos: 1) a teoria vai sendo construída no processo dinâmico; 2) os dados coletados são descritivos e analisados no processo indutivo; 3) a preocupação é com o processo e não com o produto; 4) o pesquisador tem contato direto com o campo e trabalha com aquilo que a pessoa traz e tem de melhor; 5) tudo que é observado tem o seu valor e contribui para a construção da pesquisa; 6) o foco do estudo vai sendo progressivamente ajustado durante as investigações.

Alves (1991) considera que o contato do investigador com o campo a ser pesquisado deve ser direto e prolongado, detalhando situações, comportamentos e interações dos sujeitos observados. É importante também que haja citações sobre o que as pessoas investigadas pensam, acreditam, relatos sobre suas experiências e atitudes. Os “qualitativos”, como lembra Alves (1991), consideram a realidade como uma construção social, com a participação do investigador; julgam que os fenômenos observados só podem ser compreendidos dentro de uma perspectiva holística, considerando os componentes que levaram a uma determinada situação, excluindo, dessa forma, relações lineares de causa e efeitos e generalizações.

Segundo Alves (1991), a pesquisa qualitativa parte do pressuposto de que o comportamento, os valores e as crenças de uma pessoa têm sempre um sentido e um significado, e cabe ao pesquisador desvelá-lo por meio de descrições mais complexas. Diante disso entendemos que,

Ninguém se forma no vazio. Formar-se supõe troca, experiência, interações sociais, aprendizagem, um sem fim de relações. Um percurso de vida é assim um percurso de formação, no sentido em que é um processo de formação. (MOITA, 1995, p.115)

Desse modo, os pressupostos da Engenharia Didática serão usados como metodologia desse trabalho, já que a mesma se constitui na realização, na construção, na análise do pesquisador-professor e dos estudantes, que participaram como sujeitos de pesquisa. Cremos que os estudos desenvolvidos pela Engenharia Didática proporcionam uma reflexão e uma

avaliação pelo professor pesquisador, buscando entender as dificuldades apresentadas pelos estudantes, redirecionando sua prática em sala de aula.

A parte inicial dessa pesquisa é constituída por uma análise preliminar, relatada pelo pesquisador e pelos sujeitos de pesquisa, a respeito dos conhecimentos adquiridos pelos mesmos quanto aos objetos matemáticos trabalhados em sala de aula, e suas experiências com a Matemática durante seu trajeto escolar.

Após a fase preliminar, uma sequência didática acompanhada de análise *a priori* será fundamental para fazer o confronto na análise *a posteriori* e, assim, redesenharemos essa investigação pela validação da Engenharia.

4.1 OS PARTICIPANTES

Este trabalho de pesquisa foi realizado com quatro alunas da segunda série do Ensino Médio de uma escola particular de Juiz de Fora. Para resguardar a identidade dos sujeitos de pesquisa, usamos nomes fictícios, chamando-as de Luísa, Sofia, Antonieta e Vitória.

Essas alunas ingressaram na escola em épocas diferentes. Antonieta e Vitória ingressaram na escola no Ensino Fundamental; Antonieta na sexta série (sétimo ano) e Vitória na sétima série (oitavo ano). Luísa e Sofia ingressaram na escola no Ensino Médio, sendo que Sofia ingressou na 1ª série e Luísa na 2ª série.

Como somos professores dessas alunas, conhecemos algumas de suas particularidades e dedicação quanto aos estudos relacionados aos conteúdos, e sua participação e envolvimento em sala de aula. Devemos destacar que Vitória possui comprometimento neurológico, que afeta essencialmente o campo da memória, em termos cognitivos. Por isso, ela tem um acompanhamento diferenciado, tendo em vista que também é amparada por um laudo médico. A nossa escola é de ensino regular, mas, sempre que é possível, tem-se o cuidado de praticar a educação inclusiva e, diante disso, Vitória tem suas avaliações de um modo bem diferenciado dos demais alunos.

Para avaliarmos as alunas quanto aos conhecimentos do objeto de estudo, foram usadas avaliações aplicadas durante o período letivo, elaboradas pela pesquisadora, com questões incluindo conceitos geométricos, planificações de figuras, cálculos de área e cálculos de volume de sólidos.

Analisando essas avaliações, chegamos aos seguintes resultados:

- ✓ Luísa, em todas as avaliações, mostrou muita dificuldade em trabalhar com cálculos de área e volume nos problemas contextualizados e nos conceitos e elementos de um

sólido, pois todas as questões relacionadas a essa competência ela deixava em branco. Entre as quatro é a única que não tem um reforço fora da escola. Quanto a sua habilidade em identificar planificações de sólidos, mostrou um pouco mais de conhecimento que as demais, pois foi a única capaz de identificar um sólido composto pela junção de um tronco de cone e um cone a partir de uma secção meridional.

- ✓ Sofia, entre as que não estão amparadas por um laudo médico, foi a que mostrou mais dificuldades em reconhecer os sólidos e desenvolver exercícios com cálculos das medidas de área e volume. É perceptível a sua dificuldade em trabalhar com a Matemática, apesar de seu esforço para acompanhar as aulas, pois suas avaliações geralmente ou são entregues em branco ou contendo alguma fórmula. Ela apresentou muita dificuldade em desenvolver questões que exigiam o reconhecimento das planificações dos sólidos e, também, em reconhecer as figuras geométricas planas que constituem as faces laterais dos sólidos, suas propriedades e nomenclaturas.
- ✓ Antonieta, a mais insegura de todas, pois sempre teve auxílio com aulas particulares. Muito esforçada, dedicada e comprometida com as atividades em sala de aula e com as tarefas de casa. Demonstra conhecer as propriedades e nomenclaturas dos sólidos, mas tem dificuldades em reconhecer os sólidos a partir de suas planificações ou vice-versa. Apesar de estudar muito e fazer muitos exercícios, Antonieta não consegue resolver problemas mais elaborados e os que exigem reconhecimento de planificações.
- ✓ Vitória, com toda sua limitação cognitiva está sempre disposta a desenvolver as atividades propostas e está sempre atenta às explicações. Suas avaliações eram preparadas de forma diferenciada, trabalhando mais a visualização e conduzindo-a a resolver as tarefas, paulatinamente, determinado a fórmula para aplicação em exercícios contextualizados. Como já foi mencionado anteriormente, apesar de toda essa diferenciação na elaboração das avaliações, não ocorreu muita evolução na sua aprendizagem. Vale ressaltar que, apesar de toda a atenção na elaboração da avaliação, as aulas, a que ela assiste eram as mesmas com os demais alunos.

Acreditamos que o indivíduo constrói e reconstrói suas experiências de vida nos diversos ambientes socioculturais e, também pela sua própria crença e cultura. Ele é um contador de histórias, e essas mexem com sentimentos, com emoções, com perdas e alegrias, e quem as ouve acaba interferindo quando faz a re-interpretação dos significados. Como a

narrativa depende de quem a produz e para quem ela se destina, acaba sempre sendo um processo cultural. Acreditamos, assim,

[...] que o sentido do que somos depende das histórias que contamos e das que contamos a nós mesmos [...], em particular das construções narrativas nas quais cada um de nós é, ao mesmo tempo, o autor, o narrador e o personagem principal. (LARROSA *apud* CUNHA, 1997, p.17)

Giroux e McLaren, citados por Cunha (1997), também reforçam a importância das experiências de cada uma das pessoas.

Apenas quando podemos nomear nossas experiências — dar voz a nosso próprio mundo e afirmar a nós mesmo como agentes sociais ativos, com vontade de um propósito — podemos começar a transformar o significado daquelas experiências, ao examinar criticamente os pressupostos sobre os quais elas estão construídas. (GIROUX; MCLAREN *apud* CUNHA, 1997, p.12)

Desse modo, apresentaremos a seguir, alguns depoimentos das alunas, sujeitos da pesquisa, sobre a trajetória escolar, no que tange à Matemática e, em particular, à Geometria.

4.2 AS NARRATIVAS

Iniciamos as narrativas das alunas, descrevendo como ocorreu a formação matemática de cada uma delas.

Luísa: Comecei a estudar geometria, desde que eu me lembro, na 7ª série do Ensino Fundamental. As aulas eram poucas, quase nunca estudávamos. O professor deve ter dado, no máximo, 5,6 aulas durante o ano. As aulas abordavam o teorema de Pitágoras apenas, tinha muita dificuldade para me concentrar na aula, não suportava o professor. Foi a partir da 7ª série que meu rendimento em Matemática começou a cair e então todo bimestre eu pegava recuperação, mesmo por poucos pontos. Tudo foi ficando mais difícil; pois, para aprender uma matéria, era necessária a recordação de outra. Fui “empurrando com a barriga” até hoje por julgar desnecessário o uso da matéria na minha faculdade e na minha vida profissional.

Sofia: A minha dificuldade na matemática começou na 4ª série pois tinha uma professora que não sabia lidar com as minhas limitações. Então isso fez bloquear um pouco a minha mente. Quando fui para a 5ª série, em outro colégio particular, a dificuldade continuou, ainda mais que era um colégio grande, novo, mais puxado que o anterior, só que por eu ser meio quieta

nunca tirei minhas dúvidas. Então eu comecei a pegar recuperação e até mesmo dependência e por aí a dificuldade se estende até hoje. Isso afetou não só a matemática como a área de exatas. No caso da geometria a primeira vez que estudei foi na 8ª série, que cursei em outro colégio particular. Só que embora fosse 8ª série, tinha duas matemáticas, uma era a parte da álgebra e a outra era de geometria. Só que eu nunca levei a geometria a sério, o que para mim está sendo novidade neste ano.

Antonietta: Quando passei fui para um colégio, onde aconteceu um trauma que mudou a minha vida. O trauma começou na 3ª série, com a minha professora de matemática. Eu lembro como se fosse ontem, eu ia de van, e sentia medo de ir para o colégio, passava mal dentro da van. Não era fingimento não, passava muito mal, e tinha que voltar para casa. Quando eu ia para o colégio, morria de medo da aula dela. Lembro que eu tinha num certo dia, 2 aulas seguidas dela, eram as primeiras aulas, e ela buscava a gente no pátio. E não era só eu que não gostava dela não, mais acho que era a que mais sofria, tanto que uma mãe de um aluno conseguiu retirá-la do colégio. A partir daí, tive trauma com matemática, me travou, não tinha prazer de estudar, tinha medo de matemática, de ir à aula. Tudo que se relacionava à matemática para mim era muito difícil.

Quanto à geometria, não me lembro ao certo a série em que comecei a estudar. Deve ser 6 ou 7 série. Conseguia me virar, alguns testes eram em dupla, então conseguia uma nota boa, mas nunca entendi muito bem assim, confesso, o triângulo do seno, cosseno, tangente, mais dava meus pulos, e enfim conseguia minha média, ou um pouco acima, 6. Como não tinha prazer em matemática, deixava de lado a matemática, principalmente na oitava série e no primeiro ano, sempre fazia apoio, em aula particular. Também nunca tive sorte com professoras, uma assistia novela, e sempre corria atrás, mas nunca conseguia os meus 60, na recuperação e isso me desanimava cada bimestre. Sinceridade, eu não sei o que eu faço, estudo muito mesmo e não consigo sucesso. Sabe o que me dá vontade de fazer? É não estudar, porque não iria mudar muita coisa; porque no segundo bimestre, estudei muito mesmo, fiz uns 300 exercícios de geometria e tirei 60, teria que tirar uns 75 a 80, e não 60, mas fiquei feliz por que recuperei. Mas se você vê o que está acontecendo comigo eu agradeço porque eu sinceramente não sei, porque eu estudo, eu tenho até medo de não conseguir passar na prova final por causa da minha cabeça por que vai estar nela gritando "Antonietta, você tem que passar direto". E eu sei que isso vai me prejudicar muito mesmo, isso não aconteceu no primeiro ano, pois saberia que iria continuar lá, e por vários outros motivos, sei que isso está pesando muito na minha cabeça... e também tenho muito medo de não conseguir passar no vestibular, porque não mando bem em exatas, e meu sonho de verdade passar em medicina, choro muito por causa disso também, pois não vou fazer em faculdade particular e sim em faculdade federal, então é muito difícil ☹ ...mas isso não é muito o assunto daqui.

Vitória: Não apresentou o depoimento.

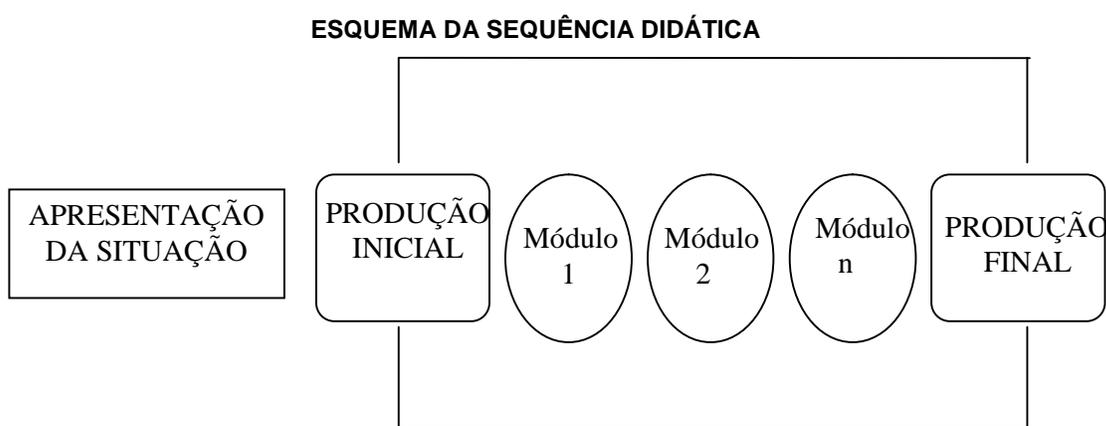
4.3 O TRABALHO DE CAMPO

Como já foi mencionado, a metodologia de pesquisa utilizada para o desenvolvimento dessa proposta é a Engenharia Didática. Vale ressaltar que nenhum trabalho de revisão quanto

aos conteúdos de geometria foram realizados com as quatro alunas, sujeitos da pesquisa, para o desenvolvimento da sequência didática.

De acordo com Souza e outros (2010), no contexto da prática escolar, entendemos que uma sequência didática é uma proposta na qual é desenvolvida um conjunto de atividades, com a presença do professor/pesquisador e do estudante, que se inicia com uma apresentação, por parte do professor, e finaliza com uma produção, por parte do estudante, como podemos observar no esquema pelos autores, Figura 1.

Figura 1 – Esquema de uma Sequência didática



Fonte: ROJO; GLAÍS, 2004 apud SOUZA et al. 2010, p.4

O uso da sequência didática tem, como função primordial, facilitar o entendimento sobre os objetos de estudo e ajudar o professor/pesquisador a organizar, coerente e adequadamente, a utilização do objeto de estudo em sua amplitude.

Na apresentação inicial da sequência didática o aluno é informado pelo professor de todas as atividades que serão desenvolvidas. Neste momento, o professor deve ser claro, informando ao aluno onde está inserido e para quê, e colocá-lo como agente produtor. Após a apresentação, deve ser pedida uma produção inicial ao aluno que servirá de quantificador/avaliador. Essa produção inicial é importante caso o professor tenha alguma dúvida na apresentação inicial e é um sinalizador; pois é a partir desse material que o professor irá modelar a sequência didática às necessidades encontradas no aluno, nos encontros. Nos encontros, serão utilizados exercícios relacionados ao problema a ser trabalhado e toda análise das atividades desenvolvidas, as quais devem se pautar pela produção do aluno e, na última etapa, pede-se a produção final, atividade aplicada na fase da análise *a posteriori* da metodologia desta investigação, sendo então, momento oportuno para a validação dos conceitos geométricos.

Uma sequência didática é considerada também um processo de essencial importância no ensino e na aprendizagem, pois interagem elementos como professor-aluno- objeto de estudo possibilitando mudanças na prática escolar do docente. Desse modo,

Tal interação possibilita uma mudança de práxis docente, bem como um novo olhar do aluno sobre seu papel no mundo. Nada melhor do que utilizar os recursos da sequência didática, uma das vertentes do Interacionismo Sócio-Discursivo que se detém na avaliação da prática do professor em sala de aula e também desenvolve pesquisas e materiais metodológicos, destinados aos docentes, que possam vir a suprir algumas necessidades do ensino [...]. (SOUZA et al, 2010, p.5)

Nessa perspectiva, buscaremos desenvolver nossas atividades trabalhadas nos encontros de forma a contribuir para o desenvolvimento das habilidades das alunas no que tange aos conceitos geométricos e na *práxis* do professor / pesquisador.

A sequência didática de nossa investigação consiste em atividades desenvolvidas em 7 encontros, com duração de 1 hora cada, todas as quartas-feiras às 14 horas. Esse dia foi escolhido pelo fato de, em todas quartas-feiras, as alunas terem uma hora de intervalo entre a aula de inglês e o laboratório, no contra-turno. Esses encontros só começaram a acontecer após as alunas terem tirado fotos de objetos tridimensionais.

Cada um desses encontros tinha um objetivo diferente como mostra o Quadro 1.

Quadro 1 – Objetivos dos encontros

ENCONTRO	OBJETIVO
ENCONTRO 1	- Apresentação das fotos tiradas pelas alunas - separação das fotos em dois grupos: poliedros e corpos redondos.
ENCONTRO 2	- reprodução das figuras que eles tiraram fotos, em massinha de modelar.
ENCONTRO 3	- escolher, entre as figuras modeladas, aquelas que pareciam com os sólidos estudados, nomeando e justificando o porquê daquela nomeação.
	- Reprodução dos sólidos, usando material

ENCONTRO 4	geokit (composto por canudos e hastes de metal)
ENCONTRO 5	- cobertura dos sólidos com papel, cartolina, usando a menor quantidade possível.
ENCONTRO 6	- Comparação com sólidos semelhantes - planificação dos sólidos, riscando em uma folha.
ENCONTRO 7 (1 hora)	Entrega de um paralelepípedo construído a partir de um molde e relatos das dificuldades

Fonte: Dados da pesquisa

Para melhor organização das atividades, as alunas recebiam as tarefas a serem executadas na hora do encontro. Em todos os encontros procuramos não interferir e apenas observar e anotar todos os procedimentos e comentários colocados pelas alunas.

Apresentaremos, a seguir, as análises *a priori* da sequência didática. Essas, de acordo com a Engenharia Didática, mostram nossas expectativas quanto aos conhecimentos apresentados pelas alunas e serão formuladas a partir das habilidades desenvolvidas em cada encontro, de acordo com o tipo e o grau de informação passada às alunas.

Antes de acontecerem os encontro, foi solicitado às alunas que tirassem fotos de figuras tridimensionais com o objetivo de verificarmos se elas visualizavam, em seu dia a dia, sólidos estudados, e se elas sabiam o significado de tridimensional. Todas as atividades relacionadas à sequência didática seriam desenvolvidas a partir dessas fotos. Esse momento, segundo Brousseau (2007), é uma produção livre do estudante em suas relações com um meio adidático, em que ocorre uma produção pessoal, sendo capaz de tomar as suas decisões sem a interferência de alguém. Na década de 1970, essa situação que não leva em conta o papel do professor era chamada de adidática. Hoje qualquer situação que leva o estudante a uma atividade matemática é chamada de situação matemática.

4.3.1 Fase da Experimentação

Nesta seção, trataremos da pesquisa em si, relatando os procedimentos realizados com os sujeitos, de acordo com a fundamentação teórica e metodológica expostas anteriormente. Vale ainda ressaltar que o objeto matemático dessa investigação faz parte da Geometria.

Segundo Rancan e Giraffa (2012), quando a Geometria é trabalhada com atividades em que o aluno participa de forma direta, ela possibilita o desenvolvimento de competências como:

[...] as de experimentar, representar e argumentar, além de instigar a imaginação e a criatividade. A utilização de materiais diversificados que demonstram visualmente a aplicabilidade dos teoremas relacionados aos conteúdos geométricos faz com que haja o favorecimento da participação plena, bem como estimula o senso exploratório dos estudantes, componente relevante ao seu aprendizado. A recorrência à manipulação de materiais faz com que a geometria se torne propícia a um ensino baseado na realização de descobertas e na resolução de problemas. (RANCAN; GIRAFFA, 2012, p.4)

Seguindo essa direção, propusemo-nos a averiguar o desenvolvimento dessas competências relativo aos conhecimentos geométricos adquiridos, ou a adquirir, pelas alunas que fazem parte dessa investigação.

Vejamos, a seguir, algumas das fotos tiradas pelas alunas, em um momento adidático:

Fotos de Sofia

Apesar da solicitação de fotografar objetos, parece que a Sofia buscou fotografias prontas e disponibilizou catorze delas em sua máquina, tais como, por exemplo, nas Figuras, 2, 3, 4, 5 e 6.

Figura 2 – Foto 1 de Sofia

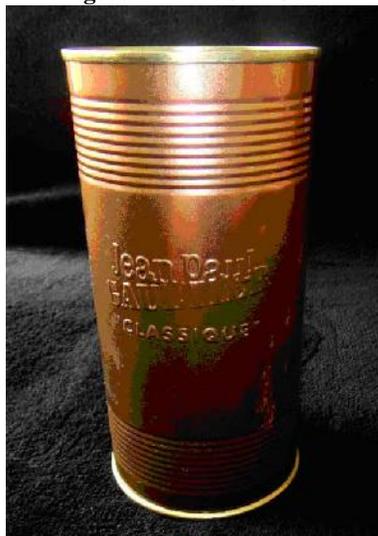


Fonte: Dados da pesquisa

Figura 3 – Foto 2 de Sofia

Fonte: Dados da pesquisa

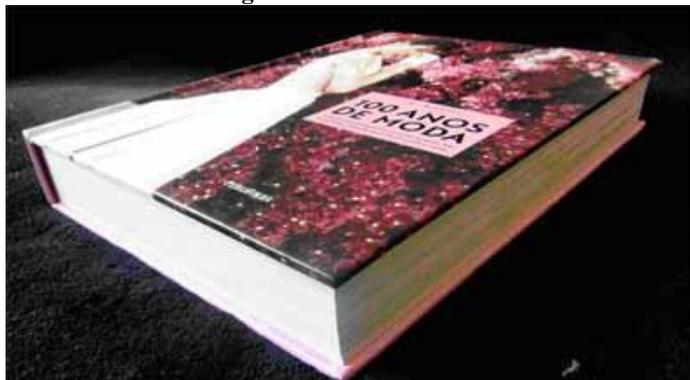
Essas fotos, Figuras 2 e 3, selecionadas parecem não se identificar com nenhuma figura geométrica trabalhada em sala de aula, e sim, que a aluna buscou algo que lembrasse as figuras desenhadas no quadro. A Figura 2 lembra os sólidos desenhados, usando as arestas como destaque para dar uma perspectiva tridimensional e, as gotas, Figura 3, indicaram uma leve semelhança com as esferas esboçadas na lousa, demonstrando dessa forma, que a aluna conseguiu identificar nessas figuras semelhança com as que foram trabalhadas em sala.

Figura 4 – Foto 3 de Sofia

Fonte: Dados da pesquisa

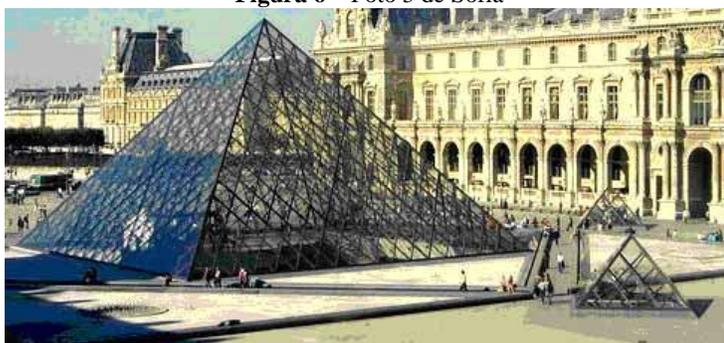
No caso da Figura 4, o objeto indica a ideia de tronco de cone e, para a pesquisadora, a partir da convivência com a aluna, não ocorreu o reconhecimento do objeto matemático por parte de Sofia e, sim, apenas como uma figura tridimensional.

Figura 5 – Foto 4 de Sofia



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 6 – Foto 5 de Sofia



Fonte: Dados da pesquisa

As Figuras 5 e 6, escolhidas pela Sofia, contemplaram a nossa expectativa quanto ao reconhecimento dos sólidos geométricos explorados em sala de aula: o prisma e a pirâmide. Isso se deve ao fato de essas figuras serem abordadas desde os anos iniciais do Ensino Fundamental.

Fotos de Luíza

Quando foi solicitada a atividade de tirar fotos de figuras tridimensionais, Luíza se sentiu muito insegura, demonstrando receio de não conseguir executar a tarefa proposta.

Figura 7 – Foto 1 de Luíza

Fonte: Dados da pesquisa

Diante disso, a foto dos pássaros, Figura 7, em particular, despertou nossa curiosidade, para sabermos se Luíza identificara, ou não, nessa figura, algum sólido geométrico trabalhado em sala de aula, ou se não houve essa relação e, apenas considerou a figura como tridimensional. Após alguns encontros, Luíza nos informou que as cabeças dos pássaros foram relacionadas à esfera, justificando pelo fato de serem arredondadas.

Figura 8 – Foto 2 de Luíza

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 9 – Foto 3 de Luíza

Fonte: Dados da pesquisa

Quanto ao relógio, Figura 8; e à bolsa, Figura 9, Luíza mostrou ter compreendido o significado de figuras tridimensionais, mas parece que se confundiu quando buscou relacioná-las aos sólidos geométricos estudados em sala de aula, pois considerou o relógio como sendo uma circunferência e a bolsa, como um cilindro, por possuir um arredondamento na parte lateral.

Nas próximas Figuras 10, 11, 12 e 13, Luíza apresentou figuras geométricas trabalhadas em sala de aula; o vaso que possui a forma de um tronco de pirâmide, as torres do castelo que possuem a forma de um cone e e, por último, a caixa e o notebook com o formato de um prisma.

Figura 10 – Foto 4 de Luíza

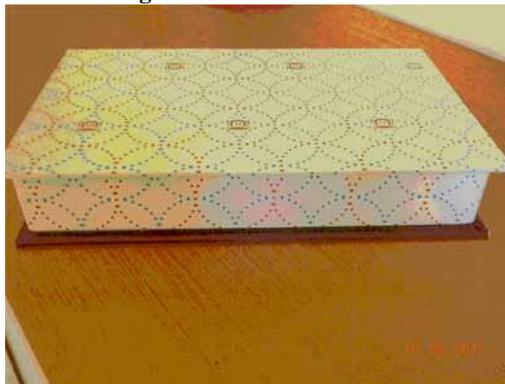


Fonte: Dados da pesquisa

Figura 11 – Foto 5 de Luíza



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 12 – Foto 6 de Luíza

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 13 – Foto 7 de Luíza

Fonte: Dados da pesquisa

Enfim, observamos que as fotos apresentadas por Luíza atenderam as nossas expectativas quanto ao reconhecimento de figuras tridimensionais, mas constatamos que ela não consegue associar o nome ao objeto, como, por exemplo, no caso do relógio, em que se transmite a ideia de um cilindro, ela o nomeia de circunferência. Isso mostra que o conhecimento geométrico de Luíza está comprometido.

Esses momentos foram caracterizados como situações adidáticas, conforme defende Almouloud (2007, p.33), já que “é uma situação na qual a intenção de ensinar não é revelada

ao aprendiz, mas foi imaginada, planejada e construída pelo professor para proporcionar a este condições favoráveis para a apropriação do novo saber que deseja ensinar”.

Fotos de Antonieta

Antonieta apesar de ter gostado muito da tarefa, foi a aluna que mais demorou para apresentar as fotos. Acreditamos que essa demora é devido a sua insegurança quanto à disciplina de Matemática. Segundo a aluna, ela teve medo pela possibilidade de não ter conseguido tirar fotos de figuras que correspondessem ao que lhe fora solicitado.

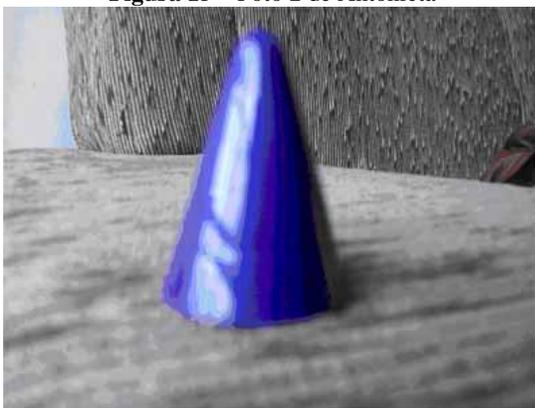
Ao analisarmos as fotos tiradas por Antonieta, conseguimos diagnosticar que as Figuras 14, 15, 16, 17 e 18 têm a forma dos sólidos geométricos trabalhados em sala de aula como tronco de cone, cone, cilindro e esfera.

Figura 14 – Foto 1 de Antonieta



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 15 – Foto 2 de Antonieta



Fonte: dados da pesquisa

Figura 16 – Foto 3 de Antonieta



Fonte: dados da pesquisa

Figura 17 – Foto 4 de Antonieta



Fonte: dados da pesquisa

Figura 18 – Foto 5 de Antonieta



Fonte: dados da pesquisa

Figura 19 – Foto 6 de Antonieta



Fonte: dados da pesquisa

Quanto à Figura 19, não nos ficou claro o que levou a aluna a identificá-la como uma figura tridimensional, já que a mesma corresponde a uma figura plana, porém não convexa. Talvez sua dificuldade está em entender o significado de figuras tridimensionais.

Brousseau (1986 apud ALMOULOU, 2007) diz que uma das características de uma situação *adidática* é quando o aluno optar por um problema, com o intuito de adquirir novos conhecimentos, justificados pela lógica interna da situação, podendo ser construído sem o apelo às razões didáticas, isto é, quando ele aprende por uma necessidade própria sem a cobrança, ao menos aparente, do professor ou da escola. Nesse sentido, parece que a escolha da Figura 19 pela Antonieta seguiu a lógica interna da situação de uma figura não convexa associada a um sólido tridimensional.

Fotos de Vitória

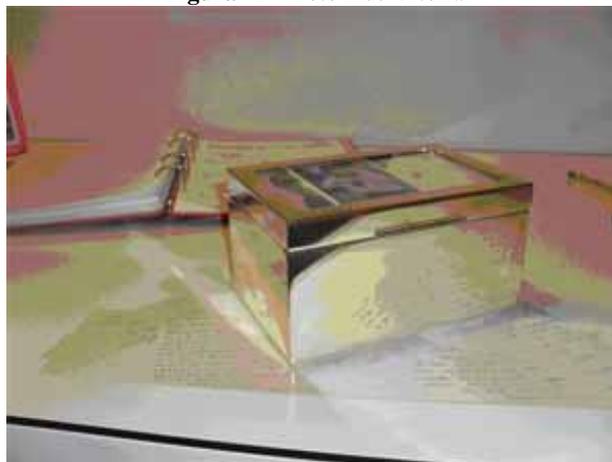
Vitória se mostrou muito entusiasmada com a atividade solicitada e, em nenhum momento colocou dificuldades em executá-la. Conseguimos diagnosticar, após as análises das fotos, que ficou muito claro para ela o significado de figura tridimensional, tal como mostram as fotos referentes às Figuras 20, 21, 22 e 23. Essas fotos apresentam formas semelhantes aos sólidos trabalhados em sala de aula, entre elas, prisma e cilindro.

Figura 20 – Foto 1 de Vitória



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 21 – Foto 2 de Vitória



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 22 – Foto 5 de Vitória

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 23 – Foto 6 de Vitória

Fonte: Dados da pesquisa

No entanto, as Figuras 24 e 25 não condizem com o argumento defendido por nós, já que não estão associadas a nenhum sólido geométrico abordado em uma situação didática. Observamos que Vitória pode ter associado a Figura 24 ao corpo humano, que é tridimensional e, no caso da Figura 25, o telefone em forma de sapato também lhe dá essa mesma ideia.

Figura 24 – Foto 3 de Vitória



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 25 – Foto 4 de Vitória



Fonte: Dados da pesquisa

Nesse momento, chamado de produção livre das alunas, elas demonstraram conhecimento em relação ao conteúdo desenvolvido em sala de aula, nas articulações que ocorre em um meio adidático, tal qual relata Brousseau (2008):

Entendemos como “produção livre” toda resposta dada a um meio regida pelo sentido, isto é, pelo que o aluno é capaz de interpor a seus condicionamentos - externo e internos – e as suas decisões. Isso envolve sua possibilidade atual, e não apenas potencial de escolher entre vários

caminhos, por razões “intelectuais”, o que implica também uma produção pessoal. Um “meio adidático” é a imagem na relação didática do meio exterior ao ensino em si, ou seja, desprovido de interações e pressupostos didáticos. Um meio adidático possui um modelo não-didático. (BROUSSEAU, 2008, p.89)

Na próxima seção, apresentaremos o desenrolar da sequência didática organizada em sete encontros e as *análises a posteriori*.

4.3.2 O Desenrolar dos Sete Encontros e as Análises *a Posteriori*.

Nos encontros que ocorreram às quartas-feiras, as alunas Sofia, Antonieta e Luíza participaram, ao mesmo tempo de todas as atividades, trabalhando individualmente. Por motivo de horário, disponibilidade e até mesmo atenção Vitória participou sozinha de todos os encontros. Sobre a rotina do trabalho, as alunas recebiam as orientações das atividades no início do encontro. Ficou acertado que uma atividade só poderia começar após o término da outra e que, no final de cada atividade, elas deveriam registrar o que acharam da mesma.

A dinâmica dos encontros nos proporcionou tirar fotos dos trabalhos realizados e registrar as atitudes, procedimentos e comentários das alunas. Por outro lado, os registros e as fotos dos objetos produzidos pelas alunas fazem parte do material utilizado na *análise a posteriori*, que também corresponde à parte experimental da pesquisa, de modo que “[...] atinja a realidade da produção dos alunos, quando possível, desvelando seus procedimentos de raciocínio.” (PAIS, 2002, p.103)

Após os encontros, foi aplicada uma atividade com duas questões, envolvendo sólidos geométricos, para a validação dos resultados, é obtida a partir da confrontação entre os dados obtidos na *análise a priori* e *a posteriori*.

4.3.2.1 Análise *a posteriori* do Encontro 1

No primeiro encontro, foi solicitado às alunas que separassem as fotos apresentadas em dois grupos: poliedros e corpos redondos e que ficassem atentas às particularidades de cada grupo. Em seguida, elas deveriam justificar, por escrito, o porquê da classificação. Nosso objetivo com essa atividade era explorar todo o conhecimento e conceitos que as alunas traziam a respeito de poliedros e corpos redondos .

Ritter (2011) considera que o processo cognitivo é constituído por três fases: a visualização, a construção e o raciocínio, que estão interligadas e são necessárias no processo

cognitivo para a aprendizagem da Geometria. Ele considera que existem alguns tipos de apreensão do conhecimento como no seguinte exemplo: quando interpretamos as formas de uma figura, estamos explorando a apreensão perceptiva e indo ao encontro desse pensamento, podemos considerar que essas alunas comparam e nomeiam as figuras de acordo com o que eles estão visualizando, baseadas na sua visualização geral.

Em um primeiro momento, as alunas demonstraram um pouco de restrição em classificar as figuras em poliedros ou corpos redondos e, também, ficaram um pouco receosas em justificar por escrito o que entendiam por cada um desses elementos, mas, logo começaram a executar a tarefa proposta, cada uma no seu tempo e do seu jeito.

Sofia foi a primeira a classificar as figuras. Ela considerou as Figuras 2 e 3 como corpos redondos e as Figuras 1, 4 e 5 como poliedros e justificou o seguinte:

“Classifiquei, em corpo redondo, as imagens que me lembravam algo circular ou redondo. As imagens de poliedro classifiquei-as baseando em imagens que me lembravam figuras geométricas como quadrado, retângulo e triângulo.

A figura de número 5 eu classifico como um poliedro, por ser maciço e retângulo, a figura de número 6 é um poliedro triangular, classifiquei por ser um maciço em forma de pirâmide, a figura de número 3 é uma esfera redonda, porque me lembra a um círculo, figura de número 4 são um cilindro porque me lembra a uma lata de óleo.”

Já Luíza, ficou um bom tempo apenas observando as figuras e relutou muito em escrever o que é um poliedro, apresentou sinais de dificuldades em diferenciar uma figura da outra. Estávamos ansiosos em saber se ela colocaria a fotografia dos pássaros, Figura 6, em algum grupo ou deixaria de lado. Quando ela classificou os pássaros em corpos redondos, perguntamos o porquê dessa classificação. Daí, ela respondeu: “O pássaro é um corpo redondo porque a cabeça parece uma esfera.”

Luíza considerou as figuras 7, 8 e 9 como corpos redondos e as Figuras 10, 11, 12 e 13 como poliedros e justificou essa classificação da seguinte forma:

“As imagens das figuras 7, 8 e 9 são classificadas como corpos redondos, porque em algum lugar da figura, tem uma parte redonda ou até mesmo cilíndrica e, no corpo redondo, não tem como calcular, por exemplo, área lateral, então classificamos como sendo um corpo redond. As imagens poliédricas têm vários lados, vértices e arestas, áreas laterais, ou seja, com isso podemos formar várias figuras geométricas.”

Esse registro de Luíza indicou que ocorreu uma associação entre a medida da área e as figuras poligonais, não se apropriando das medidas que se podem extrair dos corpos redondos

e seguiu dizendo: *“Figura 9: cilindro; pois, pela figura 2, só daria para calcular a área lateral, total, e sua altura. Figura 11: esfera, só dá para calcular a área da superfície.”*

Interessante notar que a mesma aluna reconheceu que é possível calcular a medida da área da superfície esférica. Na verdade, seu equívoco incide na identificação de cone, no qual chama de esfera. Em seguida, ela seguiu comentando sobre a caixa, em forma de prisma reto-retangular, Figura 12, dizendo que a *“parte inferior é um retângulo em que se pode calcular base, arestas, vértices e todas as suas áreas.”* Já no caso da Figura 10, identifica como um *“retângulo oblíquo, em que se pode calcular suas áreas.”* Nesse caso, a figura indica um vaso com planta de base na forma de tronco de uma pirâmide quadrangular, quando supôs poder calcular as mediadas das áreas. No caso da Figura 13, o *notebook*, ela diz que: *“no quadrado se dá a mesma explicação da figura 12.”* E, para a Figura 8, Luíza não exprime nenhuma opinião sobre o relógio rosa e, em contrapartida, ela demonstra interesse em dizer que, na Figura 7, uma *“cabeça do ‘pássaro’ é uma esfera em que se pode calcular a sua área da superfície.”*

Antonieta mais uma vez relutou muito em justificar o porquê de ser corpo redondo e poliedros; ela estava com medo de errar e, por isso, não queria escrever, apenas pediu para nomear as figuras. Ela classificou, como corpos redondos, as Figuras 15, 16, 17 e 18 e, como poliedros, as figuras 14 e 19.

Em seu depoimento para a Figura 15, ela identifica que é um cone e diz: *“[...] que da para calcular sua altura, área lateral, área total.”* Na figura 16, um balde que lembra a forma de um tronco de um cone, ela usa a mesma justificativa da figura anterior, dizendo: *“[...] é um cilindro, pois também dá para calcular a altura, a área lateral, a área total, e seu volume.”* No entanto, há um equívoco na nomeação das figuras, já que, na Figura 17, um copo cilíndrico, identifica como *“[...] tronco de cone, que tem uma formula que da pra retirar todas as questões que estão a cima.”*

Na Figura 18, bolas de gude, Antonieta consegue reconhecer que *“é uma esfera pois dá para calcular sua área da superfície, sua área lateral.”* No tocante a “poliedros”, ela simplesmente não emite nenhum comentário.

Antonieta analisou a Figura 14 e não a identificou como um tronco de cone e, sim, uma *“[...] pirâmide pois você consegue calcular tudo, sua área, área lateral, área total.”* E, no caso da Figura 19, que parece advinda de um “origami”, ela associa a *“[...] um hexaedro, pois tem sua aresta, seu lado, seu vértice, possuir 6 lados.”*

Segundo o depoimento de Antonieta, na fase da experimentação, quando analisamos as concepções das alunas, considerando os pressupostos da Engenharia Didática, ela já dizia,

com desdém, que a Matemática e a Geometria eram partes inalcançáveis, pois tudo era visto com muita dificuldade. Nessa direção, Almouloud (2007) diz tratar-se de “obstáculos psicológicos” que aparecem:

[...] quando a aprendizagem contradiz as representações profundas do sujeito, ou quando induz uma desestabilização inaceitável, como, por exemplo, [...] as condições psicológicas nas quais um aluno aborda uma nova noção determinarão a utilização dessa noção na resolução de problemas. [...] (ALMOULOU, 2007, p.144)

Assim, constatamos que esses obstáculos ainda se encontram presentes na aprendizagem dos sólidos geométricos por Antonieta.

No caso da Vitória, constatamos uma limitação em classificar as figuras, pelo fato de ela possuir a área cognitiva da memória comprometida, não identificando as questões conceituais de poliedros e de corpos redondos. No entanto, ela realizou a tarefa sem pedir auxílio, sendo bem sucinta em sua justificativa. Vitória por sua vez classificou as figuras 22 e 24 como corpos redondos e as figuras 20, 21, 23 e 25 como poliedros. Suas justificativas quanto à classificação foram:

CORPO REDONDO: Figuras: 22 e 24

Justificativa: Pois esses objetos não possuem altura, largura e nem comprimento, a forma deles não é definida.

POLIEDROS : Figuras: 20, 21, 23 e 25

Justificativa: Pois esses objetos possuem altura, largura, comprimento e volume. A forma deles é muito bem definida. Possuem vários lados.

No caso da Vitória, como há um laudo médico que sustenta seu diagnóstico, as avaliações em Matemática foram conduzidas de forma que o tempo de realização foi ampliado. Além disso, as tarefas também eram diferenciadas em relação a sua turma, conforme pode ser contatado nos Anexos 1 e 2, sendo a primeira, tarefa da turma e, a segunda, de Vitória. Como essa investigação não tem o foco na avaliação, deter-nos-emos apenas em apresentá-las, podendo ser mais bem discutida em outro momento.

Após as análises dos depoimentos, podemos observar que todas as participantes relacionaram as figuras que possuíam faces poligonais a poliedros e as figuras que apresentavam formas circulares a corpos redondos, sem ao menos falar a respeito das secções e apenas observando as faces. Talvez, para essa classificação, elas tinham recorrido a

lembranças de figuras similares trabalhadas em sala de aula. A princípio, elas perceberam a figura como um todo e, em seguida, para justificar suas classificações, fizeram uso de particularidades e semelhanças ou diferenças.

Suas limitações em reconhecerem as figuras como corpo redondo ou poliedro não se resumem apenas à visualização, mas também aos conceitos e às propriedades dos sólidos geométricos, reforçando, assim, o fato de que os estudantes confundam o objeto matemático com a sua representação. Em contrapartida, Pais (2000, p.8) defende que “[...] a construção dos conceitos geométricos pode ser dificultada ou obstruída por concepções predominantes no imaginário cognitivo e muitas delas possivelmente originadas tanto em relação ao uso de desenhos como de materiais concretos.”

Observamos que as estudantes tiveram restrições em classificar as figuras quando apresentavam configuração ou posições diferenciadas daquela abordada em sala de aula. Se a figura apresentava perspectiva de volume ou de profundidade, permitia que as estudantes visualizassem uma figura tridimensional em uma representação plana.

Segundo Pais (2001), realizar uma leitura não é, às vezes, uma atividade evidente, pois as figuras podem apresentar uma perspectiva que não possibilita ao estudante buscar as suas particularidades, dificultando a compreensão das propriedades dos sólidos geométricos. Essa descrição confirma a classificação dada pela Antonieta, quando identificou a Figura 19 como um prisma hexagonal.

Assim, nos estudos de Baldy (1987 apud PAIS, 2001), comprovou-se que o desenho pode ser um elemento dificultador para a aprendizagem da Geometria, dando indícios para a existência de obstáculos de natureza didática. Nessa perspectiva, o papel professor deve ser destacado.

4.3.2.2 Análise *a posteriori* do Encontro 2

Nesse encontro, as alunas reproduziram as figuras das fotos usando massinhas de modelar. Procuramos trabalhar a percepção, a construção e a representação das figuras tridimensionais informalmente, apenas fazendo uso de um material já usado por todas nos anos iniciais do Ensino Fundamental e fundamentamos nas ideias de Racan e Giraffa (2012), quando defendem que:

Ao vivenciar situações com os objetos do espaço em que vive que, desde criança, é que o aluno vai construir conhecimentos e estabelecer relações,

apropriando-se das características dos mesmos. Proporcionando ao aluno tal vivência, portanto, estaremos possibilitando a ele localizar-se e orientar-se. [...] pode-se afirmar que, no ensino da Geometria, é importante basear o processo de aprender, principalmente, em atividades empíricas, com observação, manipulação e representação de objetos concretos, além de atividades de sistematização, com definições, conceitos, nomenclaturas, propriedades, teoremas e axiomas. (RANCAN; GIRAFFA, 2012, p.15-27)

Foi incrível como o uso desse material proporcionou um momento de prazer, alegria e satisfação para as estudantes, remetendo-as aos primeiros anos de sua escolaridade. Foi possível, durante o desenvolvimento dessa tarefa, verificarmos as particularidades de cada uma e suas percepções geométricas.

Luíza, que está voltada para as áreas de artes e *design*, foi a que mais demonstrou satisfação e logo começou a reproduzir as figuras com massinha, sem apresentar dificuldade e com muita técnica e padrão. Demonstrou uma grande memória visual; pois, apenas uma vez, recorreu ao arquivo de imagens para modelar uma figura. Sua agilidade e segurança ao reproduzir as figuras na massinha de modelar, demonstrou possuir uma grande percepção¹ geométrica tridimensional.

Figura 26 – Modelagem de Luíza



Fonte: Dados da pesquisa

Esse momento ainda foi caracterizado como uma situação *adidática*, pelo fato de a pesquisadora não intervir. Contudo, vale ressaltar que a situação *adidática* é uma parte da situação didática, preconizada por Brousseau. Assim, identificamos esse momento também como uma situação de ação, já que há a interação entre a aluna e o meio (GÁLVEZ, 1996).

Sofia ficou um bom tempo apenas mexendo na massinha. Quando começou a modelar as figuras, apresentou muita dificuldade, demonstrando insegurança e timidez. Várias vezes se dirigiu ao arquivo de imagens, pois não conseguia lembrar das figuras e muitas vezes pediu ajuda à Luíza, que lhe mostrava como deveria fazer. Essa dificuldade apresentada por Sofia

nos mostrou a sua limitação em assimilar a ideia do objeto matemático, no que diz respeito a percepções das figuras tridimensionais.

Figura 27 – Modelagem de Sofia



Fonte: Dados da pesquisa

Antonieta ficou muito entusiasmada com a atividade e não apresentou dificuldades em modelar as figuras na massinha. A todo momento se mostrava muito interessada em estar desenvolvendo a atividade e perguntou por que essa atividade não foi aplicada na sala de aula. Antonieta não solicitou ajuda e não recorreu ao arquivo de figuras, demonstrando, dessa forma, uma grande memória visual e percepção geométrica na construção das figuras.

Figura 28 – Modelagem de Antonieta



Fonte: Dados da pesquisa

Vitória também demonstrou muita satisfação e argumentou que algumas figuras, como a caixa, seriam fáceis de construir; outras, como o telefone, ela não estava conseguindo representá-la na massinha, mas, mesmo assim, ela modelou todas as figuras. Algumas figuras modeladas por ela apresentavam apenas as arestas, outras um aglomerado de figuras planas, isso nos remete aos desenhos trabalhados em sala de aula na lousa, quando destacamos apenas as arestas nos poliedros, as geratrizes e o contorno da circunferência nos cones e o

contorno das esferas. Infelizmente, por motivos pessoais, a aluna Vitória não participou mais das atividades dessa investigação, não apresentou as modelagens para serem fotografadas, deixando-nos sem referência para análise e discussão final.

Nesse sentido, o trabalho apresentado pelas estudantes nos propiciou observar que algumas figuras modeladas não correspondiam às figuras apresentadas nas fotos. Elas reproduziram de acordo com suas perspectivas, modelaram os objetos de acordo com o que estavam vendo como, por exemplo, o caso Sofia, cujas figuras modeladas não apresentavam vértices, todas tinham formas arredondadas.

Segundo Lauro (2007), o filósofo chinês Chang Tung-Sun afirmou que existem dois tipos de conhecimento: o perceptivo – aquilo que pode ser tocado e percebido diretamente – e o conceitual – aquele que não pode ser verificado pelos sentidos e completa:

Pode-se observar que o conhecimento perceptivo não pode estar fora do conceitual, nem se pode separar o conceitual do perceptivo. Na realidade, todo conhecimento conceitual contém elementos perceptivos e vice-versa. A diferenciação entre os dois visa sempre às simples conveniências da análise. Eles não existem isoladamente. (SUN, 2000 apud LAURO, 2007, p.23)

Nesse contexto, averiguamos o quanto o perceptivo interferiu na apropriação do conceito geométrico, tal qual será apresentado posteriormente.

4.3.2.3 Análise *a posteriori* do Encontro 3

Nesse encontro, as alunas tiveram que escolher entre as figuras modeladas com massinha, uma para ser construída com o material *geokit* (composto por canudos e hastes para montagem dos sólidos) e nomear o sólido escolhido. Essa reprodução mais uma vez foi sem a intervenção da pesquisadora, caracterizando-se assim, um momento *adidático*.

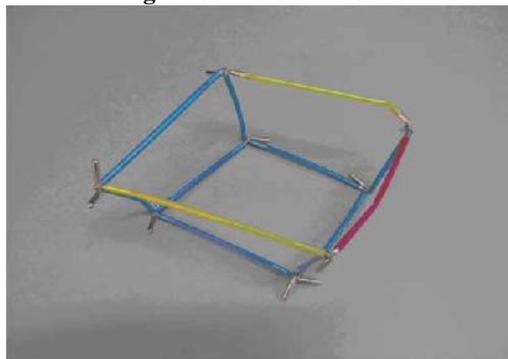
Todas escolheram o prisma reto-retângulo para construir e isso pode ser devido ao fato de ser o sólido mais trabalhado durante toda a sua vida escolar até o momento, 2ª série do Ensino Médio. Durante o desenvolvimento da atividade, percebemos que as estudantes não se preocuparam em identificar quais as arestas teriam que ter o mesmo tamanho. Elas foram encaixando os canudos nas hastes até perceberem que não conseguiam uma simetria; elas diziam que tudo estava torto, Figura 29; começaram, então, a aparar os canudos de forma que os mesmos em paralelos ficassem todos com o mesmo tamanho. Essa atividade foi bem proveitosa para elas, que se sentiram motivadas em construir os sólidos.

Figura 29 – Hastes de Luíza

Fonte: Dados da pesquisa

Luíza rapidamente sentou e escolheu o prisma reto-retângulo para trabalhar com o novo material, pois ela disse que o paralelepípedo era mais fácil e, depois, enquanto aguardava as demais, construiu uma pirâmide triangular.

Sofia ficou um bom tempo em frente às figuras para selecionar e acabou por optar por um paralelepípedo reto-retângulo. Diferente de Luíza, apresentou muita dificuldade em nomear a figura e pediu ajuda à pesquisadora; que, por sua vez, deu algumas dicas para acalmar a estudante. Sofia não conseguia visualizar que as arestas paralelas do paralelepípedo são todas com a mesma medida, e quase desistiu de completar a atividade. Nesse momento, a pesquisadora teve que intervir, lembrando alguns conceitos geométricos de modo que ela prosseguisse na montagem do sólido, tal como apresentado na Figura 30.

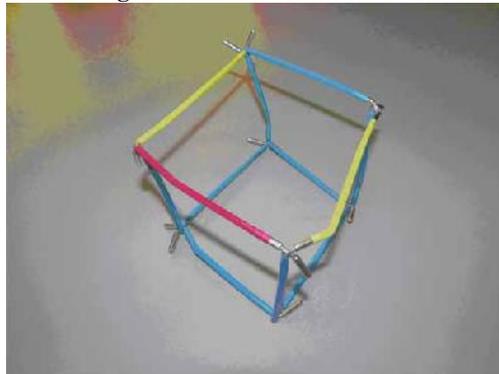
Figura 30 – Hastes de Sofia

Fonte: Dados da pesquisa

Antonieta, a princípio, não quis nomear o sólido; mas, logo em seguida, demonstrou muita alegria em estar conseguindo desenvolver a atividade. Sua opção também foi pelo paralelepípedo reto-retângulo, ao qual nomeou de hexaedro. Ao construir o paralelepípedo,

observou que o mesmo estava torto; mas, em seguida, cortou o comprimento de alguns canudos para fazer os devidos ajustes.

Figura 31 - Hastes de Antonieta



Fonte: Dados da pesquisa

Vitória, não participou dessa atividade.

Mais uma vez observamos que as dificuldades das alunas em representar os sólidos geométricos, usando um material concreto, devem-se ao fato de elas não se apropriarem dos conceitos e das propriedades, envolvendo os respectivos sólidos. Isso nos remete mais uma vez ao pensamento do filósofo Chang Tung Sun, quando diz que o “conhecimento perceptivo não pode estar fora do conceitual, nem se pode separar o conceitual do perceptivo” (SUN, 2000 apud LAURO, 2007, p.23) e, além disso, compactuamos com Pais (2000) quando diz que:

O uso de materiais didáticos no ensino da geometria deve ser sempre acompanhado de uma reflexão pedagógica para que, evitando os riscos de permanência em um realismo ingênuo ou de um empirismo, contribua na construção do aspecto racional. Uma compreensão inicial pode induzir um aparente dualismo entre as condições concretas e particulares dos recursos didáticos em oposição às condições abstratas e gerais das noções geométricas. Mas esta dualidade não deve ser vista como pólos isolados do processo de construção conceitual, deve ser superada pela busca de um racionalismo aberto, dialogado e dialetizado. Em suma, devemos sempre estimular um constante vínculo entre a manipulação de materiais e situações significativas para o aluno. (PAIS, 2000, p.14)

Nessa direção, buscamos, gradativamente, construir os conceitos matemáticos envolvidos em todas as atividades propostas. Assim, a seguir, apresentaremos a análise *a posteriori* dos encontros 4 e 5, quando subjazem as ideias e os conceitos relacionados à superfície dos sólidos geométricos.

4.3.2.4 Análise *a posteriori* dos Encontros 4 e 5

Nesse encontro, foi solicitado que cada uma das alunas cobrisse o sólido que foi construído com o material *geokit* com cartolina, usando a menor quantidade possível. Buscamos, por meio dessa tarefa, verificar se as alunas tinham visualizado as faces que constituiriam o sólido por elas construído, chamando atenção para outros elementos dessa figura, tais como, arestas e vértices. Essa tarefa também proporcionou o desenvolvimento da visualização do objeto a partir de suas partes, o que nos remetem a Kaleff (2006 apud RANCAN; GIRAFFA, 2012) a respeito da ideia das operações mentais básicas necessárias para o desenvolvimento da habilidade de visualização, as quais são:

[...] identificar determinada figura plana, isolando-a dos demais elementos de um desenho; reconhecer que algumas propriedades de um objeto (real ou imaginário) são independentes das características físicas como tamanho, cor e textura; identificar um objeto ou desenho quando apresentado em diferentes posições; produzir imagens de um objeto, suas transformações e movimentos; relacionar um objeto a uma representação gráfica ou a uma imagem dele; relacionar vários objetos, representações gráficas ou imagens entre si; comparar vários objetos, suas representações gráficas ou suas imagens, à busca de identificação de regularidades e diferenças entre eles. (KALEFF, 2006 apud RANCAN; GIRAFFA, 2012, p.22)

Foi nos permitido observar, durante o desenvolvimento da tarefa solicitada às alunas, que cada uma procurou cobrir o sólido de um modo diferente. Luisa foi cortando, da cartolina, figuras correspondentes a cada face, colando-as no sólido, demonstrando dessa forma, visualização quanto aos polígonos que compõem as faces laterais, Figura 31. Ela foi bem cuidadosa colocando o sólido na folha e tirando moldes e, em seguida, colando; no entanto, por algum motivo ainda não discutido, ela arredondou as pontas, que são os vértices dos retângulos.

Figura 32 – Revestimento do Sólido de Luísa

Fonte: Dados da pesquisa

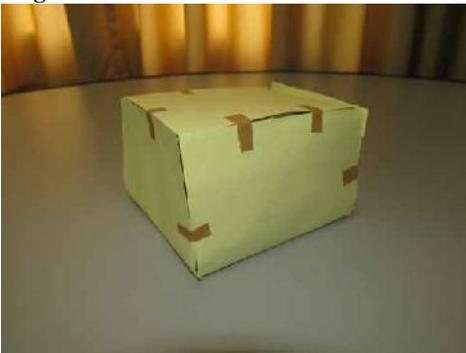
Sofia, neste momento, já conseguia visualizar os polígonos das faces e, inclusive, teve o cuidado de medir os canudos que representavam as arestas e passar para a cartolina. Ela não conseguia cobrir as faces do sólido com o mesmo tamanho das figuras extraídas da cartolina, conforme podemos observar na Figura 33. E, além disso, ficava atenta às ações das colegas, para, posteriormente, solicitar ajuda ao grupo. Ainda assim, ela não conseguiu terminar sua tarefa.

Figura 33 - Revestimento do Sólido de Sofia

Fonte: Dados da pesquisa

Antonieta não apresentou dificuldade em visualizar as figuras que formavam as faces e, para economizar papel, usou uma única tira para cobrir as três faces do paralelepípedo. Quando foi manipular a outra face paralela, não verificando que eram congruentes, ficou com dificuldades para cobri-las, Figura 34. Em seguida, ela frisou a tira inteira para mostrar as arestas.

Figura 34 - Revestimento do Sólido de Sofia



Fonte: Dados da pesquisa

Vitória, não participou dessa atividade.

O desdobramento dessa etapa permitiu verificar que as alunas reconheceram as figuras geométricas que compõem as faces do sólido, isto é, todas são retangulares, mas desconheciam as propriedades fundamentais de um paralelepípedo reto-retângulo. Portanto, destacam-se as dificuldades apresentadas por elas em sala de aula, no desenvolvimento das atividades relacionadas aos cálculos de área e volume de sólidos.

4.3.2.5 Análise *a posteriori* do Encontro 6

No encontro 6, foi entregue às alunas um paralelepípedo reto-retângulo, semelhante aos sólidos construídos por elas, para que comparassem e, em seguida, escrevessem o que tinha ou não de semelhante. Nesse momento, colocamos em prática as afirmações dos PCN de Matemática, em que se diz:

O pensamento geométrico desenvolve-se inicialmente pela visualização: as crianças conhecem o espaço como algo que existe ao redor delas. As figuras geométricas são reconhecidas por suas formas, por sua aparência física, em sua totalidade, e não por suas partes ou propriedades. (Brasil, 1997, p. 127)

Nesse contexto, dizemos que elas foram construindo por partes, mesmo sem reconhecer os conceitos geométricos que subjazem nas atividades apresentadas. Essa constatação é verificada a partir dos depoimentos dados por cada uma delas, conforme verificamos a seguir.

Luisa: *Em comparação com o paralelepípedo retângulo o objeto que criei possui o mesmo número de vértices, arestas e faces, sendo esses de tamanhos diferentes. O paralelepípedo reto retângulo possui vértices, arestas e objetos simétricos; já no meu objeto os vértices, as arestas e as faces não possuem simetria, as arestas estão tortas, os vértices arredondados e as faces, cada uma de um tamanho.*

Sofia: *O meu objeto era para ser um paralelepípedo reto-retângulo “verdadeiro”, mas percebi que a única coisa compatível era o número de faces, pois vértices e arestas estavam desproporcionais, pois as arestas do meu objeto não tinham o mesmo tamanho como no outro. Já no paralelepípedo “verdadeiro” elas estavam todas proporcionais, e as faces também estavam desproporcionais, embora tivessem o mesmo número.*

Antonieta: *O meu objeto é um hexaedro; mas ao ver o hexaedro “oficial”, verifiquei que não ficou parecido com o meu, pois o meu ficou com algumas distorções, como as faces que não ficaram com os mesmos tamanhos, as arestas e os vértices também não bateram com o hexaedro que eu vi. A única coisa que realmente ficou parecida foi o número de faces que são no total 6, pois o resto ficou “estranho”.*

Vitória, não apresentou depoimento.

Esses depoimentos reforçam a defesa de um trabalho direcionado, bem estruturado, fora do contexto da aula expositiva, pois favorece a construção dos conceitos geométricos. O desenvolvimento dessa tarefa vai ao encontro daquilo em que Rancan e Giraffa (2012) acreditam:

Na Geometria existe a opção por um ensino que valoriza a estimulação da participação ativa do aluno, construindo suas próprias percepções em relação aos conteúdos. Essa participação pode ser feita por meio de construção de desenhos, medições, visualizações, comparações, transformações e construções, que permitem uma interação ampla com os conteúdos focalizados. Essa opção possibilita ao aluno perceber e valorizar a presença de elementos da natureza em criações humanas. (RANCAN; GIRAFFA, 2012, p. 4)

Após a comparação entre os sólidos, foi solicitado às alunas que fizessem as planificações dos mesmos e registrassem todos os procedimentos, por isso a nossa opção de registrar gradativamente.

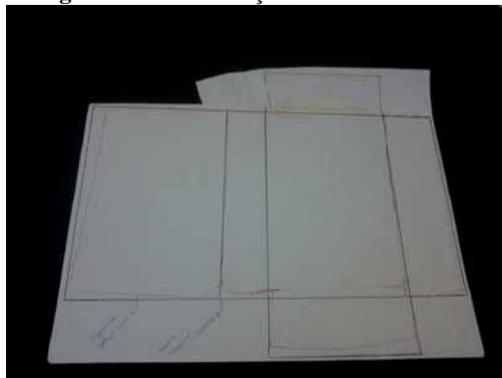
Para a realização da planificação, as alunas desmontaram os sólidos e, em seguida, riscaram-nos em um papel, conforme as Figuras 35, 36 e 37. Das três alunas, Luísa foi que apresentou menos dificuldade, Figura 35.

Sofia contornou a figura desconsiderando os lados, Figura 36, sua planificação tinha a forma de uma cruz, além disso, ela esqueceu de planificar a face superior.

Já a Antonieta, quando planificou seu sólido, também desconsiderou a planificação da face superior e, para representar as arestas, fez apenas o contorno, Figura 37.

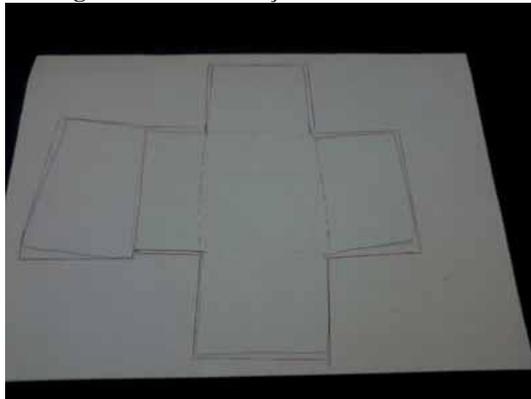
Luisa: Ao planificar o objeto observei que as faces do meu objeto estavam totalmente assimétricas, cada face era uma imagem. Ao desenhar a planificação do paralelepípedo reto retângulo sobre planificação do meu objeto, percebi que faltava uma face, mas consegui fazer a aresta que faltava.

Figura 35 – Planificação do Sólido de Luísa



Fonte: Dados da pesquisa

Sofia: Ao planificar a professora me perguntou quantas faces tinha. Respondi 8. Ao contar de novo, vi que eram 6. Além disso todas as face e arestas estavam desproporcionais, o que pude perceber ao tracejar as arestas na planificação.

Figura 36 – Planificação do Sólido de Sofia

Fonte: Dados da pesquisa

Antonieta: Observei, ao planificar, que não estava parecido com um hexaedro, tive que tracejar para ter as devidas faces, mas as faces estavam desproporcionais, umas estavam grandes, outras, pequenas demais, mas o número de faces estava certa.

Figura 37 – Planificação do Sólido de Antonieta

Fonte: Dados da pesquisa

Vitória, não participou dessa atividade.

Para o próximo encontro, foi solicitado às alunas que construíssem um paralelepípedo a partir de uma planificação, feito por elas, e fossem registradas quantas planificações, ou moldes, foram elaborados até a planificação definitiva, que seria usada como molde para a construção do paralelepípedo, agora construído por elas.

Segundo os PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais), um dos objetivos que deve ser atingido diz respeito aos estudantes, de modo que eles saibam estabelecer relações entre as figuras espaciais e suas respectivas planificações e, a partir daí, poder interpretar suas representações; propõe também que o aluno resolva situações-problema a partir da “composição e decomposição de figuras planas” (BRASIL, 1998, p.73), trabalhando assim, as transformações geométricas.

Cada aluna teve a oportunidade de construir o seu objeto de estudo e analisar os elementos geométricos existentes, partindo da construção de um objeto tridimensional (sólido) para, então, poder desmontá-lo e analisar geometricamente a parte plana envolvida e, em seguida, montá-la. Sendo assim, nessa dinâmica, corroborada pelas orientações das Diretrizes Curriculares Nacionais, defendem a prática de um trabalho com Geometria, preferencialmente, partindo do espaço para, então, dirigir-se ao plano e, ulteriormente, voltar ao tridimensional.

4.2.2.6 Análise a posteriori do Encontro 7

Nesse encontro, as alunas apresentaram o paralelepípedo construído a partir do molde elaborado por elas. Podemos observar nas fotos, a seguir, Figuras 38, 39 e 40, que houve uma evolução na aprendizagem, por parte das alunas, quanto às propriedades dos paralelepípedos e compactuamos com Rancan e Giraffa (2012, p.23) quando dizem que “o trabalho com Geometria possibilita o desenvolvimento de competências como as de experimentar, representar e argumentar além de instigar a imaginação e a criatividade.”

Figura 38 – Paralelepípedo de Luísa



Fonte: Dados da Pesquisa

Figura 39 – Paralelepípedo de Sofia



Fonte: Dados da Pesquisa

Figura 40 – Paralelepípedo de Antonieta



Fonte: Dados da Pesquisa

Vitória, não participou dessa atividade.

A aplicação da sequência didática, considerada a fase experimental da pesquisa, na qual os dados foram obtidos por meio da observação direta da pesquisadora, exigiu das alunas um esforço significativo de visualização e representação e, por outro lado, foi possível descobrir e trabalhar várias propriedades para, dessa forma, enriquecer a relação inter-pessoal entre professor-aluno, ajudando-as na aquisição do conhecimento. Além disso,

[...], a geometria é essencialmente “compreender o espaço” que a criança “deve aprender a conhecer, explorar, conquistar, de modo a poder aí viver, respirar e mover-se melhor”. Nesta perspectiva, a geometria torna-se um campo privilegiado de matematização da realidade e de realização de descobertas.”.(ABRANTES, 1999, p.3)

No próximo capítulo, apresentaremos a validação dos resultados, que é obtido pela confrontação entre os dados das *análises a priori* e *a posteriori* e, a partir dessa confrontação, verificar a hipótese, elaborada, no início da pesquisa de que o trabalho com materiais lúdicos, na construção e desconstrução de sólidos, é um forte aliado do processo de aprendizagem da Matemática.

5 VALIDAÇÃO DA INVESTIGAÇÃO

Na Engenharia Didática, a fase de experimentação constituiu, essencialmente, na relação estabelecida entre a professora / pesquisadora e as alunas. Já na fase *a posteriori*, a análise das atividades aplicadas deve ser validada ou refutada. Portanto, nesta pesquisa, foi possível verificar e constatar a construção de conceitos geométricos referentes aos paralelepípedos, quando nos propusemos, a seguir, analisar todos os procedimentos, adotados pelas alunas e pela pesquisadora, e os resultados obtidos antes, durante e depois da aplicação das atividades.

Ao analisarmos o desempenho das alunas nos trabalhos em sala de aula e em outra atividade aplicada, observamos que houve um avanço por parte das alunas quanto aos conhecimentos referentes às propriedades dos paralelepípedos reto-retângulos.

Antes da aplicação da sequência didática, as alunas demonstravam muita dificuldade em resolver as atividades trabalhadas em sala de aula referentes aos conteúdos de geometria espacial. A princípio, não conseguíamos diagnosticar o motivo da dificuldade de cada aluna, mas, pudemos considerar que:

No caso da aprendizagem escolar, a questão deve ser colocada em nível da construção individual e subjetiva do conhecimento e não diz respeito somente à exterioridade da exposição metodológica através de um texto. Refere-se aos sinuosos labirintos e incertezas percorridos durante a experiência fundante da aprendizagem, quando a experiência cognitiva do aluno está ainda fortemente impregnada por influências dos saberes do cotidiano. (PAIS, 2001, p.7)

As alunas apresentavam dificuldades na visualização dos sólidos quando esses eram apresentados em uma perspectiva tridimensional e, também, nas tarefas em que era preciso identificar as planificações dos sólidos. Essa limitação contribuía para que as alunas entregassem, quase sempre, as avaliações em branco ou com cálculos que não correspondiam ao que estava sendo solicitado.

Devido a essa limitação apresentada e também ao fator tempo, optamos em não trabalhar com os conceitos e as propriedades dos sólidos geométricos antes da aplicação da sequência didática. Para orientarmos as atividades na sequência didática, solicitamos a elas que apresentassem fotos de figuras tridimensionais. Nesse sentido, o nosso objetivo era diagnosticarmos o que elas entendiam a respeito de figuras tridimensionais. Ficamos muito surpresos ao verificarmos certa limitação na identificação das figuras.

No primeiro encontro da atividade, elas deveriam classificar as figuras como poliedro ou corpo redondo e, nesse momento, procuramos resgatar os conceitos trabalhados em sala de aula, verificamos que a justificativa mais usada foi a relação entre polígonos e poliedros e a relação entre círculo e corpo redondo. Essa classificação proporciona uma vantagem ao aluno em reconhecer as seções e, a partir dela, calcular os elementos dos sólidos e sua planificação, tal como foi trabalhada no sexto encontro das atividades.

Quanto à construção do paralelepípedo reto-retângulo com o material *geokit*, as alunas não ficaram atentas ao perpendicularismo e paralelismo das arestas, dificultando a tarefa seguinte, que correspondia à construção das faces com cartolina, por isso não conseguiram fechar o sólido com as faces congruentes e paralelas. Nessa tarefa, foi possível diagnosticarmos, que quando o aluno participa da construção do sólido, ele está aplicando propriedades que são fundamentais na produção dos mesmos e, além disso, muitas vezes, nos desenhos, necessitam da visualização em perspectivas, feitos na lousa pelo professor ou por ele mesmo (o aluno) em seu caderno. Às vezes, esse cuidado passa despercebido, provocando restrições na aprendizagem geométrica. Nas atividades correspondentes à planificação do paralelepípedo, encontros 6 e 7, ficou claro a construção das propriedades por parte das alunas quanto ao perpendicularismo das arestas e o paralelismo e a congruência das faces opostas. Pais (2001), defensor da manipulação de materiais concretos nas aulas de Geometria, argumenta que:

[...] devemos sempre estimular um constante vínculo entre a manipulação de materiais e situações significativas para o aluno. Portanto, esta nossa abordagem confirma a interpretação dada por Imenes (1987) quanto à importância tanto de uma abordagem dedutiva como experimental para o ensino da geometria em nível do ensino fundamental, sem a prioridade de uma sobre a outra. (PAIS, 2001, p.15)

Verificamos que, no decorrer dos encontros, as alunas já apresentavam um cuidado maior quanto ao paralelismo e às congruências das arestas. Mostraram ter adquirido um conhecimento quanto às propriedades dos paralelepípedos. Essa construção, por parte delas, mostrou-nos que estávamos certos em buscar um trabalho, através do qual a construção proporcionasse algo significativo para cada uma delas, levando a adquirir conhecimentos relativos às propriedades e aos conceitos dos sólidos geométricos.

Quanto ao último encontro relativo às atividades, as alunas apresentaram os paralelepípedos reto-retângulos, Figuras 38, 39 e 40, e tiveram a preocupação de justificar que as faces não estavam “lisas”, pois, devido ao transporte dos mesmos, durante a

movimentação, as figuras concretas ficaram amassadas, mostrando-nos a preocupação delas em justificar o estado dos sólidos.

Essas atividades proporcionaram a construção e a desconstrução dos sólidos geométricos, devidamente registrados, em seus pormenores, no Produto Final dessa investigação, culminando no desempenho das alunas. Pudemos observar uma evolução por parte das mesmas em relação ao que elas fizeram antes da aplicação das atividades, tendo em vista que elas tinham muita dificuldade durante a aprendizagem dos conceitos. Vale ainda ressaltar que essa evolução ocorreu de forma individual, já que cada uma delas deu o máximo de si para a realização das atividades propostas.

Segundo Pais (2001, p.103), “do ponto de vista metodológico, a validação é uma etapa em que a vigilância deve ser ampliada, pois se trata de garantir a essência do caráter científico.” Após a aplicação das atividades, utilizamos como fonte de dados, para a validação dessa investigação, a aplicação de uma avaliação composta por uma questão discursiva, envolvendo cálculos da medida de área e volume de paralelepípedo, conforme será apresentado a seguir.

A questão, Figura 41, foi extraída do vestibular da PUC-RJ, do ano de 2009:

Figura 41 – Fase da Validação-questão 1: área e volume do paralelepípedo

(PUC-RJ - 2009) Pretende-se fabricar uma caixa com faces retangulares e ângulos retos, aberta em cima, com um volume de 10 m^3 (conforme figura). O comprimento de um dos lados da base deve ser o dobro do comprimento do outro lado. O material para construir a base custa R\$ 10,00 por metro quadrado, ao passo que o material para construir as laterais custa R\$ 6,00 por metro quadrado.



- a) Se o lado p mede 2 metros, quanto vale n ?
- b) Com os valores do item (a), calcule o custo de construção da caixa.
- c) Encontre o custo de construção da caixa em função de p .

Disponível em: <http://www.puc-rio.br/vestibular/repositorio/provas/2009/download/provas/VEST2009PUCRio_GRUPO4_24102008.pdf>
Acesso em: 10 out. 2012.

Quanto ao desenvolvimento da questões, por parte das alunas, pudemos observar uma melhora quanto à visualização, à planificação, à aplicação das propriedades e aos cálculos das medidas das áreas e volumes do paralelepípedo, como pudemos observar nas atividades apresentadas nas Figuras 42, 44 e 46.

Iniciaremos com a avaliação de Luísa, lembrando que, em seu depoimento inicial, na fale Preliminar da Engenharia Didática, relatou que seu rendimento em Matemática foi um fracasso a partir da 7ª série (8º ano) do Ensino Fundamental. Quanto ao estudo de Geometria, o contato fora muito pouco, uma média de cinco aulas durante o ano letivo da série citada e sua lembrança está voltada apenas para o Teorema de Pitágoras.

Figura 42 – Atividade realizada pela Luísa – questão 1

(PUC-RJ - 2009) Questão 5

Pretende-se fabricar uma caixa com faces retangulares e ângulos retos, aberta em cima, com um volume de 10 m^3 (conforme figura). O comprimento de um dos lados da base deve ser o dobro do comprimento do outro lado. O material para construir a base custa R\$ 10,00 por metro quadrado, ao passo que o material para construir as laterais custa R\$ 6,00 por metro quadrado.

$V = 10 \text{ m}^3$

$BASE = 10,00 \text{ m}^2$

$LATERAL = 6,00 \text{ m}^2$

a) Se o lado p mede 2 metros, quanto vale n ?

$V = \frac{B \cdot h}{2}$ $10 = \frac{4 \cdot h}{2}$ $10 = 4h$ $h = 2,5$

b) Com os valores do item (a), calcule o custo de construção da caixa.

$1^\circ \text{ ERRO: ao tentar achar a area total calculei as areas e somando as em vez de multipl. co-las.}$

c) Encontre o custo de construção da caixa em função de p .

$B = 8 = 2h = 1,25 \text{ m}$

$BT = B \cdot h$ $BT = 4 \cdot 2$ $BT = 8$

$BL^1 = B \cdot h$ $BL^2 = B \cdot h$

$BL^1 = 1,25 \cdot 2$ $BL^2 = 1,25 \cdot 2$

$BL^3 = 2,50$ $BL^4 = 2,50$

$BL^3 = 1,25 \cdot 4$ $BL^4 = 1,25 \cdot 4$

$BL^3 = 5,0$ $BL^4 = 5,0$

$TOTAL = 8 + 5 + 10$

$'' = 23,0 \text{ AT.}$

$80 \cdot 10 = 80,00$

$5 + 10 = 90,00$

$15 \cdot 6 = 90,00$

$80,00 + 90,00 = 170,00$

Valor total:

9600

$+ 640$

$10240,00$

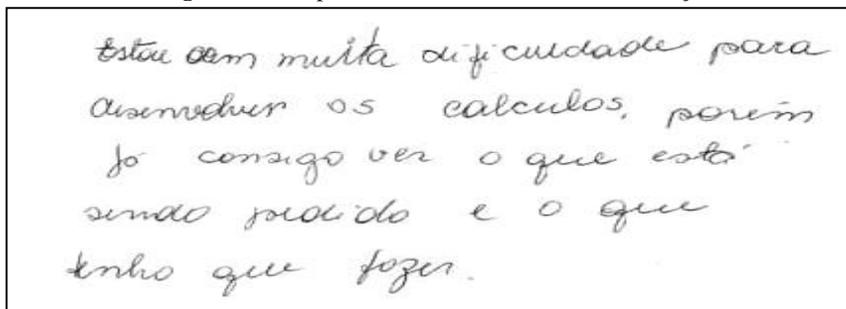
Fonte: Dados da Pesquisa

Antes de iniciar a atividade, a pesquisadora combinou com elas que deixassem todos os registros durante sua realização, inclusive os erros. Luísa calculou as dimensões da base do

paralelepípedo substituindo p por 2, encontrando 4m de comprimento e 2m de largura. Em seguida, para calcular a altura, ela usou vários procedimentos, mas conseguiu calcular corretamente a medida da altura, que corresponde a 1,25m.

Após sucessivas tentativas, Luísa obteve sucesso no cálculo do custo da caixa, quando demonstrou conhecer as figuras geométricas que correspondem às faces, planificando o sólido para melhor visualização. Isso valida as atividades realizadas durante a fase *a priori* dessa investigação. Pudemos observar que, ao revisar a resolução da questão, Luíza escreveu a respeito do erro que cometeu ao calcular a medida da área total, demonstrando uma evolução cognitiva no que diz respeito aos seus conhecimentos sobre paralelepípedos. Quanto à resolução do item c, calcular o custo em função p , Luísa não apresentou a resolução. Talvez pelo fato de exigir habilidades cognitivas mais complexas, como, por exemplo, abstrair para uma lei de função. Vejamos o seu depoimento, Figura 43.

Figura 43 – Depoimento de Luísa na fase de Validação



Estou com muita dificuldade para desenvolver os calculos, porém ja consigo ver o que está sendo pedido e o que tenho que fazer.

Fonte: Dados da pesquisa

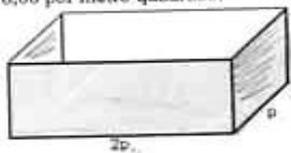
Apesar do sucesso na realização da atividade 1 para os itens a e b, constatamos certa insegurança no depoimento dado pela Luísa. Isso pode estar atrelado à sua baixa autoestima em relação à Matemática. Isso justifica, mais uma vez, a natureza inclusiva dessa investigação.

A seguir, vejamos como Sofia resolveu a mesma questão. Retomando o depoimento inicial, realizado nas Análises Preliminares, da Engenharia Didática, Sofia disse ser limitada em relação à Matemática e isso iniciou-se desde a 4ª série (5º ano) do Ensino Fundamental, além de só ter estudado Geometria na 8ª série (9º ano).

Figura 44 – Atividade realizada pela Sofia – questão 1

(PUC-RJ - 2009) Questão 5

Pretende-se fabricar uma caixa com faces retangulares e ângulos retos, aberta em cima, com um volume de 10 m^3 (conforme figura). O comprimento de um dos lados da base deve ser o dobro do comprimento do outro lado. O material para construir a base custa R\$ 10,00 por metro quadrado, ao passo que o material para construir as laterais custa R\$ 6,00 por metro quadrado.



$$V = ab \cdot h$$

$$10 = 2p \cdot p \cdot n$$

$$10 = 2p^2 n$$

$$\frac{= 72}{10} \text{ para multiplicar}$$

$$m = 7,2$$

para o comprimento da base x h

$$10 = 8 \cdot m \quad m = \frac{10}{8}$$

$$10 = 8m$$

$$m = 1,25 \text{ m}$$

a) Se o lado p mede 2 metros, quanto vale n ?

b) Com os valores do item (a), calcule o custo de construção da caixa.

R: O custo para a construção da caixa é de R\$ 170,00

c) Encontre o custo de construção da caixa em função de p .

$$10 = 4m^2$$

$$X = 8m^2$$

$$X = 80,00$$

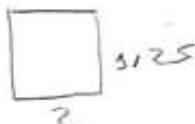
$$90 + 80 = 170,00$$

$$6 = 3m^2$$

$$X = 5$$

$$X = 30,00$$

$$\frac{60,00}{90,00}$$



$$\begin{array}{r} 1,25 \\ \times 4 \\ \hline 5,00 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1,25 \\ \times 4 \\ \hline 5,00 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ \times 10 \\ \hline 60 \end{array}$$

$$X = 60$$

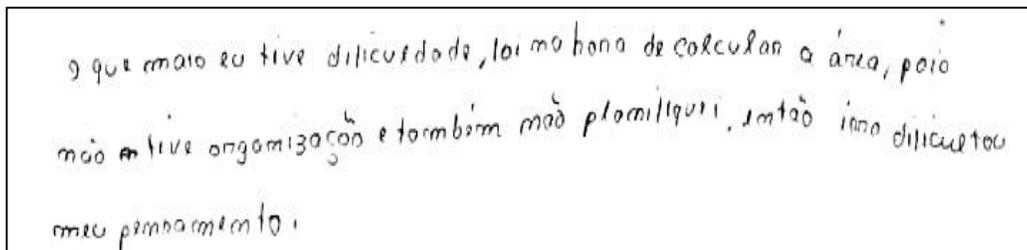
Fonte: Dados da Pesquisa

Como podemos observar, Sofia demonstrou ter desenvolvido habilidades e competências que não possuía. Ela calculou corretamente as três dimensões do paralelepípedo e o custo da construção da caixa. Apesar de seu depoimento ao declarando que não planificou, observamos que o fez e, mais corretamente, já que desconsiderou também a face superior, sem a tampa. Talvez essa confusão é devido a sua insegurança. Mesmo com esse sentimento, Sofia utilizou os procedimentos da “regra de três”, como estratégia para o cálculo do custo da caixa.

Assim como Luísa, Sofia também não resolveu o item c dessa questão. Simplesmente não fez nenhum registro, deixou em branco.

Vejamos, agora, o seu depoimento para essa fase, a da Validação, Figura 45:

Figura 45 - Depoimento de Sofia na fase de Validação



o que mais eu tive dificuldade, foi a hora de calcular a área, pois não tive organização e também não planejei, então isso dificultou meu pensamento.

Fonte: Dados da pesquisa

No desenvolvimento da questão, percebemos que Sofia planeja, entretanto, talvez por julgar que tem dificuldade em pensar geometricamente, não reconhece uma planificação. Conforme a Figura 44 ela o fez, mas não o legitima. Talvez, para Sofia, o que fez foi ter “aberto” a caixa, não correspondendo à planificação. Isso nos reporta a enfatizar a importância de assegurar confiança nos alunos para realizar tarefas em Matemática, ou seja, uma das maiores vilãs para a aprendizagem dessa disciplina é a insegurança, independente da faixa etária.

A seguir, apresentaremos a atividade realizada por Antonieta, lembrando que em seu depoimento inicial, Fase Preliminar, afirma que não tinha prazer em estudar Matemática. Sempre foi aprovada de uma série para outra por meio de recuperação; ou seja, deixava para estudar o mínimo necessário somente para a aprovação final, com o auxílio do “ensinador”, um membro externo à escola. Não gosta de Matemática e diz que seu trauma com essa disciplina é devido a um relacionamento conflituoso com uma professora, ainda nas séries iniciais do Ensino Fundamental.

Figura 46 – Atividade realizada pela Antonieta – questão 1

(PUC-RJ - 2009) Questão 5

Pretende-se fabricar uma caixa com faces retangulares e ângulos retos, aberta em cima, com um volume de 10 m^3 (conforme figura). O comprimento de um dos lados da base deve ser o dobro do comprimento do outro lado. O material para construir a base custa R\$ 10,00 por metro quadrado, ao passo que o material para construir as laterais custa R\$ 6,00 por metro quadrado.

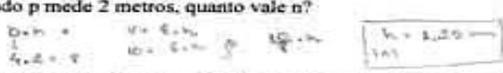
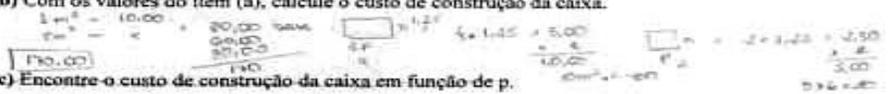
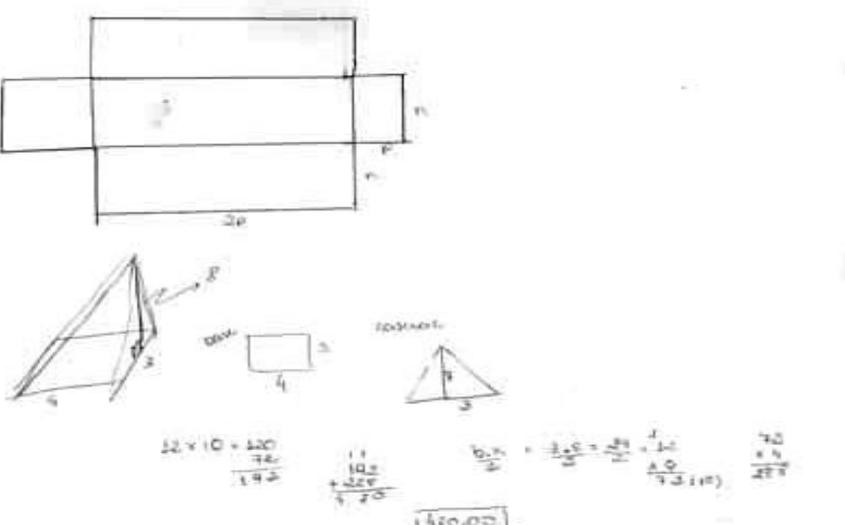


a) Se o lado p mede 2 metros, quanto vale n ?

b) Com os valores do item (a), calcule o custo de construção da caixa.

c) Encontre o custo de construção da caixa em função de p .

Handwritten solutions for the problem are shown, including calculations for volume, dimensions, and costs. The final answer for part (c) is $420,00$.

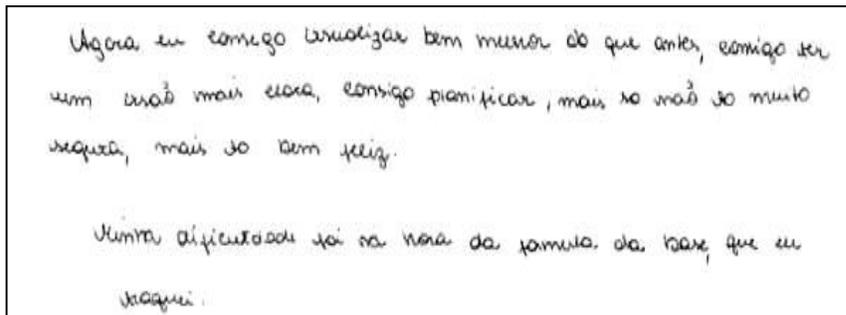




Fonte: Dados da Pesquisa

Quanto à questão desenvolvida por Antonieta, podemos observar que ela calculou corretamente as dimensões do paralelepípedo e o custo de fabricação; mas, como as outras participantes, ela também não conseguiu fazer o cálculo do custo de fabricação da caixa em função de p .

Tal como Luísa e Sofia, Antonieta foi bem sucedida na resolução dos itens a e b. Comparando com as soluções apresentadas por suas colegas, Antonieta foi quem demonstrou maior organização no desenvolvendo dessa atividade. Validando, portanto, as outras etapas da Engenharia Didática. A seguir, Figura 47, o depoimento de Antonieta para a análise *a posteriori*.

Figura 47 - Depoimento de Antonieta na fase de Validação



Agora eu consigo trabalhar bem melhor do que antes, consigo ter um uso mais exato, consigo planejar, mais no mais do muito exato, mais do bem feiz.

Uma dificuldade foi na hora da fórmula da base que eu esqueci.

Fonte: Dados da pesquisa

Antonieta foi quem mais demonstrou satisfação em participar desse trabalho e, além disso, melhorou seu desempenho na Matemática e aumentou sua autoestima, acreditando ser capaz de superar suas próprias limitações. Esse argumento pode ser constatado na Figura 47.

Vitória, não participou dessa atividade.

De modo geral, a realização dessa tarefa com as três alunas foi satisfatória; apesar de não terem realizado o item c, que, de certo modo, contemplava a formulação de uma lei de função. Assim, o confronto entre as análises *a priori* e *a posteriori* validam o cálculo de área e volume do paralelepípedo, o mesmo não pode ser afirmado para a elaboração da lei que representa o custo em função da dimensão p. Nessa direção, a metodologia, da Engenharia Didática propicia um revisitar a prática do professor, isto é, vislumbrar um momento em que o foco pode ser estendido para o ensino, em uma situação didática, no sentido de rever o que deve ser mais cuidadosamente trabalhado.

Para finalizar, as Figuras 48 e 49, correspondem às últimas declarações das alunas sobre o presente trabalho.

Os depoimentos das alunas, no que diz respeito ao desenvolvimento de toda a atividade, considerando os encontros e a atividade aplicada fazem-nos acreditar que é possível, por meio de material didático adequado, enriquecer o conhecimento do aluno.

Figura 48 - Depoimento de Luísa após as atividades

(ALUNA 1)

No primeiro encontro eu comecei com o projeto
 3D de dimensões reais. Quando foi pedido para
 um pouco mudou sobre "o que era uma imagem
 tridimensional". No segundo momento dividimos
 as peças em duas faixas estudadas em sala de
 aula (espero relembrar, quando retornar e etc.)

De todos os encontros sem dúvida o terceiro foi o que
 eu mais gostei, transformamos os papéis em sólidos,
 tenho muita facilidade em trabalhos manuais,
 por isso não há dificuldades. O quinto e o sexto
 encontros transformamos uns sólidos de madeira
 em sólidos feitos de madeira e madeira, tive
 uma certa dificuldade, devido as peças utilizadas
 das peças uns os computadores e na hora de
 colar a madeira no computador (deu um pouco de
 trabalho).

O sexto encontro "alunos o sólido" antes constru-
 do. No início da tarefa é a dificuldade devido a
 falta de tempo, por isso os primeiros esboços ficaram
 sem os detalhes necessários. Foi isso que me
 tranquiliza durante a tarefa. Depois de fazer o
 esboço do cubo construímos um tubo em papel de
 24.

No decorrer dos encontros fui aprendendo muitas
 coisas, abri novas percepções. Ainda tenho difi-
 culdades para desenvolver o cálculo, porém consigo
 facilmente identificar uma imagem. Sou grata
 a professora Natália pelo desenvolvimento,
 paciência e dedicação comigo durante todo o
 projeto.

Fonte: Dados da pesquisa

Luísa, em seu depoimento, demonstra ter gostado muito de participar das atividades e reconhece ter melhorado sua percepção visual e ter facilidade de identificar uma imagem. Ela afirma que ainda tem dificuldades quanto aos cálculos, mas que foi aprendendo muita coisa no decorrer dos encontros.

A seguir, apresentaremos o depoimento de Sofia, que era a mais tímida das três e apresentava muita dificuldade.

Figura 49 - Depoimento de Sofia após as atividades

A primeira etapa para nosso trabalho foi tirar fotos de figuras geométricas,até então nada de dificuldades,depois a nossa orientadora(Mariângela)pediu para que escolhece dentre as fotos 10 imagens para fazer igual só que usando massinha,nessa hora a minha única dificuldade foi a coordenação pq não tenho uma mão boa para esses tipos de trabalhos.Na segunda etapa tivemos que escolher algumas figuras que fizemos com a massa e representar da mesma maneira só que dessa vez no canudo,para mim essa foi a parte que eu tive muitas dificuldades pq além de não ter uma mão firme,não conseguia enxergar os lugares certos de encaixas as peças e não tinha a visão do sólido,depois começamos a encapar as caixas com folhas de cartolina,só que pra mim tornou uma atividade difícil pois minha figura tridimensional tinha ficado mau construída,mas se não fosse isso teria sido tranquilo.A terceira etapa as coisas começaram a clariar pois já tinha uma visão mais ampla das figuras então desenhamos um rascunho de um cubo na folha ,vimos que partes estavam desproporcionais,medimos com régua e fomos consertando ,depois recortamos ele e passamos para um sólido tridimensional.Nessa etapa minha visão já estava bem mais ampla pois já conseguia enxergar tudo direito como as arestas,face,vértices.

Fonte: Dados da pesquisa

Sofia relata que teve dificuldades em manusear a massinha, por não possuir habilidade e dificuldades em encaixar as peças E por não possuir uma visão do sólido. Com o decorrer

dos encontros, tudo foi se tornando mais claro e ela já conseguia identificar os elementos de um sólido como arestas, vértices e faces.

Podemos afirmar que essas atividades ajudaram no crescimento da visualização dos sólidos geométricos e nos conceitos e propriedades.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A geometria espacial foi escolhida como tema dessa pesquisa devido à inquietação que sinto sempre que trabalho com sólidos geométricos com os alunos do 2ª Série do Ensino Médio. A resistência dos alunos em aprender e fazer exercícios é muito comum nos conteúdos de geometria; geralmente, eles alegam que não sabem desenhar ou não possuem o pré-requisito do conteúdo de geometria plana, por não gostarem. Isso tudo faz com que a dificuldade por parte dos alunos em visualizarem os sólidos, suas planificações e secções me deixe muito apreensiva, por mais que capriche nos desenhos feitos nos quadros, ou nas apresentações em datashow.

A cada obstáculo encontrado pelos alunos, mais eles vão se desinteressando pelo conteúdo trabalhado em sala de aula e apenas estudam e fazem os exercícios para fazer a prova e não para aprender, o que me deixa muito angustiada. Para ajudá-los, procurei, durante todos esse anos, trabalhar o conteúdo de diversas formas, como por exemplo, construir os sólidos a partir de planificações e trabalhar com *softwares* educacionais. Assim observei certos métodos que ajudaram alguns alunos a melhorarem seu desempenho nos cálculos e nas visualizações referentes a algumas perspectivas, mas não era acessível a todos .

Outro problema é quanto à resistência apresentada pelos alunos para resolver problemas, comuns em livros didático, devido ao fato de não conseguirem estabelecer uma relação entre o que está escrito no enunciado e o desenho em perspectiva ou a planificação. Tomada por essa insatisfação, em não conseguir fazer com que os alunos aprendessem geometria espacial e, ao mesmo tempo, motivada pelos desafios enfrentados em sala de aula, busquei uma forma de trabalhar o conteúdo, usando material lúdico, de modo a ajudá-los a visualizarem os sólidos e conhecer suas propriedades e conceitos de forma a desenvolverem os exercícios referentes ao conteúdo de geometria espacial.

Para responder às questões norteadoras deste trabalho:

- ✓ Como ajudar os estudantes a compreender as ideias e os conceitos geométricos, a partir da visualização de sólidos geométricos, em uma perspectiva inclusiva na prática da sala de aula?
- ✓ Como ajudá-los a mudar de fase tridimensional para a bidimensional ou vice-versa?

escolhemos a Engenharia Didática como metodologia, principalmente pelo fato de possibilitar desenvolver a pesquisa de uma forma que, a partir de uma análise preliminar, foi planejada uma sequência didática de modo a obter informações a respeito do problema pesquisado.

As alunas que participaram da pesquisa foram selecionadas a partir de observações em sala de aula. Todas apresentavam dificuldades nas aulas de geometria, e se esforçavam muito para aprender, no sentido de superar os obstáculos de aprendizagem, mas não conseguiam. Inclusive uma delas estava amparada por laudo médico por apresentar um problema de memória.

Seguindo as concepções da sequência didática, foram elaborados sete encontros, nos quais foram desenvolvidas as atividades com materiais lúdicos, como massa de modelar e *geokit*, canudos e hastes, com o objetivo de verificar se, ao trabalharmos com material lúdico, poderíamos alcançar o desenvolvimento da visualização geométrica das alunas na construção dos sólidos, oportunizando-as serem construtoras de seu conhecimento e ajudando-as a superar as dificuldades de aprendizagem, levando em consideração as particularidades das mesmas.

Com a percepção da sequência didática e utilizando material concreto - massa de modelar, na construção dos sólidos - eu criei muita expectativa quanto ao envolvimento e ao interesse das alunas nas atividades. Considerei que, nos primeiros encontros, as alunas apresentariam dificuldades na construção, já que a mesma exigia muita visualização e perspectivas tridimensionais, dificuldades essas percebidas em sala de aula. Minhas expectativas quanto a esse fato foram sendo superadas em cada um dos encontros, pois as alunas foram vencendo seus medos e suas dificuldades, principalmente no que diz respeito à visualização e à planificação dos sólidos.

Uma das alunas apresentou mais habilidade em trabalhar com o material concreto, massa de modelar, demonstrando mais agilidade e rapidez quanto aos procedimentos que deveria executar para o desenvolvimento das atividades. Essa habilidade demonstrada pela aluna é devido ao fato de a mesma estar voltada para a área de artes e *design*.

As alunas que, a princípio, apresentaram menos habilidade foram superando suas dificuldades a cada encontro e melhorando suas habilidades. Durante as atividades desenvolvidas nos encontros, a aluna que apresentava mais habilidade ajudava as outras. Essa colaboração proporcionou momentos de troca e construção de conhecimentos.

As alunas apresentaram muita satisfação durante todas as atividades e, a todo momento, solicitavam a elaboração das mesmas, em sala de aula, com todos os sólidos. Essa satisfação foi demonstrada também nas atividades referente aos conteúdos de Geometria Espacial desenvolvidas em sala de aula.

Nesses encontros, na qual as atividades foram desenvolvidas de forma adidática, isto é, quando não há intervenção alguma do professor, pude observar como as alunas faziam suas

leituras e como elas desenvolviam suas atividades a partir dos conceitos e das visualizações próprias. Todas apresentavam dificuldades em visualizar as faces das figuras em uma perspectiva tridimensional; mas, com o desenrolar dos encontros, essa dificuldade foi sendo superada e as alunas demonstraram um crescimento quando desenvolveram a atividade correspondente à construção do sólido, usando cartolina.

Os conceitos e as propriedades referentes aos sólidos foram construídos a partir do desenvolvimento das atividades respeitando o tempo de cada uma, com suas devidas observações. A construção do sólido proporcionou às alunas a construção dos conceitos pela observação, como, por exemplo, o paralelismo e o perpendicularismo das arestas no paralelepípedo reto-retângulo e a congruência entre as faces de um cubo.

Na fase seguinte, da Validação, puderam ser confirmados os dados obtidos na análise *a priori* e na análise *a posteriori*. Isso foi possível através de uma atividade escrita, composta de uma questão, quando se verificou o crescimento das alunas quanto à visualização e à compreensão dos conceitos dos sólidos geométricos, além da planificação.

Dessa forma, o uso desse material e o modo de trabalhar, diferente do tradicional, despertou, nas alunas, um interesse maior pelo saber ensinado, possibilitando uma aprendizagem melhor.

Como Produto Final, resultado dessa experiência, que teve como suporte para a sua elaboração a Engenharia Didática, foi elaborada uma oficina que orienta o educador matemático a construir, a partir da manipulação de massa de modelar os sólidos geométricos (prisma, cilindro, pirâmide, cone e esfera); visualizar suas secções meridiana, transversal, entre outras, trabalhando assim, a definição de poliedros e corpos redondos, planificação e o reconhecimento das figuras planas que correspondem às faces dos sólidos.

Dessa forma, procurou-se desenvolver uma atividade com material acessível e de fácil manipulação, de modo que auxilie o professor na construção da aprendizagem do aluno. E, diante disso, outras questões poderão ser molas propulsoras de investigações acadêmicas como, por exemplo, “de que forma pode-se estimular o estudo de lei de formação de função atrelada aos sólidos geométricos, envolvendo cálculos de área e volume?” Essa questão não foi contemplada nessa pesquisa, mas indicou uma possibilidade concreta para uma investigação, em um futuro bem próximo.

Enfim, esta investigação é um fragmento de uma pesquisa maior, que se dá gradualmente, na medida em que há lapidação da experiência profissional do próprio educador, aquele que vivencia e testemunha todos os aspectos que envolvem o processo de aprender e ensinar.

REFERÊNCIAS

- ALVES, A. J. O planejamento de pesquisas qualitativas em Educação. **Caderno de Pesquisa**. maio. São Paulo: 1991, p. 53-61.
- ALVES, G. **Um estudo sobre o desenvolvimento da visualização geométrica com o uso do computador**. 2007. Disponível em: < <http://www.sedis.ufrn.br> > Acesso em: 17 jun. 2012.
- BERNARDI, A. **Elementos e área de sólidos geométricos**: uma experiência com alunos do Ensino Médio. 2011. Disponível em:< <http://www.lume.ufrgs.br>> Acesso em : 17 jun. 2012.
- BALDISSERA, A. A. **Geometria trabalhada a partir da construção de figuras e sólidos geométricos**. 2001. Disponível em: <<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br>> . Acesso em: 17 jun. 2012.
- BECKER, M. **Uma alternativa para o ensino de geometria**: visualização geométrica e representações de sólidos no plano. 2009. Disponível em:
< <http://www.lume.ufrgs.br> > Acesso em: 5 set. 2012.
- BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto, Secretaria de Educação Fundamental **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília-DF: MEC, 1998.
- _____. Ministério da Educação e do Desporto, Secretaria de Educação Fundamental. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. Brasília: MEC, 2006.
- BRAZ, F. M. **História da geometria hiperbólica**. (Monografia de Conclusão de Curso) Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2009.
- BROUSSEAU, G. Os diferentes papéis do professor. In PARRA, C.; SAIZ, I. (Orgs). **Didática da Matemática**: Reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996, p.48-72.
- _____. **Introdução ao estudo da teoria da situações didáticas**: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008
- D'AMORE, B. Epistemologia, Didática da Matemática e Prática de Ensino. **BOLEMA**-Boletim de Educação Matemática. v. 20, n.28, 179-205, 2007.
- D'AMBROSIO, Beatriz S. Como ensinar matemática hoje? **Temas e Debates**. SBEM. Ano II. n.2. Brasília. 1989. p.15-19.
- GÁLVEZ, G. A didática da matemática. In PARRA, C.; SAIZ, I. (Orgs). **Didática da Matemática**: Reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996, p. 27-35
- GÁLVEZ, G. A Geometria, a psicogênese das noções espaciais e o ensino da geometria na escola primária. In PARRA, C.; SAIZ, I. (Orgs). **Didática da Matemática**: Reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996, p. 236-251

MACHADO, S. D. A. Engenharia Didática. In: _____. (org) **Educação Matemática: uma (nova) introdução**. São Paulo: Educ, 2010, p. 233-234

MOITA, M. da C. Percursos de formação e de transformação. In: Nóvoa, A. **Vidas de Professores**. 2. ed. Portugal: SPM, 1995. p. 111-140.

MORACO, A. S. C. **Um estudo sobre os conhecimentos geométricos adquiridos por alunos do Ensino Médio**. 2006. Disponível em: < <http://www2.fc.unesp.br/> > . Acesso em: 7 set. 2012.

PAIS, L. C. **Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da geometria**. 2000. Disponível em:< www.anped.org.br/23/> Acesso em: 17 jun. 2012.

_____. **Didática da Matemática: uma análise da influencia francesa**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

RITTER , A. M. **A visualização no ensino de geometria espacial: possibilidades com o software Calques 3D**. 2011. Disponível em: < <http://www.lume.ufrgs.br> > Acesso em: 17 jun. 2012.

PANTOJA, L. F. L.; SILVA, F.H.S. **Engenharia didática: articulando um referencial metodológico para o ensino de matemática na EJA**. 2010. Disponível em : <www.sbem.com.br/files/ix_enem > Acesso em: 15 maio 2012.

RANCAN, G.; GIRAFFA, L.M.M. Utilizando manipulação, visualização e tecnologia como suporte ao ensino de geometria. **REnCiMa**, v. 3, n. 1, p. 15-27, jan/jul 2012. Disponível em: <http://www.revistapos.cruzeirosul.edu.br>. Acesso em: 7 jan. 2013.

SILVA, M. B. **A Geometria Espacial no ensino médio a partir da atividade WEBQUEST: análise de experiência**. 2006. Disponível em: < <http://www.pucsp.br> > Acesso em: 5 set. 2012.

SOUZA, J.W.A. et al. O papel do aluno de Letras como professor de Língua Materna no Ensino Médio: os desafios do Pibid. **Anais... XII Encontro de Extensão e XIII Encontro de Iniciação a Docência**. UFPB, João Pessoa, 2010. CD-Rom. ISBN:978-85-7745-612-3.

ANEXOS

ANEXO 1

Matemática		
Nome:		Nº:
Turma: 2ª série ____	Data: 23/03/2012	Bimestre: 1º
Valor: 30 pontos	Pontos:	Professor(a):

Questão 01

(UERJ/2008 - modificado) Observe o icosaedro regular desenhado abaixo.



Figura 1

a) Quantas faces, arestas e vértices esse poliedro possui.

(Valor: até 4 pontos)

b) Esse poliedro é convexo? Justifique.

(Valor: até 4 pontos)

Considere todos os vértices e pontos médios de todas as arestas desse icosaedro marcados como mostra a Figura 2.

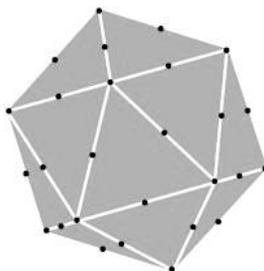


Figura 2

A partir dos pontos médios, quatro triângulos equiláteros congruentes foram formados em cada face do icosaedro. Admita que o icosaedro é inflado até que todos os pontos marcados fiquem sobre a superfície de uma esfera, e os lados dos triângulos tornem-se arcos de circunferências, como ilustrado a seguir pela Figura 3:

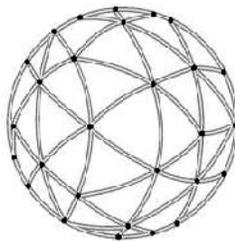


Figura 3

Observe, agora, que substituindo esses arcos por segmentos de reta, obtém-se uma nova estrutura poliédrica de faces triangulares, denominada geodésica.

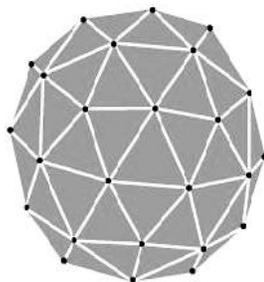


Figura 4

c) Determine quantas arestas possui esse novo poliedro?

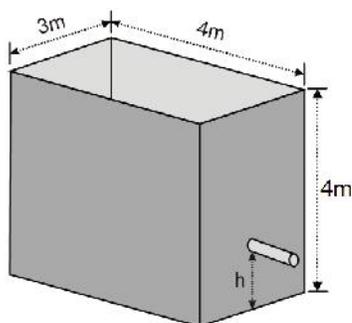
(Valor: até 4 pontos)

d) Determine quantos vértices esse novo poliedro, Figura 4, tem a mais que o icosaedro regular da Figura 1?

(Valor: até 4 pontos)

Questão 02

(Ufpb 2010 – Adaptada) O reservatório de água de certo edifício tem a forma de um paralelepípedo reto retangular com base de dimensões internas 3m por 4m e altura medindo 4m, conforme a figura a seguir.



De acordo com as condições do edifício, por medida de segurança, recomenda-se que, no reservatório, deve ficar retida uma quantidade de água correspondente a 18m^3 , para combater incêndio. Para atender essa recomendação, o ponto de saída da água, destinada ao consumo diário dos moradores e do condomínio, deve ficar a uma determinada altura (h) do fundo do reservatório, de modo que a água acumulada no reservatório até essa altura seja destinada para combate a incêndio.

a) Quantos litros de água são necessários para encher totalmente esse reservatório?

(Valor: até 5 pontos)

b) Para não haver vazamento de água, a parte interna do reservatório será pintada utilizando uma camada de tinta impermeabilizante que custa 20 reais o metro quadrado. Qual será o custo dessa impermeabilização?

(Valor: até 5 pontos)

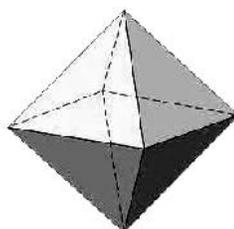
c) Qual deve ser a altura (h) da saída da água para atender às condições de segurança do prédio?

(Valor: até 4 pontos)

ANEXO 2

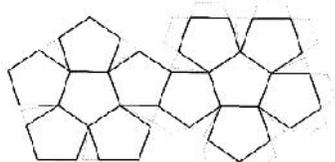
Matemática		
Nome:	Nº:	
Turma: 2ª série ____	Data: ____ /04/2012	Bimestre: 1º
Valor: 30 pontos	Nota:	Professora: Mariângela

Questão 01 Observe o poliedro regular desenhado abaixo. Poliedros são sólidos geométricos cujas superfícies são formadas apenas por polígonos (triângulos, quadriláteros , pentágonos...). Um poliedro possui três elementos básicos: faces (polígonos planos) arestas (linhas resultantes do encontro de duas faces) e vértices (pontos de encontros das arestas).

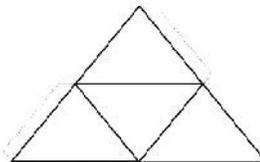


- Colorindo apenas **uma face** desse poliedro, verifique quantas faces têm ao todo.
- Destacando **uma aresta**, escreva abaixo quantas são nesse poliedro.
- Quantos **vértices** têm esse poliedro.
- Qual das figuras apresentadas abaixo corresponde à forma planificada desse poliedro? Marque com um (X).

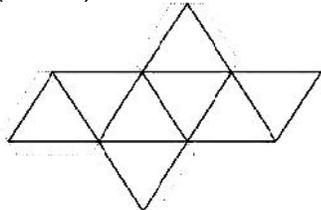
()



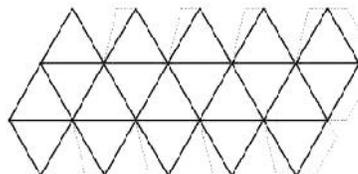
()



()



()



- e) A relação criada pelo matemático suíço Leonhard Euler possui extrema importância na determinação do número de arestas, vértices e faces de qualquer poliedro convexo. Essa relação permite que os cálculos sejam realizados no intuito de determinarmos o número de elementos de um poliedro. A fórmula criada por Euler, também conhecida como “relação de Euler”, é a seguinte:

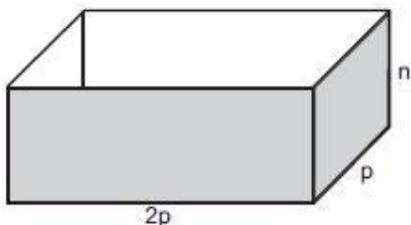
$$V - A + F = 2$$

Sendo que V = número de vértices, A = número de arestas e F = número de faces.

Quantas arestas têm um poliedro que possui 8 faces e 12 vértices?

Questão 02 (PUC-RJ – 2009- modificada)

Pretende-se fabricar uma caixa com a forma de um bloco retangular, aberta em cima como mostra a figura abaixo. O comprimento de um dos lados da base deve ser p e o outro lado da base $2p$, e a altura dessa caixa mede n .



- a) A base dessa caixa é um retângulo de comprimento $2p$ e largura p . Se p corresponde a 2 metros, quais as medidas da base?
- b) A partir dos dados do item (a), da questão anterior, determine o valor a medida n , altura da caixa, sabendo que o volume da caixa é 10m^3 . (LEMBRETE: o volume é o produto das três dimensões da caixa, ou seja, $V = 2p \times p \times n$.)
- c) O material para construir a base custa R\$ 10,00 por metro quadrado, ao passo que o material para construir as laterais, que possui quatro retângulos dois a dois iguais (um retângulo de comprimento p e largura n e outro de comprimento $2p$ e largura n) custa R\$ 6,00 por metro quadrado. Com os valores do item (a e b), calcule o custo de construção da caixa.