

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

**COMPREENSÕES SOBRE DERIVADA
E INTEGRAL COM O USO DE UM CAS
ON LINE: UM ESTUDO COM ALUNOS
DO TERCEIRO ANO DO ENSINO
MÉDIO**

Leozart das Silva Matos

Juiz de Fora (MG)

Dezembro, 2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
Pós-Graduação em Educação Matemática
Mestrado Profissional em Educação Matemática

Leozart da Silva Matos

**COMPREENSÕES SOBRE DERIVADA E INTEGRAL COM O USO DE
UM CAS ON LINE: UM ESTUDO COM ALUNOS DO TERCEIRO ANO
DO ENSINO MÉDIO**

Orientador: Prof. Dr. Antônio Olímpio Júnior

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Juiz de Fora (MG)

Dezembro, 2013

Leozart da Silva Matos

**COMPREENSÕES SOBRE DERIVADA E INTEGRAL COM O USO DE
UM CAS ON LINE: UM ESTUDO COM ALUNOS DO TERCEIRO ANO
DO ENSINO MÉDIO**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Antonio Olímpio Junior – Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF

Prof. Dr. Frederico da Silva Reis
Universidade Federal de Ouro Preto - UFOP

Prof^a. Dra. Maria Cristina Araújo de Oliveira
Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF

Juiz de Fora, dezembro de 2013.

DEDICATÓRIA

Ao meu saudoso pai, José Geraldo, pelo amor, incentivo e apoio em todos os momentos.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Doutor Antônio Olímpio Júnior, meus sinceros agradecimentos pela paciência, compreensão, orientação e revisão durante o desenvolvimento de toda pesquisa.

À Professora Doutora Maria Cristina Araújo de Oliveira, pela contribuição fundamental na disciplina de concepções e tendências em Educação Matemática, na qualificação e na banca da defesa da dissertação.

Ao Professor Doutor Victor Augusto Giraldo da UFRJ, pela valiosa contribuição no exame de qualificação, com sugestões e críticas.

Ao Professor Doutor Frederico da Silva Reis da UFOP, pela presença na banca de defesa da dissertação. Muito obrigado pelas contribuições fundamentais para correção e finalização do trabalho.

Aos professores do Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, que me possibilitaram a oportunidade de viver o maravilhoso ambiente universitário, na mesma instituição que me graduei. Em especial, um abraço para a Professora Doutora Regina Kopke e para o Professor Doutor Orestes Piermatei Filho.

Aos seis alunos que participaram da pesquisa, pela disponibilidade num momento importante de suas vidas.

Ao Colégio Raiz, na pessoa do diretor e amigo João José, pela oportunidade de usar as dependências da escola para as atividades de campo.

À professora Lili, que fez a revisão do texto da dissertação.

Aos colegas da turma 2012, pelo convívio e angústias compartilhadas.

Aos meus avós, José e Célia, pelo exemplo de honestidade e dignidade.

Aos meus irmãos, Leonardo e Gláucia, pela relação afetuosa mesmo que algumas vezes distante.

Aos amigos e familiares, pela compreensão devido ao afastamento durante o período do mestrado, em particular para minha cunhada Sheila pelos constantes pedidos de Xerox.

À minha adorada mãe, Rosângela, pela vida de amor, carinho e cuidados, mesmo nos momentos mais difíceis. Te amo.

Ao meu falecido pai, José Geraldo, que sempre me incentivou a fazer o mestrado. Infelizmente, não pode em vida presenciar nossa vitória, mas sei que esteve sempre comigo nesta caminhada.

Em especial ao amor da minha vida, minha esposa Fabiana. A maior incentivadora para a realização do mestrado, mesmo sabendo que abdicaríamos de momentos juntos. Incentivadora nos momentos difíceis e acolhedora nos momentos de angústia. Obrigado, amor de minha vida.

Aos dois maiores presentes que Deus me deu na minha vida. Às minhas filhas Yasmim e Lavínia. Mistura de amor, alegria, carinho, paixão e preocupação. Obrigado por existirem.

“Busque a simplicidade, e desconfie dela.”

Alfred North Whitehead (1891-1947), matemático britânico

RESUMO

O presente estudo teve como objetivo investigar compreensões dos conceitos de Derivadas e Integral construído por um grupo de alunos de terceiro ano do Ensino Médio de uma escola particular brasileira em um ambiente informatizado com o CAS on-line WolframAlpha e applets gerados pelo Geogebra. Embora a literatura sobre o ensino e aprendizagem de Cálculo seja bastante extensa, por outro lado, particularmente no Brasil, ela é quase sempre restrita a cenários do Ensino Superior. O estudo propôs uma nova abordagem para a compreensão dos conceitos de Derivada e de Integral, enfraquecendo manipulações algébricas procedurais, típicas das aulas de Cálculo em nível de graduação. Para este fim, nós exploramos o conceito de derivada como taxa instantânea de variação e a integral como função acumulação e área líquida sob uma curva. Os participantes trabalharam em pares com o CAS on-line WolframAlpha como uma ferramenta para toda a manipulação algébrica e algorítmica considerado necessário durante as atividades propostas. Metodologicamente, o estudo foi realizado como um experimento de ensino com o quadro teórico baseado nas ideias de Imagem de Conceito e Definição de Conceito. Os dados sugeriram que os participantes foram capazes de lidar com a CAS WolframAlpha com relativa facilidade, em parte devido à sua sintaxe bastante flexível. Também tiveram uma dificuldade inicial em termos de pensamento comparativo, o que levou a outra dificuldade inicial com a ideia de taxa instantânea de variação. Os participantes tiveram uma boa compreensão da integral como a área líquida sob uma curva, mas detectamos algumas dificuldades com a função de acumulação. Apesar destes problemas iniciais, os dados sugerem que a taxa de variação funcionou como raiz cognitiva para o conceito de derivada. Finalmente, a pesquisa sugere que ambos os conceitos de derivada e integral, bem como a sua conexão via Teorema Fundamental do Cálculo podem ser explorados conceitualmente de forma significativa para estudantes do ensino médio em contextos similares sob a abordagem proposta.

Palavras-chave: Cálculo no ensino médio. Tecnologia. WolframAlpha. Experimento de Ensino. Raiz cognitiva.

ABSTRACT

The present study aimed to investigate understandings of the concepts of Derivative and Integral constructed by a group of third-year students of a Brazilian private high school in digital environment with the CAS online WolframAlpha and applets generated by the Geogebra. Although the literature on teaching and learning Calculus is quite extensive, on the other hand, particularly in Brazil, it is almost always restricted to Higher Education settings. The study proposed a new approach to the concepts of Derivative and Integral with focus on conceptual understanding as well as weakening procedural algebraic manipulations typical in Calculus classes in undergraduate level. For this reason, we explored the concept of derivative as instantaneous rate of change and the integral as accumulation function and net area under a curve. Participants worked in pairs with the CAS online WolframAlpha as a tool for all algebraic and algorithmic manipulations deemed as necessary during the proposed activities. Methodologically, the study was conducted as a teaching experiment with the theoretical framework based on the ideas of Concept Image and Concept Definition. Data have suggested that the participants were able to deal the CAS WolframAlpha to some extent with ease, partially due to its quite flexible syntax. They also had an initial difficulty in terms of comparative thinking, which led to an initial difficulty with the idea of instantaneous rate of change. The participants had a good understanding of the integral as the net area under a curve, but we detected some difficulties with the accumulation function. Despite these initial problems, data suggest that the rate of change had a role as a cognitive root for the concept of derivative. Finally, the research suggests that both concepts of derivative and integral, as well as their connection via Fundamental Theorem of Calculus, can be explored conceptually in a significant way for high school students in similar settings under the proposed approach.

Keywords: Calculus in high school. Technology. WolframAlpha. Teaching Experiment. Cognitive root.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	REVISÃO DE LITERATURA	16
2.1	O ensino de Cálculo no ensino médio	20
3	REFERENCIAL TEÓRICO	28
3.1	A imagem do conceito e a definição do conceito	28
3.2	Raiz cognitiva	32
3.3	Organizador genérico	35
4	METODOLOGIA DE PESQUISA	38
4.1	Questões de pesquisa	38
4.2	Referencial metodológico: Experimento de Ensino	39
4.3	Contexto da pesquisa	42
4.4	As Tecnologias Informáticas	44
4.5	Dinâmica das sessões	57
4.6	Coleta dos dados	59
5	DESCRIÇÃO E ANÁLISES DAS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS	61
5.1	Encontro 1 - A Sintaxe do CAS on line	61
5.2	Encontro 2 - Atividade derivada	68
5.2.1	Atividade 1	68
5.2.1.1	Descrição da atividade 1	70
5.2.2	Atividade 2	74
5.2.2.1	Descrição da atividade 2	75
5.2.3	Atividade 3	78
5.2.3.1	Descrição da atividade 3	79

5.2.4	Atividade 4	84
5.2.4.1	Descrição da atividade 4	85
5.2.5	Atividade 5	87
5.2.5.1	Descrição da atividade 5	88
5.2.6	Análise da atividade derivada	95
5.3	Encontro 3: Atividade integral	97
5.3.1	Atividade 1	97
5.3.1.1	Descrição da atividade 1	98
5.3.2	Atividade 2	99
5.3.2.1	Descrição da atividade 2	100
5.3.3	Atividade 3	102
5.3.3.1	Descrição da atividade 3	103
5.3.4	Atividade 4	107
5.3.4.1	Descrição e da atividade 4	109
5.3.5	Atividade 5	111
5.3.5.1	Descrição da atividade 5	111
5.3.6	Atividade 6	114
5.3.6.1	Descrição da atividade 6	114
5.3.7	Atividade 7	117
5.3.7.1	Descrição da atividade 7	117
5.3.8	Análise da atividade integral	120
5.4	Encontro 4: Atividade TFC	121
5.4.1	Atividade 1	122
5.4.1.1	Descrição da atividade 1	122
5.4.2	Atividade 2	127

5.4.2.1	Descrição da atividade 2	128
5.4.3	Atividade 3	133
5.4.3.1	Descrição da atividade 3	134
5.4.4	Atividade 4	138
5.4.4.1	Descrição da atividade 4	139
5.4.5	Atividade 5	142
5.4.5.1	Descrição da atividade 5	143
5.4.6	Análise da atividade TFC	145
CONSIDERAÇÕES FINAIS		147
REFERÊNCIAS		151

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Com a intenção de analisar como são compreendidos os conceitos de derivada e integral, propusemos pesquisar tais conceitos com estudantes do Ensino Médio numa proposta em que os significados prevalecem sobre a técnica, o que configura uma abordagem distinta da desenvolvida tradicionalmente na maioria dos cursos de Cálculo. Várias pesquisas foram e estão sendo feitas sobre o ensino e aprendizagem de Cálculo, porém são raras no Brasil, aquelas produzidas no contexto do Ensino Médio.

A difícil transição de um grande número de egressos do ensino médio para a universidade, bem como a atuação e a experiência como professor de Matemática e Física nesse nível de ensino, despertou nosso interesse em localizar a investigação no contexto do terceiro ano. Com variadas aplicações e alto índice de reprovação no Ensino Superior, o Cálculo Diferencial e Integral é foco de vários trabalhos em Educação Matemática. Num desses trabalhos, Luz (2011) sustenta que “[...] uma visão muito comum entre os professores de Cálculo de que a causa desses altos índices de reprovação deve ser creditada à falta de base dos alunos egressos do Ensino Médio.” (p.8)

Segundo Tall (1991), no ensino básico a maior preocupação está concentrada na resolução de problemas, enquanto que no ensino superior temos também que nos preocupar com as definições formais, deduções e demonstrações. Para apresentar um resultado, este é decomposto e suas partes são demonstradas separadamente para mais tarde se encaixarem, tal como num quebra-cabeça. Porém, quem garante que um aluno consegue fazer alguma integração significativa entre as peças? E caso a faça alguma, que imagem ou imagens estará ele construindo? Nesse sentido, Tall afirma:

O problema no cálculo é realçado pelo fato de que alguns alunos aparecem para fazer conexões e outros não. Assim, um curso que se destina a dar maior conhecimento, fazendo conexões pode ser uma ajuda positiva para alguns e um fracasso para outros¹. (TALL, 1997, p.8)

A partir desta constatação, por que não explorar algumas das ideias fundamentais do Cálculo no ensino médio? O que acontece quando se apresenta conceitos mais refinados em níveis de estudo anteriores ao da graduação?

Atualmente, no Brasil, poucas escolas de ensino médio incluem os conceitos de limite, derivada ou integral no currículo, ao contrário de outros países como Portugal e França. Não deixa de ser curioso, no entanto, que tais conteúdos já fizeram parte da grade curricular do ensino médio brasileiro. De acordo com Lima (2013):

Com a Lei de Diretrizes e Bases em 1961, a estrutura da escola brasileira foi dividida em quatro graus escolares: primário, ginásial, colegial e superior. Com a flexibilização do currículo escolar, desaparece o ensino do Cálculo na escola secundária, salvo em algumas escolas isoladas, situação que perdura até hoje. (LIMA, 2013, p.48)

No entanto, concordamos com Pereira (2009) que “nosso pensamento de que trabalhar os conceitos do Cálculo no Ensino Médio, tal como se encontram organizados no Ensino Superior, não resolveria o problema, mas, ao contrário, faria somente com que este fosse antecipado.” (p.48).

Na grande maioria dos cursos superiores, a disciplina de Cálculo é ministrada na sequência definição-teorema-demonstração-exemplos-exercícios, com ênfase em processos técnicos e algébricos e pouca preocupação com a compreensão conceitual.

Porém, como explorar os conceitos de derivada e integral no ensino médio, sem os procedimentos algébricos? Até há pouco tempo, isso seria virtualmente impossível, mas o advento da informática e da popularização dos sistemas de computação algébrica (CAS), essa situação mudou dramaticamente. Nesse sentido,

¹ The problem in the calculus is highlighted by the fact that some students appear to make connections and others do not. Thus, a course which is designed to give greater insight by making connections may be a positive help for some and a failure for others.

A utilização dos computadores é inevitável e irreversível. O uso dos computadores como ferramenta didática tem aparecido com frequência nas pesquisas sobre o ensino de Cálculo. A questão que se apresenta então não é se “se deve usar ou não o computador para o ensino de Cálculo”, mas ‘**como**’ e ‘**quando**’ usar esta ferramenta. Além disso, não podemos perder de vista que o computador, assim como qualquer outra máquina, possui suas limitações, sejam estas de naturezas técnicas ou mesmo pedagógicas. Portanto, ao trabalharmos com tal instrumento, precisamos, assim como os cientistas em seus laboratórios de pesquisa, ter a noção exata do seu uso, de sua finalidade, de suas potencialidades e limitações. (LUZ apud RESENDE, 2011, p.13).

Mais recentemente, a disponibilização de alguns CAS na WEB, dentre os quais o WolframAlpha aumentou ainda mais o espectro de possibilidades de utilização dessa tecnologia. Assim, a produção de gráfico e quase todas as manipulações algébricas, incluindo-se o próprio cálculo de derivadas e de grande parte das integrais tornaram-se acessíveis via uma simples sequência de toques nas telas de milhões de tablets e de smartphones, equipamentos com presença ubíqua nas mãos de milhões de adolescentes de todo o planeta.

E foi, portanto, motivados por essa nova realidade, que decidimos investigar como alunos do terceiro ano de Ensino Médio compreendem os conceitos de derivada e de integral tendo disponíveis os CAS Wolfram Alpha e o Geogebra.

A abordagem metodológica escolhida foi orientada pelo conceito de Experimento de Ensino, conforme proposto por Steffe e Thompson (2000). Segundo os autores, o objetivo é analisar como os alunos raciocinam, o que dizem e o que fazem quando se envolvem em uma atividade matemática.

Como referencial teórico, utilizamos as ideias de Imagem do Conceito e Definição do Conceito de Tall e Vinner (1981). As análises foram feitas de forma a comparar as imagens dos conceitos de derivada e integral desenvolvida pelos alunos durante as atividades com as definições dos conceitos de derivada e de integral.

Um destaque importante está no fato de que sempre que possível uma atividade envolveu uma representação algébrica, gráfica, tabular, em imagem ou dinâmica. Outro ponto relevante é que as atividades são contextualizadas e interdisciplinares com conteúdos de Física, Biologia e Economia.

As atividades foram realizadas com três duplas do ensino médio de uma escola particular em Ubá, Minas Gerais.

CAPÍTULO 2

REVISÃO DE LITERATURA

Na Matemática, comparar é fundamental. Estamos constantemente comparando. Quando medimos um comprimento, uma área ou um volume, estamos comparando com uma unidade previamente estabelecida. Neste sentido, o Cálculo Diferencial e Integral é peça fundamental na Matemática, já que com ele estamos comparando duas ou mais grandezas.

Com as comparações, Cálculo é pura dinâmica. Com o Cálculo Diferencial determinamos o quanto está variando uma grandeza em relação à outra enquanto que com o Cálculo Integral calculamos o quanto uma grandeza acumulou a partir de sua taxa de variação em relação à outra grandeza.

Um dos propósitos da função é representar como as coisas mudam. Com este significado é natural que se passe a considerar os conceitos de cálculo da taxa de variação (diferenciação) e crescimento acumulado (integração) juntamente com o notável teorema fundamental do cálculo que nos diz em que a diferenciação e integração são, essencialmente, os processos inversos. O cálculo tradicionalmente foca no domínio de métodos simbólicos de derivação e integração e aplicá-los para resolver um conjunto de problemas. É ao mesmo tempo um clímax de matemática escolar e uma porta de entrada para desenvolvimentos teóricos.² (TALL, 1997, p.1, tradução nossa)

No entanto, o Cálculo está entre os maiores pesadelos dos alunos de nosso ensino superior.

Cálculo. Poucas palavras inspiram mais temor nos corações e mentes dos estudantes de todos os níveis. Em uma sala de vinte pessoas, pelo menos um vai ter uma história para contar sobre a sua experiência nesta classe. Haverá também muitos que são positivos que nunca poderia fazê-lo através de uma classe. A imagem comum de uma aula de cálculo é aquele em que

² Texto original: One purpose of the function is to represent *how things change*. With this meaning it is natural to move on to consider the calculus concepts of the *rate of change* (differentiation) and *cumulative growth* (integration) together with the remarkable fundamental theorem of calculus that tells us that differentiation and integration are essentially inverse processes. The calculus traditionally focuses on mastery of symbolic methods for differentiation and integration and applying these to solve a range of problems. It is both a climax of school mathematics and a gateway to further theoretical developments.

os estudantes mais talentosos matematicamente, do ensino médio ou universitário, estão trabalhando febrilmente em problemas longos. A atmosfera desta sala é solene, silencioso, estudioso, e sério.³ (BARGER E MCCOY, 2010, p.349, tradução nossa)

O Cálculo, geralmente, é uma disciplina de início de curso, muitas das vezes, lecionada logo no primeiro período. O Cálculo também é conhecido como um dos maiores reprovadores do ensino superior e vários trabalhos em Educação Matemática foram e estão sendo realizados de forma a entender o porquê de tanto insucesso.

Olímpio Júnior (2006) apresenta índices de não aprovados, alunos que abandonaram o curso ou foram reprovados por nota ou frequência, de duas pesquisas. Na pesquisa de Barufi, de 1999, os índices da USP, em 1995, chegaram 66,9% na disciplina MAT 135, Cálculo para Funções de uma Variável Real. Já na pesquisa de Resende, de 2003, apresentava dados da UFF, no período de 1996 a 2000, quando o índice variou de 45% a 95%. Porém, o autor revela que este fenômeno não é privilégio das universidades brasileiras, mas sim, um fenômeno mundial apresentando dados de outras duas pesquisas onde os índices de não aprovação nas instituições americanas, mesmo depois do movimento de Reforma do Cálculo, iniciado em 1986, são elevados.

Afinal, de quem é a culpa de tamanha reprovação? Luz (2011) faz uma análise da situação.

[...] parece que chegamos a um processo cíclico, já que os argumentos docentes tropeçam na seguinte barreira: os próprios professores universitários são os responsáveis pela formação dos professores da escola básica que, por sua vez, são os responsáveis pela formação dos alunos que (mal preparados) ingressam na universidade. (LUZ, 2011, p.10)

Na tentativa de amenizar a situação, muitas universidades, como UFF e UFRGS, criaram disciplinas, tais como Pré-cálculo ou Cálculo Zero, ou Introdução ao Cálculo, ou ainda Matemática Básica. O objetivo é suprir deficiências dos alunos

³ Texto original: Calculus. Few words inspire more awe in the hearts and minds of students at all levels. In a room of twenty people, at least one will have a story to tell about his or her experience in this class. There will also be many who are positive that they could never make it through such a class. The common image of a calculus class is one in which the most mathematically talented high school or university students are working feverishly on long problems. The atmosphere of this room is solemn, silent, studious, and serious

ingressantes que possam atrapalhar no desenvolvimento da disciplina de Cálculo. Porém, Pereira apud Resende (2009) destaca que os índices de Cálculo I não se alteraram na UFF mesmo depois da criação da disciplina Matemática Básica. E mais, os não aprovados em Matemática Básica em 1998 passaram dos 90%, ou seja, criou-se outro obstáculo antes do Cálculo.

No Brasil, segundo Lima (2013), o Cálculo foi introduzido nos cursos superiores para fornecer ferramentas para os futuros militares e engenheiros resolverem seus problemas. Porém,

Com a fundação da Universidade de São Paulo em 1934 e com a introdução do curso de Análise Matemática de Fantappiè, o ensino do Cálculo no país passou por grandes transformações e adquiriu como uma de suas características mais marcantes a valorização do rigor simbólico-formal na apresentação dos conteúdos. Com isso, grande parte das universidades brasileiras – mesmo aquelas que diziam continuar ensinando Cálculo Diferencial e Integral – na prática passaram a ensinar Análise. (LIMA, 2013, p.13)

Segundo o autor, com as dificuldades dos ingressantes no ensino superior com o curso de Análise, foi necessária a inclusão da disciplina do Cálculo como pré-requisito da Análise.

Em resumo, o ensino do Cálculo passou por diversas transformações ao longo dos anos, mas não houve uma preocupação em discutir quais deveriam ser os objetivos específicos dessa disciplina e, principalmente, o seu papel nos mais diversos cursos de graduação. De acordo com Resende (2003), da maneira como as disciplinas de Cálculo e de Análise estão estruturadas no ensino superior, é a Análise quem traça as diretrizes para o ensino do Cálculo, ocorrendo uma contradição em relação à origem histórica destes dois campos de conhecimento. Com isso, o ensino do Cálculo é o grande prejudicado, já que não consegue ter outro ponto de referência que não seja esta visão pré-analítica de tal disciplina. (LIMA, 2013, p.13)

Portanto, no Brasil, até a década de 1960 do século passado, o Cálculo se apresentava com o nome de Análise Matemática onde reinavam as definições e demonstração. Neste período ocorre a mudança do nome para Cálculo e uma maior ênfase na parte operacional, ou seja, a manipulação algébrica das técnicas de derivação e integração.

Nas décadas 1970 e 1980,

[...] a transição entre as disciplinas Análise Matemática e Cálculo foi lenta, gradual e cheia de idas e vindas, uma vez que durante as décadas de 1970

e 1980 existiram movimentos tanto de aproximação quanto de dissociação entre estas duas disciplinas: cursos de Cálculo mais voltados para o porquê das coisas funcionarem, com uma visão mais analítica, rigorosa e demonstrativa, se aproximando dos cursos de Análise bem como cursos de Cálculo que privilegiavam as técnicas de derivação e integração, a aplicabilidade e o ferramental. (RAAD, 2012)

Percebemos, portanto, a preferência por definições, teoremas, demonstrações, exercícios e técnicas para cálculos de limites, derivadas e integrais. Ainda hoje, a grande maioria dos cursos de Cálculo é ministrada desta forma. Sobre o ensino de Cálculo nos cursos de ensino superior

De modo geral, as aulas são expositivas. O centro do processo ensino-aprendizagem está no professor, que deve transmitir os conhecimentos matemáticos ao aluno. Os conteúdos são apresentados prontos, de forma inquestionável e pouco tem a ver com situações da realidade. São apresentadas definições, enunciados e teoremas que a seguir são demonstrados. Seguem técnicas de Cálculos e exercícios. (GUEDES E ASSIS, apud FRANCHI, 2009, p.4).

Dessa forma, identificamos uma ênfase ao processo de memorização procedimental sem significado em detrimento à compreensão conceitual nos cursos de Cálculo, como constata TALL (1997),

Se os conceitos fundamentais de cálculo (como o conceito de limite subjacente diferenciação e integração) são difíceis de dominar, uma solução é concentrar-se nas rotinas simbólicas de diferenciação e integração. Pelo menos esta ressoa com experiências anteriores em aritmética e álgebra em que uma sequência de manipulações são realizadas para obter uma resposta.

O problema é que tais rotinas muito em breve tornam-se apenas, rotina, de modo que o aluno começa a ter dificuldade para responder as perguntas que são conceitualmente desafiadoras. O professor compensa definindo perguntas nos exames que os alunos possam responder e o círculo vicioso de ensino e aprendizagem processual é posta em movimento. Como resultado, as ligações conceituais tornam-se menos susceptível de ser feitas.⁴ (TALL, 1997, p.17, tradução nossa)

⁴ Texto original: If the fundamental concepts of calculus (such as the limit concept underpinning differentiation and integration) prove difficult to master, one solution is to focus on the symbolic routines of differentiation and integration. At least this resonates with earlier experiences in arithmetic and algebra in which a sequence of manipulations are performed to get an answer. The problem is that such routines very soon become just that—routine, so that student begin to find it difficult to answer questions that are conceptually challenging. The teacher compensates by setting questions on examinations that students can answer and the vicious circle of procedural teaching and learning is set in motion. As a result, conceptual connections become less likely to be made.

Tall ainda argumenta que os alunos criam habilidades para enfrentar o próximo teste, o próximo exame. Quando suas habilidades falham, eles criam novos meios de enfrentar os problemas de modo a acertá-los, mesmo que estes não façam o menor sentido para eles. Segundo o autor, até para alguns dos melhores alunos, o que os torna melhores é que suas habilidades de enfrentamento estão funcionando melhor do que a de outros, o que não lhes garante que ocorra qualquer compreensão real da matemática.

Neste sentido, para Dreyfus (1991), o que distingue o pensamento matemático avançado do elementar é a complexidade com que ele é tratado. Para o autor, os ótimos alunos que chegam ao ensino superior são bons em seguir padrões onde devem seguir uma rotina, uma sequência previamente estabelecida. Não são capazes de analisar ou explicar o que por eles foi feito. Caso o enunciado do exercício ou tarefa seja alterado de forma a exigir algum raciocínio ou mudança da rotina, os alunos não conseguem resolvê-lo.

[...] a sequência de definições, teoremas e provas (que é típica dos cursos universitários), pode-se mostrar eficiente para a Matemática, mas não para permitir o crescimento psicológico do desenvolvimento da mente humana.
⁵(TALL, 1991, prefácio p.xiv, tradução nossa.)

2.1 O ensino de Cálculo no ensino médio

Para Tall (1991) enquanto que nas séries iniciais o professor apresenta vários exemplos até chegar ao conceito geral, nas universidades os professores começam do conceito geral para depois partir para os exemplos e aplicações.

Segundo Robert e Schwarzenberger(1991),

[...] mais conceitos, menos tempo, a necessidade de poderes maiores de reflexão, maior abstração, menos problemas significativos, maior ênfase nas demonstrações, maior necessidade de versatilidade na aprendizagem, maior necessidade de controle sobre a aprendizagem. A confusão causada pelas novas definições coincide com a necessidade de maior abstração no pensamento dedutivo. Fazer juntas estas quantitativas mudanças produz uma mudança qualitativa que caracteriza a transição do pensamento

⁵ Texto original: [...] a sequence of definitions, theorems and proofs (as happens in a typical university course) may show the logical structure of the mathematics, but it fails to allow for the psychological growth of the developing human mind.

matemático avançado.⁶ (ROBERT E SCHWARZENBERGER, 1991, p.133, tradução nossa).

Dessa forma, a transição do ensino médio para o ensino superior é árdua e impactante. Para amenizar a discrepância entre o que é ensinado no ensino médio e o ensino superior, são muitos os que defendem a inclusão do Cálculo no ensino médio.

Introduzir conceitos de Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio auxilia na compreensão de algumas propriedades, entre elas o limite de uma função, ferramenta indispensável para a compreensão de fenômenos físicos, como velocidade, força, etc. Desse modo, a falta desse conteúdo no Ensino Médio, torna a Física mais complexa do que realmente apresenta ser. Então porque não preparar os alunos no ensino médio, com a inclusão de conceitos de Limite de uma Função, por exemplo, com estratégias que tornem mais amplo o aprendizado dos conteúdos? (DOMINGUINI et.al., 2011, p.3)

Segundo Ma (2005) existem três grupos de pesquisadores com opiniões diferentes sobre o assunto.

Os pesquisadores, no entanto, não concordam sobre se os alunos podem beneficiar com o acesso mais cedo para cursos de matemática avançadas. Os defensores da aceleração precoce da matemática acreditam na natureza sequencial da matemática, e argumentam que a aceleração inicial dos alunos proporciona-lhes maiores oportunidades e potencialidades para continuar os cursos de matemática. Os opositores da aceleração precoce da matemática acreditam na natureza seletiva da matemática, e eles argumentam que a aceleração precoce deve ser limitada aos estudantes matematicamente talentosos e a aceleração precoce de estudantes comuns os frustram e os inibem para outros cursos de matemática. Tomando o meio termo neste debate, outros pesquisadores apreciam a ideia de aceleração precoce dos estudantes em matemática, mas se preocupam com as consequências da aceleração precoce em matemática. Sua preocupação é se os alunos podem tornar-se muito exaustos fisicamente e mentalmente para perseguir os cursos de matemática mais avançados (pré- cálculo e cálculo) na escola, uma vez que eles são acelerados precocemente em matemática avançada no ensino médio.⁷ (MA, 2005, p.1, tradução nossa)

⁶Texto original: [...] more concepts, less time, the need for greater powers of reflection, greater abstraction, fewer meaningful problems, more emphasis on proof, greater need for versatile learning, greater need for personal control over learning. The confusion caused by new definitions coincides with the need for more abstract deductive thought. Taken together these quantitative changes engender a qualitative change which characterizes the transition to advanced mathematical thinking.

⁷ Texto original: Researchers, however, do not agree on whether students can benefit from early access to advanced mathematics courses. Advocates of early acceleration in mathematics believe in the sequential nature of mathematics, and they argue that early acceleration of students provides them with greater opportunities and potentials to pursue further mathematics courses. Opponents of early acceleration in mathematics believe in the selective nature of mathematics, and they argue that

Algumas escolas no Brasil, por exemplo, o Coluni (Escola de Aplicação da Universidade Federal de Viçosa, Minas Gerais), trazem em suas ementas de Matemática do terceiro ano de ensino médio os tópicos limite e derivada, mas esses casos são exceções, apesar de que:

Uma introdução ao Cálculo Diferencial e Integral fez parte do currículo das escolas no Brasil por duas vezes. Segundo Carvalho (1996), a primeira em 1891, com a reforma proposta por Benjamim Constant no início da República e uma segunda vez, no governo de Getúlio Vargas, na Reforma Capanema, em 1942, constando do currículo escolar oficialmente até 1961. (DOMINGUINI et.al. p.3, 2011)

Godoy (2010) apresenta uma análise do ensino de Matemática na França, Espanha e Portugal. Apesar de diferenças nas estruturas do ensino secundário desses países com o ensino médio brasileiro algumas características são interessantes para comparação.

early acceleration should be limited to selected mathematically gifted students and early acceleration of ordinary students frustrates and alienates them for further mathematics courses. Taking the middle ground in this debate, other researchers appreciate the idea of early acceleration of students in mathematics but worry about the consequences of early acceleration in mathematics. Their concern is whether students can become too exhausted both physically and mentally to pursue the most advanced mathematics courses (pre-calculus and calculus) in high school, once they are accelerated early into advanced mathematics in middle school.

Relação dos conteúdos comuns aos programas da
Espanha, França e Portugal

	CONTEÚDOS
a	Resolução algébrica e gráfica das equações e inequações de 1º e 2º graus.
b	Sistemas de equações lineares.
c	Números racionais, irracionais e reais.
d	Sequências Numéricas. Progressão Aritmética e Geométrica.
e	Polinômios e operações.
f	Estudo das funções lineares, afins, constantes, quadráticas, exponenciais e logarítmicas, circulares e trigonométricas.
g	Crescimento, decrescimento, máximo e mínimo de uma função.
h	Números Complexos.
i	Limite, Continuidade, Taxa de Variação.
j	Conceito de Derivada e Aplicações.
k	Geometria Analítica – Sistema de referência no plano, vetores no plano, operações, módulo, distância entre pontos do plano, produto escalar de vetores.
l	Geometria Plana e Espacial.
m	Trigonometria no triângulo retângulo e no ciclo trigonométrico.
n	Conceitos básicos de Estatística, conceitos básicos no tratamento de dados amostrais, distribuições uni e bidimensionais, medida de dispersão.
o	Conceitos básicos de probabilidade, medida de incerteza, cálculo de probabilidades, experiências aleatórias simples e compostas, independência de sucessos, tabelas de contingência, diagramas de árvore, leis da probabilidade, probabilidade condicionada, total e a <i>posteriori</i> , distribuição de probabilidade normal e binomial.

Figura 1: Imagem da tabela de conteúdos comuns aos programas de Espanha, França e Portugal (GODOY, 2010, p.96)

Segundo o autor,

Na França, na Espanha e em Portugal, há um currículo comum obrigatório, o que não ocorre no Brasil. Ao optar por definir competências e habilidades, os PCNEM⁸ não explicitam conteúdos mínimos obrigatórios, supondo-se, porém, que deva haver equilíbrio entre temas da Álgebra, da Geometria, das Funções e de Gráficos e a Probabilidade e a Estatística. É interessante destacar que em todos os países, o Cálculo Diferencial e Integral aparece no currículo mínimo. No Brasil, as coleções didáticas não mais tratam desse tema e, portanto, é provável que a maioria das escolas também não o faça. (GODOY, 2010, p.95)

⁸ PCNEM – Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio

Nos Estados Unidos, existe uma grande preocupação com o baixo número de alunos interessados nas disciplinas de pré-cálculo e Cálculo. Barger e MacCoy (2010) apresentaram exemplos de atividades que podem ser aplicadas aos alunos do ensino fundamental (8º ano) sobre a variação das grandezas a partir do gráfico. Os alunos analisam o gráfico e criam uma estória para descrever os dados que o gráfico apresenta. Por exemplo:

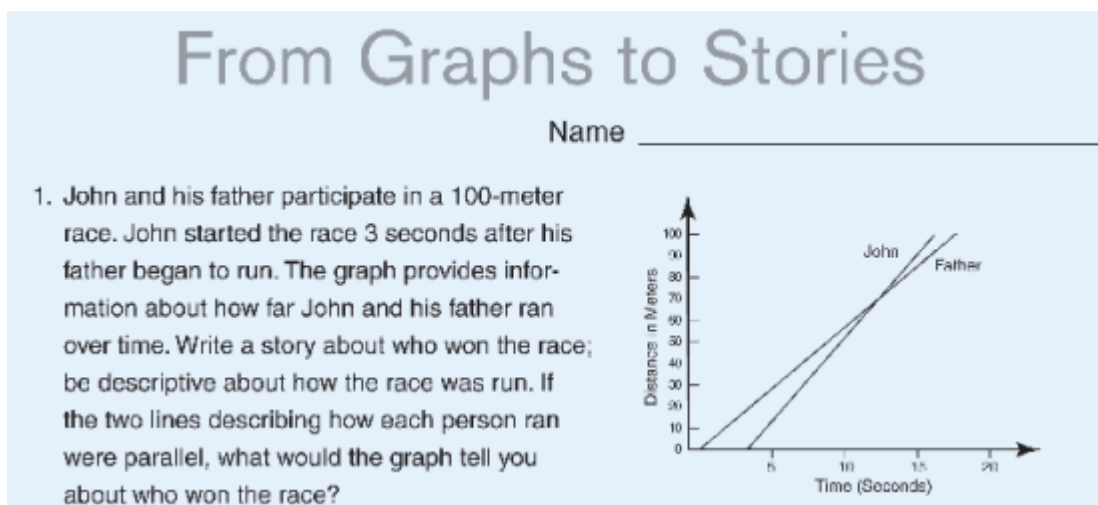


Figura 2: Exemplo de uma atividade de introdução ao Cálculo (BARGER E MCCOY, 2010, p.350)

Para os autores, “Afirmamos que, se a base certa é colocada no ensino médio, mais alunos serão dispostos e ansiosos para seguir mais longe em matemática.”⁹ (Barger e MacCoy, 2010, p.349, tradução nossa)

Segundo um estudo desenvolvido pela Breakthrough Collaborative¹⁰(2012), nada impede de estudar matemática avançada em nível fundamental e médio, seja álgebra ou cálculo. Quanto mais cedo o aluno tiver contato com estas disciplinas mais facilidade ele terá no estudo de matemática avançada. Apresenta dados dos alunos com Bacharelado em Matemática, 83% estudaram Cálculo na escola, enquanto os outros 17% tiveram como “maior” aula Geometria.

No Brasil, Guedes e Assis (2009) apresentam algumas das ideias defendidas por Ávila (1991) de que alguns conceitos como limite, derivada, razão incremental e

⁹ Texto original: We contend that if the right foundation is laid in middle school, more students will be willing and eager to go further in math.

¹⁰ Instituição que usa o método colaborativo de “alunos ensinam alunos” e “professores ensinam professores”, com sede em São Francisco, Estados Unidos.

declividade de uma reta já poderiam ser trabalhadas de forma simples no primeiro ano do ensino médio. Poderia ser revertido todo formalismo e longa terminologia sobre funções para um contexto mais apropriado apresentando noções básicas do Cálculo e suas aplicações, de maneira espontânea, progressiva e proveitosa.

Nascimento (2000) vai mais além. Defende que alguns conceitos de limite, derivada e integral podem ser introduzidos adequadamente nas séries iniciais, no ensino fundamental. Como exemplo, o autor indica noções de intervalos abertos, fechados e infinitos, taxa de variação e áreas.

O autor considera que a construção da base conceitual dos alunos para o Cálculo inicia-se ainda no ensino fundamental e que se a base não for construída o problema tenderá a se agravar no ensino médio e posteriormente no ensino superior.

Assim, a metodologia adotada nos segmentos de 1° e 2° graus¹¹ possui diferenças gigantes em relação às dos cursos superiores e, praticamente, impede que a base conceitual para o cálculo seja desenvolvida. Totalmente incompatível com o ensino na universidade, ela acaba prejudicando o desempenho do aluno em todas as demais disciplinas do curso universitário devido a um adestramento recebido durante 11 anos através deste processo equivocado. O resultado é que isto, não só, contribui para a redução dos conhecimentos básicos necessário ao estudante que ingressa na universidade, como também dificulta a sua recuperação. (NASCIMENTO, 2000, p.7)

Alguns obstáculos são observados numa possível inclusão do Cálculo no ensino médio. Um deles é a falta de livros didáticos para o ensino médio que apresentam tópicos de Cálculo. Para Dominghini et al.(2011) atualmente alguns livros já apresentam tópicos de Cálculo como GIOVANNI E BONJORNO (2005), entretanto, apenas no terceiro ano do ensino médio, onde pouco se pode aproveitar do curso.

Outro obstáculo, muito destacado por professores do ensino médio, está relacionado à sobrecarga do currículo de Matemática no ensino médio. Guedes e Assis apud Ávila (2009) argumentam que o fato de os programas do ensino médio de Matemática não comportarem a inclusão do Cálculo é um equívoco, já que consideram os programas atuais mal estruturados.

¹¹ Os níveis de ensino pelo autor relatado 1° e 2° graus são os atuais ensinos fundamental e médio.

Na sua pesquisa¹², Guedes e Assis (2009) constataram que apesar de considerarem muito importantes os elementos do Cálculo no ensino médio, dos professores já inseridos no mercado de trabalho que participaram da pesquisa, 80% se consideraram despreparados para ensinar esse assunto. Como destaca Domingui et.al.(2011) “[...] na maioria das vezes, estes temas não são ensinados sob o pretexto de serem difíceis e impróprios.” Para Guedes e Assis (2009) o despreparo dos professores seria a maior preocupação para a inclusão do Cálculo no ensino médio.

Percebemos, assim, que existem dificuldades entre o professor de Matemática e o Cálculo, criadas não só por sua formação acadêmica deficiente e insuficiente, mas também devido a muito outros fatores que merecem ser pesquisado. O reflexo destas dificuldades, entre o professor e esta disciplina, pode ser constatado analisando o universo das opiniões e sentimentos do professor de Matemática sobre o tema, trazendo uma exteriorização dos mesmos para o universo do mundo real e concreto, onde só neste será possível à solução para as amarguras e frustrações destes. (GUEDES E ASSIS, 2009, p.5).

Acreditamos que seja possível trabalhar com conceitos de Cálculo tanto no ensino fundamental quanto no médio. Não que seja necessário criar um capítulo sobre Cálculo nessas séries, mas dentro de certos tópicos podem-se apresentar alguns conceitos intuitivamente, sem definições formais.

Por exemplo, quando se trabalhar com números racionais destacar a comparação que se tem quando se faz uma razão. Ao trabalhar com sistema de medidas, fazer comparações entre grandezas diferentes através de razões que são de fácil compreensão como, densidade, vazão e até mesmo potência. No cálculo de áreas pode-se destacar o cálculo da área do círculo como um limite da área de um polígono regular inscrito nesta circunferência.

Sabemos das dificuldades que são encontradas para o desenvolvimento deste tipo de trabalho, já que na formação acadêmica não somos preparados para tal. Geralmente, sentimos mais confortáveis em trabalhar um conteúdo da forma como foi trabalhado conosco. Portanto, é necessária uma reformulação nas licenciaturas de Matemática de forma que o professor tenha contato com novas

¹² Pesquisa realizada com professores nas escolas de ensino médio da cidade do Natal/RN, em 2009.

abordagens de ensino e que possa preparar o aluno a desenvolver a compreensão dos conceitos e não apenas métodos mecânicos para resolução de exercícios.

No ensino médio alguns dos conceitos podem ser tratados até com mais detalhes, mais aplicações. Porém, de forma alguma, devemos ter o Cálculo no ensino médio da forma como é apresentado no ensino superior. Seria apenas adiantar um grande problema.

CAPÍTULO 3

REFERENCIAL TEÓRICO

3.1 A imagem do conceito e a definição do conceito

Na sequência definição-teorema-demonstração-exemplos-exercícios, modo tradicional de ensino de Cálculo nas universidades, a compreensão da definição é de vital importância. Giraldo (2004) apresenta a visão de Vinner sobre esse processo:

O autor enumera uma série de premissas nas quais se baseiam a apresentação e organização de muitos livros texto e aulas de matemática:

1. Conceitos são principalmente adquiridos por meio de suas definições.
2. Estudantes usarão definições para resolver problemas e demonstrar teoremas, quando necessário, de um ponto de vista matemático.
3. Definições devem ser mínimas. (Isto é, definições não devem conter partes que podem ser matematicamente deduzidas a partir de outras partes da definição.)
4. É desejável que definições sejam elegantes.
5. Definições são arbitrárias. (Isto é, definir em matemática se reduz a atribuir nomes a entidades, ao gosto do autor.) (GIRALDO, 2004, p.12)

Segundo Dreyfus(1991), representar um conceito significa gerar uma amostra, um exemplo, uma imagem do mesmo. Porém este instante gerado não especifica se é simbólico ou mental e nem indica o quão geral são os significados dos termos na representação mental e como são desenvolvidos. Nesse sentido, usamos

[...] o termo imagem do conceito para descrever a estrutura cognitiva total que está associada com o conceito, que inclui todas as imagens mentais, propriedades e processos associados. Ele é construído ao longo dos anos, através de experiências de todos os tipos, mudando à medida que o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece.¹³ (TALL, VINNER, 1981, p.152, tradução nossa)

¹³ Texto original: We shall use the term concept image to describe the total cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and processes. It is built up over the years through experiences of all kinds, changing as the individual meets new stimuli and matures.

Vinner sustenta que

A imagem do conceito é algo nãoverbal associada em nossa mente com o nome do conceito. Ele pode ser uma representação visual do conceito caso o conceito tenha representação visual; ele também pode ser uma coleção de impressões ou experiências. A representação visual, os quadros mentais, as impressões e as experiências associadas com o nome do conceito podem ser traduzidas para formas verbais. (VINNER, 1991, p.68)

A imagem do conceito, como destaca Giraldo (2004), “não é uma estrutura estática, ela sofre transformações de acordo com o desenvolvimento cognitivo do sujeito, podendo ter atributos incluídos, excluídos ou modificados”.

Decorar um conceito ou definição não garante êxito na aprendizagem pretendida por um ensino fundado na sequência definição-teorema-demonstração-exemplos-exercícios. Muitos conceitos de nosso dia a dia são adquiridos sem qualquer envolvimento de definições, já que tendo uma imagem do conceito formada torna-se dispensável sua definição.

Tall e Vinner (1981) tem a definição do conceito como

[...] sendo uma forma de palavras usadas para especificar o conceito. Ele pode ser aprendido por um indivíduo de forma mecânica ou mais significativamente aprender relacionando com um maior ou menor grau com o conceito como um todo. Ele pode também ser uma reconstrução pessoal pelo aluno de uma definição. É, em seguida, a forma de palavras que o aluno usa para sua própria explicação de (evocada) imagem do conceito. Se a definição do conceito é dada a ele ou construída por si mesmo, ele pode variar ao longo do tempo.¹⁴ (TALL & VINNER, 1981, p.152, tradução nossa)

Segundo Giraldo (2004), “entendemos aqui por *definição formal* aquela consensualmente aceita pela comunidade matemática dentro de um dado contexto social, histórico e teórico”. O autor ainda destaca que a imagem do conceito pode não coincidir com a definição do conceito pessoal, e também pode não coincidir com a definição formal do conceito. Ainda resume que

¹⁴ Texto original: We shall regard the concept definition to be a form of words used to specify that concept. It may be learnt by an individual in a rote fashion or more meaningfully learnt and related to a greater or lesser degree to the concept as a whole. It may also be a personal reconstruction by the student of a definition. It is then the form of words that the student uses for his own explanation of the (evoked) concept image. Whether the concept definition is given to him or constructed by himself, he may vary it from time to time.

[...] uma definição de conceito consistente com a definição formal, uma imagem de conceito rica e uma imagem de conceito consistente são fenômenos mutuamente independentes. Assim sendo, esta teoria sugere que a abordagem pedagógica para um conceito matemático deve objetivar não somente a compreensão da definição formal, mas também o enriquecimento das imagens de conceito desenvolvidas pelos estudantes. (GIRALDO, 2004, p.10)

Tall (1981) argumenta que nas séries iniciais o professor de matemática apresenta vários exemplos até chegar ao conceito geral. O foco está em resolver problemas. Nas universidades os professores tendem a partir da definição para os exemplos e aplicações. Os alunos se preocupam com as definições formais, deduções e demonstrações. Para o autor, o professor deveria inicialmente dedicar-se mais a exemplos e principalmente contraexemplos antes das definições formais.

A enorme variedade de imagens do conceito individual sugere que não é simplesmente um caso de transmissão de conhecimentos matemáticos de uma maneira formal. A alternativa é a de dar aos alunos experiências mais ricas de modo que eles sejam capazes de formar um conceito mais coerente. Não é tão fácil como parece, já que envolve um equilíbrio entre a variedade de exemplos e contraexemplos necessários para obter uma imagem coerente e a complexidade que pode aumentar o demanda cognitiva a níveis inaceitáveis.¹⁵ (TALL, p.4, 1988, tradução nossa)

Para os autores Tall e Vinner (1981) a parte da imagem do conceito que é ativada num determinado tempo é chamada de imagem do conceito evocada. Como destaca Giraldo (2004), uma parte da imagem do conceito pode ser evocada para “como por exemplo, resolver um problema, responder ou formular uma questão, identificar uma propriedade e assim por diante”.

Os autores ainda definem um fator de conflito potencial como uma parte da imagem do conceito que pode conflitar com outra parte da imagem do conceito ou com a definição do conceito. “Tais fatores de conflito potencial podem jamais ser evocados, permanecendo como porções inativas da imagem de conceito, sem nunca serem percebidos pelo indivíduo ou provocando, em certos casos, uma vaga sensação de insegurança.” (GIRALDO, 2004, p.15).

¹⁵ Texto original: The sheer variety of individual concept imagery suggests that it is not simply a case of passing on mathematical knowledge in a formal way. The alternative is to give the students richer experiences so that they are able to form a more coherent concept. The latter is not as easy as it sounds, as it involves a balance between the variety of examples and nonexamples necessary to gain a coherent image and the complexity which may increase the cognitive demand to unacceptable levels.

Quando um fator de conflito potencial é evocado de forma a causar conflito cognitivo real, este passa a ser chamado de fator de conflito cognitivo. Tall e Vinner afirmam que quando um fator de conflito cognitivo é ativado este pode ser um obstáculo para o desenvolvimento da imagem do conceito.

Por outro lado, fatores de conflito potencial podem jamais ser evocados, permanecendo como porções inativas da imagem do conceito, sem nunca serem percebidos pelo indivíduo ou provocando, em certos casos, uma vaga sensação de insegurança. Os autores sugerem ser esta uma séria causa de problemas de aprendizagem em matemática, quando o estudante tem a sensação de que há algo errado em algum lugar, sem conseguir identificar a origem da dificuldade. Tall e Vinner afirmam que, embora possam gerar obstáculos quando ativados, é necessário que fatores de conflito potencial se atualizem como fatores de conflito cognitivo, para que possam assim ser conscientemente entendidos e desta forma tratados. (GIRALDO 2004, p.15)

Dos fatores potenciais de conflito,

Um tipo mais grave de fator potencial conflito é a imagem de um conceito em que não está em contradição com uma outra parte da imagem, mas com a própria definição formal do conceito. Tais fatores podem dificultar seriamente o aprendizado de uma teoria formal, pois eles não podem se tornar reais fatores de conflito cognitivo a menos que a definição formal conceito desenvolva uma imagem do conceito que pode, então, produzir um conflito cognitivo. Os estudantes que têm como um fator potencial conflito de sua imagem de conceito pode ser seguro em suas próprias interpretações das noções em causa e simplesmente considerar a teoria formal como inoperante e supérfluo.¹⁶ (TALL & VINNER, 1981, p154, tradução nossa)

Sob essa perspectiva, um aluno pode memorizar uma definição formal de um conceito sem que ocorra qualquer ligação com a imagem do mesmo, deixando de criar qualquer significado para ela.

Portanto, memorizar uma definição formal não é suficiente para o aluno aprender. O aluno tem que desenvolver a imagem do conceito para desenvolver a teoria, por exemplo, desenvolver tarefas que induzam os alunos a chegar à definição e não apresentá-la aos alunos.

¹⁶ Texto original: A more serious type of potential conflict factor is one in the concept image which is at variance not with another part of the concept image but with the formal concept definition itself. Such factors can seriously impede the learning of a formal theory, for they cannot become actual cognitive conflict factors unless the formal concept definition develops a concept image which can then yield a cognitive conflict. Students having such a potential conflict factor in their concept image may be secure in their own interpretations of the notions concerned and simply regard the formal theory as inoperative and superfluous.

3.2 Raiz cognitiva

Tall (1989) define a raiz cognitiva com um conceito-âncora de que o aluno considera fácil de compreender e que ainda constitui a base sobre a qual a teoria pode ser construída. Robert e Schwarzenberger (ROBERT & SCHWARZENBERGER, 1989) comentam que “uma raiz cognitiva de uma teoria é um dado que se destina a criar raízes no entendimento atual cognitivo do aluno ainda em crescimento, em uma verdadeira noção matemática formal. Tal raiz cognitiva torna-se difícil de encontrar”¹⁷(p.136, tradução nossa).

Tall redefine a raiz cognitiva após a introdução do termo de unidade cognitiva, que é *uma porção da imagem de conceito em que um indivíduo é capaz de focar atenção conscientemente em um determinado momento* (GIRALDO, 2004). Uma unidade cognitiva pode ser uma operação numérica como uma soma entre dois números, uma relação entre número como maior que ou menor que, pode ser um símbolo ou ainda um passo de um argumento. O que é unidade cognitiva para um indivíduo pode não ser para outro. Bernard e Tall (BERNARD & TALL, 1997) tem a hipótese de que dois fatores complementares são importantes na construção de uma estrutura de pensamento poderoso:

- 1) a capacidade de comprimir informação para caber em unidades cognitivas
- 2) a capacidade de fazer conexões entre as unidades cognitivas para que a informação relevante possa ser puxada para dentro e fora do foco de atenção na vontade.

Segundo Giraldo (2004), Tall redefine raiz cognitiva como “uma unidade cognitiva que tem significado para o estudante no estágio em questão, e ainda assim contém as sementes de expansões cognitivas para definições formais e desenvolvimento teórico posterior”. (p.22)

Para Giraldo,

A reformulação da noção raiz cognitiva como uma unidade cognitiva especial implica na evidência de um aspecto crucial de sua natureza: como

¹⁷ Texto original: [...] a “cognitive root” for a theory, as it is intended to take root in the current cognitive understanding of the student yet grow into a fully fledged formal mathematical notion. Such cognitive roots also prove hard to find.

uma unidade cognitiva é *parte da imagem de conceito* individual, uma raiz cognitiva também deve sê-lo. Assim, para que uma ideia possa ser caracterizada como raiz cognitiva, é necessário que essa seja familiar para o estudante – isto é, que seja um atributo de sua imagem de conceito. (GIRALDO, 2004, p.22)

Portanto, uma raiz cognitiva pode ser definida como uma unidade cognitiva atendendo a duas características fundamentais:

- (I) fazer sentido (ao menos potencialmente) para o estudante no estágio em questão;
- (II) permitir expansões cognitivas para desenvolvimentos teóricos posteriores.

Porém, em (TALL, McGOWEN & DeMAROIS, 2000), as duas características acima forma reformuladas em quatro:

- (i) ser uma unidade cognitiva do conhecimento central do estudante no início da sequência de aprendizagem;
- (ii) permitir o desenvolvimento inicial através da estratégia de expansão cognitiva;
- (iii) conter a possibilidade de significado teórico a longo prazo, em desenvolvimentos teóricos posteriores;
- (iv) ser robusta o suficiente para permanecer útil enquanto a compreensão se desenvolve, tornado-se mais sofisticada.

No mesmo trabalho os autores argumentam

Uma raiz cognitiva certamente não garante que todos os alunos irão progredir para desenvolvimentos teóricos posteriores, mas tem a vantagem de incorporar ideias que são potencialmente significativas no tempo (no sentido de Ausubel, Novak e Hanesian, 1968) e lançar bases para possíveis teorias posteriores. À medida que a teoria se desenvolve, a raiz cognitiva se tornará mais sofisticada, com uma estrutura interior mais rica e [mais links] se relacionado de maneira apropriada a outros conceitos. Alguma reconstrução será, sem dúvida, necessária, na medida em que as ideias antigas são vistas sob uma nova luz. Em tais ocasiões essas mudanças podem ser ameaçadoras para alguns alunos. O que é importante é que quem planeja o currículo esteja ciente dessas reconstruções e das dificuldades relacionadas e as leva em conta na sequência de aprendizagem. Espera-se que uma raiz cognitiva firmemente sedimentada permitirá que a sequência de aprendizagem seja construtiva a partir de bases significativas, que podem ser enriquecidas e ajustadas enquanto preserva a resistência de toda a estrutura.¹⁸ (TALL, McGOWEN & DeMAROIS, 2000, p.3, tradução nossa)

¹⁸ Texto Original: A cognitive root certainly does not guarantee that every student will progress to later theoretical developments, but it has the advantage of embodying ideas which are potentially meaningful at the time (in the sense of Ausubel, Novak and Hanesian, 1968) and lay groundwork for possible later theories. As the theory develops, the cognitive root will become more sophisticated with a richer interior structure and more appropriate links to other related concepts. Some reconstruction will undoubtedly be necessary as old ideas are seen in a new light. At such times these changes may

Para os autores, um exemplo de raiz cognitiva, para função, é a máquina de função, que atua como uma caixa de entrada (input) e saída (output) como na figura1. Nela as representações de função como tabela, gráfico, fórmula, procedimento verbal, formulação, entre outros, podem ser como formas de representação ou cálculo da relação interna de entrada-saída.

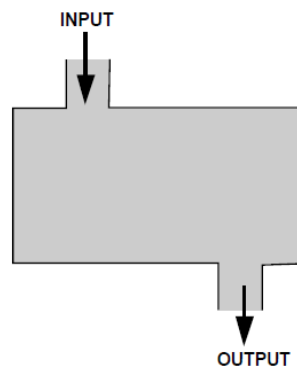


Figura 3: Imagem de uma máquina de função

Para a derivada, Tall propõe a noção de retidão local como uma raiz cognitiva (TALL, 1989; TALL, 2000; TALL, 2009). Giraldo (2004) esclarece

A noção de retidão local está baseada na percepção humana de que um objeto curvo parece reto quando olhado de muito perto (TALL, 1989; TALL, 1992; TALL, 2000; TALL, 2002; GIRALDO & CARVALHO, 2003a; GIRALDO et al., 2003a). Numa abordagem baseada na noção de retidão local, a derivada é introduzida a partir do processo computacional de magnificação local, em que uma porção de uma curva é altamente ampliada numa tela de computador. A derivada de uma função é apresentada como a inclinação da reta com a qual seu gráfico se confunde quando submetido a um processo de magnificação local. Assim, a derivada pode ser apreendida a partir da variação do próprio gráfico. (GIRALDO, 2004, p.26)

Após a revisão de literatura deste referencial, levantamos a hipótese de que a taxa de variação pode ser também uma raiz cognitiva para a derivada, uma vez que satisfaz as quatro condições apresentadas anteriormente. Vejamos:

(i) a taxa de variação é parte central do conceito de derivada e pode ser usada como ponto de partida do estudo da derivada.

be threatening to some learners. What is important is that the curriculum designer is aware of reconstructions and their related difficulties and takes account of them in the learning sequence. It is hoped that a firmly based cognitive root will allow the learning sequence to build from meaningful foundations that may be enriched and adjusted whilst maintaining the strength of the entire structure.

(ii) através de exemplos permite-se o desenvolvimento inicial do processo cognitivo, fazendo a análise da taxa de variação média até a taxa de variação instantânea, inclusive graficamente.

(iii) apresenta condições para desenvolvimento posteriores como no cálculo integral de como as coisas se acumulam, a partir da análise de como elas variam.

(iv) no decorrer do seu desenvolvimento, a derivada como taxa de variação apresenta as infinitas aplicações em várias áreas do conhecimento.

Com isso, também desenvolveremos a pesquisa na análise de dados que possam comprovar ou não a nossa hipótese de que a taxa de variação é uma raiz cognitiva para a derivada.

3.3 Organizador genérico

Antes de apresentar a noção de raiz cognitiva, Tall desenvolveu a noção de organizador genérico baseada no conceito organizador avançado¹⁹ de Ausubel et.al.(1968).

Para complementar a noção de um organizador avançado, em Tall 1986a eu defino um organizador genérico para ser um ambiente (ou micromundo), que permite ao aluno manipular exemplos e (se possível) nãoexemplos de um conceito matemático específico ou um sistema relacionado de conceitos. A intenção é ajudar o aluno a ganhar experiências que irão fornecer uma estrutura cognitiva em que pode refletir para o aluno construir os conceitos mais abstratos.²⁰ (TALL, 1989, p.6, tradução nossa).

Para Tall, um organizador genérico pode ser um material concreto, como o material dourado ou o Tangram, ou um software de computador. Em comparação

¹⁹ “Esta é definida como um conjunto de material introdutório para uma tarefa de aprendizagem, apresentado num nível de generalidade e abstração mais elevado que a própria tarefa e explicitamente relacionado tanto com as ideias existentes na estrutura cognitiva do sujeito quanto com a tarefa; isto é, uma ligação entre o que o sujeito já sabe e o que ele precisa saber para compreender melhor o assunto.” (SILVA, 2009, p.37 e 38)

²⁰ Texto original: To complement the notion of an advanced organizer, in Tall 1986a I defined a generic organizer to be an environment (or microworld) which enables the learner to manipulate examples and (if possible) non-examples of a specific mathematical concept or a related system of concepts. The intention is to help the learner gain experiences which will provide a cognitive structure on which the learner may reflect to build the more abstract concepts.

com os materiais concretos, os softwares podem apresentar não somente propriedades do conceito, mas também simulações, nãoexemplos, contraexemplos e gráficos que são importantes principalmente em conceitos mais avançados tais como limites, convergência, diferenciabilidade e integral.

Em trabalhos posteriores (TALL, 1989, 2000), Tall reavalia a noção de organizador genérico e afirma que em toda abordagem pedagógica relacionada a algum conceito matemático, onde esta noção seja explorada, devem necessariamente estar presentes diferentes formas de representação, tendo como referência uma unidade cognitiva central, a raiz cognitiva. Tall cita as noções de área sob a curva (para o ensino do conceito de integral) e de retidão local (para o ensino do conceito de derivada) como exemplos importantes de raízes cognitivas fruto de suas próprias pesquisas. (SILVA, 2009, p.39)

Neste sentido, André (2008) destaca que: “Organizadores genéricos, como o ambiente computacional, permitem-nos desenvolver uma nova sequência no desenvolvimento do currículo, não a partir de fundamentações tradicionais, mas a partir de raízes cognitivas.”(p.19), ou seja, a partir da raiz cognitiva o organizador genérico irá apresentar novas possibilidades para o enriquecimento da imagem do conceito, “oferecendo ao aprendiz condições que permitirão desdobramentos importantes para se chegar ao entendimento da definição formal” (ANDRÉ, 2008, p.20).

Resumindo,

[...] o *organizador genérico* entra em cena como um ambiente de aprendizagem, que contém em sua estrutura, pelo menos, uma *raiz cognitiva*, alguns *exemplos* e *contraexemplos* relacionados com o conceito, e tem como objetivos dar uma visão mais ampla do conceito, conectar *unidades cognitivas*, apresentar possíveis *unidades cognitivas*, e gerar novas *unidades cognitivas* (*possível unidade cognitiva*). Estas são automaticamente incorporadas à *imagem conceitual*, que por sua vez, é ampliada, contribuindo para um melhor entendimento do conceito. Portanto, o organizador genérico organiza as unidades cognitivas relacionando-as de forma coerente e as interliga, criando novas unidades cognitivas. (YOKOYAMA, 2012, p.52)

Como na pesquisa propusemos a taxa de variação como raiz cognitiva para o estudo de derivada, usamos o WolframAlpha como organizador genérico, procurando auxiliar nos cálculos, na representação gráfica, nos exemplos e não exemplos, na formação da imagem dos conceitos de derivada, integral e posteriormente no Teorema Fundamental do Cálculo sem o uso de definições

formais privilegiando a compreensão dos conceitos através da noção intuitiva de limite.

CAPÍTULO 4

METODOLOGIA DE PESQUISA

4.1 Questões de pesquisa

No contexto de uma escola privada de ensino médio desenvolvemos atividades sobre ideias do Cálculo, para que alunos deste segmento de ensino as resolvam com o auxílio de um CAS on line.

O uso de um software matemático não é garantia de aprendizagem do conteúdo matemático em estudo, seja pela adequação do software à atividade, pela sua sintaxe ou até mesmo pelo seu design.

O CAS WolframAlpha apresenta características, que serão detalhadas mais adiante, bem diferentes dos demais softwares matemáticos disponíveis. É de nosso interesse identificar suas potencialidades e limitações. Neste sentido perguntamos:

Quais as principais dificuldades emergentes no uso do WolframAlpha?

Com atividades que privilegiam a compreensão conceitual em detrimento à formalização e as atividades procedimentais comuns na maioria dos cursos e livros de Cálculo, desejamos identificar quais foram as compreensões dos alunos sobre a derivada, a integral e o TFC. Por isso, perguntamos:

Quais são as compreensões emergentes sobre derivada, integral e o TFC?

Como no contexto da pesquisa com alunos do ensino médio não é comum o ensino de tópicos de cálculo, é de nosso interesse analisar a viabilidade de se trabalhar tais conceitos neste segmento de ensino. Dessa forma, perguntamos:

Quais são as possibilidades de se trabalhar os conceitos de derivada e integral no ensino médio?

Ao descrevermos sobre o referencial teórico levantamos a hipótese da taxa de variação instantânea ser uma raiz cognitiva para a derivada. Não foi uma questão de pesquisa previamente elaborada, uma vez que a hipótese surgiu durante o desenvolvimento da pesquisa. Com isso,

É possível considerar a taxa de variação como uma raiz cognitiva para a derivada?

Com estas questões nortearmos o desenvolvimento da pesquisa limitando uma área de muitas possibilidades de descrição e análise dos dados.

4.2 Referencial Metodológico: Experimento de Ensino

Para Steffe e Thompson (2000)

A finalidade principal para o uso de metodologia experimento de ensino é para pesquisadores experimentarem, em primeira mão, a aprendizagem e o raciocínio matemático dos alunos. Sem as experiências proporcionadas pelo ensino, não haveria base para chegar a compreender os poderosos conceitos e operações matemáticas que os alunos constroem ou mesmo, para suspeitar que tais conceitos e operações podem ser muito diferentes daqueles dos pesquisadores.²¹ (STEFFE E THOMPSON, 2000, p.267, tradução nossa)

Segundo Borba (2004), neste tipo de pesquisas as atividades pedagógicas são desenvolvidas de forma que o pesquisador-professor possa ouvir de forma detalhada a Matemática desenvolvida por estudantes. Como destaca Vinner (1991), a principal tarefa do pesquisador é preparar questões que tenham o potencial de expor a imagem do conceito do entrevistado.

²¹ Texto original: A primary purpose for using teaching experiment methodology is for researchers to experience, firsthand, students' mathematical learning and reasoning. Without the experiences afforded by teaching, there would be no basis for coming to understand the powerful mathematical concepts and operations students construct or even for suspecting that these concepts and operations may be distinctly different from those of researchers.

Não é interesse de um pesquisador, numa experiência de ensino, fazer com que um aluno saiba resolver um problema, mesmo que este tenha sido uma atividade proposta. O interesse é compreender como os alunos estão compreendendo e desenvolvendo seus esquemas como resultado de sua atividade matemática²² (STEFFE e THOMPSON, 2000, p.288, tradução nossa).

Segundo Steffe e Thompson (2000), um experimento de ensino é feito para testar hipóteses, confirmando-as, refutando-as ou até mesmo não chegando a qualquer conclusão. Durante o experimento de ensino, formulação de hipóteses, testes experimentais e reconstrução de hipóteses formam um círculo recursivo.

Façamos uma análise mais cuidadosa quanto ao testar hipóteses. Quando vamos a campo esperamos respostas para algumas perguntas ou confirmações de ideias que julgamos verdadeiras. Porém, testar hipótese está relacionado a usar um algoritmo ou cálculo estatístico, e neste caso, para saber o quanto um aluno aprendeu. Talvez o termo testar hipótese não seja o mais apropriado na pesquisa qualitativa. “Estudos qualitativos são usualmente exploratórios e mais gerando hipóteses do que testando”²³ (CORBIN, STRAUSS, 2008, p.25, tradução nossa)

Os elementos de uma experiência de ensino são as atividades desenvolvidas e aplicadas pelo pesquisador, um ou mais estudantes, uma testemunha e um método de gravação.

Nesta pesquisa, as atividades foram desenvolvidas em duplas. O objetivo é que ocorra interação entre os alunos, num processo gerador de discussões, de análises e comentários sobre as atividades em questão.

O papel do professor-pesquisador foi fundamental. Como os alunos não têm conhecimento dos conceitos do Cálculo, para o professor-pesquisador foi necessário sensibilidade para saber quando e como apresentar os conceitos sem que ocorresse interferência na pesquisa.

Ser professor dos alunos no ensino médio foi um facilitador para a pesquisa, já que existe uma relação de confiança entre as partes. Porém, ocorreram algumas

²² Texto original: In fact, in a teaching experiment, it is never the intention of the teacher-researcher that the students learn to solve a single problem, even though situations are presented to them that might be a problem for them. Rather, the interest is in understanding the students' assimilating schemes and how these schemes might change as a result of their mathematical activity.

²³ Texto original: Qualitative studies are usually exploratory and more hypothesis generating rather than testing.

vezes a sensação de que os alunos estavam preocupados em descrever o que o professor desejava como resposta. Estavam preocupados em saber se o exercício estava resolvido corretamente ou não. Em alguns momentos chegavam a perguntar “como” ou “o que” o professor gostaria que respondesse na atividade. Prontamente o professor-pesquisador respondia que deveriam responder o que entenderam ou não entenderam na atividade.

O problema surge quando os entrevistados dizem o que pensam que o entrevistador gostaria de ouvir. Devemos reconhecer as falsas falas, que podem dizer mais sobre o pesquisador e sobre o processo de pesquisa, do que sobre o tema pesquisado. (BAUER E GASKELL, 2002, p.21).

Um caderno de notas foi usado durante as atividades. Mostrou-se de extrema importância para registrar qualquer ideia, imagem ou opinião durante o experimento ensino. Mesmo tendo um método de gravação em vídeo que foi usado na pesquisa, com o caderno de notas podemos destacar um momento da atividade para ser revisado na análise da gravação, ou ainda registrar um dado importante para a pesquisa e que depois pode passar despercebido ou até mesmo ser esquecido.

Os autores Steffe e Thompson (2000) argumentam que o experimento de ensino não vem como solução para todos os problemas e dificuldades que encontramos em sala de aula. Até quando suas questões são satisfatoriamente respondidas durante as atividades, nada garante que funcionará em outras circunstâncias. Porém, se muitos realizarem a experiência, em diferentes ambientes e situações, novos argumentos vão surgindo, e com um grande número de resultados, nossa vida em sala de aula pode ser melhorada consideravelmente.

Para os autores é importante o professor-pesquisador reaplicar seu experimento de ensino com base no seu experimento anterior e/ou no de outros pesquisadores, de forma a corrigir, adaptar ou redirecionar seu experimento, a partir dos problemas anteriormente encontrados. Daí a importância da realização de uma atividade piloto.

Nesta pesquisa um piloto foi realizado entre os meses de novembro e dezembro de 2012 com alunos do terceiro ano do ensino médio daquele ano numa escola particular da cidade de Ubá - MG. No piloto foram realizadas a atividade de sintaxe do software e a atividade de derivada. Ocorreram situações inesperadas e trágicas para uma pesquisa, tais como: acabar a bateria da filmadora durante

atividade; a filmadora não gravar por falta de memória; colocar a câmera muito perto de um ventilador de forma que ao analisar o vídeo apenas ouviu-se seu barulho e nada dos alunos. O piloto tornou-se muito útil, já que foi possível fazer um refinamento das questões da atividade derivada e principalmente, foi um teste prático para o pesquisador-professor.

4.3 Contexto da pesquisa

A atividade foi proposta para uma turma de terceiro ano do ensino médio de uma escola particular de Ubá. A escola é de pequeno porte, porém muito aconchegante. Possui uma turma de cada série desde a pré-escola até o ensino médio. Em geral seus alunos não são de poder aquisitivo alto, apesar das exceções. Porém, em geral também não são de origem humilde, apesar das exceções. São filhos de uma classe média que lhes pretende proporcionar uma educação de qualidade.

Apresentamos aos alunos do que se tratava a pesquisa e como ela ocorreria. Prontamente vários alunos se propuseram a fazer parte da pesquisa. Para a execução da primeira atividade compareceram oito alunos, que se agruparam em duplas por eles mesmos formadas, para a atividade no laboratório de informática da escola. Para a execução das demais atividades uma dupla mostrou-se incapaz de fazer por incompatibilidade de horário. Portanto, o trabalho de campo foi desenvolvido por três duplas.

Os alunos foram informados de que em nenhum momento seus estudos seriam atrapalhados num ano tão importante de suas vidas. Com isso, o cronograma que estava previamente elaborado teve que ser alterado inúmeras vezes, principalmente devido ao período de provas em que os alunos se dedicavam mais aos estudos.

A avaliação dos participantes que será descrita é segundo a experiência do professor-pesquisador como professor deles e também da opinião de outros colegas que também são seus professores.

A primeira dupla é formada por dois rapazes que pretendem fazer engenharia civil. São alunos com ótimas notas em todas as matérias, principalmente nas

matérias de exatas. Usaremos na descrição dos dados a representação R para a dupla e, R1 e R2, para cada elemento da dupla.

Dupla R

Alunos	Sexo	Idade	Curso que pretende na graduação
R1	Masculino	17	Engenharia civil
R2	Masculino	18	Engenharia civil

Tabela 1: Informações sobre a dupla R

A segunda dupla é formada por duas meninas das quais uma pretende fazer engenharia química e a outra química. São duas das melhores alunas da turma, sempre muito dedicadas. Usaremos na descrição dos dados a representação M para a dupla, e M1 e M2, para cada elemento da dupla.

Dupla M

Alunos	Sexo	Idade	Curso que pretende na graduação
M1	Feminino	16	Química
M2	Feminino	17	Engenharia química

Tabela 2: Informações sobre a dupla M

A terceira dupla é formada por um casal. A menina pretende fazer medicina enquanto que o rapaz pretende fazer ciências sociais ou psicologia. A menina também está entre as melhores alunas da turma e o rapaz é muito dedicado e com isso tem boas notas, apesar da dificuldade com a Matemática. Usaremos na descrição dos dados a representação C para a dupla, e C1 e C2, para cada elemento da dupla.

Dupla C

Alunos	Sexo	Idade	Curso que pretende na graduação
C1	Feminino	17	Medicina
C2	Masculino	18	Ciências Sociais ou Psicologia

Tabela 3: Informações sobre a dupla C

Todos foram alunos do professor-pesquisador no ensino médio, com exceção de C2 que não fez o primeiro ano do ensino médio na escola. Nos dois primeiros anos, o professor-pesquisador ministrou a disciplina de Física e no terceiro ano ministrou Matemática. Confiança e respeito sempre estiveram presentes na relação entre o professor-pesquisador e os alunos, e vice-versa.

Nas três duplas um dos alunos fala mais, se expressa mais do que o outro. Seja por querer responder rápido, ou por ser mais seguro ou ser mais curioso do que o colega. Porém, não significa que o outro aluno não esteja participando ou entendendo a atividade.

Para apresentar falas do professor-pesquisador, usaremos a representação P. O que for escrito entre colchetes são observações sobre o que aconteceu durante as falas: um comentário, uma expressão facial ou corporal.

4.4 As Tecnologias Informáticas

Na tentativa de apresentar novas possibilidades para auxiliar no desenvolvimento de um aluno é imprescindível o uso das Tecnologias da Informação e Comunicação, as TIC's. Como destaca Borba (2011),

[...] as possibilidades de investigação e experimentação propiciada por essas mídias podem levar estudantes a desenvolverem suas ideias a ponto de criarem conjecturas, validá-las e levantar subsídios para a elaboração de uma demonstração matemática. (BORBA, 2011, p.3)

Principalmente no ensino superior, em que o nível de abstração matemática é elevado, a integração das tecnologias informáticas nos processos de ensino e de aprendizagem é uma opção que tem sido cada vez mais explorada pelas pesquisas em Educação Matemática. Para Dreyfus (1991) usando o computador num ambiente de aprendizagem pode implicar relações entre diferentes representações para um mesmo conceito.

Ambientes de computador são particularmente valiosos na experimentação encorajadora que ajuda, antes de qualquer teoria formal ser desenvolvida,

dar um sentido de um dado fenômeno e sugere que tipo de propriedades estão envolvidas. (TALL, 2000, p.212)

Existem muitos softwares matemáticos à disposição de professores e alunos, com os mais variados objetivos e recursos. Podemos citar alguns: Maple, Matlab, Winplot, Cabri-Geomètre, Mathematica, GeoGebra, Modellus, Scilab entre outros. A cada dia, novos CAS são produzidos e disponibilizados no mercado, sejam eles pagos ou livres.

Porém, o professor deve ser muito cuidadoso e preocupar-se em escolher o CAS que irá corresponder às necessidades de sua atividade.

Um software deve ser escolhido em função dos objetivos do professor, e não o contrário. Muitos professores nos perguntam: Qual o melhor software para a aprendizagem da Geometria na quinta série, por exemplo? Esse *melhor* software não existe, pois tudo dependerá das atividades realizadas com o material escolhido. Um software, considerado *a priori* bom pelas possibilidades que oferece, pode ser usado de forma a não contribuir com a construção do conhecimento. A escolha crítica de um material a ser utilizado com os alunos não pode ser feita separada da discussão sobre os objetivos da disciplina, as escolhas do professor e as crenças que esse têm acerca de como o aluno aprende. (BITTAR, 2006, p.3)

Por isso usar um software em sala de aula não é garantia de sucesso na aprendizagem do aluno. Com o ensino de Matemática é ainda mais reforçado, já que

[...] algumas dificuldades que podem surgir quando da utilização dos computadores no ensino de Matemática. Pierce e Stacey (2001) apontam as seguintes: possíveis confusões entre a notação matemática convencional e a sintaxe própria dos *softwares*, notadamente os *softwares* algébricos, e o problema de reconhecer quando o computador está errado. Alguns alunos, ou mesmo professores, podem incorrer no erro de considerar o computador como uma autoridade. (ALLEVATO, 2008, p.3)

O site do WolframAlpha entrou no ar em março de 2009, tendo software Mathematica como base de seu funcionamento. Como é apresentado em seu site²⁴, o WolframAlpha tem por objetivo de longo prazo fazer com que todo o conhecimento sistemático imediatamente computável esteja acessível a todos. Além de suas qualidades para as construções gráficas e para a manipulação algébrica, é uma potencial fonte de pesquisa.

²⁴ <http://www.wolframalpha.com/>

Decidimos usar o CAS online WolframAlpha por vários motivos que serão descritos no decorrer da seção. Um dos principais motivos de sua escolha é a questão de ser um software livre. Além disso, não é necessária sua instalação num computador, já que basta acessar seu site e executar a atividade. Domiceli et.al. (2010) destacam que os alunos, além de participar das aulas no laboratório²⁵ podem ter acesso ao CAS através de seus computadores, tablets ou smartphones, dentro do campus, em casa ou em qualquer lugar que tenha acesso à internet.

Rodrigues (2011) destaca a potencialidade de resposta simbólica e gráfica do WolframAlpha, além disso, o CAS, através da opção “Show Steps”, disponibiliza a possibilidade de visualizar os passos desenvolvidos para a resolução do problema. Neste sentido, Domiceli et.al. (2010) relata que o WolframAlpha apresenta mais informações sobre o assunto que o aluno quer saber originalmente. Como exemplo temos na figura a seguir o cálculo de uma integral definida onde o CAS WolframAlpha apresenta o resultado numérico, uma interpretação gráfica, a soma de Riemann, além do resultado da integral indefinida.

²⁵ Nos Estados Unidos os alunos das disciplinas de Cálculo um, dois e três tem uma aula por semana no laboratório de informática.

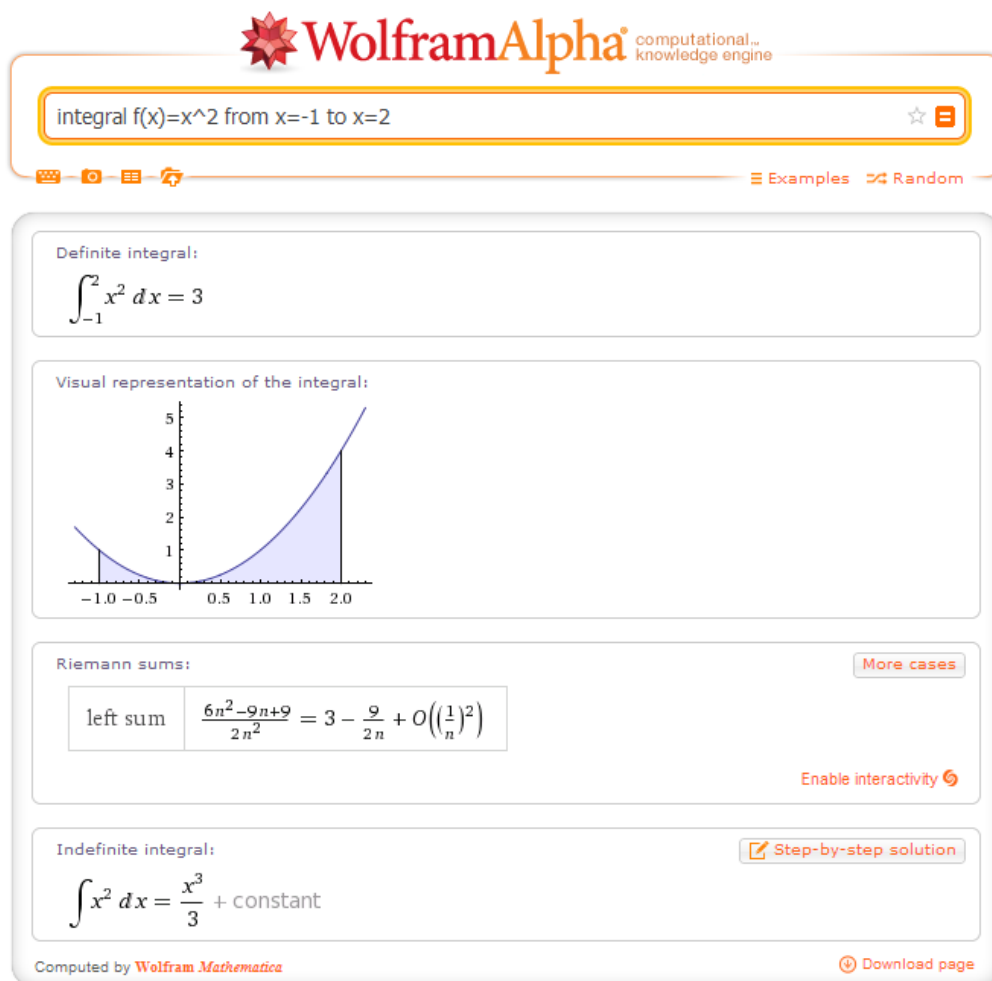


Figura 4: Exemplo do cálculo de uma integral definida

Outra observação importante apresentada por Domiceli et.al. (2010) é a facilidade para a exportação dos dados que podem ser copiados do CAS para qualquer editor de textos. Basta selecionar, copiar do CAS e colar no editor de textos como uma imagem, tal como apresentado na figura anterior.

Porém, o diferencial do CAS WolframAlpha em relação aos demais é a simplificação da sintaxe como é apresentado nos trabalhos de Rodrigues (2011) e Domiceli et.al. (2010).

Para os autores Domiceli et.al. (2010), com o CAS WolframAlpha os estudantes podem fazer perguntas usando a mesma linguagem que eles usariam perguntando para seus professores, de forma simples e direta. “Muitas horas foram desperdiçadas no laboratório devido a parênteses ou vírgulas em falta” (DOMICELI ET.AL., 2010, p.1063, tradução nossa).²⁶

²⁶Texto original: Many hours have been wasted in the lab due to missing parentheses or semicolons.

Portanto, como os cursos no laboratório muitas vezes se limitavam mais ao trabalho com as sintaxes dos CAS do que propriamente os conceitos de cálculo, os autores concluem que o WolframAlpha permite que os estudante concentrem-se nos conceitos que estão estudando e não sobre a sintaxe.

Apresentaremos diferenças entre as sintaxes de alguns dos CAS mais conhecidos com o WolframAlpha. Mariani et.al. (2005) apresenta uma análise sobre a utilização do Maple, Matlab e Scilab²⁷ nos cursos de engenharia. Para os autores

Outra grande vantagem desses ambientes (Maple, Matlab e Scilab) é que possuem uma linguagem de programação de alto nível, exigindo que o usuário tenha apenas conhecimentos básicos de programação, não sendo necessário usar técnicas avançadas de programação e estruturas de dados. (MIRIANI ET.AL., 2005, p.2)

Vejamos alguns exemplos. A seguir temos a imagem dos comandos para a construção do gráfico da função $y = x^2$ no intervalo de $[-10, 10]$ no Maple, Matlab e Scilab e seus respectivos gráficos.

Comandos para construir gráficos 2D

Matlab	Maple	Scilab
<pre>X=-10:10; y=x^2; plot(x,y)</pre>	<pre>plot(x^2,x);</pre>	<pre>x=[-10:0.1:10]; y=x^2; plot2d(x,y,rect=[-10,0,10,100])</pre>

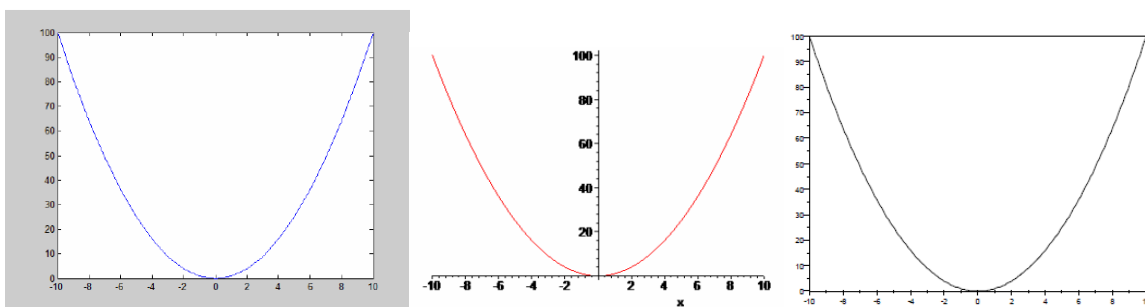


Figura 5: Gráficos da função $y = x^2$ no intervalo de $[-10,10]$, no Matlab, Maple e Scilab

No WolframAlpha temos

²⁷ Texto original: O Maplet e o Matlab são softwares pagos, já o Scilab é um software livre. Os três programas devem ser instalados no computador para poder executar qualquer tarefa.

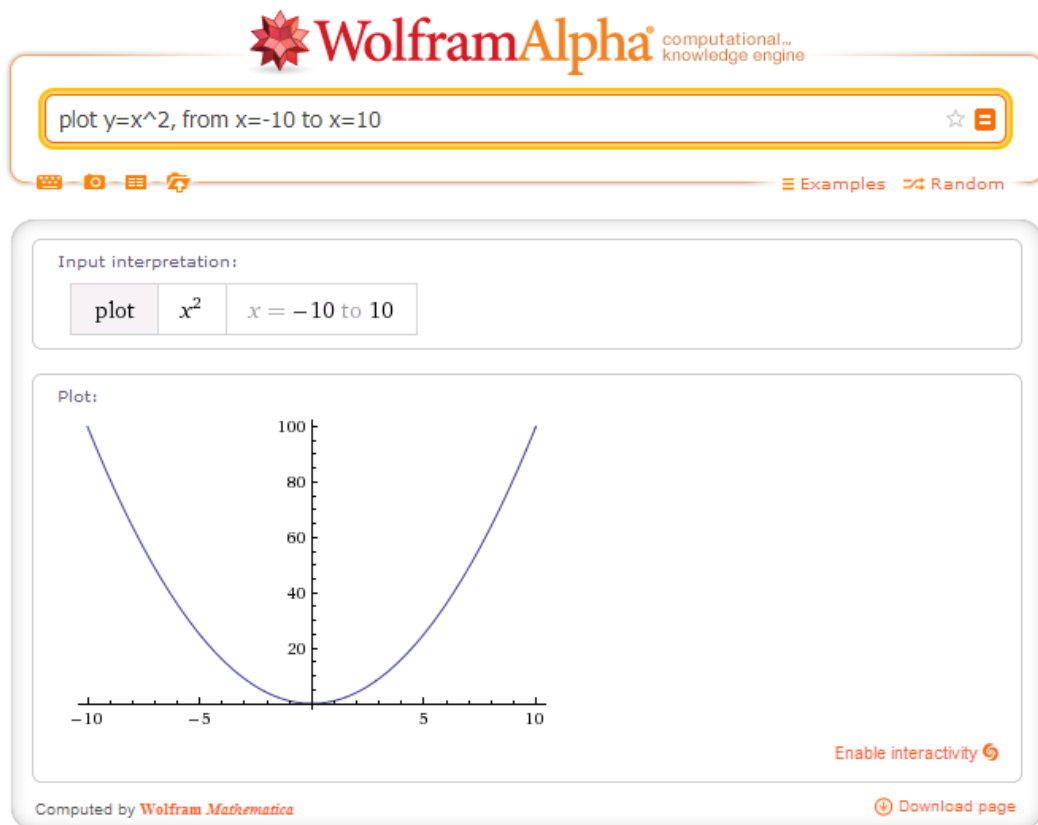


Figura 6: Gráfico da função $y = x^2$ no intervalo de $[-10, 10]$ no WolframAlpha

Além de uma sintaxe mais comum ao que falamos ao fazer um exercício de Cálculo, esteticamente o gráfico é atraente. Porém, durante a pesquisa o WolframAlpha mostrou ter uma sintaxe ainda mais flexível. Sabemos que usualmente nos CAS todos os comandos de programação são em inglês e que numa função polinomial os acentos circunflexos devem preceder o expoente de uma potência. Mas verificamos que alguns comandos em português e as funções polinomiais sem os acentos circunflexos são reconhecidos pelo CAS WolframAlpha. Vejamos na imagem a seguir.

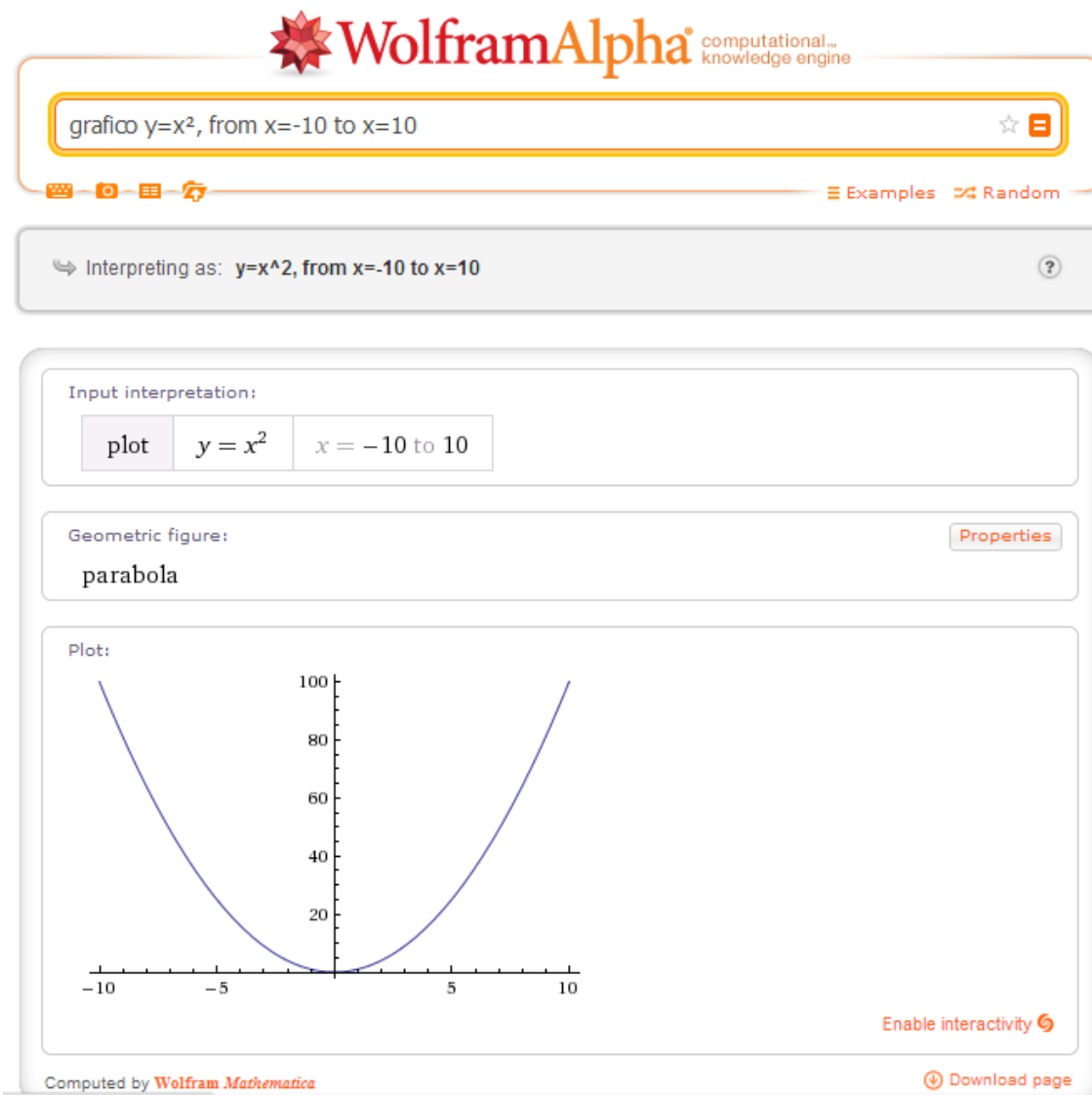


Figura 7: Gráfico da função $y = x^2$ no intervalo de $[-10, 10]$ no WolframAlpha

Outro exemplo para comparação é com o relato de Allevalo (2008), que fez uma análise dos erros dos alunos com a sintaxe do Winplot.²⁸

A sintaxe, no *Winplot*, para raiz quadrada é $\text{sqr}(x)$ ou $x^{(1/2)}$, considerando x elevado a meio. Foram frequentes os erros causados pela falta dos parênteses ou pela sua colocação no lugar errado, ao digitar a expressão. (ALLEVATO, 2008, p.7)

²⁸ O Winplot é um software livre que cabe num disquete, mas que também necessita ser instalado num computador para este executar as tarefas.

A seguir temos a imagem de uma tabela com o que foi enunciado na tarefa apresentada por Allevalo (2008), a forma como foi digitada pelos alunos, o que o CAS Winplot executou e a forma correta da sintaxe.

Enunciado e forma equivalente	Digitado pelos alunos	O Winplot executou	Forma correta
\sqrt{x}	$sqr\ x$	0	$sqr(x)$
$\sqrt{x} = x^{1/2}$	$x^{1/2}$	$\frac{x^1}{2}$	$x^{(1/2)}$
$\sqrt{x-1} = (x-1)^{1/2}$	$x-1^{1/2}$	$x - \frac{1^1}{2} = x - 0,5$	$(x-1)^{(1/2)}$
$\sqrt{x-2} = (x-2)^{1/2}$	$x-2^{1/2}$	$x - \frac{2^1}{2} = x - 1$	$(x-2)^{(1/2)}$
$\sqrt{x+2} = (x+2)^{1/2}$	$x+2^{1/2}$	$x + \frac{2^1}{2} = x + 1$	$(x+2)^{(1/2)}$

Figura 8: Tabela com erros de sintaxe no CAS Winplot

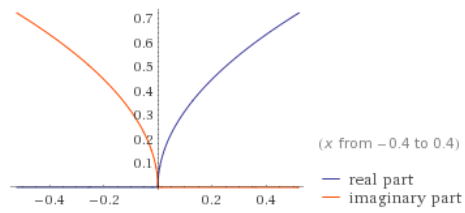
No caso registrado na primeira linha da tabela, quando o aluno digitou $sqr\ x$, sem os parênteses no x , o Winplot ignorou a expressão por não corresponder à sintaxe correta. O gráfico apresentado, da função $f(x) = 0$, foi obtido como se o aluno tivesse digitado $sqr\ x + 0$, em que $sqr\ x$ foi ignorado. Nos demais casos, a forma como os alunos digitaram as fórmulas das funções, as transformaram em funções afim. Os gráficos apresentaram-se como retas, e não como partes de parábolas, conforme deveria ocorrer. (ALLEVATO, 2008, p.8)

Vejamos como o WolframAlpha identifica alguns dos comando apresentados na tabela.

sqrtx

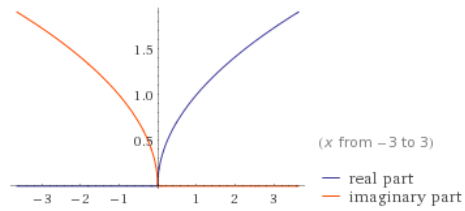
Input:
 \sqrt{x}

Plots:



Complex-valued plot

Enable interactivity



Complex-valued plot

Enable interactivity

Root:

$x = 0$

Step-by-step solution

Properties as a real function:

Domain:

$\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ (all non-negative real numbers)

Range:

$\{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$ (all non-negative real numbers)

Injectivity:

injective (one-to-one) on its domain

Derivative:

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Step-by-step solution

Indefinite integral:

$$\int \sqrt{x} dx = \frac{2x^{3/2}}{3} + \text{constant}$$

Step-by-step solution

Global minimum:

$$\min\{\sqrt{x}\} = 0 \text{ at } x = 0$$

Series representations:

$$\sqrt{x} = \sqrt{-1+x} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} (-1+x)^k \text{ for } |-1+x| > 1$$

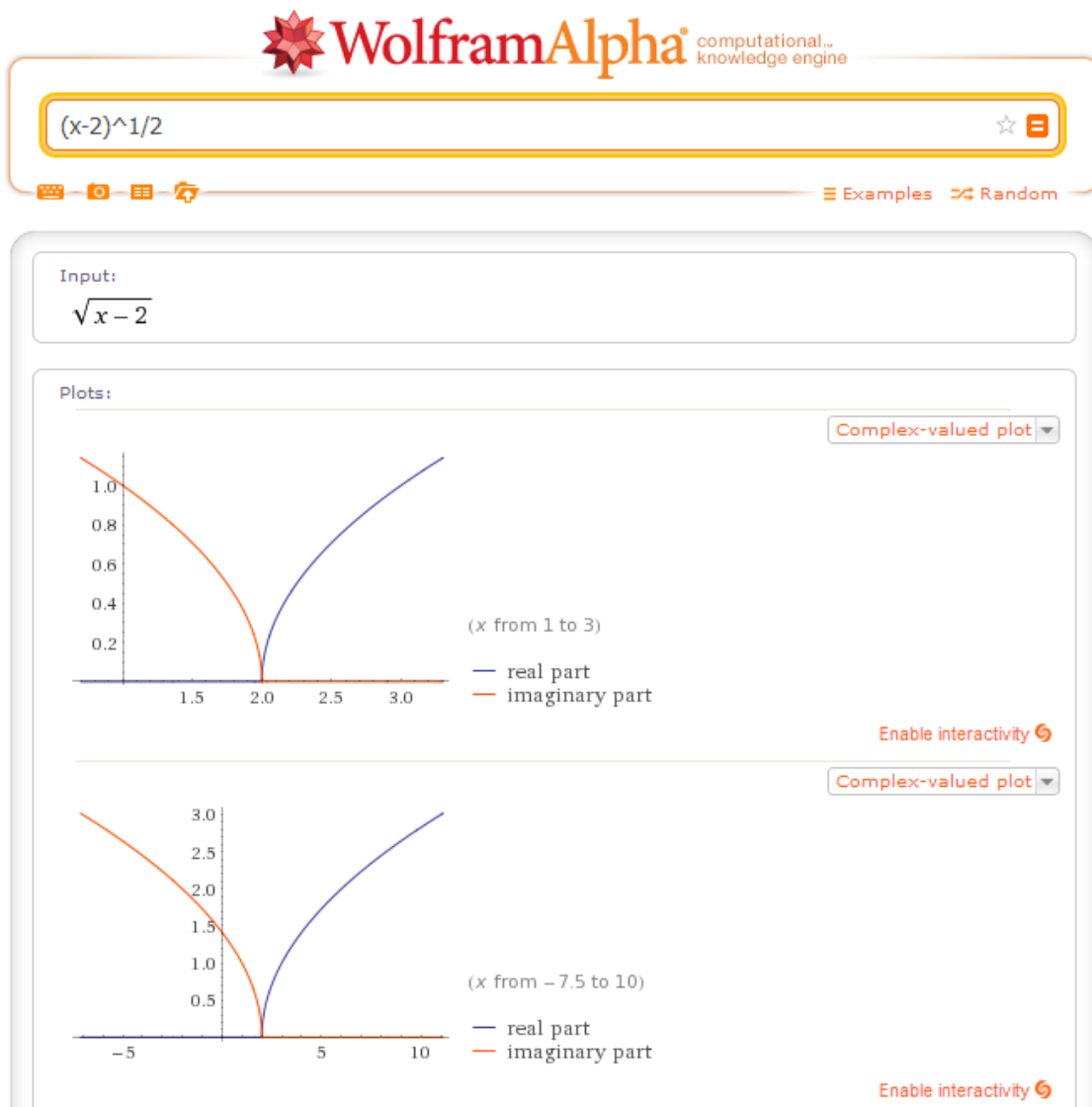
$$\sqrt{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (-1+x)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k}}{k!} \text{ for } |-1+x| < 1$$

More

Figura 9: Imagem de \sqrt{x} no WolframAlpha

Como podemos observar, o WolframAlpha não somente reconhece o comando `sqr(x)`, mesmo sem os parênteses no `x`, como apresenta várias informações sobre o comando: dois gráficos com diferentes domínios, destacando a parte real e a parte complexa (será explicado seu significado na análise da atividade Sintaxe do CAS); domínio e imagem no conjunto dos reais; derivada e integral; além de representações por séries. O mesmo gráfico é apresentado caso seja digitado $x^{1/2}$, sem os parênteses no $1/2$.

Digitar $x+1^{1/2}$ é um problema de sintaxe para qualquer CAS já que este, inclusive nós, identificará que o número 1 está elevado a $1/2$. Porém vejamos como o WolframAlpha identifica a expressão $(x-2)^{1/2}$.



Root: [Step-by-step solution](#)
 $x = 2$

Properties as a real function:
 Domain:
 $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\}$
 Range:
 $\{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$ (all non-negative real numbers)
 Injectivity:
 injective (one-to-one) on its domain

Series expansion at $x=0$:

$$i\sqrt{2} - \frac{ix}{2\sqrt{2}} - \frac{ix^2}{16\sqrt{2}} - \frac{ix^3}{64\sqrt{2}} - \frac{5ix^4}{1024\sqrt{2}} + O(x^5)$$

Series expansion at $x=\infty$:

$$\sqrt{x} - \sqrt{\frac{1}{x}} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^{3/2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^{5/2} + O\left(\left(\frac{1}{x}\right)^3\right)$$

Derivative: [Step-by-step solution](#)

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{-2+x}) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$$

Indefinite integral: [Step-by-step solution](#)

$$\int \sqrt{-2+x} \, dx = \frac{2}{3}(x-2)^{3/2} + \text{constant}$$

Global minimum:
 $\min\{\sqrt{x-2}\} = 0$ at $x = 2$

Series representations: [More](#)

$$\sqrt{x-2} = \sqrt{-3+x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{\frac{1}{2}}{k}}{(-3+x)^k} \text{ for } |-3+x| > 1$$

$$\sqrt{x-2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (-3+x)^k \left(-\frac{1}{2}\right)_k}{k!} \text{ for } |-3+x| < 1$$

$$\sqrt{x-2} = \sqrt{-3+x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(-\frac{1}{2}\right)_k}{(-3+x)^k k!} \text{ for } |-3+x| > 1$$

$\binom{n}{m}$ is the binomial coefficient »
 $|z|$ is the absolute value of z »
 $n!$ is the factorial function »
 $(a)_n$ is the Pochhammer symbol »
[More information](#) »

Figura 10: Imagem de como o WolframAlpha identifica a expressão $(x-2)^{1/2}$.

Portanto, verificamos que não apenas reconhece o comando como ainda apresenta mais informações sobre a expressão $(x-2)^{1/2}$, mesmo o número $1/2$ não estando entre parênteses.

No entanto, o WolframAlpha não apresenta gráficos com processos dinâmicos. Domiceli et.al. (2010) concluíram que calculadoras gráficas mostram ser mais poderosas do que o WolframAlpha, principalmente no que se diz respeito aos zooms dos gráficos.

Por isso, para dar dinamismo às situações em que a ideia de limite é fundamental usamos o GeoGebra. Foram duas as situações em usamos o GeoGebra: na primeira a visualização gráfica da taxa de variação média e a taxa de variação instantânea com retas secantes e a reta tangente, conforme figura abaixo.

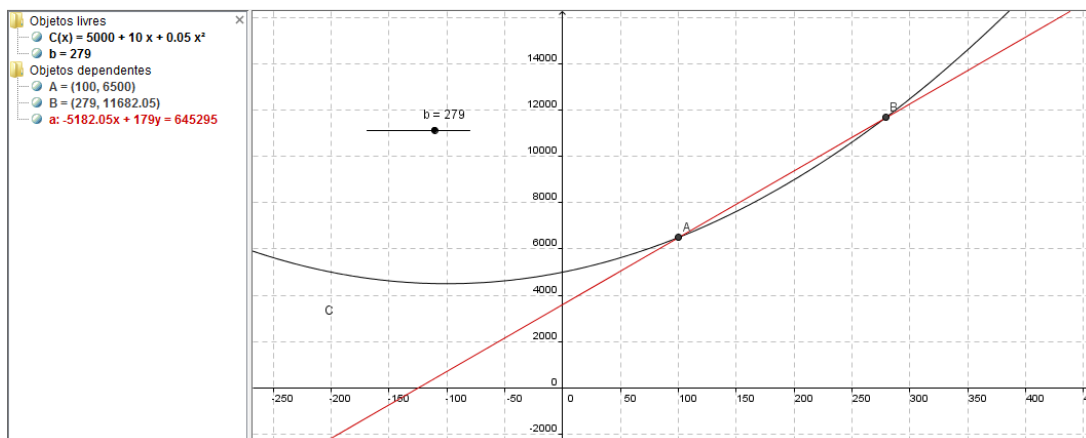


Figura 11: Gráfico Geogebra atividade 3

A segunda situação foi no cálculo da área da função $f(x) = x^2$, para x entre 0 e 1, através de retângulos acima e abaixo da curva, conforme ilustra a figura abaixo.

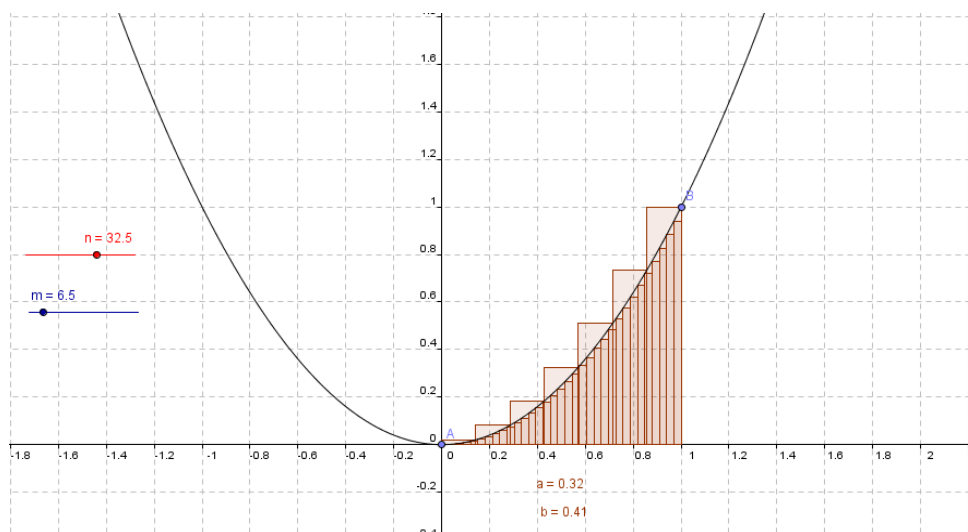


Figura 12: Gráfico GeoGebra– Atividade 4

De acordo com o site do Instituto GeoGebra²⁹ do Rio de Janeiro, o GeoGebra é um software gratuito de matemática dinâmica desenvolvido para o ensino e aprendizagem da matemática nos vários níveis de ensino (do básico ao universitário). O GeoGebra tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si.

Foram utilizados ainda na pesquisa dois applets³⁰. O primeiro³¹ foi de fundamental importância para a primeira atividade de derivada. Ele foi aproveitado do **Projeto Condigital (MCT/MEC/FNDE/IGGE) -- Governo Federal do Brasil – Física Vivencial: uma aventura do conhecimento**³², desenvolvido pelo **Instituto Galileo Galilei para a Educação** que concebe, planeja, realiza e supervisiona projetos sócio-educacionais especiais.

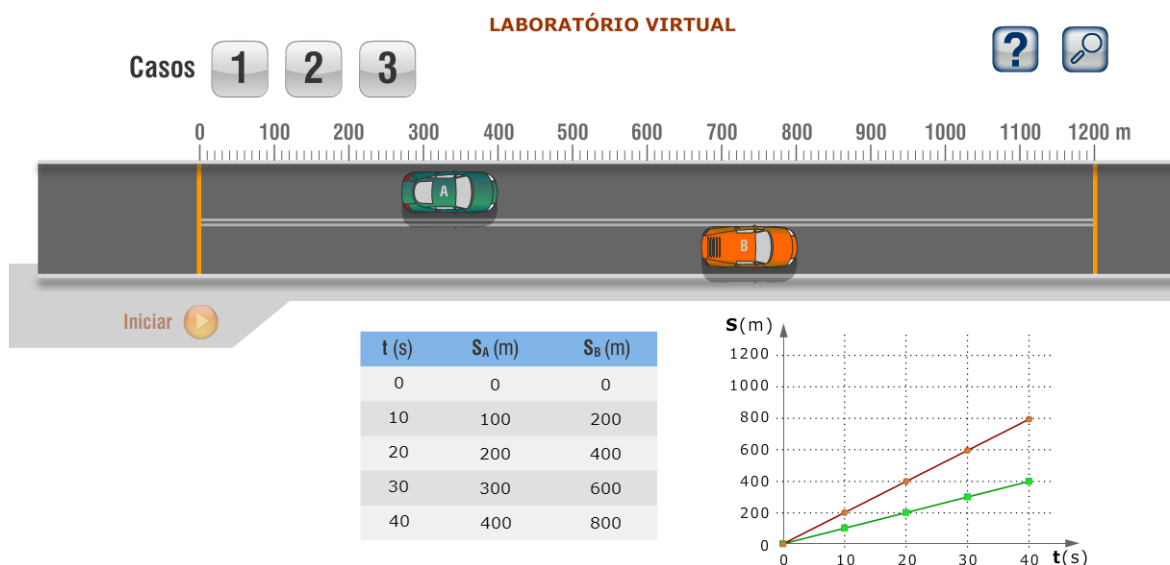


Figura 13: Imagem do applet que auxiliou o exercício 1

O segundo³³ applet foi usado para auxiliar na visualização e melhor compreensão das grandezas pressão, volume e temperatura de um gás. Foi

²⁹ www.geogebra.im-uff.mat.br/

³⁰ Um applet é uma pequena aplicação executada em uma janela de uma aplicação (browser/appletviewer). Tem por finalidade estender as funcionalidades de browsers, adicionando som, animação, etc., provenientes de fontes (URLs) locais ou remotas, sendo que cada página web (arquivo .html) pode conter uma ou mais applets.

Fonte: http://www.inf.pucrs.br/flash/lapro2/aula_applets.html

³¹ [file:///C:/Users/Usuario/AppData/Local/Temp/Rar\\$EX01.174/03_laboratorio_frame.htm](file:///C:/Users/Usuario/AppData/Local/Temp/Rar$EX01.174/03_laboratorio_frame.htm)

³² <http://www.fisicavivencial.pro.br/>

³³ http://phet.colorado.edu/pt_BR/simulation/gas-properties

desenvolvido pelo PhET na Universidade do Colorado³⁴ e usado na atividade 2 de derivada.

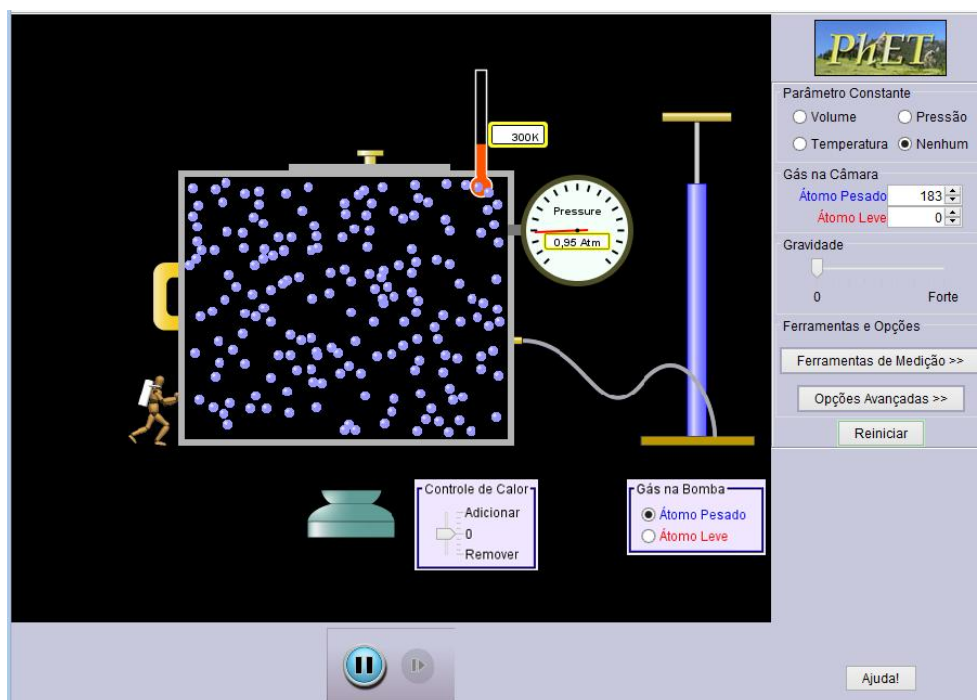


Figura 14: Imagem do aplet do PhET sobre pressão, volume e temperatura de um gás

4.5 Dinâmica das sessões

As atividades foram desenvolvidas para serem realizadas em quatro encontros. No primeiro momento todos os alunos estiveram no laboratório de informática e nos demais cada dupla, separadamente, fez as atividades.

No primeiro encontro, os participantes exploraram algumas das potencialidades a sintaxe do software WolframAlpha que os auxiliaram na construção de gráficos, no cálculo de derivadas e integrais e em outras manipulações algébricas.

No segundo encontro, foram aplicadas atividades de derivadas com foco na taxa de variação. Foram atividades sobre taxa de variação constante, taxa de variação média até chegar à taxa de variação instantânea. A definição da derivada foi apresentada com a ideia intuitiva do limite, sem defini-lo. Um aplet do Geogebra foi usado para auxiliar na ideia intuitiva do limite e conseqüentemente da derivada, analisando graficamente a taxa de variação média e a taxa de variação instantânea.

³⁴ http://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/category/physics

Sempre que necessário para o cálculo de alguma derivada usava-se o CAS WolframAlpha.

No terceiro encontro foram aplicadas as atividades de integrais com ênfase no cálculo de áreas. Foi dada uma ênfase na função acumulação que a integral tem, através do cálculo de áreas dos gráficos de funções. Foram atividades em que o aluno calcula áreas conhecidas de até chegar numa área da qual não saiba calcular com seus conhecimentos de geometria. Neste ponto apresentamos uma nova ferramenta, a integral. Com um applet do GeoGebra apresentou-se o dinamismo da aproximação de áreas de retângulos sob a curva, para induzir a ideia intuitiva de limite de uma soma de áreas convergindo para a área líquida³⁵ sob uma dada curva. Sempre que necessário, utilizou-se o CAS WolframAlpha.

No quarto encontro foram aplicadas atividades sobre o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) relacionando o Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral. Foram analisadas as situações em que a partir de uma função encontra-se a função variação instantânea, ou a variação instantânea para um ponto específico e posteriormente através da área líquida da nova função fez-se a comparação com a função original. Analogamente a partir da função acumulação de uma dada função analisou-se a taxa de variação instantânea num determinado ponto e fez-se a comparação com a função original. Novamente o CAS WolframAlpha serviu de auxílio para a construção gráfica, cálculo de derivadas e integrais. Esta atividade foi realizada com apenas duas duplas, já que com a dupla C, principalmente por incompatibilidade de horário, não foi possível fazer a atividade.

A seguir tem uma tabela com as datas das realizações das atividades com cada dupla.

	Sintaxe do CAS	Derivada	Integral	TFC
Dupla R	22/03/2013	12/04/2013	03/05/2013	24/05/2013
Dupla M	22/03/2013	19/04/2013	22/05/2013	24/05/2013
Dupla C	22/03/2013	26/04/2013	22/05/2013	Não fez.

Tabela 4: Data das realizações das atividades

³⁵ Quando tomamos o limite dessas somas de Riemann obtemos a integral definida que pode ser interpretada como a área líquida, isto é, a diferença das áreas.
Área Líquida = área de uma região acima do eixo x - área de uma região abaixo do eixo x

Podemos analisar o grande intervalo de tempo entre uma atividade e outra. Adequamos nosso horário aos dos alunos e mesmo assim não foi possível a dupla C fazer a atividade integral.

Um destaque importante está no fato de que, sempre que possível, uma atividade envolveu uma representação algébrica, gráfica, tabular, em imagem ou dinâmica. Outro ponto relevante é que as atividades são contextualizadas e interdisciplinares com conteúdos de Física, Biologia e Economia.

4.6 Coleta dos dados

Para a coleta dos dados, foram entregues aos alunos atividades impressas em papel A4 que, depois de resolvidas, foram devolvidas ao pesquisador-professor. No desenvolvimento das atividades, o professor-pesquisador fez perguntas aos alunos de forma que eles pudessem expressar seus raciocínios. Um caderno de notas foi usado para registrar situações que foram julgadas importantes e auxiliar na análise do método de gravação presente no experimento de ensino.

O método de gravação foi o vídeo. Com ele foi possível registrar o desenvolvimento das tarefas pelos alunos (imagem 15). Os alunos trabalharam com um computador que tinha sua tela projetada através de um datashow. Com isso, foi possível perceber tudo que foi desenvolvido no computador, além de toda expressão facial e corporal dos alunos, mesmo expressão facial e corporal não tenham sido o foco de nossa pesquisa.

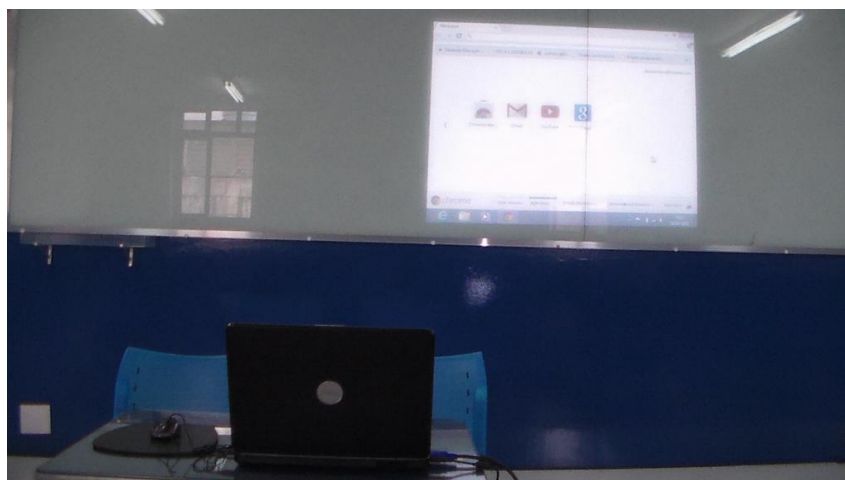


Figura 15: Imagem da disposição do computador e cadeiras para o experimento de ensino

O vídeo tem uma função óbvia de registro de dados sempre que algum conjunto de ações humanas é complexo e difícil de ser descrito compreensivamente por um único observador, enquanto ele se desenrola, como por exemplo, numa sala de aula. (BAUER E GASKEL, 2003,p.149)

Porém, segundo os autores, um vídeo pode mentir, já que quem manipula a câmera e edita o filme é um ser humano. Outros fatores podem influenciar na pesquisa: baixa qualidade visual; baixa qualidade do som que pode não ser compreensível; ângulos desfavoráveis e por reduzir o campo de visão pode passar uma falsa impressão e interpretação do evento ocorrido. “O papel do registro visual seria comprobatório, no sentido jurídico, mas ele não precisa ser o gerador principal de conceitos e intuições-chave.” (BAUER E GASKELL, 2003, p.150)

A grande utilidade do vídeo durante a pesquisa é a possibilidade de ver e rever o evento quantas vezes julgar necessário, fazendo com que outras pessoas possam também ter acesso a ele, dessa forma permitindo mais debate, esclarecimento e interpretações do fato ocorrido.

Bauer e Gaskell (2003) apresentam alguns pontos práticos e de procedimentos

- 1- Proteja suas fontes originais, imagens e sons, fazendo cópias extras.
- 2- Garanta que seus informantes lhe deem permissão clara de reproduzir imagens sobre eles. Garanta, também, que você os informou sobre suas intenções de pesquisa.
- 3- Na gravação de vídeo, é relativamente fácil obter imagens que podem ser usadas, e relativamente difícil ter uma boa qualidade de som. Você precisa prestar atenção à qualidade da gravação do som, quanto à qualidade da imagem.
- 4- É fácil sermos levados pela ideia de produzir um vídeo e terminarmos deixando a tecnologia ou a excitação dominar a pesquisa. Para um pesquisador social, as imagens e a tecnologia são uma contribuição, não um fim.
- 5- Não há razão para se introduzir uma gravação de vídeo em uma situação de pesquisa a não ser que isto seja a melhor ou a única maneira de registrar os dados, ou que seja claramente imperativo gravá-los.
- 6- Milhares de gravações são feitas em pesquisa, mas a maioria delas provavelmente nunca será examinada seriamente já que pode se tornar uma perda de tempo e dinheiro.(BAUER E GASKELL, 2003, p153)

CAPÍTULO 5

DESCRIÇÃO E ANÁLISES DAS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS

Neste capítulo apresentaremos as atividades propostas e a seguir a análise dos dados de cada atividade. Antes de cada atividade descrevemos o que será calculado e o que se pretende analisar da resolução dos alunos.

Na descrição dos dados teremos os diálogos dos alunos, figuras com suas respostas nas folhas de atividades e as análises do professor-pesquisador.

5.1 Encontro 1 – A Sintaxe do CAS on line

A atividade, que foi desenvolvida no dia 22/03/2013, iniciou-se às 17 horas e terminou por volta de 18 horas e 50 minutos. A previsão era que a atividade fosse desenvolvida por no máximo uma hora, porém as curiosidades e dúvidas que foram apresentados pelos alunos fez prolongar o período de execução da tarefa.

A função desta atividade foi fazer com que os alunos tivessem contato com o CAS WolframAlpha que foi o responsável pela construção de todos gráficos além dos cálculos de derivadas e integrais. Este primeiro contato ajudou a agilizar no desenvolvimento dos demais encontros, já que os alunos já conheciam os comandos que eram necessários para as devidas construções e cálculos.

A atividade foi elaborada de forma que os alunos desenvolvessem as mais variadas funções: polinomiais, racionais, fracionárias, modulares, exponenciais, trigonométricas.

Juntamente com o exercício preparado para ser desenvolvido, apresentaram-se aos alunos os comandos que deveriam ser executados. Veja o exemplo abaixo.

a) gráfico $f(x) = 2x+3$

No site a língua oficial é o inglês, dessa forma teremos que nos adaptar, ou seja, escreveremos graphic, ou plot. Em toda multiplicação deve ser inserido *, ou seja, em 2x, no CAS escreveremos 2*x.

Você poderá definir o domínio caso seja importante. Por exemplo, você poderá fazer: Graphic f(x)=2*x+3, x from -10 to 10.

Os comandos do WolframAlpha são todos em inglês, porém verificamos que muito dos comandos, mesmo em português, foi prontamente atendidos pelo CAS. Por exemplo, o CAS reconheceu os termos em português de derivada, seno, gráfico, entre outros que os alunos não escreveram em inglês.

Neste encontro percebemos outro exemplo da facilidade de manipulação, flexibilidade e adaptação do CAS. Uma dupla esqueceu-se de colocar o asterisco para identificar a multiplicação, e mesmo assim, o software produziu o gráfico sem problemas. Posteriormente, percebemos que ele produzia o gráfico de qualquer função polinomial sem que houvesse necessidade dos asteriscos para a multiplicação e sem o acento circunflexo para indicar a potência, por exemplo, em $f(x) = 0.5x^3 + 4x^2 - 2x + 2$ que deveria ser escrito como $f(x) = 0.5 * x^3 + 4 * x^2 - 2 * x + 2$. Com outros softwares tal situação é impossível.

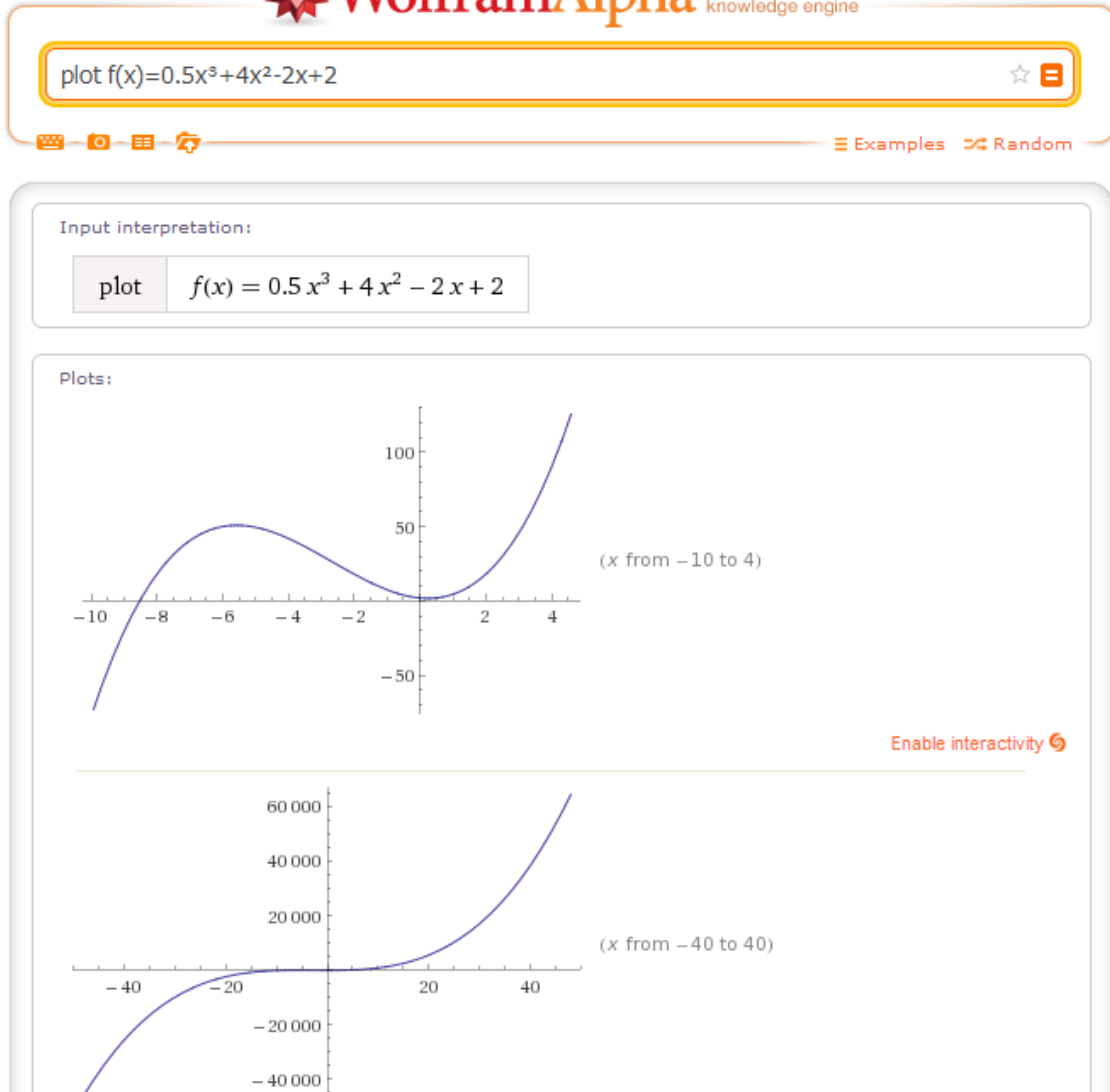


Figura 16: Gráficos da função $f(x) = 0.5x^3 + 4x^2 - 2x + 2$

Os alunos perguntaram o porquê de o CAS apresentar a construção de dois gráficos diferentes como na figura anterior. Eles não perceberam que eram gráficos da mesma função, porém com diferentes domínios e escalas. Dessa forma, foi pedido aos alunos prestarem muita atenção no domínio de cada função.

No decorrer da atividade, os alunos ficavam impressionados com os gráficos que eram produzidos pelo CAS. Uma dupla chegou a criar uma função muito diferente e mesmo assim o software produziu seu gráfico.

Um inconveniente do CAS WolframAlpha foi o excessivo número de propagandas que se apresentavam durante a execução da atividade. Porém, nos demais encontros, tais propagandas não apareceram com grande frequência.

Alguns gráficos chamavam a atenção dos alunos que perguntavam se o gráfico era mesmo daquela forma. Tal situação ficou evidente no gráfico de função modular, onde foi feita a análise do motivo da curva da função $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$ ser “rebatida” para cima do eixo x. Alguns alunos disseram desconhecer esta característica da função modular.

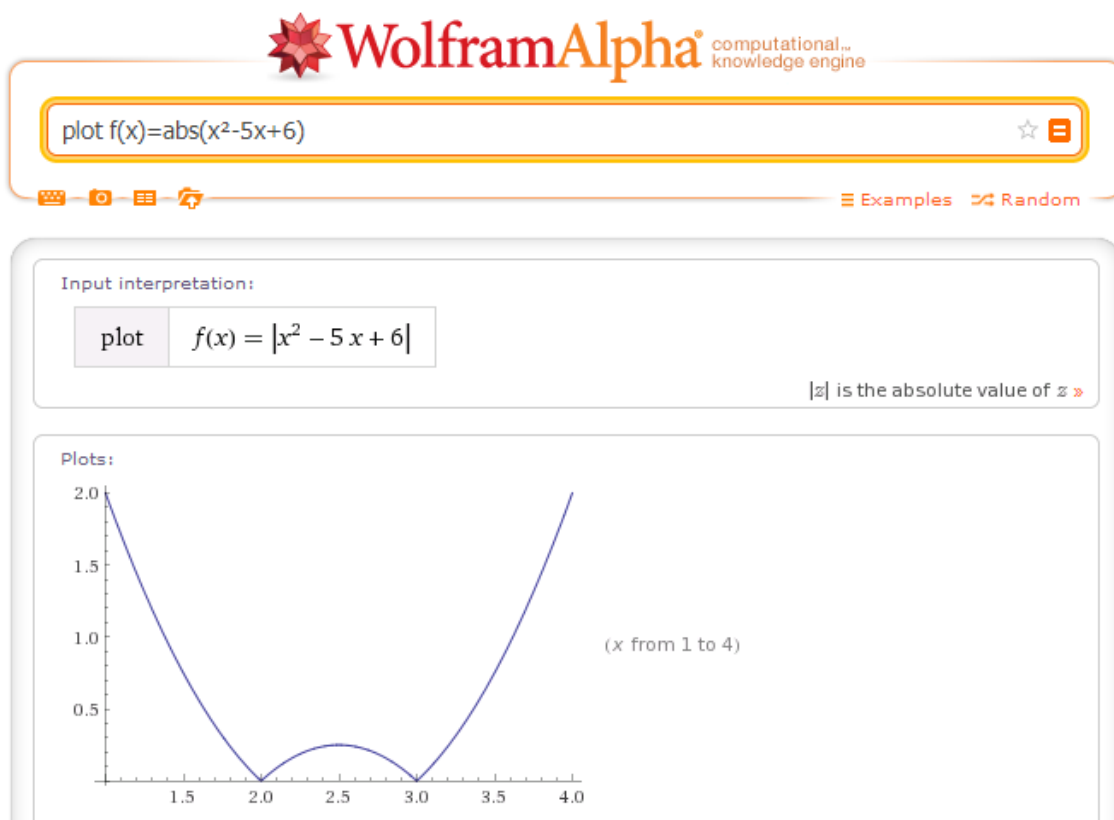


Figura 17: Gráficos da função $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$

Também foi interessante a análise da função racional, principalmente com relação à restrição do domínio e como seria a “imagem” da parte imaginária do número complexo. Por exemplo, na função $f(x) = \sqrt{2x^2 - 3x}$ temos $f(1) = i = 0 + 1i$. No gráfico, temos o ponto (1,1) que é formado pela abscissa 1, que não pertence ao domínio real, e pela ordenada 1 que é a parte imaginária do número complexo $0 + i$. Todos os pontos assim formados foram representados no gráfico em vermelho, já que não pertencem à função com domínio real.

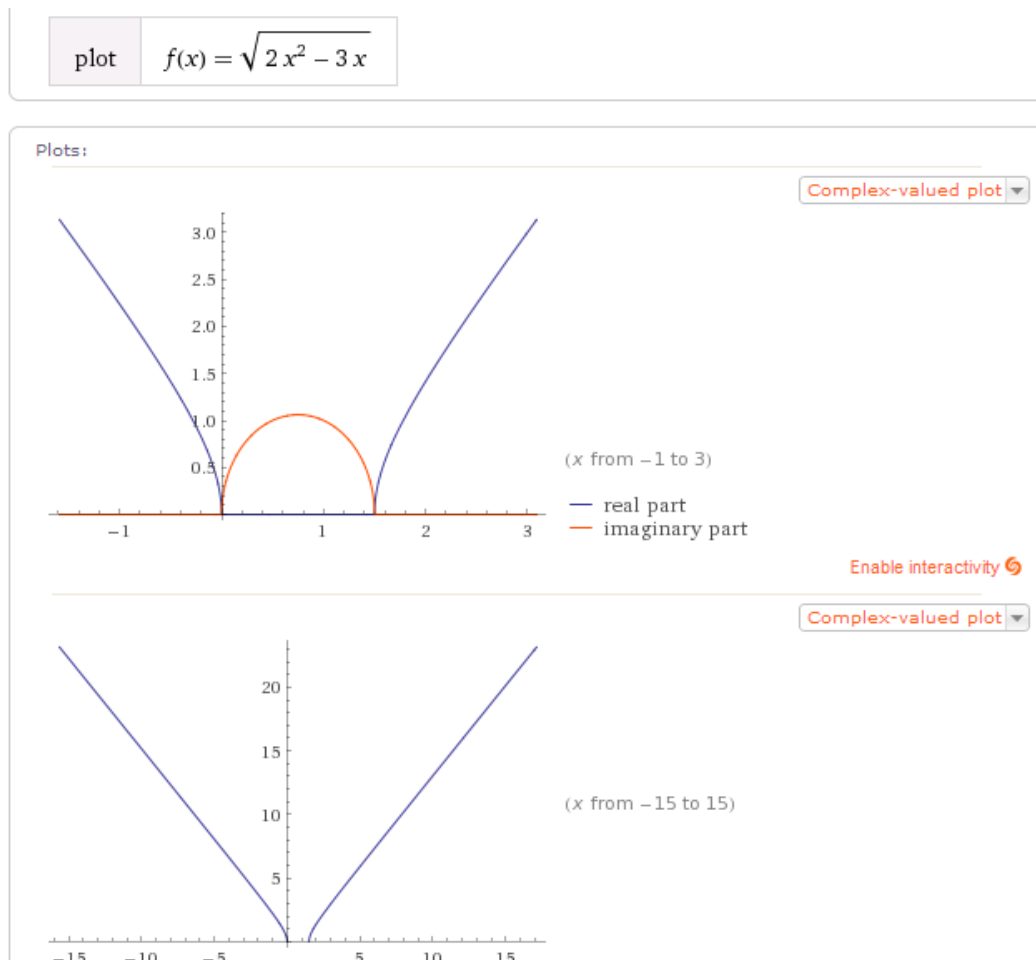


Figura 18: Imagem do gráfico da função $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$ no WolframAlpha

Gráficos envolvendo frações algébricas e suas assíntotas, um exemplo de limite, cálculos de derivadas e integrais também foram executados. Tudo com a intenção de gerar mais facilidade no momento de executar tarefas futuras. Obviamente os alunos perguntavam o que significava o limite, a derivada e a integral. Observe na imagem 19, que quando passamos o mouse sobre os pontos da reta, temos as projeções das coordenadas do ponto. Com isso pode-se trabalhar com a noção intuitiva de limite sem que fosse necessário descrever a definição formal. Com relação à derivada e à integral, pedimos paciência já que nas próximas atividades teriam o devido contato e conhecimento.

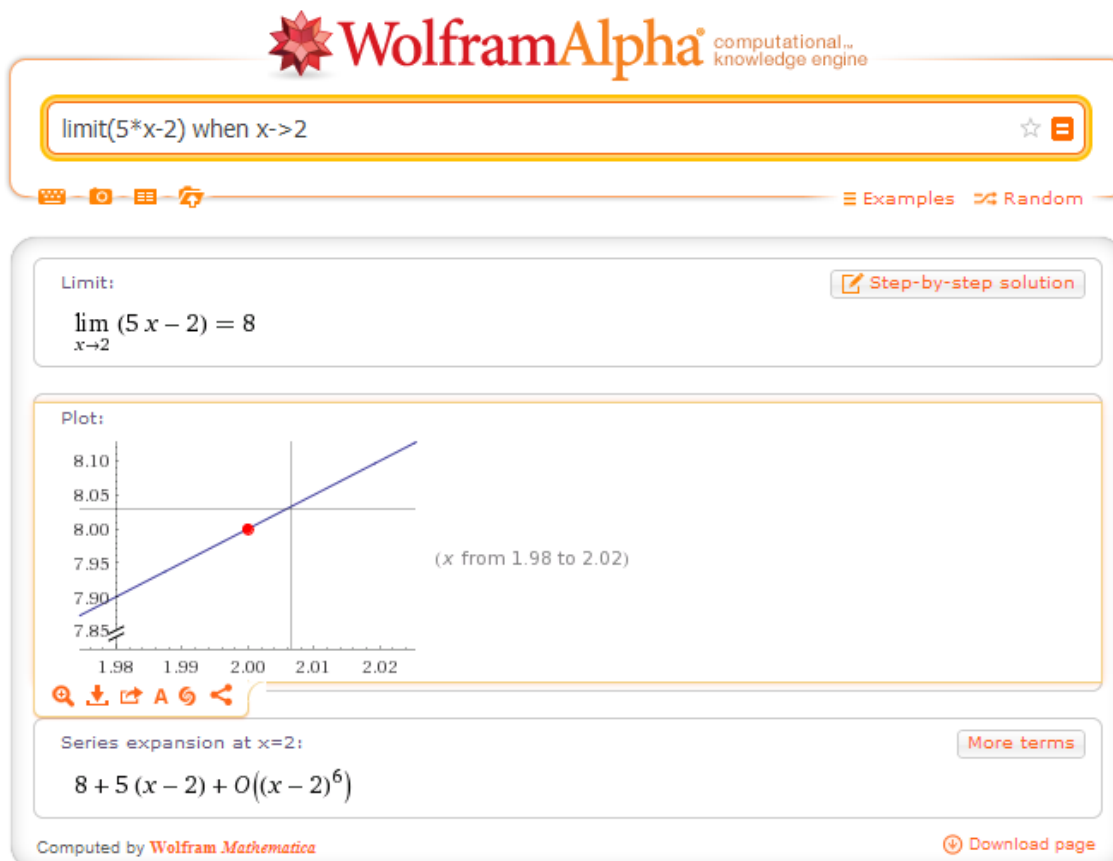


Figura 19: Imagem do cálculo e do gráfico de $\lim_{x \rightarrow 2} (5x - 2)$ no WolframAlpha

Nossa principal expectativa com esta atividade era proporcionar aos alunos o primeiro contato com o software apresentando os principais comandos que seriam necessários para a utilização das atividades de derivada e integral. Não tínhamos, neste ponto da pesquisa, o intuito de analisar como estava sendo formada a imagem do conceito de derivada ou de integral. Neste sentido, os alunos não tiveram dificuldades na manipulação e execução da atividade: a sintaxe do CAS online.

Durante as demais atividades usaram estes comandos para seu desenvolvimento com certa desenvoltura. Vez ou outra não se lembravam de algum comando mais específico ou o digitavam errado. Isso é muito comum, já que não manipulavam o software com frequência. Os comandos em inglês eram os que eles mais esqueciam ou erravam.

Num dos erros de sintaxe, M1 e M2 trocaram um ponto pela vírgula num número decimal. Um número decimal deve ser escrito com ponto, já que o CAS não o identifica com a vírgula. O software apresentou um gráfico e uma expressão completamente diferente do esperado e demorou um pouco para identificarmos o erro.

Como exemplo, temos a imagem 4 onde o CAS, na função $f(x) = 0,5x^3 + 4x^2 - 2x + 2$, constrói simultaneamente os gráficos das funções $f(x) = 5x^3 + 4x^2 - 2x + 2$ e $f(x) = 0$.

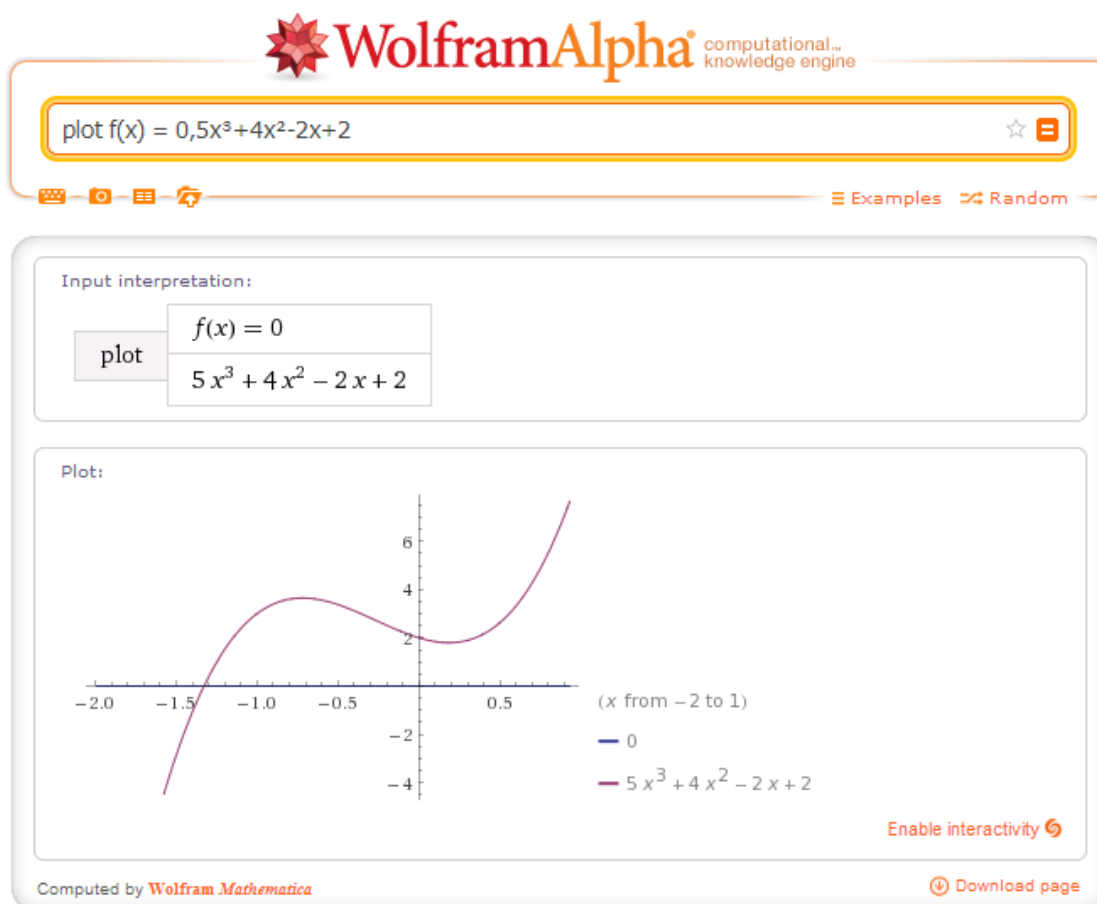


Figura 20: Imagem do gráfico da função $f(x)=0,5x^3+4x^2-2x+2$ no WolframAlpha

Esta atividade veio confirmar todas as expectativas sobre as possibilidades e potencialidades do CAS online WolframAlpha. Nas demais atividades da pesquisa, analisaremos como o CAS auxiliou no desenvolvimento da imagem do conceito de derivada e integral dos participantes, além de analisar quais as principais dificuldades emergentes no uso do Wolfram Alpha.

5.2 Encontro 2 : Atividade derivada

Nesta atividade procuramos identificar as principais dificuldades e compreensões na abordagem ao conceito de derivada. Dos experimentos de ensino que os alunos participaram, o de derivada foi o que gastou mais tempo, em média duas horas para cada dupla.

Começamos com uma atividade de taxa de variação nula. Depois uma atividade de taxa de variação constante, para posteriormente analisar a taxa de variação média não constante até chegar à taxa de variação instantânea. A definição de derivada como taxa de variação instantânea será apresentada com a ideia intuitiva de limite, sem defini-lo.

5.2.1 Atividade 1

A atividade valoriza o aspecto visual, dinâmico, os dados em tabela e o gráfico. As variadas formas de apresentação dos dados enriquecem a imagem do conceito.

Para a resolução do exercício 1 usamos um applet para simular o movimento de dois carros.

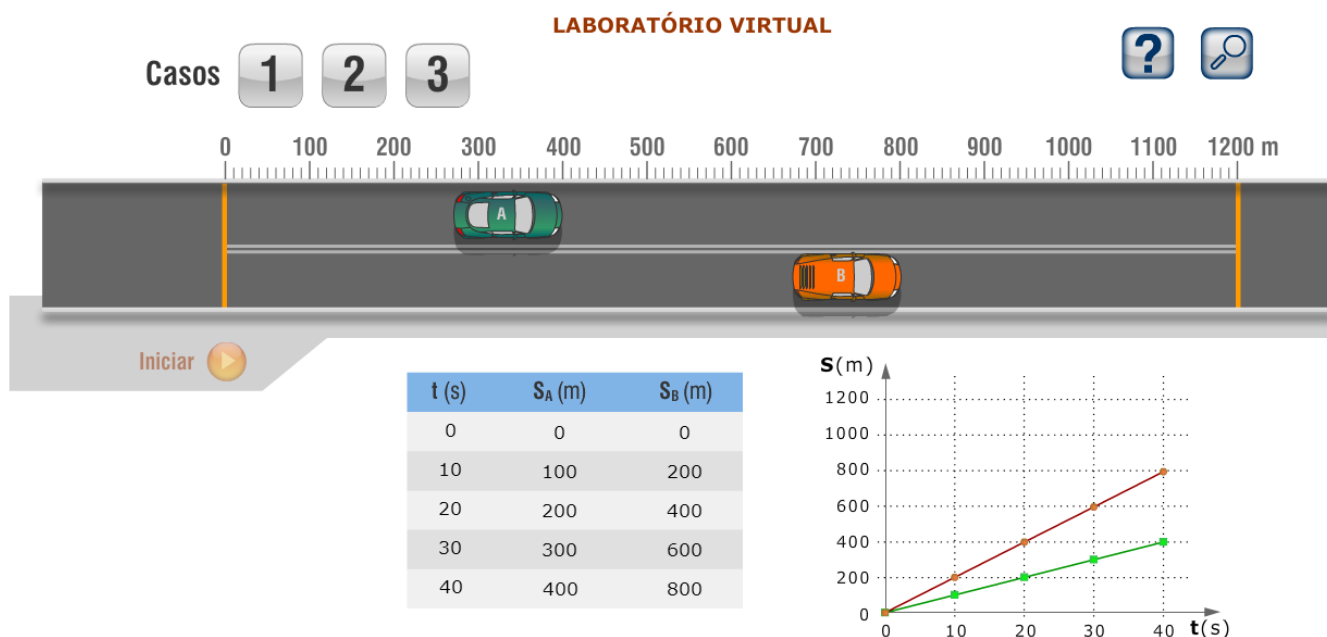


Figura 21: Imagem do applet que auxiliou o exercício 1 da atividade

Com a atividade desejamos apresentar a grandeza velocidade definida como a taxa de variação da posição com o tempo. Nesta atividade a velocidade está constante e com isso desejamos investigar como os alunos relacionam e calculam a velocidade no gráfico Sxt e a variação do espaço no gráfico vxt. A preocupação com as unidades das grandezas será percebida em todas as atividades da pesquisa.

ATIVIDADE 1

Usando o applet Movimento atividade, utilizando o ícone Laboratório Frame, e executando a experiência 1.

a) Complete as tabelas abaixo:

CARRO1

Intervalo de tempo	S_0	S	$\frac{\Delta S}{\Delta t}$
0 a 10s			
10s a 20s			
30s a 40s			
0 a 40s			

CARRO2

Intervalo de tempo	S_0	S	$\frac{\Delta S}{\Delta t}$
0 a 10s			
10s a 20s			
30s a 40s			
0 a 40s			

b) Como está variando a grandeza posição em relação à grandeza tempo?

- c) Que grandeza física é definida por $\frac{\Delta S}{\Delta t}$? Qual é a sua unidade?
- d) Construa, para cada carro, o gráfico, da grandeza definida no item c. Como ela está variando em cada caso?
- e) Determine as áreas entre cada gráfico e seu eixo das abscissas (tempo).
- f) Escreva um pequeno texto descrevendo o que você entendeu ou não ao trabalhar neste experimento.

5.2.1.1 Descrição da atividade 1

Os alunos não tiveram problemas para executar a tarefa, pois é uma atividade comum no ensino médio, porém, não com o enfoque de identificar o que representa cada valor encontrado. Apenas C2 confundiu alguns valores da tabela. Identificaram com facilidade a velocidade como a variação da posição em relação ao tempo e sua unidade. É um conceito físico de que os alunos parecem ter mais compreensão, já que é comum no dia a dia.

Durante a atividade foi perguntado a cada dupla:

P: E se não fosse apresentada a tabela com os dados do movimento dos carros, mas apenas o gráfico Sxt . Como vocês fariam para calcular a velocidade de cada carro a partir do gráfico Sxt ?

Dupla M

M1: Seria pela área, né?

P: Cuidado, este não é um gráfico vxt .

M2: Eu faria pela fórmula. [do movimento uniforme $S = S_0 + vt$]

A aluna M1 confundiu a distância percorrida calculada pela área do gráfico vxt , ou seja, apenas memorizou a informação, mas não entendeu seu significado.

Dupla R

R1: Se for constante, o gráfico for reto, eu pegaria qualquer distância pelo tempo, por exemplo, de 10 a 20, de 20 a 30.

P: Aí vocês jogam na fórmula [do movimento uniforme $S = S_0 + vt$] ou fazem a análise pelo gráfico?

R2: Pela fórmula.

P: Nunca pensaram em fazer o cálculo da velocidade pela inclinação da reta, pegando dois pontos e analisando a variação como uma tangente neste triângulo retângulo aqui? [Foi destacado na projeção o triângulo em questão]

R1: Eu acho isso mais complicado.

P: Mas a fórmula só é usada para velocidade constante e se ela não for constante?

[Silêncio]

Dupla C

C1: Eu pegaria dois pontos do gráfico e veria o quanto variou a posição no tempo. [A relação da velocidade média distancia/tempo.]

A definição do conceito que a maioria dos alunos tem da velocidade constante sugere ligada à equação horária do movimento, como retratado nos comentários. Somente C1 indicou a variação por dois pontos no gráfico, porém não indicou relação desta variação com a inclinação da reta.

No quadro, aproveitando a projeção do gráfico através do datashow, foi feita a análise da inclinação da reta comparando com a tabela por eles completada. Foi destacada a importância de analisar a velocidade como uma taxa de variação e que neste exemplo, para qualquer intervalo, a taxa de variação da posição como o tempo era a mesma. Com esta atitude desejamos enriquecer a imagem do conceito de velocidade a partir da taxa de variação.

Apesar de afirmarem que a reta mais inclinada indica maior velocidade percebemos que os alunos não faziam a relação da inclinação da reta com a taxa de variação.

b) Como está variando a grandeza posição em relação à grandeza tempo?

A grandeza posição varia uniformemente em relação à grandeza tempo. À medida que o tempo aumenta, a posição aumenta na mesma proporção, indicando aceleração, o que caracteriza o movimento como uniforme

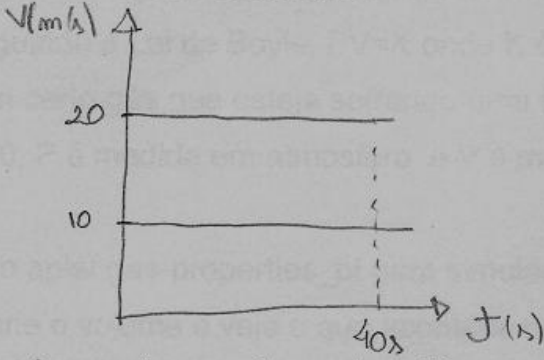
c) Que grandeza física é definida por $\frac{\Delta S}{\Delta t}$? Qual é a sua unidade?

A grandeza física definida por $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ é a velocidade média que tem como unidade no Sistema Internacional (SI) m/s.

Figura 22: Descrição de M2 dos itens b e c da atividade 1 da atividade derivada

Com relação aos itens *d* e *e* da atividade todos os fizeram com muita tranquilidade e fizeram a relação da área com a distância percorrida pelos carros. Somente R1 considerou o deslocamento e não distância percorrida. Percebemos que os alunos têm decorada a informação de que a área do gráfico *vxt* é a distância percorrida e não veem esta área como uma função acumulação. Lembremos que a definição do conceito pode ser formada por definições ou propriedades decoradas, que podem ou não ter qualquer significado para o aluno.

d) Construa, para cada carro, o gráfico, da grandeza definida no item c. Como ela está variando em cada caso?



e) Determine as áreas entre cada gráfico e seu eixo das abscissas (tempo).

Área (I)	Área (II)
$A = b \cdot h$	$A = b \cdot h$
$A = 40 \cdot 10$	$A = 40 \cdot 20$
$A = 400$	$A = 800$

Figura 23: Descrição de M1 dos itens d e e da atividade 1 da atividade derivada

Na análise do item *f*, quando foi pedido para descreverem o que entenderam sobre o experimento, todos os alunos destacaram a área do gráfico *vxt*, porém, com exceção a C1 e M1, sem citar o gráfico em questão. Somente R1 e R2 descreveram sobre a inclinação do gráfico representar a velocidade, mesmo sem indicar qual gráfico, mas subentendendo ser o gráfico *Sxt*.

f) Escreva um pequeno texto descrevendo o que você entendeu ou não ao trabalhar neste experimento.

Com um gráfico de uma reta, representa que a velocidade é constante. Através da inclinação, pode-se perceber se uma velocidade é maior ou menor que a outra. Quanto mais inclinado, menor a velocidade.

Figura 24: Descrição de R1 do item *f* da atividade 1 da atividade derivada

A área encontrada entre cada gráfico e seu eixo das abscissas (tempo) representa a grandeza das posições de cada carro, uma vez que o gráfico é velocidade x tempo.

Figura 25: Descrição de M1 do item *f* da atividade 1 da atividade derivada

Através deste experimento é possível afirmar que em um gráfico de velocidade x tempo, a área entre esse e o eixo das abscissas é numericamente igual ao deslocamento.

Figura 26: Descrição de C1 do item *f* da atividade 1 da atividade derivada

Quando se calcula a área da abscissa é encontrada o deslocamento do móvel.

Figura 27: Descrição de C2 do item *f* da atividade 1 da atividade derivada

Uma constatação interessante é a dificuldade que os alunos têm de escrever suas análises e raciocínios matemáticos. Normalmente, em sala de aula, dizemos aos alunos que em muitas situações pode-se descrever seu raciocínio lógico com um texto ao invés de usar apenas expressões matemáticas. Durante a atividade os

alunos se expressaram com naturalidade sobre o item f da atividade 1, porém, não conseguiram transferir sua conclusão para o papel. Veja o caso de C2 que descreve a área da abscissa, ao invés de descrever a área formada pela curva do gráfico e o eixo das abscissas.

5.2.2 Atividade 2

A atividade 2 está relacionando a taxa de variação média da pressão em relação ao volume numa transformação isotérmica. A intenção é fazer os alunos perceberem que neste caso a variação da Pressão em relação ao Volume não é constante, além de identificar o que significa para eles a razão $\frac{\Delta P}{\Delta V}$ e sua unidade. Um aplet foi usado para auxiliar na identificação e como variam as variáveis pressão, volume e temperatura.

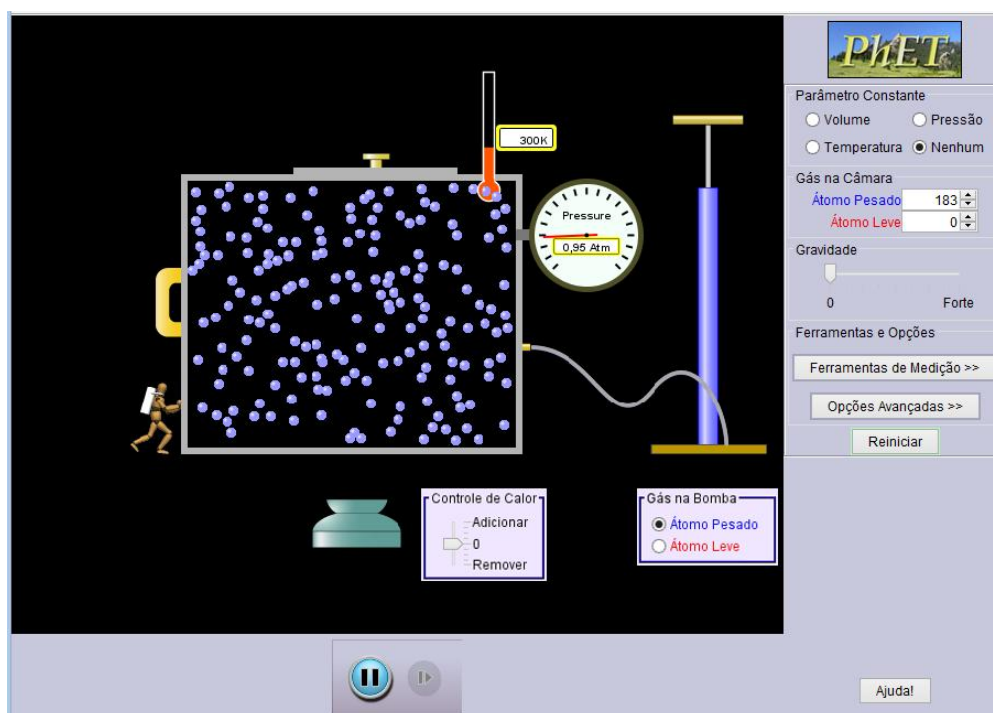


Figura 28: Imagem do aplet do PhET sobre pressão, volume e temperatura

ATIVIDADE 2

Uma transformação isotérmica faz variar a Pressão (P) e o Volume(V) de um gás seguindo a Lei de Boyle, $PV=K$ onde K é uma constante. Suponha que para um

certo gás que esteja sofrendo uma transformação isotérmica, tenha $K= 2000$, P é medida em atmosfera e V é medida em litros.

a) Use o aplet gas-properties_pt para simular uma transformação isotérmica. Nele varie o volume e veja o que acontece com a pressão e temperatura do gás.

b) Complete a tabela

Intervalo de Pressão	Intervalo do Volume correspondente	$\frac{\Delta P}{\Delta V}$
20 a 100		
100 a 200		
200 a 800		
800 a 1000		

OBS: Determinar os módulos da variação

c) O que significa $\frac{\Delta P}{\Delta V}$ em cada intervalo do item b no gráfico? Qual é a unidade de

$\frac{\Delta P}{\Delta V}$?

5.2.2.1 Descrição da atividade 2

Os alunos completaram a tabela com relativa facilidade, uns mais rápidos e sucintos como R1 e R2, outros mais lentos devido ao detalhamento da resolução dos cálculos.

Intervalo de Pressão	Intervalo do Volume correspondente	$\frac{\Delta P}{\Delta V}$
20 a 100	100/20	-1
100 a 200	20/10	-10
200 a 800	10/2,5	-80
800 a 1000	2,5/2	-400

OBS: Determinar os módulos da variação

Figura 29: Descrição de R2 do item b da atividade 2 da atividade derivada

b) Complete a tabela

Intervalo de Pressão	Intervalo do Volume correspondente	$\frac{\Delta P}{\Delta V}$
20 a 100	$PV = K$ $20V = 2000 \Rightarrow V = 100L$ $PV = K$ $100V = 2000 \Rightarrow V = 20L$	$\frac{100-20}{20-100} = \frac{80}{-80} = -1 \text{ atm/L}$
100 a 200	$100V = 2000 \Rightarrow V = 20L$ $200V = 2000 \Rightarrow V = 10L$	$\frac{200-100}{10-20} = \frac{100}{-10} = -10 \frac{\text{atm}}{L}$
200 a 800	$PV = K \Rightarrow 800V = 2000 \Rightarrow V = 2,5L$	$\frac{800-200}{2,5-10} = \frac{600}{-7,5} = -80 \frac{\text{atm}}{L}$
800 a 1000	$PV = K \Rightarrow 1000V = 2000 \Rightarrow V = 2L$	$\frac{1000-800}{2-2,5} = \frac{200}{-0,5} = -400 \frac{\text{atm}}{L}$

OBS: Determinar os módulos da variação

Figura 30: Descrição de M2 do item b da atividade 2 da atividade derivada

A figura 26 destaca o maior detalhamento na resolução de M2, sua colega M1 também o fez assim, mas ambas cometeram o erro no cálculo da última razão que deveria ser $\left| \frac{200}{-0,5} \right| = 400$ e não 133,3.

Os alunos descreveram naturalmente qual é a unidade da razão $\frac{\Delta P}{\Delta V}$, mas tiveram muitas dificuldades para expressar o seu significado.

Dupla M

P: O que significa esta relação $\frac{\Delta P}{\Delta V}$?

M1: ΔP variação da pressão e ΔV variação do volume.

P: Comparando com a atividade anterior a razão $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ indicava uma grandeza conhecida...

M1: A velocidade.

P: Mas poderia não dar. Basicamente lá estava comparando a variação de duas grandezas. E aí, o que representa $\frac{\Delta P}{\Delta V}$? [Silêncio]

P: É interessante perceber que na atividade anterior esta variação foi constante. Por que nesta não está constante? [Silêncio]

P: E a unidade?

M2: atm/l

P: E aí, o que significa $\frac{\Delta P}{\Delta V}$?

M2: Comparando a pressão com o volume.

A dificuldade para visualizar a razão como uma comparação é muito grande. Certamente este será um dos maiores obstáculos cognitivos para considerar a taxa de variação como raiz cognitiva da derivada. Os alunos conhecem as grandezas, conhecem as unidades e não conseguem fazer a relação de comparação entre as variações.

Observe que inicialmente estávamos interessados somente na variação absoluta para identificar se a razão entre as variações era constante como na atividade anterior. Porém nenhum dos alunos deixou a variação em módulo e todos queriam identificar o que significava o sinal negativo. Então, foi pedido para todos fazerem o gráfico da função no WolframAlpha. A partir do gráfico revisamos as propriedades de uma transformação isotérmica onde as grandezas pressão e volume são inversamente proporcionais. Conseqüentemente a variação positiva de uma grandeza indicava uma variação negativa da outra. Finalmente verificavam que a razão não era constante.

Mesmo após toda análise descrita anteriormente, os alunos descreveram o significado de $\frac{\Delta P}{\Delta V}$ como a comparação entre a variação da pressão sobre o volume e não sobre a variação do volume. Apenas a dupla M destacou ainda que as grandezas pressão e volume variam de forma inversamente. Porém, nenhuma dupla destacou a questão da variação não ser constante como era desejado e como foi perguntado por nós durante a atividade.

c) O que significa $\frac{\Delta P}{\Delta V}$ em cada intervalo do item b no gráfico? Qual é a

unidade de $\frac{\Delta P}{\Delta V}$?

Significa que uma grandeza varia de acordo com a outra, isto é, a medida que a pressão aumenta o volume diminui. Por serem grandezas inversamente proporcionais, o gráfico representado será uma hipérbola. A unidade será atm / L.

Figura 31: Descrição de M1 sobre item c da atividade 2 da atividade derivada

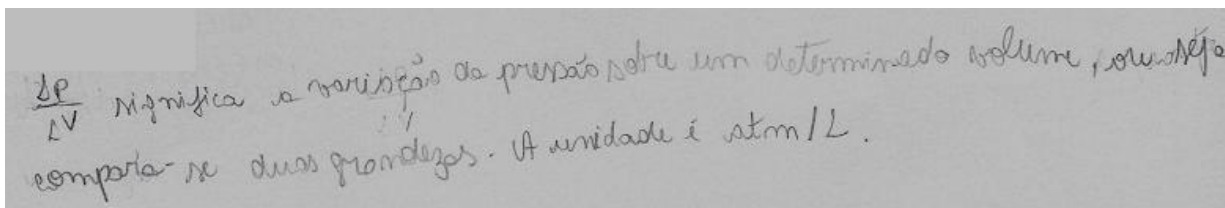


Figura 32: Descrição de C1 sobre item c da atividade 2 da atividade derivada

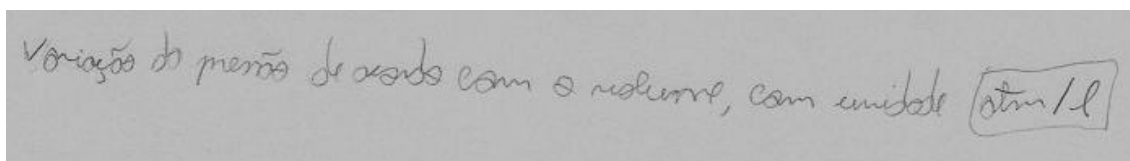


Figura 33: Descrição de R2 sobre item c da atividade 2 da atividade derivada

5.2.3 Atividade 3

Nesta atividade teremos a apresentação da taxa de variação instantânea. Para isso, novamente teremos uma tabela para ser completada com a intenção de verificar a variação do custo de produção em relação à variação da quantidade de peças produzidas. Os valores da tabela foram produzidos de forma que a variação fique pequena e sobre o valor de 100 peças.

ATIVIDADE 3

O custo, em reais, da produção de x unidades de uma certa mercadoria, é $C(x) = 5000 + 10x + 0,05x^2$. Com base nessas informações:

a) Complete a tabela:

x_0	$C(x_0)$	x	$C(x)$	$\frac{\Delta C}{\Delta x}$
100		150		
100		120		
100		110		

100		105		
100		101		

b) Utilize o aplicativo GeoGebra-Atividade3 para analisar o gráfico de $C(x)$.

c) O que significa $\frac{\Delta C}{\Delta x}$ em cada intervalo? Qual é a unidade de $\frac{\Delta C}{\Delta x}$?

d) Como está variando o custo de produção quando $x=100$ unidades?

5.2.3.1 Descrição da atividade 3

Os alunos tiveram um pouco de trabalho no cálculo com a calculadora dos valores substituídos na função. Ora erravam na potência ora na multiplicação. Talvez por isso tenham demorado nesta atividade mais do que se esperava.

a) Complete a tabela:

x_0	$C(x_0)$	x	$C(x)$	$\frac{\Delta C}{\Delta x}$
100	6500	150	7625	22,5
100	6500	120	6920	21
100	6500	110	6705	20,5
100	6500	105	6601,25	20,25
100	6500	101	6520,5	20,5

Figura 34: descrição de R2 sobre item a da atividade 3 da atividade derivada

Como pedido no item b, usamos o Geogebra para enriquecer a imagem do conceito de taxa de variação, e como fica esta taxa em intervalos de produção próximos de zero. O GeoGebra também será um organizador genérico, apresentando o dinamismo do cálculo através da noção intuitiva de limite.

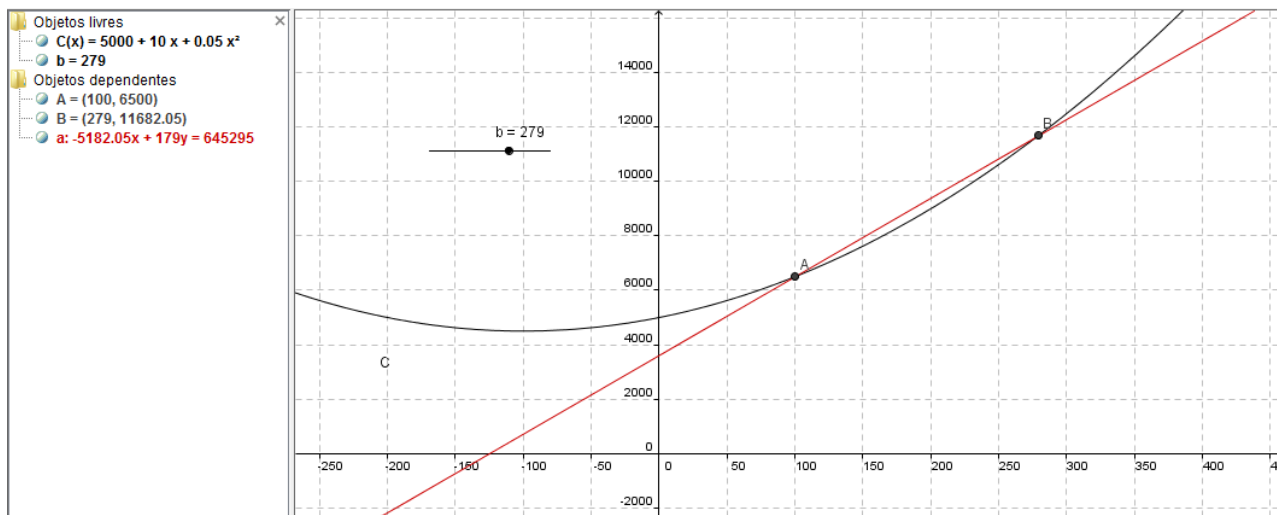


Figura 35: Gráfico Geogebra da atividade 3 da atividade derivada

O ponto A(100, 6500) é fixo e pode-se variar o valor da abscissa do ponto B de forma que o ponto B irá percorrer a curva da função fazendo a reta secante formada pelos pontos A e B aproxime de uma tangente local quando B aproximar de A.

No item c da atividade, os alunos novamente tiveram dificuldade no que significa $\frac{\Delta C}{\Delta x}$. Desta vez tiveram dificuldades inclusive com a unidade da razão.

Dupla M

M2: Mas o que representa x mesmo?

P: Veja no enunciado. O número de unidades produzidas.

M2: Pode ser dinheiro por unidade?

P: Sim, mais especificamente Reais por unidade.

Dupla C

C2: Esta fração significa lucro?

Dupla R

R2: A variação do custo pela quantidade de material.

P: E qual seria a unidade?

R1: Seria reais por peças produzidas?! [A resposta com uma pergunta]

c) O que significa $\frac{\Delta C}{\Delta x}$ em cada intervalo? Qual é a unidade de $\frac{\Delta C}{\Delta x}$?

Variação do custo de acordo com a variação do número de unidades

Figura 36: Descrição de R2 sobre item c da atividade 3 da atividade derivada

É a relação entre o custo e a produção
 $\frac{\Delta C}{\Delta x} \rightarrow$ custo
 $\Delta x \rightarrow$ nº de mercadorias

Figura 37: Descrição de C2 sobre item c da atividade 3 da atividade derivada

$\frac{\Delta C}{\Delta x}$ significa a variação do custo dos produtos (em reais) de acordo com a quantidade de produtos. A unidade para essa variação será reais/unidade de produto.

Figura 38: Descrição de M2 sobre item c da atividade 3 da atividade derivada

Nas figuras 31, 32 e 33 verificamos que os alunos R2, C2 e M2 não descreveram de forma correta a variação do custo de acordo com a variação do número de mercadorias produzidas.

Significa que o custo está variando de acordo com a quantidade de produto. Nesse exemplo são diretamente proporcionais. Sendo que a unidade será reais por unidades.

Figura 39: Descrição de M1 sobre item c da atividade 3 da atividade derivada

Na figura 34 verificamos que a aluna M1 analisou erroneamente que o custo é diretamente proporcional à produção.

Significa variação do custo da produção sobre variação das unidades. Unidade é reais/unidades

Figura 40: Descrição de R1 sobre item c da atividade 3 da atividade derivada

A unidade de $\frac{\Delta C}{\Delta x}$ é reais/unidade, essa expressão significa o quanto o custo está variando a medida em que se aumenta ou diminui a produção.

Figura 41: Descrição de C1 sobre item c da atividade 3 da atividade derivada

Já os alunos R1 e C1 escreveram diferente um do outro, mas de forma correta.

Com relação ao item *d* as três duplas tiveram dificuldades. Tal situação já era esperada, já que é neste ponto que temos a derivada como taxa de variação instantânea.

Enquanto faziam as contas da variação foi perguntado o porquê da variação não ser constante. Os alunos perceberam que o gráfico não era uma reta, com destaque para a dupla R.

R1: Esta expressão é do segundo grau. Se fosse do primeiro grau. A gente nunca viu uma função do segundo grau ser constante.

P: Cuidado, não estamos falando da função constante. Quando a variação é constante, como tem que ser o gráfico?

R1: Uma reta.

Percebemos neste diálogo, novamente a dificuldade de identificar a taxa de variação num gráfico. E quando perguntados sobre como está variando a produção quando $x = 100$ unidades,

Dupla R

R2: Não constante.

R1: Varia de forma não constante.

P: Vocês acham que teriam como descobrir este valor? [Dúvida]

Dupla M

M1: Seria 5000,00?

P: Por quê?

M1: É o valor da função quando $x = 100$.

M1 confundiu o valor da função para $x = 100$ com a variação do custo no instante de $x=100$. A mesma confusão ocorreu com a dupla C.

Neste ponto foi pedido para os alunos voltarem ao gráfico do Geogebra e que variassem o valor da abscissa de B e analisassem a variação, através da inclinação da reta secante, do custo pela variação da produção. Eles variavam este ponto até ficar bem próximo de A, a ideia de limite, de forma que a inclinação da reta, que é tangente à curva, fosse a variação do custo quando produzido aquele número de peças.

P: Se eu quiser saber o quanto está variando do custo bem próximo de 100 unidades o que tenho que fazer com o valor de Δx ?

R1: Ser zero.

P: Ser bem próximo de zero.

Neste momento, destacamos aos alunos que esta variação é instantânea, enquanto antes tínhamos a taxa de variação média.

Chamou-nos a atenção ao analisar o que foi escrito na folha de tarefa. A dupla M deixou a resposta do item d em branco. A dupla R apenas respondeu que “varia de forma não constante”. Nenhuma das duas duplas argumentou a taxa de variação instantânea.

Como a dupla C fez a atividade depois das outras duplas, aproveitamos o momento para definir a derivada como taxa de variação instantânea. Alteramos a sequência do experimento de ensino para perceber se a dupla seria capaz de resolver o item d ou deixaria em branco como as outras duplas. Com as outras duplas a definição da derivada veio apenas na atividade 4.

Tal mudança não fere a metodologia experimento de ensino na qual Steffe e Thompson (2000) destacam ser importante o professor-pesquisador reapplicar seu experimento de ensino com base no seu experimento anterior e/ou no de outros pesquisadores, de forma a corrigir, adaptar ou redirecionar seu experimento, a partir dos problemas anteriormente encontrados.

Assim, foi entregue um material com um resumo da derivada como taxa de variação instantânea tendo como exemplo a velocidade instantânea a partir da velocidade média.

Ao trabalhar com a velocidade instantânea através da taxa de variação os alunos se sentiram mais confortáveis. Porém, perguntaram como iriam calcular a derivada e prontamente indicamos o WolframAlpha.

Dessa forma, a dupla C calculou a derivada da função via WolframAlpha e depois calculou o que se pedia no item. Abaixo temos a imagem do que foi escrito por C1. O mesmo foi escrito por C2.

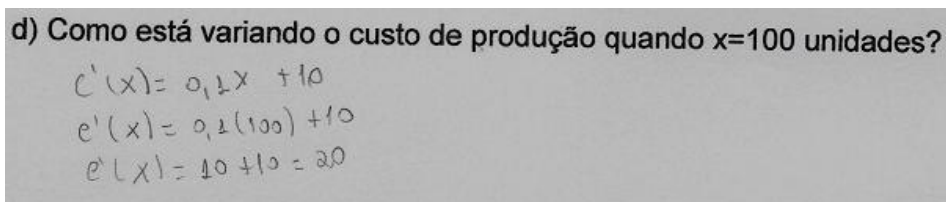


Figura 42: Descrição de C1 sobre item d da atividade 3 da atividade derivada

5.2.4 Atividade 4

Com a atividade 4 estamos interessados em uma aplicação de derivada no crescimento de micróbios, analisando a taxa de variação média até a taxa de variação instantânea, ou seja, a derivada num ponto. Para as duplas R e M nesta atividade, foi apresentado o conceito de derivada como taxa de variação instantânea e como destacamos anteriormente, tal definição foi apresentada na atividade anterior para a dupla C.

ATIVIDADE 4

Uma população de micróbios está crescendo continuamente de acordo com a tabela abaixo. N_0 representa o número de micróbios no início de um intervalo e N o número de micróbios ao fim deste intervalo, ΔN a variação deste intervalo e Δt a variação de tempo no mesmo intervalo. Com base nessas informações,

a) Complete a tabela

Intervalo de tempo	N_0	N	$\frac{\Delta N}{\Delta t}$
0 a 1h	12	24	
1h a 2h	24	48	

2h a 3h	48	96	
3h a 5h	96	384	
5h a 7h	384	1536	
0 a 10h	12	12288	

- b) Supondo que essa evolução seja contínua ao longo do tempo, determine uma função que expresse o número de micróbios N em função do tempo t .
- c) Construa o gráfico desta função no WolframAlpha.
- d) O que significa $\frac{\Delta N}{\Delta t}$ em cada intervalo do item **a** no gráfico? Qual é a unidade de $\frac{\Delta N}{\Delta t}$?
- e) Como seria possível calcular o quão rápido está crescendo o número de micróbios no instante $t = 5h$?

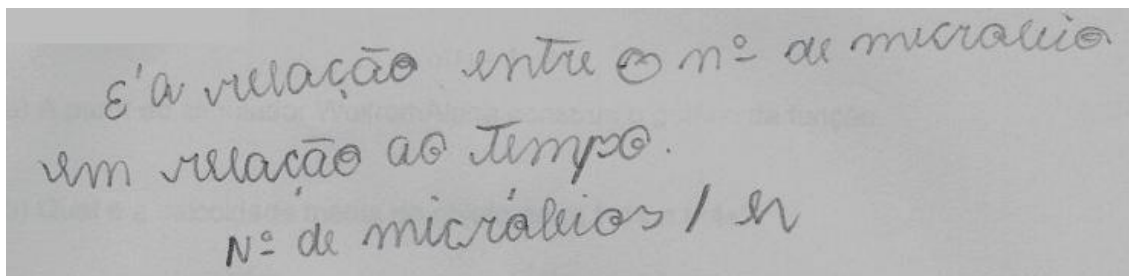
5.2.4.1 Descrição da atividade 4

Um dos pontos que nos chamou mais atenção nesta atividade foi a dificuldade que os alunos tiveram em determinar a função pedida no item *b*. Nos três experimentos de ensino, foi necessário o professor-pesquisador ir ao quadro para ajudar a construir a função, mesmo depois de eles completarem a tabela de forma correta e perceberem que a cada hora o número de micróbios dobra. Foram inclusive lembrados também sobre a ideia de progressão geométrica. Porém, somente depois que foi posta a sequência no quadro, é que conseguiram visualizar a equação exponencial.

$$N(t) = 12 \times 2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2, \text{ t fatores de } 2$$

$$N(t) = 12 \times 2^t$$

Os alunos conseguiram identificar o que significa $\frac{\Delta N}{\Delta t}$ e sua unidade no item d, com exceção de C2 que descreveu:



É a relação entre o nº de micróbios em relação ao tempo.
Nº de micróbios / h

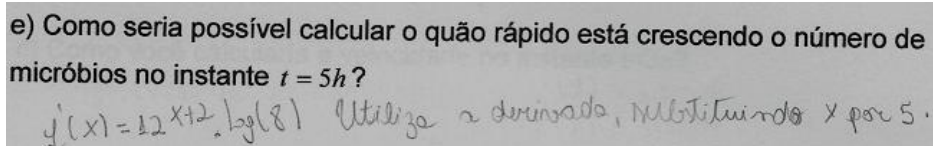
Figura 43: Descrição de C2 sobre item d da atividade 4 da atividade derivada

Com as duplas R e M ao analisarem o item e novamente confundiram a taxa de variação instantânea no ponto com a função aplicada ao ponto. Analisamos o crescimento da função através do gráfico e também o crescimento da taxa de variação. Destacamos o cuidado de pensar que não necessariamente deveriam ser sempre crescente ou decrescente simultaneamente. Como exemplo foi citada a primeira atividade do encontro onde o gráfico *Sxt* era uma reta crescente e sua taxa de variação era constante.

Com a dupla C, como já fora feita a definição da derivada como taxa de variação instantânea, a resposta veio rápido:

C1: Deriva a função e substitui o tempo 5hs.

A dupla usou o organizador genérico para o cálculo da derivada e depois aplicou o valor para $t = 5h$.



e) Como seria possível calcular o quão rápido está crescendo o número de micróbios no instante $t = 5h$?
 $y'(x) = 12x^{12} \cdot \log(8)$ Utiliza a derivada, substituindo x por 5.

Figura 44: Descrição de C1 sobre item e da atividade 4 da atividade derivada

Após analisarem a derivada como a taxa de variação instantânea, os alunos das duplas M e R também conseguiram fazer o cálculo da derivada e resolver o item e.

R1: Mas o que significa esta função derivada?

P: Com ela é possível determinar o quanto está variando o número de micróbios no tempo que você quiser, inclusive no tempo de 5h.

Percebemos que quando se trabalha com a variável tempo fica mais fácil para os alunos identificar e visualizar a taxa de variação como uma comparação entre duas grandezas. Principalmente na ideia de taxa de variação instantânea, já que sugere que a imagem que os alunos têm da palavra instantânea está ligada à variável tempo. Tal situação foi percebida quando os alunos tiveram dificuldade de analisar como está variando a pressão no instante que se tem um volume de 5l ou o quanto está variando custo da produção quando se produz 100 peças. Parece que fica a questão: se a variação é instantânea, onde está o instante de tempo?

Percebemos com a dupla C a relação de que quando falamos de taxa de variação instantânea, ou seja, variação de uma grandeza quando a variação da outra está próxima de zero, estamos falando de derivada. O mesmo ocorreu com as outras duas duplas quando a elas foi apresentado o material que define a derivada como taxa de variação instantânea.

5.2.5 Atividade 5

Na atividade 5, é questão de interesse enriquecer ainda mais a imagem do conceito de derivada e tentar analisar a definição do conceito de derivada produzida pelos alunos. Relembremos que não foi apresentada a definição formal de derivada. Nesta atividade, a partir da função $S(x,t)$, e do seu respectivo gráfico, é discutida a velocidade média e a velocidade instantânea. A partir da função velocidade, obtida com o auxílio do WolframAlpha, é feita uma análise da distância percorrida já pensando na ideia de integral e do teorema fundamental do cálculo. Os dois últimos itens analisam a aceleração média e instantânea, ou seja, a ideia da derivada segunda.

ATIVIDADE 5

A seguinte função relaciona a posição de um objeto numa trajetória retilínea em função do tempo.

$$S(t) = 4 - 6t + t^3$$

- A partir do simulador WolframAlpha construa o gráfico da função.
- Qual é a velocidade média do objeto entre $t=1s$ a $t=4s$?
- Como você calcularia a velocidade no instante $t=3s$?
- Determine a função velocidade em relação ao tempo, e use o WolframAlpha para construir seu gráfico. O que representa a área sob o gráfico da função obtida no item d)? Explique.
- Qual foi a distância percorrida e o deslocamento do objeto no instante de tempo de 0 a 6s?
- Qual é o valor da aceleração média sofrida pelo objeto entre $t = 1s$ e $t = 4s$?
- Qual é o valor da aceleração no instante $t = 3s$?

5.2.5.1 Descrição da Atividade 5

As três duplas não tiveram dificuldade para fazerem o cálculo da velocidade média a partir da variação do espaço pela variação do tempo como pedido no item b.

b) Qual é a velocidade média do objeto entre $t=1s$ a $t=4s$?

$$S(t) = 4 - 6t + t^3$$
$$S(1) = -1$$
$$S(4) = 4 - 24 + 64 = 44$$
$$V_m = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{44 - (-1)}{3} = \frac{45}{3} = 15 \text{ m/s}$$

Figura 45: Descrição de C1 sobre item b da atividade 5 da atividade derivada

Porém, quando foram analisar o item c, sobre velocidade instantânea tivemos.

Dupla R

R2: Não pode calcular usando fórmula? [fórmula do exercício]

P: Pode, aproveita a fórmula e pode usar o WolframAlpha.

R2: É só calcular $S(3)$?

P: É diferente de calcular a velocidade em 3s. [o aluno que estava declinado sobre a mesa, joga o corpo para trás e encosta na cadeira]

R2: É verdade.

P: O que você achou aqui? Foi a posição no instante 3s.

R2: Mas eu pegaria a posição em 3 menos a posição em 1 por 2s.

P: E seria o quê isso aí?[Silêncio] Velocidade o quê?

R2: Média.

P: Eu quero saber a velocidade naquele instante.

R2: Tá certo, é a derivada.

P: Se você quer achar a variação instantânea é a derivada que deve ser usada.

No instante em que o aluno R2 perguntou se poderia usar a fórmula, pensamos que estivesse querendo usar a fórmula da posição em relação ao tempo e usar a regra de derivação³⁶ ou o software WolframAlpha. Porém, nos sugere que a forte imagem que o aluno tem de calcular a velocidade em função da fórmula o fez questionar sobre a possibilidade deste cálculo sem se dar conta da diferença entre velocidade média e a velocidade instantânea ou ainda, que $S(3)$ representa a posição do objeto no instante 3s. Mas o conflito foi gerado, e a partir deste conflito é de interesse que o aluno reconstrua sua imagem do conceito de velocidade a partir da taxa de variação.

As outras duas duplas foram direto na resposta: calcular a derivada da função $S(t)$ e depois aplicar o valor $t = 3s$.

³⁶ Após a atividade 4 fizemos com as três duplas algumas derivadas de funções polinomiais e trigonométricas. Os alunos insistiram em apresentar exemplos de derivadas de funções mesmo afirmando que não era nosso interesse. Como nesta atividade temos uma função polinomial, os alunos usaram o WolframAlpha e alguns usaram também a regra de derivação.

c) Como você calcularia a velocidade no instante $t=3s$?

Através da função derivada: $s'(t) = 3t^2 - 6$
 $s'(t) = 3(3)^2 - 6$
 $s'(t) = 27 - 6 = 21 \text{ m/s}$
↳ Instantânea

Figura 46: Descrição de C1 sobre item c da atividade 5 da atividade derivada

Após o cálculo da derivada da função através do WolframAlpha foi perguntado para cada dupla o que representava aquela função derivada. As duplas pensaram um pouco e responderam velocidade, mas não a descreveram como velocidade instantânea para cada tempo t .

Com isso percebemos que para que os alunos tenham a definição do conceito de derivada como taxa de variação instantânea ainda requer mais exemplos ou exercícios, ou seja, um enriquecimento maior para a imagem do conceito de derivada como uma taxa de variação.

Dupla M

M2: Mas podemos usar isso sempre?

P: Toda vez que pedir a velocidade instantânea tendo a posição em função do tempo, sim. Por exemplo, um radar faz o cálculo da velocidade instantânea.

M2: Entendi a ideia da derivada. Quero saber numa prova, eu posso usar isso?

P: Por exemplo, numa função posição em função do tempo do primeiro grau como $s(t) = 5t + 2$, seu gráfico não é uma reta crescente? [enquanto era feito o desenho do gráfico ao lado delas, M2 concordava balançando a cabeça] e a velocidade do objeto é constante. Agora deriva esta função em relação ao tempo. Teremos a constante 5, e o que significa isso? Que a velocidade é de 5m/s.

M2: Ah, tá.

P: Até a fórmula, $s(t) = s_0 + vt$. Derivando a função temos a velocidade. [M2 sorri]. É o que muita gente pergunta se este conceito não poderia ser trabalhado no ensino médio, mesmo que não seja de forma mais profunda.

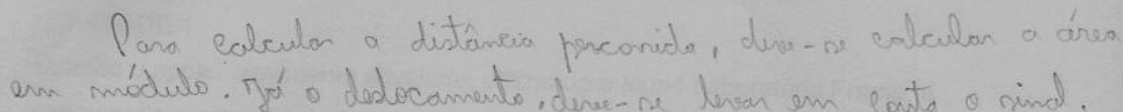
M2: Dessa forma fica até mais fácil para entender a fórmula.

P: O problema é que quando uma pessoa vê a fórmula se lembra da reta e esquece que a inclinação da reta nos mostra que a variação é constante.

Com relação ao item d todos responderam que a área do gráfico da função velocidade feita no WolframAlpha representa o deslocamento.

Devido ao tempo de duração da atividade, não foi totalmente executada a letra e já que está relacionada com a função acumulação que será tratada na atividade de integral. Porém a dupla R destacou a diferença entre a distância percorrida e o deslocamento, ratificando o que foi descrito no item d.

e) Qual foi a distância percorrida e o deslocamento do objeto no instante de tempo de 0 a 6s?



Para calcular a distância percorrida, deve-se calcular a área em módulo. Já o deslocamento, deve-se levar em conta o sinal.

Figura 47: Descrição de R1 sobre item e da atividade 5 da atividade derivada

No item f tivemos o conhecido erro da definição da aceleração média como velocidade sobre tempo, e não como taxa de variação.

Dupla M

P: Como vocês calculam a aceleração média?

M1: É a velocidade sobre o tempo.

P: Velocidade?

M1: Variação da velocidade.

P: Ah. Se não fosse a variação, qual velocidade você pegaria em 1 ou em 4 segundos? [Risos]

M1: E aí vai ser por aquela fórmula? [Encontrada derivando a função posição através do WolframAlpha]

P: Exato. Como você precisa da velocidade instantânea, precisa daquela fórmula.

A partir daí a dupla fez os cálculos corretamente.

f) Qual é o valor da aceleração média sofrida pelo objeto entre $t = 1s$ e $t = 4s$?

$$\begin{array}{l}
 \boxed{t=1s} \\
 s'(t) = 3t^2 - 6 \\
 s'(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \\
 \boxed{s'(1) = -3 \text{ m/s}}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \boxed{t=4s} \\
 s'(t) = 3t^2 - 6 \\
 s'(4) = 3 \cdot 4^2 - 6 \\
 s'(4) = 3 \cdot 16 - 6 \\
 s'(4) = 48 - 6 \\
 \boxed{s'(4) = 42 \text{ m/s}}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \\
 a = \frac{42 - (-3)}{4 - 1} \\
 a = \frac{42 + 3}{3} \quad a = \frac{45}{3} \quad \boxed{a = 15 \text{ m/s}^2}
 \end{array}$$

Figura 48: Descrição de M1 sobre item f da atividade 5 da atividade derivada

A dupla R também confundiu o conceito de aceleração média e ainda teve dificuldade na análise da velocidade instantânea em 1s e 4s.

P: Para fazer a letra *f* vocês terão que aproveitar o que foi feito anteriormente. [Alunos lendo a questão]. Como vocês calculam a aceleração média? [Silêncio] Não seria a variação da velocidade pelo intervalo de tempo? [Silêncio]

R1: A velocidade final para qual tempo que eu uso?

P: Olhe o intervalo de tempo que te deu. De 1 a 4s na letra *f*. [R1 estava olhando na página anterior.] Como então calculamos a aceleração média?

R2: Variação da velocidade pelo tempo.

P: Vocês não têm a função da velocidade aí?

R2: Mas nós já calculamos. [Disse ele apontando para o item *c*.]

P: Mas você achou a velocidade instantânea.

R1: No tempo 3s. Mas então tem que pegar a velocidade em cada um?

P: Sim.

O aluno R2 confundiu-se, pois já tinha calculado a velocidade no instante 3s. Percebemos os mesmos descuidos com a dupla C. Mas após a análise da situação todos fizeram a atividade. Mas enquanto calculavam o item *f* surgiu o seguinte diálogo com a dupla R:

R1: Existe aceleração instantânea?

P: Sim. Tem.

R2: Mas neste caso aqui a aceleração é constante, não é?

P: Não. Para ser constante como deveria ser o gráfico da velocidade versus tempo?

R1: O gráfico aqui é uma parábola. [Disse apontando para o gráfico no computador]

P: A aceleração é a taxa de variação da velocidade em relação ao tempo. Para uma taxa de variação ser constante como deve ser o gráfico da função que está variando em relação à outra? [Silêncio] No primeiro exemplo, como foi?

R1: Uma reta, ahh.[Disse recostando na cadeira e sorrindo]

P Este gráfico é uma reta?

R1 e R2: Não.

P: Logo a aceleração não é constante.

R2: Ô, a aceleração deu o mesmo valor da velocidade. [velocidade média encontrado no item b de 15m/s]

P: Cuidado, pois não representa a mesma coisa. A velocidade mostra o quanto está mudando a posição dele em relação ao tempo, enquanto a aceleração o quanto está mudando a velocidade.

R1: A aceleração no instante 3s? Agora ele quer a aceleração instantânea.

P: Como vocês fariam para achar esta aceleração instantânea?

R1: [Depois de algum silêncio] Se a aceleração é a variação da velocidade no tempo, a aceleração instantânea no tempo 3s seria só ela [velocidade] no tempo 3s?

P: Não. Tem que analisar o quanto está variando. De novo, variação instantânea. De novo derivada. Agora, derivar o que? A velocidade em relação ao tempo.

R1: Você tem que pegar o $3t^2 - 6$ e derivar de novo? Nossa. [Risos dos alunos]

Nesta situação ocorreu o conflito da velocidade no instante 3s com a aceleração no instante 3s. O aluno R1 identifica que a aceleração é a taxa de variação da velocidade pelo tempo e não intervalo de tempo. Este erro, nós professores, cometemos constantemente e que certamente influencia na imagem do

conceito do aluno e atrapalha na definição do conceito. Repetidas vezes os professores não tomam o devido cuidado de falar variação da velocidade pela variação do tempo, e falam variação da velocidade pelo tempo, já que em grande parte dos exercícios o tempo inicial é zero. Dessa forma, quando é necessário visualizar a aceleração no intervalo muito pequeno de tempo (limite) o aluno acaba confundindo como ocorrido acima com o instante de tempo 3s.

A dupla M, após fazer o cálculo do item f , analisou:

P: O que significa o resultado encontrado? [aceleração média de 15m/s^2].

M1: Que ele ganha 15m/s a cada segundo. Não que ele demora 15m a cada segundo [é interrompida por M2]

M2: Não. Que a cada 1s a velocidade varia 15m/s .

P: Em média. E a próxima?

M1: Qual é o valor da aceleração no instante 3s ? A derivada da derivada!?

P: Exatamente. [Neste momento ocorreu um dos melhores momentos dos experimentos de ensino. Elas, meio que em câmera lenta, viraram uma para outra com um sorriso largo e ao mesmo tempo com olhar de espanto]

M1: Mas eu não sei calcular isso.

P: É só fazer da mesma forma que a anterior. [Usando o CAS ou a regra de derivação]

A dupla M identificou a derivada da velocidade em função do tempo em 3s como a aceleração no instante 3s . O mesmo ocorreu com a dupla C, que respondeu prontamente que a derivada da velocidade em função do tempo seria a aceleração instantânea, mas logo perguntou

C1: Mas derivada da derivada?

O mesmo comentário, com algum espanto, ocorreu com a dupla R.

P: Vocês entenderam? A aceleração é a taxa de variação de uma grandeza em relação ao tempo que por sua vez também é definida por uma taxa de variação.

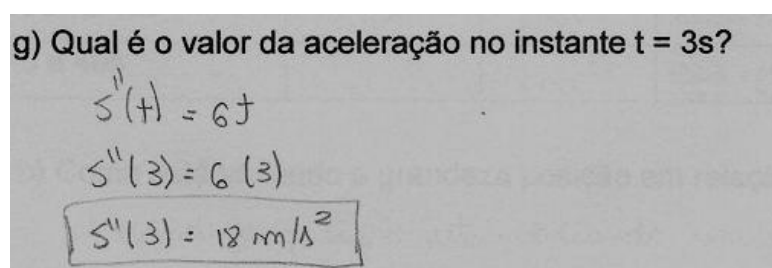
R1: Nossa!

R2: Então você faz uma derivada de uma derivada.

P: Exatamente.

Neste ponto foi destacado que a aceleração é a taxa de variação da velocidade em relação ao tempo, que por sua vez é a taxa de variação da posição em relação ao tempo. Quando se deseja encontrar a taxa de variação instantânea, a derivada é a ferramenta necessária.

Após a discussão, cada aluno resolveu o item g, usando o WolframAlpha ou usando a regra de derivação, e encontraram o valor da aceleração no instante $t = 3s$.



g) Qual é o valor da aceleração no instante $t = 3s$?

$$s''(t) = 6t$$
$$s''(3) = 6(3)$$
$$s''(3) = 18 \text{ m/s}^2$$

Figura 49: Descrição de M1 sobre item g da atividade 5 da atividade derivada

5.2.6 Análise da atividade derivada

Alguns pontos merecem destaque no desenvolvimento da atividade derivada.

O CAS on line WolframAlpha foi usado com funções e expressões com sintaxe simples e portanto não trouxe problemas na execução. Além disso, cumpriu o seu papel de organizador genérico no auxílio na formação da imagem do conceito de derivada com a construção dos gráficos e nos cálculos de derivadas.

As principais dificuldades dos alunos na abordagem do conceito de derivada nos sugere estar na dificuldade dos alunos entenderem o que é uma taxa de variação. Percebemos dificuldades na compreensão de uma razão como uma comparação entre duas grandezas, ainda mais na razão entre a variação de duas

grandezas. Como exemplo temos a atividade 2 que trabalhou com a razão da variação da pressão com a variação do volume.

Mesmo em taxas de variação mais comuns para os alunos, como velocidade e aceleração, houve confusão. Algumas destas confusões são causadas por nós, professores, que frequentemente afirmamos que a velocidade é espaço pelo tempo, ou distância pelo tempo. Sendo que o correto é destacar que é definida pela razão da variação do espaço com a variação do tempo (ou intervalo de tempo), mesmo que consideremos o tempo inicial zero.

Uma análise interessante foi perceber que quando se trabalha com a variável tempo sugere ter ficado mais fácil para os alunos identificar e visualizar a taxa de variação como uma comparação entre duas grandezas. Na ideia de taxa de variação instantânea ficou mais evidente, já que sugere que a imagem que os alunos têm da palavra instantânea está ligada à variável tempo. Percebemos esta situação nas atividades 2 na comparação da pressão com o volume e na atividade 3 de custo marginal.

Especificamente nos exercícios de cinemática, a definição do conceito da maioria dos alunos sugere estar ligada às equações da cinemática, as quais eles sabem de cor. Identificam que no movimento uniforme, o gráfico Sxt é uma reta crescente ou decrescente e que a velocidade é constante através da fórmula $S = S_0 + vt$ e não devido à taxa de variação do espaço com o tempo ser constante.

A mudança da sequência na apresentação aos alunos da dupla C do conceito de derivada foi benéfica. Percebemos a dificuldade que os alunos das duplas R e M tiveram em chegar ao conceito de taxa de variação instantânea somente com o aplicativo do GeoGebra e os dados da atividade. Tanto que a atividade seguinte fluiu mais tranquilamente para a dupla C do que para as outras duas duplas.

As compreensões do conceito de derivada foram feitas com algumas confusões, principalmente na mudança da variação média para a variação instantânea. Confusão ocorrida como na atividade 5 da velocidade instantânea no tempo 3s com a variação da velocidade no instante 3s. Normal para um primeiro encontro e poucos exemplos apresentados. Esperamos que-, com mais exemplos e exercícios, nas próximas atividades, ocorrerão melhoras.

5.3 Encontro 3 : Atividade integral

Nesta atividade estamos interessados em analisar as principais dificuldades e compreensões emergentes na compreensão dos alunos ao conceito de integral. Desenvolveremos o conceito de integral através do cálculo de áreas formada pela curva de uma função com os eixos coordenados e sua relação com a função acumulação.

Começamos com atividades em que o aluno calcula áreas conhecidas até chegar numa área na qual não consegue calculá-la com seus conhecimentos de geometria. Neste ponto apresenta-se a necessidade de uma nova ferramenta, a integral. Com um applet do GeoGebra apresenta-se o dinamismo da aproximação de áreas de retângulos sob a curva, para induzir a ideia intuitiva de limite de uma soma de áreas convergindo para a área líquida sob uma dada curva. Associada a cada área está a função acumulação. Para construções gráficas e cálculos de integrais foi usado o organizador genérico WolframAlpha.

5.3.1 Atividade 1

Com esta atividade temos interesse em que os alunos identifiquem a área do gráfico da velocidade constante em função do tempo. Nas atividades de derivada eles já haviam descrito que a área do gráfico vxt representa a distância percorrida, porém é uma atividade introdutória para auxiliar na formação da imagem do conceito de integral. Queremos também, analisar até que ponto as fórmulas da cinemática, que são de seus conhecimentos, influenciam na resolução da atividade.

ATIVIDADE 1

Um carro se movimenta com velocidade constante, movimento uniforme, de 20m/s durante 40s. Determine:

- a) Se o carro se encontrava na posição 15m, qual será sua posição ao final dos 40s?
- b) Construa o gráfico vxt durante este intervalo de tempo.

c) Calcule a área do gráfico formado pela curva e os eixos coordenados. O que representa esta área?

5.3.1.1 Descrição da atividade 1

Como esperado, os alunos resolveram esta atividade com muita rapidez, já que é uma atividade comum na cinemática do ensino médio.

P: Como vocês fazem para calcular a posição final? Usam alguma fórmula?

C1: Eu uso a fórmula $S = S_0 + vt$.

M1: Eu uso a fórmula do movimento uniforme.

R1: É só usar a fórmula.

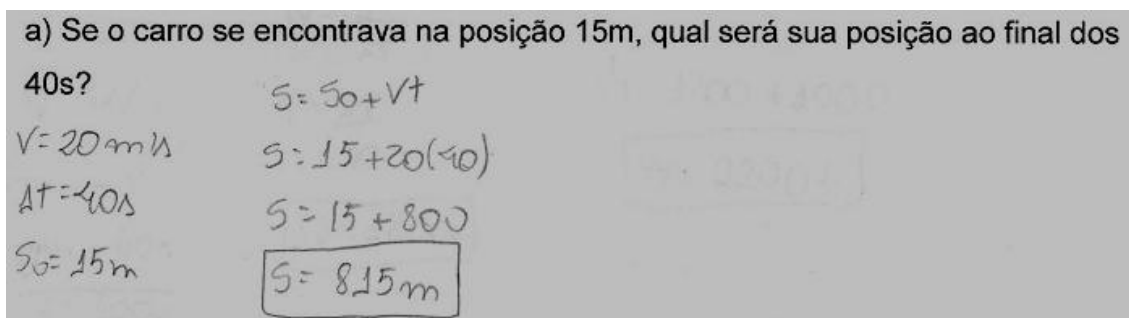


Figura 50: Descrição de M2 sobre o item a da atividade 1 da atividade integral

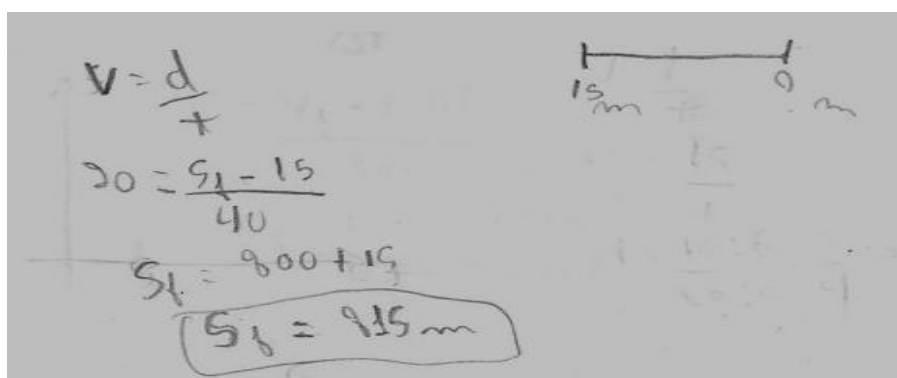


Figura 51: Descrição de R1 sobre o item a da atividade 1 da atividade integral

Destacamos, na figura 46, a equação usada por R1 que foi a definição de velocidade média.

O gráfico do item b todos o fizeram tranquilamente, exceto o aluno C2 que estava construindo o gráfico Sxt ao invés do vxt . Mas sua colega de atividade o chamou a atenção sobre o equívoco e em seguida construiu o gráfico corretamente.

No item c todos, além de fazerem o cálculo, responderam com facilidade que a área representa a distância percorrida, com destaque para o comentário de R2:

R2: Na letra a você tem a posição final e na letra c a distância percorrida.

Esta observação, da diferença entre a distância percorrida e a posição final, quando não comentada pelos alunos foi destacada pelo professor-pesquisador.

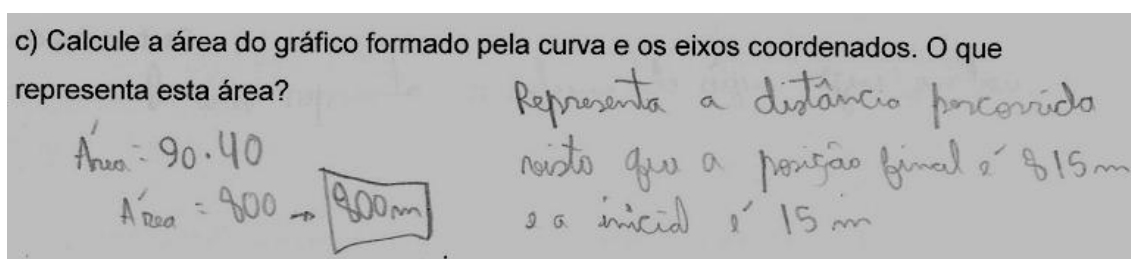


Figura 52: Descrição de R1 sobre o item c da atividade 1 da atividade integral

5.3.2 Atividade 2

Nesta atividade temos interesse em que os alunos identifiquem a grandeza vazão (Q), definida como a taxa de variação do volume pelo intervalo de tempo. Sendo a vazão constante em relação ao tempo, a análise é idêntica à da atividade anterior, sendo que a área do gráfico Qxt representa o aumento do volume no intervalo de tempo considerado.

ATIVIDADE 2

Um tanque que está com 1000l de água será completado a uma vazão(Q) constante de 4 litros de água por segundo (l/s). Determine:

- Qual é o volume do tanque, se demorou 5 minutos para enchê-lo completamente?
- Construa o gráfico da vazão (Q) em função do tempo, ou seja, Qxt .
- O que representa a área da figura formada entre o gráfico e os eixos coordenados?

5.3.2.1 Descrição da atividade 2

A atividade foi resolvida pelos alunos de forma rápida, atendendo às nossas expectativas dos alunos calcularem a área do gráfico e relacioná-la com a função acumulação.

Os alunos resolveram o item a por regra de três ou pela definição da vazão. Durante a execução do item foi perguntado às duplas:

P: Vocês lembram o que é vazão? [No ano anterior havíamos trabalhado com a turma deles hidrodinâmica e conseqüentemente o conceito de vazão].

Dupla R

R1: Tem uma fórmula para razão, não tem?

P: Tem.

R1: É a variação do volume pela variação do tempo.

P: Isso, a vazão é uma taxa de variação.

Dupla C

C2: Tem uma fórmula.

C1: Mas, pode fazer por regra de três.

Três alunos fizeram o item pela definição de vazão, dois fizeram pela regra de três e um fez a montagem da regra de três e também da fórmula.

a) Qual é o volume do tanque, se demorou 5 minutos para enchê-lo completamente?

The image shows handwritten work on a grey background. At the top, it says 'a) Qual é o volume do tanque, se demorou 5 minutos para enchê-lo completamente?'. Below this, the student has written the formula for flow rate: $Q = \frac{\Delta V}{\Delta t}$. To the right of this formula, there is a note: '5 min \rightarrow 300 lit'. Below the formula, the student has written: $4 = \frac{V_f - 1000}{300}$. Then, they have written: $V_f - 1000 = 1200$. Finally, they have boxed the result: $V_f = 2200$.

Figura 53: Descrição de R1 sobre o item a da atividade 2 da atividade integral

$Q = 4 \text{ l/s}$
 $V = 1000 \text{ l}$
 $3 \text{ min} - 60 \text{ s}$
 $5 \text{ min} - x$
 $x = 300 \text{ s}$

$Q = \frac{V}{t}$
 $4 = \frac{V}{300}$
 $V = 1200 \text{ l}$

$V_T = 1000 + 1200$
 $V_T = 2.200 \text{ l}$

Figura 54: Descrição de M1 sobre o item a da atividade 2 da atividade integral

$Q = \frac{V}{t}$
 $V_{\text{DO TANQUE}} = 1000 \text{ L}$
 $Q = 4 \text{ l/s}$
 $5 \cdot 60 = 300 \text{ s}$

$4 \text{ L} - 1 \text{ s}$
 $x - 300 \text{ s}$
 $x = 4 \cdot 300 = 1200$

$V_{\text{TOTAL}} = 1000 + 1200 = 2200 \text{ L}$

Figura 55: Descrição de C1 sobre o item a da atividade 2 da atividade integral

Atenção para os alunos que escreveram a vazão como a razão entre o volume e o tempo e não razão entre a variação do volume e a variação de tempo. Outra observação, é que constantemente chamamos a atenção dos alunos com relação às unidades. Nesta atividade, a vazão foi dada em litros por segundo e o intervalo de tempo em minutos. Dessa forma tinham que fazer uma mudança de unidade.

A construção do gráfico do item b foi desenvolvida tranquilamente por todos. No item c, houve um pouco de confusão por parte dos alunos do volume total com a variação do volume no intervalo de tempo de 5 minutos.

Dupla R

R1: É o mesmo exercício praticamente. [Comparando com a atividade 1] No primeiro a área representa a distância, aqui representa o tanto de água que [pensativo] não, pera aí..

R2: É a variação do volume neste intervalo de tempo.

Dupla C

P: Não é o volume total?

C1: Não, é o que variou em 5 minutos.

A aluna C1 afirmou que a área representa o que variou do volume em 5 minutos, porém ao responder a atividade, não somou os 1000l que havia inicialmente no tanque com os 1200l acumulados.

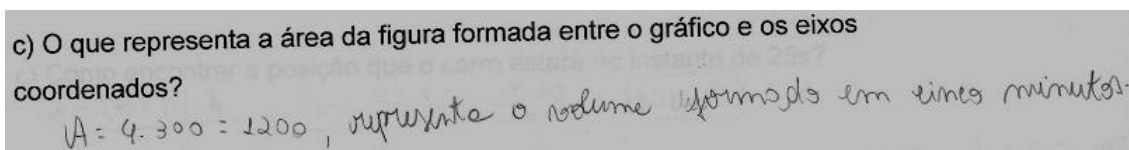


Figura 56: Descrição de C1 sobre o item c da atividade 2 da atividade integral

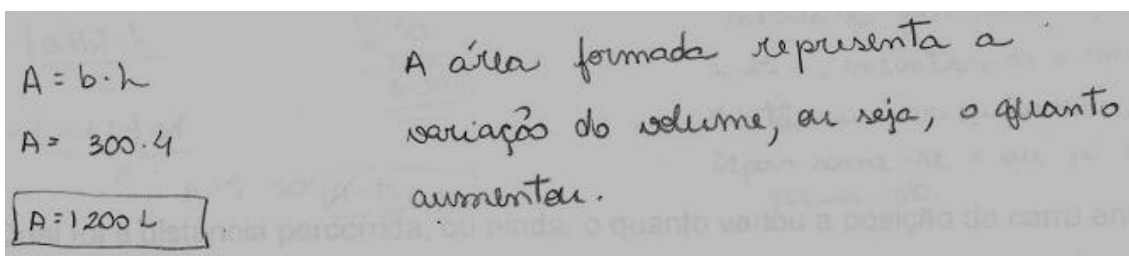


Figura 57: Descrição de M1 sobre o item c da atividade 2 da atividade integral

5.3.3 Atividade 3

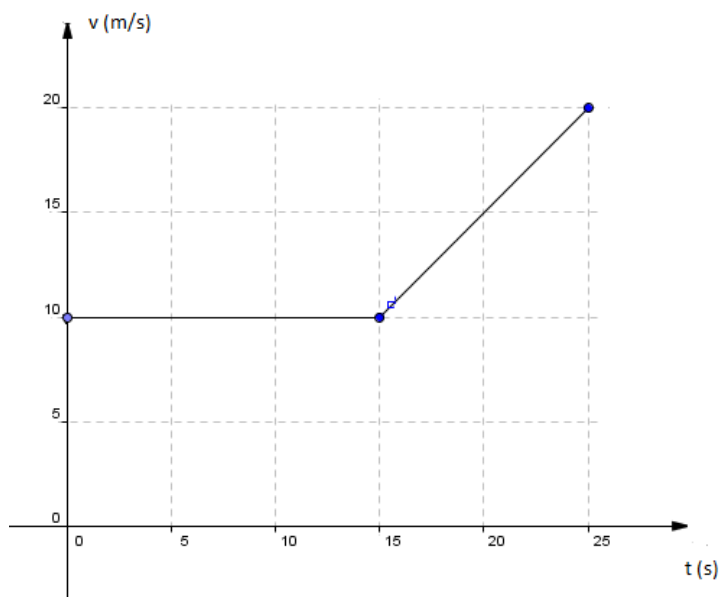
Nesta atividade apresentamos a velocidade num certo intervalo de tempo constante e depois variando a uma taxa constante em relação ao tempo. Desejamos com isso que os alunos identifiquem os movimentos da cinemática e trabalhem com a área para descrever a distância percorrida. Porém, não é revelado a eles para usarem a área, ou seja, neste caso ainda podem usar as fórmulas do movimento uniforme e do movimento uniformemente variado.

Portanto, durante a execução da atividade, fomos fazendo perguntas para entender como realmente os alunos estavam pensando, principalmente se eles fizeram a relação da área do gráfico com a distância percorrida ou se preferiram usar as fórmulas da cinemática.

Ao contrário das atividades 1 e 2, onde foi pedido que os alunos desenvolvessem o gráfico das funções, nesta o gráfico da função é apresentado no enunciado da atividade.

ATIVIDADE 3

O gráfico abaixo representa o movimento de um carro em uma estrada. Quando começou a construir o gráfico, o carro se encontrava na posição 200m da estrada.



- Qual é o tipo de movimento desenvolvido pelo carro no intervalo de 0 a 15s? E no intervalo de 15s a 25s?
- Como encontrar a posição que o carro estará no instante de 15s?
- Como encontrar a posição que o carro estará no instante de 25s?
- Qual foi a distância percorrida, ou ainda, o quanto variou a posição do carro entre os instantes de 15s e 25s?

5.3.3.1 Descrição da atividade 3

Novamente, é uma atividade muito comum no ensino médio e os alunos não tiveram dificuldades de fazê-la.

No item a, todos identificaram no intervalo de 0 a 15s como movimento uniforme (MU) e o segundo intervalo de 15 a 25s como um movimento uniformemente variado (MUV). Perguntamos para as duplas:

P: Por que o nome MUV?

Dupla M

M1: Aceleração constante.

Dupla C

C1: A variação é constante, mas a velocidade varia.

Dupla R

R1: Porque a velocidade varia com o tempo. Tem uma aceleração.

P: E por que é uniformemente?

R1: Porque é constante. Varia de forma constante.

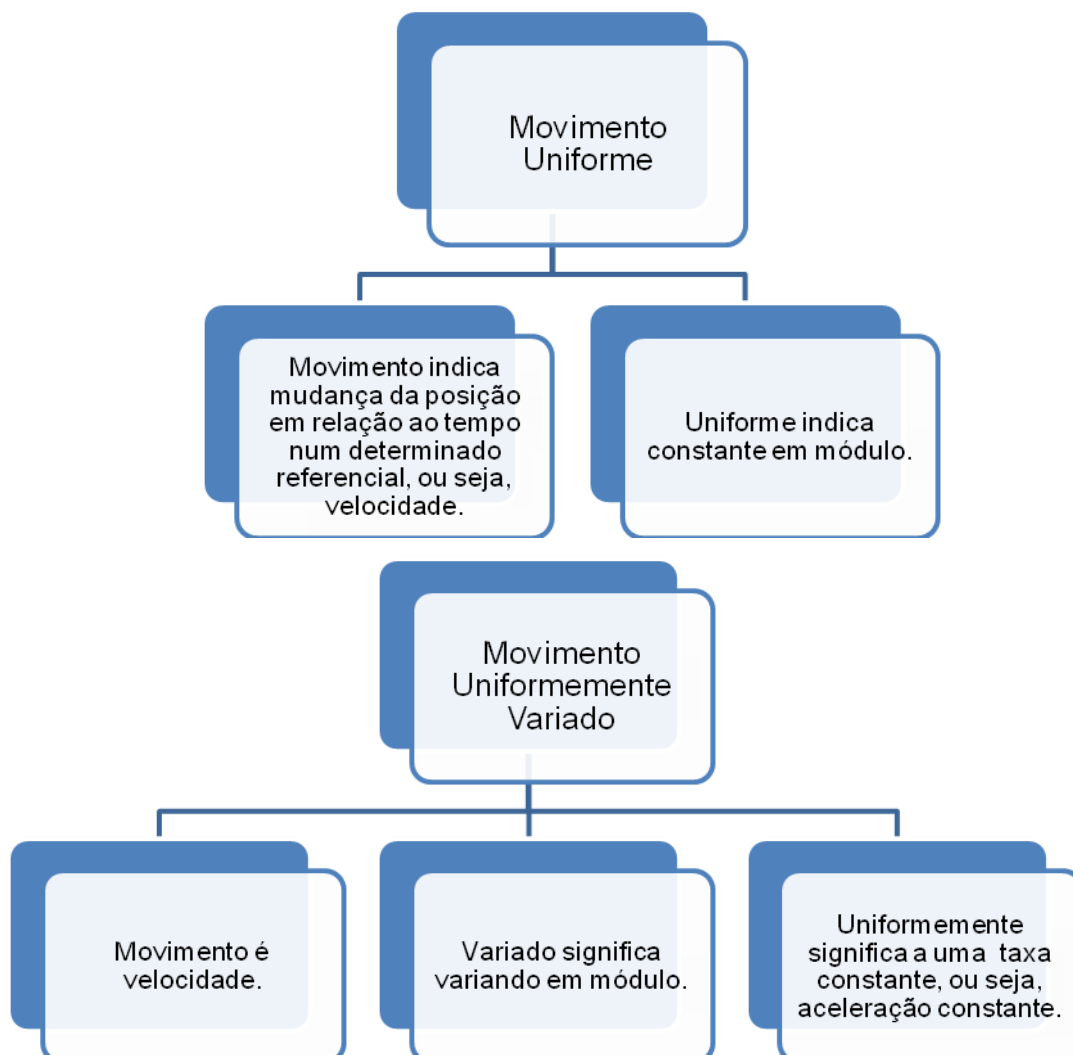
Para todos foi lembrado que a aceleração é a taxa de variação da velocidade em relação ao tempo e que no segundo intervalo esta taxa era constante.

P: E qual será a taxa de variação no intervalo de 0 a 15s?

M1: Zero.

P: Isso. Movimento uniforme.

A intenção é fazer os alunos perceberem que os termos usados para identificar um movimento tem uma razão para existir, ou seja, não são escolhidos ao acaso. Acreditamos que quando o aluno entende o que significa cada termo que é usado para identificar um objeto matemático ou físico, fica muito mais fácil a interpretação e desenvolvimento de qualquer atividade. Com isso durante a atividade apresentamos:



No item b, como foi feito um exemplo parecido na atividade 1, todos lembraram que por ser um movimento uniforme pode-se usar a fórmula $S = S_0 + vt$ ou a área do gráfico. Com exceção da aluna M2 que resolveu tanto pela fórmula quanto pela área, os demais fizeram o cálculo da área.

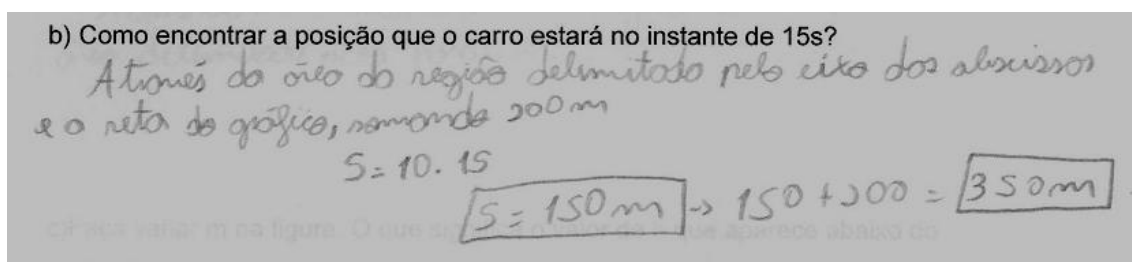


Figura 58: Descrição de R2 sobre o item b da atividade 3 da atividade integral

Pode-se calcular a posição do carro no instante de 15 s através do cálculo da área ou da fórmula $S = S_0 + VT$

$$S = S_0 + VT$$

$$S = 200 + 10(15)$$

$$S = 200 + 150 \rightarrow S = 350 \text{ m}$$

$$A = b \cdot h$$

$$A = 15 \cdot 10$$

$$A = 150 \text{ m}$$

$$S = 150 + 200$$

$$S = 350 \text{ m}$$

Figura 59: Descrição de M1 sobre o item b da atividade 3 da atividade integral

No item c, com a aceleração constante tivemos:

Dupla C

C1: Tem aceleração.

P: E então?

C1: Pela área também.

Dupla R

R2: Eu fiz pela área.

P: Mas e a posição?

R2: É só somar.

R1: Pega a área do primeiro trecho depois pega aqui a área do trapézio e depois soma.

Dupla M

M2: Pode usar a área do trapézio também?

P: Pode.

M2: As fórmulas da aceleração constante também.

P: Isso, mas aí você vai precisar da aceleração.

M2: É só olhar no gráfico a variação da velocidade pelo tempo.

c) Como encontrar a posição que o carro estará no instante de 25s?

$$A = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$$

$$A = \frac{(20+10) \cdot 10}{2}$$

$$A = 5 \cdot 30 \quad A = 150 \text{ m}$$

Calcula-se primeiro a área de 15 a 25 s, encontrando o quanto a distância varia nesse intervalo. Depois soma-se o que já havia percorrido.

Figura 60: Descrição de M1 sobre o item c da atividade 3 da atividade integral

Podemos perceber que os alunos identificaram realmente a área como a distância percorrida, ou seja, a acumulação do espaço à medida que o tempo passa. A aluna M2 ainda comentou sobre as equações do movimento uniformemente variado. Para as outras duplas, foi lembrada essa possibilidade, destacando sempre que é o caso particular de ser com aceleração constante. Foi destacado a todos os alunos que tais circunstâncias de movimento uniforme e movimento uniformemente variado não são tão comuns no dia a dia. Por fim todos resolveram o item c pela área.

5.3.4 Atividade 4

Nesta atividade apresentamos aos alunos o conceito de integral através do cálculo da área de uma região que não é possível para os alunos fazê-lo apenas com seus conhecimentos de geometria. Para auxiliar na visualização deste cálculo usamos um applet do GeoGebra para mostrar a aproximação da área através da área de retângulos abaixo e acima da curva.

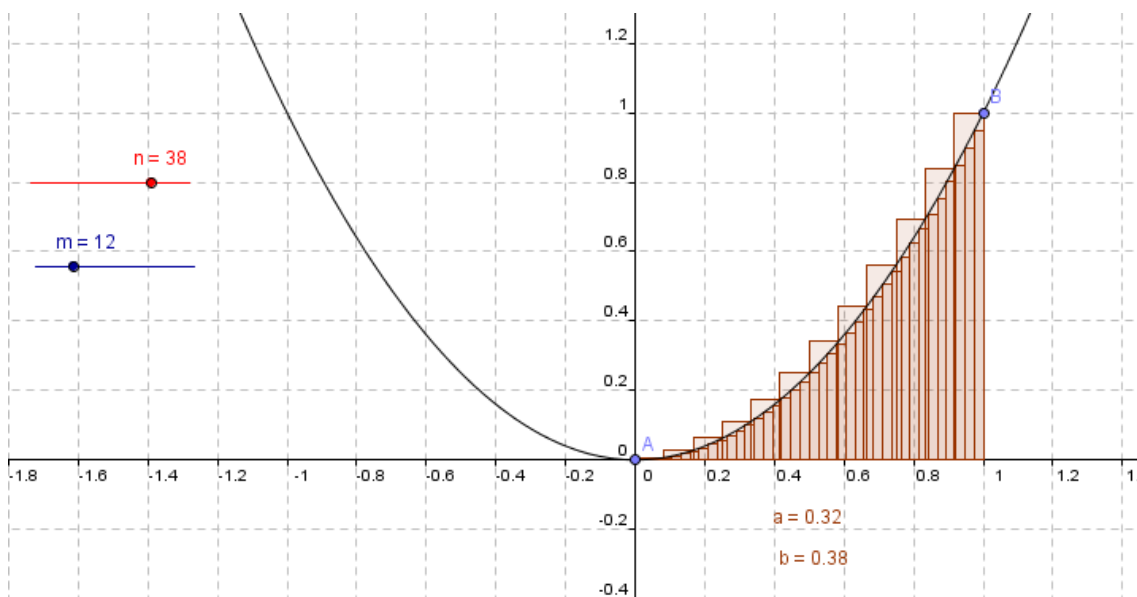


Figura 61: Gráfico da função $f(x) = x^2$ no GeoGebra

No gráfico, o valor de n em vermelho indica o número de retângulos abaixo da curva, e o valor de m em azul, indica o número de retângulos acima da curva. O

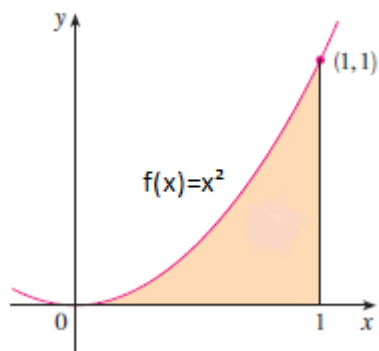
valor de a logo abaixo da curva é a soma das áreas de todos retângulos abaixo da curva e o valor de b é a soma de todas as áreas dos retângulos acima da curva.

O aluno pode variar os valores de m e n e simultaneamente verá a variação dos retângulos na curva e nos valores de a e b . Quanto maior os valores de m e n mais próximos ficam os valores de a e b . Nossa intenção é fazer com que os alunos identifiquem que num valor muito grande de n e m , a noção de limite, estes valores sejam praticamente iguais e coincidentes com a área do gráfico.

No fim, apresentamos que esta ideia de cálculo de áreas é a integral e pedimos no item g da atividade para usarem o WolframAlpha para fazer o cálculo da integral da função dada no exercício.

ATIVIDADE 4

Como calcular a área do gráfico abaixo?



Para auxiliar na análise, use o software Geogebra e desenvolva a atividade.

- Faça variar n na figura. O que significa o valor de a que aparece abaixo do gráfico?
- Descreva o que acontece quando fazemos aumentar o valor de n .
- Faça variar m na figura. O que significa o valor de b que aparece abaixo do gráfico?
- Descreva o que acontece quando fazemos aumentar o valor de m .
- Qual é a relação entre a área do gráfico e os valores a e b ?
- Descreva, caso seja possível, uma maneira de fazer os valores da área do gráfico, a e b , serem iguais.
- Usando o Wolfram, calcule integral $f(x)=x^2$, de $x=0$ até $x=1$.

5.3.4.1 Descrição da atividade 4

Nesta atividade o professor-pesquisador teve que intervir mais para que os alunos conseguissem desenvolver a atividade. Os alunos faziam variar os valores de n , identificavam o aumento do número de retângulos abaixo da curva, mas não perceberam que o valor do a abaixo do gráfico era a soma das áreas dos retângulos abaixo da curva.

Como exemplo, descrevemos que para calcular a área do círculo são usados polígonos regulares inscritos ao círculo e quando se aumentava o número de lados desses polígonos suas áreas ficavam cada vez mais próximas da área do círculo. Novamente a ideia de limite. O mesmo ocorre na atividade, porém com aproximações por retângulos de mesmas bases e com alturas determinadas pela função $f(x) = x^2$. O cálculo da soma destas áreas quando se tem infinitos retângulos é o que chamamos de integral.

Durante a explicação foram surgindo dúvidas no cálculo da área dos retângulos, na visualização da aproximação da área da curva pela soma das áreas dos retângulos principalmente pelos retângulos acima da curva.

C1: Quando aumentamos os valores de m diminuimos as áreas dos retângulos.

P: Mas aumentamos o número de retângulos que está cobrindo a curva.

d) Descreva o que acontece quando fazemos aumentar o valor de m .

Diminui a área dos retângulos

Figura 62: Descrição de C2 sobre o item d da atividade 4 da atividade integral

R1: Mas ao calcular a área dos retângulos não vai estar sobrando ou faltando um pedaço?

P: Por isso, se quiser maior precisão tem que fazer o quê?

R1: Aumentar n ?

P: Isso, o quanto você quiser. Por exemplo, poderíamos ter infinitos retângulos fininhos como um código de barras e que juntos cobririam toda a área.

C2: A gente considera os dois iguais [valores de a e b] por não ser capaz de ampliar e ver a diferença.

P: Boa. Se você tiver um computador com um programa que possa cada vez mais fazer um zoom, sempre haverá uma diferença. Só que esta diferença é tão pequena quanto você queira. E quando variamos n e m até o infinito, fazemos as áreas a e b iguais às áreas do gráfico.

Portanto, após esta explanação, todos foram respondendo os itens da atividade e quando surgia alguma dúvida novamente intervíamos de modo a auxiliar na interpretação da questão. Perceba que apresentamos o conceito de integral sem a definição formal de limite.

No item g da atividade, os alunos usaram o WolframAlpha para fazer o cálculo da integral. Pedimos para comparar com os valores a e b encontrados no GeoGebra com o encontrado no CAS para poder responder com segurança os itens e e f.

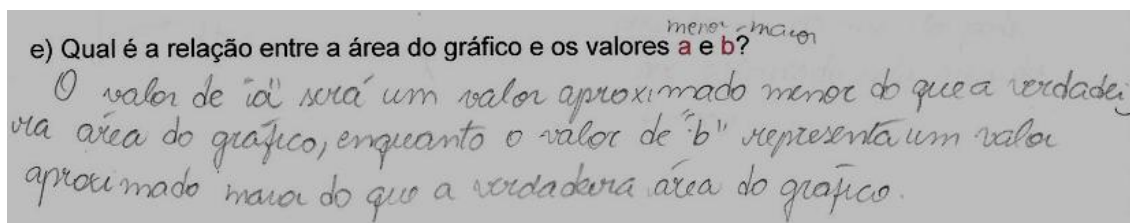


Figura 63: Descrição de M2 sobre o item e da atividade 4 da atividade integral

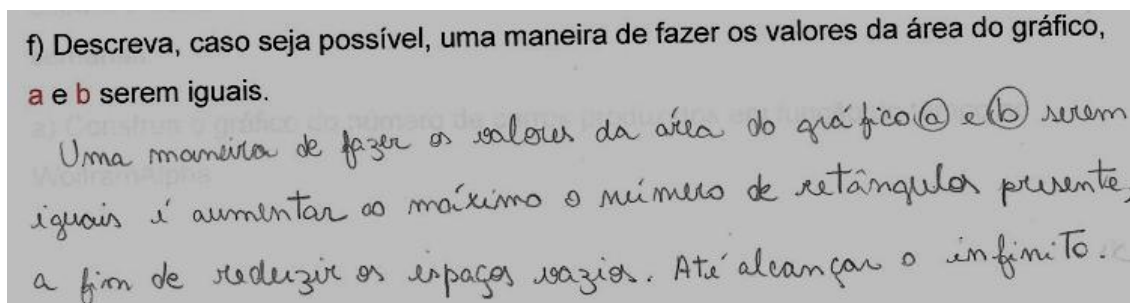


Figura 64: Descrição de M1 sobre o item f da atividade 4 da atividade integral

Porém, as duplas M e R perguntaram se não teria como fazer as contas na mão. Então apresentamos as regras de integração das funções polinomiais e das funções trigonométricas seno e cosseno como exemplos, mesmo destacando que

não era o interesse de nossa pesquisa. Depois, resolvemos a integral do exercício no quadro.

Tal situação nos surpreendeu, pois mesmo tendo o resultado em mãos através do CAS os alunos queriam identificar a operação matemática que chegava ao resultado. Como é uma integral de simples solução, destacamos que na grande maioria dos casos isto não acontece, e que quando isto acontece, o auxílio de um software matemático como o WolframAlpha é de grande valia.

5.3.5 Atividade 5

A partir desta atividade vamos aplicar o conceito de integral para situações em que a função da taxa de variação dada apresenta um gráfico que para calcular a área da curva com o eixo das abscissas só é possível com o uso da integral.

Nesta atividade temos novamente a vazão em função do tempo. Pedimos para usar o WolframAlpha para construir o gráfico e perguntamos como é possível calcular o volume de chuva no período de 0 a 20 minutos.

Com isso, estamos interessados em saber se os alunos fazem a relação da área com a integral e com a função acumulação.

ATIVIDADE 5

A vazão, em l/min, da chuva numa tarde de verão foi descrita segundo a função $Q(t) = e^{\sin t}$, onde t variando de 0 a 20 representa o tempo em minutos.

- Construa o gráfico desta função no WolframAlpha.
- Como se pode calcular o volume de chuva neste período de 20 minutos?

5.3.5.1 Descrição da atividade 5

Inicialmente os alunos não conheciam o número de Euler. Depois que falamos, lembraram-se que $\sin t$ é seno de t . A dupla R chegou a digitar o nome Euler WolframAlpha que apresentou toda sua biografia.

Após conhecer os elementos da função, todos a consideraram muito diferente e ficaram impressionados após a construção do seu gráfico no CAS.

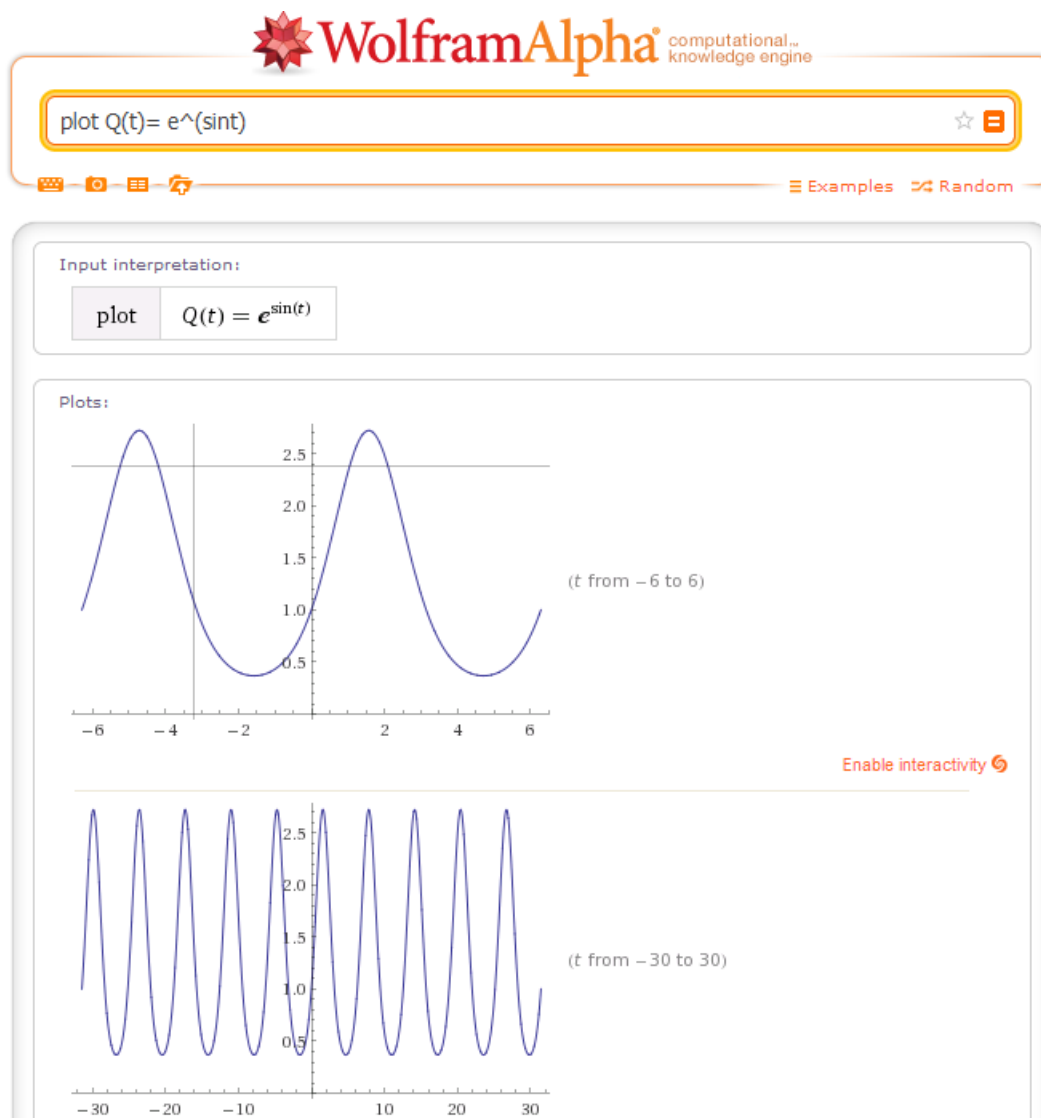


Figura 65: Gráfico da função $Q(t) = e^{\sin t}$ no WolframAlpha

Perguntamos aos alunos

P: O item b. Como se pode calcular o volume de chuva neste período de 20 minutos?

C1: Pela área.

M2: Pela área do gráfico.

A dupla R discutiu um pouco mais.

R1: Através da área.

P: Por quê?

R1: É um gráfico da vazão versus tempo.

R2: Como calcular a área disso?

P: Vários retângulos. [Na tela do computador destacávamos os retângulos] Infinitos. Por isso temos a integral que faz isso mais “rápido”.

Na atividade não se fazia necessário o cálculo da integral, porém todos o fizeram através do WolframAlpha.

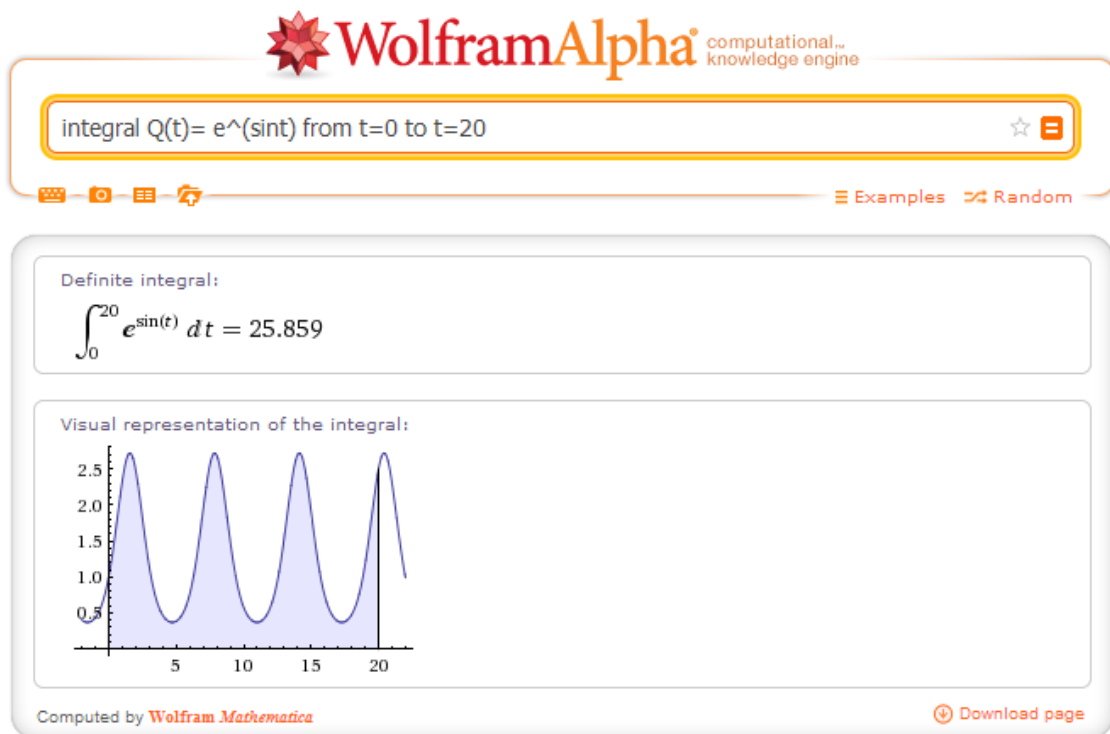


Figura 66: Integral da função $Q(t) = e^{\sin t}$ no intervalo de 0 a 20, no WolframAlpha

Verificamos que os alunos conseguiram fazer a relação da área com a função acumulação e conseqüentemente a relação destas com a integral. Uma ferramenta que auxilia no cálculo de áreas ou no quanto variou uma grandeza em relação a um determinado intervalo de variação de outra.

b) Como se pode calcular o volume de chuva neste período de 20 minutos?

Através da área por ser um gráfico Variação (l/min) X tempo (min). O valor é 25,959, que significa o volume em litros em 20 minutos.

Figura 67: Descrição de R2 sobre o item b da atividade 5 da atividade integral

$\int_0^{20} e^{0.25t} dt =$

O volume de chuva no período de 20 minutos pode ser calculado pela área da função.

Figura 68: Descrição de M2 sobre o item b da atividade 5 da atividade integral

5.3.6 Atividade 6

Esta atividade trabalha com uma função que não é comum no ensino médio e tem uma sutileza na questão de ser a quantidade de automóveis produzida por semana, no final de t semanas. Desejamos identificar se os alunos conseguem diferenciar a produção de uma determinada semana com a produção acumulada até esta semana.

ATIVIDADE 6

Uma fábrica construiu uma linha de montagem para seu novo carro especial e espera produzi-lo numa razão de $30\sqrt{t}$ automóveis por semana, no final de t semanas.

- Construa o gráfico do número de carros produzidos em função do tempo no WolframAlpha.
- Quantos automóveis eles esperam produzir durante as primeiras 36 semanas de produção?

5.3.6.1 Descrição da atividade 6

As duplas construíram o gráfico da função no WolframAlpha como determinado no item a.

Perguntamos aos alunos como resolver o item b.

Dupla C

[Inicialmente silêncio]

P: Observe que a função é uma razão do número de automóveis numa determinada semana. Taxa de variação.

[Ainda o silêncio]

P: Se substituir o $t = 36$, o que vocês encontrarão?

C1: Será o que foi produzido na semana 36.

P: Como vocês acham que deveriam fazer para calcular em todo período?

C1: Seria a área?

P: Você não tem o gráfico de quanto é produzido por semana? Se você quer o acumulado é só calcular a área.

Dupla R

R2: É substituir o 36 no tempo?

R1: Não.

P: O que é esta função? Esta não é a função do número de automóveis produzidos... [antes de terminar o raciocínio, R1 respondeu]

R1: É a razão em relação ao tempo. É a área.

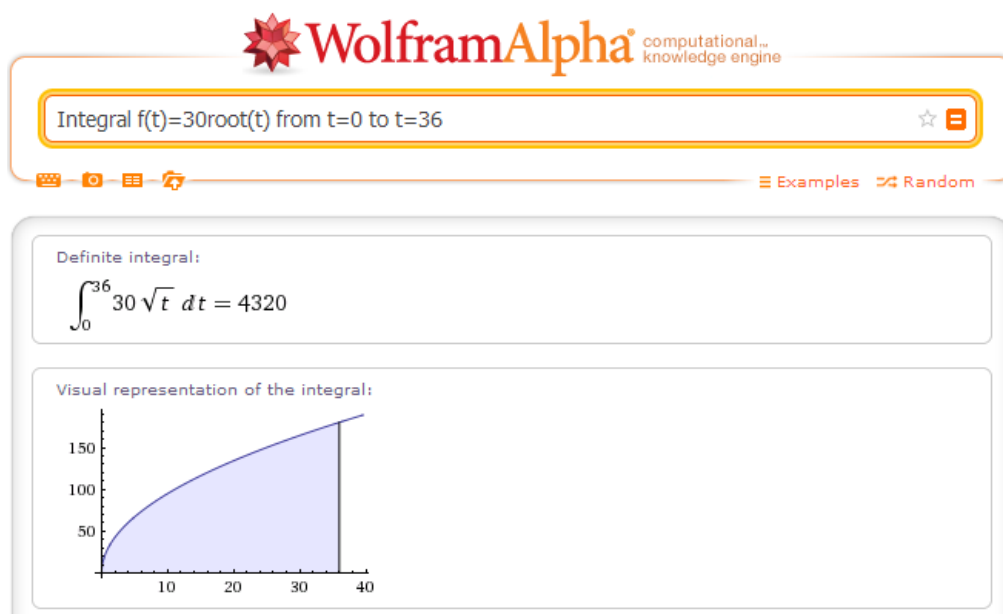


Figura 69: Integral da função $f(t) = 30\sqrt{t}$ no intervalo de 0 a 36, no WolframAlpha

A dupla C não estava compreendendo o que representava a função. Foi necessária uma pergunta para poder sair da inércia em que se encontravam. Já o aluno R2 confundiu o que é produzido na semana 36 com o que foi produzido até a semana 36. Indica-nos que não tem a imagem do conceito da função acumulação bem sedimentada, ao contrário de R1 que rapidamente identificou a relação.

A dupla M começou calculando o valor da função para $t = 36$ e depois perceberam o erro e calcularam a área através da integral usando o WolframAlpha e as técnicas de integração. As meninas desta dupla foram as que mais se interessaram em fazer a manipulação algébrica, mas sem deixar de fazer no organizador genérico.

b) Quantos automóveis eles esperam produzir durante as primeiras 36 semanas de produção?

$30\sqrt{36} =$
 $30 \cdot 6 = 180$
 automóveis na semana 36

$$\int_0^{36} 30t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{30t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^{36} = 30 \cdot 36^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3} = 20 (6^2)^{\frac{3}{2}} = 20 \cdot 6^3 = 4320$$

Figura 70: Descrição de R2 sobre o item b da atividade 6 da atividade integral

A área do gráfico
 4320 carros

Figura 71: Descrição de R2 sobre o item b da atividade 6 da atividade integral

No fim da atividade da dupla C a aluna C1 comentou:

C1: A integral é o quanto variou num determinado tempo e a derivada é o quanto está variando naquele instante.

Faltou se expressar um pouco melhor, porém percebemos que a definição do conceito de função acumulação para integral e taxa de variação instantânea está bem próximo do conceito por nós desejado.

5.3.7 Atividade 7

Nesta última atividade de integral, voltamos a um exercício de cinemática. Porém, estamos interessados em como os alunos identificam o intervalo em que a velocidade é negativa e também a diferença entre distância percorrida e deslocamento.

ATIVIDADE 7

Uma partícula move-se ao longo de uma linha com velocidade variando com o tempo de acordo com a função $v(t) = t^2 - t - 6$, medida em metros por segundo.

- Construa o gráfico da função, usando o WolframAlpha, para o intervalo de tempo entre 1s e 4s.
- Como podemos determinar o deslocamento da partícula entre 1s e 4s?
- Como podemos determinar a distância percorrida pela partícula entre 1s e 4s?

5.3.7.1 Descrição da atividade

Os alunos construíram o gráfico no WolframAlpha inicialmente com o domínio real e depois limitaram o domínio ao intervalo real de 1 a 4. Destacamos aos alunos que o gráfico, mesmo sofrendo um “recorte”, ainda é uma parábola.

Todos identificaram que para fazer os itens b e c era necessário o cálculo da área.

Para o item b não era necessário fazerem os cálculos, mas as duplas acabaram fazendo-os no WolframAlpha. Tal atitude ajudou-os a visualizar, através do gráfico apresentado pelo organizador genérico, o sinal “negativo” da área no intervalo de 0 a 3. Este valor negativo indica que o deslocamento foi no sentido contrário ao adotado como positivo.

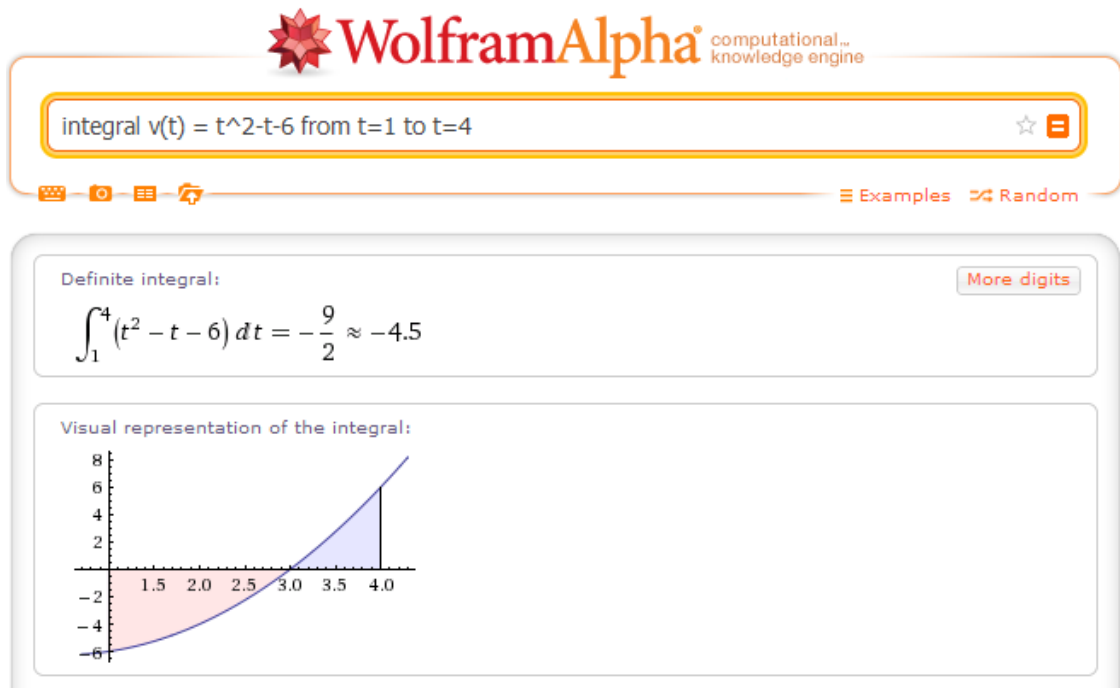


Figura 72: Integral da função $v(t) = t^2 - t - 6$ no intervalo de 1 a 4 no WolframAlpha

Para o item c também não era necessário fazerem os cálculos. Com isso, somente a dupla R os fizeram. Porém, todos perceberam que para o cálculo da distância percorrida era necessário o cálculo da área em módulo.

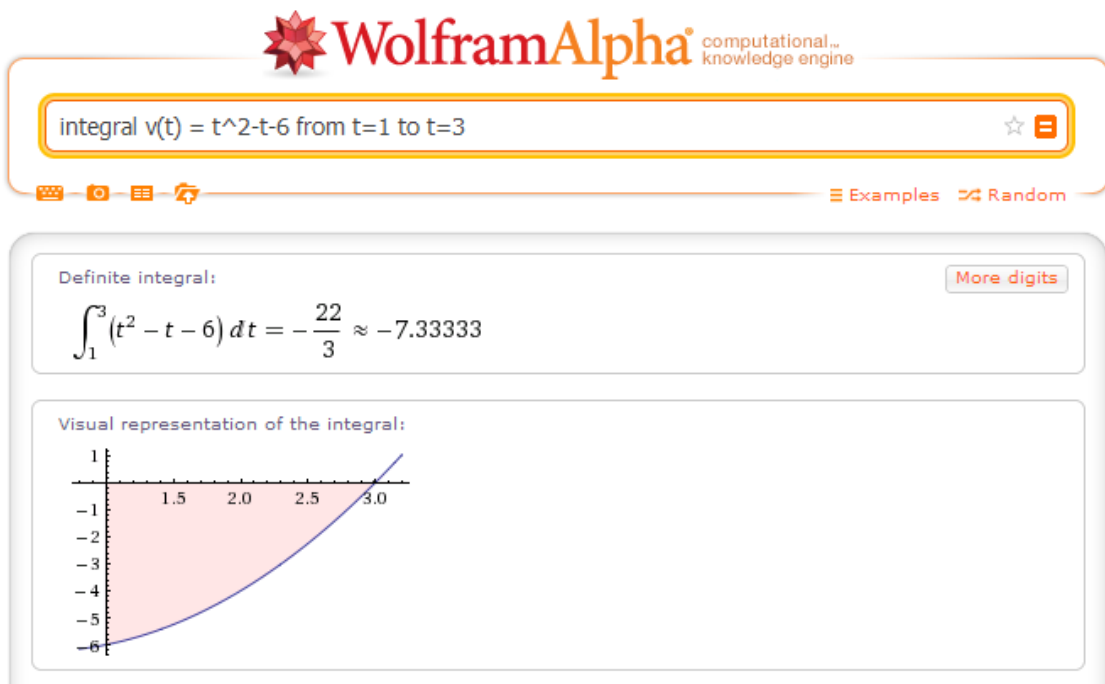


Figura 73: Integral da função $v(t) = t^2 - t - 6$ no intervalo de 1 a 4 no WolframAlpha

integral $v(t) = t^2 - t - 6$ from $t=3$ to $t=4$


Examples Random

Definite integral:

More digits

$$\int_3^4 (t^2 - t - 6) dt = \frac{17}{6} \approx 2.83333$$

Visual representation of the integral:

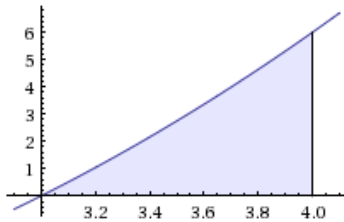


Figura 74: Integral da função $v(t) = t^2 - t - 6$ no intervalo de 3 a 4 no WolframAlpha

b) Como podemos determinar o deslocamento da partícula entre 1s e 4s?

*Atorrei do ócio do gráfico, determinada pelo
movimento levando em conta o sinal*

4,5 m

Construa o gráfico da função para esse intervalo de tempo

Figura 75: Descrição de R2 sobre o item b da atividade 7 da atividade integral

*Podemos determinar o deslocamento da partícula entre
1s e 4s calculando a área da função, levando em consideração
o sinal.*

Figura 76: Descrição de M1 sobre o item b da atividade 7 da atividade integral

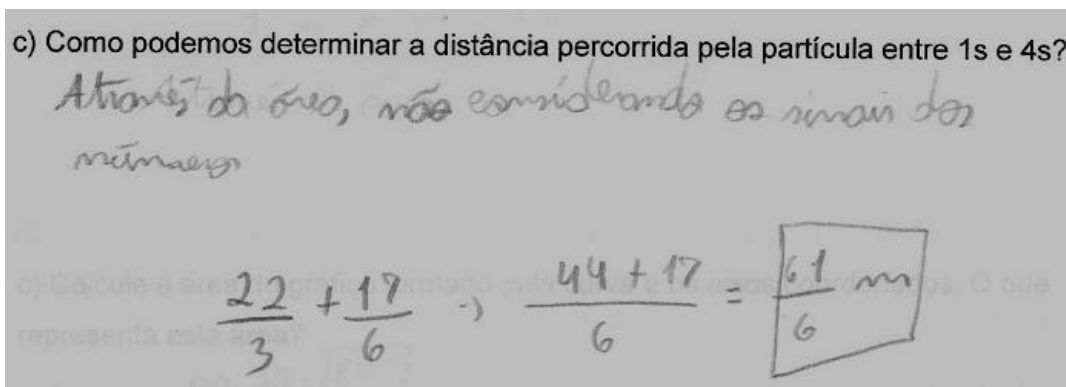


Figura 77: Descrição de R2 sobre o item c da atividade 7 da atividade integral

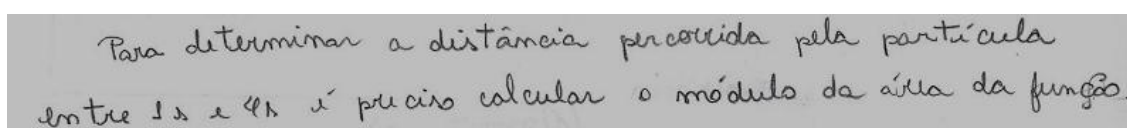


Figura 78: Descrição de M1 sobre o item c da atividade 7 da atividade integral

5.3.8 Análise da atividade integral

Apesar das dificuldades encontradas na visualização dos retângulos acima e abaixo da curva usados para cobrir sua área, a atividade mostrou-se eficiente no sentido em que os alunos relacionaram o cálculo da área com a integral inclusive com boa relação com a função acumulação da atividade sobre vazão.

Concluimos que o applet do GeoGebra usado na atividade 4 deve ser melhorado quanto aos valores a e b que determinam, respectivamente, as áreas dos retângulos acima e abaixo do gráfico. Os alunos não conseguiram identificá-los como tais. Ouve também a dificuldade de interpretação na quantidade de retângulos acima e abaixo da curva, descritos respectivamente por m e n , com o “cobrir” a área da curva, justamente a ideia do limite.

Percebemos a vontade dos alunos de estarem sempre usando as fórmulas da cinemática, mas que no decorrer da atividade, finalizando com a atividade 7, conseguiram relacionar a área do gráfico velocidade versus tempo com a distância percorrida. A relação da área líquida também foi bem descrita por eles, conseguindo diferenciar a distância percorrida do deslocamento.

Ainda com relação à função acumulação, percebemos uma confusão na atividade 6 com o número de peças produzidas na 36ª semana com o acumulado

nas 36 semanas. Novamente quando se trabalha com uma função não comum ao dia a dia, os alunos mostram alguma dificuldade.

O WolframAlpha foi fundamental para o enriquecimento da imagem do conceito de integral dos alunos auxiliando na construção dos gráficos e principalmente no cálculo das integrais onde ainda era apresentada uma representação gráfica.

Impressionou-nos a afirmação da aluna C1: “A integral é o quanto variou num determinado tempo e a derivada é o quanto está variando naquele instante”, fazendo a relação da derivada com a integral fato que será destacado de forma mais aguda na próxima atividade.

5.4 Encontro 4 – Atividade TFC

Neste quarto encontro foram aplicadas atividades sobre o Teorema Fundamental do Cálculo relacionando o Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral. Lembremos que a dupla C não realizou esta atividade.

Não estamos interessados em definir formalmente o TFC, mas elaboramos atividades para os alunos terem condições de relacionar os conceitos de derivada e integral.

Foram analisadas as situações em que a partir de uma função encontra-se a função variação instantânea, ou a variação instantânea para um ponto específico e posteriormente através da área líquida da nova função fez-se a comparação com a função original. Analogamente a partir da função acumulação de uma dada função analisou-se a taxa de variação instantânea num determinado ponto e fez-se a comparação com a função original.

Desejamos analisar as principais dificuldades e compreensões emergentes na abordagem ao TFC e ainda enriquecer a imagem do conceito de derivada e integral.

5.4.1 Atividade 1

Nesta atividade estamos interessados em investigar se os alunos compreenderam os conceitos de derivada como taxa de variação e o de integral como a função acumulação determinada pela área do gráfico. Ainda desejamos investigar se os alunos conseguem fazer a relação entre derivada e integral no item d.

ATIVIDADE 1

A seguinte função relaciona a posição, em metros, de um objeto numa trajetória retilínea em função do tempo, em segundos, $S(t) = 18 - 4t + t^3$.

- Determine a derivada da função $S(t)$ em relação a t através do WolframAlpha? O que representa esta derivada?
- Use o WolframAlpha para construir o gráfico da função encontrada no item a. O que representa a área do gráfico formado pela curva e os eixos coordenados? Use novamente o WolframAlpha para determinar esta área para o intervalo de $t=1s$ até $t=8s$.
- O que representa o valor de $S(8)-S(1)$?
- O que se pode concluir com os cálculos dos itens anteriores?

5.4.1.1 Descrição da atividade 1

Após o cálculo da derivada da posição em relação ao tempo pedido no item a, perguntamos aos alunos o que representa esta derivada:

Dupla M

Não lembravam. Mas depois de alguns risos e de algum tempo,

R2: Lembro que era alguma coisa com o instante.

P: O quanto varia a posição num determinado instante de tempo. Neste caso, variando a posição com o tempo o que teremos?

M1: Velocidade.

P: Velocidade o que?

M2: Instantânea.

M1: Naquele instante.

Dupla R

R1: Variação instantânea no tempo que der.

P: E aí neste caso, o que representa a variação instantânea da posição em relação ao tempo?

R2: Velocidade. Distância percorrida. [inicialmente falou com convicção, mas depois mudou de opinião].

P: A variação da posição é a distância percorrida. A variação da posição com o tempo é ..

R2: Velocidade.

P: Instantânea.

As duas duplas tiveram mais de um mês de diferença entre a realização da atividade derivada e a atividade TFC. No entanto, tivemos respostas diferentes quanto significado do conceito de derivada. A dupla M demorou a responder que estava relacionado com algo instantâneo. Já a dupla R, através de R1, lembrou-se da taxa de variação. Depois a relação com a velocidade foi natural, apesar da pequena confusão de R2. Confusão que M1 teve ao descrever a resposta conforme figura abaixo.

a) Determine a derivada da função $S(t)$ em relação a t através do WolframAlpha? O que representa esta derivada?

$$S'(t) = 3t^2 - 4$$

Esta derivada representa o quanto está variando a velocidade, ou seja, se é uma relação entre espaço e tempo é o cálculo da velocidade instantânea.

Figura 79: Descrição de M1 sobre o item a da atividade 1 da atividade TFC

$$S'(t) = 3t^2 - 4$$

A derivada representa o quanto está variando a posição em um determinado instante, o que representa a velocidade instantânea.

Figura 80: Descrição de M2 sobre o item a da atividade 1 da atividade TFC

Para construir o gráfico do item b no CAS, as duplas tiveram dúvida na sintaxe de integral. Após construir o gráfico da função encontrada no item a,

perguntamos o que representa a área do gráfico formado pela curva e os eixos coordenados:

Dupla M

M2: O espaço. Variação do espaço.

M1: Mas não é Sxt? [confundiu a função original Sxt com a função derivada vxt].

P: Não. Este gráfico que você construiu é o gráfico da derivada da posição em relação ao tempo. A derivada representa o que?

M1: Ah tá, é o gráfico velocidade x tempo.

P: Como fará para calcular a área?

M2: Integral.

Dupla R:

R2: O quanto percorreu.

R1: Mas é a distância percorrida pela velocidade!?

P: Aí é que está o detalhe. Para cada ponto da função você não terá a velocidade naquele instante?

R1: Mas aí é diferente em cada trecho.

P: Sim. Por isso que você calcula o quanto percorreu a cada instante, já que a velocidade é diferente. Depois soma.

Este último diálogo nos indica que R1 começa a enriquecer sua imagem do conceito de integral como uma função acumulação, a partir do momento em que verifica que a velocidade instantânea é variável e ele fica inquietado com o cálculo desta distância percorrida.

b) Use o WolframAlpha para construir o gráfico da função encontrada no item a. O que representa a área do gráfico formado pela curva e os eixos coordenados? Use novamente o WolframAlpha para determinar esta área para o intervalo de $t=1s$ até $t=8s$.

A área da função derivada representa a variação do espaço percorrido, uma vez que ela expressa a velocidade em função do tempo. (Gráfico $v \times t$) $\int_1^8 (-4+3t^2) dt = 483$ m Área

Figura 81: Descrição de M1 sobre o item b da atividade 1 da atividade TFC

Represento o distâncias percorrida no intervalo de 1s até 8s
Distâncias percorrida = 483m

Figura 82: Descrição de R2 sobre o item b da atividade 1 da atividade TFC

Durante o desenvolvimento do item c tivemos os seguintes diálogos:

Dupla M

P: O que representa $S(8)$?

M1: Lá em cima?

P: É, na função original, sem o apóstrofo.

M1: A posição quando o tempo é 8.

P: O que representa $S(1)$?

M1: A posição no tempo 1.

P: E o que representa a diferença?

M1: A variação.

P: O que representa esta variação? [Depois de alguns segundos]

M2: Distância percorrida.

Dupla R

P: O que significa $S(8)$?

R2: A posição em 8s.

P: Isso.

R1: Menos em 1. Seria a variação do espaço. O deslocamento.

Após o cálculo da área para o intervalo entre 1s e 8s tivemos:

Dupla M

P: Quanto que deu?

M2: 483 m.

P: Compara com o que foi calculado acima.

M1: É igual.

P: O que se pode concluir?

M1: A derivada representa ... [fica esperando]

P: O quanto varia em cada instante. Se você fizer a integral?

M1: Aí você acha o deslocamento.

P: Perceberam. Se você deriva uma função e depois integra a que você derivou você achou?

M1: O deslocamento. Então você deriva e depois faz a integral da derivada e..

P: Você “volta”.

M1: Ao que era antes.

Dupla R:

P: Quanto que deu?

R2: Deu o mesmo valor.

P: Então, o que vocês fizeram na letra a?

R1: Achamos a derivada da função posição.

P: Depois fizeram a integral para achar a área. A integral de quem?

R1: Da velocidade, da derivada.

P: Isso. Quando você derivou e depois integrou encontrou o mesmo valor da função original no intervalo.

R2: Mas isto é sempre ou só de vez em quando?

P: Sempre. É parte do Teorema Fundamental do Cálculo. Você está somando variações instantâneas, ou seja, o que variou.

R1: É, faz sentido.

c) O que representa o valor de $S(8)-S(1)$?

$$S(8) = 18 - 4(8) + 8^3 \quad S(1) = 18 - 4(1) + 1^3 \quad S(8) - S(1) = 498 - 15 = 483\text{m}$$

$$S(8) = 18 - 32 + 512 \quad S(1) = 18 - 4 + 1$$

$$\boxed{S(8) = 498\text{m}} \quad \boxed{S(1) = 15\text{m}} \quad 483\text{m representa a variação do espaço, o deslocamento}$$

Figura 83: Descrição de M2 sobre o item c da atividade 1 da atividade TFC

d) O que se pode concluir com os cálculos dos itens anteriores.

No processo de cálculo da integral da função derivada, o valor da área é igual ao da função original.

Figura 84: Descrição de R1 sobre o item d da atividade 1 da atividade TFC

5.4.2 Atividade 2

Como na atividade anterior, estamos interessados em analisar quais foram as compreensões dos conceitos de derivada e integral e, analisar se os alunos fazem a relação entre eles. Esta atividade causa muita expectativa na sua análise, já que a taxa de variação em questão, custo marginal, não é em relação ao tempo.

ATIVIDADE 2

O custo de produção, em reais, de uma empresa é dado pela expressão $C(x) = 2000 - 30\sqrt{x}$, onde x é a quantidade do produto produzido.

- O que significa este resultado de $C(100)$?
- O que representa $C(100) - C(0)$?
- Determine a derivada de $C(x)$, ou seja, $C'(x)$ usando o WolframAlpha.
- O que significa este resultado de $C'(100)$?
- Calcule a área do gráfico de $C'(x)$ para $x=0$ até $x=100$. O que representa este valor comparado com os itens anteriores? Faça um comentário sobre esta comparação.

5.4.2.1 Descrição da atividade 2

As duplas não tiveram dificuldade de expressar o significado de $C(100)$.

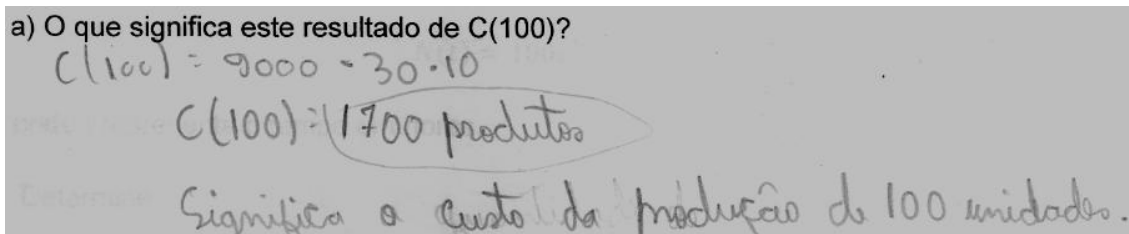


Figura 85: Descrição de R1 sobre o item a da atividade 2 da atividade TFC

Porém, tiveram muita dificuldade para analisar a variação no item b.

Dupla M

Após o cálculo de $C(0)$ temos o seguinte diálogo:

M2: Mesmo sem produzir você gasta.

P: Sim.

M1: A diferença deu -300.

P: O que representa?

M1: Lucro de 300. [Confundiu a diminuição dos custos com o lucro].

P: Esta não é uma função de lucro, mas de custo. Se produzir 100 custo de 1700 reais. Se não produzir nada custo de 2000 reais. Esta diferença então? [Silêncio]. Toda vez que tiver uma diferença, estamos variando.

M1: Variação do custo.

P: É a variação do custo quando você varia de 0 a 100 peças produzidas. Quando você produz de 0 a 100 seu custo vai diminuir em 300 reais. Por exemplo, uma máquina parada custa de manutenção 2000 reais. Ela produzindo gasta com manutenção 1700.

Houve uma confusão de M1 do lucro com o custo. Certamente quando temos uma diminuição dos custos aumentamos os lucros. Mas diminuir o custo em R\$300,00 não garante um lucro de R\$300,00.

Dupla R

R1: Deu negativo.

P: O que representa este valor negativo?

R1: Se você não produziu nada, mesmo assim teve um custo.

P: Sim. Tem o gasto pelo menos para manter a máquina por exemplo. Mas o que representa o custo de 100 menos o custo de 0?

R1: Ele precisa vender muito mais para obter o lucro. [Também confundiu diminuição no custo da produção com lucro].

P: Cuidado. Quando ele produz 100 peças e ele gasta menos com o custo para produzir. Não é uma função do lucro. Quanto mais ele produzir menos custos ele terá. Então, o que representa $C(100) - C(0)$?

R1: Ué, significa que o gráfico não chega a hum, como é que eu falo? Mesmo, mesmo gasto, o mesmo que ele conseguiu, não sei, sei lá.

P: Este -300 reais é o que ele conseguiu diminuir de custo ao produzir de zero a 100. Ele está economizando 300 reais no custo.

R2: Então a variação vai ser o tempo todo 300?

P: Não. É no caso de 0 a 100 peças. De 100 a 200 pode produzir mais ou menos depende da função.

R1: Como você quer que escreve aqui?

P: O que você entendeu. Escreva com suas palavras.

A dupla R teve dificuldade ainda maior que a M. Além de, como as meninas, confundir o lucro com o custo, não conseguiram ver o quanto está economizando ao produzir mais peças. Não visualizaram a variação do custo na variação de 0 a 100, ao ponto de R2 pensar que esta variação poderia ser constante.

As duas duplas determinaram a derivada da função no WolframAlpha, mas não se lembraram da sintaxe da raiz quadrada. E a dupla R se confundiu ao fazer derivada de $C'(x)$ para derivada de $C(x)$.

P: Não escreva $C'(x)$. A derivada de $C(x)$ é que é escrita por $C'(x)$.

R1: Como seria a derivada da derivada?

P: Derivada segunda.

R1: Nossa. Mas não tem qualquer relação com a primeira?

P: Tem. Por exemplo, na primeira atividade, onde tínhamos uma função da posição com o tempo, ao derivarmos tivemos a velocidade. Quando

derivar a velocidade em relação ao tempo, o que estará medindo esta variação da velocidade em relação ao tempo?

R1: Aceleração. E se fizer uma derivada terceira?

P: É possível. Resta saber se terá algum significado físico.

R1 não recordou que na atividade de derivada tivemos um exemplo de derivada segunda.

Dupla M

P: E aí, o que significa este valor? Lembram o que faz a derivada? Em cima vocês calcularam a variação. O que a derivada faz?

M1: A derivada é a variação no instante.

P: O que significa esta derivada em 100?

M1: Quando você produz 100 variou 1,5.

P: No instante que você produz 100 o seu custo está diminuindo 1,5 reais. É diferente do que vocês fizeram na letra b que calcularam a variação do custo de 0 a 100. Aqui, vocês estão calculando a variação do custo quando se produz 100 unidades.

M1: O negativo significa que ele está gastando menos?

P: Isso.

Dupla R

P: O que significa o resultado $C'(100)$? Calcule o $C'(100)$.

R1: -1,5.

P: O que significa este -1,5 aí? [Silêncio por alguns segundos.] A derivada representa o que?

R2: Variação instantânea.

P: Então o que significa este menos a partir da função do custo? No instante que você produz 100 peças o que está acontecendo?

R2: O custo está reduzindo em 1,5 reais.

R1: É a variação do custo quando...

P: Se está produzindo 100 peças.

R1: Humm.

Parece que o conceito de derivada com taxa de variação está mais consistente para as duas duplas. Mas sempre o professor-pesquisador tem que fazer a deixa, ou orientar o caminho para a organização do raciocínio.

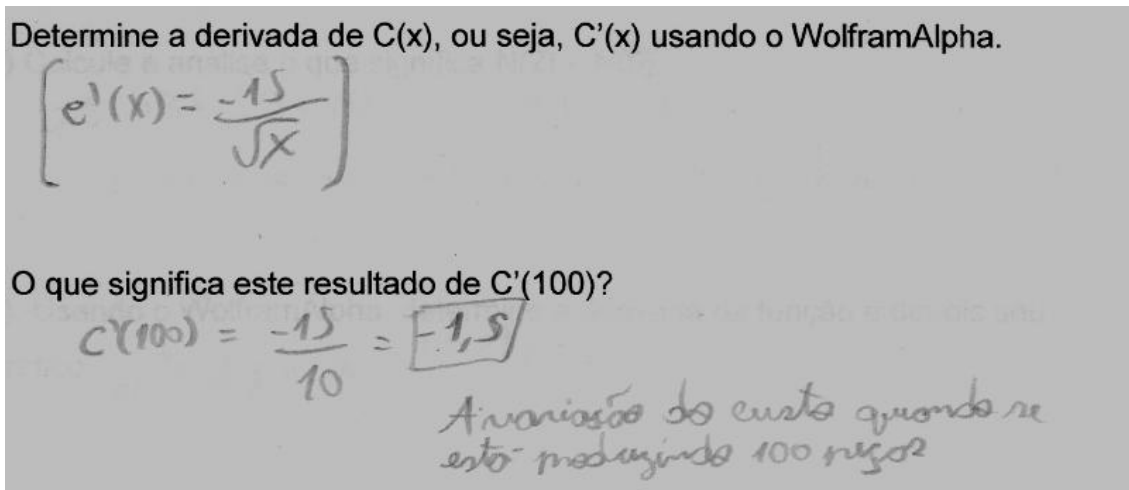


Figura 86: Descrição de R2 sobre os itens c e d da atividade 2 da atividade TFC

Dupla M

P: Depois ele pede a área do gráfico. Como a gente faz para calcular a área do gráfico?

M1: Integral.

P: Integral de quem então?

M2: Da derivada.

Dupla R

P: Como você calcularia a área desta função de 0 a 100?

R2: Integral.

P: Isso

Estes diálogos indicam que a relação da integral com a área do gráfico está solidificada na imagem do conceito deles.

Para o uso do software no item e ajudamos na sintaxe novamente. Inicialmente calcularam a integral indefinida e depois fizeram o cálculo da integral limitando o intervalo de 0 a 100.

Após o cálculo da integral:

Dupla M

P: Qual foi o valor?

M1: -300. E esta área...

P: Representa o quê? Comparando com o valor que vocês encontraram lá em cima.

M1: A variação do custo?

P: Foi o quanto variou o custo de 0 a 100.

M1 Mas olha só. Este gráfico aqui vai ser o que? As variações?

P: Neste gráfico aí, em relação ao que se está produzindo, o quando se está variando do custo de acordo com que se está produzindo.

[Mostrando a atividade anterior]

M1: É como se fosse esse aqui que eu achei, como no outro.

P: Exatamente. É entender que quando você está somando as pequenas coisas que estão variando, no final você tem o quanto variou. Muitas vezes vocês terão a função de como uma grandeza está variando e vai desejar saber o quanto variou num intervalo. Tudo bem?

M1: Eu entendi.

Dupla R

P: quanto que deu a área?

R1: -300.

P: O que significa este resultado de -300? Olha os resultados anteriores.

R2: A variação do custo de 0 a 100.

P: Deu o mesmo resultado da letra b. Você calculou a integral de quem?

Não foi da função derivada?

R2: Aí, voltou à função original.

P: Exatamente.

R1: Então é a mesma resposta do exercício anterior.

Os diálogos acima indicam que estão fazendo as primeiras movimentações rumo ao TFC.

Calcule a área do gráfico de $C'(x)$ para $x=0$ até $x=100$. O que representa este valor comparado com os itens anteriores. Faça um comentário sobre esta comparação.

$$\int_0^{100} \frac{-15}{\sqrt{x}} dx = \boxed{-300}$$

Representa o mesmo valor calculado na letra (b), ou seja, quando calcula-se a integral da derivada retorna-se à função original, encontrando o valor da variação do custo, que produzindo de 0 a 100 estará gastando menos 300 reais.

Figura 87: Descrição de M1 sobre o item e da atividade 2 da atividade TFC

5.4.3 Atividade 3

Seguindo o caminho das atividades anteriores estamos, através de um exemplo de crescimento de bactérias, interessados em sedimentar os conceitos de derivada e de integral, além de investigar a compreensão da relação entre os conceitos, ou seja, o TFC.

ATIVIDADE 3

Uma população de bactéria desenvolve-se segundo a expressão

$$N(t) = 100e^{t^2+2t}$$

onde t representa o tempo em horas.

Determine:

- O que significa este resultado $N(2)$? Use o WolframAlpha para calculá-lo.
- Calcule e analise o que significa $N(2) - N(0)$.
- Usando o WolframAlpha, determine a derivada da função e depois seu gráfico.
- O que significa o valor de $N'(2)$? Use o WolframAlpha para calculá-lo.
- O que significa a área do gráfico de $N'(t)$ para t entre 0 e 2h?

5.4.3.1 Descrição da atividade 3

Os alunos não tiveram dificuldade de interpretar o que se pediu no item a.

a) O que significa este resultado $N(2)$? Use o WolframAlpha para calculá-lo.

No instante $t=2h$, a população de bactérias é aproximadamente 298095,79.

Figura 88: Descrição de M2 sobre o item a da atividade 3 da atividade TFC

Porém, o problema ocorreu no cálculo através do CAS. Novamente algumas dúvidas na sintaxe e o WolframAlpha não resolveu $N(2) = 100e^{2^2+2*2}$. Veja:

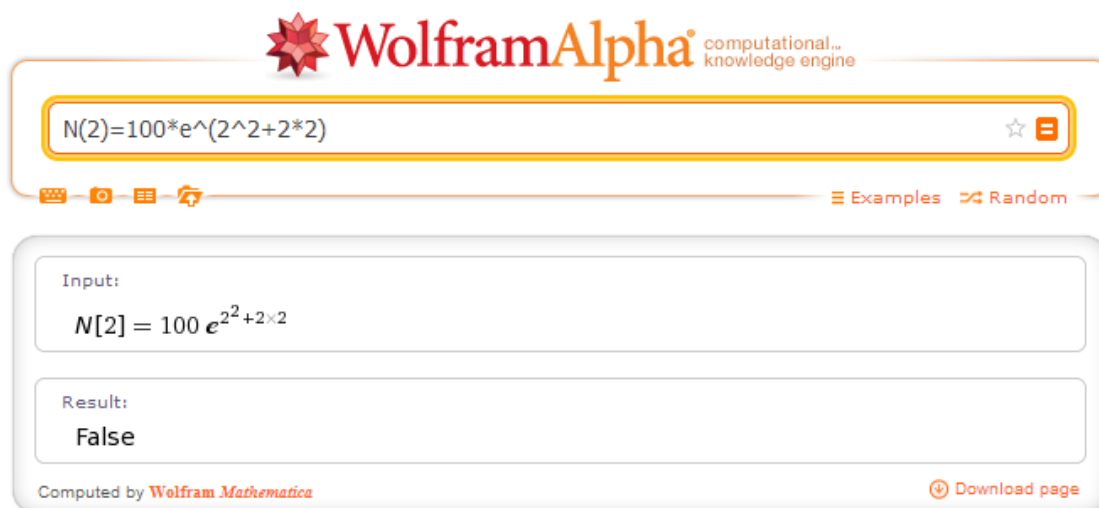








Figura 89: Imagem do cálculo de $N(2) = 100e^{2^2+2*2}$ no WolframAlpha

Na verdade, o WolframAlpha fez a comparação nos dois membros da equação verificando que era falsa, ao invés de fazer o valor da função para $t = 2$. Tal situação pode atrapalhar no desenvolvimento de uma atividade. Para termos o valor desejado, eliminamos o primeiro membro da equação e calculamos o valor numérico do segundo membro.

Outro problema foi que durante esta atividade a internet caiu duas vezes atrapalhando a atividade. Apesar dos problemas, o resultado do cálculo impressiona pela riqueza de informações.

 **WolframAlpha** computational... knowledge engine

☆ 

   
[Examples](#) [Random](#)

Assuming "e" is a mathematical constant | Use as **a unit** instead

Input:

$$100 e^{2^2+2 \times 2}$$

Result: [Approximate form](#) [Step-by-step solution](#)

$$100 e^8$$

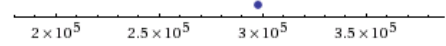
Decimal approximation: [More digits](#)

298095.7987041728274743592099452888673755967939132835702208963...

Property:

$100 e^8$ is a transcendental number

Number line:



Continued fraction: [More terms](#) [Fraction form](#)

[298095; 1, 3, 1, 30, 14, 1, 1, 1, 3, 4, 303, 2, 1, 3, 1, 8, 3, 7, 2, 30, 3, 1, 1, ...]

Alternative representation:

$$100 e^{2^2+2 \times 2} = 100 \exp^{2^2+2 \times 2}(z) \text{ for } z = 1$$

[More information >](#)

Series representations: [More](#)

$$100 e^{2^2+2 \times 2} = 100 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8^k}{k!}$$

$$100 e^{2^2+2 \times 2} = 100 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \right)^8$$

$$100 e^{2^2+2 \times 2} = \frac{100}{\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \right)^8}$$

$n!$ is the factorial function >
[More information >](#)

Computed by [Wolfram Mathematica](#) [Download page](#)

Figura 90: Imagem do cálculo de $100e^{2^2+2 \times 2}$ no WolframAlpha

O item b também não foi problema para os alunos.

b) Calcule e analise o que significa $N(2) - N(0)$.

$$N(2) - N(0)$$

$$998095,79 - 100$$

$$997995,79$$

Variação do número de bactérias em 2 horas.

Figura 91: Descrição de M2 sobre o item b da atividade 3 da atividade TFC

Durante o cálculo da derivada no CAS, o aluno R1 esqueceu-se da variável e o WolframAlpha apresentou o resultado de zero, já que considerou como uma função constante.

P: A derivada de uma constante é zero. Repare, se a derivada é a taxa de variação instantânea,

R2: Como não varia nada. [completando o raciocínio].

Após o cálculo da derivada, e o valor da derivada em $t=2h$ perguntamos o que significa $N'(2)$?

Dupla M

M2: A variação de bactérias no instante $t=2h$.

Dupla R

R2: Variação instantânea de duas horas.

R1: O quanto que variou de bactérias em duas horas.

P: No instante 2h. Cuidado para não confundir com o intervalo de duas horas.

R1: Ah, tá.

d) O que significa o valor de $N'(2)$? Use o WolframAlpha para calculá-lo

Representa a variação do número de bactérias no instante 2 horas.

Figura 92: Descrição de M2 sobre o item d da atividade 3 da atividade TFC

No item e perguntamos o que significa a área do gráfico de $N'(t)$ entre 0 e 2h. Tivemos os seguintes diálogos:

M2: A derivada calcula o quanto está variando no instante.

P: E a integral vai ser?

M1: A área.

P: É o quanto acumulou num intervalo de tempo. Quando você calcula a área você vê o quanto acumulou neste intervalo.

M1: Aí é a integral. E volta aqui. [mostrou a letra b]

P: O que é?

M1: A variação entre 0 a 2h.

M2: Então a derivada representa a variação no instante e a integral da derivada vai representar a variação no intervalo de tempo.

P: A integral calcula o quanto variou a grandeza num certo intervalo,

M1: A área.

P: E quando você calcula a área da função, esta representa a mesma coisa.

M2: O que?

P: Quando você calcula a integral no intervalo, você está calculando o quanto acumulou daquela variação naquele intervalo. Por exemplo, quando calculamos a derivada em 2h, estamos calculando o quanto está variando a população de bactérias no instante 2h. Quando você integra, você não integra apenas em $t = 2h$, você integra num intervalo.

A aluna M2 não estava compreendendo o fato de não poder integrar num ponto como a derivada.

M2: Eu entendi o que representa a derivada em 1 ou 1,5. É o quanto está variando em cada valor. Mas a integral!?

A dúvida indica estar na função acumulação e conseqüentemente na aplicação do TFC. Foi necessário irmos ao quadro e fazer um exemplo com o gráfico de uma função Sxt qualquer, indicar a velocidade instantânea em cada ponto do gráfico lembrando a variação média até a variação instantânea. Construimos o gráfico vxt correspondente à função Sxt e representamos a área do gráfico sobre um

determinado intervalo. Esta área representa o deslocamento do objeto que pode ser calculado no gráfico anterior calculando a variação da posição no intervalo de tempo indicado. Em seguida voltamos ao caso das bactérias e analisamos da mesma forma. Após esta análise ela disse ter entendido melhor. Mas percebemos uma ponta de dúvida.

A dupla R não pareceu ter dúvida.

R1: Vai ser a integral.

P: E o que significa?

R1: O quanto variou de bactérias no intervalo.

A atividade nos indicou que os rapazes R1 e R2 e a aluna M1 estão familiarizados com a derivada como taxa de variação, a integral como área do gráfico com o eixo das abscissas e a função acumulação relacionando com o TFC. A aluna M2 mostrou-se confiante quanto ao conceito de derivada como taxa de variação e a integral como a área do gráfico, mas ainda mostra dificuldades na relação da função acumulação e conseqüentemente no TFC.

e) O que significa a área do gráfico de $N'(t)$ para t entre 0 e 2s?

A área do gráfico $N'(t)$ representa a variação da população de bactérias em 2 horas.

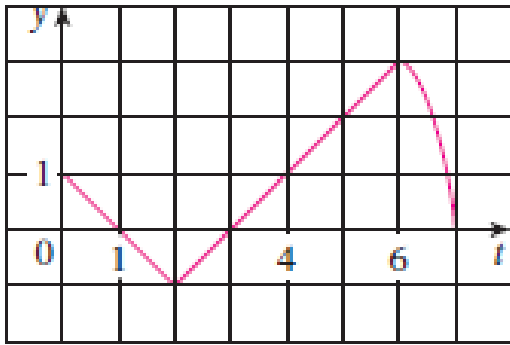
Figura 93: Descrição de M2 sobre o item e da atividade 3 da atividade TFC

5.4.4 Atividade 4

Esta é uma atividade que pretende analisar a compreensão dos alunos ao conceito de integral através da área líquida do gráfico. Desejamos analisar as dúvidas que surgirão ao calcular para um determinado valor x e principalmente, a possível confusão que pode ocorrer com o máximo da função f e o máximo da função g .

ATIVIDADE 4

Seja $g(x) = \int_0^x f(t)dt$, onde f é uma função cujo gráfico é representado abaixo.



- O que significa o valor de $g(x)$ para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ e 6 ? Determine-os.
- Estime o valor de $g(7)$.
- Onde g tem um valor máximo? Onde g tem um valor mínimo? Justifique.

5.4.4.1 Análise da atividade 4

Inicialmente explicamos o significado da função $g(x) = \int_0^x f(t)dt$, e os diálogos.

Dupla M

P: O que representa o valor de $g(x)$ para cada um desses valores?

[Depois de algum tempo em silêncio]

M2: Calcular o quanto variou.

P: O que significa graficamente, por exemplo, a integral da função de 0 a 1?

M1: A área.

P: Então calcular esta integral de 0 a 1 é calcular a área do gráfico?

M1: De 0 a 1. [Ela mostra em sua folha a área a ser calculada]

P: Exatamente. Se for de 0 a 2, você terá que calcular a área de 0 a 2.

[M1 mostra em sua folha qual seria a área]

P: Isso. E qual seria o resultado desta integral?

M2: $1/2$ com $1/2$, vai dar 1 quadradinho.

P: Isso, porém, esta parte do gráfico está abaixo do eixo de t . Na parte negativa de imagem.

M2: Ah, vai dar zero.

M1: Então a integral é 0.

P: Exatamente. E a integral de 0 até 3?

M1: Negativa. Zero de 0 até 4 zero.

P: Isso.

M2: De zero a zero é zero.

P: É. Não tem área nenhuma.

Dupla R

P: O que significa $g(2)$? É no lugar do x colocar 2, não é? Então será a integral de 0 a 2 da função $f(t)$. Graficamente o que representa esta integral mesmo?

R1: A área do gráfico.

P: A integral de 0 a 1 seria o que?

A dupla R confundiu o eixo das abscissas, já que no gráfico, por ser quadriculado, parece que o valor destacado no eixo y é -1 . Daí, a dupla indicou a área errada. Após chamar a atenção deste detalhe, R2 indicou a área certa, mas R1 ainda indicou uma área errada, e destaquei que era a área da curva até os eixos coordenados.

P: Como seria de 0 a 1?

R2: $1/2$.

P: Isso, meio quadrado de lado 1. E como seria de 0 a 2?

Enquanto faziam as contas destacava que tinham quadrados lado 1 ou triângulos que eram metade dos quadrados. Para cada valor que vai aumentando de x vai acumulando mais área. Ainda assim as meninas pensaram em uma fórmula para o cálculo.

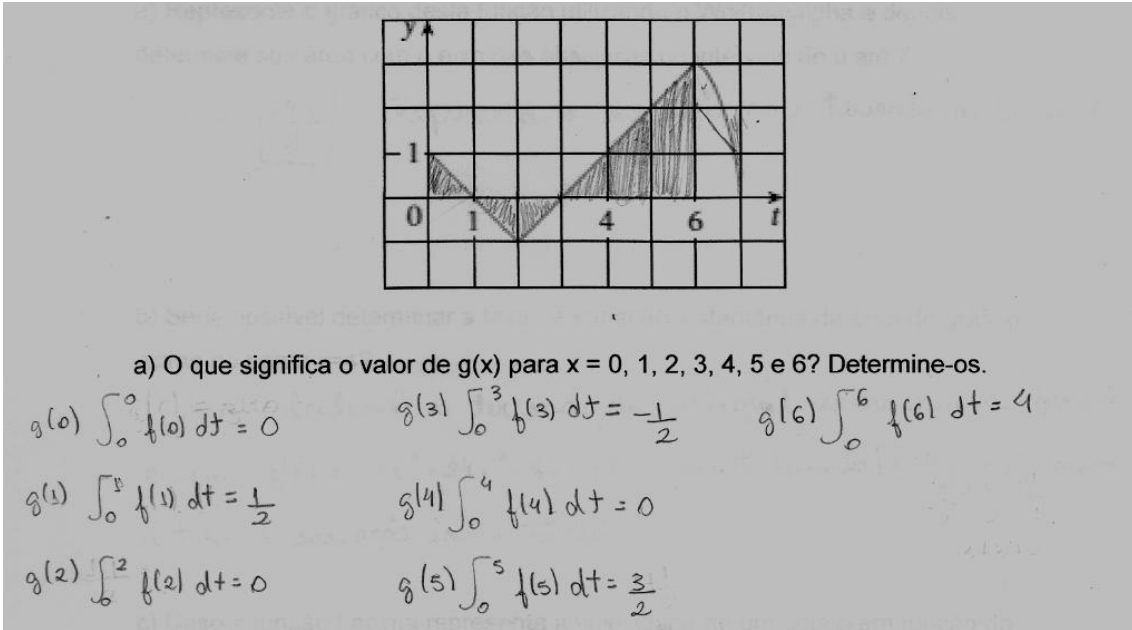


Figura 94: Descrição de M1 sobre o item a da atividade 4 da atividade TFC

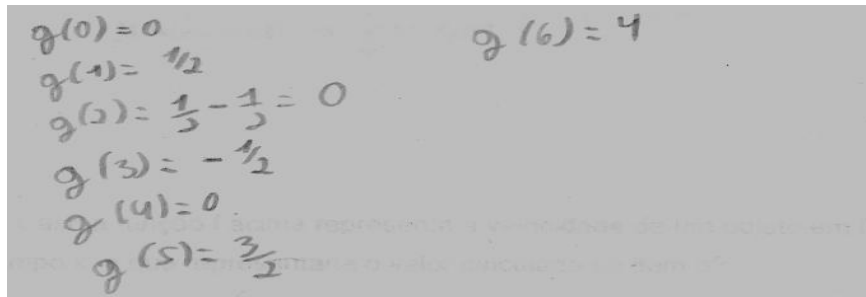


Figura 95: Descrição de R2 sobre o item a da atividade 4 da atividade TFC

Observe que nenhum dos dois alunos, M1 e R2, os outros dois também, não escreveram o significado de $g(0)$, ou de qualquer outro valor, como foi pedido no enunciado. Preocuparam-se em apresentar os resultados. Os das meninas, mais detalhados, e o dos meninos mais sucintos.

A estimativa para o cálculo do item b foi feito com tranquilidade pelos alunos.

b) Estime o valor de $g(7)$.

$$g(7) \approx 4 + 2$$

$$g(7) \approx 6$$

Figura 96: Descrição de M2 sobre o item b da atividade 4 da atividade TFC

$$g(7) = 4 + 2,3$$

$$g(7) = 6,3$$

Imagem 97: Descrição de R2 sobre o item b da atividade 4 da atividade TFC

Sobre o item c chamamos a atenção para não confundir a função f com a função g .

Dupla M

P: Onde g tem um valor máximo e um mínimo?

M1: Onde tiver área maior.

P: E aí, onde vocês teriam acumulado mais área?

M2: Em 7.

M1: Máximo em 7 e o mínimo em zero.

P: Em zero?

M2: O mínimo é aquele que deu $-1/2$. É o $g(3)$.

c) Onde g tem um valor máximo? Onde g tem um valor mínimo? Justifique.

g tem um valor máximo em $g(7)$, pois apresentará uma área maior e o g terá um valor mínimo em $g(3)$, pois encontrará um valor negativo em sua integral (área).

Figura 98: Descrição de M1 sobre o item b da atividade 4 da atividade TFC

A atividade demonstrou que com o devido acompanhamento os alunos conseguem desenvolver a integral como área do gráfico e como a função acumulação com erros e descuidos naturais, como visualização da área com os eixos coordenados e o sinal negativo para a curva abaixo do eixo das abscissas. Indica-nos que, na medida em que vamos fazendo mais atividades, as imagens dos conceitos ficam mais ricas e as respostas saem mais espontaneamente, indicando uma definição dos conceitos mais próximos do que propomos.

5.4.5 Atividade 5

Esta atividade volta a trabalhar o TFC relacionando os conceitos de derivada e integral, mas ao contrário das atividades 1, 2 e 3 que trabalhava com a função

derivada e depois com sua integral, esta trabalha com a função acumulação e depois analisa a taxa de variação desta função.

ATIVIDADE 5

Seja a função $f(x) = -2x^3 + 24x^2 - 82x + 84$.

- Represente o gráfico desta função utilizando o Wolframalpha e depois determine sua área com o eixo das abscissas no intervalo de 0 até 7.
- Seria possível determinar a taxa de variação instantânea da área do gráfico acima no ponto $x=4$?
- Caso a função f acima represente a velocidade de um objeto em função do tempo x , o que representaria o valor calculado no item a?
- A partir da área do gráfico representado no item a, o que representaria a taxa de variação instantânea da área para $x=4$?

5.4.5.1 Descrição da atividade 5

A atividade foi resolvida rapidamente pelas duas duplas. Após calcularem a área no intervalo de 0 a 7, usando a integral, os alunos interpretaram o item b.

P: Seria possível determinar a taxa de variação instantânea da área do gráfico acima no ponto $x=4$?

Dupla M

M1: É a derivada.

P: De quem?

M2: Da função do gráfico. [Respondeu apontando para o gráfico]

P: Isso. E derivando esta função você vai encontrar o que?

M1: A função original.

b) Seria possível determinar a taxa de variação instantânea da área do gráfico acima no ponto $x=4$?

Sim, calculando a derivada da integral retornaria a função de origem: $f(x) = -2x^3 + 24x^2 - 82x + 84$, substituindo $x=4$ determinaria a taxa de variação instantânea.

Figura 99: Descrição de M1 sobre o item b da atividade 5 da atividade TFC

Dupla R

R2: É só calcular a derivada.

Eles derivaram a função encontrada no gráfico e

R2: Voltou na mesma função.

Porém, ao descreverem na folha de respostas, a dupla R expressou-se de forma errada.

b) Seria possível determinar a taxa de variação instantânea da área do gráfico acima no ponto $x=4$?

Basta derivar a função $f(x) = -2x^3 + 24x^2 - 82x + 84$

Figura 100: Descrição de R1 sobre o item b da atividade 5 da atividade TFC

Nos dois itens restantes tínhamos a intenção de fazer uma relação das funções dos itens a e b com os conceitos de velocidade e de deslocamento. Porém, os alunos encontraram muita dificuldade na interpretação principalmente no item d. Após explicarmos o que era desejado nos itens os alunos responderam as questões.

c) Caso a função f acima representa a velocidade de um objeto em função do tempo x , o que representaria o valor calculado no item a?

O valor calculado no item a representaria a variação do espaço no intervalo de 0 a 7.

d) A partir da área do gráfico representado no item a, o que representaria a taxa de variação instantânea da área para $x=4$?

A taxa de variação instantânea da área para $x=4$ representa a velocidade instantânea.

Figura 101: Descrição de M2 sobre os itens c e d da atividade 5 da atividade TFC

5.4.6 Análise da atividade TFC

Nesta atividade o CAS WolframAlpha foi usado mais vezes e com funções mais elaboradas do que nas atividades de derivada e integral. Talvez esta seja a justificativa de maiores transtornos. Novamente o inglês da sintaxe foi percebido para raiz quadrada e para derivada.

Tivemos a dificuldade dos alunos com os parênteses da função $N(t) = 100e^{t^2+2t}$ e principalmente o possível fator de conflito que o CAS pode causar ao afirmar que é falsa a expressão $N(2) = 100e^{2^2+2 \cdot 2}$.

Além disso, a internet caiu duas vezes durante a atividade da dupla R2. Por sorte, não demorou a retornar e não atrasou a atividade. Aí está um complicador do CAS on line com o qual nós não havíamos nos preocupado.

Mas, ainda assim, o software cumpriu seu papel como organizador genérico e foi fundamental para as compreensões desejadas.

O longo tempo de diferença entre a execução da atividade derivada e a atividade TFC, dificultou para os alunos M1, M2 e R1 usar o conceito da derivada como taxa de variação na primeira atividade. Porém, com o desenrolar das atividades foram aplicando o conceito de forma mais natural.

Na atividade 2 de custo marginal, os alunos apresentaram dificuldades na interpretação da diferença dos custos de produção com lucro da empresa. Porém,

na análise da derivada os alunos conseguiram interpretar o resultado, tendo sempre o pesquisador-professor perguntando o que é a derivada.

Com relação à função acumulação a maior confusão ocorreu na atividade 3. Tiveram dificuldades de interpretação, após a análise da derivada, sobre o que representava a integral da função derivada no intervalo de 0 a 2h. A aluna M2 mostrou-se mais angustiada do que os demais alunos.

Sobre o TFC os alunos mostraram curiosos com a derivada da integral de uma função ou a integral da derivada de uma função “voltar” à função original. Excetuando a dificuldade já relatada da atividade 3, os alunos fizeram bem a relação da derivada com a integral de modo que no fim os alunos executaram de forma correta e rápida a última atividade.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A função principal do WolframAlpha na pesquisa foi a de um organizador genérico, ou seja, auxiliou no desenvolvimento das unidades cognitivas em questão. Neste sentido, o CAS respondeu à demanda dos participantes com bastante eficiência na construção de gráficos e no cálculo de derivadas e de integrais com precisão e riqueza de detalhes.

Destacam-se as seguintes características:

- Sintaxe bem mais flexível em comparação aos outros softwares matemáticos, interpretando corretamente termos em português corrente.
- Possibilidade de ser acessado de qualquer equipamento fixo ou móvel com acesso à internet sem que seja necessário download e instalação de software.
- É um software livre, ou seja, não é necessário adquirir uma licença para usá-lo (exceto para algumas funções específicas)

No entanto, dificuldades também foram percebidas.

- Mesmo com a flexibilidade da sintaxe ainda assim são necessários termos específicos para determinadas expressões. Além disso, não apenas os comandos são em inglês, todo o site é em inglês.
- Se por algum motivo faltar internet, fica impossibilitado o uso do WolframAlpha.
- Num caso específico da pesquisa o WolframAlpha não executou o valor de uma função por considerá-la uma comparação de expressões. Tal situação pode causar problemas, já que o aluno ficará na dúvida se digitou os comandos errados, se a expressão não tem solução ou se o software é incapaz de calculá-la.
- Em alguns momentos notou-se um excessivo movimento de propagandas no site.

Portanto, analisando a relação custo/benefício, a conclusão imediata é que o sistema cumpriu satisfatoriamente as demandas dos participantes.

Como desejamos explorar o conceito de derivada como taxa de variação instantânea, parece-nos que o mais importante é o aluno conhecer e compreender o que é uma razão e uma taxa de variação. Isso sugere que os alunos não veem uma razão como uma comparação entre duas medidas ou grandezas. Os participantes tiveram dificuldades iniciais com a ideia de razão e de variação entre duas grandezas, ou seja, uma taxa de variação. Talvez este seja o maior obstáculo

cognitivo para o conceito de derivada como taxa de variação instantânea. Uma imagem do conceito de razão mais rica ajudaria, e muito, na imagem do conceito de derivada como taxa de variação instantânea.

Para o conceito de integral, a abordagem via área líquida, por meio da qual os alunos podem utilizar seus conhecimentos de geometria até o momento em que esta abordagem se torna inviável, mostrou-se eficiente. A maior dificuldade ocorreu quando da emergência da ideia de limite no cálculo da soma de infinitos retângulos acima ou abaixo da curva.

Para o conceito de integral como função acumulação, fica restrita a uma boa imagem do conceito de taxa de variação e taxa de variação instantânea, já que a integral como função acumulação acumula num determinado intervalo o que variou a cada instante deste intervalo. Neste contexto, o conceito da aplicação do TFC fica comprometido, já que é neste ponto que relaciona os conceitos de derivada e de integral.

Após alguns exemplos do que seja uma razão e uma taxa de variação, os participantes mostraram ter construído boa imagem do conceito de derivada. Na medida em que os exemplos e exercícios iam surgindo, mais seguros nas respostas os alunos ficavam, em particular nas questões envolvendo a grandeza tempo na taxa de variação, tais como vazão, crescimento de bactérias por unidade de tempo e velocidade.

Porém, nas atividades sem a grandeza tempo na taxa de variação, os participantes tiveram mais dificuldades, tais como a atividade envolvendo o conceito de custo marginal. Isso sugere que os participantes relacionaram o termo instantâneo somente à variável tempo, e não, por exemplo, na variação do custo quando se está produzindo 100 peças. É uma taxa variação instantânea sem a grandeza tempo.

O conceito de integral como área líquida formada pela curva e os eixos coordenados parece ter ficado fortemente impregnado na imagem do conceito dos alunos. A partir de certo momento, em qualquer atividade que se falava em cálculo de área, instantaneamente algum aluno a relacionava com a integral.

Em grande parte das atividades mostrou-se adequada a relação feita pelos participantes da taxa de variação instantânea com a função acumulação, ou seja, a ideia do TFC. Acreditamos que com mais exemplos e exercícios os conceitos de

derivada e integral, além da conexão entre eles através do TFC, ficará ainda rica e densa na imagem destes conceitos.

Acreditamos, pelo que foi apresentado, que os alunos no ensino médio têm condições de compreender os conceitos de derivada como taxa de variação instantânea, de integral como área líquida, além da função acumulação, ou seja, terem sua imagem de conceito próxima à definição do conceito.

Porém, deve-se iniciar a abordagem explorando a comparação entre grandezas e a comparação entre a variação dessas grandezas. Vale lembrar que tais conceitos, de razão e taxa de variação, podem e devem ser explorados desde as séries iniciais por meio da comparação de alturas, preços, volumes, entre outros. Não podemos aceitar, no entanto, que os conceitos de derivada e de integral sejam trabalhados no ensino médio da mesma forma como são trabalhados na maioria dos cursos de Cálculo da graduação.

Não estamos afirmando que a forma que os conceitos de Cálculo são tratados no ensino superior esteja errada. Porém, a questão crucial é achar um ponto ótimo de equilíbrio entre compreensão conceitual e compreensão procedural num momento histórico em que a maioria das manipulações algébricas estão disponíveis no smartphone ou tablet que o próprio aluno traz consigo para a escola. Ao descrevermos sobre o referencial teórico levantamos a hipótese de a taxa de variação instantânea ser uma raiz cognitiva para a derivada, e portanto, a apresentamos como questão de pesquisa. Segue abaixo um quadro comparativo com as características definidas por TALL, McGOWEN & DeMAROIS (2000) e com nossa análise.

Definição de raiz cognitiva	Hipótese da taxa de variação como raiz cognitiva
(i) ser uma unidade cognitiva do conhecimento central do estudante no início da sequência de aprendizagem;	a taxa de variação instantânea é elemento central do conceito de derivada e foi utilizada como ponto de partida para estudo da derivada.
(ii) permitir o desenvolvimento inicial através da estratégia de expansão cognitiva;	foi através de atividades que exploraram a taxa de variação média até a taxa de variação instantânea, inclusive graficamente, que se procedeu o desenvolvimento inicial do processo cognitivo.

(iii) conter a possibilidade de significado teórico a longo prazo, em desenvolvimentos teóricos posteriores;	a taxa de variação instantânea revelou-se importante para desenvolvimento posterior, tais como no cálculo integral de como as coisas se acumularam a partir da análise de como variaram.
(iv) ser robusta o suficiente para permanecer útil enquanto a compreensão se desenvolve, tornando-se mais sofisticada.	ao longo do desenvolvimento das atividades, da compreensão do conceito de derivada como taxa de variação instantânea induziu compreensões significativas de aplicações em várias áreas do conhecimento.

Portanto, no contexto em que a pesquisa foi desenvolvida, parece-nos adequado sugerir que a taxa de variação instantânea funcionou como raiz cognitiva para o conceito de derivada.

Ao término do trabalho esperamos que a pesquisa ora relatada possa motivar outros pesquisadores a explorarem novas compreensões sobre a aprendizagem de conceitos tão sofisticados em um nível de ensino distinto do superior e com isso, talvez, iluminar um pouco mais os tortuosos caminhos da transição entre a matemática da Educação Básica e a matemática da Educação Superior.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N.S.G. **O Computador e a Aprendizagem Matemática: reflexões sob a perspectiva da Resolução de Problemas.** Anais do I SERP, ISBN – 978-85-89082-08-2 , p. 1-19, Rio Claro, 2008.

ANASTÁCIO, M. Q. A. **Pesquisa qualitativa: concepções e perspectivas.** Revista Educação em Foco, vol. 2, p.189-198, Juiz de Fora, 2006.

BARGER, R. H.; McCOY, A. C. **Calculus in the middle school?** Mathematics Teaching in the Middle School, Vol. 15, No. 6, Estados Unidos, 2010. Disponível em < http://web.njcu.edu/sites/faculty/dbennett/Uploads/mtms_2010-02-348_barger.pdf>, acessado em 06/09/2013.

BERNARD, T.; TALL, D. **Cognitive Units, Connections and Mathematical Proof.** Proceedings of PME 21, vol.2, p.41-48, Finlândia, 1997.

BITTAR, M. **Possibilidades e dificuldades da incorporação do uso de softwares na aprendizagem da matemática. Um estudo de um caso: o software APLUSIX.** III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Águas de Lindóia, 2006.

BOUER, M.W.; GASKEL, G. **Pesquisa qualitativa com texto, imagem e som.** 2ª ed. Editora Vozes, Petrópolis, 2003.

BORBA, M. C. **A pesquisa qualitativa em Educação Matemática.** Publicado em CD nos Anais da 27ª reunião anual da Anped, Caxambu, 2004.

BORBA, M. C. **Educação Matemática a Distância Online: Balanço e Perspectivas.** XIII CIAEM-I ACME, Recife, Brasil, 2011.

BREAKTHROUGH COLLABORATIVE, **Calculus: It's Not Just for Math Majors.** February 2012 Research Brief. Disponível em: <<http://www.breakthroughcollaborative.org/sites/default/files/Advanced%20Math%20Research%20brief.pdf>> acessado em 06/09/2013.

CORBIN, J.; STRAUSS, A.. **Basics of qualitative research: techniques and procedures for developing grounded theory.** 3.ed. Los Angeles: SAGE publications, 2008.

DOMINGUINI, L.; GOMES, S.F.; ALVES, E.S.B. **Limite de uma função: conteúdo viável para o ensino médio?** II CNEM e IX EREM, Ijuí, Brasil, 2011.

DEMAROIS, P.; TALL, D. **Principle or Cognitive Root?** Proceedings of the 23rd Conference of PME, vol. 2, p. 257–264, Haifa, Israel, 1999.

DOMICELI, V.E.; LANG, A.S.I.D.; LOCKE, L. **Teaching calculus with WolframAlpha.** International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, vol. 41, nº 8, p. 1061-1071, 2010.

DREYFUS, T. **Advanced Mathematical Thinking Process.** In: TALL, D. (Ed) Advanced Mathematical Thinking. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer, 1991.

GIRALDO, V. **Descrições e Conflitos Computacionais: O Caso da Derivada.** Tese de Doutorado. UFRJ, Rio de Janeiro, 2004.

GODOY, E. V. **A Matemática no Ensino Médio – A trajetória brasileira desde a década de 80 e as organizações curriculares de outros países.** Práxis Educacional Vitória da Conquista v. 6, n. 9, p. 77-100, Vitória da Conquista, 2010.

GUEDES, A. G.; ASSIS, M. M. A. **Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio: uma análise nas escolas de ensino médio da cidade do Natal/RN.** Anais II EREM, Natal, 2009.

GUEDIN, J.; UGGIONI, E. **Cálculo diferencial e integral: o ensino como uma abordagem histórica e sua contextualização.** Monografia Especialização em Educação Matemática. UNESC, Criciúma, 2004.

HANNA, G. **Mathematical Proof.** In: TALL, D. (Ed) **Advanced Mathematical Thinking.** Dordrecht, The Netherlands: Kluwer, 1991.

LIMA, G. L. **Ensino do Cálculo no Brasil: breve retrospectiva e perspectivas atuais.** Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática, Curitiba, 2013.

LUZ, V. M. **Introdução ao cálculo: uma proposta associando pesquisa e intervenção.** Dissertação de mestrado. UFRJ. Rio de Janeiro, 2011.

MA, X. **Effects of Early Acceleration of Students in Mathematics on Mathematics Coursework.** International Statistical Institute, 55th Session, 2005.

MYNAIO, M.C.S. **PESQUISA SOCIAL**. 22^a ed, Editora Vozes., Petrópolis, 2002.

NASCIMENTO, J. L. **Uma proposta metodológica para a disciplina de Cálculo I**. Anais IV Encontro de Educação em Engenharia, Rio de Janeiro, 2000.

OLIMPIO JUNIOR, A. **Compreensões de conceitos de Cálculo Diferencial e Integral no primeiro ano de Matemática – uma abordagem integrando oralidade, escrita e informática**. Tese de doutorado. UNESP, Rio Claro, 2006.

PEREIRA, V. M. C. **Cálculo no Ensino Médio: Uma Proposta para o Problema da Variabilidade**. Dissertação de mestrado. UFRJ. Rio de Janeiro, 2009.

RAAD, M. R. **História de ensino de Cálculo Diferencial e Integral: a existência de uma cultura**. Dissertação de Mestrado. UFJF, Juiz de Fora, 2012.

RODRIGUES, J.A. **Wolfram Alpha: uma nova visão da Matemática**. 6^a Conferência Ibérica de Sistemas e Tecnologias de Informação, p. 299 – 304, Chaves, Portugal, 2011.

ROBERT, A. SCHWARZENBERGER, R. **Research in Teaching and Learning Mathematics at na Advanced Level**. In: TALL, D. (Ed) Advanced Mathematical Thinking. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer, 1991.

STEFFE, L. P., THOMPSON, P. W. **Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements**. Research design in mathematics and science education. p. 267- 307, Hillsdale. NJ: Erlbaum, 2000.

STWART. J. **Calculus Early Transcedentals**. 6.ed. Thomson Higher Education, Belmont, 2008.

TALL,D. **Cognitive Development in Advancede Mathematics Using Technology**. Mathematics Education Research Journal, Vol.12(3), p.196-218, 2000.

TALL, D. MCGOWEN, M. DEMAROIS, P. **The functions machine as a cognitive root for the functions concept**. Annual Meeting of the North American, 2000.

TALL, D.; VINNER, S. **Concept image and concept definition with particular reference to limits and continuity.** *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), p.151-159, 1981.

TALL, D. **Functions and Calculus.** *International Handbook of Mathematics Education*, p.289-325, 1997.

TALL, D. **Concept Image and Concept Definition.** Publicado em *Senior Secondary Mathematics Education*, (ed. Jan deLange, Michiel Doorman), OW&OC Utrecht, p.37–41, 1988.

TALL, D. **The Psychology of Advanced Mathematical Thinking.** In: TALL, D. (Ed) *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer, 1991.

TALL, D. **Dynamic mathematics and the blending of knowledge structures in the calculus.** *ZDM Mathematics Education*, vol41, p.481–492, Berlin, 2009.

VINNER, S. **The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics.** In: TALL, D. (Ed) *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer, 1991.