UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

# UMA PROPOSTA DE TRABALHO DIDÁTICO COM A GEOMETRIA PROJETIVA

Marina Dutra Vieira

Juiz de Fora (MG)
Dezembro, 2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

Pós-Graduação em Educação Matemática

Mestrado Profissional em Educação Matemática

Marina Dutra Vieira

# UMA PROPOSTA DE TRABALHO DIDÁTICO COM A GEOMETRIA PROJETIVA

Orientador: Prof. Dr. Adlai Ralph Detoni

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, como parte dos requisitos para qualificação no Mestrado Profissional em Educação Matemática da UFJF.

Juiz de Fora (MG)

Dezembro, 2016

Ficha catalográfica elaborada através do programa de geração

automática da Biblioteca Universitária da UFJF,

com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Vieira, Marina Dutra.
Uma proposta de trabalho didático com a Geometria Projetiva / Marina Dutra Vieira. -- 2016.
150 f. : il.

Orientador: Adlai Ralph Detoni
Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós Graduação em Educação Matemática, 2016.

1. Geometria Projetiva. 2. Geogebra. 3. Currículo. 4. Fenomenologia. I. Detoni, Adlai Ralph, orient. II. Título.

**Marina Dutra Vieira**

**“UMA PROPOSTA DE TRABALHO DIDÁTICO COM A GEOMETRIA PROJETIVA”**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

**Comissão Examinadora**

Prof. Dr. Adlai Ralph Detoni
(UFJF)

Prof. Dr. Flávio de Souza Coelho
(CMJF-Colégio Militar de Juiz de Fora)

Prof. Dr. Marco Antônio Escher
(UFJF)

Aprovada em 22/12/2016

“Na casa da matemática há muitas moradas e,
dessas, a mais elegante é a Geometria Projetiva”

Morris Kline

## Resumo

O presente texto estrutura estudos realizados em torno da Geometria Projetiva. O trabalho traz resultados de um estudo histórico sobre a Geometria Projetiva e uma revisão bibliográfica sobre o ensino de Geometria no Brasil. O objetivo é enfatizar o papel de práticas curriculares alternativas, inclusive as que premiam o uso de recursos da tecnologia computacional. A partir daí, é elaborada uma pesquisa que propõe um trabalho didático que une conceitos projetivos e geometria feita com a mediação de softwares gráficos. Assim, constitui-se uma questão: COMO A GEOMETRIA PROJETIVA PODE SER UMA PRESENÇA CURRICULAR, A PARTIR DE SUA PRESENÇA NA FORMAÇÃO DO LICENCIANDO EM MATEMÁTICA? São esboçadas ideias metodológicas dentro do escopo da Fenomenologia, com as quais apronta-se uma pesquisa de campo, com posteriores tratamentos de dados e análises abarcando a experiência de licenciandos sobre atividades especialmente desenhadas. As análises permitem discussões que estabelecem uma síntese sobre a questão constituída. Nosso estudo levantou possibilidades para a inclusão da Geometria Projetiva em práticas curriculares em escolas.



**Palavras-Chave:** Geometria Projetiva, Geogebra, Currículo, Fenomenologia.

## Abstract

This dissertation structures a study on Projective Geometry, presenting results of a historical study on Projective Geometry and a bibliographical revision on the teaching of Geometry in Brazil. The objective is to emphasize alternative curricular practices, including those rewarding the use of computational technology resources. Hence, this study suggests a didactic intervention that unites projective concepts and geometry made with the mediation of graphic software. Thus, an issue arises: HOW CAN PROJECTIVE GEOMETRY BE A CURRICULAR PRESENCE, SINCE ITS PRESENCE IN THE TRAINING OF LICENSING IN MATHEMATICS? Methodological ideas are outlined within the scope of the Phenomenology, from which a field research is then elaborated and with later data processing and analysis covering the experience of subjects graduated on specially designed activities. The assessments made allow conclusions that establish a synthesis on the indicated issue. Our study highlights possibilities on how Projective Geometry may be applied in curricular practices in schools.

Keywords: Projective Geometry, Geogebra, Curriculum, Phenomenology.

# Agradecimentos

Quero agradecer primeiramente aos meus pais, José Francisco e Gláucia que sempre possibilitaram meus estudos, principalmente minha mãe, que sempre acreditou no meu sonho da matemática e sempre esteve disponível para me ajudar.

Agradeço aos meus irmãos, Frederico e Paulo, por terem me acompanhado, terem sido pacientes e aguentado minhas tensões e falta de tempo.

Agradeço também a minha cunhada Carla pela valorização do meu esforço.

Agradeço aos meus tios, Cláudia, Marquinho e Toninho, pessoas fundamentais em minha formação. Em particular aos tios Marquinho e Toninho que me receberam em suas casas.

Agradeço a minha avó Maria de Lourdes, por todo o cuidado, incentivo e valorização. E a minha bisavó em memória.

Agradeço aos meus primos que me incentivaram e compartilharam comigo a alegria da aprovação no mestrado, em particular ao Henrique, sempre me distraindo com sua alegria infantil. Também aos Ricardo e Sandra por terem sido inspirações profissionais.

Agradeço ao meu orientador que não só me apresentou à Geometria Projetiva, como dedicou seu tempo a minha pesquisa e esteve sempre presente para o meu auxílio.

Agradeço, também, ao meu colega de pesquisa Marcelo, pois esteve ao meu lado durante boa parte da pesquisa e elaboração do curso de extensão, como pessoa ativa nesta busca.

Agradeço aos membros da banca pela disponibilidade e atenção.

Agradeço aos sujeitos que aceitaram participar da minha pesquisa, e também aos alunos que fizeram parte do curso de extensão.

Agradeço aos alunos que tive durante esta jornada, visto que são parte da necessidade da busca por melhoria profissional.

Agradeço aos meus professores da graduação e do mestrado, pela formação, exemplo e inspiração. Ao professor Glauker, particularmente, no fim de minha graduação e pela disponibilidade nos momentos de dúvidas.

Por fim, agradeço aos meus amigos Marcelo, Monalisa, Sheila, Suelen e Taylla, pela paciência, apoio e importantes momentos de descontração. A amiga Karen, sem a qual não estaria fazendo esses agradecimentos, por ter estudado comigo, por ter estado disponível para revisar meus textos, pelos incentivos e por ter me emprestado sua família, pessoas a quem também agradeço por todas as vezes que me receberam, todas as palavras amigas e apoio.

# Lista de Figuras

# Sumário

# Introdução

Ainda em 2010, iniciei minha participação no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID). Este programa foi criado pela CAPES exclusivamente para alunos que cursam graduação em cursos de licenciatura. Durante esse período, sua aplicação consistiu em utilizar um software de geometria dinâmica chamado GEOGEBRA, um aplicativo que combina conceitos de geometria e de álgebra e é escrito em linguagem Java, para auxiliar no aprendizado de geometria, possibilitando uma visão mais clara e dinâmica da matéria.

Visando a continuidade e aprofundamento dos meus estudos em Educação Matemática cursei, em 2012, a disciplina Resoluções de Problemas em Geometria, pertencente ao programa do Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora. Disciplina que me permitiu o aprofundamento dos conceitos relacionados as geometrias não euclidianas. Com o intuito de adquirir conhecimentos na área à qual pretendia seguir com minha pesquisa, optei por cursar essa disciplina.

Em fevereiro de 2013 iniciei minha trajetória profissional como professora de matemática do Ensino Médio para o supletivo. No fim desse mesmo ano, iniciei meu trabalho como professora do Ensino Fundamental, lecionando em instituições públicas, atividades que exerço até os dias atuais.

Avaliando os fatores, percebi a necessidade de investir na minha qualificação profissional. Diante disso, resolvi cursar um mestrado que combinasse, não somente, o papel de professora de matemática e educadora, mas que me fornecesse ferramentas para uma melhor compreensão dos paradoxos relacionados à qualidade de ensino, defasagem idade-série e interação professor-aluno. Nesse momento, fiz a minha escolha pelo Mestrado Profissional em Educação Matemática.

Ao final de 2013 fui aprovada na seleção para o mestrado, iniciando minhas aulas no início do semestre letivo de 2014.

Desde muito nova tenho profunda admiração pela geometria, sendo um dos motivos que me levaram a cursar Matemática. Até entrar na faculdade não conhecia nada diferente da Geometria Euclidiana, tanto plana quanto espacial, e a Geometria Analítica. Cursando a graduação, conheci outros tipos de geometria, embora não tenha cursado nenhuma disciplina sobre elas. Em 2015 meu orientador me apresentou uma geometria diferente: a Geometria Projetiva. Me encantou muito! Uma ciência que traduz muito a nossa realidade, nosso mundo, numa perspectiva distinta do modo euclidiano. Foi aí que resolvemos unir meus estudos do Geogebra com a Geometria Projetiva, desenvolvendo este projeto de pesquisa, aqui apresentado.

À medida que avançávamos, pesquisando, íamos acreditando que essa ciência poderia ser naturalmente apresentada como uma alternativa curricular ao que hoje é apresentado em salas de aula, visto que esta faz uma leitura muito próxima da realidade, quando por exemplo vemos as linhas do trem ao longe como paralelas se encontrarem, o que a geometria tradicional não compreende.

Assistindo ao vídeo, Brain Games - Bola de basquete - sombra[1], vemos que, a despeito do movimento de um objeto poder ser bem percebido, ele mesmo e um fundo contextual, a manifestação de sombras projetadas, distintas, enfatizam a importância delas como componente, também contextual, dando mais referências, portanto, mais possibilidade de compreensões.

Neste vídeo, em particular, quando a sombra é mudada de posição, nossos olhos enxergam acontecimentos distintos, quando na verdade o original não tem sua trajetória alterada.

A coisa a partir de sua projeção. Até que ponto podemos recuperar o objeto original? Mas, até que ponto o objeto original é recuperável? Com essas perguntas, não estamos também questionando o estatuto do real (verdadeiro) que o pensamento euclidiano nos legou?

Pertenço a um grupo de pesquisa que acredita ser de suma importância que a história da Geometria Projetiva seja estudada e divulgada. Porém, reconhecemos as dificuldades de um ineditismo, até mesmo para nós, do tratamento projetivo, e, em imediato, há pouca literatura, em Educação Matemática existente, para sua compreensão e consecução escolar.

[1] Disponível em Brain Games. https://www.youtube.com/watch?v=dqgsDQEjDqA, acesso em 16/06/2016.

De certo modo, o texto que apresentamos mostra os caminhos que vimos trilhando para sermos, como pesquisadores, capazes de fazer propostas à comunidade científica.

Esta dissertação foi escrita mantendo uma estrutura em cinco capítulos, assim organizados: no Capítulo 1, Um Breve Histórico da Geometria Projetiva, fazendo um apanhado de nossa pesquisa. A pesquisa que nos deu norte e permitiu seguir, cronologicamente, com os estudos matemáticos e epistemológicos relacionados à ciência.

No capítulo 2, A Revisão de Literatura para Abarcar a Geometria Projetiva como Possibilidade curricular e tratamento Dinâmico, os textos lidos por nós, vão de encontro com nossos pensamentos, apresentando algumas alternativas de inclusão de tecnologias ligadas a informática, nas aulas e novas Geometrias.

No capítulo 3, A Pesquisa e o Caminho Metodológico, descrevemos a realização da pesquisa, montagem do curso de extensão e o desenvolvimento das atividades desse curso.

O capítulo 4 apresenta uma tabela, estruturada em cenas, com trechos das transcrições do curso de extensão e uma análise acerca dessas cenas.

Essa dissertação ainda é composta de um quinto capítulo, que traz as Considerações Finais e de anexos.

# Capítulo 1

# Um Breve Histórico da Geometria Projetiva

Conforme alegamos no texto do apresentado no VII EMEM (DETONI, A. R.; VIEIRA, M. D.; FIGUEIREDO, M. C, 2015) nosso grupo considerou que um estudo histórico deveria contribuir para uma compreensão mais ampla da Geometria Projetiva. Tínhamos em mãos um pequeno, mas significativo, acervo literário de Geometria, História da Matemática e afins, onde buscamos prefácios ou comentários e um primeiro sentido histórico, e já estrutural, de nosso objeto maior.

Mas, para dar mais atualidade e referencial a nosso estudo, valemo-nos de periódicos, com buscas em sites e portais eletrônicos institucionais. Tivemos dificuldade em encontrar informações que nos atendessem. As informações eram muito pontuais, biográficas e ou mesmo difusas, com referência à ciência, quando se falava em Geometria Projetiva. Criamos um enredo próprio de nossa compreensão, mesmo que sustentando-nos em muitos contribuintes.

O grupo se preocupou em fazer um apanhado histórico sobre a ciência. Nos atentamos com o desenvolvimento da Geometria Projetiva de seu início, com teoremas “soltos”, todos feitos com a pretensão de uma nova ciência, passando pelas necessidades de artistas, como os renascentistas, em criar obras mais uniformes e condizentes com a realidade das formas, tanto de figuras humanas, quanto os objetos retratados.

Neste texto, nos apropriamos seguidamente de fontes históricas em Eves (1963), Bell (1937), Godeaux (1936) e Klein (1984), que nos auxiliaram como fundamentos para fazermos nossas considerações, nem sempre pontualmente referenciadas.

Assim como a maioria das ciências, a Geometria Projetiva não tem um início cronologicamente linear. Ao longo dos séculos, aparece raramente até o seu marco como disciplina articulada, já no século XX.

Segundo nossos estudos, foi com Menelau[2], no século I d.C., que surgiu o primeiro momento da Geometria Projetiva, embora não se tenha relatos de que o mesmo tenha estudado conscientemente tal ciência ou mesmo se preocupado em postular algo novo. Essa afirmação é feita com base na proximidade de objetivos de seu mais famoso teorema, de Menelau, com o que busca essa "nossa" geometria. Tal teorema ficou esquecido por mais de 15 séculos, sendo redescoberto por Giovanni Ceva[3] em 1678, tendo sido também usado por outros geômetras.

Uma das apresentações do Teorema de Menelau pode ser a seguinte:

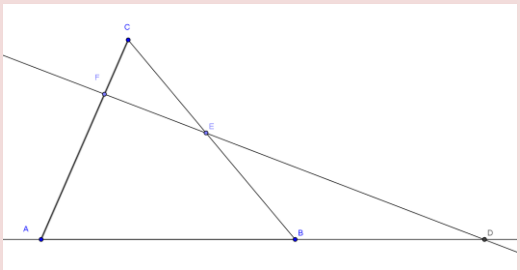
Teorema de Menelau:

Toda reta que corta as três retas suporte dos lados de um triângulo determina seis segmentos tais que o produto de três dentre eles, não tendo extremidade comum, é igual ao produto dos outros três.

Sejam três pontos *D, E* e *F* localizados respectivamente nas retas suportes dos lados AB, BC e CA de um triângulo ABC, e diferentes dos vértices. Se D, E e F são colineares então,

$$\frac{AF}{FC} \times \frac{CE}{EB} \times \frac{BD}{DA} = 1$$

Figura 1 – Teorema de Menelau




Fonte: Própria Autora

[2] Astrônomo e geômetra nascido em Alexandria, Egito, no século I. Era entusiasta da geometria clássica e criador do tradicional teorema que leva seu nome; escreveu várias obras de trigonometria e geometria. Universidade Federal de Campina Grande. http://www.dec.ufcg.edu.br/biografias/MenelauA.html, acesso em 20/02/2017.

[3] Matemático, físico, geômetra e engenheiro hidráulico italiano nascido em Milão, em 1648. Tem destaque em probabilidades e cálculos geométricos, lembrado pelo teorema de que leva seu nome ou das cevianas. "Ceviana" é um nome em homenagem a ele. Universidade Federal de Campina Grande. http://www.dec.ufcg.edu.br/biografias/GiovCeva.html, acesso em 20/02/2017.

Entendemos que, na verdade, soa mais projetivo o teorema recíproco a esse, resumidamente aqui: “se a razão do produto dos segmentos AF, CE e BD pelo produto dos segmentos FC, EB e DA é 1, os pontos D, E e F são colineares”, uma vez que a colinearidade é um objeto geométrico primaz da Geometria Projetiva, sendo um dos seus mais importantes invariantes.

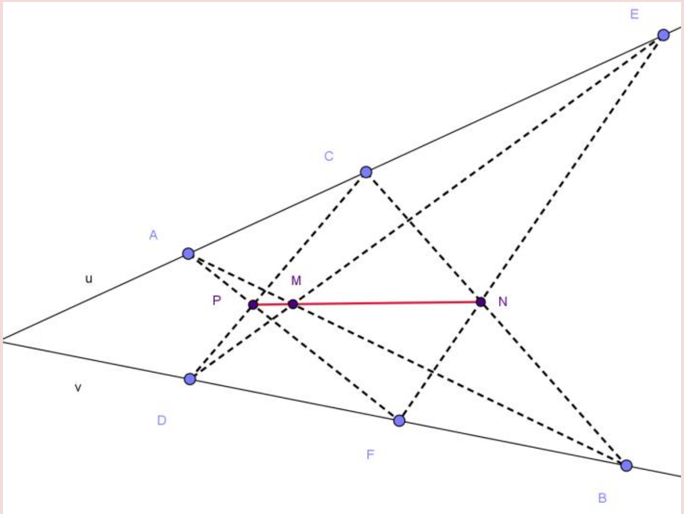
O segundo momento que podemos reconhecer como projetivo é quando Pappus[4] (290 d.C. a 350 d.C.) postula um Teorema, que leva seu nome. Aparentemente, Pappus não se deu conta da amplitude do que realizou, já que não compôs um conjunto teórico junto a ele. No século XVII, Pascal descobriu seu trabalho e generalizou esse resultado.

Uma formulação do teorema de Pappus pode ser:

Teorema de Pappus

Sejam as retas coplanares distintas u e v com dois conjuntos de três pontos distintos {A, C, E} $\subset$ u e {D, F, B} $\subset$ v . Então os pontos M, N e P que são respectivamente as intersecções das retas AB e DE, BC e EF, CD e AF são colineares.

Figura 2 – Teorema de Pappus




Fonte: Própria Autora

[4] Considerado o último dos grandes geômetras da antiga civilização grega e talvez nascido em Alexandria, em 290, pesquisador e autor de muitos textos sobre cientistas da antiga civilização grega. Descobriu vários teoremas precursores da Geometria Projetiva. Universidade Federal de Campina Grande. http://www.dec.ufcg.edu.br/biografias/PapusAle.html, acesso em 20/02/2017.

A demonstração desse teorema requer relações que resultem nesse novo objeto geométrico: a ideia de feixes de retas e a *razão cruzada*, uma relação métrica fundamental para a Geometria Projetiva. Sua importância é tanto maior, uma vez que esta Geometria prima por não ter invariantes de medidas lineares ou angulares, tal como se tem na métrica da Geometria Euclidiana.

No século XV, a Geometria Projetiva teve um avanço, com a busca de artistas da Renascença por obras com proposta estéticas baseadas em um "figurativismo" cada vez mais realista, introduzindo os conceitos de ponto de fuga e perspectividade.

> Porque pintores da Renascença foram impregnados com esta crença, eles lutaram por mais de cem anos para encontrar um esquema matemático que lhes permitissem descrever o mundo real tridimensional em uma tela bidimensional. Foi muita sorte que os pintores também eram arquitetos e engenheiros e, de fato, os melhores matemáticos do século XV (KLINE, p. 623, tradução nossa).

Demorou-se aproximadamente dois séculos para que as ideias renascentistas fossem formuladas matematicamente. No século XVII, Girard Desargues[5] (1591-1661), com o célebre e pioneiro trabalho sobre a teoria geométrica das cônicas, publicado apenas em 1639, o *Broullion Projet*, formalizam-se esses conceitos.

Além disso, Desargues publicou um tratado original sobre seções cônicas, aproveitando ideias de projeção, mas esse trabalho foi ignorado pela maioria dos matemáticos da época, apesar de ter chamado a atenção de Fermat[6] e Descartes[7]. Um fator que pode ter causado tanta falta de interesse por esse

---

[5] Matemático, engenheiro militar e arquiteto francês de Lyon, 1591 - 1661. É considerado um da fundadores da geometria moderna, com sua conceituação de Geometria Projetiva. Universidade Federal de Campina Grande. http://www.dec.ufcg.edu.br/biografias/GerardDs.html, acesso em 20/02/2017.

[6] Matemático francês, nascido em 1601, Pierre Fermat passou parte de sua vida como conselheiro do parlamento de Toulouse. A matemática moderna tem início com cinco notáveis contribuições do século XVII. Três destas levam o nome de Fermat: a geometria analítica de Fermat (1629) e Descartes (1637), análise combinatória (1654), particularmente com os trabalhos de Fermat e Pascal, que delineiam o cálculo de probabilidade e a aritmética superior, de Fermat (1630-1665). Universidade de São Paulo. http://ecalculo.if.usp.br/historia/fermat.htm, acesso em 13/02/2017.

[7] Advogado, filósofo, matemático (algebrista e geômetra por excelência) e físico francês nascido em Touraine, em 1596. Foi criador da doutrina do *cartesianismo* e considerado um dos fundadores da *filosofia moderna* e o *pai da geometria analítica*. Universidade Federal de Campina Grande. http://www.dec.ufcg.edu.br/biografias/ReneDesc.html, acesso em 20/02/2017.

trabalho foi a pequena tiragem, rapidamente esgotada. Também, é de se considerar o estilo bastante complexo com o qual o autor esboça as ideias básicas, especialmente as de um espaço projetivo. Somente no início do século XIX, com Jean Victor Poncelet[8] (1788-1867), as ideias arguesianas foram resgatadas.

A história da Geometria Projetiva passa pela busca de modelo astronômico mais moderno do que o desenvolvido por alguns estudiosos, tais como Aristóteles[9] e Ptolomeu[10]. Copérnico[11] desenvolveu o modelo heliocentrista, que foi aprimorado por alguns estudiosos, inclusive Johannes Kepler[12]. Os modelos não prescindem de considerar deformações sobre cônicas formas modelares para trajetórias cósmicas, e a projeção de cônicas sobre planos que não as contém, é uma questão científica que, abordada, gerou conhecimento projetivo.

Kepler compreendeu a importância do estudo unificado das cônicas e da conceituação de elementos infinitos. Foi ele quem desenvolveu a ideia de "ponto no infinito", o que acabou posteriormente possibilitando o desenvolvimento de um plano projetivo, especialmente no corpo teórico elaborado por Desargues.

---

[8] Engenheiro e matemático francês e nascido em Metz, em 1788. Foi um dos mais importantes matemático-geômetras de seu país. Convidado a servir, entrou para o corpo de engenharia do exército de Napoleão que lutou contra a Rússia (1812) e acabou prisioneiro durante dezoito meses (na Rússia - 1812). Na Rússia, durante cativeiro, começou a escrever um de seus trabalhos mais notáveis sobre Geometria Projetiva. Universidade Federal de Campina Grande. http://www.dec.ufcg.edu.br/biografias/JeanVict.html, acesso em 20/02/2017.

[9] Notável filósofo grego, nasceu em Estágira em 384, colônia de origem jônica encravada no reino da Macedônia. Aos 17 anos, foi enviado para a Academia de Platão em Atenas, na qual permanecera por 20 anos; inicialmente como discípulo, depois como professor, até a morte do mestre em 347 a.C. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. http://www.pucsp.br/pos/cesima/schenberg/alunos/paulosergio/biografia.html, acesso em 20/02/2017.

[10] Sábio grego do séc.II, estudioso e pesquisador de matemática, geografia e astronomia; nascido em Ptolemaida. Universidade de São Paulo. http://ecalculo.if.usp.br/historia/ptolomeu.htm, acesso em 20/02/2017.

[11] Importante matemático e astrônomo polonês, nasceu em 19 de fevereiro de 1473 na cidade de Torun. Foi ele quem, através de seus estudos e cálculos, percebeu e defendeu a tese de que a Terra, assim como os demais planetas, gira em torno do Sol, em uma teoria chamada de Heliocentrismo. Foi Copérnico quem deduziu, também, que a Terra gira em torno de seu próprio eixo. InfoEscola Navegando e Aprendendo. https://www.google.com.br/amp/www.infoescola.com/biografias/nicolau-copernico/amp/?client=ms-android-motorola, acesso em 20/02/2017.

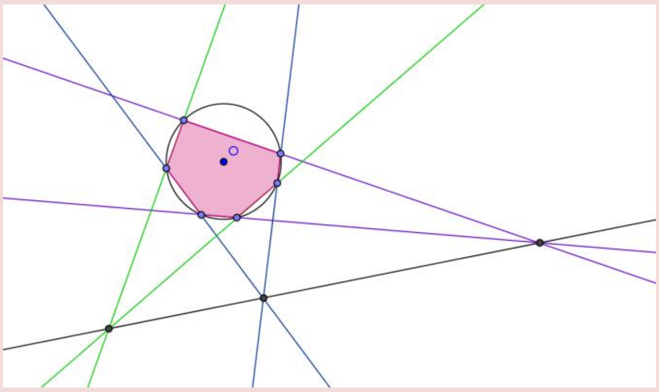
[12] Nasceu prematuro em dezembro de 1571. É considerado o pai da astronomia moderna e descreveu três leis à respeito da relação entre os corpos celestes, tangendo as relações entre direção, velocidade, áreas e eixos. InfoEscola Navegando e Aprendendo. https://www.google.com.br/amp/www.infoescola.com/astronomia/johannes-kepler/amp/?client=ms-android-motorola, acesso em 20/02/2017.

Tanto como astronomia, quanto por geometria estruturada, a Projetiva ganha em Blaise Pascal[13], contemporâneo de Desargues, um estudante de peso. Ainda aos 16 anos de idade, em 1640, ele desenvolveu um importante teorema da Geometria Projetiva, teorema que também levou seu nome. Uma interpretação, deste, pode ser a que se segue:

Teorema de Pascal:

Dado um hexágono inscrito em uma cônica, as retas que contiverem os lados opostos se encontram em pontos colineares.

Figura 3 - Teorema de Pascal



Fonte: Própria Autora

O teorema de Pascal é válido para todos os tipos de cônicas e, aparentemente, é uma generalização do Teorema de Pappus. “Será visto que esse resultado é independente da cônica dada destacando-se, também, o caso da cônica degenerada em duas retas concorrentes. Esse caso é conhecido na literatura clássica, como o Teorema de Pappus” (CATALDO, 2013, p.12) O Hexágono de Pascal contribuiu muito para a constituição da ciência projetiva, uma vez que é próprio dessa ciência uma amplitude maior da validade de seus conceitos. Apesar de o Teorema de Pascal ser também conhecido como

[13] Nascido em em 19 de junho de 1623, foi educado pessoalmente pelo pai. Um gênio da ciência. Matemático, físico, filósofo, pai da computação digital, da probabilidade, da física experimental, da hidráulica, do cálculo integral e diferencial, da geometria projetiva, gênio da literatura universal. Instituto Blaise Pascal Tecnologia e Educação. http://www.institutopascal.org.br/visao/institucional/blaise-pascal.php, acesso em 20/02/2017.

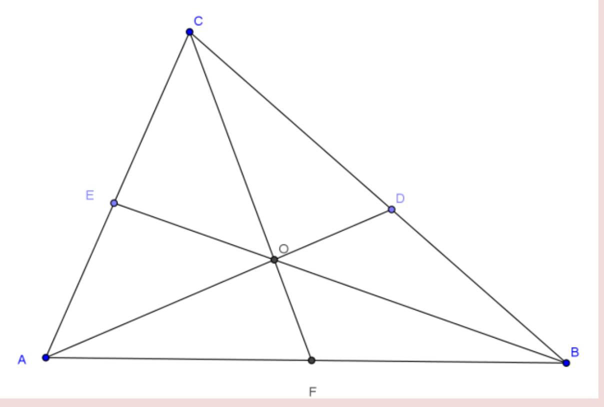
Hexágono de Pascal, a colinearidade apresentada em sua definição ainda se faz válida para o pentágono, o quadrilátero e o triângulo, inscritos na cônica.

Ainda no século XVII, Giovanni Ceva prova, em 1678, a validade do teorema conhecido por Teorema de Ceva, em sua obra *De lineis rectis.*

Teorema de Ceva:

Se 3 cevianas de um triângulo concorrem em um único ponto, DC.FB.AE = DB.FA.EC

Figura 4 – Teorema de Ceva




Fonte: Própria Autora

Na ilustração acima podemos ver alguns triângulos que se relacionam conforme o Teorema de Menelau, sendo esta a forma que utilizamos em nossos estudos para demonstrarmos tal teorema.

Sejam os triângulos ACF e BCF,

Δ ACF e a transversal EOB

$$\frac{CE}{AE} \cdot \frac{AB}{BF} \cdot \frac{OF}{OC} = 1$$

(1)

Δ CBF e a transversal DOA

$$\frac{AF}{AB} \cdot \frac{BD}{CD} \cdot \frac{OC}{OF} = 1$$

(2)

Daí segue:

$$\frac{OF}{OC} = \frac{AF}{AB} \cdot \frac{BD}{CD}$$

(3)

Substituindo (3) em (1), temos:

$$\frac{CE}{AE} \cdot \frac{AB}{BF} \cdot \frac{AF}{AB} \cdot \frac{BD}{CD} = 1$$

$$\frac{CE \, . \, AF \, . \, BD}{AE \, . \, BF \, . \, CD} = 1$$

Então,

CE . AF . BD = AE . BF . CD

Apesar de teoremas, tais como o de Menelau e de Ceva, hoje fazerem parte da Geometria Projetiva não encontramos nada que nos diga que eles tinham intenções diferentes das euclidianas, num sentido estrutural de se pensar o espaço.

O século XVIII aparentemente não foi muito produtivo para esta Geometria. Em nossas pesquisas, encontramos apenas algumas publicações feitas no início do século, por De La Hire[14] e Le Poivre[15].

Godeaux (1936) nos mostra pontos da produção desses matemáticos, e vemos que há uma busca de se construir métodos e procedimentos para a Geometria Projetiva:

> De La Hire concebeu um processo que permite passar de uma circunferência para uma cônica situada no plano da circunferência. O mesmo processo foi reencontrado por Le Poivre, que o expôs no seu Traíte des sections du cylindre et du cônes considérées dans le solide et pln avec des démonstrations simples et nouvelles, publicado em 1704 em Paris. (GODEAUX, 1936, p. 66)

Os estudos históricos apontam que, apesar da Geometria Projetiva ter sido usada antes e durante o Renascimento, só após o século XVIII esta ciência começou a abandonar a métrica, algo tão importante para o euclidianismo, e ir se tornando o que é hoje, uma ciência calcada em outros tipos de relação, tais como a colinearidade e a incidência.

Após o Renascimento os matemáticos foram paulatinamente criando novos conceitos, criando uma sequência de contribuições e, com isso fazendo a ciência ir encontrando sua estrutura. Lendo Godeaux, como na passagem abaixo, compreendemos isso:

> Le Poivre, num segundo tratado, publicado em Mons em 1708, utiliza, para estudar as secções cônicas, aquilo a que hoje chamamos dois planos perspectivos. São sobretudo as propriedades das tangentes que prendem a atenção do autor. (GODEAUX, 1936, p. 67)

---

[14] Matemático, astrônomo, físico, naturalista, arquiteto e pintor francês nascido em Paris, 1640 - 1718. Foi discípulo de Desargues. Universidade Federal de Campina Grande. http://www.dec.ufcg.edu.br/biografias/PhlipxLa.html, acesso em 20/02/2017.

[15] Matemático, ele nasceu em Mons em 1652. Ele estudou gnonomique, assunto sobre o qual ele planejava escrever um tratado, e estava interessado na geometria de Descartes. Publimath. http://publimath.irem.univ-mrs.fr/glossaire/LE021.htm, acesso em 20/02/2017.

Ainda no século XVIII Gaspard Monge[16], também demonstra conhecimentos em relação a esta ciência, mas acaba por desenvolver outra geometria, que ficou conhecida como Geometria Descritiva.

> Assim como as regras da perspectiva, utilizadas por pintores e arquitetos, levaram Desargues a introduzir novas noções em geometria, assim o traçado de planos, em particular de fortificações, levariam Monge (1746 - 1818) a criar a geometria descritiva. (GODEAUX, 1936, p. 67)

Essa citação reforça ser a Geometria Projetiva, que vai seguidamente ganhando uma autonomia. Teoria como um modo matemático, sempre vai ter uma carga genética de sua aplicabilidade à arte, especialmente à arquitetura.

É no século XIX que a Geometria Projetiva se consolida como uma ciência independente, a partir de uma publicação de Jean Victor Poncelet, intitulada *Tratado das Propriedades Projetivas das Figuras,* no ano de 1822. Por isso, escorando-se talvez no vazio informacional, com relação ao século XVIII, vários autores afirmam ter sido Poncelet o pai dessa ciência, como podemos ver em Bell (1937, p. 208).

Poncelet foi um dos estudantes da Escola Politécnica de Metz. Nos primeiros anos do século XIX, ele luta com as forças francesas na Rússia, o que acaba o fazendo prisioneiro russo, assim permanecendo por alguns anos, “Feito prisioneiro em 18 de Novembro de 1812 e levado para Saratov, propõe-se, sem notas nem livros de qualquer espécie, reencontrar o que lhe tinha sido ensinado sobre geometria” (GODEAUX, 1936, p. 69). Essa conhecida passagem é quase uma alegoria sobre um matemático que, desprovido de todos os conceitos geométricos conhecidos, ao se propor em tarefa, acaba criando um pensamento geométrico alternativo.

Segundo Godeaux, Poncelet é responsável por algumas noções básicas sobre esta ciência, tais como a que diz que o conjunto de pontos do infinito, que são elementos ideais, devia ser considerado como uma reta.” (GODEAUX, 1936, p. 74-75). Essa observação sobre Poncelet deve ser considerada ressalvando-

---

[16] Matemático e professor francês nascido em Beaune, em 1746, Borgonha, criou os fundamentos de vários ramos da geometria moderna. Universidade Federal de Campina Grande. http://www.dec.ufcg.edu.br/biografias/GaspardM.html, acesso em 20/02/2017.

se o que já dissemos anteriormente acerca da primogenitude dos ideais em Desargues, que em seu *tratado* já teoriza acerca de pontos e retas no infinito.

Após Poncelet, outros grandes nomes surgiram na geometria projetiva, como Michel Chasles[17] (1798-1867). Este usou seu 'método de características' e seu 'princípio de correspondência’ para resolver inúmeros problemas e as soluções foram publicadas em *Comptes Rendus*. O problema da atração de um elipsóide num ponto externo foi por ele resolvido em 1846.

Outros nomes bastante relevantes na concretização da Geometria Projetiva como ciência, foram Jacob Steiner[18] (1796-1863), Karl Christian Von Staudt[19] (1798-1867), que aqui tomamos brevemente.

Steiner também apresentou trabalhos ligados às áreas de analítica, cálculo e curvas algébricas, o que reforça a constatação de que a geometria projetiva vai, aos poucos, ganhando tratamento fora do sintético, isto é, das formas geométricas puras.

Finalizamos aqui nossa pesquisa histórica sobre a Geometria Projetiva, uma vez que temos a intenção de lidar com esta ciência, em suas formulações sintéticas. Estando cientes de que a partir do início do século XX a Geometria Projetiva vem sendo desenvolvida algebricamente, sendo constituinte de uma das direções de pesquisa em matemática superior.

Reforçando aqui, que para a ciência que estuda o paralelismo não é conveniente o projetivo; para a Geometria Projetiva as retas sempre se encontram mesmo que em uma longa distância ideal sobrevenha. “Linhas

---

[17] Francês, nasceu em uma família católica, 15 de novembro de 1793 em Epernon. Chasles frequentou o Lycée Impérial para a sua educação secundária. Então, em 1812, incorporou a École Polytechnique em Paris. .

[18] Matemático e um dos maiores geômetras da história nascido em Utzenstorf, Suíça, em 1796, teve grande influência e destaque no estudo dos triângulos e círculos. Notabilizou-se, também, pela grande quantidade de trabalhos publicados no *Journal de Crelle,* inclusive *Systematiche entwicklungen* (1832), sobre geometria projetiva baseada em considerações métricas. Universidade Federal de Campina Grande. http://www.dec.ufcg.edu.br/biografias/JakobSte.html, acesso em 20/02/2017.

[19] Karl nasceu em 1798. Terminou seus estudos no Gymnasium em 1817 mas não foi à universidade imediatamente, permanecendo em Ansbach. Estudou na Universidade de Göttingen durante três anos, frequentando vários cursos de Gauss. University Of St Andrews, Scotland. http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Von_Staudt.html, acesso em 20/02/2017.

paralelas se encontram no infinito. O infinito não acaba. O infinito é nunca. Ou sempre.” (CAIO FERNANDO ABREU)[20]

---

[20] Disponível em Pensador. https://pensador.uol.com.br/frase/Nzk3Mjc5/, acesso em 02/05/2016.

# Capítulo 2

# A Revisão de Literatura para abarcar a geometria projetiva como possibilidade curricular e tratamento dinâmico

Neste capítulo apresentamos uma revisão de literatura que orientou nossa proposta de investigação: O Ensino da Geometria Projetiva com o auxílio do Geogebra.

Para a construção deste capítulo, nos deparamos com uma dificuldade no que se refere a literatura da Geometria Projetiva. Em geral encontramos textos que fazem referência a assuntos específicos sobre o tema, e não algo mais abrangente.

Muito se fala sobre o uso das tecnologias em sala de aula como meio facilitador da aprendizagem, não nos dando conta, como diriam Borba e Penteado (2012), que a mídia ‘papel e lápis’ sempre esteve presente em nossa educação. Estes autores trazem, em seu livro, um pensamento de Levy (1993) que diz que as histórias das mídias acompanham a história da humanidade, Levy afirma que lápis-e-papel também formam uma tecnologia.

> Em outras palavras, lápis-e-papel é tecnologia que estende a nossa memória, como coloca Levy (1993). Esse autor enfatiza que a dicotomia entre técnica e ser humano na prática nos desarma, pois não permite que vejamos como a história da humanidade está sempre impregnada de mídias, e que devemos de fato nos preocupar com as transformações do conhecimento nesse momento em que uma nova mídia, no caso a informática, está se tornando cada vez mais presente em nosso cotidiano. (BORBA; PENTEADO, 2012, p. 47)

Mas quando nos referimos ao computador como tecnologia podemos notar uma grande resistência por parte de muitos professores, que sequer tentam seu uso. Segundo Borba e Penteado (2012, pg. 47-50), há professores que desistem quando percebem a dimensão da zona de risco, seja por falta de conhecimento no uso de computadores, por situações precárias dos laboratórios das escolas, falta de manutenção das máquinas e até mesmo pela existência de pouquíssimos cursos preparatórios para os docentes. Existe também um grupo que reluta no uso da máquina receando sua substituição, o que de forma alguma tem validade ao nosso entendimento, o que pode ser reforçado por Tikhomirov (1981), quando ele afirma que computadores não substituem ou complementam os seres humanos: os computadores reorganizam o pensamento.

Acreditamos que o uso de mídias nas escolas, como o computador são de fato, um auxilio extremamente positivo, pois facilitam a visualização dos objetos de estudo, além de despertar um maior interesse por parte dos alunos, já que as atividades que envolvem o uso do mesmo acabam se transformando em algo que sai da rotina dos estudantes. Em escolas, uma ida ao laboratório de informática já agrada, transforma. Em nosso trabalho escolhemos o software Geogebra como meio facilitador de nossas pesquisas, sendo este um software de matemática dinâmica, para todos os níveis de educação, e reúne geometria, álgebra, planilhas, gráficos, estatísticas e cálculo.

Henriques (2000) ressalta que em atividades restritas ao uso do papel os alunos necessitam de lápis, borracha, régua e compasso, e que para atividades propostas, nestes ambientes, podemos usar ferramentas que já se encontram no software, trazendo assim alguns facilitadores. As construções neles são menos complicadas do que no lápis-e-papel. Além desta facilidade, ele afirma, também, que neste micromundo podemos redefinir objetos, deformar figuras, visualizar o lugar geométrico, movimentar as figuras, validar propriedades e fazer leituras automáticas da área das superfícies.

> É interessante notar, que quando se pode trabalhar no papel usando lápis e borracha, geralmente a análise é centrada num objeto estático, e o aluno se limita àquele objeto sobre o papel, enquanto que nos ambientes computacionais, em particular no Cabri II, o aluno pode analisar esse objeto, num ponto de vista epistemológico e didático mais abrangente, olhando não somente o objeto isoladamente mas, sim percorrendo a sua classe em função da manipulação direta em tempo real. (HENRIQUES, 2000, p. 67)

A exploração pode levar a uma facilitação na aprendizagem de conteúdos matemáticos, principalmente na apresentação da geometria. Com a experimentação o aluno desenvolve a percepção do mundo em que está inserido, descrevendo-o, representando-o e aprendendo a localizar-se nele, um facilitador na compreensão da ciência em questão.

Em seu texto, Noss e Hoyles (1996) destacam a importância do uso do computador no processo de ensino e aprendizagem quando contam uma experiência vivida por eles. Estavam construindo um paralelogramo a partir dos pontos médios de um quadrilátero qualquer, e para tal construção usavam o Cabri. Uma primeira atitude foi usar o software repetindo os métodos tradicionais. Resolveram explorar o Cabri e começam a usá-lo “pesquisando empiricamente tipo tentativa e erro”. Desta forma vários questionamentos foram surgindo, tais como “Por que esse vetor é fixo? De que ele depende? Mais crucial, notamos que essa invariância tenha mudado completamente nossa perspectiva do velho teorema” (NOSS; HOYLES, 1996, Tradução nossa) levando a conjecturas não notadas anteriormente.

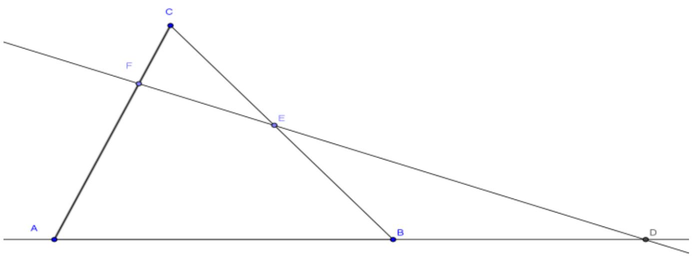
> Depois da oficina, muitos participantes têm evitado o lápis e papel, e foram direto para a preferência do computador para mediar a solução do problema. Essa escolha foi feita depois da atividade que usou o Cabri com a rede de conexões de objetos geométricos e suas propriedades. (NOSS; HOYLES, 1996, Tradução nossa)

Nosso grupo de pesquisa, assim como na experiência descrita por eles, apresenta um curso com o auxílio do uso de um software de matemática, o Geogebra. Fizemos a escolha de usá-lo não apenas para facilitar as construções que seriam pedidas como atividade, mas também para que os recursos disponíveis no software permitissem uma maior visualização, gerando um aumento nas discussões a respeito dos temas. Seria necessário, também, um número menor de interferências, permitindo que os participantes do curso pensassem com mais independência sobre as tarefas, fizessem sua conjecturas e obtivessem conclusões, inclusive diferentes das dos pesquisadores.

A presença de um Software Gráfico, como o Geogebra, pode gerar um aumento da capacidade de visualização, já que nele pode-se inserir cores, traços mais ou menos fortes, pontilhados. Cremos que lidar com esses recursos, mais do que facilitadores, são apontadores para ferramentas de linguagem que naturalmente abrem intenções epistemológicas distintas de um pensamento axiomatizado.

Acreditamos serem estes softwares grandes facilitadores para várias ciências, inclusive para a Geometria Projetiva. Com o auxílio do Geogebra podemos ver, no Teorema de Menelau, por exemplo, que ao “deixarmos” a reta EF paralela à reta AB, o ponto de interseção criado pelo encontro dessas retas vai desaparecendo no campo visual, abrindo oportunidade para se fazer conjecturas e análises. Este comportamento do software nos sugere que o Geogebra se adapta mais às Geometrias Não Euclidianas do que à Geometria Euclidiana.

Figura 5 – Teorema de Menelau




Fonte: Própria Autora

Ainda na defesa dos Softwares Gráficos como facilitadores, temos o uso do Geogebra na apresentação do Teorema de Pascal, em nosso curso onde, mediante indagação dos participantes, sobrepusemos alguns pontos para verificar a veracidade do teorema também para pentágonos, quadriláteros e triângulos, ao invés de construirmos outras três figuras.

Em nossa pesquisa, falamos sobre a possibilidade da introdução de novas geometrias no ensino das escolas, em particular a Geometria Projetiva, para que possam ser inseridas novas ideias, pensamentos, permitindo aos estudantes outras formas de pensar e de ver a Geometria. Watermann e Franco (2016) fizeram, em 2008/2009, uma pesquisa que vai de encontro a esta nossa ideia.

O estudo desses autores foi realizado com crianças da oitava série do ensino fundamental de uma cidade do estado do Paraná, o que difere um pouco de nossa pesquisa, visto que nosso público alvo são alunos da licenciatura em matemática. O estudo pretendia divulgar a geometria projetiva. Para isso, apresentaram a história da Geometria Projetiva e aplicaram algumas atividades, usando um laboratório de ensino, o que novamente se aproxima de nós, que usamos um laboratório de informática pra apresentação de um curso, com os mesmos objetivos, onde usamos o Geogebra.

Nos estudos de Watermann e Franco foram apresentadas noções de perspectiva, ponto de fuga, onde usaram fotos e desenhos. Entendemos que esses objetos se aproximam mais do projetivo, tratados como estando juntos à representações gráficas, não sendo da intenção desses autores se delongarem em teoremas geométricos. Porém, seu trabalho aponta uma abertura curricular alternativa, para o ensino de geometria.

> Uma sugestão de alguns professores do GTR foi que a Geometria Projetiva devesse ser introduzida junto com as noções de Geometria Euclidiana logo que o aluno começa a estudar ponto e reta, pois ela é mais palpável para o aluno, e já poderia fazer a apresentação da geometria que é de Euclides e a não Euclidiana. (WATERMANN; FRANCO, 2016, p. 21)

Para Ponte, Brocado e Oliveira (2005) a Geometria é bastante próspera desde os anos inicias na escola para atividades de natureza exploratória e investigativa, e sua exploração pode contribuir para uma compreensão de relações geométricas, contribuindo também para que haja uma percepção de aspectos essenciais da atividade matemática. Apresentando exemplos que evidenciam a pertinência das investigações geométricas no currículo de matemática, tais como dobragens e cortes, permitindo que os alunos façam suas próprias descobertas, o que pode facilitar a aprendizagem.

> É possível conceber tarefas adequadas a diferentes níveis de desenvolvimento e que requerem um número reduzido de pré-requisitos. No entanto, a sua exploração pode contribuir para uma compreensão de fatos e relações geométricas que vai muito mais além da simples memorização e utilização de técnicas para resolver exercícios-tipo. (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA, 2005, p. 71)

Kline nos ajuda a pensar a presença da Geometria nos currículos quando afirma que “talvez o melhor exemplo seja o conhecimento de que a geometria não euclidiana é aplicável ao espaço físico” (1976, p. 68), o que reforça uma apresentação de novas geometrias na escola, tais como a Geometria Projetiva, que pode ser de grande proveito para um pensar científico.

Em apoio a nossa ideia de que a Geometria Projetiva possa ser inserida no currículo escolar temos Dienes e Golding (1975), que nos diz, “Achamos que as crianças devem estudar, de início, transformações mais gerais, que não conservam as distâncias, nem os ângulos, só depois disso, lhes apresentaremos em pormenores, as isometrias.” (DIENES; GOLDING, 1975, p. 4). São autores de um livro-proposta onde apresentam um estudo da Geometria que consideram ser um curso completo da mesma, para o uso de professores e alunos da escola primária. O estudo em questão foi baseado em experiências relativas ao espaço. Experiência que as crianças deverão ter feito durante os dois primeiros anos de estudos, e uma das Geometrias presentes neste livro é a Geometria Projetiva.

As ideias desses dois autores, sabemos, não estão ainda em evidência. Citamos uma publicação que, a sua tradução para o português no Brasil, foi feita dentro de um esforço, com intenções até políticas, por uma aderência do ensino brasileiro a um movimento a partir dos EUA. É uma obra, também, inserida no espírito do movimento da Matemática Moderna, que, dentro de sua intenção de promover inversões didáticas, na geometria propunha um troca de ordem cronológica no estudo de objetos geométricos: o projetivo deveria vir antes do euclidiano.

O momento do movimento da matemática moderna, em que foram amplas as propostas a respeito de mudanças curriculares foi iniciado entre o fim dos anos de 1950 e início de 1960. Uma das mudanças propostas neste novo currículo se relaciona com o ensino de geometria, que segundo alguns autores já se encontrava com problemas, especialmente ligados a uma visão muito arcaica de tratamento e conteudista por excelência.

Muito se fala sobre o fracasso da geometria durante o Movimento da Matemática Moderna (MMM) no Brasil. A geometria foi deixada de lado por diversas vezes, apesar de que, para Célia Leme (2009) a crítica ao ensino de geometria nos tempos do MMM é uma crítica ao ideário do mesmo, mas não propriamente às práticas pedagógicas que o ensino de geometria incorporou, ainda mais quando se focam as discussões sobre as transformações geométricas, sem olhar para como essa proposta é inserida na cultura escolar.

> Entretanto, acreditamos que essas análises contribuíram para a construção de uma representação sobre o ensino de geometria: o MMM, por propor um ensino de geometria segundo a abordagem das transformações geométricas, é um dos responsáveis pelo abandono desse ensino a partir dos anos de 1960, assumindo desta forma o papel de “culpado” pelos problemas decorrentes do ensino de geometria nas últimas décadas do século XX. (LEME DA SILVA, 2009, p.3)

Para Lorenzato (1995), existem duas razões principais para isso, em primeiro lugar vários professores não tinham conhecimento necessário para passar o conteúdo adiante, somado a uma grande valorização do livro didático, que em sua grande maioria, trazia o conteúdo em seu fim, o que contribuía muito para não apresentação do tema aos alunos. Um dos motivos para a falta de conhecimento dos professores era a inexistência da abordagem da geometria nos cursos de formação dos mesmos.

> E mais: somente 8% dos professores admitiram que tentavam ensinar Geometria aos alunos. Considerando que o professor que não conhece Geometria também não conhece o poder, a beleza e a importância que ela possui para a formação do futuro cidadão, então, tudo indica que, para esses professores, o dilema é tentar ensinar Geometria sem conhecê-la ou então não ensiná-la. A segunda causa da omissão geométrica deve-se à exagerada importância que, entre nós, desempenha o livro didático, quer devido à má formação de nossos professores, quer devido à estafante jornada de trabalho a que estão submetidos. (LORENZATO, 1995, p.3)

Nessa discussão, interessa-nos perceber, com esse passado recente e os relatos de pesquisadores aqui trazidos, as implicações não simplistas que advém quando se intenciona mudar práticas curriculares.

Já para Pavanello (1993) o alegado abandono pode ser explicado devido o contexto histórico-político; a autora afirma também que apesar da geometria ter sofrido um abandono geral, a situação foi ainda pior nas escolas públicas, já que a Lei 5692/71 permitia que o professor elaborasse seu currículo, baseado nas necessidades dos alunos, o que permitiu que muitos abandonassem a ciência. Para a nossa proposta, que se revestirá de um Produto Educacional, esses apontamentos históricos servem para compreender mais atenciosamente a problemática da formação do professor quando se intenciona trazer algo novo para sua prática.

Muito se fala, também, que o abandono da geometria deve-se ao fato de como esta é apresentada, tema muito discutido em Kline (1976) quando ao se referir ao sistema de ensino estadunidense afirma haver um fracasso no que se refere ao novo currículo apresentado pelos defensores da Matemática Moderna. Ele defende que, no currículo tradicional, também existem imperfeições. Para estas afirmações, ele fez uma análise comportamental de alunos e professores na sala de aula, analisando também os fundamentos metodológicos de ambos os currículos.

> O currículo tradicional tornou-se também demasiado tradicional. Alguns tópicos que receberam considerável ênfase no decorrer das gerações perderam valor mas continuam sendo mantidos. ... Além das poucas falhas que já descrevemos o currículo tradicional sofre do defeito mais grave que se pode lançar sobre qualquer currículo: falta de motivação. (KLINE, 1976, p. 22 e 23)

Consideramos essa contribuição kleineana quando nos dispomos a pensar sobre o tratamento que deveríamos dar aos objetos da Geometria Projetiva, e como isso pode ser decisivo numa proposta que solicita uma alternância ao tradicional. Aqui, vemos que nossa intenção a um tratamento sintético pode ser proveitoso, a partir de uma relação efetiva mais direta que os alunos têm, em geral, com figuras e relações que eles podem trabalhar com sentidos mais próximos a uma visualização e movimentos próprios, além de um pensamento mais global sobre uma situação espacial posta em tarefa de aprendizagem.

# Capítulo 3
# A PESQUISA E OS CAMINHOS METODOLÓGICOS

Nesse capítulo tratamos da pesquisa em si e das metodologias aplicadas. Explicamos a Questão de Investigação, nossa metodologia de pesquisa e como desenvolvemos as atividades aplicadas.

## 3.1 A Questão de Investigação

Em nossa pesquisa nos apoderamos da Fenomenologia como referencial teórico metodológico. Iniciamos nossa compreensão com Van Manen:

> Fenomenologia é, por um lado, descrição do vivido na qualidade da experiência vivida e, por outro, descrição do significado das expressões da experiência vivida. Os dois tipos de expressão parecem um tanto diferentes, no sentido que a primeira é uma descrição imediata do mundo-vida enquanto vivido, enquanto o segundo é uma descrição intermediada (ou mediada) do mundo-vida enquanto expressado em forma simbólica. (VAN MANEN, 1990, p.25).

Essa introdução sobre o sentido da fenomenologia nos fala quando pensamos que não basta, especialmente numa pesquisa de campo com sujeitos, observar um acontecimento em si, mas, considerar o que os sujeitos que vivenciam uma experiência dizem sobre essa vivência. Portanto, temos como opção metodológica, que estarmos juntos a eles na experiência, assim como cuidar de considerar a expressão deles, em alguma forma simbólica.

Nossa questão de investigação é do tipo, “como essas vivências ocorrem ou como se dá o tempo vivido em tal contexto a respeito de tal e tal vivência” (BICUDO, 2011, p. 38)

A interrogação de pesquisa é parte muito importante do trabalho, norteando o rumo daquela. Segundo Bicudo (2011), “As considerações apresentadas indicam que a interrogação/pergunta/problema assume destaque na investigação filosófico-científica”, (idem, 2011, pg. 22), e entende-se como ponto crucial da pesquisa a interrogação e seu esclarecimento.

Uma vez que nosso grupo de estudo se pôs a pesquisar sobre possíveis modos distintos dos usuais currículos escolares de geometria, e, ao abraçar o horizonte da Geometria Projetiva, e como esse horizonte pode ser habitado pedagogicamente, ele se colocou como fenômeno: uma intencionalidade se fez, fazendo nos dirigirmos para a sua compreensão genuína.

Com os significados históricos da ciência e uma compreensão do panorama da problemática do ensino de Geometria, ganhamos aberturas de horizontes para nossas significações, que, no entanto, permaneceram abertos no que fazer, como empreender curricularmente o projetivo, e como ele se mostra a um futuro professor e atual estudante da geometria.

Com esses incômodos, partiremos para compreender *COMO A GEOMETRIA PROJETIVA PODE SER UMA PRESENÇA CURRICULAR, A PARTIR DE SUA PRESENÇA NA FORMAÇÃO DO LICENCIANDO EM MATEMÁTICA.*

## 3.2 A Metodologia da Pesquisa

Desenvolvemos um Curso de Extensão com duração de 20h, chamado Exploração do Espaço Projetivo, em que pudéssemos fazer uma introdução à Geometria Projetiva, objetivada com atividades envolvendo, diretamente, tópicos principais.

As atividades foram, sobremaneira, desenvolvidas em uma mesma sala da aula equipada com recursos informáticos; algumas tarefas foram solicitadas em tempo complementar, individualmente. Propusemos trabalho em duplas, uma vez que acreditamos que a atribuição compartilhada de significações dá a cada um a oportunidade de uma articulação, já inicial, mais trabalhada, ao fomentar situações em que os sujeitos possam manifestar suas percepções acerca de estar com a geometria projetiva.

Cuidamos em gravar audiovisualmente as sessões, uma vez que o vivido se põe em várias dimensões, e esse modo de gravação de dados, apesar de nunca trazer o vivido em completo, permite, após e à inspeção dos investigadores que estiveram presentes nas sessões, a oportunidade de mais riqueza dimensional para transcrever esses dados.

Para o curso, tivemos muito cuidado na escolha destas atividades, totalizando 11. Preocupamo-nos em varrer os conceitos básicos desta geometria chegando até razão anharmônica. Uma dificuldade, foi escolher uma sequência de atividades que, didaticamente, pudessem ser, ao mesmo tempo, suficiente para uma ordem lógica de sentidos matemáticos, cabíveis para a compreensão dos sujeitos da pesquisa que, provavelmente, nunca lidaram com a geometria projetiva, e, ao mesmo tempo, significativos para os fins de produção de dados de uma pesquisa de campo.

Estamos chamando aqui ´atividades´, situações problemas individualizadas em um tópico definido, propostas textualmente, podendo o texto ser acompanhado de uma ilustração gráfica, até mesmo explorada pela dinamicidade do software. Nossa intenção era fazer proposições de tarefas nas quais possíveis soluções demandassem uma sequência de argumentações geométricas menos imediatas. Obviamente, quando a atividade travestia a apresentação de um teorema, essa intenção não se verificava fortemente.

Parte da escolha dessas atividades se deve a nossa participação nas aulas de uma disciplina de graduação, Tópicos de Geometria. Fizemos uma sessão com algumas atividades piloto e obtivemos respostas animadas dos alunos da turma. Esse piloto se transformou no curso que projetamos, dando um norte, uma medida para o que seria necessário para prosseguir.

Nos enunciados dessas atividades, preocupamos em apresentar a palavra “cônicas” em vez de apenas “circunferência”, já que os princípios projetivos se valem para todas as cônicas e não apenas para um formato. Preocupamo-nos também que as construções fossem feitas sem o uso do compasso, visto que a Geometria Projetiva e considerada a Geometria da Régua.

Como dissemos, nosso grupo escolheu o Geogebra para a realização destas atividades, pois consideramos, este, um meio facilitador tanto para as construções como para a visualização destas, além de ser um software gratuito e de fácil download.

A proposta que temos sobre atividades abertas e investigativas, bem como a própria intenção de estar com os sujeitos em situação de construção de significados que eles atribuíram, lançando luzes sobre a questão que carregamos, nos solicita uma atitude de não predeterminação sobre resultados. Consideramos Ponte, Brocado e Oliveira (2005), para o qual investigações geométricas contribuem para percepção de aspectos matemáticos. Deixando claro que uma investigação se faz procurando entender o que, ainda, não se conhece.

Entendemos ser uma atitude fenomenológica, aquela que nos dispõe um ambiente de abertura, sem certezas hipotéticas e nos leva a sermos testemunhas do surgimento daquilo que, para nós, seriam as verdades constituídas pelos sujeitos que significam e por nós, que acolhemos os significados em nossa intenção posta no que focamos com nossa interrogação.

A proposta de uma pesquisa qualitativa em bases fenomenológicas, assim como exposta em Bicudo (2011), vem ao encontro de nossas expectativas metodológicas. Isso porque estamos lidando com uma proposta em cima de conteúdos não usuais em nossa prática de ensino, e de presença curricular não instituída, o que nos deixa expostos a possibilidades que ainda não conhecemos seus limites.

Enfrentar o novo, nos predispõe a ouvir, uma vez que a vivência nas atividades propostas é um dos principais interesses. Colocamos o foco de nossa questão em estado de fenômeno, isto é, não como uma coisa pré-arranjada, mas a constituir-se. A constituição, isto é, a estrutura do como a geometria projetiva pode ter presença curricular, se revelou a partir da experiência com os sujeitos.

Escolhemos trabalhar sempre em grupo, pois assim poderíamos observar o encontro e o diálogo das pessoas investigando alguns temas. Em grupo, os participantes podem trocar ideias, fazer conjecturas, chegar a conclusões que talvez não conseguissem sozinhos. “Assim, não há um sujeito que projeta o espaço a partir de si, nem há um espaço prévio, para a acolhida do sujeito. Consoante com outros pensadores fenomenólogos, Heidegger diz que o espaço é um encontro” (DETONI, 2014).

Do material gravado em áudio/vídeo, propõe-se transcrições escritas. Apesar de esse momento ser mais técnico, ao transcrever já fazemos escolhas e interpretações. Para que elas reflitam o real vivido, é necessário suspendermos nossos pré-conceitos. Sempre mantendo a questão de investigação norteando o trabalho, registrarmos em palavras o que foi vivido em atos globais, de compreensões e manifestações, por parte dos sujeitos.

Conforme as ideias de Detoni e Paulo (2011), vivemos o entendimento que os sujeitos se manifestam com conjuntos de falas que, isoladamente, não compõem uma ideia completa, visto que “as falas dos sujeitos articulam significados nunca pontuais e estritamente subjetivos” (DETONI; PAULO, 2011). Uma avaliação completa inclui além das falas, gestos e olhares dos sujeitos.

Propomos elaborar uma tabela para organizar um primeiro movimento de nossas análises. A primeira coluna será composta por transcrição de cenas, chamadas por esses autores acima de *cenas significativas*, que se destacam nas transcrições das filmagens feitas durante o curso dado pelos pesquisadores. Na segunda coluna nós vamos inserir uma explicitação do transcrito já em nossa linguagem, sem perder os significados do contexto em que são ocorridas as manifestações. A terceira coluna, de modo propositalmente conciso, é onde devem aparecer as *ideias* que os sujeitos nos possibilitam ver claro, e que, segundo nossa interpretação, apareceram como primeiras conclusões de suas manifestações. Por isso, conforme os teóricos da fenomenologia também o fazem, chamamos esse movimento de **análise ideográfica**.

Essas ideias são singulares, e vêm de manifestações singulares dos sujeitos. Quando elas se repetem, inclusive ganhando mesma nominação, não é opção nossa de tachar uma riqueza das singularidades, mas, queremos identificar recorrências que ratificam-se umas às outras.

Cada **ideia** será tarjada em uma cor. Esta cor se repete para ideias distintas, mas expressivas de manifestações de mesmos aspectos. Assim, por exemplo, todas as manifestações de objetos projetivos feitos, na espontaneidade esperada pelos sujeitos, ganham a cor amarela. Com essa escolha de tratamento dos dados, queremos preparar uma primeira transição de análises, da ideográfica para uma **análise nomotética**, uma vez que o colorido usado é um primeiro passo para uma generalização, correspondida já por um agrupamento.

As ideias se agrupam, desse modo, num nome que damos, numa primeira convergência. Os grupos, por sua vez, se juntam em grupos mais abrangentes, e esse novo movimento de análise nos permite dar nomes mais gerais do que seriam convergências de manifestações dos sujeitos que dão estrutura ao fenômeno que estudamos. Ao dar nomes, que devem ser reconhecidos por nossa comunidade acadêmica, procedemos como nas bases teóricas fenomenológicas se nomina, como já indicamos, de **análise nomotética**.

Os nomes resultantes dessas últimas convergências seriam categorias científicas que erigimos como a caracterizar o fenômeno. São categorias abertas, tanto porque, assumimos, são frutos de interpretações nossas e também não têm o poder de explicar o fenômeno, enquadrando o que responderia nossa questão de investigação. São, apenas, modos de descrevê-lo, agora em nível mais articulado, demonstrando que estamos em outro patamar de compreensão daquilo que nos incomodava como questão de investigação.

Para essa generalização nomotética, trazemos um texto que expõe nossa visão de convergências ocorridas, no qual lembramo-nos, e aos nossos leitores, a origem delas nas ideias dos sujeitos. Com isso afirmamos que as convergências só se sustentam com o passado significativo que as constituiu.

## 3.3. Montando as atividades

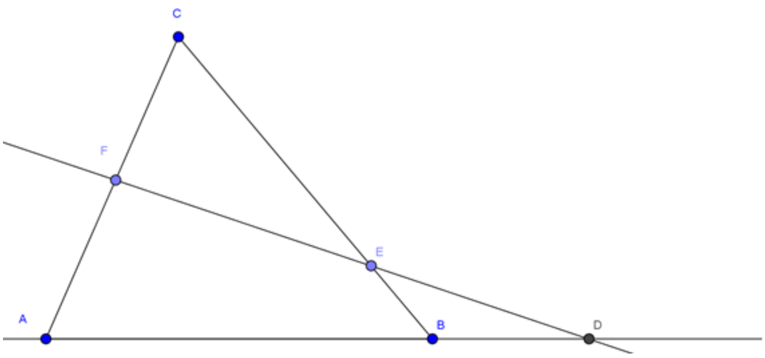
O conjunto de atividades proposto, para ser apresentado no curso de extensão, teve o intuito da produção de dados para respostas à interrogação da pesquisa de mestrado. A maior parte dessas atividades foi projetada para ser realizada com o software de geometria dinâmica Geogebra. Preocupamo-nos em varrer os conceitos básicos desta geometria, chegando até a razão anharmônica. O princípio usado na escolha dessas atividades foi pedagógico. Escolhemos uma sequência de atividades que, didaticamente, pudesse ser suficiente para uma ordem lógica de sentidos matemáticos, cabíveis para a compreensão dos sujeitos da pesquisa que, provavelmente, nunca lidaram com a Geometria Projetiva.

As atividades têm como objetivo imediato apresentar conceitos projetivos tais como: colinearidade, incidência, encontro de retas paralelas, a não preservação de medidas e sim a preservação da proporção anharmônica entre segmentos. Apresentamos também teoremas de importância para a Geometria Projetiva.

Além de almejarmos que as ações dos sujeitos durante as atividades pudessem nos retornar com significados para nossa interrogação, havia o interesse em que a experiência com eles resultasse em críticas ao que propomos, de modo que as atividades passassem por avaliações (deles e nossas) e fossem apuradas a fim de se futuramente constituírem no material maior do Produto Educacional vinculado ao nosso estudo.

**1 - Formule e prove a recíproca do Teorema de Menelau.**

Figura 6 – Teorema de Menelau




Fonte: Própria Autora

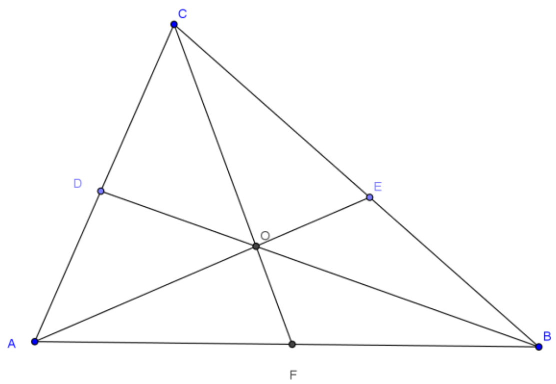
Para esta atividade, nós planejávamos mostrar aos participantes o quão é importante, para a Geometria Projetiva, a colinearidade de três pontos, característica usada também na demonstração do teorema de Menelau.

Aqui, não havia construção a ser feita. Então, a figura acima foi usada apenas como base visual para a demonstração da atividade sugerida.

**2 - Demonstre o teorema de Ceva com auxílio do teorema de Menelau.**

Nessa atividade, tínhamos como objetivo mostrar a importância do teorema de Menelau em tudo que se segue na Geometria Projetiva. Gostaríamos que eles comentassem quantas relações de Menelau conseguiam ver na figura auxiliar, e assim como nós, pesquisadores, o grupo também conseguiu encontrar seis relações.

Figura 7 – Teorema de Ceva



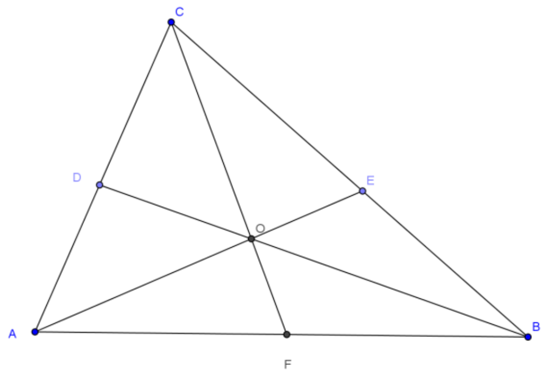

Fonte: Própria Autora

Como a princípio os participantes tentaram usar apenas uma relação de Menelau para tal demonstração, foi necessário que nós fizéssemos uma intervenção, dizendo que seria necessário usar duas relações.

**3 - Formule e prove a recíproca do Teorema de Ceva.**

Aqui, pedimos aos participantes que provassem a volta do Teorema de Ceva, onde conseguem notar, de fato, a projetividade do teorema.

Figura 8 – Teorema de Ceva



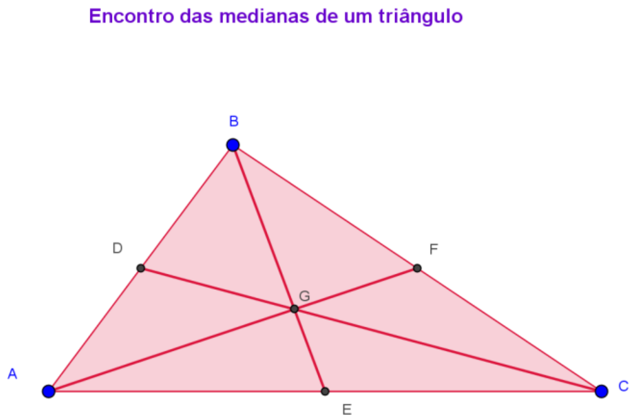

Fonte: Própria Autora

**4 - Prove que as medianas de um triângulo são concorrentes em um ponto que se chama baricentro.**

Essa atividade foi proposta para que pudéssemos trabalhar uma outra forma de demonstrar este conteúdo, que não só por Geometria Euclidiana. E assim conseguimos mostrar também que em alguns momentos a Geometria Projetiva pode agir como facilitador.

Usamos o Teorema de Ceva e introduzimos a implicância da ideia de incidência para a Geometria Projetiva.

Figura 9 – Baricentro



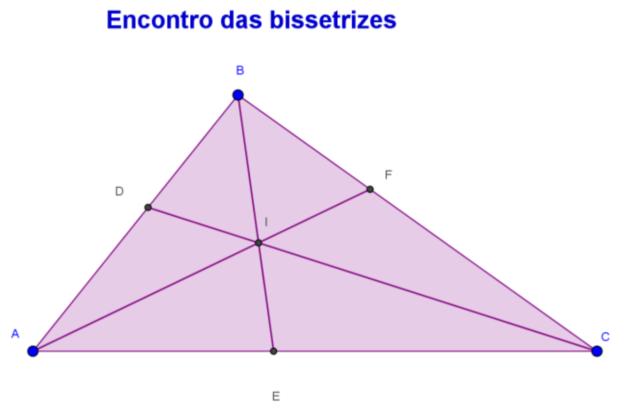

Fonte: Própria Autora

**5 - Prove que as bissetrizes internas de um triângulo são concorrentes em um ponto que se chama Incentro.**

As intenções, com essa atividade, são as mesmas que as da atividade quatro.

Aqui usamos o Teorema de Ceva.

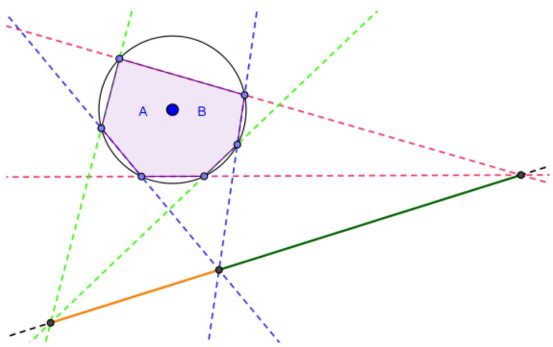
Figura 10 – Incentro




Fonte: Própria Autora

**6 - Dado um hexágono ABCDEF, qualquer, inscrito em uma cônica, verifique o teorema de Pascal.**

Figura 11 – Colinearidade – Teorema de Pascal




Fonte: Própria Autora

A intenção era, além da própria verificação do Teorema de Pascal, mostrar que, para a Geometria Projetiva, as propriedades são válidas para todas as cônicas e não apenas em uma delas.

A figura base usada na resolução desta atividade foi feita em uma elipse, fazendo com que os focos coincidissem, o que dava a impressão de um círculo. Em momento posterior, apresentamos também um aplicativo para a construção do teorema em parábola e hipérbole.

O objetivo não era a demonstração do teorema; o objetivo era visual, para que mediante a uma construção aleatória, sem se preocupar com a métrica, o teorema era válido. Em nossa visão, ficou claro que é válido para outras cônicas e outros tipos de polígonos, também.

Em momento de investigação nos perguntaram se o teorema seria válido também para pentágonos, quadriláteros e triângulos. Verificação essa que não só se tornou possível, mas como de fácil realização, com o uso do Geogebra, dado sua propriedade de arraste, o que nos permite movimentar objetos no software.

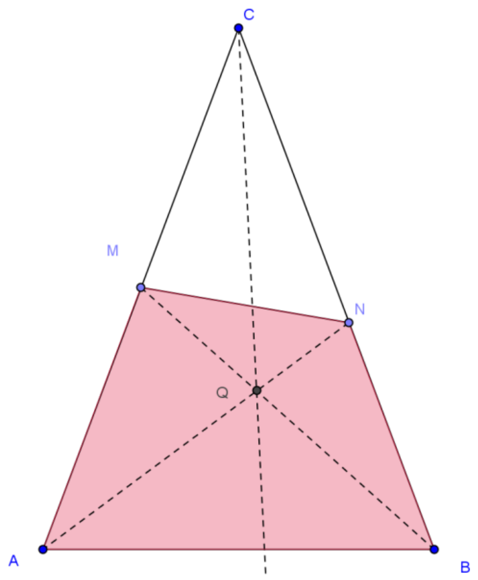
**7 - Dado o triângulo ABC, e sejam N pertencente ao segmento BC e M pertencente ao segmento AC. As diagonais de ABNM, AN e BM, se encontram em Q. Construa outros quadriláteros ABN'M', a partir de um N´ em BC, cuja interseção de suas diagonais esteja contida na semirreta CQ.**

Para a realização desta tarefa seria necessária a apresentação do conceito de Quadrilátero Completo, que podemos definir como:

> A figura formada por quatro retas coplanares, sendo três quaisquer delas não concorrentes, e os seis pontos comuns a essas retas. Dizemos que as quatro retas coplanares são os lados e que os seis pontos são os vértices do quadrilátero completo. Dois vértices são ditos opostos se as retas que os une não é um lado; esta é chamada de reta diagonal. (AUFFINGER; VALENTIM, 2003, p. 12)

A figura abaixo foi usada como base, embora os participantes tenham construído o triângulo suporte em outra posição, o que de forma alguma impossibilitou a construção da figura e a formulação de conjecturas.

Figura 12 – Quadrilátero

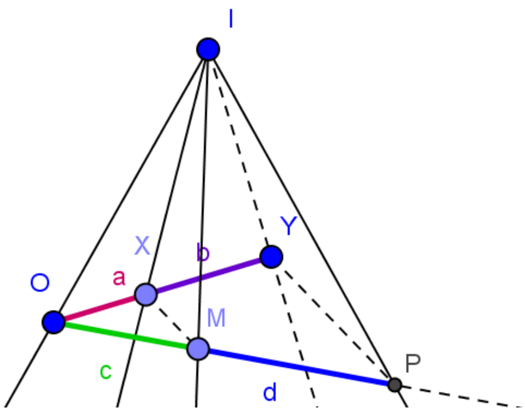



Fonte: Própria Autora

**8 - Se em dados 4 segmentos em um arranjo de transversais cortadas por paralelas de medidas a, b, c e d, temos a proporção a/b = c/d, temos a'/b' = c'/d' em projeção desse arranjo em um plano qualquer ?**

Aqui objetivamos mostrar que relações de medidas não são preservadas na Geometria projetiva.

Figura 13 – Relação de Tales




Fonte: Própria Autora

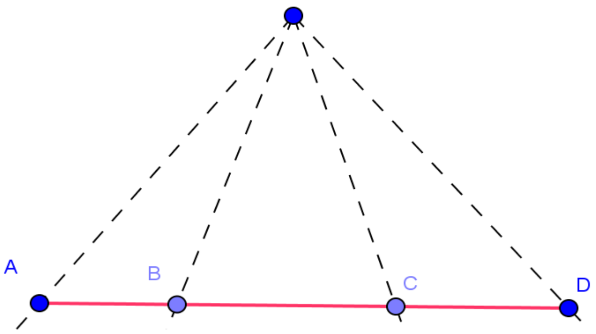
A primeira relação construída é baseada no Teorema de Tales. É construída com auxílio de retas paralelas. Na segunda relação, utilizamos os mesmos feixes mas não há o uso de paralelismo, nem a preocupação com a métrica, e neste caso a proporção não é mantida.

**9 - Verifique a projetividade da razão anharmônica.**

Seja a razão anharmônica, a razão entre dois pontos cujo quociente que se obtém dividindo a razão das distâncias do primeiro ponto aos dois últimos pela razão das distâncias do segundo ponto aos dois últimos. Usamos a oitava atividade para pedir que os alunos mostrassem no software esta relação.

Como na atividade sobre o Teorema de Pascal, o objetivo era visual.

Figura 14 – Razão Anharmônica

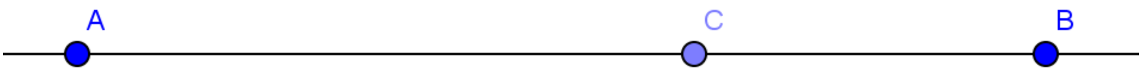



Fonte: Própria Autora

**10 – Dados A, B e C, encontre D tal que (AC/BC) = (AD/BD)**

Esta construção também pode ser realizada com o uso da geometria euclidiana mas, sob nossa perspectiva, a Geometria Projetiva facilita o processo, e para tal resolução, projetiva, abrimos mão do compasso e realizamos a tarefa com o uso apenas de régua, assim, em mais uma oportunidade pudemos confirmar ser a Geometria Projetiva a Geometria da régua.

Figura 15 – Razão

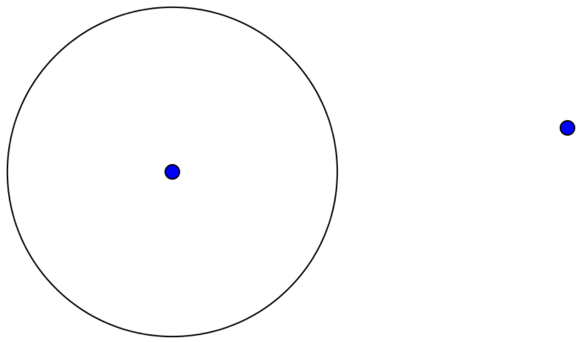



Fonte: Própria Autora

**11 - Trace uma tangente de um ponto a um círculo, sem usar o compasso.**

Essa atividade, a princípio, seria a mais complexa delas. Aqui, pedimos aos alunos do curso que traçassem uma tangente de um ponto ao círculo sem o uso de compasso. Para isso, utilizam teoremas e definições estritamente projetivas, como o teorema Pascal, polo e polar.

Figura 16 – Figura Base para Encontrar a Tangente



Fonte: Própria Autora

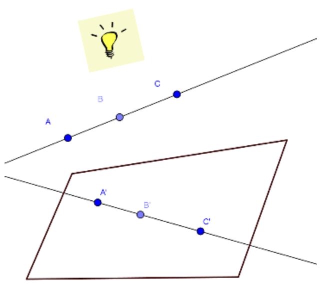
# Capítulo 4

# Tratamento e Análise dos Dados

Apresentamos a seguir os dois movimentos de análise, que, como dissemos, fazem convergir os dados do vivido para ideias cada vez mais estruturadas. Primeiramente, a análise ideográfica tem seu desenvolvimento mostrado na forma de tabelas, e cada linha é a convergência de dados transcritos para ideias.

## 4.1. Análise Ideográfica: Tabelas

Da cena 1 a 8, está transcrito o ocorrido na introdução do curso, quando os sujeitos se manifestam livremente acerca do projetivo, cujas ideias fundamentais foram expostas pelos pesquisadores P1 e P2 a partir de slides, e conversam sobre História, Arte e Geometria. Os sujeitos da pesquisa foram indicados por S1, S2, S3 e S4. Neste material, transcrito, onde vimos a necessidade de explicar uma situação, usamos # antes dos textos.

| Cena 1 | Interpretação | Ideia |
|---|---|---|
| - P2: esse slide tem um postulado, vamos dizer assim né? eu gostaria que eles até..., ali é uma projeção né? De uma reta que passa em A, B e C e a projeção dela em um plano, é o quê? É o quê? Vocês acham que é uma reta?<br>- S4: eu acho que sim<br>- S1: parece que sim | Neste momento estamos conversando sobre o que pode ocorrer quando fazemos projeções de objetos (neste caso representados por pontos), projeções estas feitas com luzes, de preferência diferentes da luz solar.<br> | Aceitação da postulação, ainda que com reservas |

| Cena 2 | Interpretação | Ideia |
|---|---|---|
| - P2: um postulado, precisa isso aí ser um postulado? Que a projeção de uma reta é uma reta? Ou a nossa geometria permite a gente demonstrar que é verdade que a projeção. Que que vocês acham?<br>- S3: se você pegar os três pontos e mostra que a projeção de cada um é colinear, você mostra que é uma reta | A colinearidade é manifesta. Vem carreada por objetos geométricos. | Manifestação da colinearidade. |

| Cena 3 | Interpretação | Ideia |
|---|---|---|
| - P2: a projeção de cada um está na mesma reta, é colinear?<br>- S3: ali, ela pegou uma reta (P1)<br>- P2: o que é ser colinear pra você? É estar na mesma reta?<br>- S3: os três pontos estão na mesma reta | A palavra “Projeção”, neste momento, já é um termo aceito por todos. | Aproximação consequente de dois objetos projetivos |

| Cena 4 | Interpretação | Ideia |
|---|---|---|
| - P2: ah, tá. Não, é isso mesmo.<br>Mas aí você falou (3), pegar cada ponto e ver se ele é colinear<br>- S3: então, pegar os três pontos, A’, B’ e C’<br>- P2: tá<br>- S3: são as projeções de A, B e C<br>- P2: pois é mas, ficou, o esquema que você (3) falou, ele é suficiente pra que eu com segurança saber que isso agora é uma verdade?<br>- S1: lineares dois a dois? Ou não?<br>- P2: não, os três. Dois pontos a gente sabe que são colineares<br>- S1: porque sempre são (afirmação)<br>- P2: sempre são<br>- P1: eu usei disso, pra quem não sabe no Geogebra os pontos que têm cores diferentes são criados de forma diferentes, o ponto B tem cor diferente, então ele foi criado de forma diferente. | Esta cena retrata um momento de interpretações ocorridas entre P2 e o estudante S3. Onde se fala sobre projeção e colinearidade.<br>Sujeito é reticente se os objetos da euclidiana valem na projetiva.<br>P1 também relata o que se fez para construir a imagem no Geogebra e algumas características do software. | Interação entre geometrias é suscitada no diálogo.<br><br>Construções no software ganham importância no diálogo |

| | | |
|---|---|---|
| Então eu fiz a reta passando pelos dois pra mostrar exatamente perfeitinho, pra não correr o risco. Mas não dá pra esconder de quem conhece o Geogebra por causa das cores do ponto. | | |

| Cena 5 | Interpretação | Ideia |
|---|---|---|
| - P2: já que nosso tema faz sentido pra todo mundo, geometria.<br>O que que cada um de vocês sabe da história da geometria projetiva? Não estou perguntando o que vocês estudaram, entenderam?<br>- P1: intuitivamente, talvez<br>- P2: Vocês têm algum registro?<br>- S1: balança a cabeça negativamente<br>- S3: eu e 2, nossa primeira iniciação cientifica foi sobre geometrias não euclidianas<br>- P2: aham<br>- S3: nós vimos bem no finalzinho sobre geometria projetiva, só da ideia do desenho. Que o professor pede o aluno pra desenhar a rua da casa dele, então muita gente coloca a casa e a rua de baixo da casa, ou do lado, mas não tinha aquela ideia de projeção, como por exemplo<br>- S2: profundidade<br>- S3: é, a ideia de profundidade. É como duas retas paralelas, vamos pensar na linha do trem, se você olhar numa foto dá a impressão de que lá no fundo elas se tocam, que é o chamado ponto de fuga, dos quadros. Só isso mesmo que a gente viu | Aqui conversamos sobre um pouco da história da Geometria Projetiva. Perguntamos aos presentes o que eles sabem sobre tal ciência, surgindo neste momento um termo muito importante: **PONTO DE FUGA.**<br>Outro termo citado foi **PROFUNDIDADE.** | O mundo (horizonte de atribuição de significados) projetivo sendo posto.<br><br>História tendo valor epistemológico. (da parte dos pesquisadores)<br><br>Questões da profundidade como projetiva. |

| | | |
|---|---|---|
| - S4: a gente chegou até a discutir vindo pra cá que não sabia sobre geometria projetiva, que a gente não tem muita ideia. Eu pelo menos não tenho muita ideia de geometria projetiva, ainda mais questão assim relacionada a história | | |

| Cena 6 | Interpretação | Ideia |
|---|---|---|
| - P2: vocês falaram desenho, desenho mesmo, meio artístico<br>- S2, S3 e S4: balançam a cabeça concordando<br>- S3: pintura<br>- P2: desenho livre<br>- S2: a gente ficou mais no modelo mesmo<br>- P2: Os pintores quando pintam um caminho, têm dificuldade de chegar no final, em geral ele põe um boi, uma árvore<br>Sala: ri<br>- S3: sim (concordando com P2)<br>- P2: pra evitar o problema do..., afinal de contas, é paralelo ou concorrente? | Aqui P2 os questiona sobre o que "ouviram falar", se sobre desenhos, se sobre o movimento artístico. O que é confirmado. Sendo o que ocorre quando chegamos ao fim de um caminho, em pinturas. | O desenho livre como habitação humana trazendo noções projetivas. |

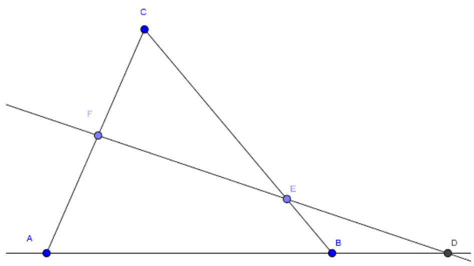
| Cena 7 | Interpretação | Ideia |
|---|---|---|
| - P1: aí eles usaram essas proporções. O P2 já chegou a assistir um pedaço de um documentário, que eu não achei, nem ele<br>- P2: eu não achei mais<br>- P1: ele não achou mais, porque ele já achou uma vez<br>Sobre isso que você está falando do paralelismo, eles usavam luz mesmo, eles usavam projeção de luz mesmo pra levar o objeto onde eles queriam pintar. Foi a | Falamos sobre a proporção que surgiu no renascimento. | |

| | | |
|---|---|---|
| partir do renascimento que as coisas começaram a ficar mais proporcionais, mais bonitinhas, parecendo com as formas reais.<br>- P2: bonitinha é você que está falando, né?<br>Eu sou formado em história da arte, e realmente a P1 tem razão, no renascimento é quando o ideal de beleza certinho apareceu<br># Conversa sobre o que é bonitinho | | |

| Cena 8 | Interpretação | Ideia |
|---|---|---|
| - P1: E aí depois disso ainda teve um processo demorado para que alguns matemáticos fossem conseguindo demonstrar isso matematicamente<br>- P2: o primeiro foi Desargues<br>- P1: e aí algumas geometrias foram criadas também, a Descritiva, a Perspectiva<br>- P2: pelos próprios pintores também<br>- P1: Por necessidade também<br>A Geometria Projetiva tem estes pontos antes do renascimento, mas ela não tinha, ela não foi formalizada por ninguém, talvez por falta de necessidade. Quando os pintores e escultores viram necessidade de alguma coisa que trouxesse mais proporção pra área deles, aí as coisas foram começando a acontecer, mas mesmo assim levou muito tempo ainda<br>- P2: o 3 até usou a expressão "ponto de fuga"<br>- P1: sim | Surge uma conversa de como teria se dado a criação da Geometria Projetiva e outra Geometrias, também muito importantes. Sobre a necessidade de seu uso por pintores e escultores.<br>Falamos também que a formalização matemática se deu por um longo processo. | |

| | | |
|---|---|---|
| - P2: que é desta Perspectiva aí, né?<br>- P1: exatamente | | |

Da cena 9 a 13, os pesquisadores apresentam o Teorema de Menelau, dizendo que ele é importante para se pôr algumas noções projetivas em evidência. O grupo acompanha ativamente a demonstração desse teorema.

| Cena 9 | Interpretação | Ideia |
|---|---|---|
| P1: Aí aqui a gente tem o teorema de Menelau<br>“Toda reta que corta três suportes dos lados de um triângulo, determina seis segmentos tais que este produto de três entre eles, não tendo extremidade comum é igual ao produto dos outros três”<br>O que ele está chamando de não ter extremidades comuns é tipo esse ‘e’, entendeu, tipo esse CE e EB, eu não posso ter esse<br>* aí mostro exemplos de quais podem<br>- P2: a tá você deu exemplo de quem não pode<br>- P1: exatamente<br>Eu pego seis, três a três, que não têm as extremidades comuns e aí eu consigo achar o que eu quero<br>Então olha só, até fala aqui:<br>O AF com o FC, os que não têm extremidade em comum estão em cima (da fração). AF, CE e BD, nenhum deles tem um ponto em comum<br>- P2: extremidade em comum<br>- P1: A o CE, o CF, ED, o AD, apenas dele passar pelo D, ele não tem extremidade comum. Porque o D não é o extremo deste segmento, então ele passar por ele, isso | Neste momento é apresentada a imagem do Teorema de Menelau e sua definição.<br> | |

| | | |
|---|---|---|
| pode. Mas o extremo coincidir não pode, tá?<br><br># Todos os participantes encontravam-se bastante atentos neste momento | | |

| Cena 10 | Interpretação | Ideia |
|---|---|---|
| - P2: Deixa eu, volta pro slide anterior. Lâmpada, A, B e C, A'. Volta pro Menelau: "que que tem haver um com o outro?"<br>- S2: se você imaginar a lâmpada no C, FE<br>- S4: repete a fala de 2<br>- P2: a lâmpada em C?<br>- Sala: eles concordam<br>- P2: é, é isso mesmo | Aqui, P2 e eu pudemos notar que a "ficha" sobre o sentido, da Geometria Projetiva, começa a cair.<br>Menelau é apresentado como em relações euclidianas, mas é levado por todos para ser um fenômeno projetivo. | Projeção é relacionada com teorema euclidiano<br><br>Performance didática sobre possibilidades projetivas |

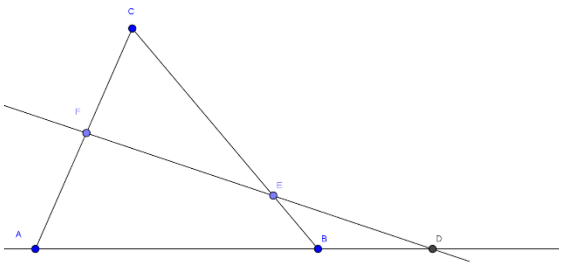
| Cena 11 | Interpretação | Ideia |
|---|---|---|
| # P1 apresenta uma proposta de atividade, que é "formule e prove o a reciproca do Teorema de Menelau"<br>- S3 pergunta se é pra fazer naquele momento<br>- P2 propõe: vocês podiam fazer aqui, ao vivo<br>- S1 propõe a S3 que ele faça. S3 pergunta: porque eu?<br>- P2 propõe fazer um resumo do visto sobre o Teorema de Menelau e a turma formular a reciproca e que depois eles demonstrem<br>Após o resumo P2 pergunta: o que é a reciproca?<br>- S1: dá uma reta<br>- S2 se comunica com S3<br>- S3: daquela relação acontecer os três pontos são colineares<br>- P2: exatamente<br>- Sala se entreolha na intenção de confirmar se estavam certos | A cena, mostra que um objeto projetivo já se torna compreensível e familiar.<br>Grupo acolhe a proposta de estruturação axiomática da geometria projetiva.<br>O entreolhar, que mostra que as atividades estão permitindo uma construção coletiva. | Constituição do mundo projetivo.<br><br>Estruturação cientifica da Geometria Projetiva.<br><br>Construção coletiva do ambiente e conhecimento. |

| Cena 12 | Interpretação | Ideia |
|---|---|---|
| - P1 escreve a relação no quadro<br>- S3: então dado esta relação aí, eles são colineares<br>- P2: vamos aproveitar que você escreveu a relação aí, anota a formulação aí<br>- Se esta relação, então DEF estão alinhados<br>- S2 pergunta se haveria necessidade de explicar que alguns destes pontos estão entre os outros<br>- P2: ali estamos fazendo uma escrita econômica<br>- S2 completa: um esboço<br>- P2: depois teríamos que escrever melhor<br>- S3: no caso o desenho está sendo a informação<br>- P2: e o contexto nosso aqui<br># Aí formulam oralmente a reciproca completo<br>– P2: bom, como é que prova este teorema aí que é recíproco do principal?<br>Faremos isso depois<br>- S4 pergunta se é pra fazer em casa | O grupo acompanha bem o fluxo de demonstração, participando e mostrando discernimento geométrico.<br>A expressão: ´fazer em casa´ denota que a sequência está para ser assumida como uma tarefa didática. | Compreensão da proposta didática pelas suas tarefas. |

| Cena 13 | Interpretação | Ideia |
|---|---|---|
| - P1: algumas atividades são interessantes de serem feitas aqui, devido a dificuldades, falta de conhecimento, porque todas estas atividades de construção existe uma forma Euclidiana de ser feita, então é a orientação que vai mudar a forma com a qual você está fazendo aquilo<br># Sala concordando | Após afirmação de P1 de que várias das atividades realizadas poderiam ser feitas, além de projetivamente, de uma forma euclidiana, os participantes fazem uma comparação entre as Geometrias citadas. | Compreensões dialogadas acerca da comparação entre Geometrias. |

| | | |
|---|---|---|
| - P1: e às vezes depois que o projetivo é feito ele parece mais simples que o Euclidiano<br>- S2 concorda com a cabeça<br>– P2: pra mim, a Projetiva é muito mais do que isso. Olhando o Teorema ali, ele tem alguma coisa haver com o que a gente falou de Projetiva?<br>- S2: se você olhar assim, (nega com a cabeça) parece uma coisa de Geometria Plana<br>- P2: concorda com S2, que ressalta "Geometria Euclidiana Plana"<br>- P1: explicou que não descartamos o uso da Geometria Euclidiana, apesar que várias construções podem ser feitas sem o uso da mesma<br>- P2: comenta que, para ele, o Teorema de Menelau é mas Euclidiano do que a recíproca do mesmo, destacando a importância do alinhamento de três pontos | | |

As cenas 14, 15 e 16 revelam o desenvolvimento das ações quando se instaura a sugestão de se caminhar com o ponto D, usando-se ferramenta do *software*, afastando-o cada vez mais de B, para a direita desse. O fato sequente de a transversal DEF tender a ficar paralela ao lado AB fez decorrer uma importante discussão geométrica.

| Cena 14 | Interpretação | Ideia |
|---|---|---|
| - P2: comenta sobre as paralelas<br>– P2 pergunta se quando fazemos com que as retas fiquem paralelas a relação do Teorema de Menelau é ou não mantida<br>- S4: comenta que o D vai ser inexistente<br>- P1: mexe novamente com os pontos E e F fazendo com que o ponto D mude de lugar mas ainda apareça, e a sala concorda que a relação continua existindo<br>- P1: mexe novamente em E e F para que o ponto D não apareça<br>- Sala concorda que o ponto D ainda existe e que a relação também continua existindo<br>- Sala: concorda que a relação do Teorema de Menelau prevalece quando as retas ficam paralelas<br>- P2: pergunta pra sala o que acontece quando o ponto vai afastando do triângulo. Pergunta também o que acontece com a transversal com o afastamento do ponto D.<br>- S1: vai ficando mais paralela<br>- P2: concorda<br>- S2: até que enfim fica paralela (risos)<br>- S4: enquanto as retas se cruzarem vai ter o ponto D<br>- S1: enquanto tiver o ponto D a gente pode falar dele<br>- P2: o que acontece quando não tem mais a interseção?<br>- S4: D deixa de existir<br>- P2: onde é isso?<br>- S1: lá no infinito<br>- S2: porque D não é a interseção da reta EF e a reta AB? Como são paralelas não vai existir a interseção | $\frac{AF}{FC}\cdot\frac{CE}{EB}\cdot\frac{BD}{DA}=1$<br><br>Os participantes demonstraram aceitar que para a Geometria Projetiva as paralelas não existem. Aceitando com isso a ideia de Infinito para a mesma.<br>A construção coletiva consegue reproduzir elementos que vemos na ciência projetiva, que requer elementos no infinito.<br>Parece não haver obstáculo para a aceitação da convivência de duas geometrias distintas. | **Atividades permitem construção coletiva do conhecimento.**<br><br>**Interação entre geometrias é suscitada no diálogo.**<br><br>**Estruturação cientifica da Geometria Projetiva** |

| | | |
|---|---|---|
| - P2: como na Geometria Euclidiana, duas retas, ou têm um encontro em comum ou são paralelas Então se elas são paralelas, não têm ponto em comum, certo?<br>- Sala: concorda com a cabeça<br>- P2: e se olharmos como o limite? O limite é uma coisa que não é real. Para que eu possa realizar o infinito eu tenho que falar a linguagem do limite. Qual é o limite ali? Quando o D some.<br>- S1: passando este negócio para o lado de lá, o que tem D meio que vai cortar<br>- P1: faz no quadro branco o que 1 disse<br>- P2: diz que pode apagar sim, mas só se?<br>- Sala: se eles forem iguais<br>- S3: se é limite o D ainda tem<br>- Sala: discute se pode ou não tirar o D<br>- P2: discute sobre a relação métrica dos segmentos<br>- Sala: concorda que eles ficam muito grandes, que tendem ao infinito<br>- P2: a Geometria Projetiva não pode ignorar que não existe infinito<br>- Sala: comenta que pra Projetiva se encontram no infinito<br>- tendem a um | | |

| Cena 15 | Interpretação | Ideia |
|---|---|---|
| – P2: por um ponto fora de uma reta eu posso traçar uma paralela e todo mundo acreditou. Através do Menelau o que a gente está falando | Fazemos uma comparação entre o Teorema de Menelau e o Teorema de Tales.<br>P2 faz uma comparação entre o fato de que pôr um ponto fora de uma reta podemos traçar uma paralela o que não se dá no Teorema de Menelau. | História e **interação entre geometrias.**<br><br>Aceitação de distintas geometrias: relativização epistemológica. |

| | | |
|---|---|---|
| pra vocês? – por um ponto fora de uma reta não conseguimos traçar uma paralela, não tem, não tem jeito.<br># Voltamos para a relação de Menelau quando as duas retas estão paralelas<br>E aí chegamos à conclusão:<br>AF/CF = BE/CE<br>É Menelau no infinito, é Tales<br>- S3 fala com os colegas: Tales é Menelau no infinito (risos)<br>– P1: A Projetiva trata muito bem a realidade da vida cotidiana, da gente. Quando você está viajando e tem uma estrada muito longa ela encontra, pelo menos as minhas sempre encontraram<br>- P2: nem Tales está errado, nem Menelau (sala concorda). O que tem de diferente nos dois?<br>- S2 e S4: O Tales não vê a interseção<br>- P2: achei interessante o que S2 e S4 falaram<br>- S4: pra um tem interseção, para o outro não. Né?<br>- P2: isso é um defeito do Tales?<br>- S4: não, acho que não, ele só viu diferente<br>- P1: Será que Menelau pensou que se deixasse a reta paralela ia dar Tales?<br>- Sala ri e me dizem que teria que ser o contrário, “será que se Tales pensou que se causa-se a interseção daria Menelau?”, P1 e P2 falam a eles que Tales veio antes, causando algum espanto. | Os participantes comentam que “Tales é Menelau no infinito”.<br>Aceitação de distintas geometrias. | |

| Cena 16 | Interpretação | Ideia |
|---|---|---|
| – P2 pergunta a sala: você tem que fazer um esquema que dê conta de várias situações, você faria Tales ou Menelau?<br>- S2: eu montaria em Menelau<br>- S1: Menelau<br>- P2: Por quê? Eu também montaria, mas por quê?<br>- S2: porque ali você pode fazer infinitos pontos, te dá uma gama maior de resultados<br>- S4: concorda<br>- P1: e pode até não encontrar ponto<br>- S2: é (concorda)<br>- P2: no limite o esquema de Menelau ainda funciona com esta paralela aí<br>- S4: é verdade, Menelau funciona nos dois casos, é como se o Menelau tivesse continuado os estudos do Tales<br>- P2: S4, então deixa eu te fazer uma pergunta, já que você é professora, por que você dá o Teorema de Tales? Não é melhor dar o de Menelau?<br>- Sala: risos<br>- S4: ah, é verdade, a gente fica naquela de seguir currículo, e na verdade eu já tinha ouvido falar de Menelau mas eu não conhecia assim<br>- S2: acho que porque a gente preza muito uma paralela, talvez por isso<br>- S3: o estudo das paralelas | P2 pergunta aos participantes se eles tivessem que escolher um esquema para representar várias situações qual seria, se o de Tales ou o de Menelau. Em unanimidade é escolhido o esquema de Menelau, que segundo os próprios participantes representa uma gama maior de resultados, o que inclui o próprio Teorema de Tales, nas paralelas. | Compreensão epistemológica da abrangência do projetivo. |

É apresentado o Teorema de Ceva. O grupo todo participa da construção de ideias geométricas que percebem a operacionalidade do Teorema de Menelau, como se vê da cena 17 à 19.

| Cena 17 | Interpretação | Ideia |
|---|---|---|
| # Com o Teorema de Ceva exposto, P2 pergunta se aquela figura é coisa nova, chamada Ceva ou é Menelau ali<br>- S2: É Menelau<br>- P2: tem Menelau?<br>- S2: tem<br>- 1: tem mediana<br>- S2 e S3: fazem comparações entre a figura do Teorema de Menelau e o de Ceva<br>- S1: também comenta as semelhanças ressaltando que existem as divisões<br>- S2 e S3: constatam semelhança destacando o triângulo CAF. E EOB, transversal<br>- P1: sim, dá um Menelau ali. Mas você só consegue ver este?<br>- S2: não<br>- P2: a questão é, tem uma porção de Menelau aí<br>- P1: S2, na verdade eu queria perguntar se você consegue ver outros<br>- S2: balança a cabeça concordando<br>- Sala: vai mostrando outras relações de Menelau dentro do Teorema de Ceva<br>- P1: completa dizendo que têm pelo menos seis relações de Menelau ali, já que fez esta quantidade<br>- P2: o Ceva não criou nada<br>- S2: ele só colocou o nome dele<br>- P2: ele aplicou, o Menelau não aplicou. Agora olha lá que interessante o resultado<br># P1 então apresenta o Teorema de Ceva<br>- P2: pergunta a sala se está ok, e eles concordam com a cabeça. Aí formula com suas próprias palavras o | P1 coloca uma figura representando o Teorema de Ceva na projeção, e então P2 pergunta aos presentes se para eles aquilo é algo novo ou representa o Teorema de Menelau. O grupo diz que é Menelau, que tem mediana, encontram semelhança de triângulos.<br>P1 constata que existe uma relação de Menelau na semelhança de triângulos encontrada por eles e pergunta se eles conseguem ver outras relações além da que já foi falada.<br>P2 comenta que existem várias destas relações no Teorema de Ceva e P1 diz que existem pelo menos seis (pois foi o número de relações feitas pela mesma).<br>Aqui o grupo diz que Ceva não fez nada apenas colocou o nome no que já havia sido feito por Menelau, P2 discorda dizendo que ele aplicou o Teorema e Menelau não, além de Ceva tratar de incidência, e não colinearidade.<br>P1 e P2 apresentam o Teorema de Ceva. | Relações estruturais na projetiva são compreendidas.<br><br>Performance didática sobre possibilidades projetivas. |

| | | |
|---|---|---|
| teorema "quando eu traço três cevianas do vértice de um triângulo, cada ceviana divide o lado oposto em dois segmentos"<br>- Sala: concordando com a cabeça | | |

| Cena 18 | Interpretação | Ideia |
|---|---|---|
| - P2 fala com P1: agora é uma tarefa aí pra eles né?<br>- P1: sim, demonstre o Teorema de Ceva com o auxílio do Teorema de Menelau e formule e prove a recíproca do Teorema de Ceva<br>- S1: já fizemos<br>- P1: só formulou<br>- Sala: risos<br>- P2: vamos lá gente, eu pego a estrutura de Ceva e tenho seis Menelau<br>- Sala: concordando com a cabeça<br>- P2: então eu consigo escrever seis Menelau, em princípio independentes<br>- S3: o problema é que quando eu acho um Menelau um segmento que está na hipótese não aparece<br>- P2: pois é, era isso mesmo que você está falando que eu ia comentar. Se você começar a separar Menelau por Menelau, vamos pegar o triângulo ACF, aí a gente viu que o Menelau aparece quando eu pego transversal EOB, então me ajuda aí. CE, EA, BA, BF, OC e OF, aparecem seis segmentos<br>- Sala: concordando com a cabeça<br>- P2: então o BA não está no Teorema de | Pedimos aos participantes que demonstrassem o Teorema de Ceva, formulem e provem a recíproca do mesmo. A afinação de todos permitiu apenas simular as demonstrações em tarefa.<br>O grupo comenta que quando pegam um Menelau, um dos segmentos da hipótese não aparece. Então vamos discutindo e todos acabam concordando que sempre que pegamos um triângulo sobra um segmento quando relacionado ao Teorema de Ceva. P2 comenta sobre os seis Teoremas de Menelau que encontramos ali, e então P1 diz que não precisamos das seis relações e sim de usar duas relações por vez. | Afinidade com os teoremas projetivos.<br><br>Compreensão da estrutura do projetivo. |

| | | |
|---|---|---|
| Ceva, o OC também não está no Ceva<br>- Sala: concordando<br>- P2: ele está neste Menelau, então quando eu escrevo um Menelau<br># P2 e P1 discutem sobre quais segmentos estão e quais não estão<br>- P1: os ligados a O não estão<br>- P2: o BA também não está, dois ligados ao O e o BA não estão. Então um Menelau tem três que estão e três que não estão, o segundo Menelau vai ser a mesma coisa. Então se você escrever os seis Menelau vai te dar o maior trabalho, mas você vai cortando<br>- P1: a gente usa eles dois a dois e não os seis<br>- P2: o OC aparece onde também? Ali, no triângulo ABE, não OC... | | |

| Cena 19 | Interpretação | Ideia |
|---|---|---|
| - P2: o Menelau da direita tem OC também, eu quero sumir com ele, então dois Menelau vão sumir com um OC e dois Menelau vão sumir com um OF<br>- S3: OF. A volta vai ser gigantesca né?<br>- P2: é vai dar um trabalho mas falando assim já dá pra...<br>- P1: é trabalho de conta só<br>- P2: a P1 e eu ficamos preocupados se as pessoas não veriam, mas vocês mataram de cara aqui. Falando aqui já deu pra demonstrar<br>– P2: Então, outro exercício<br>- P1: Formule e prove a recíproca do Teorema de Ceva | P2 comenta com os alunos que com dois Menelau conseguiremos cancelar segmentos que "sobram" quando temos apenas uma relação.<br>Passamos para a formulação e prova da recíproca do Teorema de Ceva.<br>P2 conversa sobre o encontro de três cevianas, deixando claro aqui que duas sempre vão se encontrar e aí mostra uma forma de verificar o encontro da terceira ceviana.<br>P2 fala com eles que o Ceva foi o primeiro a usar o Menelau, e P1 comenta que Ceva foi o primeiro registro, encontrado por ela, de pessoa a ter usado o Teorema de Ceva. P2 comenta, também, que depois que matemáticos descobrem o Teorema de Menelau todo mundo começa a usar ele. | História junto com construção da ciência. |

| | | |
|---|---|---|
| - P2: Se isso aí é porque são incidentes, você junta duas, porque duas cevianas sempre se encontram, a terceira por exemplo, CF, você coloca CF' e mostra que vai dar a mesma coisa, se dão a mesma coisa CF e CF' dão a mesma coisa<br>- Sala: concordando com a cabeça<br>- P2: o Teorema de Ceva é a primeira aplicação do Menelau<br>- P1: do que encontrei, o Ceva é a primeira pessoa que usa o Menelau<br>- P2: depois os matemáticos vão acordar pro Menelau, todo mundo começa a usar ele | | |

Nas duas cenas seguintes, são postas atividades que requerem o uso do aplicativo do Teorema de Ceva. Comparações entre Geometrias são feitas.

| Cena 20 | Interpretação | Ideia |
|---|---|---|
| # Provar que as três medianas se encontram no mesmo ponto, chamado Baricentro. Vocês já fizeram isso alguma vez? Como aluno ou como professor?<br>- Sala: nega com a cabeça<br>- S1: mediana é o que divide no meio ou....<br>- P2: sai de um vértice e vai ao meio do lado oposto<br>- P1: Mas não necessariamente perpendicular<br>- S1: então não obrigatoriamente faz um ângulo de noventa graus?<br>- P2 e P1: não<br>- P2: olha só gente, no livro didático tem esta demonstração, | Aqui pedimos aos participantes que provem que três medianas encontram em um mesmo ponto chamado Baricentro. P2 comenta com eles que esta demonstração feita pela Geometria Euclidiana é longa e que na Geometria Projetiva é muito mais simples, sendo feita em apenas uma linha.<br>Grupo faz conjecturas sobre esta demonstração, e para finalizá-la usamos o Teorema de Ceva para mostrar a incidência. | Percepção da potencialidade do projetivo. |

| | | |
|---|---|---|
| Euclidiana, ela tem no mínimo uma página<br>- S1 e S2: fazem uma cara meio que de espanto<br>- P2: vocês vão demonstrar isso em uma linha agora<br>- Sala: novo espanto<br>- S3: Ah, mas se eu dividir na metade os segmentos que eu tenho do lado de cá são iguais aos que eu tenho do lado de lá<br>- P2: isto (balança a cabeça positivamente)<br>- S3: naquele teorema, que seria a volta<br>- P2: isto<br>- S3: implica que eles têm um ponto em comum<br>- P2: se cada lado está dividido igualmente<br>- S2: ah sim, pegando dois a dois, pulando um<br>- P2: alternando o produto é igual, porque um compensa o outro<br>- Sala: concordando<br>- P2: aí você escreve que pelo Teorema de Ceva há uma incidência<br>- S3 comenta com S4: que bacana<br>- P2: Geometria Projetiva funcionando | | |

| Cena 21 | Interpretação | Ideia |
|---|---|---|
| - Seguimos com outra atividade: prove que as bissetrizes internas de um triângulo são concorrentes em ponto que se chama Incentro<br>– P2 fala sobre bissetrizes<br>- 3: acho que é nesta que desenha um círculo inscrito pra demonstrar<br>- P2: sim<br>– P2 explica sobre o Teorema da Bissetriz Interna | Pedimos que provem que as bissetrizes, internas, de um triângulo concorrem em um único ponto chamado Incentro.<br>O mesmo comentário sobre a longa demonstração na Geometria Euclidiana é feito, e novamente é dito que a demonstração na Geometria Projetiva é mais curto.<br>P2 diz que na Geometria Euclidiana cada demonstração é independente da outra, o que para ele, não é muito bom, visto que quanto maior for o número de resultados que obtiver com o mesmo procedimento melhor.<br>Para encerrar a aula P2 começa a falar sobre o Quadrilátero completo, neste momento um dos participantes questiona sobre os segmentos que está usando, dizendo que ele está usando | Percepção da potencialidade do projetivo<br><br>Percepção da tipicidade de traçados projetivos, comparado ao euclidiano. |

| | | |
|---|---|---|
| - P2: isso é uma coisa, outra coisa é demonstrar que elas se encontram em um ponto, aí vem a página e meia da Geometria Euclidiana. Usando Ceva, vai dar em uma linha? Não, dá em duas.<br>- Sala: risos<br>- P2: porque aqui tem que fazer uma preparação<br># Todos fazemos as contas para demonstrar a atividade dada<br>– P2: na Geometria Euclidiana cada demonstração é independente da outra (com relação a encontro das bissetrizes, medianas e alturas), o que não é legal, porque para um matemático quanto mais resultados ele obtiver com o mesmo procedimento é interessante<br>– P2 começa no fim da aula a dar uma ideia da teoria do quadrilátero completo, para isso traça prolongamentos de lados opostos até que se encontrem, divide segmentos e arbitra valores, faz a proporção dos segmentos criados. Perceberam ali? Uma coisa totalmente aleatória<br>- Sala: balançam a cabeça concordando<br>- P2: e o ponto que as duas diagonais criam, de cada um até N e P, você faz as contas e são iguais<br>- S1: questiona que P2 pegou segmentos da mesma reta<br>- P1: explica que de acordo com o que vimos em Menelau não pode coincidir as extremidades<br>- P2: S1, eu peguei os segmentos que eu | segmentos da mesma reta. P1 diz que na relação de Menelau o que não pode acontecer é a coincidência de extremidades. | |

| | | |
|---|---|---|
| queria pra fazer as contas que precisava, a escolha não foi aleatória, o traçado que é aleatório.<br>- S1: se eu tivesse feito com outros segmentos daria certo?<br>- P2: vamos tentar em casa. Traça o quadrilátero, prolonga os lados opostos, cria P e N, aí cria a reta, traça as diagonais. Na aula que vem a gente desvenda este mistério, de como é que uma coisa totalmente aleatória tem esta capacidade de dar este resultado | | |

O Teorema de Pascal é apresentado em slide e em arquivo no Geogebra. Valorizam-se, inicialmente, movimentos nos elementos da figura apresentada. Da cena 22 à 26 vê-se como é explorado esse teorema, inclusive com variação de dados de entrada.

| Cena 22 | Interpretação | Ideia |
|---|---|---|
| - P2: apresenta o teorema em desenho. O hexágono está inscrito num círculo. Mexe nos vértices do hexágono, para que seja percebida a permanência da colinearidade<br># Todos olham demonstrando achar interessantes os movimentos, sem, no entanto, se manifestarem<br># No movimento, dois momentos foram enfatizados: quando o hexágono passou a ser estrelado e quando os lados ficam quase paralelos, fazendo com que as interseções sumissem da tela do Geogebra.<br>- S3 concorda com S2: quando S2 observa que | O Teorema de Pascal é apresentado aqui.<br>P2 e P1 propõem ao grupo que mexam no aplicativo criado por P1 e exposto na lousa.<br>Quando começam a mexer no aplicativo e em um destes movimentos, o participante que estava com o controle do mouse, mexe no centro do círculo, o que os leva a descobrir que na verdade não era um círculo e sim uma elipse que P1 fez coincidir os focos.<br>O grupo nota que independente da forma com a qual eles mexem no aplicativo a propriedade do Teorema é mantida, a colinearidade se mantém. | |

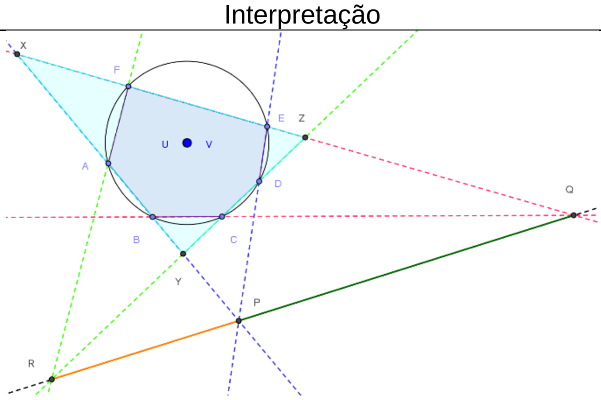
| | | |
|---|---|---|
| a condição básica é ser inscritível.<br>- Todos: enfatizam que o hexágono sofre várias transformações topológicas e a propriedade do Teorema se mantém.<br>- P2 e P1: propõem que eles mexam no aplicativo do Geogebra sobre o Teorema de Pascal<br>- Todos: perguntam a P2: “mas você já não mexeu?”<br>- P2 e P1: mas vocês vão mexer da forma de vocês<br># S3 é convocado a mexer. Ele mexe no centro do círculo, que por nós foi disposto a ser, na verdade, dois focos de uma elipse que fizemos coincidir.<br>- S2: vê a elipse começando a acontecer e se impressiona, ressalta que mesmo assim a colinearidade é mantida<br>- S1: sugere que S3 mexa para o outro lado<br>- P1: explica a eles que verdade fez uma elipse e fez coincidir os focos para que pudéssemos ter tanto um círculo quanto uma elipse, já que o Teorema é válido para qualquer cônica.<br># A explicação acima ratifica as compreensões dos participantes.<br>- S1: não consigo rodar a bola não?<br>- Todos menos S1 (S2 com a cabeça): dialogam sobre a pergunta de S1 | | |

| Cena 23 | Interpretação | Ideia |
| --- | --- | --- |
| - P1: vai mostrando algumas coisas no Teorema, agora para elipse<br>- S2: Nossa! (achando muito bacana)<br>- S1: continua mexendo<br>- P2: “pode até passar um ponto do outro?” “não, né?” “Ah, pode?”<br>- S1: mexendo na figura podemos notar que o hexágono vai mudando sua condição topológica<br>- S2 e S3: demonstram gostar do que veem<br>- S1: abre discussão topológica<br>- P2: diz que, no momento, o hexágono está com dois nós espelhados<br>- S1, S2 e S3: se empolgam com o fato de a propriedade ser mantida<br>- S1: Pascal funciona para um monte de coisas né?<br>- P1: sim, para vários modelos de hexágonos e para qualquer cônica<br>- P2: pergunta se pentágono dá ali<br>- P1: toma a iniciativa de levar o hexágono para um pentágono, sobrepondo dois pontos<br>- P2: o que aconteceu quando vocês trespassaram? Ninguém notou?<br>- S3: tem um lado que fica sem lado oposto<br>- S1 e S2: o lado fica reduzido a um vértice<br>- P2: então podemos dizer, neste contexto, que um vértice é igual a um lado?<br>- S3: não, não diria<br>- P1: lembra que na aula passada, o Teorema de Menelau favorece reduzir elementos quando se corta o triângulo num vértice.<br>- P2: aquela reta é o quê? | P1 mexe no aplicativo. Agora já em formato de elipse, os participantes vão achando interessante.<br>P1 fala que fez a elipse coincidir os focos para reforçar que o Teorema é válido para qualquer cônica.<br>P2 propõe que o hexágono seja transformado em um pentágono, depois em um quadrilátero e em outro momento em um triângulo. Os participantes notam que em todos eles a propriedade da colinearidade é mantida.<br>Durante os movimentos feitos no Geogebra, o S3 comenta o quanto o software pode facilitar a compreensão. | Manifestação da colinearidade.<br><br>Geogebra ratificando invariâncias. |

| | | |
|---|---|---|
| - Todos: tangente. O grupo vai concordando que a extensão do Teorema para pentágonos procede<br>- P1: junta mais dois vértices, fazendo com que o polígono passe a ser um quadrilátero<br>- Todos: o grupo vai concordando com o que veem com algumas expressões faciais. O grupo vai conversando sobre suas compreensões uns dos outros.<br># S3: comenta que o Geogebra pode facilitar a visualização (este comentário é feito após o grupo mexer no software para fazer uma verificação do Teorema de Pascal) | | |

| Cena 24 | Interpretação | Ideia |
|---|---|---|
| # Começa-se a demonstrar, como uma tarefa que se acha importante<br># P2 usa slide com a figura pronta e questiona o que nós temos para essa tarefa: a colinearidade que foi vista em Menelau. Onde usaremos?<br># Todos demonstram compreensão da aplicabilidade de Menelau e olham a figura atrás dessa aplicação<br>- S1: ali na linha colorida<br>- P2: mostra ali na figura<br>- S2 ajuda S1: ali, mostrando com os dedos os pontos que indica<br>- P2: Menelau é sempre isso (desenha): um triângulo e secantes<br>- S1: gesticula com os dedos, demonstrando que está achando onde | Aqui demonstramos o Teorema de Pascal, e para isso P2 sugere que Menelau seja usado. | |

| | | |
|---|---|---|
| usar Menelau. Fica aflito para falar sobre a figura<br>- S2 e S3: também interagem vendo onde aplicar Menelau<br>- S2: indica toda uma situação de aplicação<br>- S3 (com ajuda das mãos): seria legal usar o negócio dos três pontos (se referindo a três pontos colineares)<br>- P2: há várias possibilidades de aplicar Menelau. Vai ao quadro e organiza uma figura com os elementos necessários para a demonstração.<br># Toda a articulação de P2 é bem acompanhada por todos | | |

| Cena 25 | Interpretação | Ideia |
|---|---|---|
| - P2: então vai ter outro Menelau aqui. O Menelau virou um operador nosso<br>- S2: vai chegar num sistema<br>- P2: a gente tem que chegar em um único Menelau<br>- Contas sendo feitas no quadro branco<br>- S1: P1, ele escolheu uma secante, mas ele poderia ter escolhido a outra?<br>- P2: eu estou usando as três secantes<br>- P1: ou invés de ter escolhido dois triângulos e uma secante pra cada, nós escolhemos um triângulo e três secantes, esta não é a única forma<br>- S1: ah tá, entendi. Tem uma aqui, outra ali e outra ali (apontando pra o aplicativo exposto)<br>- P1: você poderia ter escolhido triângulos diferentes, por exemplo | <br>Com a imagem do Teorema de Pascal exposta P2 diz a eles que ali vai ter outro Menelau, e que o mesmo virou um operador para a gente.<br>Com o uso de Menelau partimos para uma demonstração do Teorema de Pascal.<br>Neste momento P1 explica que P2 escolheu usar um triângulo e três secantes para esta demonstração, mas poderia ter sido feito de outra forma, como por exemplo usando três triângulos diferentes.<br>P2 vai ao quadro (branco) e com auxílio dos participantes, as devidas operações algébricas são feitas, para a demonstração deste Teorema.<br>P2 diz que todo círculo é uma elipse. Todos concordam. P2 pergunta quem foi que disse isto a eles, gerando um momento de grande relevância.<br>E então P2 continua com o assunto e pergunta o que diriam se ele falasse que todo círculo é uma | O mundo (horizonte de atribuição de significados) projetivo sendo posto.<br><br>Objetos para a estruturação do projetivo vão se manifestando (cônicas). |

| | | |
|---|---|---|
| - P2: só que tem mais coisa aqui. Se eu fizer as contas nenhum se repete<br>S3: uhum<br>- P2: então precisamos de mais uma coisa, esta coisa vem da potência de pontos<br>- S3: explicando baixinho para S2 o que é uma potência de pontos<br># P2 faz no quadro branco a potência que interessa em nossa demonstração<br>- P2: então não é só um teorema projetivo, porque apelamos para um teorema que é Tales (se referindo à potência de pontos)<br>- P2: a secante também pode cortar o prolongamento dos três lados, eu vou ter que usar esta situação, porque no meu triângulo azul a secante RPQ, ela não está cortando ele, está cortando quem?<br>- S3: os prolongamentos<br>- P2: vamos ver se esta expressão que sobrou daqui, do trabalho algébrico corresponde ao espirito de Menelau aplicado neste triângulo azul, com esta secante tiverem aquela expressão, então estes pontos são colineares pelo Teorema de Menelau.<br># Seguimos com as contas para a demonstração<br>- P2: estamos usando o recíproco do Menelau, então está fundamentado que RQP são colineares<br>- P2: as demonstrações são sempre assim, elas apelam para o Menelau. Lembra que o Ceva também apelava para o Menelau, só que aqui | hipérbole, uma parábola? E aqui o grupo balança a cabeça, discordando do fato.<br>P2 pergunta porque um círculo pode ser uma elipse mas não pode ser uma parábola. Um dos integrantes do grupo fala que acha que até pode dar pois se pegarmos duas parábolas, uma de frente para outra, bem longe, teremos algo parecido com uma elipse.<br>Daí P2 diz a ele: hipérbole nem pensar né? Fazendo com as mãos um gesto, que é repetido pelo participante em questão, mostrando que na hipérbole as concavidades são espelhadas. | |

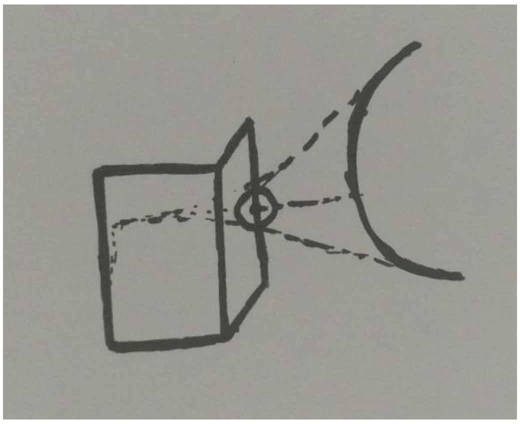
| | | |
|---|---|---|
| teve que ter uma ajudinha da potência de pontos<br>– P2: voltando pra questão da cônica todo círculo é uma elipse<br>- Sala: balançam a cabeça positivamente<br>- P2: quem falou isso pra vocês? Uma porção de gente<br>- Sala: concorda<br>- S1: Foi a Cristiane, foi a Tatiana<br>- S2: eu não consigo lembrar<br>- P1: eu não consigo lembrar nem se eu estudei antes<br>- S1: minha vida começou aqui<br>- P2: e se eu te falar que todo círculo é uma hipérbole? Vamos na parábola. Se eu falar que todo círculo é uma parábola, causa o mesmo frisson intelectual?<br>- S2: balança a cabeça negativamente<br>- P2: você passa não acreditar muito?<br>- S2: não, dá tela azul<br>- S1: concorda com S2<br>- P2: porque o círculo é uma elipse e não é uma parábola?<br>- S1: oh, até dá. Se você pegar duas parábolas, muito longe, então o ponto que elas vão se encontrar aqui e aqui, vai ser quaaaaaase<br>- P2: uma elipse<br>- S1: é, vai ter quase uma elipse<br>- P2: então de duas parábolas eu vou ter uma elipse?<br>- S1: sim<br>- P2: pelo que você está falando<br>- S1: é, pelo que eu consigo enxergar é<br>- P2: hipérbole nem pensar né? porque hipérbole (mostra com as mãos que na hipérbole as duas | | |

| | | |
|---|---|---|
| concavidades são espelhadas)<br>- S1: faz a mesma coisa que P2 com as mãos e confirma que pra ele não dá. Mas volta atrás e diz que dá e depois diz de novo que não dá | | |

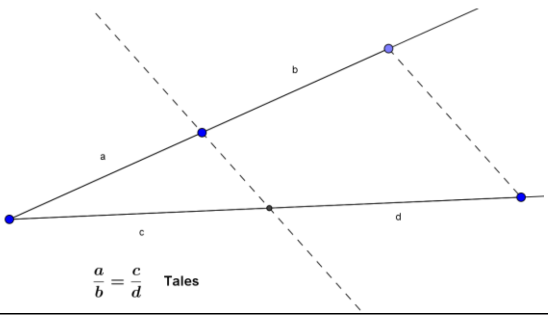
| Cena 26 | Interpretação | Ideia |
|---|---|---|
| - P1: coloca o aplicativo do Geogebra do Teorema de Pascal usando hipérbole<br>- P2: pergunta se eles conseguem ver o hexágono inscrito na hipérbole<br>- Sala: diz que sim<br>- P2: a lá o que está acontecendo, a mesma coisa (se referindo a este teorema na elipse e no círculo). O S1, por isso é que eu falo que o círculo é igual a hipérbole, porque o que acontece no círculo acontece na hipérbole<br>- S1: Ri. E por que que isso acontece?<br>- P1: porque na Projetiva as coisas não acontecem pra uma circunferência, pra uma elipse, elas acontecem pras cônicas e a hipérbole é uma cônica<br>- P2: ah, a P1 fechou, vale do ponto de vista da Geometria Projetiva<br>- P1: quando eu projeto uma circunferência eu não sei se a projeção vai ser uma circunferência, mas tudo que estava ali vale na projeção<br>- P2 - mexe no aplicativo da hipérbole – estou mexendo no meu hexágono, e meus pontos continuam colineares, mesmo o hexágono estando estrelado | P1 expõe na lousa um aplicativo do Teorema de Pascal feito em uma hipérbole. P2 pergunta se eles conseguem ver um hexágono ali e a resposta é afirmativa. E P2 pede a eles que observem que com a hipérbole acontece a mesma coisa que no círculo e na elipse, e eles concordam.<br>Perguntam à P1 porque isso acontece, P1 responde que para a Geometria Projetiva as coisas não valem para um círculo, uma elipse, uma hipérbole ou uma parábola e sim para uma cônica. P1 diz a eles que quando um círculo é projetado não pode garantir que a projeção será uma círculo, mas que todas as propriedades ali presentes serão mantidas.<br>Uma conversa sobre as semelhança entre as cônicas é mantida. | Aplicativo potencializa a generalização<br><br>Sentido do que são propriedades projetivas |

| | | |
|---|---|---|
| - S1: oh P1, então o ponto inicial é uma hipérbole, que a gente vê em G. A.?<br>- P1: é<br>- S1: aí depois você marcou os pontinhos... (se referendo aos vértices do hexágono)<br># Conversando sobre as semelhanças entre as cônicas na Projetiva<br>- P2: é um desconforto imaginar que um círculo se projeta como uma hipérbole, mas é | | |

Na cena 27 está disposto o que se mostrou acerca da proximidade projetiva entre as cônicas. Não foi registrada participação relevante do grupo, que apenas acompanha a exposição.

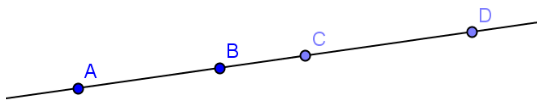
| Cena 27 | Interpretação | Ideia |
|---|---|---|
| # Falando das formas que um círculo pode ter ao ser projetado, mostrando que da projeção do círculo podemos obter hipérbole, elipse e parábola<br>- P2: este esquema referenda o que que é elipse, hipérbole e parábola, senão a mesma coisa, é apenas este círculo em posições diferentes | P2 apresenta um esquema que mostra as semelhanças entre as cônicas.<br> | |

A cena 28, a seguir, conta de uma pequena discussão acerca do que é uma métrica.

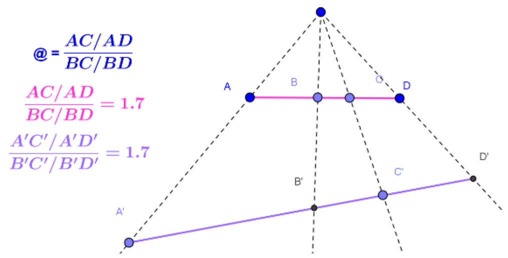
| Cena 28 | Interpretação | Ideia |
|---|---|---|
| - P2: se eu projetar uma estrutura de Tales. O Tales em um plano, se eu projetar em outro plano não é mais Tales<br># Conversamos sobre Tales<br>- P2: ele que é o pai da Geometria, ele que gera as relações métricas<br>– P1 fala que na Geometria Projetiva as relações métricas nem sempre são preservadas, mas que as relações da Razão Cruzada são preservadas nas projeções<br>- P2: gente, o que é uma Geometria sem contas pra fazer? Existe isso?<br>- S1: não faço ideia<br>- P2: vocês conhecem a Topologia?<br>- S1: não<br>- P2: já ouviram falar?<br>- S3: vagamente | P2 faz projeções sobre a relação de Tales tanto com imagem no quadro branco quanto com luzes em cima de uma estrutura de palitos de churrasco.<br>P1 diz que as relações métricas não são preservadas na Geometria Projetiva mas as relações da Razão Cruzada sim.<br>P2 pergunta sobre como seria uma Geometria sem contas para fazer e os participantes não sabem o que responder e então pergunta se conhecem ou já ouviram falar em Topologia. E um diz que não conhece e o outro que já ouviu falar vagamente.<br><br> | Caráter qualitativo de geometrias desconhecido. |

Nas cena 29 e 30, após sua apresentação teórica, o grupo trabalha vários aspectos da Razão Anharmônica, ou Razão Cruzada, terminando em ações sobre feixes projetivos.

| Cena 29 | Interpretação | Ideia |
|---|---|---|
| # P2 e P1 falando sobre a Razão Cruzada, que foi usada por Pappus<br>- P2: então gente, esta Geometria não tinha conta nenhuma pra fazer, era uma Geometria só de colinearidade, de incidência de três retas, até que alguém | Falamos sobre uma relação entre a Razão Cruzada e o Teorema de Pappus. Apresentamos uma figura para representar o Teorema de Pappus.<br>P2 diz a eles que esta é uma Geometria de colinearidade e incidência.<br>É dito a definição da Razão Cruzada ou Razão Anharmônica. | |

| | | |
|---|---|---|
| lembrou, alguém do século XVII, lembrou ou descobriu<br>- P1: mostra a figura do Teorema de Pappus, fala que nesta figura ele não usa o polígono e sim o encontro dos segmentos que vão de ponto a ponto.<br>Eu não posso garantir medidas, mas a proporção é mantida<br>- P2: escreve no quadro de outra forma a Razão Cruzada<br>- S1: pergunta a quanto isso é igual<br>- P1: o valor é variante<br>- P2: isso é um número<br>- P1: não é um número fixo igual é o Menelau<br>- S3: e por que isso é importante?<br>- P1: pra que eu possa achar um quarto ponto por exemplo<br>- P2: o número não tem nada de especial nele, é um número. Se eu projetar estas medidas. Quando você projeta todas as medidas se modificam<br>- P1: mas a relação se mantém<br>- P2: Razão Anharmônica<br>- P1: ou Razão Cruzada<br>- P2: Razão Cruzada dá pra explicar, é porque os segmentos se cruzam. Cross Ratio, razão em cruz, porque o BC cruza com o BD | Razão Cruzada<br><br>$\frac{AC.BD}{AD.BC}$ | |

| Cena 30 | Interpretação | Ideia |
|---|---|---|
| # Razão Harmônica<br>- P2: fala que a Razão Harmônica o grupo conhece<br>- Sala: não confirma<br>- P1: define a Razão Harmônica<br>- S1: acho que o P2 falou isso na aula | P2 fala à turma que eles conhecem a Razão Harmônica o que não é confirmado.<br>P1 define a Razão Harmônica e aí então um deles diz achar ter ouvido isto na aula. Daí, P2 diz a eles que a Divisão Harmônica é algo euclidiano.<br>P1 apresenta a eles um aplicativo para que possam visualizar esta Divisão. P1 então mexe | |

| | | |
|---|---|---|
| - P2: capítulo dois do João Lucas, exercício 13. Divisão Harmônica<br>- S1: balança a cabeça positivamente<br>- P2: pergunta a S2 e S3 se eles conhecem a Divisão Harmônica<br>- S2 e S3: não confirmam<br>- P2: Divisão Harmônica é uma coisa euclidiana, vamos dizer assim, tanto é que o Apolônio é que estuda ela<br>- P1: apresenta um aplicativo para mostrar a Divisão Harmônica<br>- P1: mexe no aplicativo<br>- P2 pergunta a sala: o que que a P1 fez ali? Ela fez duas coisas diferentes<br>- P1: primeiro eu mexi com o D, depois eu mexi com o B.<br>- P2: Primeiro você mexeu e não acontecem nada, depois você mexeu e aconteceu<br>- S2: foi o que ela fez com o D<br>- P1: então, foi isso que eu fiz, primeiro mexi o D<br>- P2: agora têm três coisas<br>- P1: mexe no ponto A’<br>- P2: gostei, mexe de novo<br>- P2: vamos apresentar feixe, pra gente começar a falar de feixes<br>- P1: define Feixes Anharmônicos<br>- P2: então o número chave aí é quatro, né? Sabe por que? Porque eu lembrei que o outro nome da Razão Cruzada é Razão de...<br>- P1: de quatro pontos<br>- P2: como é que uma pessoa acredita nisso? (se referindo ao fato de que no feixe anharmônico a proporção é mantida quando projetamos um segmento) | com os pontos criados no aplicativo para que possam ver o que ocorre.<br>P2 fala sobre feixes e P1 então define Feixes Anharmônicos.<br>P2 diz a eles que estes feixes se assemelham a feixes de luz<br> | |

| | | |
|---|---|---|
| - P1: mostra que o fato de os valores serem iguais nas razões dos segmentos não é uma coincidência, e que o segmento original é um segmento qualquer, para isso movimenta os pontos no aplicativo<br>- P2: afinal de contas o que é um feixe de quatro retas, todas saindo de um mesmo ponto, é uma coisa que projeta, é como se fossem raios de luz projetando<br>- P2: toda a vez que a gente fala em um número ele expressa uma razão, na Geometria a razão é a razão entre duas medidas. Aqui está dando problema porque o número é a razão entre duas razões | | |

Na cena 31 uma nova atividade é posta em discussão: a razão anharmônica pode ser equivalida a uma razão entre dois segmentos, e isso abre oportunidade de se questionar o quanto podemos prescindir de usar paralelas.

| Cena 31 | Interpretação | Ideia |
|---|---|---|
| - P2 e P1 propõem a atividade:<br># Determine uma razão de duas linhas que seja igual à Razão Anharmônica de quatro pontos dados<br>- P2 propõe que façamos esta juntos. Vamos passar uma paralela.<br>- P2: e aqui vai uma crítica até a nossa visão de Geometria Projetiva,<br>- porque você pode me falar: toda hora você que não tem mais paralela. Realmente a Geometria Projetiva não é a Geometria das paralelas, até as paralelas se encontram | Propomos uma nova atividade: determinar uma razão de duas linhas que seja igual à Razão Anharmônica de quatro pontos dados. | |

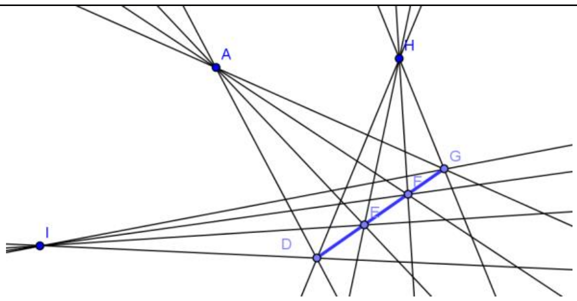
| | | |
|---|---|---|
| no infinito. - Aí você pode falar: mas você vai usar? – vou.<br>- P2: estou falando uma coisa e fazendo outra, está valendo tudo. Agora vocês me ajudem aqui<br>- P2 começa a fazer esta atividade no quadro com a turma<br>- P2: pra mim é esquisito, então eu leio ela como sendo razão que eu obtenho aí, de dois segmentos | | |

Nas cenas 32 e 33 é explorada a projetividade da razão anharmônica, a partir de aplicativo no Geogebra. Termina-se explorando essa regularidade em feixes projetivos.

| Cena 32 | Interpretação | Ideia |
|---|---|---|
| # Vamos para a atividade: verifique a projetividade da Razão Anharmônica<br># para isso usamos o aplicativo já apresentado e para uma outra verificação o desenho da figura anterior<br>- P2 no quadro branco: é aquilo que o Pappus falou a razão dos quatro pontos ABCD, é a mesma da razão observada em A'B'C'D'. Lembrando que isso a P1 já mostrou com o Geogebra, o que estamos falando é uma demonstração matemática<br># Apresentamos uma ideia mas esta é deixada para eles como tarefa para casa<br>- P2: o que que está pedindo? Para ver se o número que resulta na transversal de cima é o mesmo da transversal de baixo | Aqui pedimos a eles que verifiquem a projetividade da Razão Anharmônica. | |

| | | |
|---|---|---|
| - Sala: faz perguntas para ver se estão de fato entendendo o que tem que ser feito, o que acaba deixando a atividade praticamente pronta faltando apenas escrever<br>- P2: quando a P1 apresentou o aplicativo, eu vi duas coisas, quando ela mexia o ponto D, não mexeu no feixe<br>- P1: quando eu mexo no D, eu carrego todos os pontos, então não altera nada porque eu mexi tudo com ele<br>- P2: eu estou vendo além disso, quando você mexe no D você não mexe no feixe<br>- P1: no Geogebra isso está acontecendo porque toda a minha construção depende de A e de D<br>- P2: então quando ela mexe em D a razão se mantém, quando ela mexe em B ou em C a razão é alterada, mas mudou nos dois, em cima e em baixo<br>- P2: conclusão que a gente pode chegar – quando eu olhar para um feixe aqui já tem um número, independente se eu passar a transversal inclinada, na horizontal | | |

| Cena 33 | Interpretação | Ideia |
|---|---|---|
| # Para encerrar este dia de aula P2 apresenta um encontro que feixes<br>- P2: eu faço um feixe ele tem uma Razão Anharmônica depois pego um ponto fora dele e faço outro. Qual é a Razão Anharmônica deste outro feixe? Imagina que eu estou transmitindo dados. | No fim desta aula P2 apresentou a eles a ideia de encontro de feixes. Disse que basta que se faça um feixe e que passemos nele um segmento. Então de um ponto fora deste feixe traçamos retas que vão deste novo ponto ao ponto de intercessão do segmento criado com o feixe anterior.<br>P1 diz a eles que era isso que os artistas renascentistas faziam, transportando uma imagem até o local onde precisavam. | Percepção de invariâncias projetivas. |

| | | |
|---|---|---|
| Cada feixe eu estou fazendo uma transversal, para lembrar que é a maneira de eu ler a razão de um Feixe Anharmônico é através de uma transversal<br>- P2: vamos lá, eu tenho o primeiro feixe, tenho a Razão Anharmônica dele, e do primeiro para o segundo? O que acontece?<br>- S2: a razão é mantida<br>- P2: sim. Qual é a razão do quinto feixe? A mesma.<br>- P1: era isso que os pintores faziam, eles iam levando de um lugar para o outro até conseguir chegar no lugar em que eles queriam, para ter mais proporção |  | |

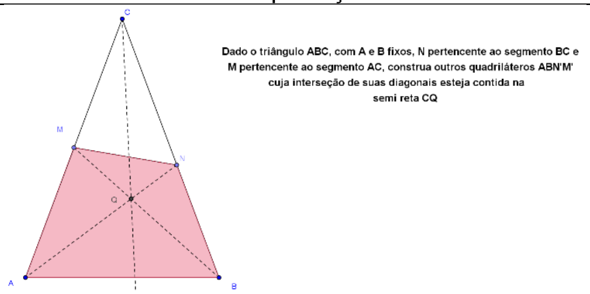
Na seguinte cena 34, vemos a retomada de tema ligado ao Teorema de Pascal já visto, revendo suas possibilidades com auxílio do *software*.

| Cena 34 | Interpretação | Ideia |
|---|---|---|
| - P1 (buscando um assunto que não foi terminado na aula passada): eu tentei fazer para o heptágono, a primeira coisa que eu esbarrei foi, não tem jeito (sobre Pascal)<br>- P2: pela própria definição<br>- P1: de achar os lados opostos, aí o P2 falou para eu fazer um octógono, aí sobrepus um ponto<br>- Sala: atenta a movimentação feita no Geogebra<br>- P1: não têm condições<br>- P2: se desse certo para o octógono, daria certo para o heptágono porque a gente está reduzindo sempre | Anteriormente (durante a apresentação do Teorema de Pascal), ficou combinado que nós vamos tentar fazer o teorema para um heptágono. Digo a eles que tentei mas diretamente para um heptágono eu não consegui e que então faço para um octógono e sobreponho um ponto mas que também não dá certo.<br>Em conversa chegamos à conclusão de que possivelmente para um octógono especifico deva valer (mexemos no aplicativo do octógono para que possamos tentar achar um que funcione), mas um participante ressalta que logo isso não vale, pois se vale apenas para um não é regra matemática.<br>O Geogebra se mostra um meio de comunicação entre todos. | Relações projetivas seguem sendo objetos compreendidos e dialogados.<br><br>Geogebra sendo usado como meio de comunicação. |

| | | |
|---|---|---|
| - Sala: balança a cabeça concordando<br>- P1: descobre que a tela está funcionando o touch, o que causa um momento de conversa sobre<br>- P2: então, o teorema é valido para seis<br>- S2: aí perde a colinearidade dos pontos?<br>- P1: é, se perdeu a colinearidade<br>- S2: o sentido<br>- P1: o sentido para a projeção<br># O octógono gera quatro interseções<br>- P1: eu não consigo colinearidade nem de três pontos, apenas dois a dois<br>- P2: P1, mexe aí, faz três pontos ficarem alinhados, é outra saída nossa, você mexeu aí eles ficaram alinhados<br>#- P1: eu acredito que deva ter um octógono específico que encontre<br>- S2: é<br>- P2: claro, porque a gente já achou um contra exemplo<br>- S2: será que o regular não encontra não?<br>- P1: não sei<br>- P2: não, porque vai ficar paralelo<br>- P1: é verdade, no hexágono não dá<br>- S2: concorda<br>- P2: pede a P1 que volte o desenho de forma que dá pra ver que eles realmente não estão alinhados, os três pontos<br>- P2: nós quatro fizemos e vimos que tem um contra exemplo<br>- S1 e S2: concordam<br>- P2: mas vimos também que com alguma especificidade que nós não vamos descobrir agora mesmo<br>- S2: Mas aí não é valido, porque tem que | | |

| | | |
|---|---|---|
| ser valido para todos, para uma só não adianta<br>- P1: é, eu até acho que a gente vai achar um, mas não acho que o teorema seja válido, porque no caso do hexágono o teorema nem especifica que tipo de polígono é P1 deixa, visualmente alinhado, os três pontos. Reduz o zoom para que o quarto ponto apareça | | |

Mais uma atividade é apresentada, envolvendo a ideia de quadrilátero completo. As discussões são profícuas, pois aventa-se soluções euclidianas (cena 35). Na cena 36, sentindo-se necessidade de reforçar conceitos, faz-se uma exposição complementar.

| Cena 35 | Interpretação | Ideia |
|---|---|---|
| - P1: apresenta a atividade sobre o quadrilátero<br>- P2 e P1 explicam o que deve ser feito<br>- P2: vamos lá desenha um triângulo aí ABC<br>- S2: eu fiz um triângulo bem aleatório aqui (S2, faz no Geogebra um triângulo em posição diferente do meu, com o ponto C na base do triângulo, sem se preocupar com a localidade dos pontos)<br>- S1: cadê N?<br>- P1: o N está no segmento BC<br>- S2: o M está no segmento AC e N no segmento BC<br>- P2: a lá o C está lá em cima<br>- S2: eu estou fazendo o contrário<br>- P2: então renomeia aí. Ou você muda ou a gente muda | <br>P1 passa uma nova atividade mostrando a eles um aplicativo (exatamente igual ao print acima).<br>Um participante pergunta sobre onde devem, exatamente, devem estar os pontos do quadrilátero, P1 diz a eles que o triângulo deve ser qualquer e que o N deve estar no segmento BC, independentemente da posição do triângulo e o outro participante completa dizendo que o M deve estar no AC.<br>Os dois participantes presente começam a fazer conjecturas a respeito.<br>Em certo momento eles forçam que as diagonais se encontrem na reta CQ, conseguindo então chegar na ideia da criação de um quadrilátero que se encaixe no pedido da atividade, P1 então diz a eles que daria certo sim, mas que gostaria que eles fizessem de uma forma que pudessem achar todos os triângulos possíveis.<br>P2 pergunta se eles lembram do que foi falado sobre Quadrilátero Completo. Não fazem uma | Contraposição de mundos, euclidiano e projetivo. |

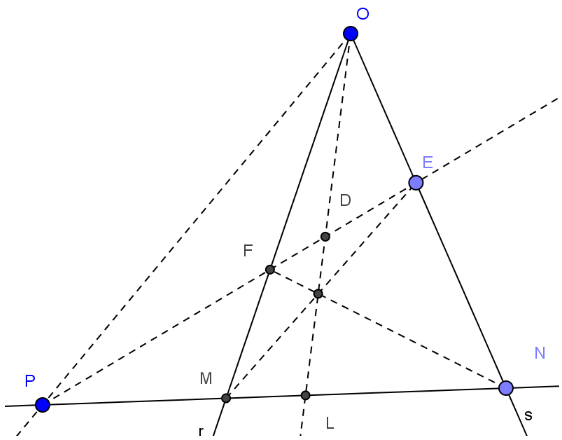
| | | |
|---|---|---|
| - S2: mas o resultado vai dar do mesmo jeito, gente<br>- P1: sim<br>- P2: é, então vai<br>- S2: um N qualquer né?<br>- P1: sim<br>- S2: e M no AC<br>- P2: põe mais perto de A por favor<br>- S2: só que eu não sei se ele está pertencendo aqui<br>- P2: acho que sim<br>- P1: pertence, se ele está desta cor ele está no segmento<br>- S2: A tá<br>- P2: agora que o triângulo ABC e o quadrilátero ABMN já estão prontos, precisamos fazer os quadriláteros, que tenham o M e o N diferente destes, mas que atendam ao enunciado<br>- S2: Q já é dado ali né?<br>- P2: é<br>- P2: agora tem que fazer a reta CQ<br>- S2: pronto<br>- P2: então vamos, construa novos quadriláteros, de maneira que a interseção deles também se encontrem na reta CQ, assim como o ponto Q<br>- S2: mas aí pode mexer o ponto, não pode?<br>- P2: o MN são fixos, o que você pode fazer é criar um M' e mexer ele<br>- S1 e S2 criam o ponto M'<br>- P1: acho que se vocês criarem o polígono vai ficar mais fácil de vocês visualizarem. Mostra a S1 como cria um polígono no Geogebra, fala que tem que ir nos quatro pontos e voltar no primeiro para terminar o polígono.<br>- S2: porque senão não fecha | cara muito receptiva. P2 diz a eles que: é um quadrilátero, qualquer, que além dos lados, você prolonga lados opostos. Então além do ABCD básico, tem E (o ponto de encontro dos lados opostos).<br>Em seguida fazem novas conjecturas sobre a atividade, o que desta vez envolve o prolongamento, do encontro dos lados opostos do quadrilátero.<br>Eles encontram um ponto e fica faltando apenas um ponto para formar o quadrilátero pedido. P1 então faz uma intervenção perguntando a eles o que falta para formar um quadrilátero. Um quarto ponto. Assim acabamos conseguindo completar a atividade.<br>Essa atividade mostra um inicial desacerto entre os pesquisadores, querendo ambientar questão no projetivo, e os sujeitos, não imediatamente imersos nisso. Encaminhamentos euclidianos sucedidos se manifestaram da parte deles. | |

| | | |
|---|---|---|
| - S1: comenta diferença entre o desenho inicial deles e o de P1<br>- P1: é porque o meu está de cabeça para baixo em relação ao de vocês<br>- S2: mas dá pra mudar não dá?<br>- P1: dá, é só mudar os pontos de lugar<br>- S1: agora o que que você quer, P1?<br>- P1: eu quero que você encontre um quadrilátero ABM'N', cujo ponto de interseção de suas diagonais também esteja na semirreta<br>- S1: então eu tenho que fazer outros pontos<br>- S2: mas aí são todos os pontos, não?<br>- P1: mas como é que você vai fazer para achar esses pontos?<br>- S1: então tudo linha ('). Então eu preciso colocar um aqui e outro aqui (se referindo a AC e BC)<br>- P1: sim, mas você acha que ele vai ficar CM'N'?<br>- S2 fala com S1: liga aí, faz as diagonais. Porque o encontro das diagonais tem que bater na semirreta aqui<br>- P1: se o quadrilátero que você está fazendo for o que pedi, o encontro das diagonais dele, vai bater na semirreta CQ, foi isso que S2 te falou<br>- S1 e S2: balançam a cabeça positivamente<br>- S1: entendi, então eu posso marcar um ponto, fazer uma diagonal e ficar a cargo de achar apenas o outro ponto?<br>- P1: pode<br>- S1 e S2 voltam uma parte da construção para começar a marcar um ponto em um dos lados | | |

| | | |
|---|---|---|
| - P1: S1, eu não te disse que é assim que faz, só como prova que está correto, tudo bem<br>- S1 e S2: tentam mexer em uns pontos<br>- S1: não tem jeito P1<br>- P1: fala que tem<br>- S1 e S2 voltam a mexer nos pontos<br>- S2: tem a ideia de passar duas retas que se encontrem em CQ<br>- P1: fala pra ela que dá certo, mas que desta forma ela acho apenas um<br>- S2: é<br>- P1 pergunta: mas como você faria para achar a regra geral?<br>- S2: vamos lá, eles têm um lado em comum sempre, que é este aqui de baixo<br>- S1: têm a ver com feixes?<br>- P2: nós já falamos de Quadrilátero Completo?<br>- S1: faz uma cara de quem não lembra. Quadrilátero Completo. O que que é Quadrilátero Completo? Me auxilia aí<br>- P2: é um quadrilátero, qualquer, que além dos lados, você prolonga lados opostos. Então além do ABCD básico, tem E (o ponto de encontro dos lados opostos)<br>- S1: Mas aqui só tem uma ponta<br>- P2: uai, mas às vezes não tem porque ninguém apontou<br>- S2: então o encontro aqui, o encontro aqui. O encontro vai ser sempre o C<br>- S1: uma daquelas pontas ali. Mas acho que não é por este caminho não<br>- S2: também não. Se bem que se ele falou (sobre isso)<br>- S1: pede dica | | |

| | | |
|---|---|---|
| - P1: dica – se o P2 falou sobre isso...<br>- S2: a ponta dele vai ser sempre o C<br>- S1: não, uma das<br>- S2: é uma das<br>- S1: então vamos achar outra.<br>- S1 e S2: acham outra ponta<br>- S2: mas a outra ponta de qualquer destes vai cortar o prolongamento deste lado aqui de baixo<br>- P1: uhum<br>- S1 e S2: usam o ponto que acharam na interseção dos lados opostos do Quadrilátero Completo e o polígono que S2 achou forçando a construção do quadrilátero pedido, para tentarem resolver<br>- S2: a gente já tem o E (ponto de interseção dos lados opostos do Quadrilátero Completo)<br>- P1: e sabe que tem que usar<br>- S2: é. Sugere criar uma reta a partir de E<br>- P2: o importante é passar pelo E<br>- Todos: uhum<br>- P2: então tem que começar do E<br>- S1: sugere uma reta que passe em E e vá até um lado do triângulo<br>- P2: agora você precisa definir o quadrilátero<br>- P1: o que você precisa para ter um quadrilátero<br>- S2: outro ponto<br>- S1: o outro ponto fica aqui (aponta o outro lado do triângulo)<br>- P2: isso<br>- P1: exatamente<br>- S1 e S2: constroem o outro ponto e o quadrilátero<br>- P1: faz a atividade na tela iterativa, para facilitar a visualização, já que o deles ainda continha tudo o que eles tentaram para atingir o objetivo | | |

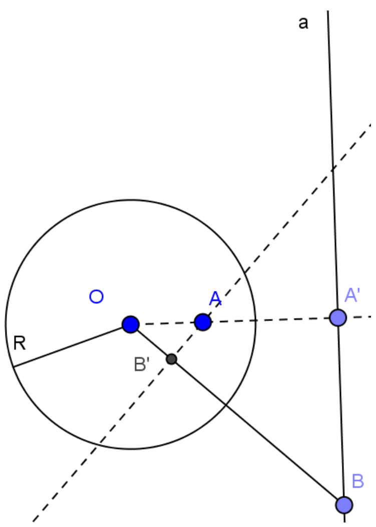
| | | |
|---|---|---|
| - S2 fala com S1: você não pode criar o ponto, você tem que ver onde a reta vai encontrar<br>- S1 e S2: seguindo a sugestão de P1 refazem o desenho para ter uma imagem mais “limpa”<br>- P2: o deles ficou diferente<br>- P1: é que a gente colocou o N mais baixo do que o M e eles o contrário, por isso que o deles ficou para o outro lado | | |

| Cena 36 | Interpretação | Ideia |
|---|---|---|
| – P2 vai para o quadro branco para fazer uma exposição<br>- P2: você tem um ângulo e um ponto, vou passar uma secante. Seja o ângulo ORS e o ponto P<br>- P2: traça a secante PMN.<br>Isso tem a ver com a atividade, mas tem a ver com conjugação harmônica também.<br>Eu vou pegar aqui o ponto L, olha para o segmento MN. Lembra daquele negócio de dividir dentro e fora?<br>- S1: sim<br>- S2: balança a cabeça positivamente<br>- P2: na mesma razão, P e E.<br>Quando você tem o segmento e um ponto externo, o interno é consequente.<br>Considere R conjugado harmônico de P. Agora olha só que interessante, nós vamos traçar este raio OL.<br>Por que raio? Porque no estudo de feixes cada reta é um raio, tem a ver até com projeção. | Neste momento P2 faz uma exposição, para que aumente a percepção do grupo, que está resolvendo uma atividade. Relembra aos participantes que todo Quadrilátero Completo que tem os mesmo encontros de lados opostos tem também o encontro das diagonais alinhados.<br>Discutimos, também sobre o que seria ponto e o que seria reta.<br><br><br>Seja ∢ Ors e P<br>● traça secante PMN<br>● considere L, conjugado harmônico de P<br>● traça raios OL e OP<br>⇒ feixe O (OP, OM, OL, ON) é harmônico<br>por exemplo: se traçar secante<br>PFDE, ⇒ $\frac{DF}{DE} = \frac{PF}{PE}$ | Mundos projetivo e euclidiano em complementação recíproca. |

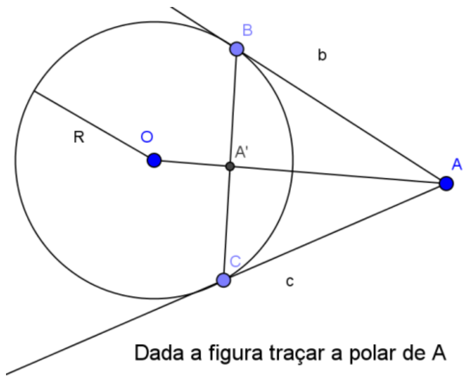
| | | |
|---|---|---|
| O Raio OP eu não preciso mas vou deixar ele aqui visualmente. A lá, é um feixe. Se na secante PNLM, eu tenho uma razão harmônica. Aqui eu tenho a mesma razão Anharmônica, porque como a gente já viu dentro do mesmo feixe todas as secantes vão ter a mesma razão.<br>- P2: fala novamente sobre Divisão Harmônica. O P e o D são Conjugados Harmônicos.<br>É mais ou menos o que a gente está fazendo neste exercício, olha aqui o Quadrilátero Completo, respondendo à pergunta de S1 (se feixes tinha a ver com a atividade). Compara a figura feita por ele no quadro e a atividade feita por S1 e S2.<br>Então todo Quadrilátero Completo que tem os mesmos encontros de lados opostos, tem também o encontro das diagonais alinhados. Isso que eu fiz aqui é a teoria para isso, porque fica a dúvida, por que isso deu certo? Embora nesta atividade também caiba Menelau<br>- P1: é, quando a gente fez esta atividade, a gente usou Menelau, por isso, S1, que eu te disse que EU não usei feixes<br>- S1: o Menelau teria um bico só, né?<br>- P1: é corta dois lados e o prolongamento. Então AB seria o prolongamento e o AC e o BC os dois lados que ele corta<br>- S1 e S2 verificando a fala de P1 na figura feita por eles<br>- P2: toda Geometria tem ponto e reta. E como é que é? Ponto é | | |

| | | |
|---|---|---|
| uma coisa e reta é outra?<br>- S2: Não (balançando a cabeça negativamente)<br>- P2: uai é a mesma coisa?<br>- S2: não, uma reta é um conjunto de pontos, né?<br>- P2: isso é o que você está falando, eu não sei. Não, é uma definição, mas é complicado. Um círculo também é um conjunto de pontos<br>- S2: por dois pontos passam uma reta<br>- P2: a tá, aí melhorou. Por dois pontos passam infinitos pontos, estou usando o círculo como contraponto. O legal da Geometria Projetiva é ... – não, também tem ponto e reta, tanto é que tem colinearidade é de pontos e incidência é de retas – só que reta vira ponto e ponto vira reta | | |

Da cena 37 a 40 mostra-se a exploração da ideia de Polo e Polar, com a sugestão de se fazer uma atividade aplicativa ao final.

| Cena 37 | Interpretação | Ideia |
|---|---|---|
| # P2 inicia a apresentação da teoria de Polo e Polar<br>- P2 apresenta no quadro as definições e contas apresentadas na foto<br>- S1: P2, mas porque que você falou que ponto vira reta e reta vira ponto? É só a relação que eles têm? É isso?<br>- P2: relação que eles têm em relação ao círculo. Esta reta ‘a’ é polar do ponto ‘A’ em relação a este círculo<br>- S1: tá. Tem que ter o círculo né?<br>- P2: é. Mas eu quero falar disso agora |  | Objetos projetivos ganham adesão e interesse. |

| | | |
|---|---|---|
| - P1: Na Geometria Projetiva tudo que é válido para pontos pode ser aplicado para reta, é o Princípio da Dualidade. O que serve para um serve para o outro<br>- P2: Conclusão: Se ‘A’ pertence à polar ‘b’, então, ‘B’ pertence a ‘a’, em relação ao mesmo círculo, claro. Outra coisa ponto dentro (do círculo) polar fora, ponto fora polar dentro. | Polar e Polaridade<br>Definição: seja A' de modo que<br>OA . OA' = R²<br>A' é dito inverso de A<br>também:<br>reta a perpendicular a OA por A'<br>→ reta a é dita reta polar de A (assim como, A é dita polar de a)<br><br>Seja B ∈ a, b perpendicular a OB → B'<br>prove que b e polar de B<br>$\frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'} \therefore OA.OA' = OB.OB' = R^2$<br><br>P2 faz nova exposição, aqui sobre polo e polar.<br>Uma dos participantes pergunta a P2 porque ele diz que ponto vira reta e reta vira ponto, P2 responde que tem relação ao círculo da exposição.<br>P1 diz, também, que tudo que é válido para um é válido para o outro. | |

| Cena 38 | Interpretação | Ideia |
|---|---|---|
| – P2 vai ao quadro fazer uma observação<br>- S2: mas ali, pelo ‘A’ pertencer ao círculo, vai ser a reta tangente?<br>- P2: isso. Primeiro me responde uma coisa, quem é o A’?<br>- S1: o centro de outro círculo<br>- P2: o A’ é o centro de outro círculo<br>- S1: igual a este aí<br>- P2: como OA já é igual a R, então ‘AO’ tem que ser R<br>- Sala: concorda<br>- S2: e como tem que estar alinhado<br>- P2: tem que estar alinhado. Se um ponto está no círculo, ele é o inverso dele mesmo<br>- S2: ah, entendi<br>- S1: balança a cabeça positivamente<br>- P2: A é inverso de si mesmo. Aí S2, você falou tangente né?<br>- S2: balança a cabeça concordando | <br>Dada a figura traçar a polar de A<br><br>A ∈ b → B ∈ a<br>A ∈ c → C ∈ a<br>a passa por B e C<br><br>P2 vai ao quadro, novamente, faz algumas observações e em seguida propõe a turma que tracem a polar de A (como na figura acima). | Compreensões projetivas se fazem. |

| | | |
|---|---|---|
| - P2: é tem a ver com tangente sim, porque se a polar é perpendicular do inverso, a perpendicular aqui é tangente, e ‘a’ é tangente ao círculo<br>- P2: aqui tem um probleminha (vide foto)<br>- P2: porque dado o A a polar dele é só fazer as contas<br>Eu tenho E, AO, AO’ é uma incógnita, mas sem fazer as contas<br>- S2: vai ser aquele negócio que a gente usa direto na sala (se referindo a uma matéria feita por S2)<br>- P2: o que?<br>- S2: o ponto vai ser..., o A’ vai ser..., aí meu Deus, esqueci o nome. Média geométrica? É, porque vai ser $R^2$ ali<br>- P2: é, na verdade o raio é que vai ser média geométrica, porque o raio que está ao quadrado.<br>Ah, tá. Entendi o que você falou. Tá, você está certa. Aqui o raio é dado.<br>- S2: Uhum<br>- P2: e OA é dado, então, se eu marcar OA. Tales, tá bom?, OA e R, marcar R de novo, marcar uma paralela aqui, OA’ aparece.<br>OA está para R, assim como R está para OA’<br>Mas eu me esforcei demais, eu quero com pouco esforço<br>Então ok. O que que isso mostra? Que muita coisa desta nossa Geometria aqui se resolvem com a Geometria<br>- S1: Geometria Euclidiana<br>- P2: Talesianas, aqui no caso<br>- P2: traçar a polar, é a reta polar | | |

| | | |
|---|---|---|
| - S1: o A é o encontro da polar do B e da polar do C, não é isso?<br>- P2: isso<br>- S1: agora o que que faz com isso?<br>- P2:<br># A ∊ b<br># A ∊ c<br># Se A ∊ b, então o B ∊ a<br>- S1: agora fechou, desce um linha ali, por dois pontos num passa uma reta?<br>- P2: se o A ∊ c<br>- S1: C ∊ a<br>- P2: o seja a reta 'a' passa por<br>- S1 e S2: A e B<br>- S1: fechou<br>- P2: a polar ficou bem definida ali?<br>- S1 e S2: balançam a cabeça em afirmativa<br># Seguimos com polaridade<br>- P2: reta polar de P em relação ao ângulo R ou S, seja o ângulo e T, eu fiz a reta polar.<br>Então juntando as duas teorias: polaridade é harmonia<br>O encontro das diagonais de um Quadrilátero Completo, está na polar, no ponto<br>- S1: e onde é que está o círculo?<br>- S2: é?<br>- P2: aqui tem um círculo, boa pergunta. Não é que qualquer quadrilátero tem círculo não, mas o harmônico tem.<br>- S1: entendi<br>- P2: não estou querendo dizer que o Q é o ponto inverso de P não, tá? Isso não foi dito. Mas que aqui é a reta pzinho. Então harmonia tem polaridade, polaridade é harmonia | | |

| Cena 39 | Interpretação | Ideia |
|---|---|---|
| – P2 e P1 propõe a seguinte atividade:<br># Trace uma tangente de um ponto a um círculo, sem usar o compasso.<br>- P2: problema super clássico, traçar aquelas duas tangentes. S2 sabe fazer com régua e compasso.<br>- S2: balança positivamente a cabeça<br>- P2 comenta com S2 como é feito com régua e compasso.<br>- P2: mas aqui não pode usar o compasso. Senão pode usar o compasso, eu não posso usar a Geometria usual.<br>Pode fazer aí gente, os dados são um círculo e um ponto<br>Chama o ponto de A.<br>- S1: muito simples (risos).<br>Não uai, acha a polar daquilo dali ou polo.<br>- P2: acha o polo de quem?<br>- S1: de A<br>- P2: não, o A é ponto. Achar o inverso?<br>- S1: achar o inverso, é<br>- P2: tá<br>- S1: Ai vai ter uma reta que é perpendicular<br>- P2: e ela é a reta o que?<br>- S1: a reta o que?<br>- P2: esta reta quem que é?<br>- S1: é, polo ou polar de A<br>- S2: polar<br>- P2: polar. É o 'a'.<br>- S1: o 'a'. Aí como ela é perpendicular, ela vai bater num ponto ali<br>- P2: vai bater em dois<br>- S1: em dois. Mas ali está pedindo uma tangente só.<br>Aí você tem um ponto ali, você liga ele no A, e aí deu uma tangente. Não? | Propomos aos integrantes do grupo que façam uma nova atividade: traçar uma tangente de um ponto a um círculo sem usar o compasso.<br>P2 lembra a eles que se não podem usar compasso, não podem usar Geometria usual.<br>Grupo começa a fazer conjecturas a respeito da atividade. | Procedimentos projetivos aceitos (sem compasso).<br><br>Percepção do potencial geométrico do projetivo. |

| | | |
|---|---|---|
| - P2: está certo<br>- P1: está certo. Mas eu quero saber como é que você vai fazer pra achar | | |

| Cena 40 | Interpretação | Ideia |
|---|---|---|
| - P2: o A'. Você não pode usar o compasso<br>- P1: o que você falou procede mas como é que você vai achar a reta 'a'<br>- P2: ou o A' ou o 'a', tanto faz aí.<br>Então vai achar, sem usar o compasso<br>- S1: joga naquela formulinha ali<br>- P1: não, não precisa fazer a conta<br>- P2: não, sem conta. É pra resolver por geometria graficamente. E outra coisa, não pode usar o Tales. O Tales em si não, mas pra marcar as medidas você está usando compasso, então não pode usar Tales<br>- S1: passar uma secante, então, de A...<br>- P1: usa secante sim<br>- P2: círculo, o A é quem aqui?<br>- S1: esta MN, aí oh<br>- P2: não, primeiro me responde quem é o A<br>- S1: o A é o P<br>- P2: a tá, o A é o P. Não precisa mudar não, né?<br>- S1: não<br>- P2: bom, e daí. O MN..<br>- S1: vai ser a reta secante, saindo de A<br>- P2: vai ser a reta ou uma reta?<br>- S1: uma reta<br>- P2: é. Até porque pela teoria que nós vimos não importa a secante, todas elas têm a mesma conjugação<br>- S1: concorda<br>- P2: MN | P1 diz a S1 que os pensamentos dele estão corretos, mas pergunta como fará para atingir o objetivo da atividade.<br>O Quadrilátero Completo é citado aqui, e o grupo acaba fazendo uso dele para resolver a atividade.<br>P1 mostra ao grupo a atividade, feita por ela.<br>P1 faz a mesma atividade, mas de outra forma. A atividade feita por P1 não usa Quadrilátero Completo, usa Polo e Polar.<br>E o grupo faz comparações entre as duas formas de fazer a atividade. | Conjunto de objetos projetivos se articulando. |

| | | |
|---|---|---|
| - S1: pode puxar uma reta ‘r’ e uma reta ‘s’ e ver onde elas vão se encontrar? Ou não tem necessidade disso?<br>- P2: ah, pode<br>Não, não pode não, porque tem que...<br>- S1: então você vai pegar outra secante, saindo de A<br>- P2: você pode fazer o seguinte, melhor fazer o que você está falando agora. O que você pode fazer é traçar uma ‘r’ ou uma ‘s’<br>- S1: não, o que eu pensei foi traçar as duas mesmo<br>- P2: as duas não dá<br>Então é melhor fazer outra secante<br>- S1: e agora você vai puxar<br>- P2: FE, só pra ficar igual lá. Aí você trabalha com um Quadrilátero Completo<br>- S1: isso, ligou, ligou<br>- P2: ligou, ligou, o quê?<br>- S1: diagonal<br>- S2: as diagonais<br>- P2: a, tá<br>- S1: pronto<br>- S2: agora liga até O<br>- P2: este ponto ele não é um A’, ele é um Q<br>- S1 e S2: concordam<br>- P2: esse ponto que você achou ele não tem que ser o A’. Na verdade, também, não precisa ligar para o A’. Por quê?<br>Porque isso aqui é a reta ‘a’. O que eu quero é B e C, O’ mesmo...<br>- S1: faz gesto de que O’ não tem importância<br>- S1: porque você já achou o ponto Q<br>- P2: já. E lá em cima um O<br>- S1: então, já cortou um B ali em cima, e como pediu uma tangente só. É isso?<br>- P2: aham<br>Não, não é isso não | | |

| | | |
|---|---|---|
| - S1: é ou não é?<br>- S2: é porque você já tem uma diagonal, se você tem uma você já define as outras<br>- P2: O e Q já define a reta ‘a’<br>- S1: uhum<br>- P2: a reta ‘a’, ela define três pontos: o D, o A’ e o C. Está todo mundo em ‘a’<br>- S1: a tá<br>– P1 mostra a mesma atividade, só que feita por ela, no Geogebra<br>- Todos: fazemos uma comparação entre o que foi feito no quadro e no aplicativo, comparando pontos e retas. | | |

Essa cena traz a última atividade realizada pelo grupo. Especialmente, ela foi desenhada para colocar-se o valor do não uso do compasso no projetivo. Todos trabalham a partir de aplicativo disponibilizado pelos pesquisadores.

| Cena 41 | Interpretação | Ideia |
|---|---|---|
| # Iniciamos outra atividade:<br># Dados A, B e C, encontre D tal que (AC/BC)=(AD/BD)<br>- S2: é numa reta?<br>- P1: é<br>- S1: isso, uma reta<br>- S2: posso colocar eles fora de ordem?<br>- P2: espera só um pouquinho. É harmônico, então espera só um pouquinho<br>- S1: ah, fazer um triangulinho<br>- S2 e P2: uhum<br>- P2: fez um triângulo e aí?<br>- S1: é pra pegar esse ponto D, ele ser prolongamento de qualquer coisa<br>- S2: eu queria fazer perpendicular. Não resolve a vida não? | Os participantes fazem algumas perguntas para entenderem como devem proceder na construção da atividade.<br>P2 e P1 mostram como a atividade poderia ser feita com o uso do compasso, usando um aplicativo, já construído por P1 no Geogebra.<br>Aqui também os participantes fazem a construção de forma diferente da feita por P1. Para isto também fazem uso do Quadrilátero Completo, ideia que novamente não foi usada por P1.<br>Geogebra é um meio já familiar para os sujeitos argumentarem sobre o projetivo. | Geogebra articula pensamentos.<br><br>Passagem do euclidiano para o projetivo torna-se um movimento epistemológico. |

| | | |
|---|---|---|
| - S1: resolve. Faz aqui, aqui, pronto, achou C. Totalmente harmônica<br>- S1 e S2: mexendo no Geogebra<br>- S2: tem que fazer o quadrilátero lá. Não?<br>- P2: não pode usar compasso. Vocês entenderam que o compasso não combina com Projetiva<br>- S1 e S2: unhum<br>- P2: eu posso mostrar a vocês, usando o compasso?<br>- P1: eu tenho um aplicativo. Quer?<br>- P2: então mostra, por favor<br>- P2: eu acho que você está pensando em semelhança, né S1? Já que tem proporcionalidade, tem que ter semelhança. Uma coisa está para a outra<br>- S1: acho que não. Acho que eu queria mesmo fazer mesmo oh..<br>- S2: Quadrilátero<br>- S1: eu queria mesmo fazer o Quadrilátero<br>- P2: a tá, você queria fazer projetivo mesmo<br>- S1: e aí achar um ponto, que eu lembro que tinha um negócio de um ponto que desci lá. E aí seria esse ponto, que seria o prolongamento daquele ali, entendeu?<br>- P2: entendi<br>- S1: que corta os dois lados e o prolongamento do outro<br>- P2: deixa eu falar, vocês entenderam que ali tem divisão harmônica?<br>- S1: sim, o D não pode ser qualquer coisa, né? Não pode ser qualquer ponto, tem que preservar aquela proporção ali<br>- P2: tem que ter a divisão harmônica. A | | |

| | | |
|---|---|---|
| definição de divisão harmônica é aquilo ali<br># P1 coloca o aplicativo<br>- P2: ali, S2, é do jeito que você falou antes, com Tales<br>- Todos: comentamos sobre o aplicativo<br>- S2: mas aí tem aquele negócio que você falou também, não tem?<br>- P2: aqui tem homotetia<br># Voltamos para a atividade projetivamente<br>- P2: vai ao quadro<br>Se eu pegar qualquer ponto aqui, o que era a relação de quatro pontos, pode virar o que? Um feixe<br>- P2: gente, eu chutei um O, liguei AO, OC, OB. Apareceu um quadrilátero?<br>- S1: apareceu, ali no meiozinho<br>- S2: balança a cabeça positivamente<br>- S1: aí liga a diagonal e liga o ponto?<br>- P2: é<br>- P1: o que vocês (S1 e S2) fizeram aí está muito parecido com o meu<br>- P2: Ah, vocês já fizeram aí. O seu já está feito (se referindo ao aplicativo feito por eles)<br>- P1: agora só falta achar o ponto D, mas o resto está feito<br>- S1: o D está pra cá<br>- P1: é, só não está marcado<br>- P2: não é a primeira vez que a gente arbitra. Vocês acham que isso faz esta Geometria mais ou menos potente? | | |

## 4.2. Análise nomotética

Após a transcrição das aulas gravadas, retiramos desse texto trechos que se destacaram, retirando ideias centrais; estas ideias foram convergidas dentro das análises ideográficas para os seguintes grupos, que, conforme já falamos, foram identificados com cores tarjadas. São eles:

- Interação entre Geometrias;
- Epistemologia;
- Compreensão do projetivo;
- Geogebra;
- Conjunto de objetos projetivos se articulando;
- Mundo Projetivo;
- Construção / estruturação cientifica da Geometria Projetiva;
- Percepção do projetivo;
- Performance didática sobre possibilidades projetivas.

Após nos movermos seguidamente em novas articulações, consideramos interessante convergir esses nove grupos caracterizados para quatro novos grupos mais abrangentes, em um novo agrupamento que representa uma seguida generalização do que interpretamos sobre os dados de nossa pesquisa.

Assim, começamos a responder a interrogação proposta com o auxílio desses quatro grupos de maior abrangência. Frente à nossa questão de compreender *COMO A GEOMETRIA PROJETIVA PODE SER UMA PRESENÇA CURRICULAR, A PARTIR DE SUA PRESENÇA NA FORMAÇÃO DO LICENCIANDO EM MATEMÁTICA,* ouvimos dos sujeitos suas manifestações concernentes à questão da ciência Geometria Projetiva, aqui convergidas em ideias que não dizem respeito a objetos particulares, mas à compreensão da ciência como um todo, que valores ela traz, para eles, o que os faz perceberem estar diante de uma ciência distinta de outra que conhecem.

Então propomos:

1) Convergência do Epistemológico:

   ➢ Interação entre Geometrias;
   ➢ Epistemologia;
   ➢ Construção / estruturação cientifica da Geometria Projetiva;

2) Convergência do didático:
   ➢ Performance didática sobre possibilidades projetivas.

3) Convergência do projetivo
   ➢ Percepção do projetivo;
   ➢ Compreensão do projetivo;
   ➢ Mundo Projetivo;
   ➢ Conjunto de objetos projetivos se articulando;

4) Convergência do uso do software
   ➢ Geogebra;

1) Convergência do Epistemológico

Começamos a responder a interrogação proposta com a convergência do Epistemológico.

Um dos modos de constituírem sua compreensão global se faz por balizamentos, com construções que já fazem parte de suas vivências intelectuais e, em geral, como é o caso, quando tomam a Geometria Euclidiana para essa baliza. Assim é o que vemos na cena 4, quando um sujeito traz o que ele sabe de colinearidade para compreender o projetivo, ainda com dúvidas deste objeto nesta Geometria, mas, por outro lado, bastante seguro quanto ao estatuto dele no euclidiano, inclusive suas condições de existência.

Na cena 16, vemos que, suscitados por uma comparação entre a amplitude conceitual do teorema de Tales e o teorema de Menelau, os sujeitos são unânimes em escolher o segundo deles como mais importante, numa argumentação além do que é imediatamente dado, que considera caracteres gerais de duas Geometrias, compreendendo os valores que dizem que uma envolve estruturalmente a outra.

A demonstração da constituição de uma ciência, é percebida quando os sujeitos começam a propor livremente métodos. Na cena 11, demos ver os sujeitos considerarem importante que a nova ciência, que estão constituindo, siga padrões que, para eles, são designativos de valor científico. Nesta cena eles solicitam um desenvolvimento próximo ao axiomático, e, especialmente, são rigorosos em tratar teoremas recíprocos como novos casos a demonstrar.

Citamos aqui três momentos que evidenciam, a importância da tomada do epistemológico como um aspecto que deve estar presente numa proposta de trabalho didático sobre uma estrutura científica. Para nós, respondendo à questão que elaboramos, fica posta essa importância, especialmente para que o aluno/sujeito sinta-se seguro ao participar da elaboração e da compreensão dessa estrutura de conceitos. No fim, objetivando atividades geométricas singulares, a compreensão científica global se mostrou pertinente.

2) Convergência do Didático

Descrevemos exemplos de como seria produtiva a inclusão da Geometria Projetiva no currículo escolar e de como poderia ser trabalhada em conjunto com a Geometria Euclidiana já presente nas escolas.

Na cena 10, vimos os pensamentos projetivos se articulando, quando os participantes notam a semelhança existentes entre feixes de luz e as características do Teorema de Menelau.

Quando da exposição da figura que retrata o Teorema de Ceva, na cena 17, os participantes estabelecem comparações em relação a esse Teorema e ao de Menelau, sem que o primeiro tenha sido enunciado. Eles afirmam haver relações de Menelau na figura exposta, constituindo modos para que a ciência se ponha no trabalho didático.

Na cena 16 podemos ver outro exemplo desta convergência quando um pesquisador se dirige ao participante 4, indagando acerca do porquê se trabalhar com o Teorema de Tales. Torna-se considerável, na discussão, a entrada do teorema de Menelau. A participante responde que é porque “ficamos habituados a seguir o currículo”. Ela enseja que seu novo conhecimento pode mudar as opções.

3) Convergência do Projetivo

Aqui a preocupação era dar enfoque aos momentos onde os participantes foram compreendendo características projetivas e desenvolvendo um mundo projetivo. Para caracterizarmos esse movimento, destacamos algumas cenas que consideramos importantes para esta compreensão.

Na cena 11 pedimos aos participantes para formularem e provarem a recíproca do Teorema de Menelau. O grupo acolhe a proposta de estruturação axiomática da geometria projetiva e, para iniciar esta formulação e provar, valem-se de um princípio muito importante da Projetiva, a *colinearidade*. Logo percebem que este objeto geométrico deixa de ser um resultado, para ser um critério para exploração de novas ideias.

Na cena 18 temos uma manifestação de compreensão do projetivo. Nesta cena, pedimos que seja feita uma demonstração do Teorema de Ceva com o uso do Teorema de Menelau e que também formulem e provem a recíproca do mesmo. O grupo percebe que usando apenas uma relação não seria possível a demonstração, e então chegar-se à conclusão que seria necessário usarmos mais de uma, mais precisamente duas relações. Junto com a solução esboçada, vem o valor propriamente construtivo do resultado de Menelau.

Na cena 5 encontramos um exemplo de percepção do projetivo quando em conversa sobre o que já tinham ouvido falar sobre a Geometria Projetiva relatam fazer ponte com seus conhecimentos sobre a arte. Sendo, então citadas expressões como ponto de fuga e profundidade.

4) Convergência do uso do Software

Durante o processo de construção do curso intitulado Exploração do Espaço Projetivo, foram elaboradas atividades e todas elas tiveram, no mínimo, a sua apresentação elaborada previamente no Geogebra, *software* de geometria dinâmica usado por nós, embora todas estas atividades possam ser resolvidas com o uso apenas de papel, lápis e régua.

Durante a realização do curso foram necessárias algumas instruções sobre o uso do *software*, construção de ponto, reta, como marcar interseção, construção de polígonos, entre outros.

O Geogebra foi se mostrando um facilitador ao longo do curso, sendo este fato inclusive citado por um aluno, como descrito na cena 23, quando comenta “que o Geogebra pode facilitar a visualização”, este comentário é feito após o grupo mexer no *software* para fazer uma verificação do Teorema de Pascal, quando os participantes expressam curiosidade em saber se seria possível a veracidade do teorema em questão, para polígonos de cinco, quadro e três lados. Esta verificação se tornou rápida e sem a necessidade de novas construções, o que só se fez possível pelas características de arraste, uma ferramenta que possibilita a sobreposição de figuras no *software*.

Entendemos, com esta pesquisa, que perguntas são exploradas com mais segurança e desenvoltura, mas, mais que isso, que algumas perguntas só foram formuladas por estarem no horizonte de possibilidades do ambiente dinâmico.

Ainda no tema do Teorema de Pascal, o Geogebra se apresenta como meio de comunicação. Na cena 34, durante a apresentação do Teorema, fomos questionados sobre a possibilidade de esse ser válido para heptágono. Os pesquisadores conversam e vêem não ser possível a construção para um polígono de sete lados e então fazem para um polígono de oito e verificam não ser uma verdade. Ao apresentarmos aos alunos, sobrepomos um ponto e fica nítido, com o uso do software, também não ser possível para heptágonos. Em nossas observações chegamos à conclusão de que talvez seja possível para algum octógono e algum heptágono específicos, mas como bem observado por um participante, ainda sim é inválido, pois para termos um teorema, não pode ser válido apenas para um.

Já na cena 41, o Geogebra foi usado como articulador na construção de pensamentos, para a realização da atividade 9, onde se expõe a projetividade da razão anharmônica. No primeiro momento o *software* foi usado para mostrar como a construção poderia ser feita com o uso de régua e compasso e em seguida foi pedido a eles que a realizassem com o uso apenas de régua. A liberdade projetiva de se usar retas aleatórias vai de encontro com a expressividade gráfica no ambiente do programa, e, usando as inúmeras possibilidades, oferecidas por ele, o grupo de alunos foi elaborando uma nova construção sem maiores obstáculos.

Citamos alguns momentos em que se mostra evidente a importância do Geogebra como facilitador da aprendizagem, mas, também, como que sua presença abre novos caminhos para procedimentos didáticos e, mais fortemente, para novos objetos geométricos e formas de pensá-los.

# Capítulo 5

# Considerações Finais

O objetivo maior de nosso estudo foi levantar as possibilidades para a inserção da Geometria Projetiva em práticas curriculares das escolas. Para alcançá-lo, estruturamos esta dissertação onde apresentamos um estudo histórico dessa ciência, partindo de uma pesquisa bibliográfica.

Formamos um grupo que estuda as possibilidades da presença curricular dessa ciência e intuímos que uma compreensão histórica pode ser importante para estreitarmos entendimento com essa Geometria, em seu estatuto epistemológico e estrutura científica.

Após este apanhado histórico nos envolvemos com a busca de dados e conceitos matemáticos que norteiem esta ciência, e embora tenhamos tomado conhecimento de muitos outros teoremas, neste estudo mantivemos foco nos Teoremas de Menelau, Ceva e Pascal. Nossos estudos também tiveram a preocupação em destacar alguns conceitos projetivos, tais como Polo, Polar, Princípio da Dualidade, Quadrilátero Completo. Sempre destacando ser esta ciência uma Geometria que vale-se de apenas da Régua.

Este texto também tem um importante caráter informativo, considerando que a Geometria Projetiva não é uma ciência muito divulgada, e muito raramente estudada. Além disso, apresentamos aqui alternativas para a introdução de Geometrias Não Euclidianas nos currículos escolares. Acreditamos que o curso de extensão que trabalhamos, apresenta-se como uma alternativa, não só de capacitação para professores, mas também podendo ser trabalhado nas escolas.

As atividades que apresentamos aqui foram essenciais para que o desenvolvimento do pensamento projetivo fosse se estruturando. Para a realização das mesmas nos auxiliamos por um software de geometria dinâmica, o Geogebra, que se mostrou um grande facilitador na realização das tarefas apresentadas. Como em outras situações vividas por nós, já a quase imediata resposta construtiva, com respeito às propriedades geométricas dos entes gráficos, dinamiza o processo de estudo, permitindo a aceleração deste com relação a descobertas e conjecturas.

Quando, dentro de um pensamento qualitativo, entendemos ser necessário ir a campo para a pesquisa de indicações de sujeitos para respondermos a nossas indagações, constituímos um pensamento metodológico com bases na fenomenologia. Praticamos o tratamento de dados no modo em Cenas Significativas, fundamentado pela sua pertinência no nosso desejo investigativo.

Enfim, acreditamos que o solo teórico na qual está alicerçado o nosso trabalho, pode contribuir para a inserção de Geometrias não Euclidianas nas escolas, na particularidade da Geometria Projetiva. Com relação à formação do professor, entendemos que nosso trabalho tem importância na divulgação da ciência, buscando o aprimoramento profissional do licenciando em Matemática. Em nosso grupo, intuímos que abarcar a Geometria Projetiva, pode ser, antes de mais nada, uma oportunidade de se reabrir o debate curricular acerca de toda a geometria.

# Referências

ALMEIDA, C. L. B. S. Matemática: **O Computador na Formação de Professores**. In: Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2006. Anais. Recife, Pernambuco - PE. 2006.

ALVES, A. F. **Álgebra Linear como um Curso de Serviço para a Licenciatura em Matemática: o estudo dos Espaços Vetoriais**. 2013. 176f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) Instituto de Ciências e Ciências Exatas da Universidade Federal de Juiz de Fora. 2013.

AUFFINGER, A. C.; VALENTIM, F. **Introdução à Geometria Projetiva**. Universidade Federal do Espirito Santo. 2003. 63p.

BELL, E. T. **Men of mathematics**. New York: Simon & Schuster, 1937.
______ . The development of mathematics. New York: McGaw-Hill, 1945.

BICUDO, M. A. V. et al. **Pesquisa Qualitativa: Segundo uma Visão Fenomenológica.** São Paulo: Cortez, 2011. 150p.

BRANDÃO, L. DE O.; ISOTANI, S.; MOURA, J. G. **Imergindo a Geometria Dinâmica em Sistemas de Educação a Distância: iGeom SAW**. Revista Brasileira de Informática na Educação, 2006, volume 14, nº 1.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2012. 99p.

CAIROLLI, S. Trabalho de conclusão de disciplina. IME-USP. 2004. Disponível em < http://www.matematica.br/>. Acesso em 30 jun. 2015.

CASTRO, L.G.M., **Introdução à Geometria Projetiva**. Eureka!, vol 8, pp16 - 27, 2000.

CASTRO, R. B. **Tópicos da Geometria Projetiva**. 2012. 94f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Departamento de Matemática) Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista. 2012.

CATALDO, J. C. **Teorema do Hexágono de Pascal**. 2013. 79p. Dissertação (Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT) Centro de Ciências Exatas e Tecnologia da Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro. 2013.

DA SILVA, M. C. L. **A Geometria Escolar e o Movimento da Matemática Moderna: em busca de uma Nova Representação**. In: VII Seminário Temático A Matemática Moderna nas Escolas do Brasil e de Portugal: estudos históricos comparativos, 2009. Anais. Florianópolis, Santa Catarina – SC. 2009.

DETONI, A. R.; PAULO. R. M. A organização dos dados da pesquisa em cena: uma movimento possível de análise. In: Bicudo, M. A. V. et al. **Pesquisa Qualitativa: Segundo uma Visão Fenomenológica**. São Paulo: Cortez, 2011. p. 99 – 120.

DETONI, A. D. O estar-presente a distância: possíveis contribuições de Martin Heidegger. In: Bicudo, M. A. V. et al. **Ciberespaço: Possibilidades que abre ao mundo da educação**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2014. P. 93 – 108.

DETONI, A. R.; VIEIRA, M. D.; FIGUEIREDO, M. C**. Apontamentos Para Uma História da Geometria Projetiva**. In: VII Encontro Mineiro de Educação Matemática, 2015. Anais. São João Del Rei, Minas Gerais – MG. 2015.

DIENES, Z. P.; GOLDING, E. W. **A Geometria pelas Transformações**. 2 ed. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária Ltda., 1975. 3 v. v. 1: Topologia< Geometria Projetiva e Afim.

F.I.C. **Elementos de Geometria**. Trad. Raja Gabaglia. Rio de Janeiro: F. Briguiet & Cia, 1941. 11ª ed.

GODEAUX, L. **As Geometrias**. Lisboa: Publicações Europa-América, 1936. 210p.

GONÇALVES, T. da S. **Uma Introdução à Geometria Projetiva para o Ensino Fundamental**. 2013. 149f. Dissertação (Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande. 2013.

HENRIQUES, A. **Papel e lápis x cabri-géomètre ii: o caso do teorema de superfícies lunares**. Educação Matemática em Revista, São Paulo, ano 7, n. 8, p. 62-67, 2000.

KLEIN, F. O programa de Erlangen. In: FERNANDES, N. C. (Trad.) **O programa de Erlangen de Félix Klein: considerações comparativas sobre as pesquisas geométricas modernas**. São Paulo: Ifusp, 1984, 2 - 78.

KLINE, M. **O Fracasso da Matemática Moderna**. Trad. de Leonidas Gontijo de Carvalho. São Paulo, IBRASA, 1976. 211p.

KLINE, M. *Foreword*. In: RUSSEL, B.A.W. **An Essay on the Foundations of Geometry**. New York: Dover Publications, 1956.

LAPA, C. C. B.; ARSIE. K. C.; ANDRETTA, P. **O Ensino da Geometria por meio das diferentes linguagens**. In: XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática, 2011. Anais. Recife, Pernambuco - PE. 2011.

LÉVY, P. **As tecnologias da inteligência: o futuro do pensamento na era da Informática.** Rio de Janeiro: Editora 34, 1993.

LORENZATO, S. **Por Que não ensinar Geometria?** Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática. São Paulo, ano III, nº 4, p. 3 – 13, 1º semestre 1995.

MANOEL, W. A. **Por que Ensinar Geometria nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental?** In: XVI Encontroa Brasileiro de Estudantes de Pós-graduação em Educação Matemática, 2012. Anais. Canoas, Rio Grande do Sul – RS, 2012.

NOSS, R.; HOYLES, C. **Windows on Mathematical Meanings: Learning Cultures and Computers**. Springer Science & Business, 1996. 278p.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências.** Revista Zetetiké. Campinas: UNICAMP, ano 1, nº 1, p. 7 – 17, 1993.

PINHEIRO, J. M. L. **A Aprendizagem Significativa em Ambientes Colaborativo-Investigativos de Aprendizagem: um estudo de conceitos de Geometria Analítica Plana**. 2013. 56 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora. 2013.

PONTE, J. P.; BROCADO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005. 151p.

TIKHOMIROV, O. K. **“The Phychological consequences of computerization”.** In: WERTSCH, J. V. (Ed.) The concept of activity in soviet psycology. New York: M. E. Sharpe. Inc, 1981, p. 256 – 78.

VAN MANEN, M. **Researching lived experience. Human Science for an action sensitive Pedagogy.** London: The State University of New York, 1990.

WATERMANN, I.; FRANCO, V. S. **Geometria Projetiva no Laboratório de Ensino de Matemática**. Artigo produzido durante o Programa de Desenvolvimento Educacional do Estado do Paraná (PDE), Universidade de Maringá, 2008/2009. Disponível em http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/2192-8.pdf. Acesso em 04 Out. 2016.

# Anexos

## Anexo I

## TERMO DE COMPROMISSO ÉTICO

Este termo de compromisso pretende esclarecer os procedimentos que envolvem a pesquisa desenvolvida no Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática/UFJF e a utilização dos dados nela coletados. Tem o objetivo de deixar o mais transparente possível a relação entre os envolvidos e o tratamento e uso das informações que serão colhidas.

Os registros presentes nas tarefas e as transcrições provenientes das falas dos sujeitos de pesquisa, servirão como material para nossa pesquisa que procura investigar o que vem a ser um curso de exploração de conceitos projetivos, com alunos do curso de matemática.

O acesso ao conteúdo acima citado será de uso exclusivo do pesquisador e seu grupo de pesquisa, que assumem o compromisso de não divulgarem dados que permitam identificar os sujeitos de pesquisa.

As informações provenientes da análise da coleta de dados poderão ser utilizados pelos pesquisadores envolvidos no projeto em publicações e eventos científicos e divulgadas a todos aqueles que se interessarem pelas pesquisas, na forma acima indicada.

Juiz de Fora, 03 de maio de 2016

Marina Dutra Vieira

Adlai Ralph Detoni

Sujeito de Pesquisa

# Anexo II

## Atividades do Curso de Extensão
## Exploração do Espaço Projetivo

1 - Formule e prove a recíproca do Teorema de Menelau

2 - Demonstre o teorema de Ceva com auxílio do teorema de Menelau.

3 - Formule e prove a recíproca do Teorema de Ceva.

4 - Prove que as medianas de um triângulo são concorrentes em um ponto que se chama Baricentro.

5 - Prove que as bissetrizes internas de um triângulo são concorrentes em um ponto que se chama Incentro.

6 - Dado um hexágono ABCDEF, qualquer, inscrito em uma cônica, verifique o teorema de Pascal.

7 - Dado o triângulo ABC, e sejam N pertencente ao segmento BC e M pertencente ao segmento AC. As diagonais de ABNM, AN e BM se encontram em Q. Construa outros quadriláteros ABN'M', a partir de um N´ em BC, cuja interseção de suas diagonais esteja contida na semirreta CQ.

8 – Se em dados 4 segmentos em um arranjo de transversais cortadas por paralelas de medidas a, b, c e d, temos a proporção a/b = c/d, temos a’/b’ = c’/d’ em projeção desse arranjo em um plano qualquer ?

9 - Verifique a projetividade da razão anharmônica.

10 – Dados A, B e C, colineares, encontre D, colinear a eles, tal que (AC/BC)=(AD/BD)

11 - Trace uma tangente de um ponto a um círculo, sem usar o compasso.

# Anexo III

# Transcrições

1ª aula

- P1: A geometria projetiva trata de invariância segundo a projeção em um plano, então para geometria projetiva quando você projeta ela, existem algumas coisas que permanecem outras não, então quando você projeta um ponto ele é um ponto, quando você projeta uma reta é uma reta, mas quando você projeta um quadrado não necessariamente é um quadrado é um quadrilátero. Então eu posso afirmar que será um polígono de quatro lados, mas eu não posso afirmar que tipo de polígono vai dar. A mesma coisa com a circunferência, se eu projeto uma circunferência eu sei que eu vou ter uma cônica, mas eu não sei se vai ser uma elipse, uma circunferência, se vai ser maior, menor. Ou uma outra, a gente pode obter hipérbole, parábola, tudo, todos os tipos de cônicas numa projeção. Depende do foco e do ponto que eu estou projetando.

Então metricamente a geometria projetiva é bem diferente da geometria elementar, aqui o que a gente está chamando de geometria elementar é a geometria euclidiana, então para a geometria projetiva tamanhos não são tão importantes quanto é para geometria euclidiana, pra gente é importante a proporção, que ela seja mantida, no caso da geometria euclidiana se você projeta alguma coisa você tem que preservar os tamanhos, os tamanhos vão ser iguais não necessariamente.

- P1 se dirige a P2 para dizer que ele pode falar quando quiser

- P2: tamanhos inclusive angulares e lineares

- P1: exatamente

- P2: a gente não pode pensar só em linha

- P1: não, os ângulos também não necessariamente são mantidos, tanto que eu não posso afirmar que eu vou ter um quadrado, um dos motivos é que eu não sei se eu vou projetar um ângulo de 90º novamente. Então nem todas as relações métricas lineares permanecem projetivamente

- P2: então o meu comentário entra ai, não é só linear

- P1: a projeção de um quadrado é um quadrilátero, isso eu também já disse, não posso afirmar o que vai ser.

Mostro um aplicativo que retrata uma projeção, daí:

# P1: Isso daí traz uma ilustração de uma projeção, eu escolheu a luz que a gente tem em casa e não a luz solar de proposito, porque em uma das minhas leituras eu descobri que a luz solar tem uma propriedade que favorece a incidência dos objetos, então fica muito mais perfeitinho quando é feito com a luz solar do que com os outros tipos de luzes, por isso é que eu coloquei o desenho desta lâmpada que está ai

- P2: o sol é considerado o, ele dá, a gente considera que são projeções cilíndricas, os raios chegam paralelos. O sol está tão longe, que os raios dele a gente não considera que abrem, claro que os raios de sol abrem, mas num contexto que

- P1: da distância que a gente se encontra também

- P2: os raios chegam praticamente paralelos, então não é isso que a gente quer, porque este tipo de projeção dos raios do sol, favorecem, ainda, algumas propriedades euclidianas, e a gente quer olhar pra situação mais, que mais desfaz o objeto, ainda que projetando.

- P1: então, outra coisa que a gente queria, eu queria fazer um apanhado, a geometria projetiva começou pontualmente em alguns momentos, a gente que não com esta intenção. O Menelau apresenta um teorema no início do milênio, no primeiro século depois de cristo e a gente não acha menções de que ele queria criar uma geometria nova, ele simplesmente descobriu alguma coisa e constatou aquilo, contatou não é...

- P2: registrou

- P1: é, registrou isso. Também não achei nenhuma demonstração escrita assim: Menelau fez esta demonstração

- P2: tá, você está falando do Menelau, é, unhum, isso quer dizer que você já esgotou esse slide (da projeção) ai?

- P1: não necessariamente

- P2: esse slide tem um postulado, vamos dizer assim né? eu gostaria que eles até..., ali é uma projeção né? De uma reta que passa em A, B e C e a projeção dela em um plano, é o que? É o que? Vocês acham que é uma reta?

- S4: eu acho que sim

- S1: parece que sim

- P2: achamos que é uma reta? Você (P1) falou que o quadrado não fica quadrado

- P1: é, a reta fica reta e o ponto fica ponto, quando eu projeto isso ai eu as vezes mudo o local que o ponto foi projetado. Então quando eu fiz isso daqui, não tem nada de paralelismo não, foi aleatório mesmo pra, não se preservou o tamanho metricamente perfeito como na geometria euclidiana, tem uma proporção, a proporção existe, as medidas só não são metricamente iguais

- P2: vocês acreditam nisso? Assim, num é fazendo mistério não, isso ai é um dado importantíssimo, que a projeção do quadrado não é quadrado, em geral né? mas a da reta é uma reta, assim a gente sabe geometria espacial né, agora a geometria espacial dá pra fazer, dá pra, é que eu falei assim, isso ai é um postulado, precisa isso ai ser um postulado? Que a projeção de uma reta é uma reta? Ou a nossa geometria permite a gente demonstrar que é verdade que a projeção. Que que vocês acham?

- S3: se você pegar os três pontos e mostra que a projeção de cada um é colinear, você mostra que é uma reta

- P2: a projeção de cada um está na mesma reta, é colinear?

- S3: ali, ela pegou uma reta (P1)

- P2: o que é ser colinear pra você? É estar na mesma reta?

- S3: os três pontos estão na mesma reta

- P2: a tá. Não, é isso mesmo.

Mas ai você falou (3), pegar cada ponto e ver se ele é colinear

- S3: então, pegar os três pontos, A’, B’ e C’

- P2: tá

- S3: são as projeções de A, B e C

- P2: pois é mas, ficou, o esquema que você (3) falou, ele é suficiente pra que eu com segurança saber que isso agora é uma verdade?

- S1: lineares dois a dois? Ou não?

- P2: não, os três. Dois pontos a gente não sabe se são colineares

- S1: porque sempre são (afirmação)

- P2: sempre são

- P1: eu usei disso, pra quem não sabe no Geogebra os pontos que têm cores diferentes são criados de forma diferentes, o ponto B tem cor diferente, então ele foi criado de forma diferente. Então eu fiz a reta passando pelos dois pra mostrar exatamente perfeitinho, pra não correr o risco. Mas não dá pra esconder de quem conhece o Geogebra por causa das cores do ponto.

- P2: sabe o que que é? Tem gente que, gente que a gente pesquisa, gostaria até de trocar bibliografia com vocês depois. Tem gente que fala assim que a geometria projetiva ela é autônoma, ela não precisa da euclidiana pra existir.

- P1: sim

- P2: mas pra você começar do zero, pra você dizer “eu vou começar do zero” mas fazer uma axiomática para projetiva. Ela tem que ter os postulados dela, toda ciência tem os postulados, ela não pode começar do zero, já com a verdade, como teorema.

Nós, somos euclidianos, aquela velha história.

Como que com a nossa geometria eu consigo passar para o próximo dizendo, “isso ai é uma verdade”?

Aqui está a lâmpada, aqui esta A, B e C, então logo vejo isso, como A, B e C estão alinhados, eles estão em infinitos mesmos planos, um deles está na lâmpada também. Então, eu posso dizer que tudo que está acontecendo aqui, está acontecendo neste plano, quando ele toda lá em baixo, com aquele plano lá de baixo, um plano encontra? O outro segundo uma reta, então eu acho, entendeu? A geometria espacial que a gente tem, a gente consegue ver que isso é verdade, consegue provar, pra não ter que dizer que isso é um postulado de uma nova geometria. Ai você vê uma figura assim né

Agora vamos entrar no semiótico, tudo que você vê ai num filme, numa propaganda, num teatro, tudo que é dito tem uma coisa haver. Se a P1 colocou três pontos, é porque faz sentido, né? semioticamente. Aliás o “3” meio que matou né, ele colocou a palavra colinear em questão, talvez com dois pontos ele não falasse nisso, mas está bom

- P1: então a gente começa pelo Menelau, o Teorema de Menelau, e depois a gente vai apresentar uns outros, mas ele é o primeiro, o primeiro vestígio de geometria projetiva que a gente encontrou, sem esta pretensão. Então a geometria projetiva passa por outros que foram esquecidos ao longo do caminho e encontrado ao longo do caminho por outros. Então a gente vai apresentar alguns deles, mas ela começa ser provada depois do renascimento quando ela usada pelos artista renascentistas

- P2: eu queria perguntar eles

- P1: sim

- P2: já que nosso tema faz sentido pra todo mundo, geometria.

O que que cada um de vocês sabe da história da geometria projetiva? Não estou perguntando o que vocês estudaram não, entenderam?

- P1: intuitivamente, talvez

- P2: Vocês têm algum registro?

- S1: balança a cabeça negativamente

- S3: eu e S2, nossa primeira iniciação cientifica foi sobre geometrias não euclidianas

- P2: ahan

- S3: nós vimos bem no finalzinho sobre geometria projetiva, só da ideia do desenho. Que o professor pede o aluno pra desenhar a rua da casa dele, então muita gente coloca a casa e a rua de baixo da casa, ou do lado, mas não tinha aquela ideia de projeção, como por exemplo

- S2: profundidade

- S3: é, a ideia de profundidade. É como duas retas paralelas, vamos pensar na linha de trem, se você olhar numa foto dá a impressão de que lá no fundo elas se tocam, que é o chamado ponto de fuga, dos quadros. Só isso mesmo que a gente viu

- S4: a gente chegou até a discutir vindo pra cá que não sabia sobre geometria projetiva, que a gente não tem muita ideia. Eu pelo menos não tenho muita ideia de geometria projetiva, ainda mais questão assim relacionada a historia

- P2: vocês falaram desenho, desenho mesmo, meio artístico

- S2, S3 e S4: balançam a cabeça concordando

- S3: pintura

- P2: desenho livre

- S2: a gente ficou mais no modelo mesmo

- P2: Os pintores quando pintam um caminho tem dificuldade de chegar no final, em geral ele põe um boi, uma árvore

- Sala: ri

- S3: sim (concordando com P2)

- P2: pra evitar o problema do..., afinal de contas, é paralelo ou concorrente?

- P1: ai eles usaram essas proporções. O P2 já chegou a assistir um pedaço de um documentário, que eu não achei, nem ele

- P2: eu não achei mais

- P1: ele não achou mais, porque ele já achou uma vez

Sobre isso que você está falando do paralelismo, eles usavam luz mesmo, eles usavam projeção de luz mesmo pra levar o objeto onde eles queriam pintar. Foi a partir do renascimento que as coisas começaram a ficar mais proporcionais, mais bonitinhas, parecendo com as formas reais.

- P2: bonitinha é você que está falando, né?

Sou formado em história da arte, e realmente a P1 tem razão, no renascimento é quando o ideal de beleza certinho apareceu

Conversa sobre o que é bonitinho

- P1: E ai depois disso ainda teve um processo demorado para que alguns matemáticos fossem conseguindo demonstrar isso matematicamente

- P2: o primeiro foi Desargues

- P1: e ai algumas geometrias foram criadas também, a Descritiva, a Perspectiva

- P2: pelos próprios pintores também

- P1: Por necessidade também

A Geometria Projetiva tem estes pontos antes do renascimento, mas ela não tinha, ela não foi formalizada por ninguém, talvez por falta de necessidade. Quando os pintores e escultores viram necessidade de alguma coisa que trouxesse mais proporção pra área deles, ai as coisas foram começando a acontecer, mas mesmo assim levou muito tempo ainda

- P2: o S3 até usou a expressão “ponto de fuga”

- P1: sim

- P2: que é desta Perspectiva ai, né?

- P1: exatamente

Ai aqui a gente tem o teorema de Menelau

“Toda reta que corta três suportes dos lados de um triângulo, determina seis segmentos tais que este produto de três entre eles, não tendo extremidade comum é igual ao produto dos outros três”

O que ele está chamando de não ter extremidades comuns é tipo esse ‘e’, entendeu, tipo esse CE e EB, eu não posso ter esse

# P1 mostra exemplos de quais podem

- P2: a tá você deu exemplo de quem não pode

- P1: exatamente

Eu pego seis, três a três, que não têm as extremidades comuns e ai eu consigo achar o que eu quero

Então olha só, até fala aqui:

O AF com o FC, os que não têm extremidade em comum estão em cima (da fração). AF, CE e BD, nenhum deles tem um ponto em comum

- P2: extremidade em comum

- P1: Ai o CE, o CF, ED, o AD, apenas dele passar pelo D ele não tem extremidade comum. Porque o D não é o extremo deste segmento, então ele passar por ele, isso pode. Mas o extremo coincidir não pode, tá?

- P2: Deixa eu, volta pro slide anterior. Lâmpada, A, B e C, A’. Volta pro Menelau, que que tem haver um com o outro?

- S2: se você imaginar a lâmpada no C, FE

- S4: repete a fala de S2

- P2: a lâmpada em C?

- Sala: eles concordam

- P2: é, é isso mesmo

Se eu ligar CD ali, que não está ligado. C com D

- S2: ai vai (concordando)

- P2: aquele primeiro slide está com um problema, que a gente não fez os raios de luz

- P1: Feixes

- P2: agora se a lâmpada estiver em C, e se eu ligar C com D, eu tenho três raios de luz

Né?

- P1: sim

- P2: tenho três pontos, em cima, três pontos em baixo com a lâmpada

Então assim, o Menelau lá no século primeiro, ele é um geômetra, enfim, euclidiano que é o que tinha. Este teorema dele, tem tudo a ver com a lâmpada, afinal de contas, então, é porque o ponto D coincide com ele mesmo, né?

- Sala: concorda

- P1: sim

- P2: interessante

Agora, P1, o texto lá, toda a reta. Se esta expressão matemática ai, em vez de estar deste jeito estivesse AF.CE.BD em cima, e pega o que está em baixo e passa pro segundo membro multiplicando, ai tem mais a ver com o texto

Né?

- S3: o produto de três

- P2: é, o produto de três e o produto de três

- P1: sim

- P2: o texto tem mais a ver desta maneira

- P1: ai agora eu trouxe uma demonstração do teorema de Menelau

- P2: esta demonstração está meio esquisita, fui conferir tem uns...

- P1: então, eu procurei uma demonstração, porque como eu não tenho ciência de algo que ele fez (Menelau)

- P2: exatamente que que ele fez

- P1: exatamente

Também não sei nem se ele (Menelau), falou: "uhn, isso é verdade mas eu não sei o que fazer", porque isso já aconteceu outras vezes, não com ele, com outras pessoas.

- P2: é que tem um errinho ai nestas letras, esse errinho bagunçou tudo

- P1: Ah, as vezes esse errinho é meu, porque digitar isso foi complicado. Onde está este errinho?

- P2: Ah, não se, tem que ver

Volta lá no Menelau, é, vamos olhar ai pro ponto F, na figura e na expressão matemática. FC, FA, né? falando o 'F' na frente, FA em cima FC em baixo. Que que é FC, FA na figura?

- P1: gente, vocês estão conseguindo ver os pontos direito daí?

- Sala: concorda com a cabeça

- P2: FC, FA são o que?

- S1: é a primeira lá (e faz um gesto com o braço esquerdo, mostrando uma reta)

- S2: é um lado do triângulo

- P2: então, o lado AC, né?

- S2: é

- Sala: concorda com a cabeça

- P2: FC e FA são divisões que o ponto F imprime, nestes lados

Agora vamos pra segunda lá, EC e EB, aonde eu estou agora? No lado BC

- S3: lado BC (junto com P2)

- S2: concorda com a cabeça

- P2: tô com o ponto E e EB, EC são divisões deste lado

- Sala: concorda (fazendo unhn)

- P2: agora eu vou para o terceiro lado

Só que você não consegue cortar, com uma reta você não consegue cortar o triângulo nos três lados

- S1 e S2: concordam

- P2: você consegue cortar

- P1: dois lados e o prolongamento do terceiro

- P2: e passa no prolongamento do terceiro. Ou você pode passar por um e pelo prolongamento dos outros dois. Pode? Pensa ai.

- Sala: pensativa

- P2: porque o prolongamento de três lados você pode cortar não pode?

- P1: sim

- P2: você prolonga os três lados e dá um corte lá

- P1: faz ai no Geogebra gente, pra gente ver

- S1: eu não sei mexer nisso não

- S3 se dirigindo a S2: acho que tem um teorema que fala do corte de prolongamento

# P2 e P1 ajudamos S1 a mexer no Geogebra

# S2 e S3 conversando sobreo corte dos prolongamentos

- S1: posso criar três pontos e puxar as retas?

- P1: sim

- S1: é mais fácil

- S2: observando este momento no Geogebra, e acaba seguindo para o computador também

- S3 e S4: utilizando o Geogebra

- P1 fala com S1: você pode fazer segmento também se você não quiser que fique a imagem tão suja

- P2 e S1: tentando fazer as retas

- P1 fala com S1: você tem que apoiar nos dois pontos para fazer a reta porque senão você cria outros pontos

- P2: quais possibilidades que eu tenho de cortar os lados?

- S1: o prolongamento que você falou, né?

- P2: não, lado ou prolongamento. Então vamos lá. Eu posso cortar os três lados?

- S1: Não

- P2: não, não tem condições

- S1: não tem a menor condição

- P2: posso cortar dois lados? Posso

- S1: concorda

- P1 fala com S1: ele quer que você corte três vezes, então não dá pra fazer o que você falou, que é cortar no sentido paralelo

- P2: e um lado e dois prolongamentos? Eu posso cortar? Se passar no vértice está contando o corte de dois lados

- S1: não dá

- P2: não dá. Até porque, é um teorema, se você corta um lado você entra no triângulo, pra sair...

- P1: você tem que passar em outro lado

- S2: ou no vértice

- P2: sim. Então não tem como cortar um lado só do triângulo, se você corta um, você corta dois

- S2: o vértice conta como o que?

- P2: conta como os dois, ele está tocando os dois lados. Toda reta corta os três ou os lados ou o prolongamento dos lados, todos eles, uma vez só

Vamos para a terceira fração lá da nossa expressão DB, DA. Que que é DB, DA na figura? Porque o F divida o primeiro lado. O E divide o segundo lado. O D divide o terceiro lado?

- divide

- S2: é se você jogar o B para o outro lado

- P2: divide externamente

- S1: balança cabeça positivamente

- P2: o D também divide AD, ele é um ponto que divide o lado, só que divide externamente

- P1: ele corta o prolongamento, e não o segmento que forma o triângulo

- P2: é, ele está fora, mas ele divide. Então tanto o F, o E e o D são ponto que dividem os três lados do triângulo. Contando ai lado e prolongamento. Então os seis segmentos que o Menelau arrola, os seis segmentos que estão no Teorema de Menelau, são as divisões dos três lados.

- P2: bom, e demonstrar o Teorema de Menelau? A P1 fez lá. Que que o Menelau faz? Cria umas alturas, né?

- P1: Sim, alturas relativas aos lados a, b e c, aos vértices, né?

- S1: concorda com a cabeça

- P2: sempre naquela reta transversal. A transversal na Geometria Projetiva é muito importante, toda hora ela está presente aí. Então aquela reta que cortou o triângulo, é uma reta que..., volta na figura P1. Aquela reta que passa em DF

Esta demonstração sugere tirar uma altura, na verdade uma perpendicular, né? Pelo ponta A, outra pelo ponto C e outra pelo ponto B. Há quem? Há reta CF

Tá, e ai? Você cria triângulos semelhantes, num é isso? Você cria triângulos retângulos, semelhantes

- P1: é, ele usa semelhança de triângulos, e o que ele usa pra provar lá é chegar a conclusão, que você chegou, que eles são colineares

- P2: o Menelau, como a gente falou, é Euclidiano, a Geometria Euclidiana é semelhança de triângulos

# P2 expondo demonstração no quadro branco, enquanto a turma observa

- P2 expõe o uso das semelhanças de triângulo como auxilio na demonstração e a turma concorda

- P2 comenta sobre o -1 existente na demonstração da apresentação do curso, dizendo que está assim pelo fato da demonstração usar vetores

Falando em seguida da importância deste teorema

# É feita uma comparação, pelo grupo, da demonstração apresentada no slide e no quadro

- P1 apresenta uma proposta de atividade, que é "formule e prove o a reciproca do Teorema de Menelau"

- S3 pergunta se é pra fazer naquele momento

- P2 propõe: vocês podiam fazer aqui, ao vivo

- S1 propõe a S3 que ele faça. S3 pergunta: porque eu?

# P2 propõe fazer um resumo do Teorema de Menelau e a turma formular a reciproca e que depois eles demonstrem

Após o resumo P2 pergunta: o que é a reciproca?

- S1: dá uma reta

- S2 se comunica com S3

- S3: daquela relação acontecer os três pontos são colineares

- P2: exatamente

# Sala se entreolha na intenção de confirmar se estavam certos

# P1 escreve a relação no quadro

- S3: então dado esta relação ai, eles são colineares

- P2: vamos aproveitar que você escreveu a relação ai, anota a formulação ai

- Se esta relação, então DEF estão alinhados

- S2 pergunta se haveria necessidade de explicar que alguns destes pontos estão entre os outros

- P2: ali estamos fazendo uma escrita econômica

- S2 completa: um esboço

- P2: depois teríamos que escrever melhor

- S3: no caso o desenho está sendo a informação

- P2: e o contexto nosso aqui

Ai formulam oralmente a reciproca completo

- P2: bom, como é que prova este teorema ai que é recíproco do principal?

Faremos isso depois

- P1: algumas atividades são interessantes de serem feitas aqui, devido a dificuldades, falta de conhecimento, porque todas estas atividades de construção existe uma forma Euclidiana de ser feita, então é a orientação que vai mudar a forma com a qual você está fazendo aquilo

- Sala: concordando

- P1: e as vezes depois que o projetivo é feito ele parece mais simples que o Euclidiano

- S2: concorda com a cabeça

- P2: pra mim a Projetiva é muito mais do que isso. Olhando o Teorema ali ele tem alguma coisa haver com o que a gente falou de Projetiva?

- S2: se você olhar assim, nega com a cabeça, parece uma coisa de Geometria Plana

- P2: concorda com S2, que ressalta "Geometria Euclidiana Plana"

- P1: explico que não descartamos o uso da Geometria Euclidiana, apesar que várias construções podem ser feitas sem o uso da mesma

- P2: comenta que para ele o Teorema de Menelau é mas Euclidiano do que a recíproca do mesmo, destacando a importância do alinhamento de três pontos

- S4: faz conjecturas sobre a projeção de pontos e retas

# A sala demonstra interesse sobre o assunto

- P1 explica que pontos e retas são figuras que se preservam ao serem projetadas, permanecendo pontos e retas

- P2: define, matematicamente, o que é uma projeção

- S2: comenta que pode dar problema porque desenhamos o ponto, apesar dele ser algo adimensional

# Sala toda discute sobre raios de projeção nos pontos

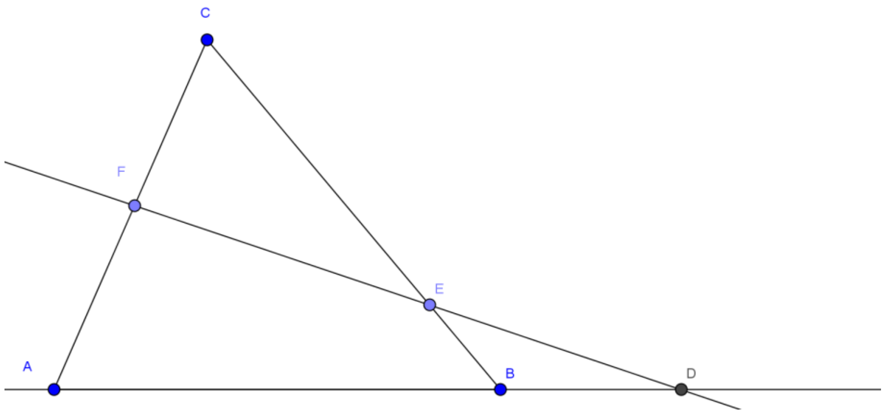
- P2: volta a demonstração da recíproca de Menelau perguntando como faz pra provar que três pontos estão alinhados

- Sala: interage com P2 na tentativa de demonstrar este alinhamento, partindo do alinhamento de dois pontos, visto que dois pontos estão sempre alinhados. Fazendo oralmente esta prova

- P1: usa a figura do Teorema de Menelau, para exemplificar a frase usada por nós "O projetivo referenda Tales?"

**Obs: vamos voltando a demonstração para preencher possíveis lacunas presentes na demonstração**

$$\frac{AF}{FC} \cdot \frac{CE}{EB} \cdot \frac{BD}{DA} = 1$$




Para isso tentei deixar a reta EF paralela à reta AB, o que fez com que o ponto D sumisse, no aplicativo do Geogebra. Como Tales fala de paralelas e transversal quando provocamos o paralelismos em Menelau criamos um exemplo específico que gera semelhança com o Teorema de Tales

# P2: comenta sobre as paralelas

- P2 pergunta se quando fazemos com que as retas fiquem paralelas a relação do Teorema de Menelau é ou não mantida

- S4: comenta que o D vai ser inexistente

- P1: mexe novamente com os pontos E e F fazendo com que o ponto D mude de lugar mas ainda apareça, e a sala concorda que a relação continua existindo

- P1: mexe novamente em E e F para que o ponto D não apareça

# Sala concorda que o ponto D ainda existe e que a relação também continua existindo

- Sala: concorda que a relação do Teorema de Menelau prevalece quando as retas ficam paralelas

- P2: pergunta pra sala o que acontece quando o ponto vai afastando do triângulo. Pergunta também o que acontece com a transversal com o afastamento do ponto D.

- S1: vai ficando mais paralela

- P2: concorda

- S2: até que enfim fica paralela (risos)

- S4: enquanto as retas se cruzarem vai ter o ponto D

- 1: enquanto tiver o ponto D a gente pode falar dele

- P2: o que acontece quando não tem mais a interseção?

- S4: D deixa de existir

- P2: onde é isso?

- S1: lá no infinito

- S2: porque D não é a interseção da reta EF e a reta AB? Como são paralelas não vai existir a interseção

- P2: como na Geometria Euclidiana duas retas ou têm um encontro em comum ou são paralelas Então, se elas são paralelas, não tem ponto em comum, certo?

- Sala: concorda com a cabeça

- P2: e se olharmos como o limite? O limite é uma coisa que não é real. Para que eu possa realizar o infinito eu tenho que falar a linguagem do limite. Qual é o limite ali? Quando o D some.

- S1: passando este negócio para o lado de lá o que tem D meio que vai cortar

# P1: faz no quadro branco o que 1 disse

# P2: diz que pode apagar sim, mas só se?

# Sala: se eles forem iguais

- S3: se é limite o D ainda tem

- Sala: discute se pode ou não tirar o D

- P2: discute sobre a relação métrica dos segmentos

- Sala: concorda que eles ficam muito grandes, que tendem ao infinito

- P2: a Geometria Projetiva não pode ignorar que não existe infinito

# Sala: comenta que pra Projetiva se encontram no infinito

tendem a um

– P2: por um ponto fora de uma reta eu posso traçar uma paralela e todo mundo acreditou. Através do Menelau o que a gente está falando pra vocês? – por um ponto fora de uma reta não conseguimos traçar uma paralela, não tem jeito.

# Voltamos para a relação de Menelau quando as duas retas estão paralelas

E ai chegamos à conclusão:

AF/CF = BE/CE

É Menelau no infinito, é Tales

- S3 fala com os colegas: Tales é Menelau no infinito (risos)

- P1: A Projetiva trata bem da realidade da vida cotidiana da gente. Quando você está viajando e tem uma estrada muito longa ela encontra, pelo menos as minhas sempre encontraram

- P2: nem Tales está errado, nem Menelau (sala concorda). O que tem de diferente nos dois?

- S2 e S4: O Tales não vê a interseção

- P2: achei interessante o que S2 e S4 falaram

- S4: pra um tem interseção, para o outro não. Né?

- P2: isso é um defeito do Tales?

- S4: não, acho que não, ele só viu diferente

- P1 – Será que Menelau pensou que se deixasse a reta paralela ia dar Tales?

- Sala ri e me dizem que teria que ser o contrário, “será que se Tales pensou que se causa-se a interseção daria Menelau?”, P1 e P2 falam a eles que Tales veio antes, causando algum espanto

- P2 pergunta a sala: você tem que fazer um esquema que de conta de várias situações, você faria Tales ou Menelau?

- S2: eu montaria em Menelau

- S1: Menelau

- P2: Por quê? Eu também montaria, mas por quê?

- S2: porque ali você pode fazer infinitos pontos, te dá uma gama maior de resultados

- S4: concorda

- P1: e pode até não encontrar ponto

- S2: é (concorda)

- P2: no limite o esquema de Menelau ainda funciona com esta paralela ai

- S4: é verdade, Menelau funciona nos dois casos, é como se o Menelau tivesse continuado os estudos do Tales

- P2: S4, então deixa eu te fazer uma pergunta, já que você é professora, por que você dá o Teorema de Tales? Não é melhor dar o de Menelau?

- Sala: risos

- S4: ah, é verdade, a gente fica naquela de seguir currículo, e na verdade eu já tinha ouvido falar de Menelau mas eu não conhecia assim

- S2: acho que porque a gente presa muito uma paralela, talvez por isso

- S3: o estudo das paralelas

# Tivemos uma conversa sobre os cientistas

- P1: Eu também não achei em lugar nenhum que Menelau tenha se preocupado com a recíproca

- P2: concorda

# Falamos um pouco sobre a história, o que ocorreu após o Teorema de Menelau, citamos a importância de Pappus, embora não faça parte efetivamente de nossa pesquisa

- S3: diz quando perguntado se Menelau estava trabalhando com a ideia do Euclidiano ou não? Se já era projetista? Responde que não sabe, mas que acredita que quando ele estava trabalhando nisso ele não tenha pensado na ideia do infinito

- P1: não achei prova nenhuma com relação a isso, nem da intenção dele de estar criando uma ciência nova

- S1: os renascentistas usaram Menelau?

- P1: eles não estavam usando uma matemática, eles não formalizaram isso, ele tiveram ideias que trouxeram mais realismo para as figuras deles

# Sala segue bem atenta e interagindo

- P2 interpreta a ideia da por S3: como é que o cara poderia pensar numa nova ciência se ele não conseguia pensar no infinito. Eu falei aqui vocês entenderam, mas vocês estudaram cálculo, e o cálculo é do século XVIII. Pergunta pra S3 se foi mais ou menos isso que ele quis dizer

- S3: concorda

# Debatemos um pouco sobre a ideia do infinito

- P1: comenta que Menelau possa ter chegado a este teorema também por coincidência, achou o resultado para alguns números e generalizou

- Sala: concorda

- P2 e P1 falam sobre o tempo que o Teorema de Menelau ficou esquecido, aproximadamente 1600 anos

# Com o Teorema de Ceva exposto P2 pergunta se aquela figura é coisa nova chamada Ceva ou é Menelau ali

- S2: É Menelau

- P2: tem Menelau?

- S2: tem

- S1: tem mediana

- S2 e S3: fazem comparações entre a figura do Teorema de Menelau e o de Ceva

- S1: também comenta as semelhanças ressaltando que existem as divisões

- S2 e S3: constatam semelhança destacando o triângulo CAF e EOB, transversal

- P1: sim, dá um Menelau ali. Mas você só consegue ver este?

- S2: não

- P2: a questão é, tem uma porção de Menelau ai

- P1: S2, na verdade eu queria perguntar se você consegue ver outros

- S2: balança a cabeça concordando

- Sala: vai mostrando outras relações de Menelau dentro do Teorema de Ceva

- P1: completa dizendo que tem pelo menos seis relações de Menelau ali, já que fez esta quantidade

- P2: o Ceva não criou nada

- S2: ele só colocou o nome dele

- P2: ele aplicou, o Menelau não aplicou. Agora olha lá que interessante o resultado

- P1: então apresenta o Teorema de Ceva

- P2: pergunta a sala se está ok, e eles concordam com a cabeça. Ai formula com suas próprias palavras o teorema "quando eu traço três cevianas do vértice de um triângulo, cada ceviana divide o lado oposto em dois segmentos"

- Sala: concordando com a cabeça

- P2: "se as três cevianas encontram no mesmo ponto, como é o caso ali, eu tenho estes seis segmentos tem a relação de Menelau, o produto de três deles é igual ao produto dos outros três", lembrando que não podemos ter extremidades em comum

- S3: qual a definição de ceviana?

- P2: ceviana é o segmento que sai de um vértice e vai até o lado oposto, podendo também ir fora, no prolongamento do lado

- P1: estamos falando da ceviana que estudamos na escola mesmo

- S2, S3 e S4: dizem não ter estudado cevianas, S1 fica quieto

- S3: então ali você teria que deixar todas as cevianas até achar um ponto em comum? Se você consegue achar três cevianas que concorrem em um ponto é que isso acontece? É isso que você está querendo dizer?

- P2: mostra que depois que você constrói duas cevianas você consegue construir uma terceira ceviana passando ali, logo concorrendo em um único ponto. E mostra no quadro branco uma relação de Menelau usando a figura de Ceva. Só tem um porém aqui, aqui não tem colinearidade, igual tinha no Menelau. Aqui tem o que então? "Concorrem um único ponto, tem concorrência". Como já vimos coisas colineares se projetam colineares, se eu projetar as três retas e seu ponto de incidência ou concorrência vai continua sendo na projeção um ponto de concorrência. Então não é só o alinhamento que se projeta como alinhamento, a incidência de três retas também, três pontos alinhados se projetam alinhadamente, três retas incidentes se projetam incidentes

- Sala: balançando a cabeça positivamente todo o tempo desta fala de P2

- P2: como é que seria a reciproca de Ceva? Fala, rápido, como seria. A reciproca de Ceva e a de Menelau falam de coisas projetivas. Geometria Projetiva é a geometria da concorrência e do alinhamento, da colinearidade melhor dizendo, colinearidade de pontos e incidência de retas, só isso. Menelau e Ceva que são euclidianos, porém, em suas recíprocas

- P1: projetivos

- P2 fala com P1: agora é uma tarefa ai pra eles né?

- P1: sim, demonstre o Teorema de Ceva com o auxílio do Teorema de Menelau e formule e prove a recíproca do Teorema de Ceva

- S1: já fizemos

- P1: só formulou

- Sala: risos

- P2: vamos lá gente, eu pego a estrutura de Ceva e tenho seis Menelau

- Sala: concordando com a cabeça

- P2: então eu consigo escrever seis Menelau, em princípio independentes

- S3: o problema é que quando eu acho um Menelau um segmento que está na hipótese não aparece

- P2: pois é, era isso mesmo que você está falando que eu ia comentar. Se você começar a separar Menelau por Menelau, vamos pegar o triângulo ACF, ai a gente viu que o Menelau aparece quando eu pego transversal EOB, então me ajuda ai. CE, EA, BA, BF, OC e OF, aparecem seis segmentos

- Sala: concordando com a cabeça

- P2: então o BA não está no Teorema de Ceva, o OC também não está no Ceva

- Sala: concordando

- P2: ele está neste Menelau, então quando eu escrevo um Menelau

- P2 e P1 discutem sobre quais segmentos estão e quais não estão

- P1: os ligados a O não estão

- P2: o BA também não está, dois ligado ao O e o BA não estão. Então um Menelau tem três que estão e três que não estão, o segundo Menelau vai ser a mesma coisa. Então se você escrever os seis Menelau vai te dar o maior trabalho, mas você vai cortando

- P1: a gente usa eles dois a dois e não os seis

- P2: o OC aparece onde também? Ali, no triângulo ABE, não OC...

- P2: o Menelau da direita tem OC também, eu quero sumir com ele, então dois Menelau vão sumir com um OC e dois Menelau vão sumir com um OF

- S3: OF. A volta vai ser gigantesca né?

- P2: é vai dar um trabalho mas falando assim já dá pra...

- P1: é trabalho de conta só

- P2: a P1 e eu ficamos preocupados se as pessoas não veriam, mas vocês mataram de cara aqui. Falando aqui já deu pra demonstrar

- P2: Então, outro exercício

- P1: Formule e prove a recíproca do Teorema de Ceva

- P2: Se isso ai é porque são incidentes – você junta duas, porque duas cevianas sempre se encontram, a terceira por exemplo, CF, você coloca CF' e mostra que vai dar a mesma coisa, se dão a mesma coisa CF e CF' dão a mesma coisa

- Sala: concordando com a cabeça

- P2: o Teorema de Ceva é a primeira aplicação do Menelau

- P1: do que encontrei, o Ceva é a primeira pessoa que usa o Menelau

- P2: depois os matemáticos vão acordar pro Menelau, todo mundo começa a usar ele

# Falamos de pontos notáveis de um triângulo

# rovar que as três medianas se encontram no mesmo ponto, chamado Baricentro. Vocês já fizeram isso alguma vez? Como aluno ou como professor?

- Sala: nega com a cabeça

- S1: mediana é o que divide no meio ou....

- P2: sai de um vértice e vai ao meio do lado oposto

- P1: Mas não necessariamente perpendicular

- S1: então não obrigatoriamente faz um ângulo de noventa graus?

- P2 e P1: não

- P2: olha só gente, no livro didático tem esta demonstração, Euclidiana. Ela tem no mínimo uma página

- S1 e S2: fazem uma cara meio que de espanto

- P2: vocês vão demonstrar isso em uma linha agora

- Sala: novo espanto

- S3: Ah, mais se eu dividir na metade os segmentos que eu tenho do lado de cá são iguais aos que eu tenho do lado de lá

- P2: isto (balança a cabeça positivamente)

- S3: naquele teorema, que seria a volta

- P2: isto

- S3: implica que eles tem um ponto em comum

- P2: se cada lado está dividido igualmente

- S2: ah sim, pegando dois a dois, pulando um

- P2: alternando o produto é igual, porque um compensa o outro

- Sala: concordando

- P2: ai você escreve que pelo Teorema de Ceva há uma incidência

- S3 comenta com S4: que bacana

- P2: Geometria Projetiva funcionando

# Seguimos com outra atividade: prove que as bissetrizes que as bissetrizes internas de um triângulo são concorrentes em ponto que se chama Incentro

# P2 fala sobre bissetrizes

- S3: acho que é nesta que desenha um círculo inscrito pra demonstrar

- P2: sim

# P2 explica sobre o Teorema da Bissetriz Interna

- P2: isso é uma coisa, outra coisa é demonstrar que elas se encontram em um ponto, ai vem a página e meia da Geometria Euclidiana. Usando Ceva, vai dar em uma linha? Não, dá em duas.

- Sala: risos

- P2: porque aqui tem que fazer uma preparação

- Todos: fazemos as contas para demonstrar a atividade dada

- P2: na Geometria Euclidiana cada demonstração é independente da outra (com relação a encontro das bissetrizes, medianas e alturas), o que não é legal, porque para um matemática quanto mais resultados ele obtiver com o mesmo procedimento é interessante

# P2 começa ao fim da aula a dar uma ideia da teoria do quadrilátero completo, para isso traça prolongamentos de lados opostos até que se encontrem, divide segmentos e arbitra valores, faz a proporção dos segmentos criados. Perceberam ali? Uma coisa totalmente aleatória

- Sala: balançam a cabeça concordando

- P2: e o ponto que as duas diagonais criam, de cada um até N e P, você faz as contas e são iguais

- S1: questiona que P2 pegou segmentos da mesma reta

- P1: explica que de acordo com o que vimos em Menelau não pode coincidir as extremidades

- P2: S1, eu peguei os segmentos que eu queria pra fazer as contas que precisava, a escolha não foi aleatória, o traçado que é aleatório.

- S1: se eu tivesse feito com outros segmentos daria certo?

- P2: vamos tentar em casa. Traça o quadrilátero, prolonga os lados opostos, cria P e N, ai cria a reta, traça as diagonais. Na aula que vem a gente desvenda este mistério, de como é que uma coisa totalmente aleatória tem esta capacidade de dar este resultado

2ª aula

# S4 ausente neste dia

- P1: expõe o teorema a ser trabalhado (Teorema de Pascal)

- P2: ajuda na exposição do teorema

- Todos: acompanham

- P2 faz pergunta (com intenção pedagógica): O que tem de espetacular para ser um teorema?

tempo para pensar

- P2: sem resposta acaba fazendo um contra exemplo com régua no quadro branco

- Todos: continua a dificuldade de ver a característica projetiva do teorema

- P2 e P1: trazem a uma pouco de história para que a turma possa ver a projetividade

- P2: resolve incidir mostrando a colinearidade; 3 tinha observado a inscrição do hexágono, apenas

- Todos: em frente a lousa iterativa

- P2: apresenta o teorema em desenho. O hexágono está inscrito num círculo. Mexe nos vértices do hexágono, para que seja percebida a permanência da colinearidade

# Todos olham demonstrando achar interessantes os movimentos, sem, no entanto, se manifestarem

# No movimento, dois momentos foram enfatizados: quando o hexágono passou a ser estrelado e quando os lados ficam quase paralelos, fazendo com que as interseções sumissem da tela do Geogebra.

- S3 concorda com S2: quando S2 observa que a condição básica é ser inscritível.

# Todos enfatizam que o hexágono sofre várias transformações topológicas e a propriedade do Teorema se mantém.

- P2 e P1: propõem que eles mexam no aplicativo do Geogebra sobre o Teorema de Pascal

- Todos perguntam a P2: “mas você já não mexeu?”

- P2 e P1: mas vocês vão mexer da forma de vocês

- S3: é convocado a mexer. Ele mexe no centro do círculo, que por nós foi disposto a ser, na verdade, dois focos de uma elipse que fizemos coincidir.

# S2 vê a elipse começando a acontecer e se impressiona, ressalta que mesmo assim a colinearidade é mantida

- S1: sugere que S3 mexa para o outro lado

- P1: explica a eles que verdade fez uma elipse e fez coincidir os focos para que pudéssemos ter tanto um círculo quanto uma elipse, já que o Teorema é válido para qualquer cônica.

# A explicação acima ratifica as compreensões dos participantes.

- S1: não consigo rodar a bola não?

- Todos menos S1 (S2 com a cabeça): dialogam sobre a pergunta de S1

- P1: também fiz para parábola e para hipérbole

- S2: se alegra

- S3: hipérbole! (com empolgação)

- P1: vai mostrando algumas coisas no Teorema, agora para elipse

- S2: Nossa! Achando muito bacana

- S1: continua mexendo

- P2: “pode até passar um ponto do outro?” “não, né?” “Ah, pode?”

- S1: mexendo na figura podemos notar que o hexágono vai mudando sua condição topológica

- S2 e S3: demonstram gostar do que veem

# S1 abre discussão topológica

- P2: diz que, no momento, o hexágono está com dois nós espelhados

- S1, S2 e S3: se empolgam com o fato de a propriedade ser mantida

- S1: Pascal funciona para um monte de coisas né?

- P1: sim, para vários modelos de hexágonos e para qualquer cônica

- P2: pergunta se pentágono dá ali

- P1: toma a iniciativa de levar o hexágono para um pentágono, sobrepondo dois pontos

- P2: o que aconteceu quando vocês trespassaram? Ninguém notou?

- S3: tem um lado que fica sem lado oposto

- S1 e S2: o lado fica reduzido a um vértice

- P2: então podemos dizer, neste contexto, que um vértice é igual a um lado?

- S3: não, não diria

- P1: lembra que na aula passada, o Teorema de Menelau favorece reduzir elementos quando se corta o triângulo num vértice.

- P2: aquela reta é o quê?

- Todos: tangente. O grupo vai concordando que a extensão do Teorema para pentágonos procede

- P1: junta mais dois vértices, fazendo com que o polígono passe a ser um quadrilátero

# O grupo vai concordando com o que veem com algumas expressões faciais. O grupo vai conversando sobre suas compreensões uns dos outros.

# levamos o polígono a um triângulo, e ainda assim o Teorema continua válido

- P2: constrói um corolário que seria de uma geometria elementar, para , com a ajuda gestual de todos.

- S2: fala, se referindo ao Geogebra, que facilmente se traça todas as possibilidades

- S3: e se fosse um heptágono?

- P2: seria outro tipo de colinearidade, pois seriam quatro pontos

# Começa-se a demonstrar, como uma tarefa que se acha importante

- P2: usa slide com a figura pronta e questiona o que nós temos para essa tarefa: a colinearidade que foi vista em Menelau. Onde usaremos?

# Todos demonstram compreensão da aplicabilidade de Menelau e olham a figura atrás dessa aplicação

- S1: ali na linha colorida

- P2: mostra ali na figura

- S2 ajuda S1: ali, mostrando com os dedos os pontos que indica

- P2: Menelau é sempre isso (desenha): um triângulo e secantes

- S1: gesticula com os dedos, demonstrando que está achando onde usar Menelau. Fica aflito para falar sobre a figura

- S2 e S3: também interagem vendo onde aplicar Menelau

- S2: indica toda uma situação de aplicação

- S3 (com ajuda das mãos): seria legal usar o negócio dos três pontos (se referindo a três pontos colineares)

- P2: há várias possibilidades de aplicar Menelau. Vai ao quadro e organiza uma figura com os elementos necessários para a demonstração.

# Toda a articulação de P2 é bem acompanhada por todos,

Segue a demonstração de Pascal

- P2: então vai ter outro Menelau aqui. O Menelau virou um operador nosso

- S2: vai chegar num sistema

- P2: a gente tem que chegar em um único Menelau

- Contas sendo feitas no quadro branco

- S1: P1, ele escolheu uma secante, mas ele poderia ter escolhido a outra?

- P2: eu estou usando as três secantes

- P1: ou invés de ter escolhido dois triângulo e uma secante pra cada, nós escolhemos um triângulo e três secantes, esta não é a única forma

- S1: ah tá, entendi. Tem uma aqui, outra ali e outra ali (apontando pra o aplicativo exposto)

- P1: você poderia ter escolhido triângulos diferentes, por exemplo

- P2: só que tem mais coisa aqui, se eu fizer as contas nenhum se repete

- S3: uhun

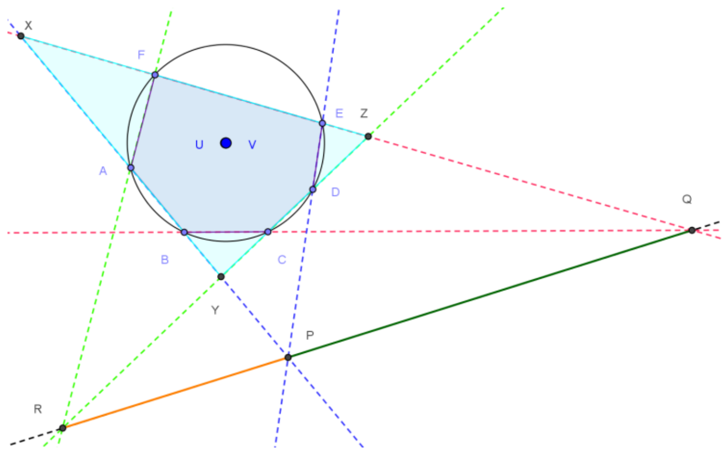
- P2: então precisamos de mais uma coisa, esta coisa vem da potência de pontos

- S3: explicando baixinho para S2 o que é uma potência de pontos

# P2 faz no quadro branco a potência que interessa em nossa demonstração

- P2: então não é só um teorema projetivo, porque apelamos para um teorema que é Tales (se referindo à potência de pontos)

- P2: a secante também pode cortar o prolongamento dos três lados, eu vou ter que usar esta situação, porque no meu triângulo azul a secante RPQ, ela não está cortando ele, está cortando quem?




- S3: os prolongamentos

- P2: vamos ver se esta expressão que sobrou daqui, do trabalho algébrico corresponde ao espirito de Menelau aplicado neste triângulo azul, com esta secante tiverem aquela expressão, então estes pontos são colineares pelo Teorema de Menelau.

# Seguimos com as contas para a demonstração

- P2: estamos usando o recíproco do Menelau, então está fundamentado que RQP são colineares

- P2: as demonstrações são sempre assim, elas apelam para o Menelau. Lembra que o Ceva também apelava para o Menelau, só que aqui teve que ter uma ajudinha da potência de pontos

- P2: voltando pra questão da cônica todo círculo é uma elipse

- Sala: balançam a cabeça positivamente

- P2: quem falou isso pra vocês? Uma porção de gente

- Sala: concorda

- S1: Foi a Cristiane, foi a Tatiana

- S2: eu não consigo lembrar

- P1: eu não consigo lembrar nem se eu estudei antes

- S1: minha vida começou aqui

- P2: e se eu te falar que todo círculo é uma hipérbole? Vamos na parábola. Se eu falar que todo círculo é uma parábola, causa o mesmo frisson intelectual?

- S2: balança a cabeça negativamente

- P2: você passa não acreditar muito?

- S2: não, dá tela azul

- S1: concorda com S2

- P2: porque o círculo é uma elipse e não é uma parábola?

- S1: oh, até dá. Se você pegar duas parábolas, muito longe, então o ponto que elas vão se encontrar aqui e aqui, vai se quaaaaaaase

- P2: uma elipse

- S1: é, vai ter quase uma elipse

- P2: então de duas parábolas eu vou ter uma elipse?

- S1: sim

- P2: pelo que você está falando

- S1: é, pelo que eu consigo enxergar é

- P2: hipérbole nem pensar né? porque hipérbole (ai mostra com as mãos que na hipérbole as duas concavidades são espelhadas)

- S1: faz a mesma coisa que P2 com as mão e confirma que pra ele não dá. Mas volta atrás e diz que dá e depois diz de novo que não dá

- P1: coloca o aplicativo do Geogebra do Teorema de Pascal usando hipérbole

- P2: pergunta se eles conseguem ver o hexágono inscrito na hipérbole

- Sala: diz que sim

- P2: a lá o que está acontecendo, a mesma coisa (se referindo a este teorema na elipse e no círculo). Oh S1, por isso é que eu falo que o círculo é igual a hipérbole, porque o que acontece no círculo acontece na hipérbole

- S1: Ri. E por que que isso acontece?

- P1: porque na Projetiva as coisas não acontecem pra uma circunferência, pra uma elipse, elas acontecem pras cônicas e a hipérbole é uma cônica

- P2: ah, a P1 fechou, vale do ponto de vista da Geometria Projetiva

- P1: quando eu projeto uma circunferência eu não sei se a projeção vai ser uma circunferência, mas tudo que estava ali vale na projeção

- P2 - mexe no aplicativo da hipérbole – estou mexendo no meu hexágono, e meus pontos continuam colineares, mesmo o hexágono estando estrelado

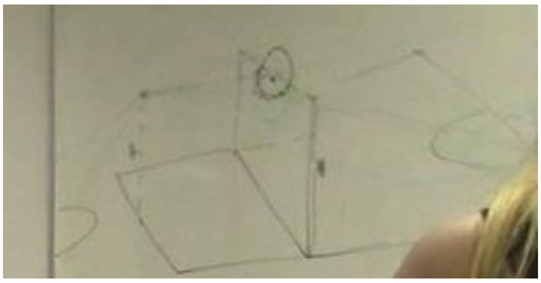
- S1: oh P1, então o ponto inicial é uma hipérbole, que a gente vê em G. A.?

- P1: é

- S1: ai depois você marcou os pontinhos... (se referendo aos vértices do hexágono)

# Conversando sobre as semelhanças entre as cônicas na Projetiva

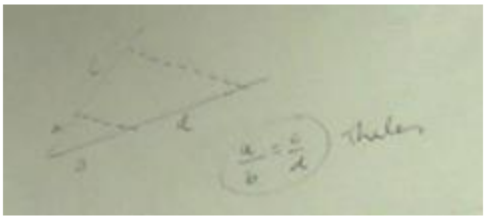
- P2: é um desconforto imaginar que um círculo se projeta como uma hipérbole, mas é



Falando das formas que um círculo pode ter ao ser projetado, mostrando que da projeção do círculo podemos obter hipérbole, elipse e parábola

- P2: este esquema referenda o que que é elipse, hipérbole e parábola, senão a mesma coisa, é apenas este círculo em posições diferentes

- P2: estou fazendo um esquema



- P2: se eu projetar uma estrutura de Tales. O Tales em um plano, se eu projetar em outro plano não é mais Tales

# Conversamos sobre Tales

- P2: ele que é o pai da Geometria, ele que gera as relações métricas

# P1: fala que na Geometria Projetiva as relações métricas nem sempre são preservadas, mas que as relações da Razão Cruzada são preservadas nas projeções

- P2: gente, o que é uma Geometria sem contas pra fazer? Existe isso?

- S1: não faço ideia

- P2: vocês conhecem a Topologia?

- S1: não

- P2: já ouviram falar?

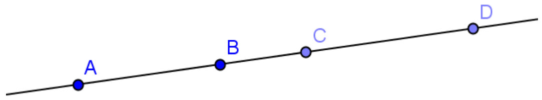
- S3: vagamente

- P2: a Topologia, vamos chamar ela de Geometria também, tem gente que nem considera ela uma Geometria. A Topologia, por exemplo eu tenho o problema das pontes, eu tenho uma cidade formada de ilhas e tem ponte de uma para outra quantos caminhos eu posso, sem passar duas vezes na mesma ponte. Bom, ai tem uma conta, mas não tem medida, ninguém está falando que a ponte tal é maior, andando cem metros, não existe isso. Esta Geometria é uma Geometria, com a métrica dela. Quem conhece a Topologia tem uma métrica que não é uma métrica que não é a que estamos acostumados

- P2: a questão da Geometria ali era para não ter métrica nenhuma, mas ...

- P2 e P1: falando sobre a Razão Cruzada, que foi usada por Pappus

Razão Cruzada




$$\frac{AC.BD}{AD.BC}$$

- P2: então gente, esta Geometria não tinha conta nenhuma pra fazer, era uma Geometria só de colinearidade, de incidência de três retas, até que alguém lembrou, alguém do século XVII, lembrou ou descobriu

- P1: mostra a figura do Teorema de Pappus, fala que nesta figura ele não usa o polígono e sim o encontro dos segmentos que vão de ponto a ponto.

Eu não posso garantir medidas, mas a proporção é mantida

- P2: escreve no quadro de outra forma a Razão Cruzada

- S1: pergunta a quanto isso é igual

- P1: o valor é variante

- P2: isso é um número

- P1: não é um número fixo igual é o Menelau

- S3: e por que isso é importante?

- P1: pra que eu possa achar um quarto ponto por exemplo

- P2: o número não tem nada de especial nele, é um número. Se eu projetar estas medidas. Quando você projeta todas as medidas se modificam

- P1: mas a relação se mantém

- P2: Razão Anharmônica

- P1: ou Razão Cruzada

- P2: Razão Cruzada dá pra explicar, é porque os segmentos se cruzam. Cross Ratio, razão em cruz, porque o BC cruza com o BD

# Razão Harmônica


- P2: fala que a Razão Harmônica o grupo conhece

- Sala: não confirma

- P1: define a Razão Harmônica

- S1: acho que o P2 falou isso na aula

- P2: capítulo dois do João Lucas, exercício 13. Divisão Harmônica

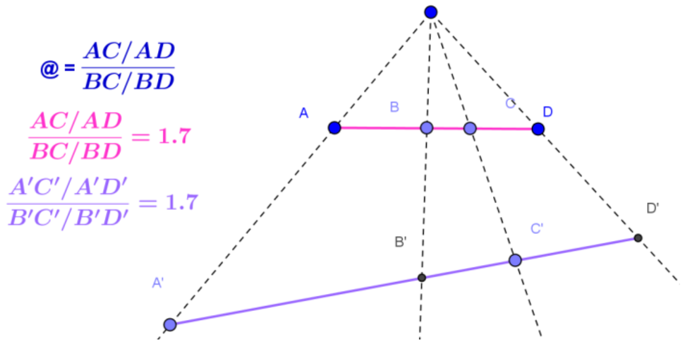
- S1: balança a cabeça positivamente

- P2: pergunta a S2 e S3 se eles conhecem a Divisão Harmônica

- S2 e S3: não confirmam

- P2: Divisão Harmônica é uma coisa Euclidiana, vamos dizer assim, tanto é que o Apolônio é que estuda ela

- P1: apresenta um aplicativo para mostrar a Divisão Harmônica




- P1: mexe no aplicativo

- P2 pergunta a sala: o que que a P1 fez ali? Ela fez duas coisas diferentes

- P1: primeiro eu mexi com o D, depois eu mexi com o B

- P2: não fica falando não, deixa eles verem.

- P2: Primeiro você mexeu e não acontecem nada, depois você mexeu e aconteceu

- S2: foi o que ela fez com o D

- P1: então, foi isso que eu fiz, primeiro mexi o D

- P2: agora tem três coisas

- P1: mexe no ponto A'

- P2: gostei, mexe de novo

- P2: vamos apresentar feixe, pra gente começar a falar de feixes

# P1 define Feixes Anharmônicos

- P2: então o número chave ai é quatro, né? Sabe por que? Porque eu lembrei que o outro nome da Razão Cruzada é Razão de

- P1: de quatro pontos

- P2: como é que uma pessoa acredita nisso? (se referindo ao fato de que no feixe anharmônico a proporção é mantida quando projetamos um segmento)

- P1: mostra que o fato de os valores serem iguais nas razões dos segmentos não é uma coincidência, e que o segmento original é um segmento qualquer, para isso movimenta os pontos no aplicativo

- P2: afinal de contas o que é um feixe de quatro retas, todas saindo de um mesmo ponto, é uma coisa que projeta, é como se fossem raios de luz projetando

- P2: toda a vez que a gente fala em um número ele expressa uma razão, na Geometria a razão é a razão entre duas medidas. Aqui está dando problema porque o número é a razão entre duas razões

- P2 e P1 propõe a atividade:

# Determine uma razão de duas linhas que seja igual à razão anarmônica de quatro pontos dados

- P2 propõe que façamos esta juntos. Vamos passar uma paralela.

- P2: e aqui vai uma crítica até a nossa visão de Geometria Projetiva, - porque você pode me falar: toda hora você que não tem mais paralela. Realmente a Geometria Projetiva não é a Geometria das paralelas, até as paralelas se encontram no infinito. - Ai você pode falar: mas você vai usar? – vou.

- P2: estou falando uma coisa e fazendo outra, está valendo tudo. Agora vocês me ajudem aqui

- P2 começa a fazer esta atividade no quadro com a turma

**ATIVIDADE RESOLVIDA**

- P2: pra mim é esquisito, então eu leio ela como sendo razão que eu obtenho ai, de dois segmentos

# Vamos para a atividade: verifique a projetividade da Razão Anharmônica

# para isso usamos o aplicativo já apresentado e para uma outra verificação o desenho da figura anterior

- P2 no quadro branco: é aquilo que o Pappus falou a razão dos quatro pontos ABCD, é a mesma da razão observada em A'B'C'D'. Lembrando que isso a P1 já mostrou com o Geogebra, o que estamos falando é uma demonstração matemática

# Apresentamos uma ideia mas esta é deixada para eles como tarefa para casa

- P2: o que que está pedindo? Para ver se o número que resulta na transversal de cima é o mesmo da transversal de baixo

- Sala: faz perguntas para ver se estão de fato entendendo o que tem que ser feito, o que acaba deixando a atividade praticamente pronta faltando apenas escrever

- P2: quando a P1 apresentou o aplicativo, eu vi duas coisas, quando ela mexia o ponto D, não mexeu no feixe

- P1: quando eu mexo no D, eu carrego todos os pontos, então não altera nada porque eu mexi tudo com ele

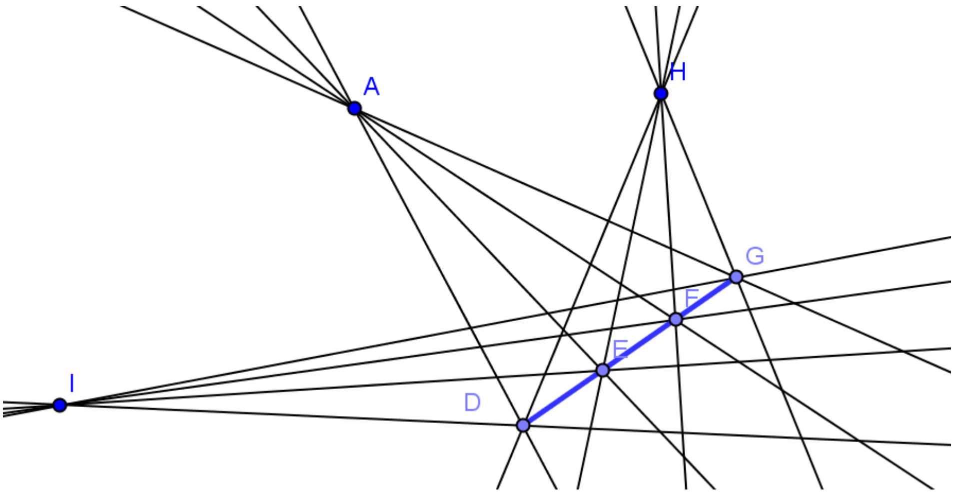
- P2: eu estou vendo além disso, quando você mexe no D você não mexe no feixe

- P1: no Geogebra isso está acontecendo porque toda a minha construção depende de A e de D

- P2: então quando ela mexe em D a razão se mantém, quando ela mexe em B ou em C a razão é alterada, mas mudou nos dois, em cima e em baixo

- P2: conclusão que a gente pode chegar – quando eu olhar para um feixe aqui já tem um número, independente se eu passar a transversal inclinada, na horizontal

# Para encerrar este dia de aula P2 apresenta um encontro que feixes




- P2: eu faço um feixe ele tem uma Razão Anharmônica depois pego um ponto fora dele e faço outro. Qual é a Razão Anharmônica deste outro feixe? Imagina que eu estou transmitindo dados. Cada feixe eu estou fazendo uma transversal, para lembrar que é a maneira de eu ler a razão de um Feixe Anharmônico é através de uma transversal

- P2: vamos lá, eu tenho o primeiro feixe, tenho a Razão Anharmônica dele, e do primeiro para o segundo? O que acontece?

- S2: a razão é mantida

- P2: sim. Qual é a razão do quinto feixe? A mesma.

- P1: era isso que os pintores faziam, eles iam levando de um lugar para o outro até conseguir chegar no lugar em que eles queriam, para ter mais proporção

# Encerramos a aula definindo atividades pra que fizessem em casa

3ª aula

# S3 e S4 ausentes nesta aula

# Tela iterativa do laboratório estava funcionando neste dia

# Uma das atividades propostas era tentar se o Teorema de Pascal funcionava para o heptágono

- P1: eu tentei fazer para o heptágono, a primeira coisa que eu esbarrei foi, não tem jeito

- P2: pela própria definição

- P1: de achar os lados opostos, ai o P2 falou para eu fazer um octógono, ai sobrepus um ponto

# Sala atenta a movimentação feita no Geogebra

- P1: não têm condições

- P2: se desse certo para o octógono, daria certo para o heptágono porque a gente está reduzindo sempre

- Sala: balança a cabeça concordando

- P1: descobre que a tela está funcionando o touch, o que causa um momento de conversa sobre

- P2: então, o teorema é valido para seis

- S2: ai perde a colinearidade dos pontos?

- P1: é, se perdeu a colinearidade

- S2: o sentido

- P1: o sentido para a projeção

# O octógono gera quatro interseções

- P1: eu não consigo colinearidade nem de três pontos, apenas dois a dois

- P2: P1, mexe ai, faz três pontos ficarem alinhados, é outra saída nossa, você mexeu ai eles ficaram alinhados

- P1 deixa, visualmente alinhado, os três pontos. Reduz o zoom para que o quarto ponto apareça

- P1: eu acredito que deva ter um octógono específico que encontre

- S2: é

- P2: claro, porque a gente já achou um contra exemplo

- S2: será que o regular não encontra não?

- P1: não sei

- P2: não, porque vai ficar paralelo

- P1: é verdade, no hexágono não dá

- S2: concorda

- P2: pede a P1 que volte o desenho de forma que dá pra ver que eles realmente não estão alinhados, os três pontos

- P2: nós quatro fizemos e vimos que tem um contra exemplo

- S1 e S2: concordam

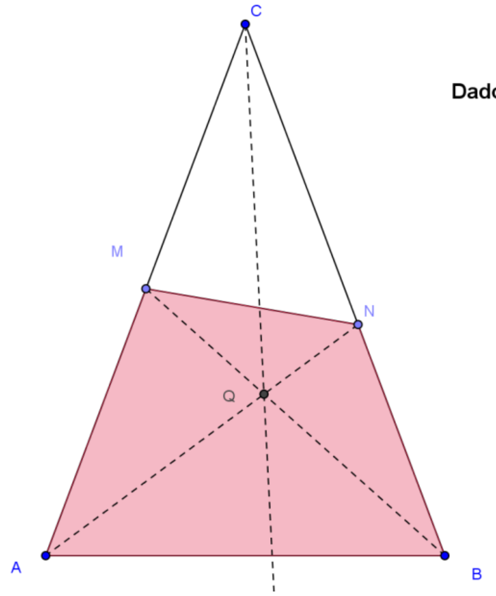
- P2: mas vimos também que com alguma especificidade que nós não vamos descobrir agora mesmo

- S2: Mas ai não é valido, porque tem que ser valido para todos, para uma só não adianta

- P1: é, eu até acho que a gente vai achar um, mas não acho que o teorema seja válido, porque no caso do hexágono o teorema nem especifica que tipo de polígono é

- P2 e P1: resolvem passar adiante com as atividades

- P1: apresenta a atividade sobre o quadrilátero




**Dado o triângulo ABC, e sejam N pertencente ao segmento BC e M pertencente ao segmento AC. As diagonais de ABNM, AN e BM, se encontram em Q. Construa outros quadriláteros ABN'M', a partir de um N´ em BC, cuja interseção de suas diagonais esteja contida na semirreta CQ.**

# P2 e P1 explicam o que deve ser feito

# P1: ressalta que tanto o triângulo ABC, quanto o quadrilátero ABMN são quaisquer

- P2: vamos lá desenha um triângulo ai ABC

- S2: eu fiz um triângulo bem aleatório aqui (S2, faz no Geogebra um triângulo em posição diferente do meu, com o ponto C na base do triângulo, sem se preocupar com a localidade dos pontos)

- S1: cadê N?

- P1: o N está no segmento BC

- S1: BC?

- S2: o M está no segmento AC e N no segmento BC

- P2: a lá o C está lá em cima

- S2: eu estou fazendo o contrário

- P2: então renomeia ai. Ou você muda ou a gente muda

- S2: mas o resultado vai dar do mesmo jeito, gente

- P1: sim

- P2: é, então vai

- S2: um N qualquer né?

- P1: sim

- S2: e M no AC

- P2: põe mais perto de A por favor

- S2: só que eu não sei se ele está pertencendo aqui

- P2: acho que sim

- P1: pertence, se ele está desta cor ele está no segmento

- S2: A tá

- P2: é?

- P1: balança a cabeça positivamente

- P2: agora que o triângulo ABC e o quadrilátero ABMN já estão prontos, precisamos fazer os quadriláteros, que tenham o M e o N diferente destes, mas que atendam ao enunciado

- S2: Q já é dado ali né?

- P2: é

- S2: pergunta como faz a interseção

- P1: mostra onde fica no Geogebra

- P2: agora tem que fazer a reta CQ

- S2: pronto

- P2: então vamos, construa novos quadriláteros, de maneira que a interseção deles também se encontrem na reta CQ, assim como o ponto Q

- S2: mas ai pode mexer o ponto, não pode?

- P2: o MN são fixos, o que você pode fazer é criar um M' e mexer ele

- S1 e S2 criam o ponto M'

- P1: acho que se vocês criarem o polígono vai ficar mais fácil de vocês visualizarem. Mostra a S1 como cria um polígono no Geogebra, fala que tem que ir nos quatro pontos e voltar no primeiro para terminar o polígono.

- S2: porque senão não fecha

- S1: comenta diferença entre o desenho inicial deles e o de P1

- P1: é porque o meu está de cabeça para baixo e relação ao de vocês

- S2: mas dá pra mudar não dá?

- P1: dá, é só mudar os pontos de lugar

- S1: afora o que que você quer, P1?

- P1: eu quero que você encontre um quadrilátero ABM'N', cujo ponto de interseção de suas diagonais também esteja na semirreta

- S1: então eu tenho que fazer outros pontos

- S2: mas ai são todos os pontos, não?

- P1: mas como é que você vai fazer para achar esses pontos?

- S1: então tudo linha ('). Então eu preciso colocar um aqui e outro aqui (se referindo a AC e BC)

- P1: sim, mas você acha que ele vai ficar CM'N'?

- S2 fala com S1: liga ai, faz as diagonais. Porque o encontro das diagonais têm que bater na semirreta aqui

- P1: se o quadrilátero que você está fazendo for o que pedi, o encontro das diagonais dele, vai bater na semirreta CQ, foi isso que S2 te falou

- S1 e S2: balançam a cabeça positivamente

- S1: entendi, então eu posso marcar um ponto, fazer uma diagonal e ficar a cargo de achar apenas o outro ponto?

- P1: pode

- S1 e S2 voltam uma parte da construção para começar a marcar um ponto em um dos lados

- P1: S1, eu não te disse que é assim que faz, só como prova que está correto, tudo bem

- S1 e S2: tentam mexer em uns pontos

- S1: não tem jeito P1

- P1: fala que tem

- S1 e S2 voltam a mexer nos pontos

- S2: tem a ideia de passar duas retas que se encontrem em CQ

- P1: fala pra ela que dá certo, mas que desta forma ela acho apenas um

- S2: é

- P1 pergunta: mas como você faria para achar a regra geral?

- S2: vamos lá, eles têm um lado em comum sempre, que é este aqui de baixo

- S1: tem a ver com feixes?

- P2: nós já falamos de Quadrilátero Completo?

- S1: faz uma cara de quem não lembra. Quadrilátero Completo. O que que é Quadrilátero Completo? Me auxilia ai

- P2: é um quadrilátero, qualquer, que além dos lados, você prolonga lados opostos. Então além do ABCD básico, tem E (o ponto de encontro dos lados opostos)

- S1: Mas aqui só tem uma ponta

- P2: uai, mas às vezes não tem porque ninguém apontou

- S2: então o encontro aqui, o encontro aqui. O encontro vai ser sempre o C

- S1: uma daquelas pontas ali. Mas acho que não é por este caminho não

- S2: também não. Se bem que se ele falou (sobre isso)

- S1: pede dica

- P1: dica – se o P2 falou sobre isso...

- S2: a ponta dele vai ser sempre o C

- S1: não, uma das

- S2: é uma das

- S1: então vamos achar outra.

# S1 e S2: acham outra ponta

- S2: mas a outra ponta de qualquer destes vai cortar o prolongamento deste lado aqui de baixo

- P1: uhun

# S1 e S2: usam o ponto que acharam na interseção dos lados opostos do Quadrilátero Completo e o polígono que S2 achou forçando a construção do quadrilátero pedido, para tentarem resolver

- S2: a gente já tem o E (ponto de interseção dos lados opostos do Quadrilátero Completo)

- P1 e sabe que tem que usar

- S2: é. Sugere criar uma reta a partir de E

- P2: o importante é passar pelo E

- Todos: uhun

- P2: então tem que começar do E

- S1: sugere uma reta que passe em E e vá até um lado do triângulo

- P2: agora você precisa definir o quadrilátero

- P1: o que você precisa para ter um quadrilátero

- S2: outro ponto

- S1: o outro ponto fica aqui (aponta o outro lado do triângulo)

- P2: isso

- P1: exatamente

- S1 e S2: constroem o outro ponto e o quadrilátero

- P1: faz a atividade na tela iterativa, para facilitar a visualização, já que o deles ainda continha tudo o que eles tentaram para atingir o objetivo

- S2 fala com S1: você não pode criar o ponto, você tem que ver onde a reta vai encontrar

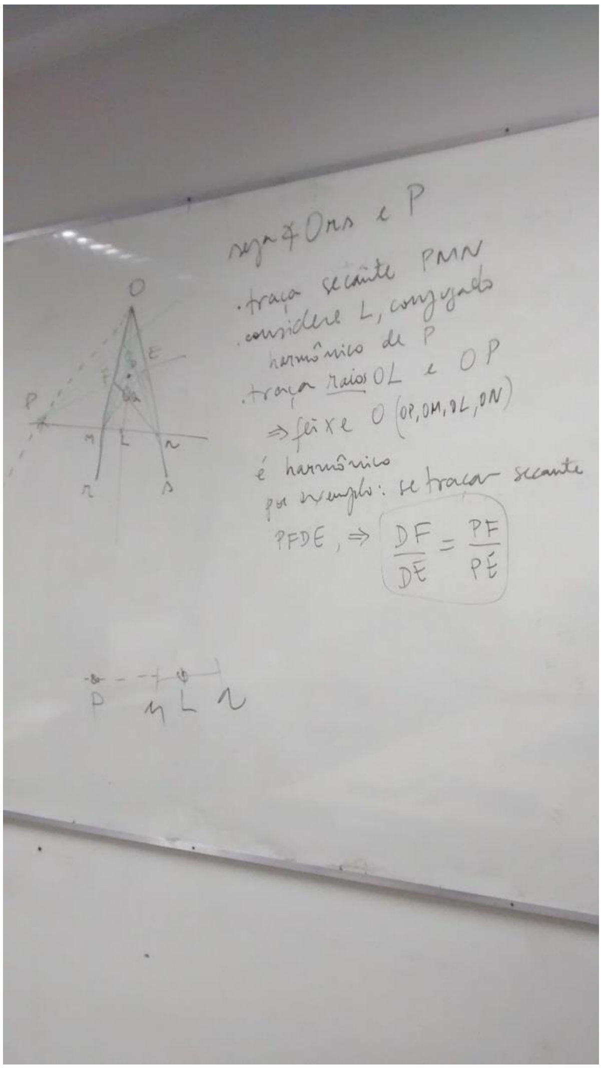
# S1 e S2 seguindo a sugestão de P1 refazem o desenho para ter uma imagem mais “limpa”

- P2: o deles ficou diferente

- P1: é que a gente colocou o N mais baixo do que o M e eles o contrário, por isso que o deles ficou para o outro lado

– P2 vai para o quadro branco para fazer uma exposição

- P2: você tem um ângulo e um ponto, vou passar uma secante. Seja o ângulo ORS e o ponto P




- P2: traça a secante PMN.

Isso tem a ver com a atividade, mas tem a ver com conjugação harmônica também.

Eu vou pegar aqui o ponto L, olha para o segmento MN. Lembra daquele negócio de dividir dentro e fora?

- S1: sim

- S2: balança a cabeça positivamente

- P2: na mesma razão, P e E.

Quando você tem o segmento e um ponto externo, o interno é consequente.

Considere R conjugado harmônico de P. Agora olha só que interessante, nós vamos traçar este raio OL.

Por que raio? Porque no estudo de feixes cada reta é um raio, tem a ver até com projeção.

O Raio OP eu não preciso mas vou deixar ele aqui visualmente. A lá, é um feixe. Se na secante PNLM, eu tenho uma razão harmônica. Aqui eu tenho a mesma razão Anharmônica, porque como a gente já viu dentro do mesmo feixe todas as secantes vão ter a mesma razão.

- P2: fala novamente sobre Divisão Harmônica. O P e o D são Conjugados Harmônicos.

É mais ou menos o que a gente está fazendo neste exercício, olha aqui o Quadrilátero Completo, respondendo à pergunta de S1 (se feixes tinha a ver com a atividade). Compara a figura feita por ele no quadro e a atividade feita por S1 e S2.

Então todo Quadrilátero Completo que tem os mesmo encontros de lados opostos tem também o encontro das diagonais alinhados. Isso que eu fiz aqui é a teoria para isso, porque fica a dúvida, por que isso deu certo? Embora nesta atividade também caiba Menelau

- P1: é, quando a gente fez esta atividade, a gente usou Menelau, por isso, S1, que eu te disse que EU não usei feixes

- S1: o Menelau teria um bico só, né?

- P1: é corta dois lados e o prolongamento. Então AB seria o prolongamento e o AC e o BC os dois lados que ele corta

- S1 e S2 verificando a fala de P1 na figura feita por eles

- P2: toda Geometria tem ponto e reta. E como é que é? Ponto é uma coisa e reta é outra?

- S2: Não (balançando a cabeça negativamente)

- P2: uai é a mesma coisa?

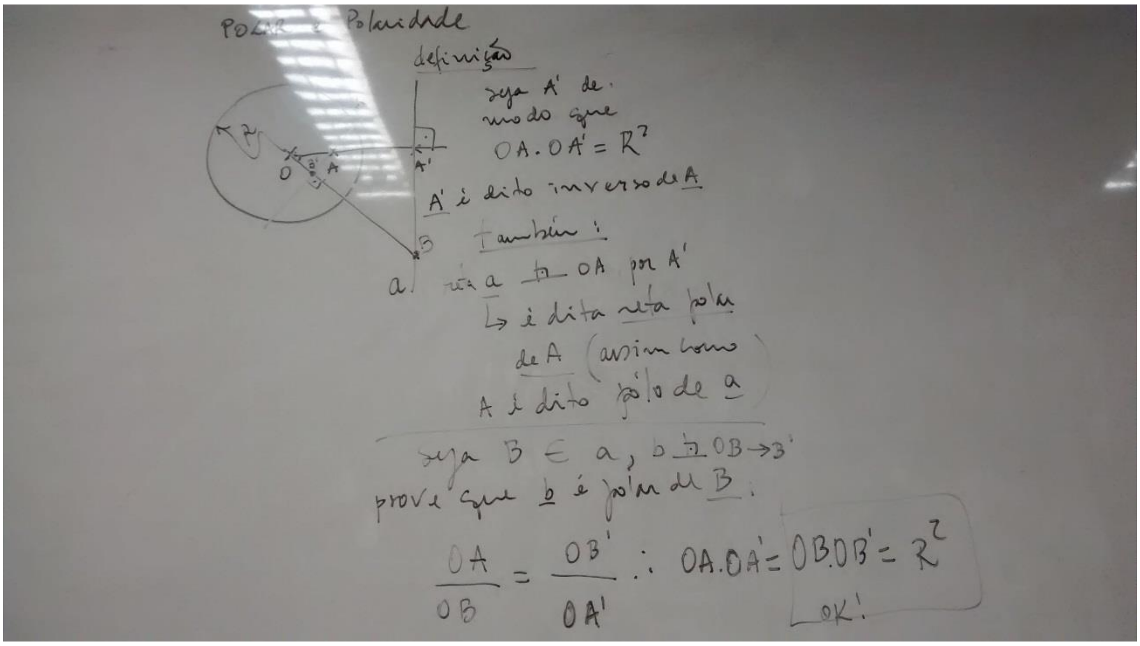
- S2: não, uma reta é um conjunto de pontos, né?

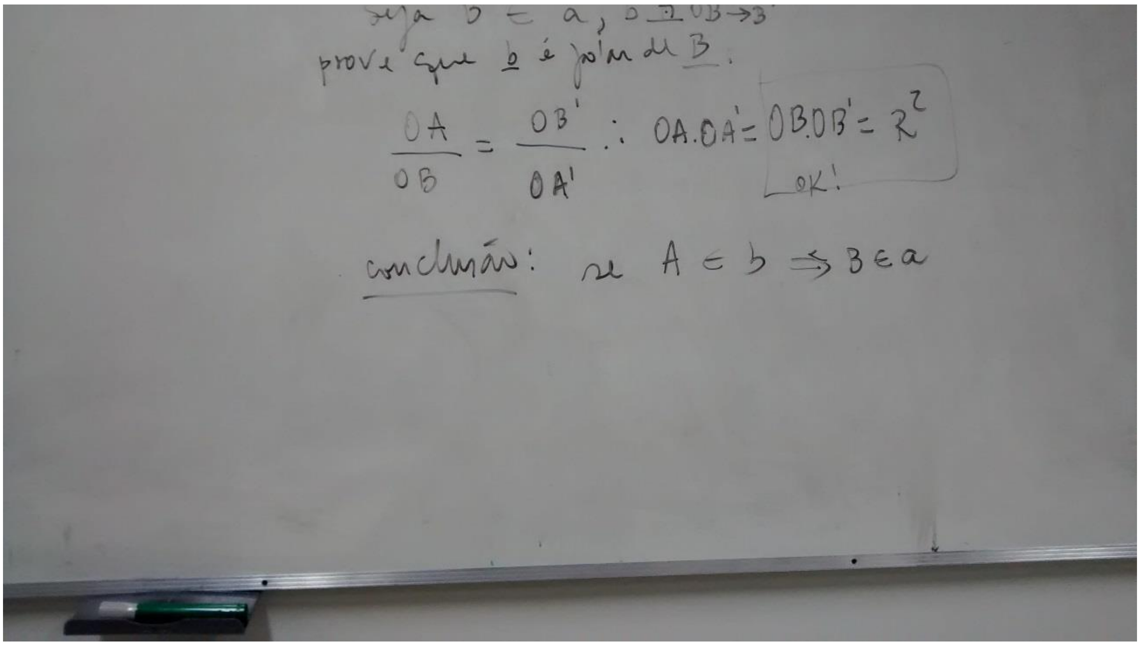
- P2: isso é o que você está falando, eu não sei. Não, é uma definição, mas é complicado. Um círculo também é um conjunto de pontos

- S2: por dois pontos passam uma reta

- P2: a tá, ai melhorou. Por dois pontos passam infinitos pontos, estou usando o círculo como contraponto. O legal da Geometria Projetiva é ... – não, também tem ponto e reta, tanto é que tem colinearidade é de pontos e incidência é de retas – só que reta vira ponto e ponto vira reta

# P2 inicia a apresentação da teoria de Polo e Polar






- P2 apresenta no quadro as definições e contas apresentadas na foto

- S1: P2, mas porque que você falou que ponto vira reta e reta vira ponto? É só a relação que eles têm? É isso?

- P2: relação que eles têm em relação ao círculo. Esta reta ‘a’ é polar do ponto ‘A’ em relação a este círculo

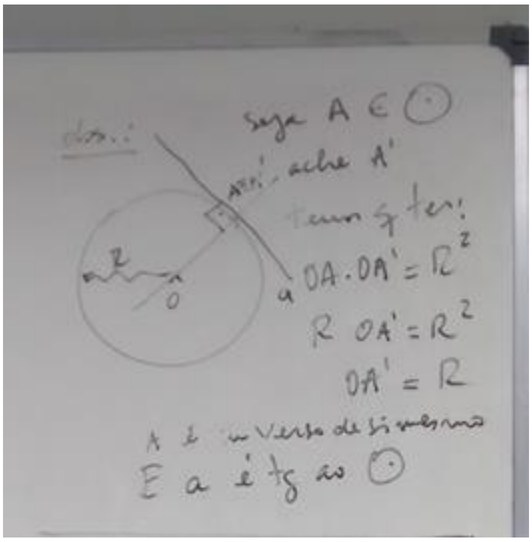
- S1: tá. Tem que ter o círculo né?

- P2: é. Mas eu quero falar disso agora

- P1: Na Geometria Projetiva tudo que é válido para pontos pode ser aplicado para reta, é o Princípio da Dualidade. O que serve para um serve para o outro

- P2: Conclusão: Se ‘A’ pertence a polar ‘b’, então, ‘B’ pertence a ‘a’, em relação ao mesmo círculo, claro. Outra coisa ponto dentro (do círculo) polar fora, ponto fora polar dentro.

# P2 vai ao quadro fazer uma observação




- S2: mas ali, pelo ‘A’ pertencer ao círculo, vai ser a reta tangente?

- P2: isso. Primeiro me responde uma coisa, quem é o A’?

- S1: o centro de outro círculo

- P2: o A’ é o centro de outro círculo

- S1: igual a este ai

- P2: como OA já é igual a R, então ‘AO’ tem que ser R

- Sala: concorda

- S2: e como tem que estar alinhado

- P2: tem que estar alinhado. Se um ponto está no círculo, ele é o inverso dele mesmo

- S2: ah, entendi

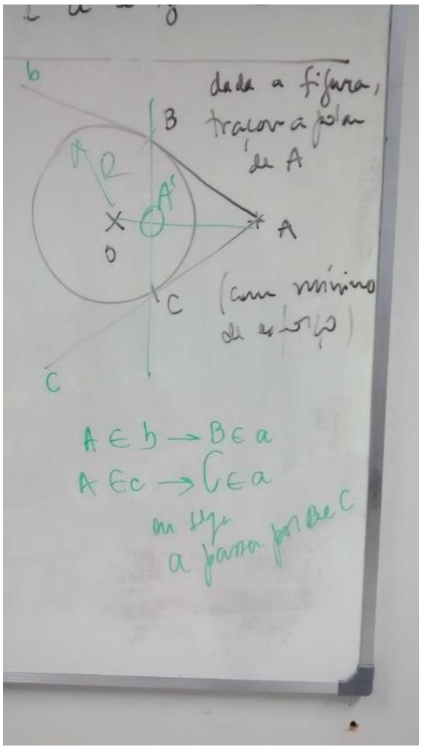
- S1: balança a cabeça positivamente

- P2: A é inverso de si mesmo. Ai S2, você falou tangente né?

- S2: balança a cabeça concordando

- P2: é tem a ver com tangente sim, porque se a polar é perpendicular do inverso, a perpendicular aqui é tangente, e ‘a’ é tangente ao círculo

- P2: aqui tem um probleminha (vide foto)




- P2: porque dado o A a polar dele é só fazer as contas

Eu tenho E, AO, AO’ é uma incógnita, mas sem fazer as contas

- S2: vai ser aquele negócio que a gente usa direto na sala (se referindo a uma matéria feita por S2)

- P2: o que?

- S2: o ponto vai ser..., o A’ vai ser..., ai meu Deus, esqueci o nome. Média geométrica? É, porque vai ser R² ali

- P2: é, na verdade o raio é que vai ser média geométrica, porque o raio que está ao quadrado.

Ah, tá. Entendi o que você falou. Tá, você está certa. Aqui o raio é dado.

- S2: Uhun

- P2: e OA é dado, então, se eu marcar OA. Tales, tá bom?, OA e R, marcar R de novo, marcar uma paralela aqui, OA’ aparece.

OA está para R, assim como R está para OA’

Mas eu me esforcei demais, eu quero com pouco esforço

Então ok. O que que isso mostra? Que muita coisa desta nossa Geometria aqui se resolvem com a Geometria

- S1: Geometria Euclidiana

- P2: Talesianas, aqui no caso

- P2: traçar a polar, é a reta polar

- S1: o A é o encontro da polar do B e da polar do C, não é isso?

- P2: isso

- S1: agora o que que faz com isso?

- P2:

# A ∊ b

# A ∊ c

# Se A ∊ b, então o B ∊ a

- S1: agora fechou, desce um linha ali, por dois pontos num passa uma reta?

- P2: se o A ∊ c

- S1: C ∊ a

- P2: o seja a reta ‘a’ passa por

- S1 e S2: A e B

- S1: fechou

- P2: a polar ficou bem definida ali?

- S1 e S2: balançam a cabeça em afirmativa

# Seguimos com polaridade

- P2: reta polar de P em relação ao ângulo R ou S, seja o ângulo e T, eu fiz a reta polar.

Então juntando as duas teorias: polaridade é harmonia

o encontro das diagonais de um Quadrilátero Completo, está na Polar, no ponto

- S1: e onde é que está o círculo?

- S2: é?

- P2: aqui tem um círculo, boa pergunta. Não é que qualquer quadrilátero tem círculo não, mais o harmônico tem.

- S1: entendi

- P2: não estou querendo dizer que o Q é o ponto inverso de P não, tá? Isso não foi dito. Mas que aqui é a reta pzinho. Então harmonia tem polaridade, polaridade é harmonia

# P2 e P1 propõe a seguinte atividade:

Trace uma tangente de um ponto a um círculo, sem usar o compasso.

- P2: problema super clássico, traçar aquelas duas tangentes. 2 sabe fazer com régua e compasso.

- S2: balança positivamente a cabeça

- P2 comenta com S2 como é feito com régua e compasso.

- P2: mas aqui não pode usar o compasso. Senão pode usar o compasso, eu não posso usar a Geometria usual.

Pode fazer ai gente, os dados são um círculo e um ponto

Chama o ponto de A.

- S1: muito simples (risos).

Não uai, acha a polar daquilo dali ou polo.

- P2: acha o polo de quem?

- S1: de A

- P2: não, o A é ponto. Achar o inverso?

- S1: achar o inverso, é

- P2: tá

- S1: Ai vai ter uma reta que é perpendicular

- P2: e ela é a reta o que?

- S1: a reta o que?

- P2: está reta quem que é?

- S1: é, polo ou polar de A

- S2: polar

- P2: polar. É o ‘a’.

- S1: o ‘a’. Ai como ela é perpendicular, ela vai bater num ponto ali

- P2: vai bater em dois

- S1: em dois. Mas ali está pedindo uma tangente só.

Ai você tem um ponto ali, você liga ele no A, e ai deu uma tangente. Não?

- P2: está certo

- P1: está certo. Mas eu quero saber como é que você vai fazer pra achar

- P2: o A’. Você não pode usar o compasso

- P1: o que você falou procede mas como é que você vai achar a reta ‘a’

- P2: ou o A’ ou o ‘a’, tanto faz ai.

Então vai achar, sem usar o compasso

- S1: joga naquela formulinha ali

- P1: não, não precisa fazer a conta

- P2: não, sem conta. É pra resolver por geometria graficamente. E outra coisa, não pode usar o Tales. O Tales em si não, mas pra marcar as medidas você está usando compasso, então não pode usar Tales

- S1: passar uma secante, então, de A...

- P1: usa secante sim

- P2: círculo, o A é quem aqui?

- S1: esta MN, ai oh

- P2: não, primeiro me responde quem é o A

- S1: o A é o P

- P2: a tá, o A é o P. Não precisa mudar não, né?

- S1: não

- P2: bom, e daí. O MN..

- S1: vai ser a reta secante, saindo de A

- P2: vai ser a reta ou uma reta?

- S1: uma reta

- P2: é. Até porque pela teoria que nós vimos não importa a secante, todas elas têm a mesma conjugação

- S1: concorda

- P2: MN

- S1: pode puxar uma reta ‘r’ e uma reta ‘s’ e ver onde elas vão se encontrar? Ou não tem necessidade disso?

- P2: ah, pode

Não, não pode não, porque tem que...

- S1: então você vai pegar outra secante, saindo de A

- P2: você pode fazer o seguinte, melhor fazer o que você está falando agora. O que você pode fazer é traçar uma ‘r’ ou uma ‘s’

- S1: não, o que eu pensei foi traçar as duas mesmo

- P2: as duas não dá

Então é melhor fazer outra secante

- S1: e agora você vai puxar

- P2: FE, só pra ficar igual lá. Ai você trabalha com um Quadrilátero Completo

- S1: isso, ligou, ligou

- P2: ligou, ligou, o que?

- S1: diagonal

- S2: as diagonais

- P2: a, tá

- S1: pronto

- S2: agora liga até O

- P2: este ponto ele não é um A’, ele é um Q

- S1 e S2: concordam

- P2: esse ponto que você achou ele não tem que ser o A’. Na verdade, também, não precisa ligar para o A’. Por quê?

Porque isso aqui é a reta ‘a’. O que eu quero é B e C, O’ mesmo...

- S1: faz gesto de que O’ não tem importância

- S1: porque você já achou o ponto Q

- P2: já. E lá em cima um O

- S1: então, já cortou um B ali em cima, e como pediu uma tangente só. É isso?

- P2: ahan

Não, não é isso não

- S1: é ou não é?

- S2: é porque você já tem uma diagonal, se você tem uma você já define as outras

- P2: O e Q já define a reta ‘a’

- S1: uhun

- P2: a reta ‘a’, ela define três pontos: o D, o A’ e o C. Está todo mundo em ‘a’

- S1: a tá

# P1 mostra a mesma atividade, só que feita por ela, no Geogebra

# Todos vazemos uma comparação entre o que foi feito no quadro e no aplicativo, comparando pontos e retas.

# Iniciamos outra atividade:

# Dados A, B e C, encontre D tal que (AC/BC)=(AD/BD)

- S2: é numa reta?

- P1: é

- S1: isso, uma reta

- S2: posso colocar eles fora de ordem?

- P2: espera só um pouquinho. É harmônico, então espera só um pouquinho

- S1: ah, fazer um triangulinho

- S2 e P2: uhun

- P2: fez um triângulo e ai?

- S1: é pra pegar esse ponto D, ele ser prolongamento de qualquer coisa

- S2: eu queria fazer perpendicular. Não resolve a vida não?

- S1: resolve. Faz aqui, aqui, pronto, achou C. Totalmente harmônica

- S1 e S2: mexendo no Geogebra

- S2: tem que fazer o quadrilátero lá. Não?

- P2: não pode usar compasso. Vocês entenderam que o compasso não combina com Projetiva

- S1 e S2: unhun

- P2: eu posso mostrar a vocês, usando o compasso?

- P1: eu tenho um aplicativo. Quer?

- P2: então mostra, por favor

- P2: eu acho que você está pensando em semelhança, né 1? Já que tem proporcionalidade, tem que ter semelhança. Uma coisa está para a outra

- S1: acho que não. Acho que eu queria mesmo fazer mesmo oh..

- S2: Quadrilátero

- S1: eu queria mesmo fazer o Quadrilátero

- P2: a tá, você queria fazer projetivo mesmo

- S1: e ai achar um ponto, que eu lembro que tinha um negócio de um ponto que desci lá. E ai seria esse ponto, que seria o prolongamento daquele ali, entendeu?

- P2: entendi

- S1: que corta os dois lados e o prolongamento do outro

- P2: deixa eu falar, vocês entenderam que ali tem divisão harmônica?

- S1: sim, o D não pode ser qualquer coisa, né? Não pode ser qualquer ponto, tem que preservar aquela proporção ali

- P2: tem que ter a divisão harmônica. A definição de divisão harmônica é aquilo ali

# P1 coloca o aplicativo

- P2: ali, S2, é do jeito que você falou antes, com Tales

# Todos nós comentamos sobreo o aplicativo

- 2: mas ai tem aquele negócio que você falou também, não tem?

- P2: aqui tem homotetia

# Voltamos para a atividade projetivamente

# P2: vai ao quadro

Se eu pegar qualquer ponto aqui, o que era a relação de quatro pontos, pode virar o que? Um feixe

- P2: gente, eu chutei um O, liguei AO, OC, OB. Apareceu um quadrilátero?

- S1: apareceu, ali no meiozinho

- S2: balança a cabeça positivamente

- S1: ai liga a diagonal e liga o ponto?

- P2: é

- P1: o que vocês (S1 e S2) fizeram ai está muito parecido com o meu

- P2: Ah, vocês já fizeram ai. O seu já está feito (se referindo ao aplicativo feito por eles)

- P1: agora só falta achar o ponto D, mas o resto está feito

- S1: o D está pra cá

- P1: é, só não está marcado

- P2: não é a primeira vez que a gente arbitra. Vocês acham que isso faz esta Geometria mais ou menos potente?