UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

O TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA E O *SOFTWARE* TFA: ATIVIDADES INVESTIGATIVAS NO ENSINO/APRENDIZAGEM PELAS TICs

Emerson Tomaz da Costa

Juiz de Fora (MG)

Agosto, 2013.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

Pós-Graduação em Educação Matemática

Mestrado Profissional em Educação Matemática

Emerson Tomaz da Costa

O TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA E O *SOFTWARE* TFA: ATIVIDADES INVESTIGATIVAS NO ENSINO/APRENDIZAGEM PELAS TICs

Orientador: Prof. Dr. Orestes Piarmatei Filho

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Juiz de Fora (MG)

Agosto, 2013.

Costa, Emerson Tomaz.
O Teorema Fundamental da Álgebra e o *Software* TFA: atividades investigativas no ensino/aprendizagem pelas TICs/ Emerson Tomaz da Costa. – 2013.
205 f.: il.
.
Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. TFA. I. Título.

Emerson Tomaz da Costa

O TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA E O *SOFTWARE* TFA: ATIVIDADES INVESTIGATIVAS NO ENSINO/APRENDIZAGEM PELAS TICs

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Comissão Examinadora

____

Orestes Piarmatei Filho (UFJF)
Orientador: Prof. Dr.

____

Felipe Acker (UFRJ)
Prof. Dr.
Convidado externo UFJF

____

Carlos Alberto Santana Soares (UFJF)
Prof. Dr.
Convidado interno (UFJF)

Juiz de Fora, ____ de ______________ de 2013.

AGRADECIMENTOS

Não conseguiria chegar até aqui, se não fosse a colaboração de vários amigos e da família.

Primeiro, agradeço ao Senhor Jesus, que me sustenta com Sua poderosa mão, pois “Sem Ele nada poderia fazer”.

De forma especial, agradeço à Aline, minha companheira, e, a minhas filhas, Lorena Gagno e Ana Clara, que são a razão de meu viver. Certamente, essa conquista corresponde ao tamanho do coração de vocês três, que souberam pacientemente entender meus anseios. Foi um momento em que aproveitamos para aprender juntos a reconstruir nossa família no amor de Deus.

Agradeço ao meu orientador e incentivador, Orestes Piermatei, por acreditar em meu potencial e arguir-me para uma vida acadêmica mais expressiva. Obrigado pelos e-mails e pelas conversas, que me oportunizaram uma postura mais madura e calcada em valores éticos e morais.

Agradeço a minha mãe, Sr.ª Elba, que sempre me incentivou a estudar, preocupando-se em me ensinar a ter dignidade.

Obrigado aos colegas do Mestrado, que compartilharam tanto momentos difíceis quanto felizes, o que me ajudou a crescer e a ser melhor. Um agradecimento especial ao Vitor Rezende e ao André Campos, possuidores de um coração enorme, por terem sido verdadeiros parceiros. Aprendemos, sorrimos e seguimos juntos: carioca e mineiros como uma só nação brasileira.

Agradeço aos professores do mestrado Amarildo, Antônio Olímpio e Maria Cristina pela competência, pela dedicação e pelos ensinamentos nas aulas, nos seminários e nas palestras, e, acima de tudo, pela amizade.

Agradeço ao Capitão de Mar e Guerra Márcio Pereira Rippel, que oportunizou o andamento desta pesquisa.

Agradeço à Prof.ª Dr.ª Aureni da Silva Magalhães Marvila pela revisão ortográfica e redacional deste trabalho. Que o Senhor Jesus ilumine a sua inteligência ainda mais.

Agradeço aos membros da Banca Examinadora, Felipe Acker, Marco Aurélio e Carlos Alberto (Carlão) que, pelo conhecimento que possuem, enriqueceram esta pesquisa com suas sugestões.

RESUMO

Esta pesquisa, de caráter qualitativo, tem como objetivo investigar, identificar e analisar o uso de Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) no ensino do Teorema Fundamental da Álgebra (TFA) no Ensino Médio (EM). Especificamente, o objetivo é organizar e delinear atividades investigativas em que se utilizem as TICs no estudo dos Polinômios, no que concerne à apreciação de pontos, círculos e curvas de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$. As atividades foram desenvolvidas com alunos do 3º ano do Ensino Médio, de uma escola militar, identificando as contribuições que ocorreram no processo de ensino e aprendizagem do TFA com o uso do *Software* TFA. A fundamentação da Metodologia de Pesquisa quanto ao uso das TICs na Educação Matemática pautou-se nas ideias de Miskulin (1999), Borba e Penteado (2010) e outros. O resultado da pesquisa revela uma expressiva necessidade de atividades inovadoras com o uso pelas TICs no estudo dos Polinômios, em que aluno e professor possam interagir de forma que, a aprendizagem do objeto matemático e a prática pedagógica, se torne evidente nesse processo. Dessa forma, como Produto Educacional, resultado da presente Dissertação, são apresentadas atividades investigativas que podem ser desenvolvidas no Ensino Médio, no estudo dos Polinômios.

Palavras-Chave: Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs), Teorema Fundamental da Álgebra (TFA), Educação Matemática, Ensino Médio.

ABSTRACT

This search with qualitative character has as an aims to investigate, identify and analyze the use of information and Communication Technologies (ICTs) in teaching the Fundamental Theorem of algebra (TFA) in high school (in). Specifically, the goal is to organize and outline investigative activities in wich ICTs are used in the study of polynomials, concerning the assessment of points, circles and curve of R^2 at R^2. The activities were developed with students of the third of high year school, a military school, by identifying the contributions that have occurred in the process of teaching an learning software rising the TFA. The basis of the research methodology for the use of ICT in mathematics education was based on the ideas of Miskulin (1999), Borba, Penteado (2010) and others. The result of the research reveals a significant need for innovative activities using ICT in the study of polynomials, where students and teachers can interact so that, learning the objective mathematical and pedagogical practice, this process becomes evident. Thus, educational product as a result of this dissertation are presented research that can be developed in high school, in the study if polynomials.

Keywords: Information and Communication Technologies (ICTs), Fundamental Theorem of Algebra (TFA), Mathematics Education, High School.

LISTA DE FIGURAS

TABELA

SUMÁRIO

Capítulo 1

Introdução

> Atuamos em sala de aula, fazendo o possível para fabricar compreensão na cabeça de nossos alunos. Mas o essencial nos escapa: ensinamos em plena neblina.
>
> Georges Glaeser

Meu interesse pela pesquisa em Educação Matemática (EM) nasceu em 2008, por ocasião da Pós-Graduação *Latu-Sensu* em Novas Tecnologias no Ensino de Matemática, na Universidade Federal Fluminense – UFF, no Rio de Janeiro, curso concluído em dezembro de 2009. Nesse momento, ampliaram-se meus conhecimentos sobre o assunto, em especial, acerca do uso de novas tecnologias e de *softwares*, entendendo que, desde sempre, o aluno deve ter acesso a todo e qualquer conhecimento, seja ele relacionado com o computador ou, com outras mídias.

O teor da minha monografia enfocou um conceito matemático, com o título O *Uso de Novas Tecnologias no Ensino de Cônicas nos Vestibulares do Rio de Janeiro*. O objetivo era difundir uma abordagem diferenciada sobre as Cônicas no contexto da sala de aula, uma vez que os alunos necessitariam do domínio de tal conteúdo ao prestarem exames em alguns vestibulares no Rio de Janeiro.

Com a utilização da *Internet*, conheci vários programas que usam tecnologias para promover o processo de ensino-aprendizagem matemático. Entretanto, o *lócus* das leituras reduziu-se ao Programa de Pós-Graduação da

Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS – e ao da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, em Rio Claro, São Paulo – UNESP, em nível de Mestrado e Doutorado em Educação Matemática (EM). Quando da busca por artigos e dissertações que versassem sobre a EM, grande foi a surpresa e o meu interesse diante de trabalhos realizados por pesquisadores, como o do professor Marcelo de Carvalho Borba, Líder do Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática – (GPIMEM) da UNESP - Rio Claro.

Prosseguindo nas leituras de dissertações, artigos e outros periódicos difundidos pela internet, em 2010, conheci o Programa em Educação Matemática (E.M.) da Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF--MG). Ao analisar os procedimentos para a seleção no Programa citado, surgiu o interesse em me submeter ao processo seletivo. Uma vez aprovado, iniciei o curso em 2011. Tive minhas expectativas atendidas e, de alguma forma, revi minhas práticas pedagógicas, já que antes consistiam basicamente na ideia de que, se o professor ensina, então o aluno aprende. Tinha a concepção de que o professor era o mero transmissor de conteúdos matemáticos, e o aluno, um receptor passivo desses conteúdos. Mas descontruí essa concepção. Com base em reflexões de leituras em Educação Matemática e no entendimento mais aprofundado de minhas próprias práticas pedagógicas, o que de acordo com Freire (1987), pude percebe que

> A educação se torna um ato de depositar em que os educandos são os depositários e o educador o depositante. Em lugar de comunicar-se, o educador faz “comunicados” e depósitos que os educandos, meras incidências, recebem pacientemente, memorizam e repetem. Eis a concepção “bancária” da educação em que a única margem de ação que se oferece aos educandos é a de receberem os depósitos, guardá-los e arquivá-los (FREIRE, 1987, p. 58).

Ao analisar o texto de Freire (1987), procedi em planejar práticas mais democráticas em sala de aula, com um ensino de Matemática visando à aprendizagem. Contudo, ciente que a mudança é um processo educacional de longo caminho a ser percorrido.

As contribuições de Borba e Penteado (2010) foram fundamentais para que compreendesse quando do uso de novas tecnologias no ensino de Matemática. Com eles, atentou-se para o fato de que o conhecimento é produzido por um coletivo, formado por seres-humanos-com-mídias, ou, seres-humanos-com-tecnologias, e não, por seres humanos solitários ou coletivos, formados por apenas seres humanos.

Compreende-se, assim, que o aluno precisa se envolver nessa aprendizagem, mediante situações desafiadoras, criadas pelo professor. Este reavalia o problema principal, em busca de novos caminhos e perspectivas no processo de ensino-aprendizagem.

Dessa forma, a presente pesquisa procura contribuir com o ato de ensinar/aprender Matemática. Tendo em vista ser um processo complexo, uma vez que não deve estar pautado apenas em repasse de definições, o que requer do professor uma postura reflexiva e madura. Conforme Skovsmose (2008) afirma,

> A noção de matemática é complexa. Não pode ser capturada em uma definição. Portanto, não há receitas para estruturar uma prática que deva apoiar o desenvolvimento da matemática (SKOVSMOSE, 2008, p.124).

Essas e outras concepções contribuíram para que, quanto pesquisador, tivesse uma maior compreensão acerca do ensino/aprendizagem da Matemática e suas complexidades no EM. O entendimento é que ações concretas e participativas entre alunos e professores, no ensino e na aprendizagem, complementam-se. Sua coexistência é necessária na sociedade, na escola e no atual mundo globalizado, considerando-se sempre o aprendiz como centro dessas ações, e o professor, como o mediador delas.

Cabe ressaltar que, mesmo acreditando no processo participativo de educação e na melhoria através de práticas pedagógicas em que a tecnologia e o humano se inter-relacionam, essa pesquisa não visa apresentar a solução para o ensino e a aprendizagem da Matemática. Isso porque se entende que o processo de amadurecimento desta pesquisa e os conhecimentos adquiridos com ela não se esgotam aqui. A pretensão é contribuir para que o ensino/aprendizagem do objeto matemático escolhido receba um viés diferenciado na prática pedagógica.

A motivação para a escolha do tema desta Dissertação é resultado tanto de discussões em seminários, debates e congressos, quanto das opiniões de experientes estudiosos sobre o assunto. Por essa razão envolveu dois pontos cruciais das minhas atividades profissionais:

1º) A contribuição colaborativa entre alunos e professor no processo de ensino e de aprendizagem da Matemática, utilizando-se Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs).

2º) A escolha do objeto matemático para estudo que, do ponto de vista da Educação Matemática, ainda não tivesse sido explorado, de maneira que, ao final da pesquisa, se contribuísse para sua difusão na escola em que trabalho.

1.1. Diretrizes para escolha do tema

Busquei compreender, durante o curso de Mestrado, o conceito do Teorema Fundamental da Álgebra (TFA). A compreensão sobre o assunto era parcial. Foi necessário um aprofundamento maior em estudos e pesquisas realizados com o TFA, por exemplo, em Acker (2011 e 2012), Eves (2004) e Courant (2000). Além disso, o maior desafio consistiu em envolver as Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) com o TFA na sala de aula de uma instituição militar de Ensino Médio. Dentre disso, era um fato que as dificuldades seriam evidentes por se tratar de uma escola onde o ensino matemático é essencialmente tradicional.

Mesmo assim, vislumbrei a possibilidade de se obter algum resultado mediante uma pesquisa de caráter qualitativo na instituição, em particular, com o computador mediado pelo software TFA.

Para Allevato (2005), ao se empreenderem atividades de ensino com o computador, é preciso tentar compreender o papel desse recurso em ambientes nos quais se insira, identificando-se a relação existente entre ele e a atividade que será realizada com sua mediação.

Corroborando com a fala da autora, o ideário desta pesquisa foi estruturado com base em um planejamento pedagógico, de objetivos claros, no que tange ao ensino e à aprendizagem do TFA, pelo uso do computador e, mais extensivamente, pelo software TFA. Desde o início, a pretensão era efetuar um processo, partindo-se de uma estratégia ancorada em atividades investigativas que relacionassem o conteúdo de Polinômios aos meios midiáticos adstritos, numa metodologia que fosse adequada à investigação e, à aprendizagem do TFA.

Com base em pesquisas sobre a Educação Matemática (EM) é que orientei os Sujeitos desta pesquisa à exploração, ao teste, à investigação e ao questionamento da compreensão do TFA, ao máximo possível, em se tratando dos elementos visuais, uma sugestão de Borba e Penteado (2010), Allevato (2005) e outros. Adotou-se a linha de abordagem que prima por visualização, experimentação e explicação do objeto em estudo, a sugerida por Allevato (2005), Hanna (1990) e Miskulin (1999). Ressalta-se que a linha explicativa da demonstração também foi utilizada, em mediação com as Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs).

Nesse ínterim, talvez se pense que, ao retomar o estudo do Teorema Fundamental da Álgebra (TFA), tragam-se à tona questionamentos acerca da Prova do Teorema ou, de suas demonstrações, o que é legítimo, no contexto matemático. Mas, o que se propõe é, mesmo diante dessas e de outras indagações quanto à prova e/ou demonstrações do ***Teorema,*** ratificá-lo, seguindo-se uma perspectiva mais visual/explicativa, amparada pela Educação Matemática (EM). Cabe ressaltar que a demonstração não é o cerne desta pesquisa. Ou seja, o fato de que a demonstração consista ou na prova, ou na demonstração (formal), seja pela linha que valida a demonstração, seja pela a explicativa, não se pretende aqui estabelecer uma fronteira entre o que se explica e o que se prova matematicamente.

Hanna (1990) sugere que a principal diferença entre as duas “espécies” de demonstrações – a que apenas valida e a que também explica – é que a explicativa termina por utilizar raciocínios fundamentados em ideias matemáticas, enquanto a mera prova formal emprega basicamente regras de sintaxe. Ratifica ainda que, a sintaxe, apesar de ser indispensável, trata-se de um aspecto meramente mecânico da demonstração, não preponderando como característica mais relevante da Matemática. Todavia, tais considerações fazem-se necessárias, por sempre se apresentarem esses tipos de demonstração aos alunos: “[...] uma demonstração que prova e uma demonstração que explica; são ambas as demonstrações legítimas” (HANNA, 1990, p.47).

De fato, procura sintetizar a função da prova na Matemática e na Educação Matemática: enquanto na prática matemática a função da prova é a justificação e a verificação, a sua função principal na EM é, seguramente, a da explicação. Para esta pesquisa, considerou-se conveniente aquela em que as demonstrações explicativas legitimam o objeto matemático.

Allevato enfatiza que,

> Em geral, os matemáticos acreditam que a natureza dos objetos com que trabalham é determinada por conceitos imutáveis, cuja realidade independe de fatores culturais. É notório que, em Matemática, historicamente, elementos conceituais têm conquistado supremacia sobre os observáveis. Entretanto, o caráter observável dos objetos produzidos ou processados pelas tecnologias informáticas está, cada vez mais, ganhando destaque (ALLEVATO, 2005, p. 6).

Tendo por base todas as referências bibliográficas (artigos, dissertações e teses) em Educação Matemática que ancoraram o tema abordado nesta pesquisa, e, evidentemente, extraindo-se o problema a ser estudado, é que se acredita ser possível analisar, testar e experimentar um Teorema sob a perspectiva das TICs. Com isso, os objetivos propostos foram norteados pela necessidade de se estabelecer uma metodologia para o ensino/aprendizagem do Teorema Fundamental da Álgebra (TFA).

1.2. Educação Matemática: reflexão de ensino/aprendizagem do TFA pelas TICs

Considerando-se a Educação Matemática uma ciência comprometida com o ensino e a aprendizagem e, com a qualidade do ensino de Matemática, é que se sugere um trabalho sistêmico sobre o ensino e a aprendizagem do Teorema Fundamental da Álgebra (TFA). O objetivo é contribuir com mais uma reflexão, junto à comunidade de educadores matemáticos comprometidos com essa perspectiva.

A leitura de trabalhos de pesquisadores proporcionou a ancoragem do referencial teórico que norteia esta pesquisa, em que a EM é tida como “[...] uma práxis que envolve o domínio do conteúdo específico e o domínio de ideias e processos pedagógicos relativos à transmissão/assimilação e/ou à apropriação/construção do saber matemático escolar” (FIORENTINI e LORENZATO, 2005, p.5). Por estarmos comprometidos com a aprendizagem do

TFA, alguns pressupostos de ensino e de aprendizagem foram pautados na qualidade do ensino, como propõe Borrões:

> [...] o processo de ensino e de aprendizagem não deveria ser tratado como um mero processo de transmissão-recepção de informação, mas, como processo de construção cognitiva que é estimulado pela investigação dos alunos (BORRÕES, 1998, p. 1).

Nessa perspectiva, objetiva-se romper com algumas formas tradicionais de ensino, com enfoque no processo construtivo da cognição, mediado pela investigação e pela utilização das TICs na EM e na aprendizagem do TFA.

Por se acreditar que as TICs podem ser uma alternativa de mudança no paradigma da relação "transmissor-receptor", são apresentadas propostas de ensino e de aprendizagem mediadas pelo uso da tecnologia, em que alunos e professores podem interagir de forma colaborativa na aquisição de compreensão do TFA. Para Ponte, "as TICs podem ser usadas na escola como ferramenta de trabalho" (PONTE, 2000, p. 76). De fato, o que pleiteamos nessa pesquisa é que o uso dessa ferramenta contribua para o processo de ensino e de aprendizagem do TFA. Outro aspecto que consideramos relevante está no acesso à tecnologia na Educação como um direito universal do cidadão:

> O acesso à Informática na Educação deve ser visto não apenas como um direito, mas, como parte de um projeto coletivo que prevê a democratização de acessos a tecnologias desenvolvidas por essa mesma sociedade. É, destas duas formas é que a Informática na Educação deve ser justificada: alfabetização tecnológica e direito de acesso (BORBA e PENTEADO, 2010, p.17).

Segundo Ponte (1986), ao se falar, de maneira mais específica, sobre as TICs, não há como não se remeter ao uso do computador com potencialidades em nível de cálculo, visualização, modelação e geração de micromundos. Sendo assim, transforma-se num poderoso instrumento à disposição dos educadores matemáticos, proporcionando aos seus alunos experiências que estimularão o gosto e o prazer pela criação matemática.

Para Borba (1999),

> As mídias, vistas como técnicas, permitem que "mudanças ou progresso do conhecimento" sejam vistos como mudanças paradigmáticas impregnadas de diferentes técnicas desenvolvidas ao longo da história. É neste sentido que, no atual momento da educação matemática, devemos testar essas metáforas teóricas geradas por diferentes pesquisas, para que consigamos desenvolver novas práticas pedagógicas que permitam que mais estudantes

> tenham acesso a estudar matemática e, a resolver problemas que sejam relevantes [...], que sejam estes problemas propostos pelo professor, como no caso da experimentação, quer desenvolvido (sic) pelos próprios estudantes, como no caso da modelagem (BORBA, 1999, p. 24).

Em um mundo regido pelas informações e comunicações, Miskulin defende o direito a esse acesso no processo de formação do indivíduo. Dessa forma,

> No âmbito educacional, a globalização pressupõe uma nova formação do indivíduo, uma formação que considere os avanços da tecnologia, possibilitando a sua plena inserção na sociedade, como um ser crítico, consciente e livre (MISKULIN, 1999, p.41).

Outro aspecto relevante na EM, envolvendo o uso das TICs, refere-se ao ambiente informatizado no qual o aluno está inserido, como aquele em que ele pode interagir, partindo de ações processuais de ensino e de aprendizagem, em que também podem refletir, conjecturar, criticar e ser participante ativo na aprendizagem. Segundo Gravina e Santarosa (1998),

> Atualmente, já dispomos de ambientes informatizados de grande potencial para processos de ensino e aprendizagem que privilegiem as ações dos alunos. São programas onde os alunos podem modelar, analisar simulações, fazer experimentos, conjeturar. Nestes ambientes os alunos expressam, confrontam e refinam suas ideias, de forma ativa. E mais, o computador permite criar um novo tipo de objeto – os objetos concreto--abstratos: concretos, por se tratarem de realizações feitas a partir de construções mentais [...]. É a possibilidade de mudar os limites entre o concreto e o formal (GRAVINA e SANTAROSA, 1998, p. 9).

Para esta pesquisa, fez-se uma articulação entre vários atores: Informática, computador, softwares, alunos, mídias, professores, educação e sociedade. Mas, evidentemente, o foco é a aprendizagem do TFA pelo aluno, com o uso de tecnologias. Em suma, o objetivo fundamental é a sugestão de atividades que sejam desafiadoras e que mantenham o cognitivo dos sujeitos da pesquisa norteado pela aprendizagem matemática do Teorema Fundamental da Álgebra. Esse trabalho envolve tarefas que tornem os alunos envolvidos capazes de explorar e observar as relações existentes entre os Polinômios e, sistematicamente, o TFA.

Foram elaboradas tarefas de cunho investigativo. Primeiramente, ocorreu a aplicação de um questionário e a realização de diálogos para, posteriormente, se fazer a relação com as atividades propostas. Optou-se por permitir que o aluno se torne mais participativo e mais crítico, uma vez que ele, não acostumado com esse tipo de atividade, possa ter mais autonomia no desenvolvimento do conceito matemático.

A concepção metodológica desta pesquisa está pautada no uso do computador e de um *software* dinâmico. Isso porque, com base em Miskulin,

> No âmbito educacional, a globalização pressupõe uma nova formação do indivíduo, uma formação que considere os avanços da tecnologia, possibilitando a sua plena inserção na sociedade, como um ser crítico, consciente e livre (MISKULIN, 1999, p.41 – grifo nosso).

Nessa perspectiva, selecionou-se o Teorema Fundamental da Álgebra (TFA), no contexto dos Polinômios, principalmente porque não fora encontrado nenhum trabalho tratando dessa vertente em Educação Matemática. Assim, far-se-á a apresentação do TFA, em nível de Ensino Médio.

1.2.1. O Teorema Fundamental da Álgebra (TFA): uma visão no Ensino Médio

Nesta seção, far-se-á um breve relato histórico do Teorema Fundamental da Álgebra (TFA). Serão representados geometricamente os Números Complexos, fato de suma importância para a consolidação do referido Teorema.

1.2.2. Breve Relato Histórico do TFA

A Matemática do século XVIII concentrou-se na França. No século XIX, precisamente na Alemanha, nasce, em 30 de abril de 1777, o seu maior representante, Carl Friedrich Gauss. Entretanto, cabe ressaltar que, antes mesmo de Gauss (1777-1855), o estudo das equações polinomiais de 3º grau propiciou o sentido ao estudo do TFA. Gauss tornou-se o maior matemático do século XIX. Primeiro estudou no Colégio Caroline, onde ficou durante três anos analisando as obras de *Euler*, *Lagrange* e o *Princípia* de *Newton*.

Ao concluir o curso, ganhou uma bolsa de estudos e foi estudar na Universidade de Goettingen, onde ficou de 1795 a 1797. No dia 29 de março de 1796, Gauss finalizou o desenvolvimento do algoritmo para construção, segundo regras euclidianas, usando régua e compasso, de um Polígono Regular de dezessete lados. Contudo, dentre seus vários estudos e descobertas, o que lhe conferiu o título de doutor foi a sistematização do Teorema Fundamental da Álgebra (TFA).

O Teorema Fundamental da Álgebra (TFA) representa um dos mais relevantes teoremas da Matemática. Foi estudado por vários matemáticos, curiosos e devotos à Matemática. Sendo fruto de estudos e pesquisas, sua fundamentação teórica deve-se a Carl Friedrich Gauss (1777-1855), o qual recebeu o título de doutor, em 1799, pela Universidade de Helmstadt, ao apresentar uma tese sob o título ***"Uma demonstração do teorema de que toda equação algébrica racional inteira em uma variável pode ser decomposta em fatores reais de primeiro ou segundo graus, o conhecido como o Teorema Fundamental da Álgebra"***.

1.2.3. A Representação Geométrica dos Números Complexos

A representação geométrica dos números complexos já havia sido desenvolvida em 1797 pelo norueguês Caspar Wessel (1745-1818). Também foi estudada pelo suíço Jean Robert Argand (1768-1822) e por Gauss.

Segundo Contador (2008),

> Wallis chegou a propor que os imaginários puros poderiam se representados por uma reta perpendicular ao eixo dos números reais, mas foi nas mãos de Wessel e Gauss que a ideia tomou forma e um número complexo do tipo $a + bi$ teve suas partes real e imaginária representadas como coordenadas retangulares de ponto num plano (CONTADOR 2008, p.405).

Existem razões para se tratar nesta pesquisa da representação geométrica dos Números Complexos. Uma delas está respaldada no que afirma Courant: "[...] o Teorema Fundamental da Álgebra deveria, mais adequadamente, ser chamado de o teorema fundamental do conjunto dos números complexos" (COURANT, 2000, p. 117). Contudo, vale ressaltar que, no momento, o objetivo não é investigar profundamente o corpo dos Complexos, munido de suas operações, já que se parte do pressuposto de que esse assunto é do conhecimento do leitor. Sendo assim, observe-se a representação abaixo, na figura 1.

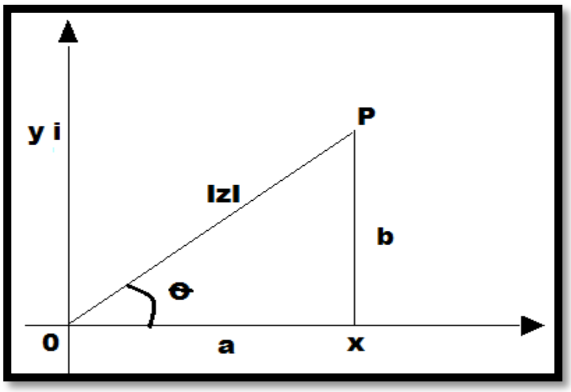

Figura 1. Representação geométrica do Número Complexo.

Como se vê, o ponto P, de coordenadas cartesianas (a, b), pode representar qualquer número na forma $z = a + bi$, onde $\boldsymbol{\theta}$ é o argumento, e a linha OP representa o módulo de z. A ideia básica de Gauss consistia de que um número na forma $a + bi$ poderia ser raiz de um Polinômio. Tendo como $p\ (z) = 0$, ou seja, $p\ (a + bi) = 0$, Gauss possibilitou que se enxergasse, via TFA, que os gráficos das equações resultantes dos Polinômios sempre possuíram um ponto (a, b) comum. Logo, $a + bi$ é uma raiz complexa do Polinômio $p(x)$.

Dessa forma, o estudo e a sistematização do TFA impulsionaram grande parte da Matemática, como ocorreu, atualmente, com a chamada Análise Complexa.

Vejamos o exemplo da ideia de Gauss, quanto ao TFA, de forma intuitiva.

Exemplo 1:

Considere um Polinômio $p(x) = x^2 - 4\,i$. Se $p\ (z) = 0$. Então, teremos que

$p\ (a + bi) = (a + bi)^2 - 4i = 0$, daí $a^2 + 2\,ab\,i - b^2 - 4i = 0$.

Separando as partes real e imaginária, obtém-se $a^2 - b^2 = 0$ e $ab - 2 = 0$

$$(a - b)\ (a + b) = 0 \ \text{ e } \ ab = 2.$$

Temos que $(a-b)=0$ ou $(a+b)=0$ representam equações de retas que passam pela origem no $\mathbb{R}^2$. Por outro lado, $ab=2$ representa uma equação de hipérbole equilátera. Vejamos a figura abaixo, representativa das equações.

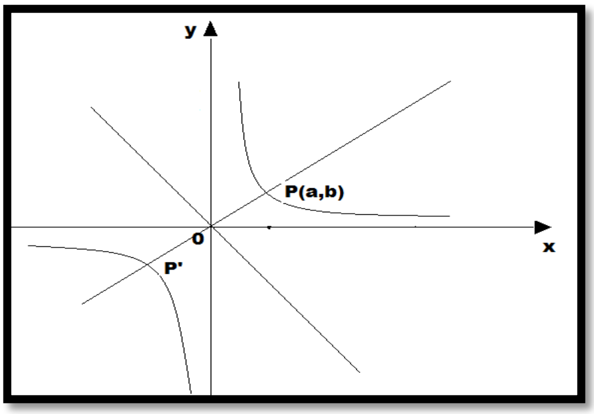

Figura 02 - Prova do teorema fundamental da Álgebra.

Notamos que as curvas designadas pelo par de retas e pela hipérbole são contínuas. Observa-se ainda que o ponto P é uma intersecção real entre a curva e a reta. O mesmo acontece com P'. Logo, $a+bi$ é uma raiz complexa do Polinômio $p(z)=0$.

É fato que, além das coordenadas retangulares, conforme se mostra na figura 2, é possível introduzir as coordenadas polares neste plano, partindo da figura 1, tomando a origem e a direção positiva do $x-eixo$ como polo e primeira direção, respectivamente, escrevendo:

$$z=a+bi=|z|(\cos\theta+isen\;\theta),\text{ em que } |z|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Da fórmula De Moivre, tem-se

$$z^n = |z|^n(\cos n\theta + i\;sen\;n\theta).$$

Assim, se se permitir que o número complexo z descreva um círculo de raio $|z|$, em torno da origem, então $|z|^n$ descreverá *n-vezes* um círculo completo, de raio z^n, sendo que z descreve seu círculo uma única vez. Se for considerado o número $z'=a'+b'i$, então teremos que $|z-z'|$ é a distância entre z e z'.

1.2.4. A Visão Algébrica do TFA

O TFA pode ser assim enunciado:

> Não somente toda equação da forma $ax^2 + bx + c = 0$ ou da forma $x^n - 1 = 0$ é solúvel no corpo dos números complexos como muito mais do que isso é verdadeiro: ***toda equação algébrica de qualquer grau n com coeficientes reais ou complexos***, $\boldsymbol{f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0}$***, tem soluções no corpo dos números complexos***. (COURANT, 2000, pag.117 – *grifo nosso*).

É notório que o enunciado do TFA pode ser enunciado de algumas formas, mas, na essência, trata-se do estudo de Polinômios e, em sentido estrito, ao que Gauss demonstrou em sua tese de Doutorado.

Supomos ser verdadeiro que todo Polinômio

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

de grau n possua n raízes. De fato, pela suposição, o Polinômio pode ser fatorado no produto de n fatores, na forma:

$$f(x) = (x - \varphi_1) \cdot (x - \varphi_2) \cdots (x - \varphi_n),$$

em que $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n \cdot$ são números complexos , e as raízes da equação $f(x) = 0$.

Exemplo 2:

Exemplificando um caso de fatoração com o seguinte Polinômio:

$$f(x) = x^4 - 16, \qquad x^4 - 16 = 0,$$

$$\text{daí, } (x^2 + 4)\ (x^2 - 4) = 0,$$

$$x^2 + 4 = 0\ \ implica\ termos\ (x + 2i)\ (x - 2i) = 0,\ \ x = -2i\ ou$$

$$x = 2i.$$

Da mesma forma, fazendo $(x^2 - 4) = 0,$ teremos $(x + 2)(x - 2) = 0$, $x = 2$ ou $x = -2$.

Fazendo $f(x) = 0,$ resulta-se em $x^4 - 16 = 0,$ nas raízes, que são

-$2, 2, 2i\ e\ -2i$.

Logo, $f(x) = (x - 2) \cdot (x + 2) \cdot\ (x - 2i)\ \cdot (x + 2i)$.

É evidente que, a partir da fatoração de $f(x),$ os φ'_n são as raízes da equação $f(x)\ = 0$.

1.2.5. O Teorema de Euler-Gauss (TFA)

Como se sabe, o corpo dos Números Complexos é obtido acrescentando-se ao corpo dos Reais $\mathbb{R}$ uma raiz imaginária i da equação $z^2 + 1 = 0$. Existem razões para se chegar a esta conclusão: de que não há necessidade de serem adicionadas raízes imaginárias de outras equações polinomiais para que sejam obtidos corpos ainda maiores.

Esse raciocínio encontra-se pautado no Teorema Fundamental da Álgebra (TFA). De fato, suas raízes são complexas, de modo que não é necessário inventar outros imaginários para se resolverem as equações polinomiais.

Este é o enunciado mais conhecido do Teorema Fundamental da Álgebra (TFA): todo Polinômio não constante, de grau n, com coeficientes complexos, possui n raízes complexas. Entretanto, existem outras formas equivalentes de representá-lo.

Outro enunciado do mesmo teorema diz que todo Polinômio não constante, de grau $n,$ com coeficientes complexos, possui pelo menos uma raiz complexa. Observe-se que tal enunciado afirma que um Polinômio $p,$ de grau $n,$ com coeficientes complexos, possui uma raiz a. Dessa forma, pode ser decomposto em dois outros polinômios:

$$p(x) = (x - a)\ q\ (x),$$

com q representando um polinômio de grau $n - 1$.

De fato, sabe-se também que q possui uma raiz; logo, também pode ser decomposto no produto de um Polinômio, de grau *um*, com um outro, de grau $n - 2$. Repetindo este processo até a exaustão, conclui-se que p pode ser decomposto em n fatores de grau *um*, ou seja, p possui n raízes.

1.2.6. O software TFA: a ideia da demonstração do TFA

Utilizando algumas imagens do *software TFA*, é possível mostrar o que ocorre geometricamente com as curvas expressas pelo Polinômio $f(z)$, quando o raio de uma circunferência varia de 0 a ∞, sendo $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Ou seja, existe uma curva, aqui denominada de γ_{r}, que varrerá a imagem de $f(z)$.

Contudo, é preciso considerar os dois aspectos abaixo discriminados.

1) O *software* TFA será tratado nesta seção de maneira técnico-pedagógico**.**

2) Foram necessários alguns ajustes para esse intento, pois, como se trata de Polinômios de variáveis complexas, não haveria a possibilidade de se enxergar, geometricamente, uma quarta dimensão. Por esse motivo, tratar-se-á de uma transformação de $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, examinando-se a imagem de f adstrita pelos círculos do centro, na origem.

1.2.7. O Software TFA: informações técnico-pedagógicas

O *software* ***TFA*** é um *software* livre, de geometria dinâmica, idealizado pelo professor Felipe Acker, professor de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ-RJ), do Instituto de Matemática Aplicada, sendo desenvolvido por Felipe Rodrigues de Siqueira Souza, discente de Engenharia Naval e Oceânica, da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), em 2010, para ser utilizado no ambiente da sala de aula. Dada a sua especificidade, tornou-se propício para ser aplicado no estudo de Polinômios, além de atender ao objetivo principal desta pesquisa.

A escolha do *software* ***TFA*** deve-se ao fato de ser um *software* livre e, por possuir uma interface direcionada ao estudo dos Polinômios. Por meio dele, pode-se observar, de forma dinâmica, o comportamento de curvas no $\mathbb{R}^2 em\ \mathbb{R}^2$. Outro motivo para sua utilização é que se trata de um *software* essencialmente brasileiro. Assim, pareceu-nos que, para o estudo de Polinômios, nessa investigação específica do TFA, fosse o mais apropriado. A sua licença pública está disponível em http://www.prov01.xpg.com.br/tfa.html.

Cabe salientar que, para a instalação do ***TFA***, é necessário que o computador possua o leitor da linguagem Java[1]. Todavia, ele pode ser instalado em qualquer computador, mesmo que este dispositivo não possua uma configuração tão elevada. Ou seja, não se precisa que o processador da máquina seja de última geração.

O ***TFA*** pode ser instalado e usado na opção *off-line*, de modo que se utilize a extensão de um arquivo conhecido como (*JRE do Java*), criado para essa finalidade. Portanto, não se necessita estar conectado à Internet. O pacote *JRE* pode ser baixado no endereço: http://www.oracle.com/technetwork/java/javase/downloads/index.html. Informa-se que, na tabela "*Java Platform*, *Standard Edition*", deve-se primeiramente clicar no botão de *download* do JRE. A seguir, aceitar os termos do JAVA e escolher a versão do *JRE*, de acordo com o Sistema Operacional do computador. Dessa forma, o *software* pode ser usado na versão *off-line*. Feito isto, aparecerá a opção “Executar TFA.html”.

1.2.8. Reconhecendo o software *TFA*

Ao iniciar o programa, surgirá na tela do computador a interface que está representada na figura abaixo. As setas numeradas servem para guiar o usuário, oferecendo-lhe um panorama geral do *software*. Mais adiante, serão detalhados os comandos contidos no ***TFA***.

[1] A instalação em http://www.java.com/pt_BR/, acesso em 04/10/2012.

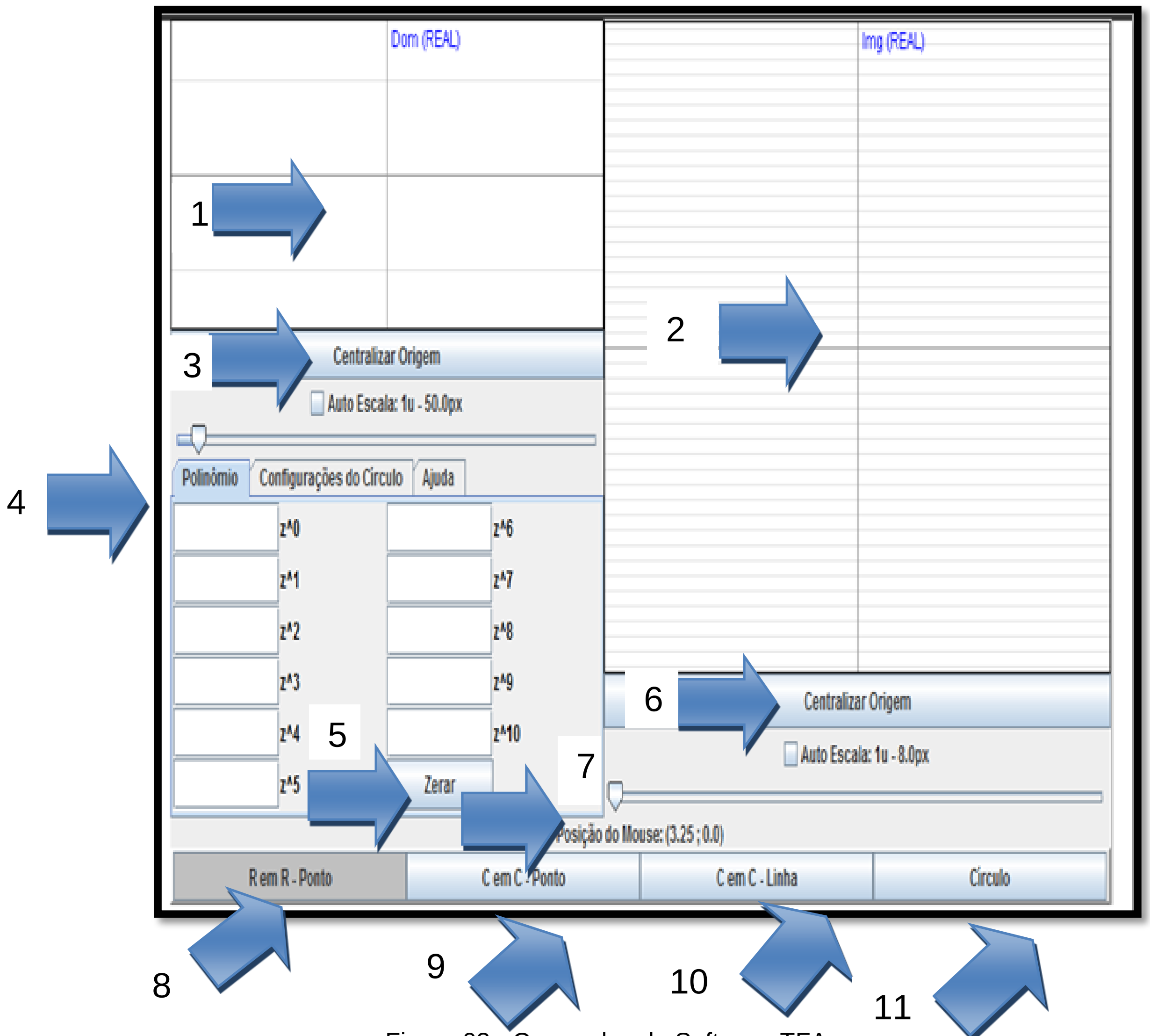

Figura 03 - Comandos do Software TFA.

Observamos que, nas indicações com as setas (1) e (2), ficam os eixos coordenados e, evidentemente, nossos planos: é a nossa área de trabalho. Inicialmente, o Domínio está no eixo vertical (1), e a Imagem, na vertical (2) que, devido ao comando R em R, indicada pela seta (8), se posiciona dessa maneira.

Nas indicações com as setas (3) e (6), temos o comando de ***Centralização dos eixos*** coordenados na origem de R. Sempre que se fizer necessário, esse comando servirá de apoio para focalizar as imagens da maneira mais significativa.

No local indicado pela seta (4), temos o comando ***Polinômio.*** Observamos que há janelas retangulares abaixo desse comando, em que podem ser inseridos os coeficientes dos Polinômios e que, à direita dessas janelas, estão as variáveis complexas e seus respectivos graus, associadas aos coeficientes do Polinômio.

No comando indicado pela seta (5), temos o comando ***Zerar,*** que tem como função limpar os valores inseridos nas janelas retangulares abaixo do comando **P*olinômio***.

Ao lado do comando **P*olinômio*** há o comando **C*onfigurações do Círculo.*** De acordo com a figura a seguir, ao clicarmos sobre este, aparece essa janela. Nela encontramos as dinâmicas que podem ser feitas sobre o círculo na área de trabalho em R.

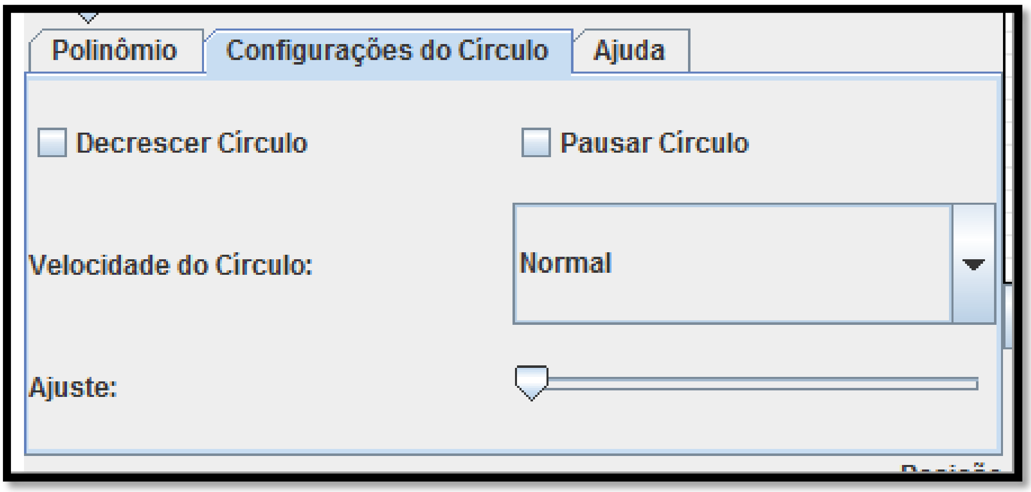

Figura 04 - Comando configurações do círculo.

No comando, indicado pela seta (7), temos **P*osição do mouse.*** Se colocarmos o cursor no ponto sobre os planos ou sobre os eixos coordenados, temos os valores referentes ao par ordenado. No comando indicado pela seta (8), ***C em C ponto***. Ao clicarmos nele, teremos na área de trabalho as indicações dos eixos, como se demonstra na figura abaixo.

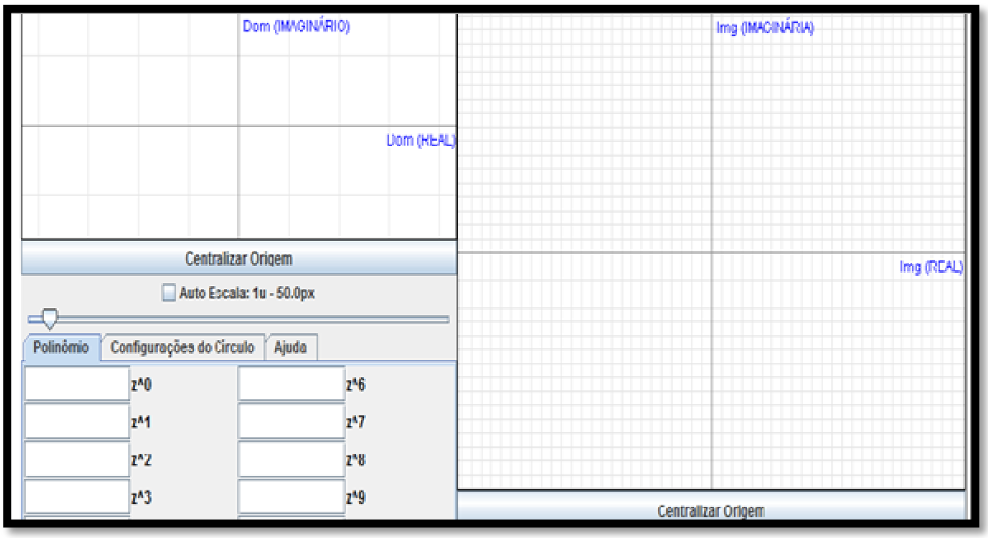

Figura 05 - Área de trabalho do software.

Note-se que, agora, na área de trabalho, nos eixos coordenados, aparecem, à esquerda, o Domínio Real na horizontal e o Domínio Imaginário na vertical, e, do lado direito, a Imagem Real na horizontal e a Imagem Imaginária, na vertical. Já no comando ***Círculo,*** indicado pela seta (11), ao clicarmos sobre ele, aparece um círculo se formando no domínio de $\mathbb{R}^2$, do lado esquerdo da área de trabalho, conforme se demonstra na figura a seguir.

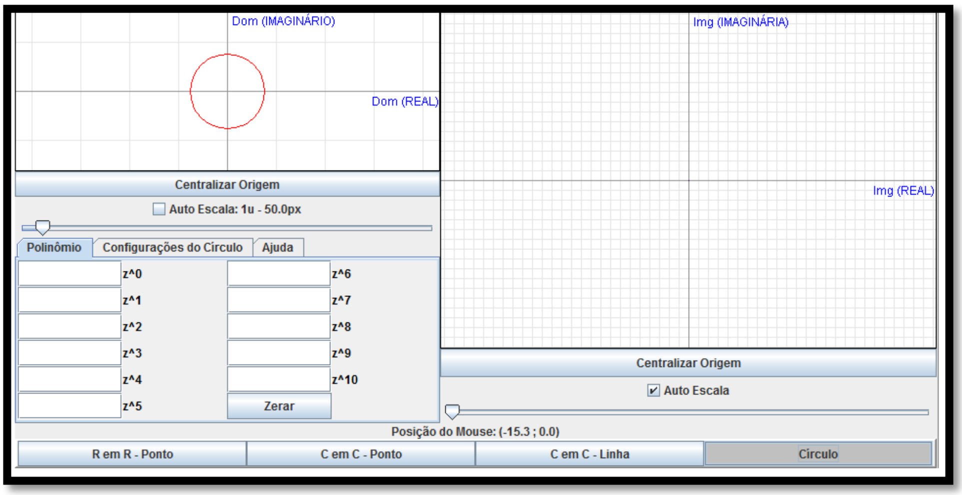

Figura 06 – Formação do círculo no software.

Vamos agora considerar um Polinômio $f(z) = 4\,z^3 + \;3\,z^2 + \;2\,z + 1.$

Inicialmente, insiram nas janelas, abaixo do comando ***Polinômios,*** os coeficientes do Polinômio acima.

1) Analisemos o que ocorre, ao clicarmos no comando ***R em R - Ponto***

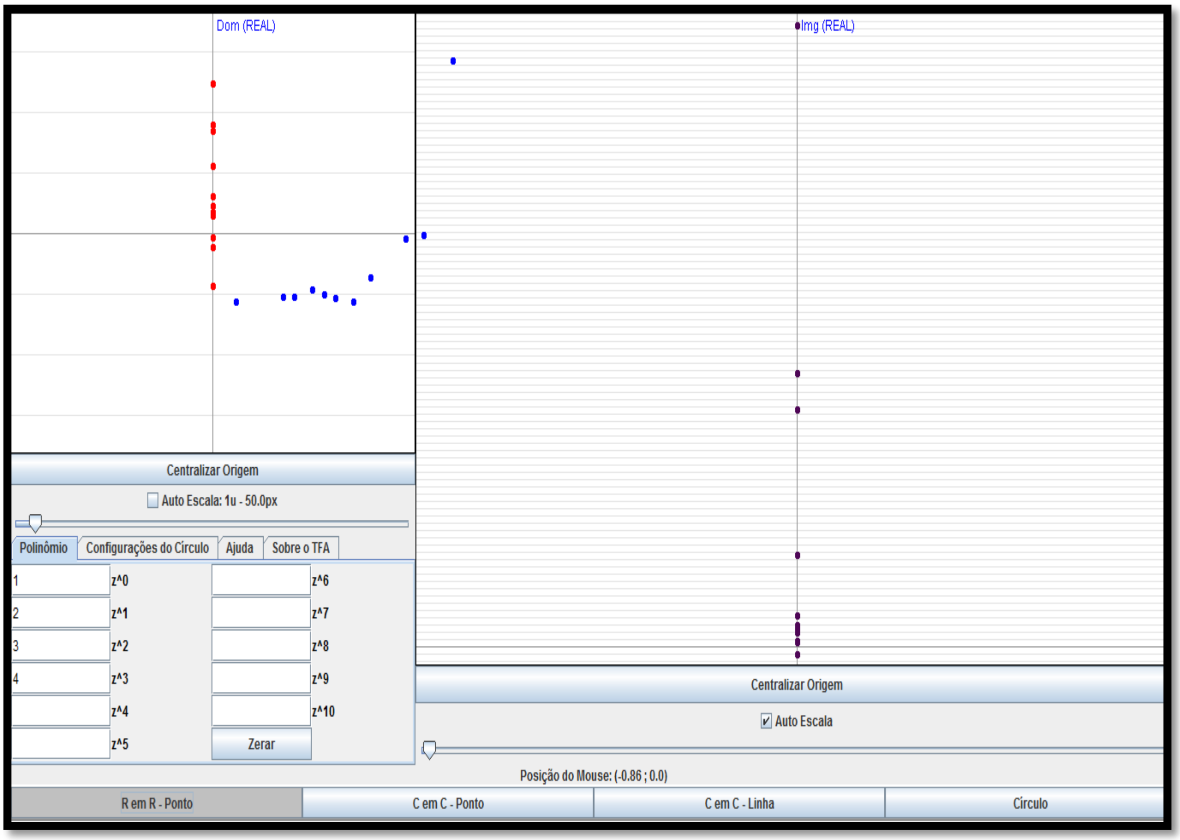

Figura 07 – Formação de pontos no software.

Observamos que pontos sobre o eixo vertical (domínio real) são levados pelo Polinômio ao eixo vertical (imagem real). O objetivo essencial com esse comando é poder analisar o Domínio e a Imagem, ponto a ponto, de forma diferente daquela expressa nos livros convencionais, quanto ao estudo de relações em que o Domínio é representado no eixo horizontal, e, a Imagem, no eixo vertical.

Analisemos o que ocorre quando utilizamos o comando ***C em C- Ponto***

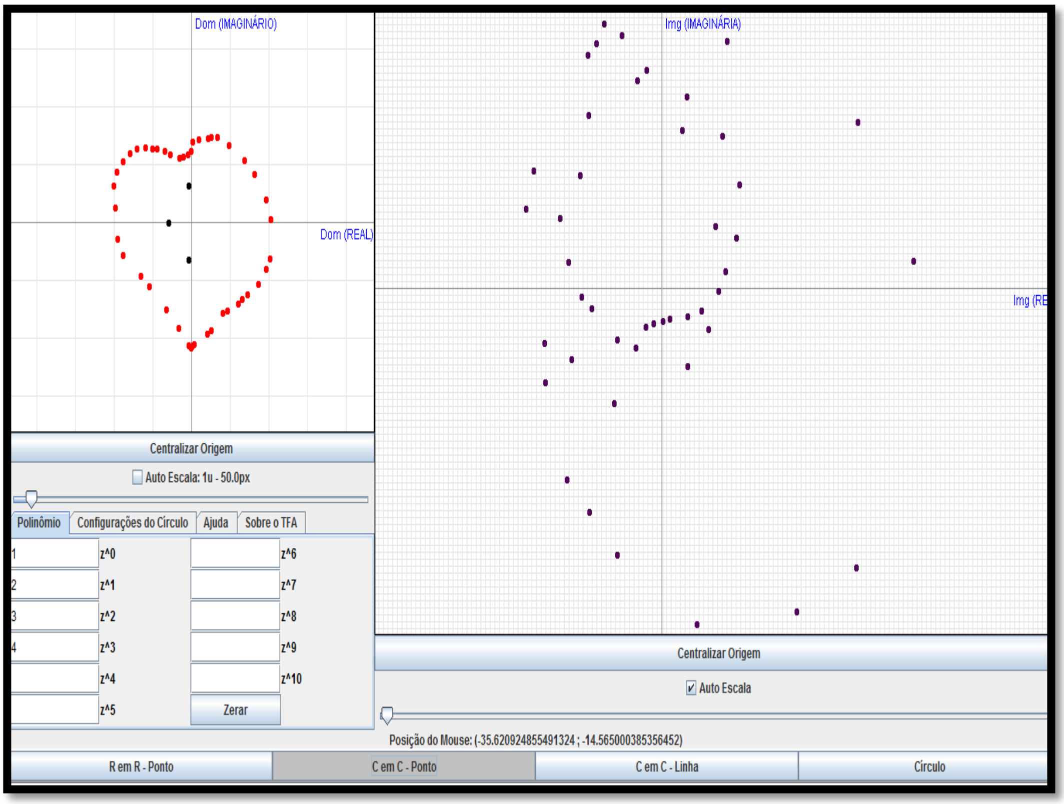

Figura 08 – Relação de domínio e imagem no software.

Vimos que as relações entre Domínio e Imagem permanecem intrínsecas (propriedades mantidas), porém, na relação mantida, trata-se de pontos verdadeiramente complexos, gerando imagens verdadeiramente complexas. Os pontos, próximos às raízes do Polinômio, gerarão pontos-imagens, que se aproximam da origem do plano, no Contradomínio.

A ideia do autor do *software* é relatar os preliminares da Álgebra e da Geometria envolvidos no contexto de imagens que serão geradas pelos Polinômios. Ou seja, um preparativo para se entender que esses pontos nos planos permitirão enxergar, mais à frente, que as curvas fechadas e formadas pelos pontos, no plano, deformar-se-ão continuamente. E, é fato que as curvas, no Contradomínio, poderão varrê-lo até o momento-ápice: passar pela origem do plano do Contradomínio.

2) Utilizando o comando ***C em C–Linha***

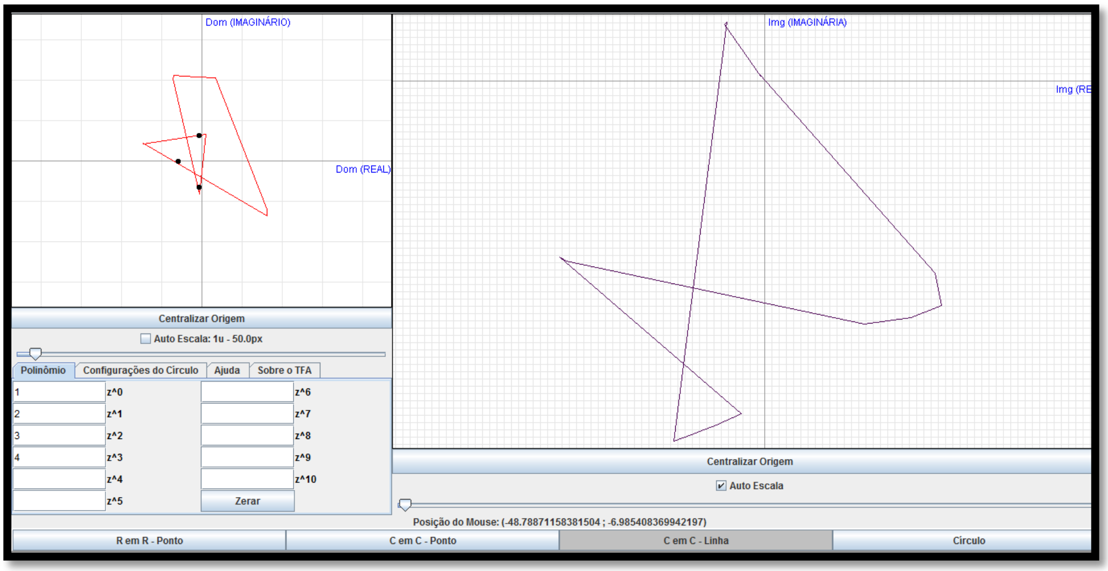

Figura 09 – Traçado de linha no software.

O aspecto mais relevante nesse comando é que o leitor pode interagir fazendo a figura, traçando-a, com linhas, livremente, como se desejar, no plano do Domínio. A figura 09, não reflete nosso objetivo com o software, apenas tem um caráter meramente de visualizar a utilização do comando, ou seja, o visual.

Utilizando o comando ***Círculo***

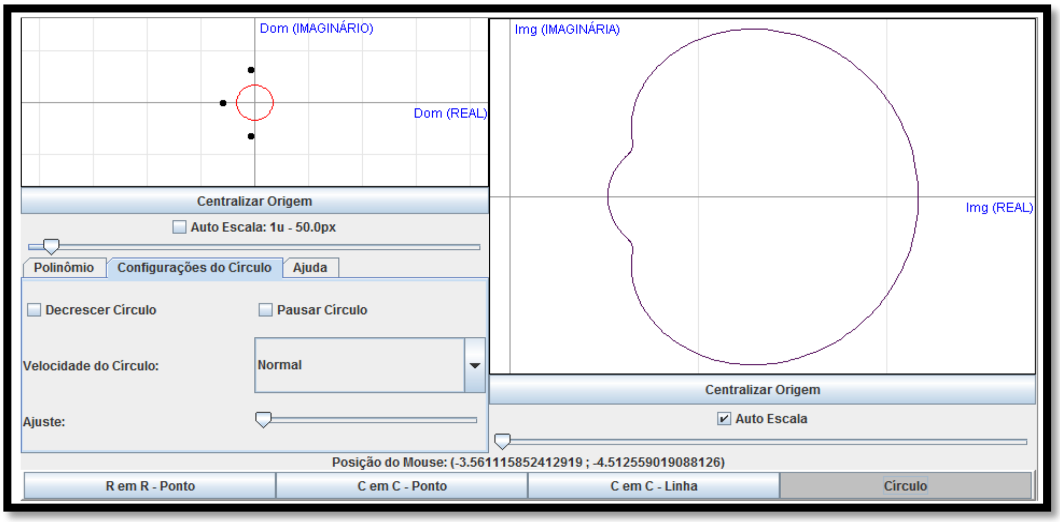

Figura 10 – Relação entre imagens no software.

Note-se que, quando o raio do círculo formado, no Domínio, é pequeno, a curva do Contradomínio não envolve a origem, a menos que o termo independente seja nulo. Contudo, na próxima figura, verificaremos o que ocorre quando o círculo passar sobre os eixos, no Domínio.

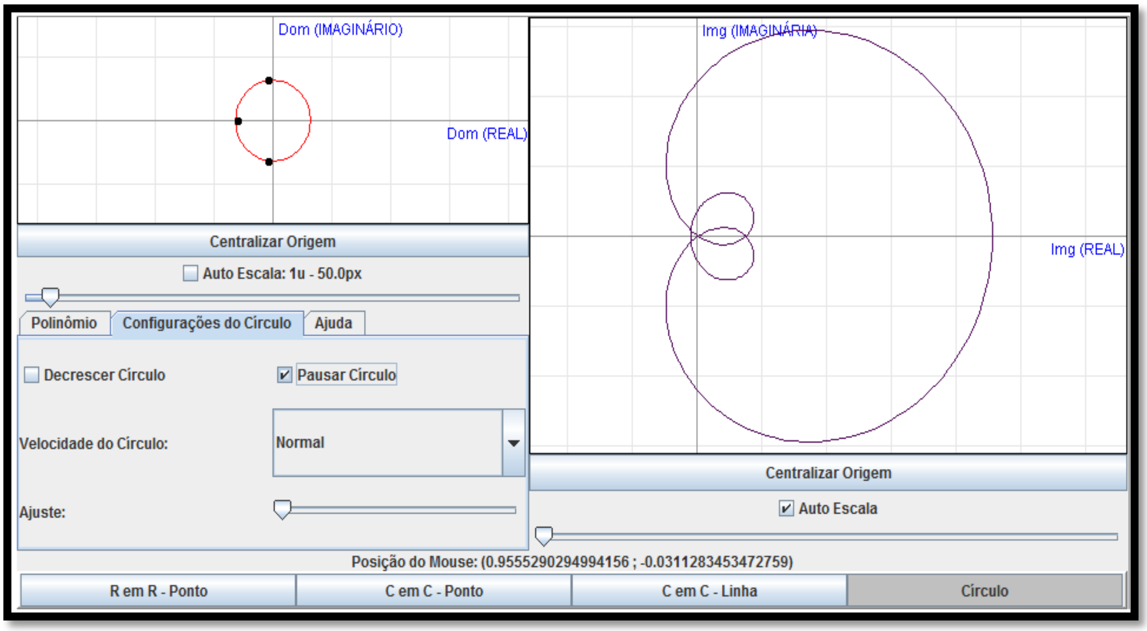

Figura 11 – Raízes do polinômio.

Temos que a alça formada, no Contradomínio, passa pela origem três vezes.

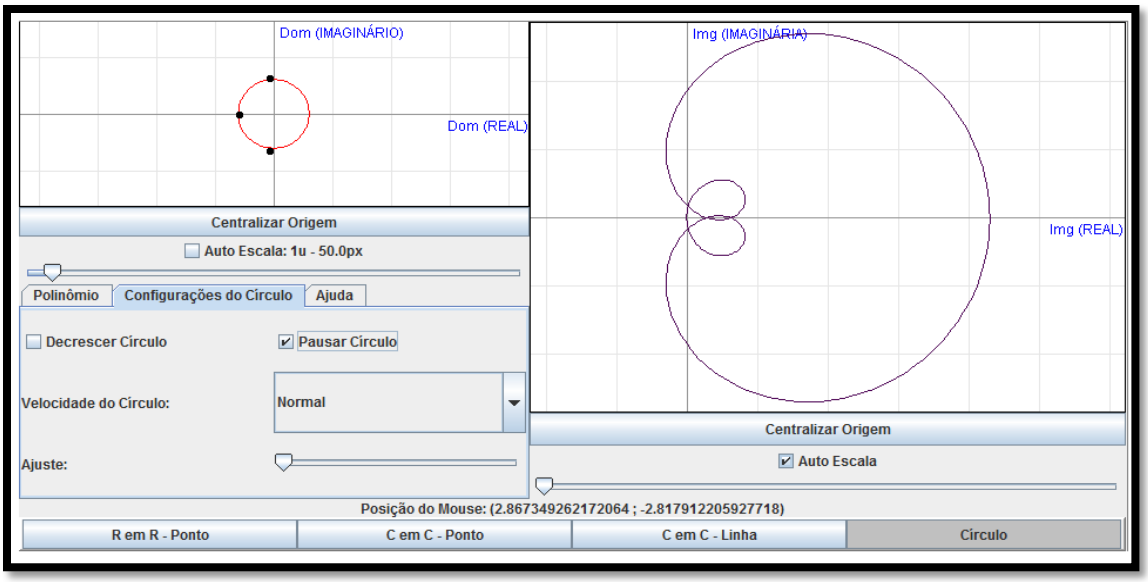

Figura 12 – Teorema Fundamental da Álgebra.

Esse é nosso objetivo, pois, quando a alça passa pela origem do Contradomínio, comprovou-se que o Polinômio possui três raízes, conforme afirma a teoria do Teorema Fundamental da Álgebra (TFA).

1.2.9. A demonstração do TFA: uma ideia explicativa

Relativamente, como f é uma função polinomial e $z = r\,e^{i\theta}$, temos que a imagem dos Números Complexos z, que estão sobre um círculo de raio r, no Domínio $(z - plano)$, são curvas fechadas, no Contradomínio $(w - plano)$.

Vamos admitir como Polinômio $f(z) = z^3 + 4z^2 + 3z + 2$.

Vejamos a imagem gerada pelo *software TFA*. Em princípio, utilizaremos o comando ***Círculo,*** de forma a descrever as imagens geradas pelo *Software*. Contudo, para uma análise mais detalhada, o leitor poderá usar o *comando* ***C em C linha,*** pois, com ele, pode-se interagir com o *Software*, desenhando-se as curvas digitalmente**.** De alguma forma, ao utilizarmos o *mouse* para desenhar no $z - plano$, partindo desse comando, veremos a comprovação do que dissemos acerca da relação existente entre Domínio e Imagem no $w - plano$. Caberá ao leitor verificar, ao passar com o cursor sobre os pontos (raízes de $f(z)$) no $z - plano$, o que acontecerá na imagem de $f(z)$ do $w - plano$.

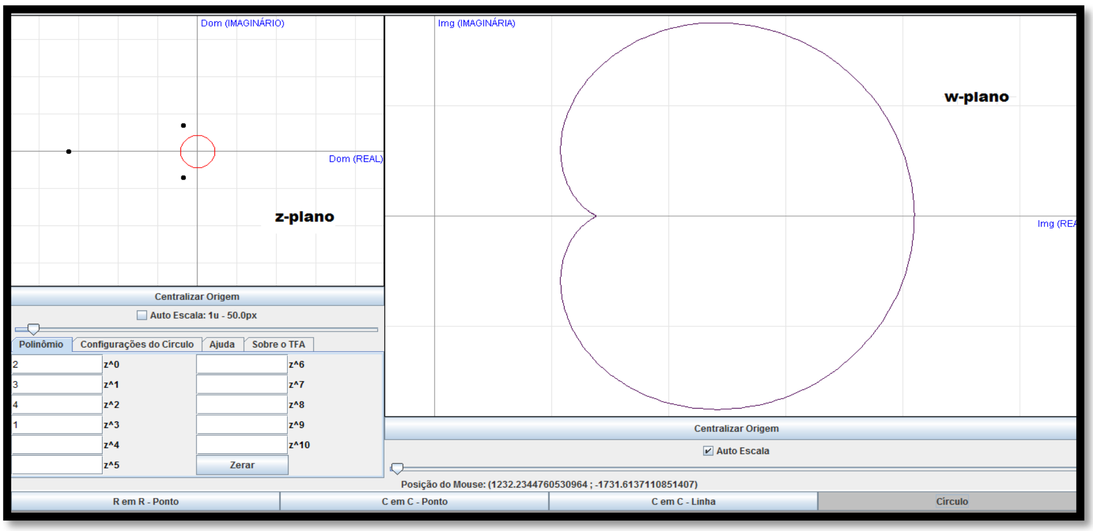

Figura 13 – As raízes do polinômio e o TFA.

Podemos observar na figura acima que o círculo do $z - plano$ possui um raio r. E é verdade que cada ponto no círculo no $w - plano$ gera uma espécie de alça fechada que não contém ainda a origem. À medida que r aumenta no $z - plano$, a alça no $w - plano$ aumenta. E ambos o fazem de forma contínua.

Então, é necessário vermos o que ocorre quando o círculo passa pelo menos por um dos pontos no z-plano. Observe-se na figura abaixo.

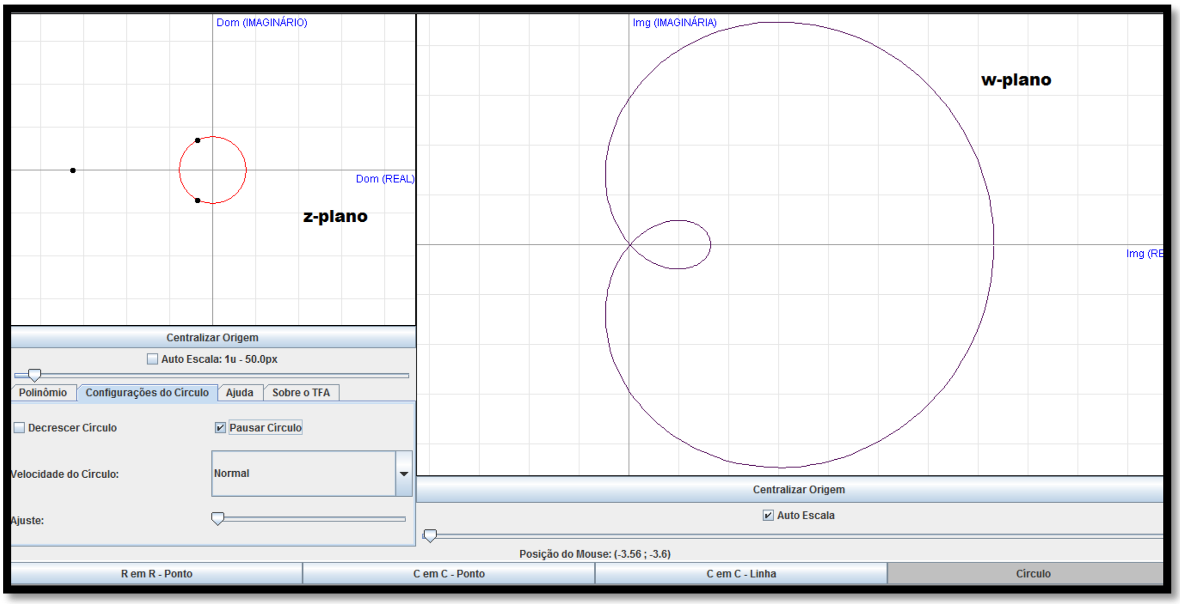

Figura 14 – Identificando as raízes do polinômio.

É notório que a imagem de $f(z)$ passará pela origem. Em outras palavras, teremos que $f(z) = 0$, configurando a existência de raízes. Veja que, nas duas raízes, γ_r passou duas vezes pela origem do w-plano.

Vejamos a próxima figura.

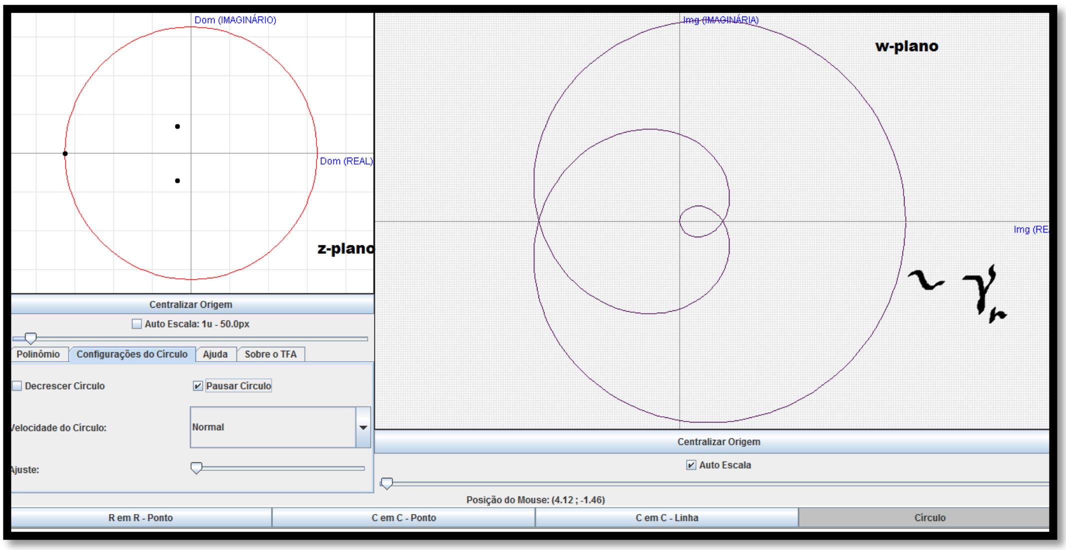

Figura 15 – Identificando as raízes do polinômio.

O que pudemos observar no círculo do $z - plano$, ao passar pela terceira raiz? Podemos afirmar que $f(z)$ corta a origem do $w - plano$, o que reforça que, se o Polinômio escolhido é de grau 3, então teremos três raízes, e, para um Polinômio de grau n, teremos n raízes, conforme demonstrado na tese de Gauss. Evidentemente, pode surgir a seguinte pergunta: E se continuarmos a aumentar o raio do círculo no $z - plano$? É evidente que $f(z)$ não cortará mais a origem. Esse fato agrega o conhecimento geométrico de que, se um Polinômio tem grau m, terá m raízes.

Voltando à questão da curva fechada γ_r, esta varrerá continuamente todo o Contradomínio do $w - plano$, onde $f(z)$ mora, o que nos autoriza dizer que $f(z)$ é sobrejetora. Essa é uma forma intuitiva de vermos, na prática, o Teorema Fundamental da Álgebra. Dessa maneira, procederemos com a enunciação e a demonstração do TFA.

Definição de grau de p: Seja $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ um polinômio não nulo. Chama-se de grau de p, e representa-se por $gr\,(p)$ o número natural p, tal que $a_p \neq 0$ e $a_i = 0$ para todo $i > p$.

1. **<u>Teorema (D'Alembert-Gauss)</u>: Todo Polinômio $p(z)$ de grau p natural, com coeficientes complexos, possui uma raiz complexa.**

<u>PROVA</u> :

Seja $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dado por $f(z) = a_n\, z^n + a_{n-1}\, z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \cdot$, com $a_n \neq 0$.

Suponhamos que $f(z)$ não possua raiz, de modo que, para todo número complexo z , $f(z) \neq 0$.

Com esta hipótese, se permitirmos que z descreva qualquer curva fechada no plano $x\,y$, $f(z)$ descreverá uma curva Γ (curva deformada) que nunca passará pela origem, conforme se mostra na figura abaixo.

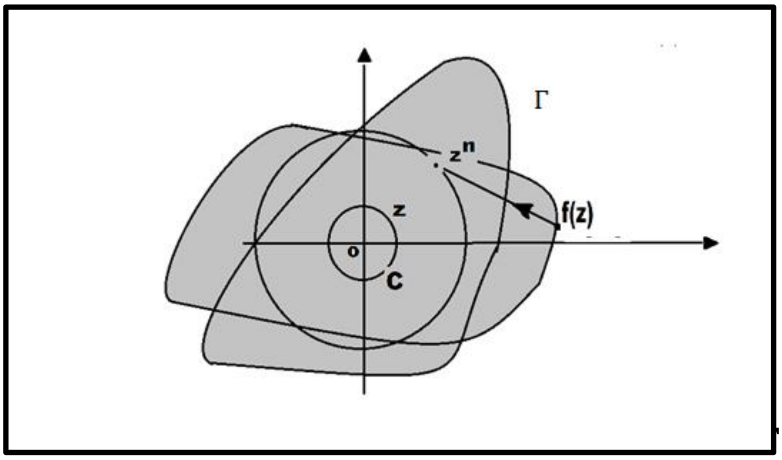

Figura 16. O TFA[2]

Podemos, portanto, definir a ordem da origem O em relação à função $f(z)$, para qualquer curva fechada C , como o número final de voltas completas realizadas por uma flecha que une O a um ponto sobre a curva $\Gamma\,(\text{deformada})$, traçada pelo ponto, representando $f(z)$, à medida que z percorre a curva C. Ressalta-se que escolhemos como curva C um círculo, tendo centro O e raio t. E definimos a

[2] Construção da figura pelo autor da dissertação, extraída do livro: O que é Matemática. Autor: Courant e Robbins, p.310, edição de 2000, 4ª edição revista e atualizada.

função $\varphi(t)$ como a ordem de O em relação à função $f(z)$, para o círculo em torno de O , com raio t. É claro que $\varphi(0) = 0$, uma vez que um círculo O é um ponto, e a curva Γ se reduz ao ponto $f(0) \neq 0$.

Demonstra-se a seguir que $\varphi(t) = n$ para grandes valores de t. Porém, a ordem de $\varphi(t)$ depende continuamente de t, uma vez que $f(z)$ é uma função contínua de z. Teremos, portanto, uma contradição, pois a função $\varphi(t)$ pode assumir apenas valores inteiros e, assim, não pode passar continuamente do valor de 0 para o valor de n.

Demonstremos que $\varphi(t) = n$ para valores grandes de t:

1. Observe-se que, em um círculo de raio $|z| = t$, tão grandes que $t > 1$ e $t > |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|$, temos a desigualdade $|f(z) - \mathrm{z}^{\mathrm{n}}| = |a_{n-1}\, z^{n-1} + \cdots + a_0| \leq |a_{n-1}| \cdot |z|^{n-1} + a_{n-2} \cdot |z|^{n-2} + \cdots + |a_0| = t^{n-1}(|a_{n-1}| + \cdots + \frac{|a_0|}{t^{n-1}}) \leq t^{n-1}\,(|a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \cdots + |a_0|) \leq t^n = |z^n|$.

2. Uma vez que a expressão à esquerda é a distância entre os dois pontos z^n e $f(z)$, enquanto a última expressão à direita é a distância do ponto z^n à origem, observamos que o segmento de reta, unindo os dois pontos $f(z)$ e z^n , não pode passar pela origem, desde que z esteja sobre o círculo de raio t, em torno da origem.

Segundo Courant, R. & Robbins, H. (1996), podemos deformar continuamente a curva percorrida por $f(z)$ na curva percorrida por z^n, nunca passando pela origem, simplesmente transladando cada ponto $f(z)$ ao longo do segmento unindo-o a z^n.

Como a ordem da origem variará continuamente, podendo assumir apenas valores inteiros durante esta deformação, ela deverá ser a mesma para ambas as curvas. Uma vez que a ordem de z^n é n, a ordem de $f(z)$ também deve ser n. E isto conclui a demonstração.

1.3. Apresentação da pesquisa

Por meio de questionamentos e reflexões, chegar a uma conclusão acerca da seguinte problematização: *O ensino de Polinômios, em tese, tem se caracterizado por uma abordagem algébrica que privilegia a memorização, desprovido de reflexão para a aprendizagem, sem qualquer exploração de conceitos e propriedades e, totalmente isento de aplicações*. *Com a utilização de Tecnologias da Informação e Comunicação na Educação Matemática, seria possível modificar este cenário?*

1.3.1. Problema da Pesquisa

No Ensino Médio, seria possível identificar a aprendizagem do TFA, partindo da exploração de pontos, círculos e curvas, pelos polinômios de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, norteados pelas TICs?

1.3.2. Objetivos da Pesquisa

- Investigar, identificar e analisar o uso de Tecnologia da Comunicação e Informação (TICs) no estudo do Teorema Fundamental da Álgebra (TFA), no Ensino Médio (EM).
- Elaborar e delinear atividades investigativas utilizando as TICs, no estudo dos Polinômios, no que concerne ao conceito de Pontos, Círculos e Curvas de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$.

- Desenvolver atividades com alunos do 3º ano do Ensino Médio, de uma escola militar.

1.3.3. Metodologia da Pesquisa

- Pesquisa sobre Tecnologia da Informação e de Comunicação na Educação Matemática e no Ensino do Teorema Fundamental da Álgebra.

- Entrevistas semiestruturadas em que se privilegiam o diálogo, as ações e os comportamentos dos Sujeitos da Pesquisa.

- Pesquisa de Campo com alunos do 3º ano de Ensino Médio, de uma escola militar, no 2º semestre de 2012, a partir de elaboração e do desenvolvimento de atividades investigativas, utilizando o ***Software TFA*** , relacionando-se os conceitos de Pontos, Círculos, Curvas e Polinômios no $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$.

1.3.4. A estrutura textual desta pesquisa está organizada em outros cinco capítulos, assim distribuídos:

Capítulo 2 – A Revisão da Literatura

Neste capítulo é delineada a importância das Tecnologias da Informação e de Comunicação (TICs), a partir do uso do computador. Acreditamos que as investigações realizadas nos proporcionaram reflexões quanto ao conhecimento matemático-teórico, com conexões ao conhecimento tecnológico, a partir da entrada desse novo ator na Educação: o computador. As considerações feitas nesse capítulo levam em conta as pesquisas educacionais relacionadas com a Informática na sala de aula. Acredita-se que, ao apresentar uma reflexão sobre a Informática Educacional com o uso do computador, estamos interessados em contribuir com uma Educação Matemática inclusiva na aprendizagem do TFA.

Capítulo 3 – Referencial Teórico

Trata-se de um capítulo que procura mostrar a importância das Tecnologias da Informação e de Comunicação no contexto da Educação Matemática. Enfatiza-se, ainda, como pesquisadores se esforçam para buscar alternativas e caminhos em prol de uma aprendizagem que esteja centralizada na qualidade do ensino, o que envolve aspectos sociais, educacionais e tecnológicos.

Capítulo 4 - A Metodologia da Pesquisa

Nele retomaremos a investigação e identificação e a relação existente entre o ensino e a aprendizagem do Teorema Fundamental da Álgebra (TFA), a partir do uso de Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs), com a aplicação do *Software TFA*. O experimento ocorre com alunos do 3º ano de Ensino Médio, de uma escola militar. Ressalta-se que, em face dos procedimentos investigativos, foi preciso colher dados a partir de questionário, desenvolvendo-se atividades investigativas, concomitantemente, para que pudéssemos identificar e compreender, da melhor forma possível, o ensino e a aprendizagem do TFA, por parte dos Sujeitos desta Pesquisa. As contribuições de Bogdan e Biklen (1994) nos proporcionam investigar de modo qualitativo esta pesquisa, o que se dá por meio de analises descritivas que primam pelas ações desses Sujeitos.

Capítulo 5 - Descrevendo e Analisando as Atividades Investigativas no Contexto do Ensino e na Aprendizagem do TFA

Um capítulo no qual se procura estabelecer conexões entre reflexões como as de Borba e Penteado (2010), Allevato (2005), Miskulin (1999), Borba e Confrey (1996), todas voltadas para o enfoque Tecnologia da Informação e Comunicação e Educação Matemática. O objetivo é refletimos sobre o ensino e a aprendizagem do Teorema Fundamental da Álgebra. Nele, são retomadas algumas considerações de nosso Referencial Teórico e de nossa Revisão de Literatura, a fim de conectar os dados coletados na pesquisa de campo com os recursos metodológicos, de maneira que permitamos a elaboração de algumas categorias ou, eixos de análise, os quais são descritos posteriormente.

Capítulo 6 – Considerações Finais

No referido capítulo retomaremos a questão metodológica que norteou esse trabalho, buscando identificar a resposta à nossa proposta de pesquisa. O foco está na importância de nossas atividades investigativas como sendo norteadoras para a análise do ensino e da aprendizagem do TFA, remetendo-nos a algumas considerações para o estudo do TFA no Ensino Médio.

Capítulo 2

Revisão de Literatura

Este capítulo delineia a importância das Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs), a partir do uso do computador, relacionando-as ao processo de ensino e de aprendizagem do Teorema Fundamental da Álgebra (TFA), no Ensino Médio. Isso porque, com a inclusão desse novo ator na educação: o computador ampliaram-se as reflexões quanto à teoria matemática aliada à tecnologia.

As considerações feitas neste capítulo levam em conta as pesquisas educacionais que tratam do uso da Informática na sala de aula. Ao apresentar uma proposta envolvendo a Informática Educacional com o uso do computador, contribui-se com uma educação matemática inclusiva, em especial, com a aprendizagem do TFA.

2.1 Algumas questões norteadoras das TICs e do ensino de Matemática: A visão através dos PCNEM

Em nosso entendimento, a questão do ensino de Matemática regido pelas competências e habilidades com o uso de tecnologias, respaldado pelos Parâmetros Curriculares do Ensino Médio (PCNEM, 2000), possibilita um entendimento maior do aluno frente às questões educacionais que se impõem em um mundo globalizado, econômica e tecnologicamente. Essa posição da globalização é posta em evidência quando se busca justificar as mudanças sociais ocorridas no ciclo produtivo da indústria, da diminuição gradativa do emprego e da própria transformação na educação. Os próprios PCNEM afirmam que

> A globalização econômica, ao promover o rompimento de fronteiras, muda a geografia política e provoca, de forma acelerada, a transferência de conhecimentos, tecnologias e informações, além de recolocar as questões da sociabilidade humana em espaços cada vez mais amplos (BRASIL, 2000, p. 13).

Essa é uma questão da qual não podemos fugir. Ou seja as formas atuais de sociabilização, com o advento de novas tecnologias, a automatização da indústria e a presença de redes sociais mudam radicalmente o conceito de sociedade e propõem uma nova ordem na maneira de pensar em Educação. Pois disso decorre que

> A revolução tecnológica, por sua vez, cria novas formas de socialização, processos de produção e, até mesmo, novas definições de identidade individual e coletiva. Diante desse mundo globalizado, que apresenta múltiplos desafios para o homem, a educação surge como uma utopia necessária indispensável à humanidade na sua construção da paz, da liberdade e da justiça social (BRASIL, 2000, p.13).

É oportuno que a Educação exerça, juntamente com os adventos tecnológicos, segundo os próprios PCNEM, uma nova ordem para a sociedade e uma maneira de se repensarem as questões relativas a esse fato. Cabe ressaltar que, além desse advento, a incorporação de novas tecnologias no processo educativo, em uma sociedade moderna, implica dizer que essa nova ordem está submetida à priorização de uma Educação mais crítica, mais processual, não compartimentada.

Os Parâmetros Curriculares, baseados na Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LEI, 9.394/96), esclarecem-nos que os alicerceies da reflexão de uma educação mais eficiente, ou seja, aquela que não se detém em memorização de conhecimentos, pois já está superada pela moderna tecnologia, baseia-se na perspectiva de que os estudantes precisam desenvolver competências básicas. Tais competências lhes permitirão desenvolver a capacidade de continuar aprendendo. Nesse ínterim, reflexões da Comissão Internacional sobre a Educação para o século XXI destacam que a Educação

> a) [...] deve cumprir um triplo papel: econômico, científico e cultural;
> b) [...] deve ser estruturada em quatro alicerces: aprender a conhecer, aprender a fazer, aprender a viver e aprender a ser.

Ao retomarmos a questão da competência, queremos destacar nesta pesquisa o processo de ensino e aprendizagem do TFA, inserido em uma Educação Matemática que também enfatize as referidas habilidades, numa dinâmica que conjuga

> [...] o entendimento de equipamentos técnicos, a obtenção e análise de informações, a avaliação de riscos e benefícios em processos tecnológicos, de um significado amplo para a cidadania e também para a vida profissional. Com essa compreensão, o aprendizado deve contribuir não só para o conhecimento técnico, mas também para uma cultura mais ampla [...] (BRASIL, 2000, p.208).

O pretendido é que, no Ensino Médio, as conexões entre ciências também se estabeleçam, de forma que a chamada interdisciplinaridade abra espaços para que o repensar a Educação seja um fato, e não, uma utopia. Ressalta-se que o projeto que envolve

> Uma concepção ambiciosa do aprendizado científico tecnológico no Ensino Médio, diferente (acréscimo nosso) daquela hoje praticada na maioria de nossas escolas, não é uma utopia e pode ser efetivamente posta em prática no ensino de Biologia, da Física, da Química e da Matemática e das tecnologias correlatas a essas ciências (BRASIL, 2000, p.208).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio reforçam as novas diretrizes para o ensino da Matemática, que consistem em discussão e argumentação de temas de interesse das ciências e da tecnologia. Outro aspecto relevante está baseado em uma interconexão entre a tecnologia e a Matemática, na qual se deve:

> - perceber o papel desempenhado pelo conhecimento matemático no desenvolvimento da tecnologia e a complexa relação entre ciência e tecnologia ao longo da história;
>
> - acompanhar criticamente o desenvolvimento tecnológico contemporâneo, tomando contato com os avanços das novas tecnologias nas diferentes áreas do conhecimento para se posicionar frente às questões de nossa atualidade (BRASIL, 2000, p. 117-118).

Na essência, o foco estabelecido encerra objetivos educacionais ligados a competências, que a área da ciência e da natureza matemática nomeou como objetivos a serem perseguidas na educação básica. Em face das competências e habilidades e sua relação com a tecnologia tratadas neste capítulo, é oportuno refletimos sobre o valor formativo da Matemática, advindo do conhecimento matemático que é importante para o desempenho das atividades hodiernas do ser humano, enfatizando-se que,

> A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades (BRASIL, 2000, p. 251).

Como podemos perceber, a Matemática do Ensino Médio é uma ferramenta que contribui para o raciocínio e também é vista como “[...] um sistema de códigos e regras que a tornam uma linguagem de comunicação de ideias e permite modelar a realidade e a interpretá-la" (Brasil, 2000, p. 251). Em nosso entendimento, a relação entre a Matemática do Ensino Médio e as Novas Tecnologias consiste em permitir que o aluno, no mundo atual, torne-se mais crítico e consciente das múltiplas finalidades que estas áreas do conhecimento podem promover, em sala de aula, ao efetivo aprendizado.

Por essa razão, acreditamos que o Teorema Fundamental da Álgebra (TFA), como assunto integrante da grade curricular do Ensino Médio, associado ao uso das TICs, pode contribuir para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Porém,

> É preciso ainda uma rápida reflexão entre a Matemática e a tecnologia. Embora seja comum, quando nos referimos às tecnologias ligadas à Matemática, tomamos por base a informática e o uso de calculadoras. Estes instrumentos, não obstante sua importância, de maneira alguma constitui (sic) o centro da questão (BRASIL, 2000, p. 251).

Essas questões provam que o ensino não deve ser solitário, mas, solidário, de forma que questões mais inquietantes de tecnologias sejam promovidas. Entretanto, numa perspectiva de ensino pela aprendizagem matemática. Isso exige que o aluno aprenda continuamente e, de forma colaborativa, de acordo com o que está prescrito nos Parâmetros Curriculares.

Os impactos provenientes das TICs, na sociedade são evidentes. As informações e comunicações em processo, na sociedade, põem o computador como um instrumento indispensável para a consolidação dos processos de ensino da Matemática. Mas também nos trazem uma reflexão sobre a maneira de se repensar a Educação, em como o elemento *computador* se insere no meio social, sob formas das mais diferenciadas e, cada vez mais modernas.

De fato,

> [...] este <u>impacto da tecnologia</u>, cujo instrumento mais relevante é hoje o computador, exigirá do ensino de Matemática um redirecionamento sob uma perspectiva curricular que favoreça o desenvolvimento de habilidades e procedimentos com os quais o indivíduo possa se reconhecer e se orientar nesse mundo do conhecimento em constante movimento (BRASIL, 2000, p. 252 – grifo nosso).

Além de oportuna, a expressão “impacto da tecnologia” é mais abrangente. De fato, podemos pensar em tecnologias como recursos midiáticos mais amplos, contudo, o computador é relevante nesse processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Logo, em se tratando da questão relacionada à relação entre competências e habilidades bem sucedidas com o uso do computador no ensino de Matemática, entendemos que tais aptidões constituem-se um bem norteador para a consolidação de práticas educativas e de colaboração entre alunos e professores. Entendemos, ainda, que o direito ao acesso a essas práticas inovadoras podem ser oportunizadas pelas TICs.

De acordo com Skovsmose,

> [...] pode-se argumentar que as TICs representam não somente um maquinário, mas também uma técnica cultural e, portanto, uma perspectiva cultural. Consideramos importante que estudantes espalhados por todo o planeta tenha a oportunidade de se familiarizar com essa tecnologia. Nossa posição fundamental é simplesmente que qualquer estudante tem direito de experimentar e usar o que considere importante para conseguir um emprego melhor, para divertir-se e assim por diante. Isso significa pôr as mãos em um teclado. Vemos esse direito como pertencente à mesma categoria do direito de aprender a ler e a escrever (SKOVSMOSE, 2008, p. 48).

A seguir, far-se-á uma avaliação sobre a Informática na Educação Matemática, como um importantíssimo elemento para a consolidação da Revisão de Literatura.

2.2. Tecnologias da Informação e Comunicação: Informática e Educação Matemática

Para Borba e Penteado (2010), a prática docente relacionada à Informática e, à Educação Matemática não pode ser pensada de forma dicotômica. Existem propostas e metodologias alternativas que nos incentivam a fazer e a refazer a leitura de nossa prática docente, o que é bastante propício em um mundo regido pela rápida transmissão e pela informação com o uso de novas tecnologias.

Segundo os autores, deve haver responsabilidade por parte dos educadores a respeito da adoção de alternativas em nome da utilização de uma ferramenta pedagógica que não deve ser negligenciada nos dias atuais: o computador. Eles ressaltam a importância da convivência com o cenário educacional e a chamada “tecnologia informática”:

> Parece-nos mais relevante o novo cenário educacional que se constitui a partir da entrada desse “novo ator”, a tecnologia informática. Aqui, interessam-nos as possibilidades e dificuldades que se apresentam, sem comparar se são melhores ou piores do que aqueles nas quais essa tecnologia não é utilizada (BORBA e PENTEADO, 2010, p.12).

Os referidos autores relembram que as manifestações alusivas ao caráter do uso, ou não, do computador na escola arrastam-se desde as décadas de 80 e 90, quando os aportes didáticos ligados à máquina começaram a emergir em nossa sociedade. Ainda hoje, ocorrem diversos fóruns em que se debate sobre o papel da tecnologia e seus efeitos na sala de aula.

Vários autores, dentre eles, Borba e Penteado, consideram que

> Uma forma de refletirmos sobre essas questões seria reformulá-las dentro do contexto do uso de lápis e papel. Perguntamos: será que o aluno deveria evitar o uso intensivo de lápis e papel para que não fique dependente dessas mídias (BORBA e PENTEADO, 2010, p.13).

Para eles, o papel e o lápis também se constituem ferramentas midiáticas e estão presentes no cotidiano escolar. Relatam que sempre há uma dada mídia envolvida na produção do conhecimento, como ocorreu com a oralidade, muito praticada antes do século XIX, conforme assinalam esses autores.

A Informática Educativa remete-nos a uma reflexão da inclusão digital na escola, como um processo democrático e, em prol do processo de ensino/aprendizagem. Lembrando que, segundo Borba e Penteado (2010), esse processo passa, primeiramente, pelo que chamam de *alfabetização tecnológica*. Convém informar que essa alfabetização não se resume a um curso de Informática, mas, ao se saber ler novas mídias.

Visto dessa forma, o computador deve estar inserido em atividades essenciais, tais como as que envolvem o aprender a ler, o escrever, o compreender textos, o entender gráficos, o contar, o desenvolver noções especiais, etc. Para eles,

> [...] o acesso à Informática na Educação deve ser visto não apenas como um direito, mas, como parte de um projeto coletivo que prevê a democratização de acessos a tecnologias desenvolvidas por essa mesma sociedade. É dessas duas formas que a Informática na Educação deve ser justificada: alfabetização tecnológica e direito de acesso (BORBA e PENTEADO, 2010, p.17).

2.2.1. Tecnologias da Informação e Comunicação: análise de pesquisas bem sucedidas com mídias informáticas

Borba e Penteado (2010) relatam casos em que a Informática contribui nas experiências feitas em sala de aula. Por exemplo, com a possível utilização de calculadoras gráficas para favorecer os traçados de gráficos de funções, aliás, prática bastante praticada nas escolas dos Estados Unidos. Inclusive, aqui no Brasil, os autores foram os pioneiros quanto à utilização desse tipo de calculadora.

Os autores são os percursores de pesquisas com a calculadora gráfica no Brasil, projeto desenvolvido na Escola Estadual Heloísa Lemenhe Marasca, situada na cidade de Rio Claro, em São Paulo. Trata-se de uma escola de Ensino Fundamental. Lá, os alunos são convidados a participarem ativamente das pesquisas midiáticas.

Em retrospectiva histórica, por exemplo, no que se refere a representações múltiplas, no final da década de 80 e, no início dos anos 90, a abordagem sobre *funções* foi questionada quanto ao seu uso nas escolas, que há muito traçavam gráficos de funções com papel e lápis. Borba e Confrey (1996), Kaput (1997), entre outros, falando sobre essas representações múltiplas, enfatizam que o importante não é privilegiar um tipo apenas de representação, e sim, diferente representações para uma mesma *função*: a expressão algébrica, o gráfico e a tabela.

Borba e Confrey (1996) propõem a coordenação entre as formas de representação de *funções*, ou seja, uma epistemologia das representações múltiplas. Na visão deles, conhecer *funções* passa a significar saber coordenar representações. Essa nova abordagem ganha força com a chegada dos ambientes computacionais, que geram gráficos vinculados a tabelas e expressões algébricas.

De alguma forma, acreditamos que as práticas advindas dessas experiências trazem uma grande contribuição no contexto de nossa pesquisa, em se tratando de atividades investigativas com o Teorema Fundamental da Álgebra (TFA), mediadas pelo computador.

Borba e Penteado (2010) argumentam que as atividades, além de promoverem a visualização para o centro da aprendizagem matemática, enfatizam o aspecto fundamental na proposta pedagógica da disciplina: a experimentação. Para eles,

> [...] **softwares** que representam o traçado de gráficos de funções têm sido utilizados de forma acentuada ao longo dos anos. Praticamente todos os tópicos são iniciados a partir de atividades com a calculadora. As atividades além de naturalmente trazer a **visualização** para o centro da aprendizagem matemática enfatizam um aspecto fundamental na proposta pedagógica da disciplina: **a experimentação** (BORBA e PENTEADO, 2010, p. 37 – grifo nosso).

Entendemos ser fundamental para esta pesquisa que se observe como as abordagens matemáticas a partir do uso do computador são feitas com os alunos e, estimuladas, a partir da experimentação que é fomentada por seus pesquisadores. Nesse processo, entendemos, ainda, que os alunos conseguem fazer suas conjecturas a respeito de uma situação geral para uma situação local, a partir da mídia computador e, com isso, conseguem visualizar a situação apresentada.

Borba e Penteado defendem que

> a experimentação se torna algo fundamental, invertendo a ordem de exposição oral da teoria, de exemplos e exercícios bastante usuais no ensino tradicional, permitindo uma nova ordem: investigação e, então, a teorização (BORBA e PENTEADO, 2010, p.41).

De fato, os autores chamam a atenção para a prática investigativa, inclusive sendo bastante valorizada pela Educação Matemática. Isso porque as situações investigadas na Matemática fazem referência à própria Matemática. Entendem como sendo legítimo o fato de a Matemática ser trabalhada como tema, ou seja, que a investigação se desenvolva numa perspectiva internalista.

O importante é que pedagogias estejam em harmonia com novas tecnologias, dado que o teórico e o prático são essenciais para a consolidação do conhecimento matemático. Realmente, essa maneira de se trabalhar é uma forma de superar problemas de práticas de ensino tradicional vigente, considerando que o enfoque experimental explora ao máximo as possibilidades de rápido *feedback* das mídias informáticas e a facilidade de geração de inúmeros gráficos, tabelas e expressões algébricas.

2.2.2. Tecnologias da Informação e Comunicação: o humano e a técnica e zona de risco

Borba e Penteado (2010) destacam que o desfecho no processo de utilização da mídia sempre formou a tríade argumentativa, que se utiliza de oralidade, da escrita e da Informática. Já Lévy (1993) enfatiza que a história das mídias sempre esteve entrelaçada com a história da própria humanidade. Ele utiliza a noção de tecnologias da inteligência para caracterizar três grandes técnicas, que estão associadas à memoria e ao conhecimento, à escrita e, à Informática.

De fato, para Lévy, oralidade era utilizada para estender a memória. Mas, principalmente na questão da difusão da escrita nos séculos XVII e XVIII, na Europa, e, com o surgimento do livro no formato semelhante ao do que temos hoje, permitiu-se que a memória se estendesse de modo qualitativamente diferente, em relação à outra tecnologia da inteligência: a oralidade.

Entendemos que, com a acessibilidade do papel e da escrita, permitiu-se que o livro, o papel e o lápis passassem a ser vistos como evidentes instrumentos midiáticos. De igual modo, pode-se entender que a Informática é uma extensão da memória, com diferenças qualitativas, em se tratando de outras tecnologias da inteligência, permitindo que a linearidade do raciocínio seja desafiada por modos de pensar, baseados na simulação, na experimentação e, em nova linguagem.

Entende-se que não pode haver dicotomia frente ao uso da Informática, tendo em visa que os seres humanos são constituídos por técnicas que se estendem e que modificam seu raciocínio. E mais: se considera que o raciocínio só é produzido com uma determinada mídia, ou, com uma tecnologia da inteligência. De acordo com Borba e Penteado,

> [...] é por isso que se adota a postura de que o conhecimento é produzido por um coletivo formado por seres-humanos-com-mídias, ou, seres-humanos-com-tecnologias, e não, como sugerem outras teorias, por seres humanos solitários ou coletivos, formados por apenas seres humanos (BORBA e PENTEADO, 2010, p.49).

As pesquisas com tecnologias e informação favorecem a mediação do ensino/aprendizagem do Teorema Fundamental da Álgebra (TFA) com a intervenção do *Software TFA*, haja vista que os pressupostos dos autores Borba e Penteado (2010) viabilizam conhecimento para qualquer pesquisador que deseje trabalhar com mídias. Para esta pesquisa, por exemplo, foram essenciais.

Entende-se também que é urgente a promoção de pesquisas que promovam o conhecimento teórico com o prático, e, segundo o que se propõe neste trabalho, que esse *norte* seja feito pela Informática e pelo computador. De alguma forma, pretendemos sugerir a experimentação e a visualização partindo de atividades que possam promover a aprendizagem do TFA com a Informática.

Borba e Penteado (2010) põem com muita propriedade que os computadores não substituem ou apenas complementam os seres humanos; eles reorganizam o pensamento. Para os autores, a premissa que surge é de que o computador sozinho nada tem a acrescentar, se não for utilizado pelo homem pensante. Frisam que existe uma interação entre humanos e não humanos, de forma que aquilo que é um problema com uma determinada tecnologia passa a ser uma mera questão a ser resolvida em uma outra. Essas proposições reforçam que o uso de tecnologia em um mundo globalizado é indispensável ao entendimento de determinadas complexidades matemáticas, visando a uma aprendizagem significativa.

Por mais que os professores sejam experientes e tenham conhecimento, é sempre possível que determinados manuseios da máquina os levem a situações inusitadas. Por isso, segundo Borba e Penteado (2010) quando decidimos que a tecnologia informática vai ser incorporada em nossa prática, temos que, necessariamente, rever a relevância da utilização de tudo o mais que se encontra disponível. Certamente, ao fazermos nossas opções corremos o risco de deixar de lado certas coisas que julgávamos importante. Mas, aqui, novamente, é preciso considerar qual é o objetivo da atividade que queremos realizar e saber se ela não pode ser desenvolvida com maior qualidade pelo uso, por exemplo, de um software específico. Não significa que vamos abandonar as outras mídias, mas temos que refletir sobre sua adequação.

Para haver o fortalecimento com uso de novas tecnologias, também é preciso vontade e colaboração por parte de todos os envolvidos no processo de aprendizagem. Deve-se ousar e seguir em frente, de forma colaborativa.

Borba e Penteado (2010) destacam que todo envolvimento que empregue a pesquisa com novas tecnologias pressupõe que a Educação é a precursora de ações possíveis para a tomada de decisão quanto à aprendizagem. Por outro lado, o professor e o aluno são seres *pensantes-com-mídias*, capazes de legitimar o ensino pela aprendizagem significativa de quaisquer assuntos matemáticos.

Dessa forma, entendemos que, como professor de Matemática, como educador matemático, não se pode ignorar que as novas tecnologias devam fazer parte do currículo matemático e da prática constante do professor e do aluno, em quaisquer níveis de ensino.

Capítulo 3

Referencial Teórico

TICs – Tecnologias da Informação e da Comunicação na Educação Matemática

Neste capítulo, mostra-se a importância das Tecnologias da Informação e da Comunicação no contexto da Educação Matemática, enfatizando como pesquisadores se esforçam pela busca de alternativas e caminhos para uma aprendizagem que esteja centralizada na qualidade de ensino. O assunto será tratado sob aspectos sociais, educacionais e tecnológicos.

3.1 As Tecnologias da Informação e Comunicação: Educação, Sociedade e Tecnologia

Segundo Miskulin (1999), existem inter-relações entre Educação, sociedade e tecnologia. Essas inter-relações, das quais trata a autora, pautam-se na percepção de um dinamismo que busca, cada vez mais, ultrapassar os limites e as fronteiras em um mundo globalizado, sem, porém, deixar de preservar as características e especificidades próprias desses elementos. Como destaca Brasil (2000), a revolução tecnológica cria novas formas de socialização, processos de produção e, até mesmo, novas definições de identidade individual.

É importante ressaltar que, diante de um mundo globalizado, ao serem apresentados múltiplos desafios para o homem, “[...] a educação surge como uma utopia necessária (sic) indispensável à humanidade na sua construção da paz, da liberdade, (sic) e da justiça social” (Brasil, 2000, p. 13). Miskulin comenta que,

> No âmbito educacional, a globalização pressupõe uma nova formação do indivíduo, uma formação que considere os avanços da tecnologia, possibilitando a sua plena inserção na sociedade, como um ser crítico, consciente e livre (MISKULIN, 1999, p. 41).

A autora recorre a D’Ambrósio (1997), a fim de inferir como a Educação pode contribuir com uma sociedade mais justa e igualitária, retratando as inúmeras possibilidades no caráter formativo do jovem, advindo de informações e, mais especificamente, de novos modos de pensamento e expressão. Disso decorre a sua concepção de que

> A educação multicultural é a direção necessária que deve tomar o processo educativo para fazer face à complexidade de um mundo que se globaliza num ritmo crescente. O grande objetivo é evitar que o processo de globalização conduza a uma homogeneização, cujo resultado é a submissão e mesmo a extinção de várias expressões culturais. Assim como a biodiversidade é essencial para a continuidade da vida, a diversidade cultural é essencial para a evolução do potencial criativo de toda a humanidade. Novos modos de pensamento e de expressão só podem resultar de uma dinâmica de encontros culturais (D'AMBRÓSIO, apud MISKULIN, 1999, p.44 – grifos da autora).

. Ainda para Miskulin,

> [...] a Educação, em um mundo globalizado, com a diversidade cultural oferecendo inúmeras possibilidades aos jovens, deve propiciar uma formação diferente da convencional, uma formação que proporcione ao sujeito escolher e disseminar aspectos significativos e importantes para a sua vida, diante de uma infinidade de informações; pensar criticamente, à frente de situações que exijam tomadas de decisões; conscientizar-se diante de problemas e fatos imprescindíveis para o seu desenvolvimento, tanto cognitivo, quanto afetivo, enfim, desenvolver o seu potencial criativo, integrando-se de maneira plena na sociedade em que vive (MISKULIN,1999, p.44).

Então, Sociedade, Educação e Tecnologia não significam apenas se estar diante de um cenário de inter-relações que se estabelecem, Mais que isso: é entender um momento em que se coloca a criatividade norteada por cidadãos cultos e livres. Nele, "[...] concebe-se a criatividade como o processo psicoemocional da geração de conhecimento" (Miskulin,1999, p.45). O que se busca é entender como se processam essas questões.

A referida autora fala "[...] sobre a importância das novas tecnologias na sociedade e na Educação" (Idem. Ibidem). Por ocasião de um Congresso em Lisboa, ocorrido em outubro de 1994 e registrado nos *Anais do II Congresso Ibero- - americano de Informática na Educação*, confere-nos algumas reflexões, em se tratando do uso de tecnologias na Educação, incorporadas pelas TICs. Ela manifesta uma atenção especial para essa relação e, como consequência, ressalta que

> [...] a Informática, através das manifestações no campo das tecnologias de processamento da informação e da comunicação, tem assumido um espaço cada vez maior e mais sólido, nas mais diversas atividades humanas, infiltrando-se nos vários segmentos da sociedade. A sua crescente disseminação provoca problemas de ordem profissional e transforma as concepções mais diversas sobre o exercício da cidadania, conduzindo o indivíduo a dúvidas e incertezas a respeito do próprio significado do saber (MISKULIN, 1999, p.46).

Como se observa, ao discutir questões, dúvidas e incertezas provenientes desse novo paradigma, em nosso entendimento, a escola passa a lidar com novos desafios, que não são somente aqueles referentes às discussões sobre ensino e aprendizagem. Mas, incluem aqueles que dizem respeito às garantias ao cidadão para conviver em um ambiente informatizado, adequando-se à globalização e, a suas implicações, com vistas ao seu desenvolvimento.

Dessa maneira, enfatiza que as TICs exercem um papel decisivo de mudança na escola e, na sociedade como um todo. De fato, no ensino da Matemática, também viabilizam um ambiente de trocas e de interações sociais. Isso porque a escola representa um lugar da exploração de culturas, de realização de projetos, de investigação e debate. Ou seja, ela desempenha um papel importantíssimo, que é o de interação social, que "é o elemento fundamental da construção do conhecimento e na definição das identidades sociais e individuais" (Almeida, 2000, p. 75).

3.2. Tecnologias da Informação e Comunicação: o computador

Muitos são os questionamentos sobre o fato de o uso do computador representar ou não uma das soluções para os problemas da Educação, principalmente quando estamos tratando do ensino da Matemática e de suas tecnologias, tanto por parte dos alunos e/ou por parte dos professores, ou mesmo, por parte da sociedade. Contudo, é preciso compreender qual a finalidade que se deve dar a todo e qualquer recurso midiático. Para Allevato,

> Ao empreender atividades de ensino com o computador, é preciso tentar compreender o papel desse recurso nos ambientes em que se insere e qual é sua relação com a atividade que será realizada com sua mediação. Assim, para utilizar eficientemente o computador para aprender (ou ensinar) Matemática, os alunos (e o professor) precisam ter conhecimento do que estão fazendo ou pretendem que o computador faça. Eles precisam saber Matemática embora, muitas vezes, uma matemática diferente da que era necessária quando da ausência dos computadores nos ambientes de ensino (ALLEVATO, 2005, p.2).

Um dos aspectos que devem ser considerados com o uso do computador trata de práticas que valorizem a formação de imagens do objeto matemático. Embora se trabalhe com ele, estamos inseridos numa imensidão de tecnologias que constantemente mudam. Há também certos conceitos matemáticos que precisam ser adaptados às novas perspectivas tecnológicas.

Por exemplo, no que se refere à *visualização*,

> [...] embora seja um processo bastante privilegiado pelo ambiente computacional, é, muitas vezes, menosprezado dentro da Educação Matemática. Os episódios apresentados pelos autores evidenciam, entre outros elementos, o pensamento matemático das estudantes em relação a esse processo. Em alguns deles foram percebidos conflitos entre o conceito de derivada da função e a reta tangente ao gráfico da função, e os relatos e análises dos episódios sugerem que a abordagem visual proporcionada pelo computador não era natural para as alunas. Elas recorriam, com frequência, ao lápis e papel para resolver tais conflitos. Entretanto, as imagens fornecidas pelo computador permitiram questionar suas concepções e, a partir daí, foi possível pensar nos conceitos de maneira mais ampla. Na realidade, o computador privilegia o pensamento visual sem contudo eliminar o algébrico (BORBA, VILLA REAL, apud ALLEVATO, 2005 p.3).

Cabe ressaltar que, além dos aspectos visuais, estamos diante de aspectos tangíveis, ou seja, daqueles em que o aluno pode experimentar o enfoque de informações advindas do computador. Antigamente o enfoque era puramente experimental, demandando muito mais tempo para sua análise. Hodiernamente, para a construção de um gráfico com lápis e papel, ou tabelas, o aluno pode conjecturar a respeito de tabelas e gráficos complexos gerados com a ajuda do computador de um modo mais eficiente, com sua visualização em um tempo bem menor.

Como se constata, "[...] o enfoque experimental explora ao máximo as possibilidades de rápido *feedback* das mídias informáticas e a facilidade de geração de inúmeros gráficos, tabelas e expressões algébricas" (Borba e Penteado, 2001, p. 43). Sobre essa possibilidade, Allevato esclarece que

> A partir da investigação e da experimentação, os alunos formulam, reformulam e rejeitam hipóteses; lançam novas questões e apresentam dúvidas em contextos não previstos pelo professor e que não surgiriam em outro ambiente. As explorações implementadas conduzem-se, por vezes, por caminhos inesperados, configurando uma forma de aprender e pensar como "rede", tornando possível estabelecer conexões e novas relações de significados na aprendizagem (ALLEVATO 2005, p.4).

Mas, não podemos nos esquecer de que a utilização de ambientes de aprendizagem por ocasião da utilização do computador pode trazer-nos alguma surpresa do ponto de vista do entendimento, por parte dos envolvidos nas atividades matemáticas, seja com a aplicação de um *software* ou, na execução de tarefas que são propostas em sala de aula.

3.3. Tecnologias da Informação e Comunicação: Ambiente Computacional de Aprendizagem

Segundo Miskulin, o ambiente computacional “pressupõe a utilização de recursos computacionais, como softwares, câmara digital, scanner, entre outros, embasados por uma filosofia educacional” (Miskulin, 1998, p. 87). A autora descreve a importância existente entre professores e alunos e as mídias, elementos centrais nesse ambiente, pois, por si só, não seria pleno para a aprendizagem, uma vez que dependeria de uma interação entre esses “atores”: professor, aluno e o ambiente, como parte da construção do conhecimento.

Para ela,

> O ambiente, por mais rico e construtivo que seja, por si só, não é suficiente para promover contextos propícios para a construção do conhecimento. Nesse sentido, a mediação do professor desempenha um papel determinante, na medida em que o professor cria as situações desafiantes; recorta esta situação em vários problemas intermediários que possibilitam aos alunos deslocarem-se muitas vezes do problema principal, olhando-o e percebendo-o, sob uma outra perspectiva, possibilitando-lhe a busca de novos caminhos, e a reavaliação constante de suas estratégias e objetivos, enfim, envolvendo-se, cada vez mais, no processo de construção do conhecimento (MISKULIN, 1999, p.88 – grifo nosso).

Em uma perspectiva ainda mais consistente sobre o ambiente computacional, relata que a utilização de *softwares* como ferramentas de simulação de ensino é oportuna. Pois permite que os “atores” envolvidos nesse processo processem entradas, planejem ações, analisem problemas, tomem decisões. Também ressalta que esses

> Ambientes de simulação são ativos e, estudantes, nesses ambientes, envolvem-se em simular fenômenos reais e imaginários. Eles podem processar entradas, variáveis, planejar ações, analisar problemas, tomar decisões, monitorar os progressos e coordenar seus esforços para alcançarem os objetivos delineados (MISKULIN, 1999, p.88).

Então, é importante que se enfatize o processo de envolvimento do usuário nesses ambientes, pois, nesse contexto, estabelece-se a construção do conhecimento. Ou seja, a ênfase está no construto, o que é difundido por diversos pesquisadores, que

> [...] postulam que os “elementos participatórios”, no processo de resolução e interação dos estudantes nos ambientes de simulação, têm sido liderados por proponentes de diferentes perspectivas teóricas, tais como, John

> Dewey, Jean Piaget, Jerome Bruner, e Lev Vygotsky. Segundo as palavras de Maddux et al., esses teóricos, em suas teorias, concordam que "<u>envolvimento no processo de aprendizagem é crucial para o sucesso</u> (MADDUX, et al. apud MISKULIN, 1999, p.88 – grifo nosso).

Nesse contexto, há evidências de que o computador pode contribuir nesse processo de contração e, no de aprendizagem. Entendemos que o norte dado a essa perspectiva é fundamental para a aprendizagem do aluno. Vale ressaltar que o computador é tratado nessa pesquisa como elemento potencial e como mediador da construção desse conhecimento.

Para Ponte, ele,

> [...] pelas suas potencialidades de cálculo, visualização, modelação e geração de micro-mundos (sic) é um dos instrumentos mais poderosos que os educadores matemáticos dispõem para proporcionar experiências que estimulem o gosto e o prazer da criação matemática aos nossos alunos (PONTE, 2006, p. 56).

Para nós, esse ambiente computacional encontra-se em outro ambiente que, em nosso entendimento, e, nesta pesquisa, é a própria escola. Para Ponte, ele "[...] pode passar a ser um lugar da exploração de culturas, de realização de projetos, de investigação e debate" (Ponte, 2000, p.57). Evidentemente que concordamos com o autor, considerando que a escola, como espaço de interação social, não poderia deixar de ser de interação de tecnologias e, consequentemente, de exploração do ambiente de geração de micro-mundos, mediado pelo ambiente computacional. Na próxima seção, teceremos algumas reflexões a respeito dos desafios enfrentados quando da utilização desse ambiente.

3.4. Tecnologias da Informação e de Comunicação: as potencialidades do computador e a Informática na Educação Matemática

Indubitavelmente, a utilização do computador e as potencialidades advindas dessa ferramenta implicam um repensar nas formas de aprender e de ensinar. Refere-se mesmo a "[...] uma inteligência distribuída por toda parte, incessantemente, valorizada, coordenada em tempo real, que resulta em uma mobilização efetiva das competências" (Lévy, 1998, p. 28).

Na verdade, quando o autor está fazendo referência à máquina (computador), conectada à rede mundial de computadores: a Internet. Desse fato resulta o impacto que o computador e a Rede podem provocar nas potencialidades de aprendizado e, principalmente, no se repensar as formas de se aprender. Cabe ressaltar que, pela análise desse autor, ao refletir sobre o impacto do computador e da internet na vida dos seres humanos, disso resulta uma Inteligência coletiva, o que Borba e Penteado (2010) chamam de seres--humanos-com-mídias-pensante.

Ao se referir sobre as possibilidades que o computador pode promover na Educação, é possível se pensar em três categorias: um "[...] meio para representar e construir novos conhecimentos, para buscar e acessar informação e para se comunicar com outras pessoas, ou estabelecer relações de cooperação na resolução de problemas" (Almeida, 2003, p. 3). Diante disso, enfatiza-se que "[...] conhecimento é o que cada indivíduo constroi como produto do processamento, da interpretação, da compreensão da informação" (Idem. Ibidem).

Para Lima, igualmente, o computador favorece que o aluno insira-se na sociedade, contribuindo com suas tarefas investigativas, de forma que a

> [...] a dinamicidade desse instrumento pode ser utilizada para que os alunos trabalhem como se fossem pesquisadores, investigando os problemas matemáticos propostos pelo professor e construindo soluções, ao invés de esperarem um modelo a ser seguido. (LIMA, 2009, p. 36).

Contudo, há falta de articulação dessa máquina, no contexto escolar, e sem um devido planejamento,

> O computador vem chegando a (sic) escola através de contextos e objetivos diferenciados, ou seja, ora para servir de instrumento de apoio aos trabalhos burocráticos, ora para ministrar cursos de informática, ora para pesquisas individualizadas, dentre outros (SOUZA, 2001, p. 68).

De diferentes formas, o computador tem chegado à escola. Eis algumas delas:

> - A Informática na Educação corresponde ao uso do computador através de softwares de apoio e suporte à educação como tutoriais, livros multimídias,

> buscas na internet e o uso de outros aplicativos, em geral. Nesse estágio, geralmente o aluno vai ao laboratório para aula de reforço ou para praticar atividades de Informática Básica que, na maioria das vezes, não apresentam nenhum vínculo com os conhecimentos trabalhados em sala de aula;
> - A Informática Educacional indica o uso do computador como ferramenta auxiliar na resolução de problemas. Nesse estágio, as atividades desenvolvidas no laboratório são resultantes ou interligadas a projetos. Os alunos podem fazer uso dos recursos informáticos disponíveis. Aqui, eles executam as atividades, trabalhando sozinhos no computador ou com o auxílio de um professor ou monitor de informática. Assim, por mais bem planejadas que sejam as atividades geradas pelos projetos, a aprendizagem dos conteúdos acaba não se processando de maneira ideal, pois não há intervenções do professor especialista (Português, Matemática, História, etc.) para conduzir a aprendizagem. (BIRGES NETO, apud ARAÚJO, 2011, p.27).

Logo, são diversas as possiblidades de utilização da Informática Educativa. De fato, elas contribuem com esta pesquisa, pois nos coloca à disposição modelos significativos no processo de construção do conhecimento. Por outro lado, a utilização dessa ferramenta como instrumento pedagógico constitui-se um desafio, e, dentro dessas perspectivas,

> para inserir o computador em seu ambiente, na perspectiva dada acima, a escola terá de repensar toda sua estrutura e, de maneira inequívoca, terá de buscar novos paradigmas educacionais o que, convenhamos, não é uma tarefa tão simples assim uma vez que os sujeitos envolvidos no trabalho de sala de aula vêm de uma cultura tradicional de ensino (ARAÚJO, 2011, p.28).

3.5. Tecnologias de Informação e da Comunicação: o Software Matemático

Para Meira (1998), mais importante que o *Software*, em si, é o modo como ele será utilizado, pois nenhum *software* é, em termos absolutos, um bom *software*. Acrescentamos à fala do autor que a escolha de *softwares* deve-se estar fundamentada na proposta pedagógica da escola.

Na proposta construtivista, por exemplo, eles baseiam-se na aprendizagem interativa. Nela, o aluno é o centro do processo ensino-aprendizagem, tornando-se um ser ativo no processo. O conhecimento atual do educando e suas características para o aprendizado é levado em consideração. Mas, no ambiente educacional,

> [...] para que um *software* promova realmente a aprendizagem, deve estar integrado ao currículo e às atividades de sala de aula, estar relacionado àquilo que o aluno já sabe e ser bem explorado pelo professor. O computador não atua diretamente sobre os processos de aprendizagem, mas apenas fornece ao aluno um ambiente simbólico, onde este pode

> raciocinar ou elaborar conceitos e estruturas mentais, derivando novas descobertas daquilo que já sabia (BONILA, 1995, p. 68).
>
> .

Isto evidencia que é possível trabalhar numa linha construtivista de aprendizagem utilizando recursos da tecnologia de informação, isto é, o conhecimento matemático é empregado na produção de um *software* também de cunho matemático. Os *softwares* matemáticos sempre estão em evidência em um mundo globalizado e regido por novas tecnologias, como defendem Javaroni (2007), Araújo (2007) e Soares (2009). Como relatam esses pesquisadores, cada vez mais se está investindo em material didático tecnológico voltado para o ensino e a aprendizagem nos Ensino Fundamental, Médio e Superior.

Contudo, não existe, ainda, entre os pesquisadores, um consenso quanto a sua eficácia na Educação, tendo em vista que, para alguns deles, é necessário que o aluno conheça a premissa básica do algoritmo, que será, por exemplo, utilizado matematicamente.

Para Borba (2010), no que se refere ao uso de *softwares* educacionais, eles têm a capacidade de realçar o componente visual da Matemática, atribuindo um papel importante à visualização da Educação Matemática. Pois se alcança uma nova dimensão ao ambiente de aprendizagem, onde alunos, professores, mídia e conteúdos matemáticos residem juntos. Mais que isso: pensam juntos. Segundo o autor, os ambientes computacionais condicionam as ações quando se tem que resolver uma atividade ou um problema matemático. Quanto ao uso dos *softwares*, diferentes estratégias são utilizadas, em complemento ao uso do lápis e papel. O autor destaca, principalmente, o *feedback* proporcionado ao usuário.

De acordo com Borba e Villarreal (2005), o principal *feedback* dado pelos *softwares* se refere ao aspecto visual. Com um *software* gráfico, como o Winplot 4, por exemplo, os estudantes podem inserir uma função e gerar um gráfico que apresenta o seu comportamento. Mediante um processo experimental-com--tecnologia, o aluno poderá variar os parâmetros, analisar tal comportamento e confrontar com a representação algébrica. São destacados aspectos positivos envolvendo o uso do computador e de *softwares educacionais*, apesar de alguns desafios, que precisam ser superados.

Nesse ínterim, Zanette ressalta que,

> [...] o fato de esses *softwares* possibilitarem a efetivação de cálculos com precisão e rapidez tem provocado questionamentos sobre a adequação de uso no processo ensino e aprendizagem com estudantes do Ensino Fundamental e Médio. Muitos professores consideram importante que os alunos conheçam os algoritmos e saibam calcular manualmente, antes de usarem a calculadora e/ou computador. Isso manifesta a necessidade de um (re) pensar e de uma mudança metodológica de uso, com ênfase para a prática de resolução de problemas e estimativas, quando se trata da área de cálculo (ZANETTE, 2000, p.23).

Entretanto, numa visão mais otimista, em nosso entender, o computador e o *software* podem moldar a maneira como o conhecimento matemático é produzido. Como afirmam Borba e Penteado (2010), o computador sozinho nada tem a acrescentar, mas, os computadores com homens, esses sim, são os atores que se estabelecem para possibilitar o ensino e a aprendizagem, muito embora possua seus riscos. Em detrimento disso, acreditamos na eficácia da utilização das TICs no ambiente educacional, razão pela qual se propõe nesta pesquisa o uso do *Software TFA* para o ensino/aprendizagem do Teorema Fundamental de Álgebra (TFA).

Capítulo 4

Metodologia da Pesquisa Científica

Este trabalho visa investigar e identificar a relação existente entre o ensino e a aprendizagem do Teorema Fundamental da Álgebra (TFA), a partir do uso de Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs), com a aplicação do *software TFA*. Submeteram-se à pesquisa de campo alguns alunos do 3º ano do Ensino Médio, de uma escola militar.

Em face aos procedimentos metodológicos, foi preciso colher dados a partir de questionário e desenvolver atividades investigativas, respectivamente, para que fosse possível identificar e compreender o ensino e a aprendizagem do TFA, da melhor forma. Os estudos de Bogdan e Biklen (1994) contribuíram para a constituição de uma metodologia qualitativa, mediante a qual se prima pelas ações dos Sujeitos da Pesquisa.

4.1. Objetivos da Pesquisa

- Investigar, identificar e analisar o uso de Tecnologia da Comunicação e Informação (TICs) no estudo do Teorema Fundamental da Álgebra (TFA), no Ensino Médio (EM).
- Elaborar e delinear atividades investigativas utilizando as TICs, no estudo dos Polinômios, no que concerne ao conceito de Pontos, Círculos e Curvas de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$.
- Desenvolver atividades com alunos do 3º ano do Ensino Médio, de uma escola militar.

4.1.1. Problema da Pesquisa

No Ensino Médio, seria possível identificar a aprendizagem do TFA, partindo da exploração de pontos, círculos e curvas, pelos polinômios de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, norteados pelas TICs?

4.1.2. Lócus da Pesquisa

A pesquisa de campo foi realizada em uma escola militar, no estado do Rio de Janeiro, município de Angra dos Reis, sul do estado do Rio. Fora iniciada no segundo semestre de 2012, finalizando-se nesse mesmo semestre. Foi desenvolvida em, pelo menos, 4 (quatro) encontros, um por semana, no Grêmio de Matemática da referida escola, das 19h às 21h, sempre às terças-feiras, tendo como Sujeitos da Pesquisa 5 (cinco) discentes do 3º ano do Ensino Médio.

A escola militar possui 63 anos de existência e, aproximadamente, 200 (duzentos) alunos por série. Seu corpo docente é composto por 50 (cinquenta) professores, entre civis e militares. Cerca de 40% dos professores efetivos possuem Mestrado e/ou Doutorado; 20% são Especialistas e 40% são Mestrandos e/ou Doutorandos.

Embora seja uma escola militar, é regida tanto pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB, Lei 9394/96) quanto por uma legislação militar. O ingresso nela se dá por concurso público de alto nível, estando os candidatos compreendidos na faixa etária de 15 (quinze) a 18 (dezoito) anos incompletos, por ocasião da admissão no 1º (primeiro) ano do Ensino Médio.

Os alunos são submetidos a um regime de internato, tendo aulas em horário integral, de segunda a sexta-feira, apenas com liberação nos finais de semana. Ao chegarem ao 3º ano, já dominam conteúdos constantes da Matemática Básica, ocasião na qual se iniciam os estudos sobre Cálculo Diferencial e Integral de uma Variável, Álgebra Moderna e Álgebra Linear. Em Álgebra, abordagem denominada nessa instituição de MAT II, os alunos estudam os Polinômios, conteúdo que é explorado nas atividades investigativas desta pesquisa.

Atualmente a escola dispõe de 2 (dois) laboratórios de Informática, possuindo também 1 (um) quadro interativo, 1 (uma) biblioteca e computadores com acesso à Internet. Em todas as salas de aula, há computador e Data-show, 1 (um) auditório para 1000 (mil) pessoas e 1 (um) hospital de pequeno porte, que também oferece tratamento odontológico. Além disso, dispõe de um espaço amplo para a prática de esporte em quase todas as modalidades desportivas.

Cabe salientar que todos os Sujeitos da Pesquisa foram alunos do pesquisador na disciplina Cálculo Diferencial e Integral. Foi quando foram convidados para participar deste trabalho, sendo informados quanto aos objetivos e processos a serem executados.

4.1.3 Considerações iniciais do processo da pesquisa

Inicialmente, estabelecemos um diálogo informal com os prováveis participantes da pesquisa sobre os objetivos e as finalidades de se utilizar o computador e um ***software*** para o estudo de Polinômios. Esse encontro foi realizado durante os intervalos de aula.

Houve uma reação positiva nos alunos em participarem de uma pesquisa, numa quantidade bem expressiva, pois, aproximadamente uns 50 (cinquenta) alunos se interessaram pelo projeto. Porém, muitos ainda estavam em processo de avaliação escrita na instituição, outros, em fase de recuperação, o que inviabilizaria a participação nos encontros.

Um dos fatores preponderantes, além da exiguidade de duração de um curso de Mestrado, residiu nessa escassez de tempo por parte dos Sujeitos da Pesquisa. Também foram levadas em conta as dificuldades advindas de se ter um maior número de participantes, o que poderia nos levar a perder o foco da investigação.

Nesse caso, não necessariamente se teria de contar com todos os voluntários, porque, em se tratando de uma pesquisa qualitativa, “[...] a investigação qualitativa é descritiva; os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos” (BOGDAN e BIKLEN, 1994, p.47-51), o que atende ao objetivo desta pesquisa. Houve todo um cuidado, durante o diálogo preliminar, de não influenciar os Sujeitos da Pesquisa com crenças e concepções a respeito do tema. Apenas foram estimulados a participar da pesquisa de forma voluntária.

Nossa preocupação baseou-se em primar pela lisura nas ações e pela condução da pesquisa, pois, segundo Ferreira, existe

> a possibilidade de as crenças dos alunos se aproximarem das do professor por um motivo meramente sistêmico, ou seja, o aluno procura pensar como o professor, porque isso garante a ele uma chance grande de passar na prova. Mas não podemos negar que, até mesmo por esse motivo as convicções do estudante têm forte influência dos professores por sua vida acadêmica (FERREIRA, 2009, p. 126).

Também por isso, teve-se o cuidado de garantir que a participação deles seria voluntária, com base nos termos do Comitê de Ética da Universidade Federal de Juiz de Fora – MG. Primeiramente, fez-se um primeiro encontro, de cunho formal, no período em que os Sujeitos da Pesquisa já haviam feito a última prova anual, estando aprovados na disciplina Matemática.

Dissemos que todo o processo ocorreria conforme cronograma previamente acordado com os discentes e com a instituição, a fim de não interromper os procedimentos militares a que estavam submetidos. Contudo, combinamos a possibilidade de o cronograma ser flexível, caso houvesse problemas para se efetivar a pesquisa nas datas determinadas, por exemplo, se algum participante precisasse se ausentar ou, alguma ordem fosse expedida para que se ausentassem nas datas determinadas.

Não houve objeção da instituição e dos envolvidos no processo da pesquisa. O pesquisador, por ocasião de sua fala informal, verificou que também não houve intervenção ou perguntas preliminares sobre o que efetivamente seria executado nos encontros, de maneira que suas informações esclarecedoras foram muito bem recebidas pelos voluntários. E, em um segundo momento, por conta do primeiro encontro ter sido formal, disponibilizou-se para os participantes, por escrito e no quadro interativo, a questão norteadora da pesquisa: ***É possível, no Ensino Médio, identificar a aprendizagem do TFA partindo da exploração dos conceitos de Pontos, Círculos e Curvas pelos polinômios de*** $\mathbb{R}^2$ ***em*** $\mathbb{R}^2$ ***norteados pelas TICs?***

Especificamos os objetivos propostos aos Sujeitos da Pesquisa, dizendo-lhes que retomariam o estudo de Polinômios sob o ponto de vista de Pontos, Círculos e Curvas no $\mathbb{R}^2$ ***em*** $\mathbb{R}^2$. Esclarecemos que não haveria obrigatoriedade de participação e que não haveria riscos (sociais, morais ou financeiros), por ocasião de suas participações na pesquisa. Além disso, que suas identidades seriam preservadas.

Primamos pela ética. Daí decidirmos designar os participantes pelos pseudônimos: Aluno A, Aluno B, Aluno C, Aluno D e Aluno E, conforme sugerem Fiorentin e Loenzato (2006) e Santos-Wagner (2008). Ressaltamos que todos eles haviam concordado que suas opiniões e as informações decorrentes da pesquisa fossem divulgadas.

O pesquisador sabia, embora não fosse o titular da disciplina Álgebra, que os Sujeitos da Pesquisa já detinham algum conhecimento acerca de Polinômios e da linguagem de programação, os quais faziam parte da ementa curricular da instituição. Esse conhecimento prévio, de fato, seria de grande importância para a investigação do problema desta pesquisa. Em contato com a professora da referida disciplina, obteve a informação de que ela não utilizava quaisquer *softwares* para a condução no ensino de Polinômios em suas aulas. Dessa forma, como o ensino desse conceito matemático residia apenas no campo teórico, encontramos um campo fértil para a aplicação das TICs e, mais especificamente, para o uso do *software TFA*, como ferramenta de ensino e de aprendizagem do Teorema Fundamental da Álgebra (TFA).

Sendo assim, sentimo-nos à vontade e desejos para proceder à pesquisa com a aplicação das TICs a contento. Percebemos a boa receptividade dos Sujeitos da Pesquisa, como se observa em suas falas, no capítulo 5.

4.2. Metodologia da Pesquisa

Essa pesquisa seguiu uma orientação de pesquisa qualitativa, norteada pelas sugestões de Bogdan e Biklen (1994). Esses autores a dividem em 5 (cinco) etapas-princípios: na investigação qualitativa, a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal; a investigação qualitativa é descritiva; os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos; os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma intuitiva; o significado é de importância vital na abordagem qualitativa.

Borba e Araújo já enfatizam que as “pesquisas que utilizam abordagens qualitativas nos fornecem informações mais descritivas, que primam pelo significado dado às ações” (BORBA e ARAÚJO, 2010, p. 24).

4.2.1 Procedimentos Metodológicos

Preparamos um questionário para auxiliar-nos na análise da compreensão do Teorema Fundamental da Álgebra (TFA) pelos Sujeitos da Pesquisa, associado ao uso do computador. Esse questionário teve como finalidade inicial analisar o entendimento deles a respeito do assunto antes mesmo da aplicação do *Software* TFA e, na sequência, estabelecer um eixo de análise após a aplicação das atividades investigativas, as quais estão detalhadas nos capítulos 5 e 6.

Dessa forma, pôde-se investigar a materialização das TICs na condução e na provável compreensão do estudo do TFA pelos alunos do Ensino Médio dessa instituição de ensino. O questionário foi entregue no primeiro encontro formal. Na confecção dele, seguimos as orientações da pesquisa de Leite (2005), no que se refere aos “requisitos para a construção de um questionário com boa qualidade técnica”.

Ferreira (2009) contribuiu com a sugestão de entrevistas semiestruturadas, as quais levam em consideração “questões previamente definidas” que, igualmente, formaram um binômio para a análise e a sedimentação desta pesquisa. De fato, ao oportunizar aos Sujeitos da Pesquisa a análise de suas respostas, seguem-se algumas propostas defendidas por Junior, compreendendo diversos aspectos:

> [...] **Solicitação de cooperação**: é importante motivar o respondente através de uma prévia exposição sobre a entidade que está promovendo a pesquisa e sobre as vantagens que essa pesquisa poderá trazer para a sociedade e, em particular, para o respondente, se for o caso [...] (JUNIOR, 2005, p.36 – grifo nosso)

> [...] I**nstruções**: as instruções apresentadas deverão ser claras e objetivas ao nível de (sic) entendimento do respondente e não somente ao nível de (sic) entendimento do pesquisador [...] (Idem. Ibidem – grifo nosso)

Planejamos e desenvolvemos quatro atividades investigativas, que serão mencionadas, no capítulo 5, mais detalhadamente. Para um maior entendimento dessas atividades, cabe esclarecer que foi necessário enunciar o TFA, o qual no Ensino Médio e, na maioria dos livros didáticos, o aluno, ao estudar esse assunto, tem como notação matemática de Polinômio a expressão matemática, conforme enunciado em Iezzi:

> Dada a sequencia de números complexos $(a_{0,}\, a_1, a_2, \cdots, a_n)$ consideremos a função: $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_n x^n$. A função polinomial f é denominada função polinomial ou polinômio associado à sequencia dada (IEZZI, 2005, p.54).

Dessa forma, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a\, x + a_0$ representa a expressão matemática de f.

Essa informação foi necessária, tendo em vista que o *software TFA* trabalha com variáveis complexas. Em paralelo ao desenvolvimento das atividades, analisamos o conteúdo programático da ementa curricular dessa instituição militar e sugerimos algumas adaptações.

4.2.1.1. Recursos metodológicos e Cronograma da pesquisa

Os recursos utilizados pelos Sujeitos da Pesquisa foram os computadores do laboratório de Informática do colégio, sendo um computador por participante, tendo sido feita, em cada máquina, a instalação do *Software* TFA, por parte do pesquisador. Foram usados também outros recursos: filmadora com áudio, caderno e bloco de notas eletrônicas para registro das informações adjacentes e, das dos Sujeitos da Pesquisa, de modo que nada se perdesse.

Além disso, foi utilizado o quadro interativo, disponível no laboratório de Informática, e um caderno para anotação de informações que se julgasse necessário, para que nenhum dado se perdesse. Também foi adotado um diálogo prévio, concernente ao *software TFA* e, sobre sua instalação no computador, chegando-se à conclusão de que essa foi a melhor forma de iniciarmos as atividades com o *Software* TFA. A partir daí houve uma troca permanente de informações, através de diálogos e avisos técnicos acerca do *Software*.

Ao utilizarmos esses recursos, estávamos conscientes dos prováveis desencontros entre pesquisador e Sujeitos da Pesquisa, em relação à utilização do ambiente computacional de aprendizagem. Isso porque,

> [...] por mais que o professor seja experiente é sempre possível que uma nova combinação de apertar de tecla e comandos leve a uma situação nova que, por vezes, requer um tempo mais longo para a análise e compreensão. (BORBA e PENTEADO, 2010, p.57).

4.2.1.2 Cronograma da pesquisa

Atividade(s)	Conteúdo(s)	Data	Nº de Participantes
Diálogo	Software TFA e Preenchimento do Questionário	16.10.2012	5
1 e 2	Pontos e Polinômios	03.12.2012	4
1 e 2	Círculo e Polinômios	03.12.2012	4
3 e 4	Círculo e Curvas e Polinômios	04.12.2012	5
3 e 4	As raízes do Polinômio	04.12.2012	5

Tabela 03 – Cronograma de Pesquisa de Campo.

Cabe ressaltar que, além desses encontros, para o desenvolvimento das atividades investigativas, procedemos a um encontro no dia 23 de outubro de 2012, em que demos continuidade ao debate sobre o questionário e outros assuntos pertinentes ao Teorema Fundamental da Álgebra (TFA). Esse e outros fatos encontram-se transcritos no capítulo 5.

As atividades desenvolvidas e exploradas foram filmadas e gravadas na instituição de ensino e, com a autorização expressa dos Sujeitos da Pesquisa e/ou de seus responsáveis e da própria instituição. Não houve custos durante o desenvolvimento da pesquisa, mesmo porque, nesse ínterim, foram firmados termos de compromisso entre o pesquisador e a instituição.

Para a consolidação do resultado final, levaram-se em consideração os diálogos e a participação verbal direta ocorrida entre o pesquisador e os Sujeitos da Pesquisa durante a realização das atividades, de forma que foi possível identificar as contribuições para o ensino e a aprendizagem do TFA. Em cada atividade investigativa, tivemos o cuidado de inserir seu objetivo específico, cuja intenção era permitir que os alunos do 3º Ano do Ensino Médio e o pesquisador pudessem interagir de forma colaborativa com os outros participantes e com o *Software TFA*, de modo que, em nossa análise, suas reações e respostas dadas às atividades fossem impactantes do ponto de vista do domínio do TFA. Essa visão está em conformidade com a didática aplicada, nos moldes definidos por Zabala, em que

> um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para realização de certos objetivos educacionais tem um princípio e um fim conhecido tanto pelos professores quanto pelos alunos (ZABALA, 1998, p. 18).

4.3. Pesquisa de Campo

Com o objetivo de responder a nossa questão norteadora do problema da pesquisa e alcançar os objetivos, realizamos 4 (quatro) atividades investigativas, que estão descritas no capítulo 5. Preparamos e conduzimos entrevistas semiestruturadas, as quais são esclarecidas na sequência.

Mas, inicialmente, solicitamos que os Sujeitos da Pesquisa respondessem ao questionário de forma objetiva para que pudéssemos criar um eixo de análise, após as atividades investigativas, quanto ao conhecimento do Teorema Fundamental da Álgebra (TFA). Embora as entrevistas semiestruturadas trabalhem com questões abertas e fechadas, optamos por seguir somente as questões abertas, devido à exiguidade de tempo.

Todavia, cabe uma ressalva: sobre as questões abertas, os autores Boni e Quaresma, apud Ferreira (2009) consideram que também podem ser semelhantes a um diálogo. Esse diálogo foi transcrito, conforme transcrição no capítulo 5. Ao disponibilizarmos o questionário aos discentes e analisá-los detalhadamente, pudemos desenvolver uma reflexão que nos permitiu estabelecer, conforme fora descrito no capítulo 6, uma de nossas categorias.

4.3.1 As entrevistas

As entrevistas realizadas com os sujeitos desta pesquisa seguiu um modelo conhecido como “entrevista semiestruturada”. Essas entrevistas

> [...] combinam perguntas abertas e fechadas, onde o informante tem a possibilidade de discorrer sobre o tema proposto. O pesquisador deve seguir um conjunto de questões previamente definidas, mas ele o faz em um contexto muito semelhante ao de uma conversa informal (BONI e QUARESMA, apud FERREIRA, 2009, p. 63 – grifo nosso).

Baseados nessa definição, procedemos com o desenvolvimento das perguntas para o questionário e, posteriormente, as analisamos, conforme já fora dito, para a análise final de uma de nossas categorias quanto ao ensino e, à aprendizagem do *TFA*. Todo o processo nas atividades investigativas teve como foco o Teorema Fundamental da Álgebra, a partir da manipulação do *Software TFA,* com o uso do computador em sala de aula.

Cabe ressaltar que a conversa informal foi de grande importância na condução das respostas dadas para o questionário *in loco*. Não fizemos intervenções a elas. Apenas esclarecemos alguns pontos do instrumento de investigação, sempre a partir de um diálogo. A seguir, as perguntas do questionário e, conjuntamente, o que pretendíamos com ele.

Tivemos o cuidado de nortear as perguntas com base nas propostas apresentadas em Borba e Penteado (2010), quanto: à experimentação que a abordagem de um tema matemático com o uso do computador permite; à nova ordem de exposição da teoria, contrária ao ensino tradicional vigente, permitindo-se que se inicie pela investigação, para depois se apresentar a teorização.

Cabe ressaltar que as respostas dadas no questionário pelos Sujeitos da Pesquisa estão descritas em nosso primeiro encontro, realizado no dia 16/10/2012.

4.3.2. As perguntas do questionário:

1. A utilização do computador é importante nas suas práticas de estudos? Por quê?

Esta pergunta é direta. Esperávamos que todos respondessem que sim, pois o computador é uma realidade no cotidiano desses alunos. Contudo, o discurso apresentado por trás destas respostas foram fundamentais para as respostas às próximas perguntas.

2. Já ouviu falar em Teorema Fundamental da Álgebra (TFA)? Em que ocasião? Por quê?

É uma pergunta direta, entretanto, houve uma sutileza no uso da expressão “ouviu falar”, pois, nesse caso, esperávamos que os Sujeitos da Pesquisa respondessem que sim, tendo em vista terem estudado a disciplina Álgebra na instituição. Mas, de alguma forma, teriam dificuldades de responder “o porquê”.

3 Em linhas gerais, para que serve um Teorema? Justifique.

Esta pergunta visa oportunizar ao pesquisador saber a questão do conceito de um teorema por parte dos Sujeitos da Pesquisa, pois é comum o aluno se ater mais ao algoritmo, ou seja, a valorizar mais o mecanicismo. Essa pergunta agregou elementos importantes para nossas atividades.

4. Sabe dar um exemplo sobre o TFA? Sabe enunciar o Teorema Fundamental da Álgebra (TFA)? Por quê? Justifique.

Esta pergunta foi a mais importante de nossa pesquisa, pois visava perceber o conhecimento do aluno sobre o objeto norteador (TFA) de nossa pesquisa. Aqui, de alguma forma, as respostas foram evasivas.

5. Já presenciou alguma demonstração do TFA? De que maneira? Por quê?

Esta pergunta foi importante pelo fato de apresentar como o Sujeito da Pesquisa visualizou alguma demonstração do TFA, pois acreditávamos que, para essa pergunta, as respostas fossem negativas, ou seja, que não tivessem presenciado à demonstração alguma.

6. Já utilizou algum software para o entendimento do TFA? Qual? Em que ocasião? Se a resposta for não, então, em sua opinião, o software poderia ajudá-lo no entendimento do mesmo? Justifique.

Esta pergunta foi a central de nosso trabalho. Acreditávamos que aqui os Sujeitos da Pesquisa respondessem que não. Por outro lado, a informação fornecida por eles, no que tange à importância de se utilizar o computador, em particular, o Software, como extensão de seus pensamentos, foi igualmente importante.

7. O TFA é um teorema que se encontra nos estudos dos polinômios. Em sua opinião, qual a importância desse teorema para o estudo dos polinômios com a utilização do computador? Por quê? Justifique.

Esta pergunta teve as mesmas intenções que as anteriores. Ela se tornou importante, a partir do momento em que permitiu ao pesquisador perceber a associação do estudo dos Polinômios com o computador, favorecendo a percepção das relações existentes com o TFA. Segundo Borba e Penteado (2010), a Informática pode contribuir cabalmente nas experiências feitas em sala de aula.

8. Saberia dar exemplo de exercício e resolvê-lo indicando a presença do TFA, na resolução do mesmo (sic)? Justifique.

Esta pergunta abre espaço para o Sujeito da Pesquisa se manifestar com exemplos que podem ser agregadores no desenvolvimento das atividades exploratórias.

9. É possível que, com o avanço de tecnologias, o TFA possa ter característica dinâmica, com o uso do computador. Em sua opinião, essa dinâmica, no contexto virtual, seria de que forma? Justifique.

Esta pergunta sugeriu o que Borba e Penteado (2010) referiram-se quando falaram sobre o uso de pedagogias tradicionais em harmonia com novas tecnologias, já que o teórico e o prático são essenciais para a consolidação do conhecimento matemático. Esperávamos que o aluno respondesse que sim. Mas, não saberia responder sobre o contexto virtual do TFA. De qualquer forma, as informações obtidas foram importantes para procedermos com a elaboração das atividades.

No próximo capítulo, há algumas transcrições dos diálogos e das respostas dadas no questionário.

4.3.3. As Atividades Investigativas

Atividade 1 - Pontos no $\mathbb{R}^2$em $\mathbb{R}^2$

MAT II - ÁLGEBRA: NÚMEROS COMPLEXOS E POLINÔMIOS

Projeto: "Tecnologias da Informação e Comunicação no Ensino do TFA"

Professores: Orestes Piermatei Filho e Emerson Tomaz da Costa

1.1. O caso dos pontos no domínio e pontos na imagem: reais puros ou imaginários puros?

OBJETIVO: **Explorar / argumentar / inferir a relação entre os pontos no domínio e imagem pelos polinômios com coeficientes reais e imaginários.**

I) Vamos inserir, respectivamente, os coeficientes de dois polinômios da forma:

$a)$ $P_1(z) = z^2 + 3z + 1$; b) $P_2(z) = iz^2 + 3iz + i$.

a) Ao inserir os coeficientes de P_1 *no software TFA* e ao utilizar o ***comando R em R – Ponto*****,** clicando com o mouse várias vezes na área de trabalho, no plano à esquerda, o que você pode concluir sobre o (s) ponto (s) no plano à direita?

b) Fazendo o mesmo com o polinômio P_2 o que você pode concluir?

c) Ao comparar suas análises em a) e b) atribua um valor inteiro qualquer a z e quais são suas conclusões?

d) Com a utilização do ***comando R em R – Ponto***, o que se observa se tivermos coeficientes reais e imaginários, ao utilizarmos o mouse clicando no domínio várias vezes? Por exemplo: $P(z) = z^2 + 3iz + 1$.

e) Em sua análise, o que considera essencial nessa abordagem, com a utilização desse comando?

1.2 O caso dos pontos imagens: reais ou imaginários?

OBJETIVO: **Explorar / argumentar / inferir a relação entre ponto a ponto pelos polinômios com coeficientes reais e imaginários.**

II) Iremos utilizar o ***comando C em C – Ponto*** e inserir os coeficientes dos polinômios abaixo, respectivamente:

a) $P_1(z) = 10z^2 - 2z + 3$ b) $P_2(z) = 10i\, z^2 - 2iz + 3i$

a) Ao inserirmos os coeficientes do polinômio P_1 e P_2, respectivamente, aparecerão, no plano à esquerda, pontos com cores distintas dos demais, ao clicarmos várias vezes nesse plano. Para você, o que são esses pontos de cores diferentes?

b) Agora, utilizando o mesmo procedimento do item (a) clique, com o mouse, mais próximo ainda dos pontos diferentes. O que acontecerá com os pontos, no plano à direita, em relação à origem do mesmo (sic)? (Sugestão: tente sempre centralizar o sistema de eixos, no ***comando centralizar origem***).

c) Agora, tente clicar com a melhor precisão possível no (s) ponto(s), de cores distintas, no plano à esquerda. O que você analisa, em relação à origem do eixo à direita?

d) Ao analisar as ideias anteriormente investigadas nos itens a, b e c, quais as conclusões que podem ser descritas, em relação aos polinômios?

Atividade 2 –Círculo no $\mathbb{R}^2$em $\mathbb{R}^2$

MAT II - ÁLGEBRA: NÚMEROS COMPLEXOS E POLINÔMIOS

Projeto: "Tecnologias da Informação e Comunicação no Ensino do TFA"

Professores: Orestes Piermatei Filho e Emerson Tomaz da Costa

2.1 O caso da relação entre o círculo e os polinômios

OBJETIVO: **Explorar / argumentar / inferir a relação entre o círculo e os polinômios.**

I) Iremos utilizar o ***comando círculo*** e clicarmos na área de trabalho (plano à esquerda) apenas uma vez.

a) O que você observa?

b) Houve alguma imagem formando-se no plano à esquerda? Justifique.

c) Houve alguma imagem à direita no plano, formando-se? Por quê?

d) Se o grau do polinômio é dado pela ordem de maior expoente do polinômio, com coeficiente não nulo, qual é o grau do polinômio $P(z) = 0$ que não possui coeficientes não nulos? Justifique.

e) Agora, insira zeros aos coeficientes dos polinômios nas janelas do *software*. Utilize o comando ***Círculo***. E clique apenas uma vez no plano à esquerda, na área de trabalho. O que se observa?

f) Podemos dizer que não existiria $P(z) = 0$? Por quê? Justifique.

2.2 O caso do círculo e círculo

OBJETIVO: **Explorar / argumentar / inferir a relação entre o círculo e círculo e/ou curva.**

II) Insira os coeficientes dos polinômios abaixo, respectivamente, e, a seguir, analise e justifique as perguntas abaixo.

$$P_1(z) = 2i\,z^2 + 2z + i \text{ e } P_2(z) = 2z^2 + 2z + 1$$

a) Ao clicar no comando ***Círculo***, vê-se formando um círculo na esquerda e, aparentemente, um círculo à direita, no plano. O que ocorre com a imagem à direita, à medida que o raio do círculo aumenta?

b) Ao clicar no comando-círculo, veem-se aparecer dois pontos no plano, à esquerda. Para você, o que são esses pontos?

d) Agora, com os mesmos polinômios, volte ao ***comando C em C – Ponto*** e clique no plano, à esquerda, próximo onde se observaram os mesmos pontos no item b. O que são esses pontos? Por quê?

e) Com muita atenção e nas mesmas condições dos itens a, b e c acima, utilize o ***comando configurações do círculo***. Abrir-se-á uma janela. Utilize a opção ***pausar o círculo*** antes que o círculo à esquerda passe pelos pontos que aparecem no plano. A figura à direita envolve a origem do plano?

e) À medida que o raio aumenta, o círculo à esquerda deverá dar um número inteiro de voltas em torno da origem. Em sua opinião, por que o número de voltas deve ser um número inteiro?

Atividade 3 – Círculo e Curvas de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$

MAT II - ÁLGEBRA: NÚMEROS COMPLEXOS E POLINÔMIOS

Projeto: "Tecnologias da Informação e Comunicação no Ensino do TFA"

Professores: Orestes Piermatei Filho e Emerson Tomaz da Costa

3.1. O caso da relação entre o círculo e as curvas geradas pelos polinômios

OBJETIVO: **Explorar / argumentar / inferir a relação entre o círculo e as curvas pelos polinômios.**

III) Insira os coeficientes do polinômio

$$P(z) = 3\,z^7 + 3z^6 + 2z^5 + 3z^4 + 2z^2 + 2z + 1$$

nas janelas abaixo do ***comando polinômio***, como fez anteriormente, nas atividades 1 e 2.

a) Ao clicar no comando ***Círculo***, aparecerão sete pontos. À medida que o círculo à esquerda passar pelos pontos, a figura à direita apresenta deformações e passará por onde? Por quê? Justifique.

b) Agora, focalize os pontos gerados pelo polinômio do item "a". Utilize o comando ***C em C – Linha.*** Clique no botão da esquerda do mouse e permaneça com o cursor, no plano, à esquerda, próximo aos pontos focalizados no item "a", e, em seguida, faça um desenho livre . O que você observa no plano da direita, quando a linha passar pelos pontos? Justifique.

c) Quais são as conclusões que podemos tirar, referentes às figuras formadas e, pelo polinômio do item "a" e "b"?

3.2. O caso em que o polinômio pode ter raízes com multiplicidade

OBJETIVO: **Explorar / argumentar / inferir a relação entre o círculo e as multiplicidades de raízes dos polinômios**

IV) Inserir os coeficientes do polinômio e utilizar o comando ***Círculo***

$$P(z) = z^2 - 2z + 1$$

a) Ao adicionar os coeficientes do polinômio, qual a soma encontrada? Nesse caso, quantas vezes a alça no plano, à direita, passará pela origem desse plano? Por quê? Justifique.

b) Agora, insira os coeficientes do polinômio $P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z - 1$. Valem as mesmas propriedades vistas no item "a" para esse polinômio? Justifique.

c) Considere o polinômio $P(z) = z^2 - 3\,z^2 i - 3\,z - i$. Insira os coeficientes desse polinômio. O que se observa agora, comparando com os itens “a” e “b”. Por quê? Justifique.

d) Em quaisquer situações, o que você acha quanto ao comportamento das curvas geradas nos planos, à direita e, à esquerda? As propriedades são mantidas? Por quê? Há rompimento de algum trecho da curva? Justifique.

Atividade 4 – As Raízes do Polinômio

MAT II - ÁLGEBRA: NÚMEROS COMPLEXOS E POLINÔMIOS

Projeto: “Tecnologias da Informação e Comunicação no Ensino do TFA”

Professores: Orestes Piermatei Filho e Emerson Tomaz da Costa

4.1. O caso da relação entre as raízes e as curvas geradas pelos polinômios de coeficientes reais

OBJETIVO: **Explorar / argumentar / inferir a relação entre o círculo e as raízes dos polinômios identificadas pelas deformações de curvas no $\mathbb{R}^2$.**

V) Insira os coeficientes do polinômio de

$$P(z) = z^{10} + z^9 + z^8 + z^7 + z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1.$$

Utilize o comando ***Círculo.***

a) O que podemos dizer, quando o círculo passar pelos pontos do plano, à esquerda: a curva, à direita, irá se deformar, varrendo todo o plano, passando pela origem desse plano? Quem são os pontos do plano que aparecem à direita, em relação ao polinômio? Por quê? Justifique.

b) Com a informação obtida pelo item “a”, é sempre possível dizer que qualquer polinômio de coeficientes reais tem sempre raízes? Por quê? Justifique.

4.2. O caso da relação entre as raízes e as curvas geradas pelos polinômios de coeficientes complexos.

OBJETIVO: **Explorar / argumentar / inferir a relação entre o círculo e as raízes dos polinômios identificadas pelas deformações de curvas no $\mathbb{R}^2$.**

VI) Agora, insira os coeficientes de

$$P(z) = iz^{10} + iz^9 + iz^8 + iz^7 + iz^6 + iz^5 + iz^4 + iz^3 + iz^2 + iz + i.$$

Utilize o comando ***Círculo.***

a) O que podemos revelar quando os polinômios têm coeficientes complexos, ou seja, a curva apresentada no plano, à direita, apresenta-se contínua? Por quê? Justifique.

b) Com a informação obtida pelo item “a”, é sempre possível dizer que qualquer polinômio de coeficientes complexos tem sempre raízes? Por quê? Justifique.

c) As raízes dos polinômios de coeficientes reais e complexos são identificadas sempre? Por quê? Justifique.

4.3. O caso da relação entre as raízes e as curvas geradas pelos polinômios: o caso de deformações de curvas no $\mathbb{R}^2$.

OBJETIVO: **Explorar / argumentar / inferir a relação entre o círculo e as raízes dos polinômios identificadas pelas deformações de curvas no $\mathbb{R}^2$ a partir de atividades exploratórias criadas pelos próprios Sujeitos da Pesquisa.**

Observação: Nos anexos, de 1 a 4, encontram-se, na íntegra, as respostas dadas pelos Sujeitos da pesquisa e a transcrição das atividades investigativas. No capítulo 5, são feitas as transcrições e a análise da interação ocorrida entre os Sujeitos e os recursos metodológicos adotados.

CAPÍTULO 5

Descrevendo e analisando as atividades investigativas no contexto do ensino e da aprendizagem do TFA

Esta pesquisa estabelece conexões com nosso Referencial Teórico e em algumas perspectivas nas pesquisas de Borba e Penteado (2010), Allevato (2005), Miskulin (1999) e Borba e Confrey (1996), em relação à Tecnologia da Informação e Comunicação e a Educação Matemática. Trata-se, em especial, do ensino e da aprendizagem do Teorema Fundamental da Álgebra (TFA). A seguir, será descrito e fundamentado todo o processo das atividades investigativas e dos recursos metodológicos, oriundos da pesquisa de campo, incluindo a elaboração de algumas categorias ou, eixos de análise.

5.1. Os processos das atividades investigativas: sua elaboração e sua execução

Conforme fora mencionado anteriormente, no capítulo 4, realizamos 4 (quatro) atividades investigativas relacionadas ao estudo dos Polinômios, com o objetivo de investigar o ensino e a aprendizagem do Teorema Fundamental da Álgebra (TFA).
As atividades foram, primeiramente, norteadas por discussões e, elaboradas para serem implementadas com o uso do *Software TFA*, nas quais a visualização, a experimentação e o raciocínio fossem explorados, conforme sugere Duval (1995). Desse modo, a TIC em questão foi utilizada como ferramenta na análise dos conceitos de Pontos, Círculos e Curvas de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$.

As atividades investigativas também foram “[...] ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais [...]” (Zabala, 1998, p. 18), de modo que tanto o professor quanto alunos acompanharam e avaliaram o processo. Esse modelo experimental adotado foi proposto por Borba, em que se "[...] explora ao máximo as possibilidades de rápido *feedback* das mídias informáticas e a facilidade de geração de inúmeros gráficos, tabelas e expressões algébricas" (Borba, 2001, p. 43).

Nesta pesquisa, tanto o foco pedagógico como a estratégia para elaborarmos as atividades investigativas permitiram a criação de um elo entre os objetivos estabelecidos e o efetivo desenvolvimento do ensino e da aprendizagem do Teorema Fundamental da Álgebra (TFA) com a utilização das Tecnologias da

Informação e Comunicação (TIC). A premissa seguida foi a descrita por Miskulin (1999), em que o aluno, como indivíduo, em face dos avanços tecnológicos e, de um mundo globalizado, necessita de uma nova formação, a que lhe garanta plena inserção na sociedade, tornando-o um ser crítico, consciente e livre.

Entendendo como elo principal o uso do computador para a realização das atividades investigativas, considerou-se que o

> [...] impacto da tecnologia, cujo instrumento mais relevante é hoje o <u>computador</u>, exigirá do ensino de Matemática um redirecionamento sob uma perspectiva curricular que favoreça o desenvolvimento de habilidades e procedimentos com os quais o indivíduo possa se reconhecer e se orientar nesse mundo do conhecimento em constante movimento (BRASIL, 2000, p.252 – grifo nosso).

Todo esse envolvimento, mediado pelo computador e articulado entre os Sujeitos da Pesquisa, permitiu que todos os envolvidos no processo se manifestassem de forma plena e consciente, em relação ao ensino e, à aprendizagem do TFA. Isso porque, ao se fazer uso do computador como um grande aliado para o desenvolvimento cognitivo dos alunos, a expectativa era viabilizar a realização de novos tipos de atividades e de novas formas de pensar e agir, conforme prescrevem Balacheff e Kaput (1996). Assim aconteceu, pois, mediante a autonomia e as interações com as tecnologias presentes, eles mesmos puderam criar canais de comunicação entre si, aprendendo a pensar de forma livre.

Por outro lado, em alguns momentos, durante a realização das atividades, vimos que o conhecimento nem sempre é produzido somente por humanos, e que o computador, em muitas ocasiões, possibilitou, de fato, que se chegasse aos objetivos esperado. No que se refere ao *software* educacional, houve a exploração do componente matemático, atribuindo-se um papel importante à educação matemática, pois ele proporcionou uma nova dimensão, em se tratando do uso de um ambiente de aprendizagem com computadores como se se estivesse lidando com um ser em particular, coletivo e pensante. Porque alunos-professores e alunos-mídia e os conteúdos matemáticos atuaram conjuntamente.

Observamos, ainda, que o *Software* TFA auxiliou a relação entre as mídias lápis e papel, proporcionando aos alunos a oportunidade de verificar a validade de suas hipóteses. Faremos, a seguir, a descrição e uma análise detalhada de cada uma das 4 (quatro) atividades investigativas realizadas e aplicadas aos alunos do 3º ano do Ensino Médio, de uma escola militar, do sul do Rio de Janeiro, no 2º semestre de 2012. O objetivo é explicitar as perspectivas reveladas pelos participantes desta pesquisa, a partir dos instrumentos que foram adotados para a coleta de dados, levando-se em consideração as observações que foram feitas durante os encontros.

5.1.1. Atividade 1: Pontos no $\mathbb{R}^2$em $\mathbb{R}^2$

Participaram dessa atividade 4 (quatro) Sujeitos da Pesquisa, que foram divididos em 2 (dois) grupos de dois, divisão combinada previamente com o pesquisador. Os sujeitos da Pesquisa foram denominados de Aluno A, Aluno B, Aluno C e Aluno D. A escolha dos grupos se deu de forma aleatória. Todos eles fizeram uso do computador, demonstrando algum conhecimento com a utilização do equipamento na referida atividade. Ela foi subdividida em 2 (duas) questões:

1.1 O caso dos pontos no Domínio e os pontos na Imagem: reais puros ou imaginários puros? Foi estruturada nos seguintes subitens: (a), (b), (c), (d) e (e).

1.2 O caso dos pontos-imagens: reais ou imaginários? Foi estruturada nos seguintes subitens: (a), (b), (c) e (d).

Em 1.1., estabeleceram-se como objetivos explorar / argumentar / inferir a relação entre os pontos no Domínio e na Imagem pelos Polinômios com coeficientes reais e imaginários. Houve também o interesse de avaliar a capacidade de visualização e de argumentação dos Sujeitos da Pesquisa.

Inicialmente, solicitou-se aos Sujeitos da Pesquisa que inserissem, respectivamente, os coeficientes de dois Polinômios da forma $P_1(z) = z^2 + 3z + 1$; e $P_2(z) = iz^2 + 3iz + i$, respectivamente, no *Software TFA*. Na sequência, foi perguntado:

(a) Ao utilizar o ***comando R em R – Ponto***, clicando várias vezes com o *mouse* na área de trabalho, no plano, à esquerda, o que você pode concluir sobre o (s) ponto (s) no plano à direita?

(b) Fazendo o mesmo com o polinômio P_2 o que você pode concluir?

(c) Ao comparar suas análises em (a) e (b), atribua um valor inteiro qualquer a z . Quais são suas conclusões?

(d) Com a utilização do ***comando R em R – Ponto***, o que se observa, se tivermos coeficientes reais e imaginários, ao utilizarmos o *mouse* clicando no domínio várias vezes? Por exemplo: $P(z) = \ z^2 + 3iz + 1$.

(e) Em sua análise, o que considera essencial nessa abordagem, com a utilização desse comando?

Abaixo, representamos uma construção gráfica dos subitens (a), (b), e (d), respectivamente.

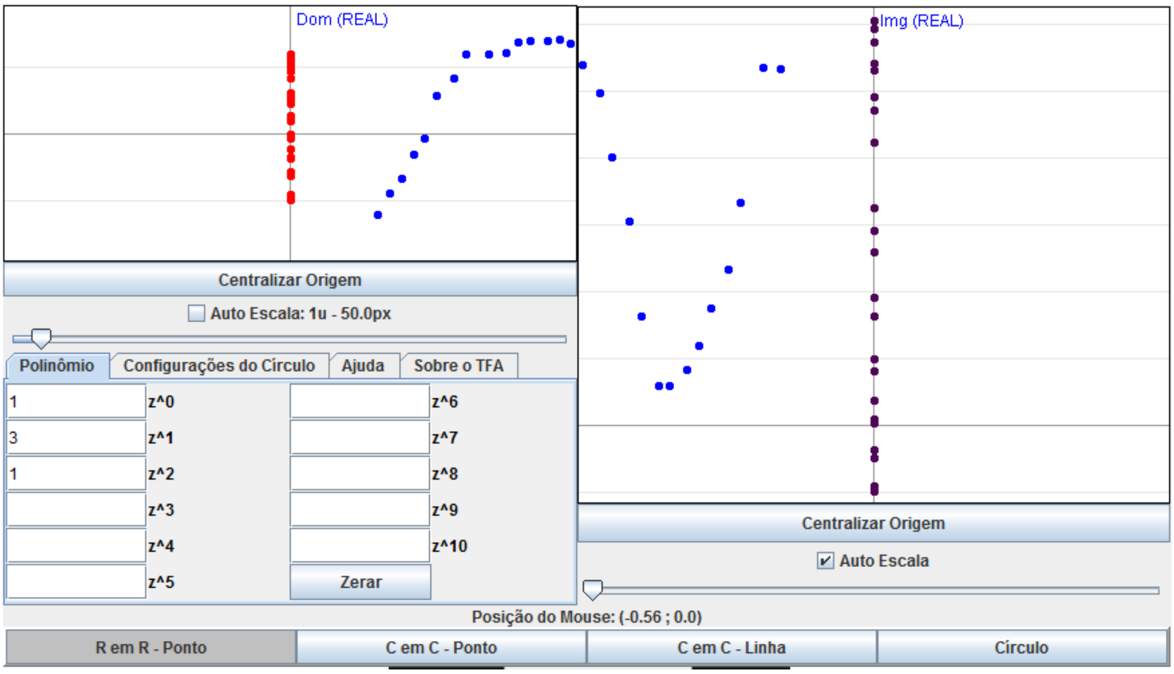

Figura 17: Item 1.1(a) – Construção-Sinopse da Atividade 1.

Os participantes deveriam responder que os pontos formados eram reais. As respostas foram satisfatórias, respondidas exatamente como o pesquisador esperava. Concluiu-se que os Sujeitos da Pesquisa visualizaram, experimentaram e raciocinaram corretamente acerca da posição de pontos reais, pelo *Software*. Vejamos algumas das respostas atribuídas.

> Os pontos no plano à direita são imagens dos pontos clicados no plano, à esquerda. Pelo fato do Domínio ser de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, as imagens, no plano à esquerda, serão sempre reais. (ALUNOS A e B)
>
> Os pontos do plano à direita representam as imagens dos pontos do plano, à esquerda, sempre de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. (ALUNOS C e D)

No subitem 1.1.(b), solicitamos que fizessem os mesmos procedimentos executados no item 1.1. (a). Mas agora, com Polinômios de coeficientes complexos. Esperávamos que respondessem que, embora os coeficientes fossem complexos, por estarmos trabalhando com o Domínio Real, resultaria em zero, no plano, à direita.

As respostas dos Sujeitos da Pesquisa foram satisfatórias, tendo em vista que os Alunos A e B responderam corretamente. Entretanto, os Alunos C e D, embora tenham respondido à questão de forma parcialmente correta, cometeram um equívoco ao afirmarem que as imagens dos pontos do Polinômio de coeficientes complexos não poderiam ter imagens, pelo fato de se estar de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

A capacidade de visualização e análise dos Alunos A e B foram satisfatórias, como se observa a seguir.

> Os pontos do plano, à direita, também são imagens dos pontos clicados no plano, à esquerda. Pelo fato do Domínio ser de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, as imagens no plano, à esquerda, se concentrarão no ponto zero. (ALUNOS A e B)
>
> As imagens do Polinômio P_2 aparecem com valor zero no *Software*, porém elas não podem ser representadas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. (ALUNOS C e D)

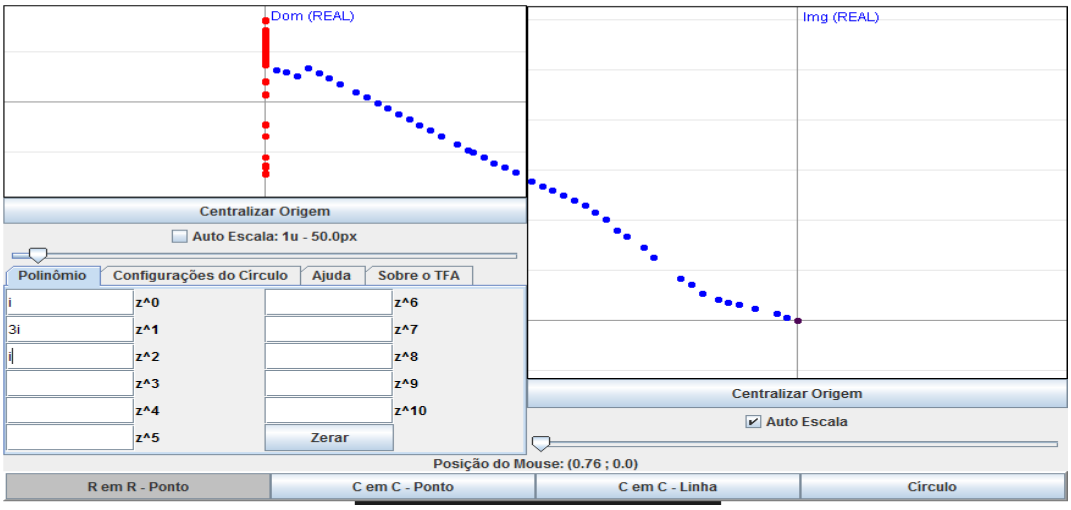

Figura 18: Item 1.1(b) – Construção-Sinopse da Atividade 1.

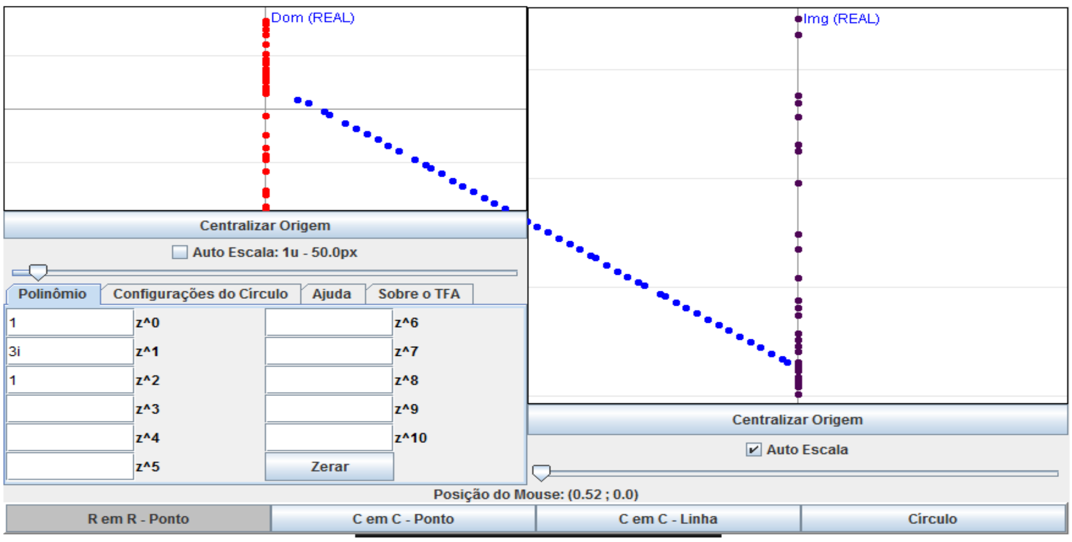

Figura 19: Item 1.1(b) – Construção-Sinopse da Atividade 1.

Esperava-se que os participantes respondessem que, nos itens (a) e (b), respectivamente, para os coeficientes reais, teríamos imagens reais e, para coeficientes imaginários, a imagem seria igual a zero. É importante salientar que mencionamos ***Inteiro*** (Número Inteiro) na atividade, pois o que queríamos também era estimulá-los ao uso, paralelamente, do lápis e papel. Eis as respostas dadas pelos Alunos A e B:

> Atribuindo um valor a z no plano, à esquerda, aparecerá sua imagem no plano, à direita. Porém, como o Domínio é de R em R, se os coeficientes forem todos complexos, a Imagem será igual a zero. (ALUNOS A e B).

Os Alunos C e D não responderam a esse item. A resposta dada pelos Alunos A e B foi satisfatória. Essa atividade foi parcialmente respondida. Contudo, somente as respostas destes atenderam plenamente à capacidade de visualização e argumentação. Sobre o perguntado no item (e), esperávamos que as respostas viessem acompanhadas da capacidade de poder interagir com o *Software*, no que se refere aos atos de visualizar e argumentar acerca das disposições dos eixos coordenados, a partir dos Polinômios. Estas foram as respostas:

> Entender que a parte complexa, tanto no Domínio como na parte Imagem, é ignorada. (ALUNOS A e B)
>
> Pode-se concluir que, mesmo inserindo os Polinômios dos coeficientes imaginários, geram-se apenas Imagens reais, ignorando-se todo o resto. Também não é possível inserir Domínio imaginário ($\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$). (ALUNOS C e D)

No subitem item 1.2, procuramos explorar a visualização e a análise dos Sujeitos da Pesquisa quanto à relação entre ponto e ponto pelos Polinômios com coeficientes reais e imaginários. A distinção das cores entre os pontos e a capacidade de observação dos Sujeitos com o próximo comando. Esta foi a atividade: utilizar o ***comando C em C – Ponto*** e inserir os coeficientes dos Polinômios, respectivamente, $P_1(z) = 10z^2 - 2z + 3$ e $P_2(z) = 10i\,z^2 - 2iz + 3i$. Na sequência, foi perguntado:

(a) Ao inserirmos os coeficientes do polinômio P_1 e P_2, respectivamente, aparecerá no plano, à esquerda, pontos com cores distintas dos demais, ao clicarmos várias vezes nesse plano. Para você, o que são esses pontos de cores diferentes?

Tínhamos em mente que as respostas dadas a esse item seriam plenamente satisfatórias. Os Sujeitos da Pesquisa responderam corretamente a eles. Percebemos a capacidade de visualização e de exploração por parte dos Sujeitos. Vejamos as respostas:

> Os pontos de cores diferentes são as raízes do Polinômio apresentado. (ALUNOS A e B).
>
> Os pontos de cores distintas representam as raízes dos Polinômios P_1 e P_2. (ALUNOS C e D)

A seguir, uma representação da situação gráfica.

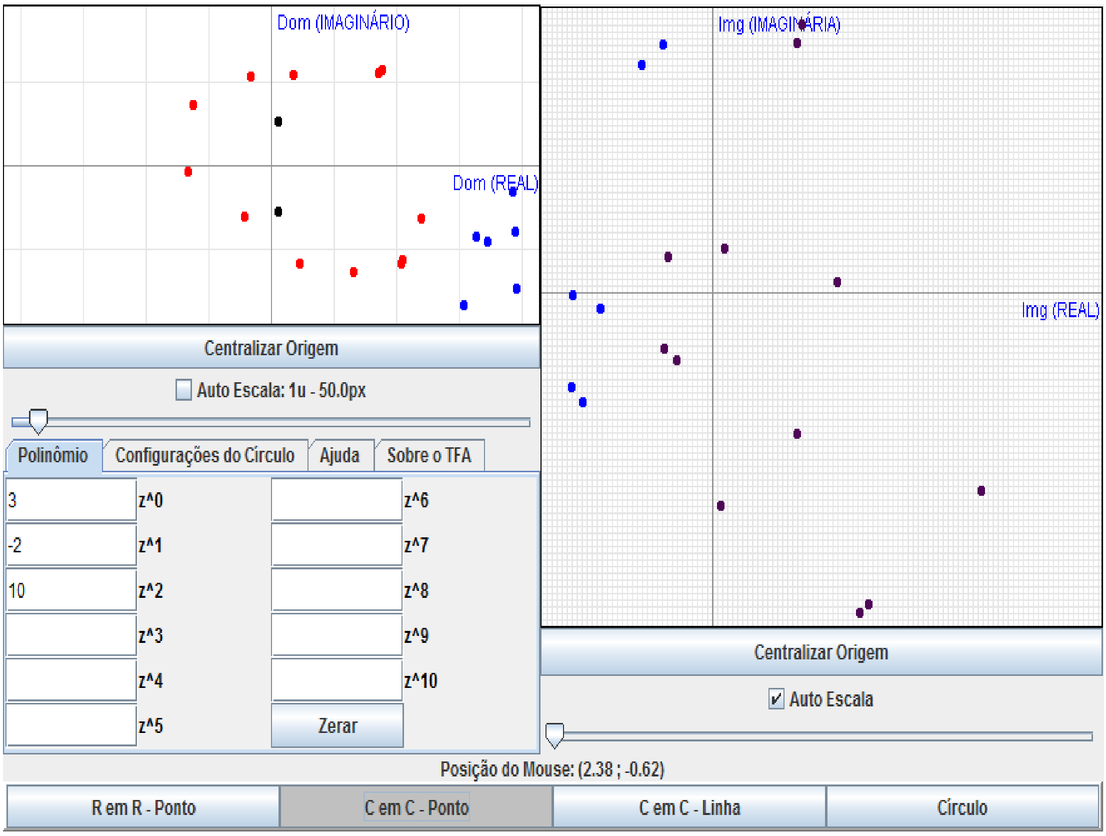

Figura 20: Item 1.1(b) – Construção-Sinopse da Atividade 1.

(b) Agora, utilizando o mesmo procedimento do item (a) clique, com o *mouse*, mais próximo ainda dos pontos diferentes. O que acontecerá com os pontos no plano, à direita, em relação à origem do plano? (Sugestão: tente sempre centralizar o sistema de eixos, no ***comando centralizar origem***).

Esperávamos que os alunos respondessem que, quanto mais próximo dos pontos com cores distintas no plano, à esquerda, mais próximos do zero estariam os pontos da esquerda. Exatamente como esperávamos, os alunos responderam satisfatoriamente. As respostas mostraram, mais uma vez, a capacidade de visualização.

> Os pontos do plano, à direita, se aproximarão do ponto zero. (ALUNOS A e B)
>
> Os pontos do plano, à direita, se aproximam da origem do plano. (ALUNOS C e D)

A seguir, a representação dessa situação gráfica.

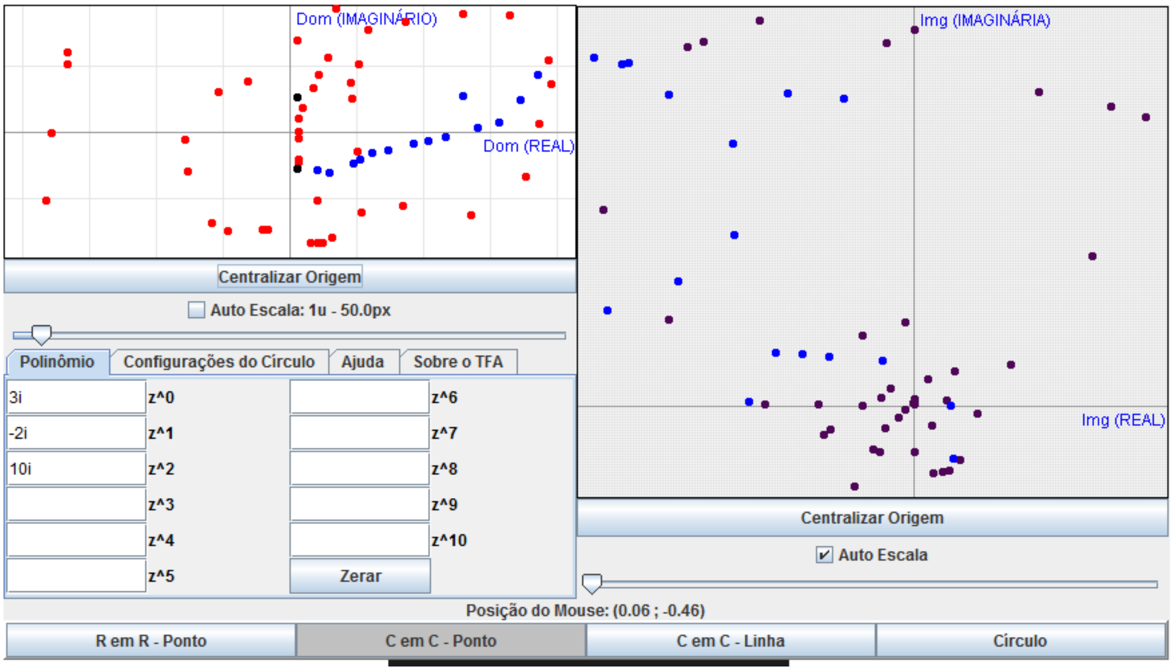

Figura 21: Item 1.1(b) – Construção-Sinopse da Atividade 1.

(c) Agora, tente clicar com a melhor precisão possível no (s) ponto(s) de cores distintas no plano, à esquerda. O que você observa, em relação à origem do eixo, à direita?

Os Sujeitos da Pesquisa deveriam responder que, ao clicar nos pontos do plano, à esquerda, a imagem dos pontos do plano, à direita, iria a zero. As respostas foram satisfatórias. A capacidade de visualização foi plenamente atingida, como se observa a seguir.

> Ao clicar nos pontos de cores diferentes, suas respectivas imagens, no plano, à direita, serão iguais a zero. (ALUNOS A e B)

> Com a melhor precisão possível, ao se clicar nos pontos de cores diferentes, no plano, à direita, aparecerão pontos na origem. (ALUNOS C e D)

A seguir, a construção dessa situação.

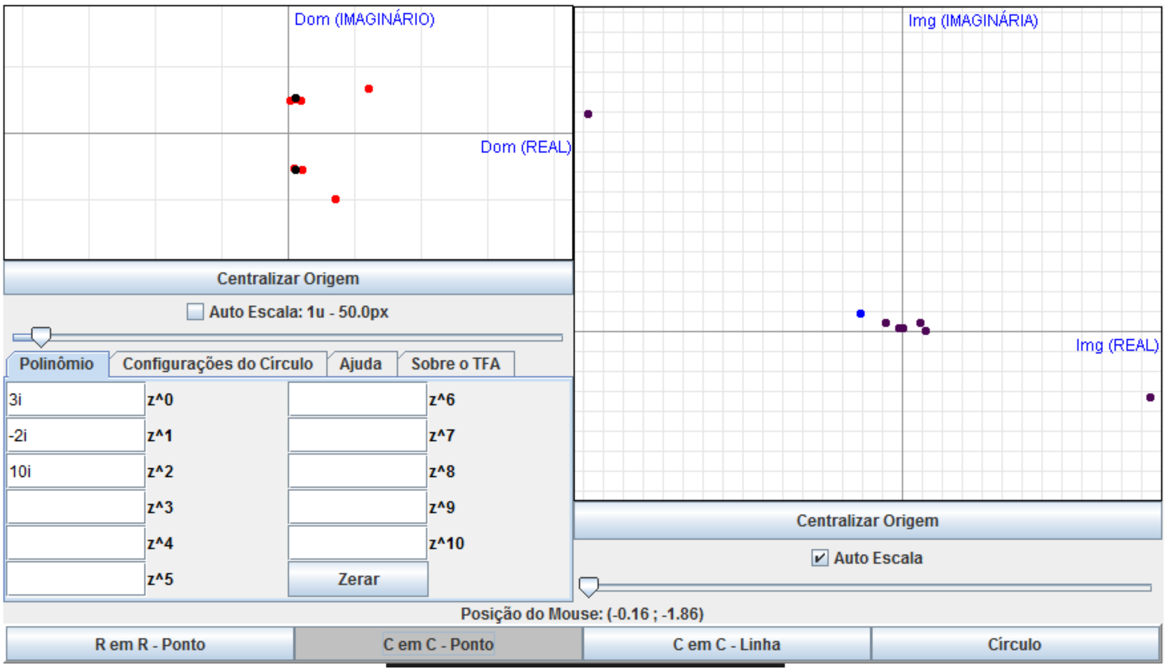

Figura 22: Item 1.1(b) – Construção-Sinopse da Atividade 1.

(d) Ao analisar as ideias anteriormente investigadas nos itens (a), (b) e (c), quais as conclusões que podem ser descritas, em relação aos Polinômios?

Nesse item, esperávamos que os alunos compreendessem, partindo da interação do *Software TFA,* que os Polinômios de coeficientes reais ou complexos têm sempre raízes. Não objetivamos saber quais eram as raízes referidas pelos pontos. Queríamos que refletissem que não importam quais sejam, mas, que sejam raízes. Percebemos que os alunos entenderam as existências das raízes, partindo dos pontos de cores distintas, mas, que suas respostas mostraram que não compreenderam satisfatoriamente o objetivo. Eis as respostas:

> Ao representarmos os Polinômios, aparecerá no plano, à esquerda, as raízes dos referidos Polinômios e, diferentemente do Domínio de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, o Domínio de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$ não ignorará a parte imaginária, tanto no plano, à esquerda, quanto no plano, à direita. (ALUNOS A e B)

> É possível que os Polinômios P_1 e P_2 possuam duas raízes, e elas são comuns. Os pontos de cores distintas representam as raízes, porém, não conseguimos concluir quando essas raízes aparecem no *Software*. (ALUNOS C e D)

Nessas atividades, foram desenvolvidas as habilidades de visualização e a competência da utilização dos comandos do *Software* TFA. No que se refere à visualização, com base no que afirmam Allevato (2005) e Borba e Penteado (2010) e, em se tratando das competências (BRASIL, 2000), cremos que nossa atividade abordou o estabelecido.

5.1.2. Atividade 2: Círculo no $\mathbb{R}^2$em $\mathbb{R}^2$

Participaram dessa atividade os mesmos Sujeitos da Pesquisa da atividade 1. Eles foram divididos em 2 (dois) grupos, com dois componentes cada, conforme fora previamente combinado com o pesquisador. Esse procedimento foi necessário, tendo em vista a exiguidade de tempo dos alunos, os quais tiveram que responder a duas atividades num mesmo dia. Os alunos A e B formaram um grupo e os alunos C e D, o outro. Como ocorreu com a atividade anterior, havia 2 (duas) questões a serem respondidas:

2.1 O caso da relação entre o Círculo e os Polinômios.
2.2 O caso do Círculo e Círculo.

No caso da questão 2.1, os objetivos eram explorar, argumentar e inferir sobre a relação entre o Círculo e os Polinômios. Nessa atividade, houve uma divisão em 6 (seis) subitens e, utilizando o c*omando* ***Círculo***, sugerimos aos alunos que clicassem na área de trabalho (plano, à esquerda) apenas uma vez, sendo-lhes perguntado:

(a) O que se observa?

Esperava-se que a visualização refletisse sobre o Círculo e que, obviamente, os membros do grupo comentassem sobre o aumento do raio. Eles responderam satisfatoriamente, conforme se observa em suas respostas.

> Aparece um círculo no plano, à esquerda, que varrerá os valores do Domínio e os representará no plano, à direita, dinamicamente. (ALUNOS A e B)
>
> Observa-se uma circunferência e que o raio vai crescendo com o tempo. (ALUNOS C e D)

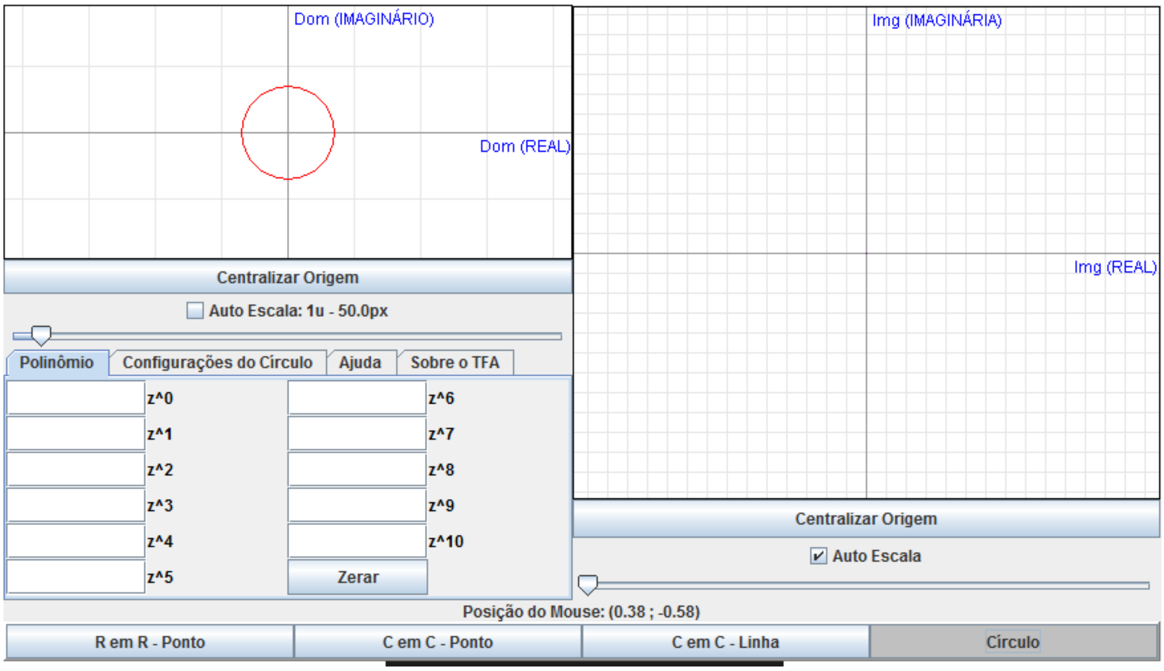

Figura 23: Item 1.1(b) – Construção-Sinopse da Atividade 2.

(b) Houve alguma imagem formando-se? Por quê?

Contávamos que os Sujeitos da Pesquisa, mais uma vez, visualizassem o plano, à esquerda, respondendo com mais alguns elementos, pertinentes ao Círculo, o que ocorreu. É o que se observa nas respostas de todos os alunos.

> Sim. Houve uma circunferência, com centro na origem. (ALUNOS C e D)
> Sim. Essas imagens formam-se dinamicamente, no formato de um círculo. (ALUNOS A e B).

(c) Houve alguma imagem à direita, no plano, formando-se? Por quê?

Queríamos investigar a capacidade de visualização dos Sujeitos da Pesquisa. A partir da investigação e da experimentação, como afirma Allevato (2005), eles formulam, reformulam e rejeitam hipóteses. Sobre o item em questão, esperava-se que respondessem que não. Pois não havia a inserção dos coeficientes do Polinômio. Apenas um dos grupos (o dos alunos C e D) observou corretamente. Vejamos as respostas:

> Sim. Também se formou uma imagem, porém, podendo apresentar formas variadas. (ALUNOS A e B)
>
> Não houve imagem à direita, possivelmente pela ausência dos coeficientes do Polinômio. (ALUNOS C e D)

No decorrer da atividade, percebemos que os Sujeitos estavam cada vez mais familiarizados com o *software* TFA.

(d) Se o grau do Polinômio é dado pela ordem de maior expoente do Polinômio com coeficiente não nulo, qual é o grau do Polinômio $P(z) = 0$, que não possui coeficientes não nulos? Justifique.

Nesse caso, demos implicitamente uma definição de grau do Polinômio, esperando que os Sujeitos da Pesquisa atentassem para isso. Esperava-se que respondessem que o Polinômio Nulo $P\,(z) = 0$, não possuindo grau. As respostas não foram satisfatórias. Os alunos não acertaram a resposta.

> O grau é zero porque ele possui todos os coeficientes iguais a zero. (ALUNOS A e B)
> Grau n, com $n \geq 1$, pois $P(z)$ será, no mínimo, da forma $P(z) = az + b$. Sendo $a\,b \neq 0$, a raiz deverá ser $-\frac{b}{a}$. (ALUNOS C e D).

(e) Agora, insira zeros aos coeficientes dos Polinômios nas janelas do *software TFA*, utilizando o comando ***Círculo***. Clique apenas uma vez no plano, à esquerda, na área de trabalho. O que se observa?

Espera-se que os Sujeitos da Pesquisa relembrassem e aplicassem a definição apresentada no item (d). Entretanto, nas respostas dadas, isso não ocorreu:

> Ocorre a mesma varredura no plano, à esquerda, porém, para os valores, no plano, à esquerda, a imagem será igual a zero. (ALUNOS A e B)
>
> Não fez nenhuma diferença, aparentemente falando, não inserir os coeficientes ou inserir coeficientes nulos. (ALUNOS C e D).

(f) Podemos dizer que não existiria $P(z) = 0$? Por quê? Justifique.

Nesse item, suscitamos, mais uma vez, a definição. Queríamos ver o grau de argumentação dos Sujeitos da Pesquisa. Pelas respostas, confirmamos que apenas um dos grupos atentou para isso, correspondendo na argumentação (Alunos A e B).

> Podemos, sim. Pois esse Polinômio não possui nenhum coeficiente não nulo, enquanto sua definição pede, necessariamente, pelo menos algum coeficiente não nulo. (ALUNOS A e B)
>
> Não podemos dizer isso. Caso o Polinômio apresente todos os seus coeficientes nulos, existem infinitas soluções. (ALUNOS C e D)

No caso da questão 2.2, os objetivos eram explorar, argumentar e inferir a relação entre o Círculo e Círculo e/ou a curva. Pediu-se que inserissem os coeficientes dos Polinômios $P_1(z) = 2i\,z^2 + 2z + i$ e $P_2(z) = 2z^2 + 2z + 1$, respectivamente, analisando-os e justificando o que lhes fosse perguntado.

(a) Ao clicar no comando ***Círculo***, vê-se formando um círculo na esquerda e, aparentemente, um círculo à direita, no plano. O que ocorre com a imagem, à direita, à medida que o raio do círculo aumenta?

Esperava-se que os Sujeitos da Pesquisa respondessem que, inicialmente, apareceria um círculo e, depois, curvas com altas deformações. Foi exatamente isso o que todos os alunos responderam.

> Inicialmente, ela aparenta ser um círculo. À medida que vai ganhando valor, ele acaba se deformando, aumentando-se a área. (ALUNOS A e B).

A imagem deixa de parecer um círculo e começa a surgir uma figura dentro da outra que, à medida que o círculo da esquerda (Domínio) cresce, a imagem da direita se aproxima de duas circunferências tangentes internas. (ALUNOS C e D)

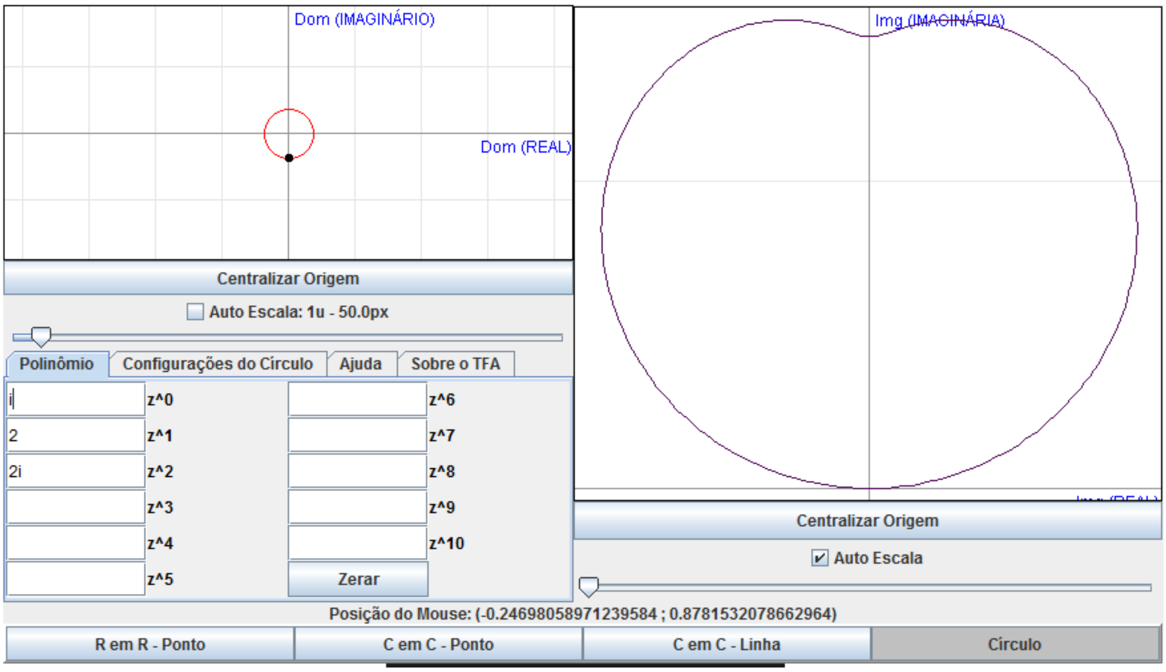

Figura 24: Item 2.2(a)/uma raiz – Construção-Sinopse da Atividade 2

(b) Ao clicar no comando ***Círculo***, aparecem dois pontos no plano, à esquerda. Para você, o que são esses pontos?

Esperávamos que os Sujeitos da Pesquisa respondessem que esses pontos são as raízes dos Polinômios, assim acontecendo.

Também são as raízes do Polinômio apresentado. (ALUNOS A e B)

Devem ser as raízes dos Polinômios. (ALUNOS C e D)

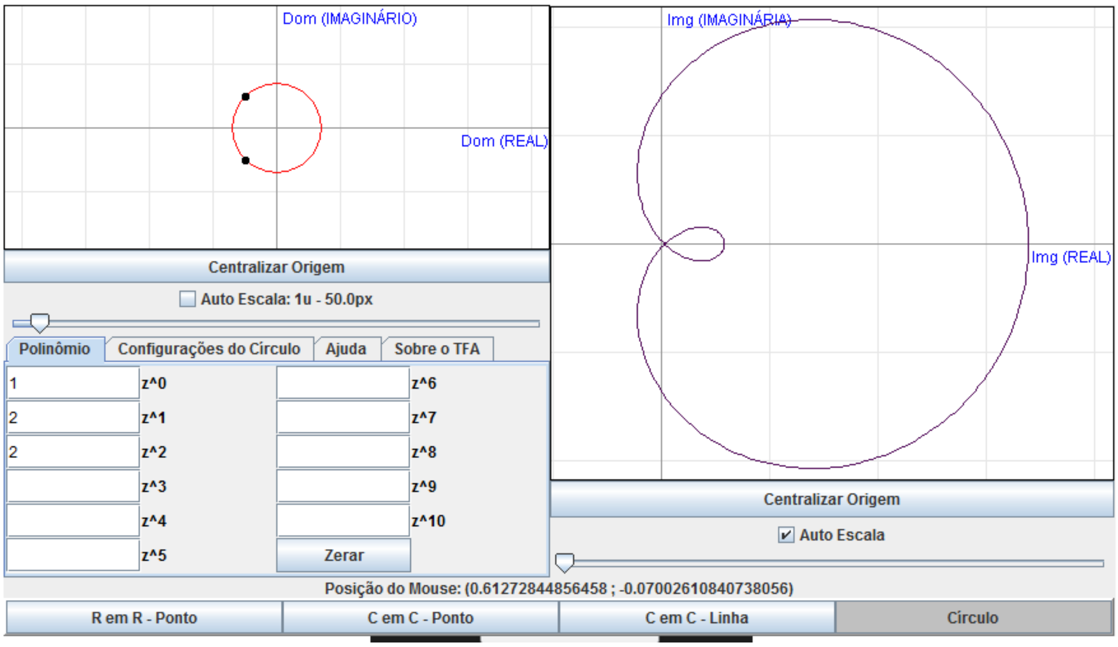

Figura 25: Item 2.2(b)/duas raízes – Construção-Síntese da Atividade 2, P_2

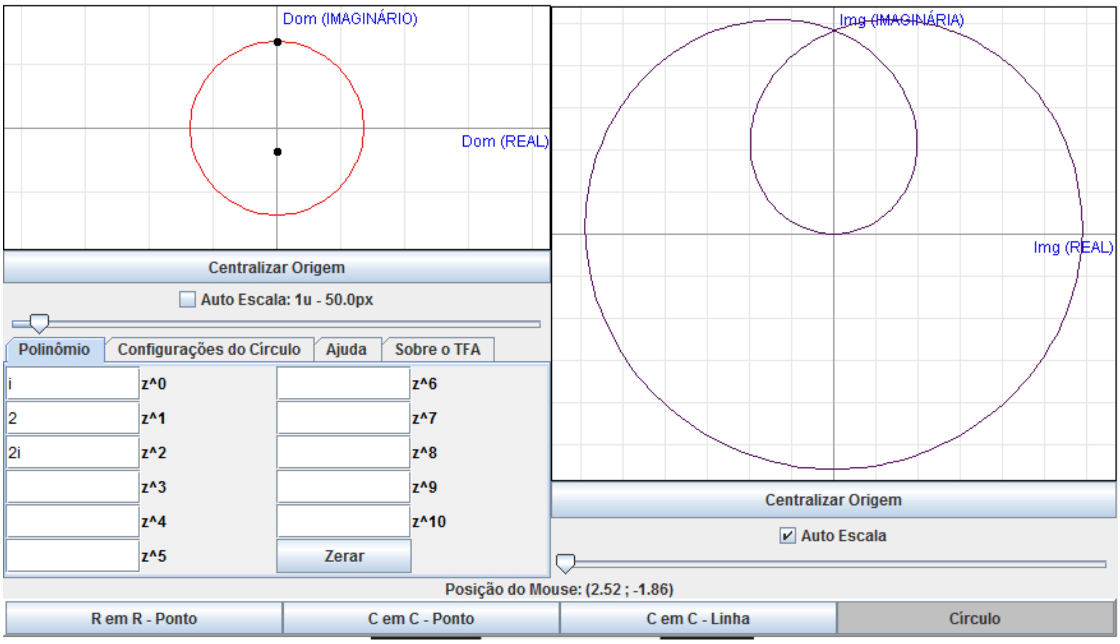

Figura 26: Item 2.2(b)/duas raízes – Construção-Sinopse da Atividade 2, P_1.

(c) Agora, com os mesmos Polinômios, volte ao comando ***C em C – Ponto*** e clique no plano, à esquerda, próximo onde se observaram os mesmos pontos no item b. O que são esses pontos? Por quê?

O objetivo era que os Sujeitos da Pesquisa respondessem que os pontos são também as raízes dos Polinômios, o que também ocorreu.

> Eles são as raízes do Polinômio, pois suas imagens se aproximam da imagem (zero), no plano, à direita. (ALUNOS C e D).

> Esses pontos também são valores de z . Zeram o Polinômio apresentado. (ALUNOS A e B)

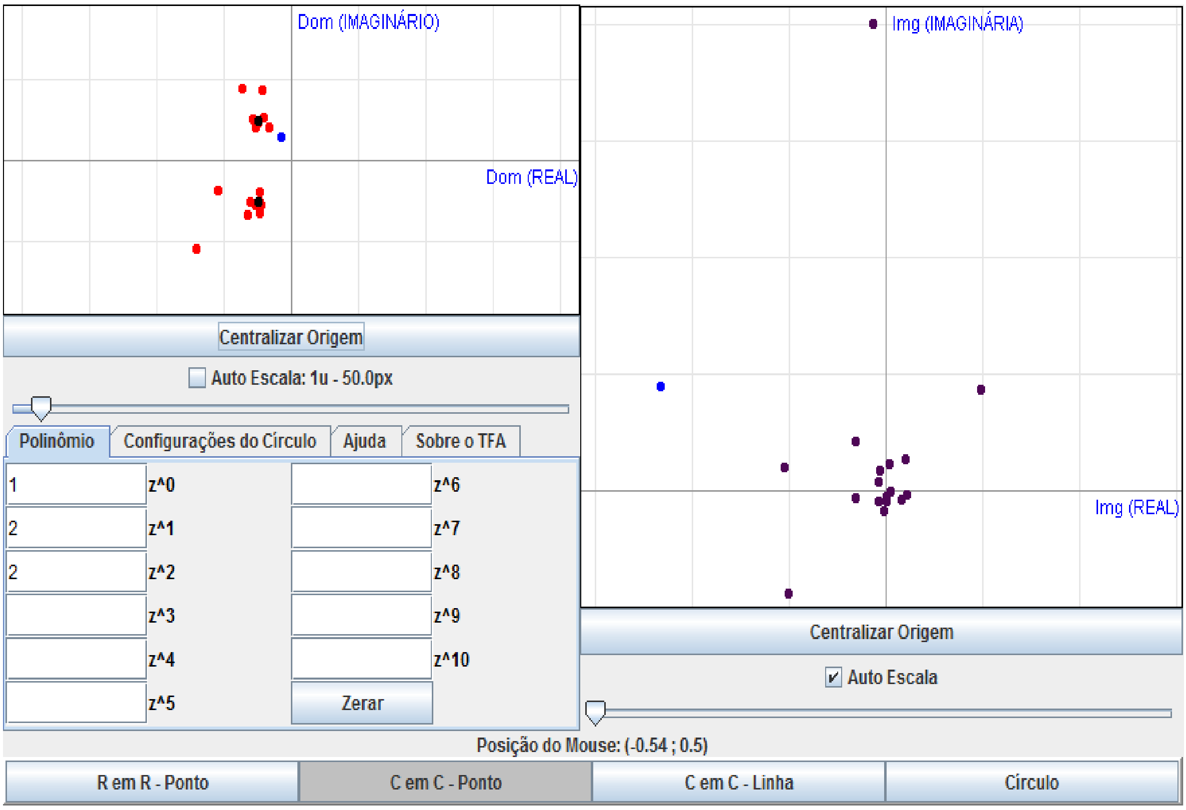

Figura 27: Item 2.2(c) – Construção-Sinopse da Atividade 2, Polinômio P_2.

(d) Com muita atenção e, nas mesmas condições dos subitens (a), (b) e (c), utilize o comando ***Configurações do Círculo***. Abrir-se-á uma janela. Utilize a opção ***Pausar o Círculo*** antes que o Círculo, à esquerda, passe pelos pontos que aparecem no plano. A figura à direita envolve a origem do plano?

Nesse caso, os Sujeitos da Pesquisa deveriam responder que a origem do plano, à esquerda, não é envolvida. Conforme esperávamos, assim aconteceu.

> Não. Quanto mais se aproxima dos pontos, nossa figura, à direita, se aproxima da origem. Porém, a figura não envolve a origem. (ALUNOS A e B).

> Não. (ALUNOS C e D).

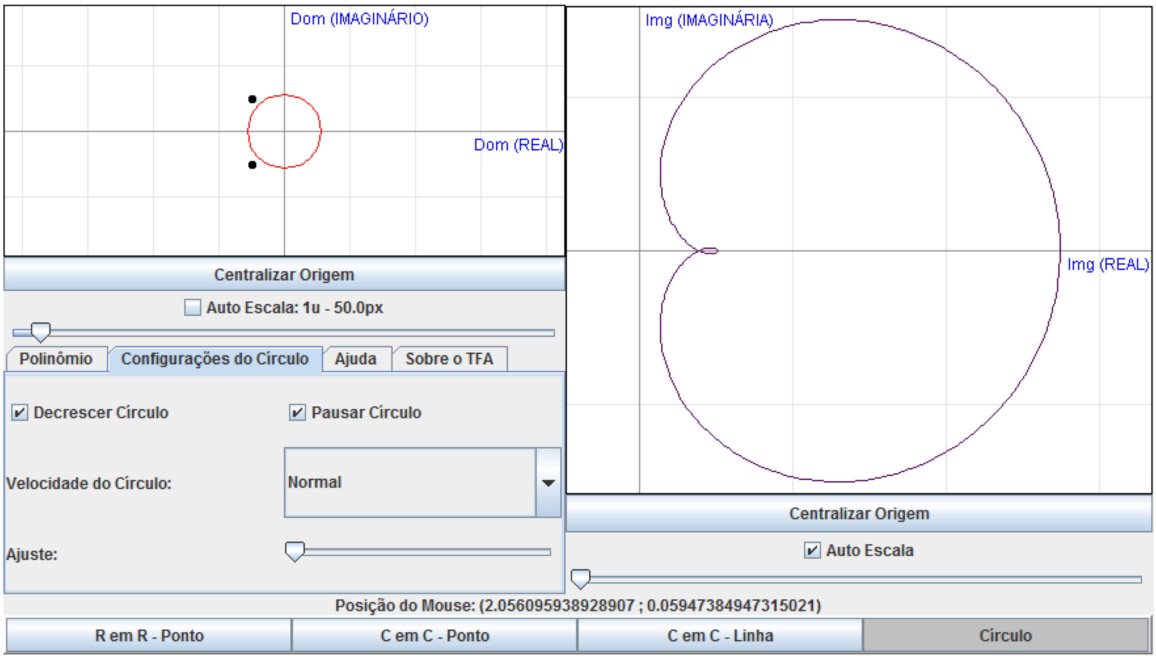

Figura 28: Item 2.2(d) – Construção-Sinopse da Atividade 2, Polinômio P_2.

(e) À medida que o raio aumenta, o Círculo, à esquerda, deverá dar um número inteiro de voltas em torno da origem. Em sua opinião, por que o número de voltas deve ser um Número Inteiro?

Esperava-se que os Sujeitos da Pesquisa respondessem que, como estávamos trabalhando com varáveis complexas, o número complexo teria uma forma trigonométrica. Representa-se um círculo, em que o número de voltas deve ser inteiro, pela própria definição de arcos côngruos, assunto já visto por eles, no Ensino Médio.

Observa-se que, ou não conseguiram responder ao que fora perguntado, ou não houve compreensão por parte dos Sujeitos da Pesquisa.

> Porque cada volta na origem desse Polinômio representa uma raiz, e o número de raízes desse Polinômio é sempre um número inteiro. (ALUNOS A e B)
>
> Não compreendi a pergunta. (ALUNOS C e D)

5.1.3. Atividade 3: Círculo e Curvas de $\mathbb{R}^2$em $\mathbb{R}^2$

Dessa atividade participaram 5 (cinco) Sujeitos da Pesquisa, divididos em 2 (dois) grupos, sendo que um deles com 2 (dois) componentes e, o outro, com 3 (três). Assim foram compostos: Alunos A, B e E – grupo 1; Alunos C e D – grupo 2.

Ao nos reunirmos, os alunos solicitaram ao pesquisador que se mantivessem organizados dessa forma até a finalização da atividade, pois se sentiriam mais à vontade para debater entre si sobre as perguntas formuladas. Não houve objeção à solicitação, procedendo-se à análise.

Essa atividade também foi subdividida em dois subitens:

3.1. O caso da relação entre o círculo e as curvas geradas pelos Polinômios.

3.2. O caso em que o Polinômio pode ter raízes, com multiplicidade.

No caso de 3.1, exploraram-se os elementos do círculo e das curvas geradas pelos Polinômios. Os objetivos propostos foram procurar, argumentar e inferir a relação entre o círculo e as curvas geradas pelos Polinômios. Sugerimos que fossem inseridos os seguintes coeficientes do Polinômio

$$P(z) = 3\,z^7 + 3z^6 + 2z^5 + 3z^4 + 2z^2 + 2z + 1$$

nas janelas abaixo do *comando* ***Polinômio***, como ocorreu anteriormente, nas atividades (1) e (2).

(a) Ao clicar no comando ***Círculo***, aparecerão sete pontos. À medida que o Círculo, à esquerda, passar pelos pontos, a figura à direita apresentará deformações. Passará por onde? Por quê? Justifique.

Os Sujeitos da Pesquisa deveriam observar que as deformações à direita passariam pela origem do plano, à medida que o círculo passasse pelos pontos, à esquerda. Eles responderam corretamente, como se constata nas respostas a seguir.

> Essas deformações passarão pelo eixo Im do plano, à direita. Porque cada deformação serve para englobar uma raiz. (ALUNOS A, B e E)
>
> As deformações farão com que a figura à esquerda passe pela origem, pois os sete pontos são as raízes (imagem é zero). (ALUNOS D e C).

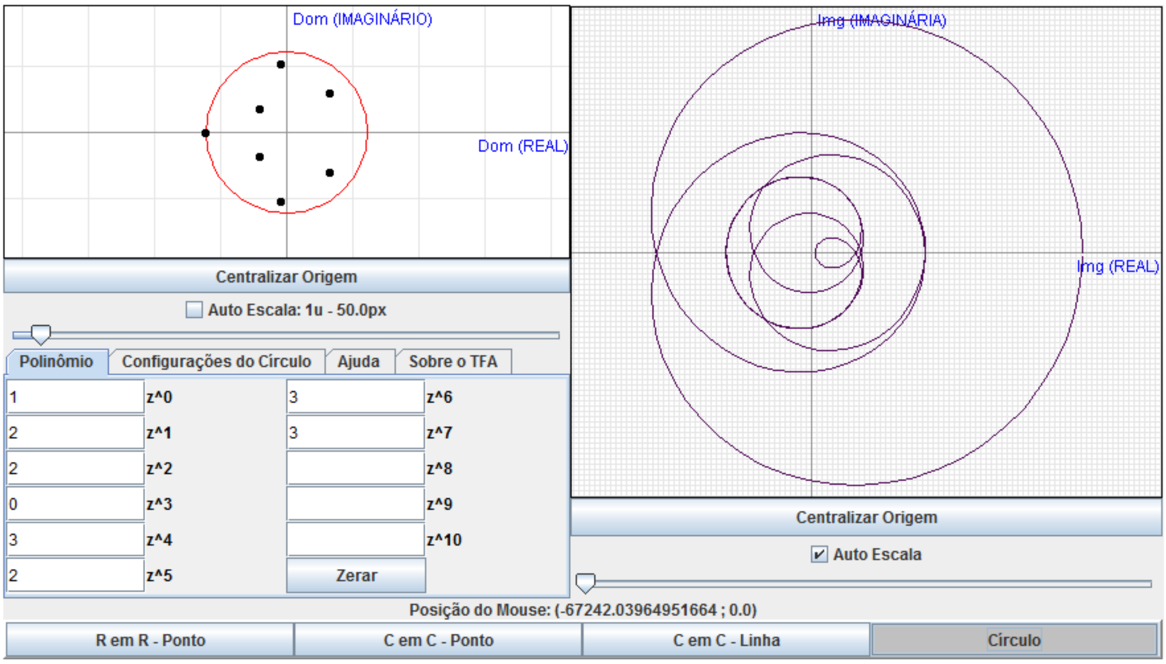

Figura 29: Item 3.1(a) – Construção-Sinopse da Atividade 3.

(b) Agora, focalize os pontos gerados pelo Polinômio do item “a”. Utilize o comando ***C em C – Linha.*** Clique no botão esquerdo do *mouse* e permaneça com o cursor, no plano, à esquerda, próximo aos pontos focalizados no item “a”. Em seguida, faça um desenho livre. O que você observa no plano, à direita, quando a linha passar pelos pontos? Justifique.

Esperávamos que os alunos tivessem a liberdade de expressar as suas conclusões com esse comando e respondessem que a imagem formada, à direita, passaria pela origem, quando o desenho, à esquerda, passasse pelos pontos considerados. Os alunos responderam corretamente:

> Quando a linha se aproxima dos pontos, ela também se aproxima da origem do plano, à direita. (ALUNOS A, B e E).
> Quando a linha passa pelos pontos, a imagem, à direita, passa pela origem. (ALUNOS C e D)

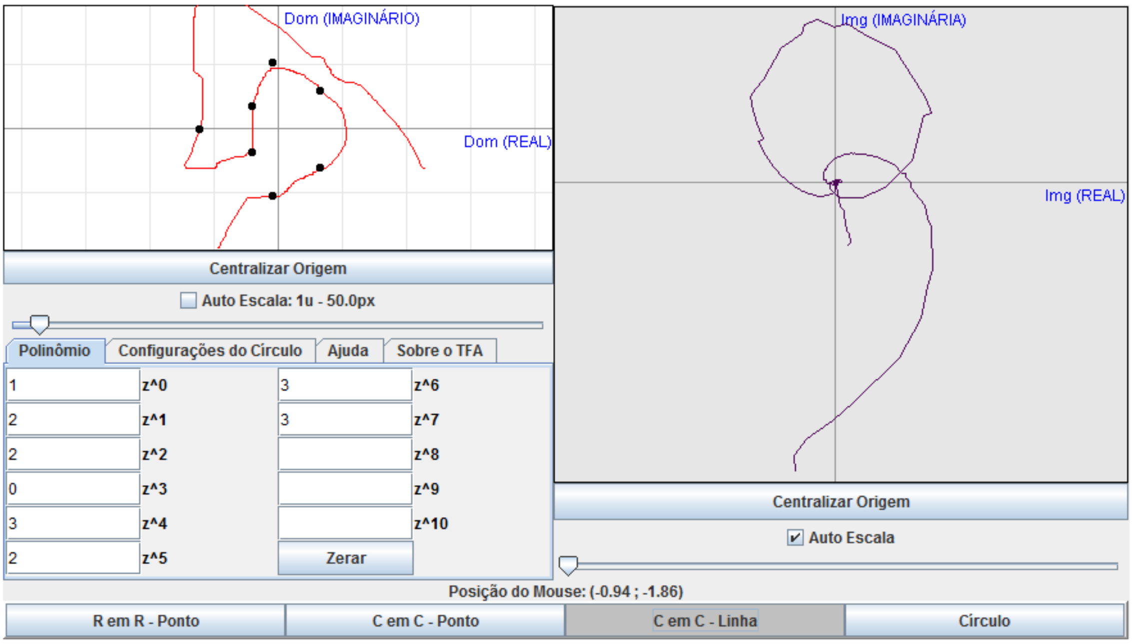

Figura 30: Item 3.1(b) – Construção-Sinopse da Atividade 3.

(c) Quais são as conclusões que podemos tirar, referentes às figuras formadas e, aos Polinômios dos subitens “a” e “b”?

Os Sujeitos da Pesquisa, ao experienciarem, argumentaram corretamente que, com esse comando, mais uma vez a raiz do Polinômio seria identificada.

> A representação do círculo dos subitens “a” e “b” evidencia características nas quais o número de voltas em torno da origem do Polinômio, à direita, representa o número de raízes já “varridas” pelo Domínio. Já na representação em linha do subitem b, evidencia-se que, quando a linha desenhada se aproxima dos pontos, a imagem se aproxima da origem do plano, à direita. (ALUNOS A, B e E)
>
> As imagens dos pontos marcados pelas linhas desenhadas, ou pela varredura do círculo, são representadas automaticamente no plano, à direita. (ALUNOS C e D)

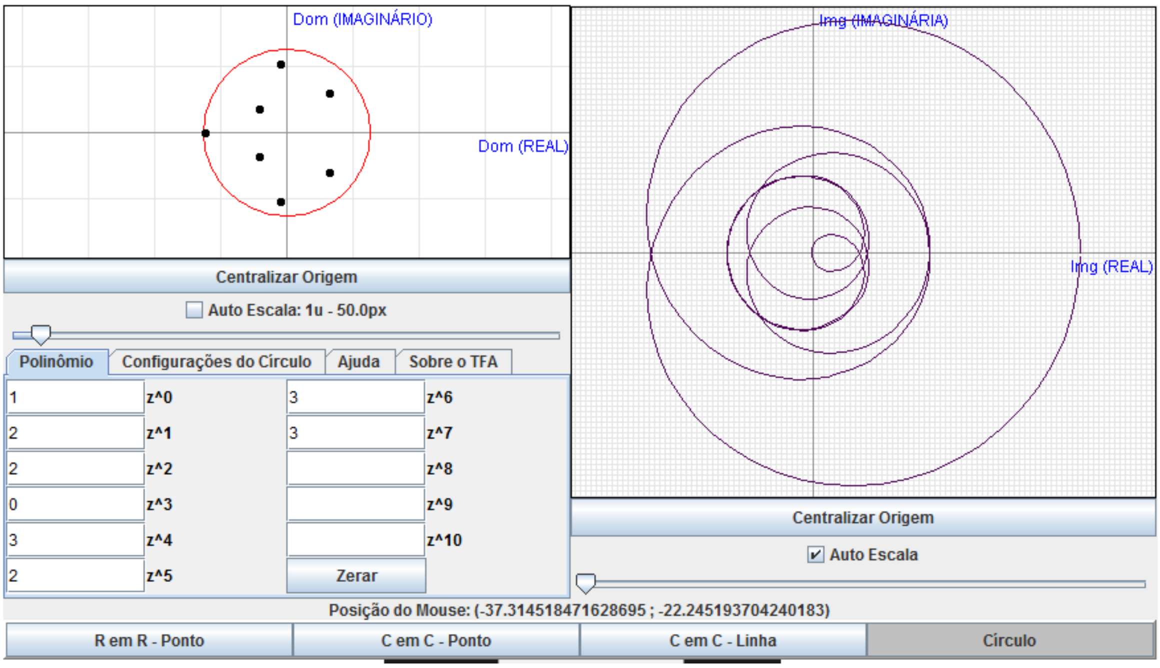

Figura 31: Item 3.1(c)/sete raízes – Construção-Sinopse da Atividade 3.

Quanto ao solicitado em 3.2, acerca da multiplicidade do Polinômio, os objetivos eram explorar, argumentar e inferir sobre a relação entre o círculo e as multiplicidades de raízes dos Polinômios. Sugerimos o seguinte comando: Inserir os coeficientes do Polinômio e utilizar o comando ***Círculo*** $P(z) = z^2 - 2z + 1$.

Essa tarefa ficou subdividida nos seguintes subitens:

(a) Ao adicionar os coeficientes do Polinômio, qual a soma encontrada? Nesse caso, quantas vezes a alça, no plano, à direita, passará pela origem desse plano? Por quê? Justifique.

A resposta correta é zero, para a soma das raízes, e que a alça passaria pelo plano, à direita, uma vez. Conforme esperávamos, as respostas foram satisfatórias.

> A soma encontrada é zero. A alça, à direita, passará uma vez pela origem desse plano. Porém, mesmo assim, dois círculos envolverão a origem do plano, à direita. Pois, provavelmente, indica que a raiz do Polinômio é de multiplicidade 2. (ALUNOS A, B e E)
>
> A soma dos coeficientes é zero. A alça passará uma única vez pela origem, pois a raiz do Polinômio é representada em um único ponto (multiplicidade 2). (ALUNOS C e D)

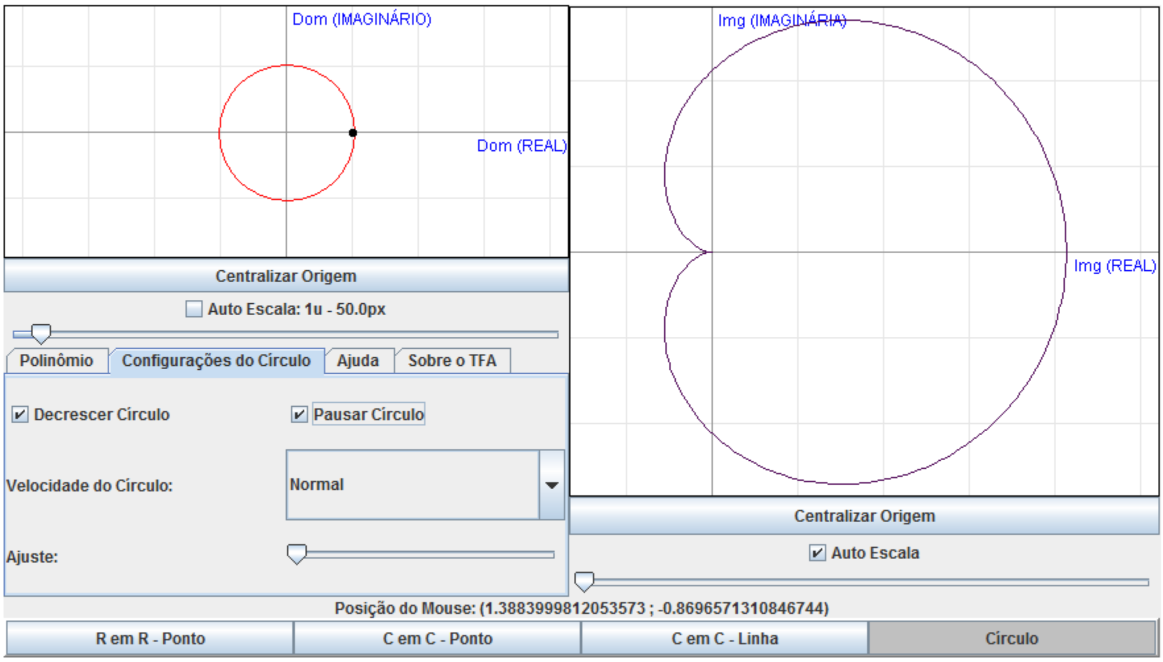

Figura 32: Item 3.2(a) – Construção-Sinopse da Atividade 3.

(b) Agora, insira os coeficientes do Polinômio $P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z - 1$. Valem as mesmas propriedades vistas no subitem “a” para esse Polinômio? Justifique.

Os Sujeitos da Pesquisa deveriam responder que a soma também daria zero, multiplicidade 3, e que não haveria nenhuma razão de não ser a raiz, pelo fato dos coeficientes serem reais. Eles responderam corretamente.

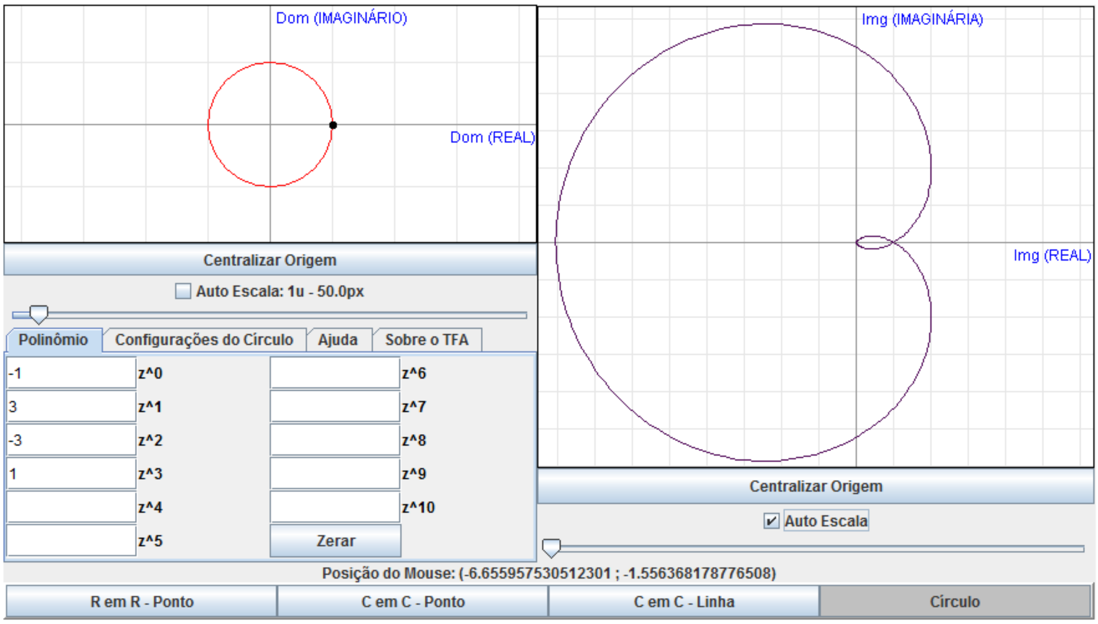

Figura 33: Item 3.2(b) – Construção-Sinopse da Atividade 3.

(c) Considere o Polinômio $P(z) = z^2 - 3\,z^2 i - 3\,z - i$. Insira os coeficientes desse Polinômio. O que se observa agora, comparando com os itens “a” e “b”? Por quê? Justifique.

Esperávamos que os Sujeitos da Pesquisa respondessem que, agora, não teríamos multiplicidades de raízes. Solicitamos aos participantes que consertassem o grau do Polinômio para 3 (três), verificando que teríamos três raízes distintas Eles responderam corretamente ao item e argumentaram a partir de visualização.

> Formam-se 1 (uma) alça e 2 (dois) círculos, que envolvem a origem do plano, à direita. A soma dos coeficientes nesse Polinômio não é igual a zero. Esse Polinômio, diferentemente dos Polinômios dos subitens “a” e “b”, não representa raízes com multiplicidade maior que 1 (um) e, por isso, não dá um número diferente de voltas na origem do plano, à direita, em comparação ao número de pontos representados no plano, à esquerda. (ALUNOS A, B e E)

> Incialmente a imagem à direita corta a origem (quando o círculo, à esquerda, passa pela primeira raiz) e, depois, um laço se forma e corta a origem, também, quando o círculo varre duas outras raízes ao mesmo tempo. (ALUNOS C e D)

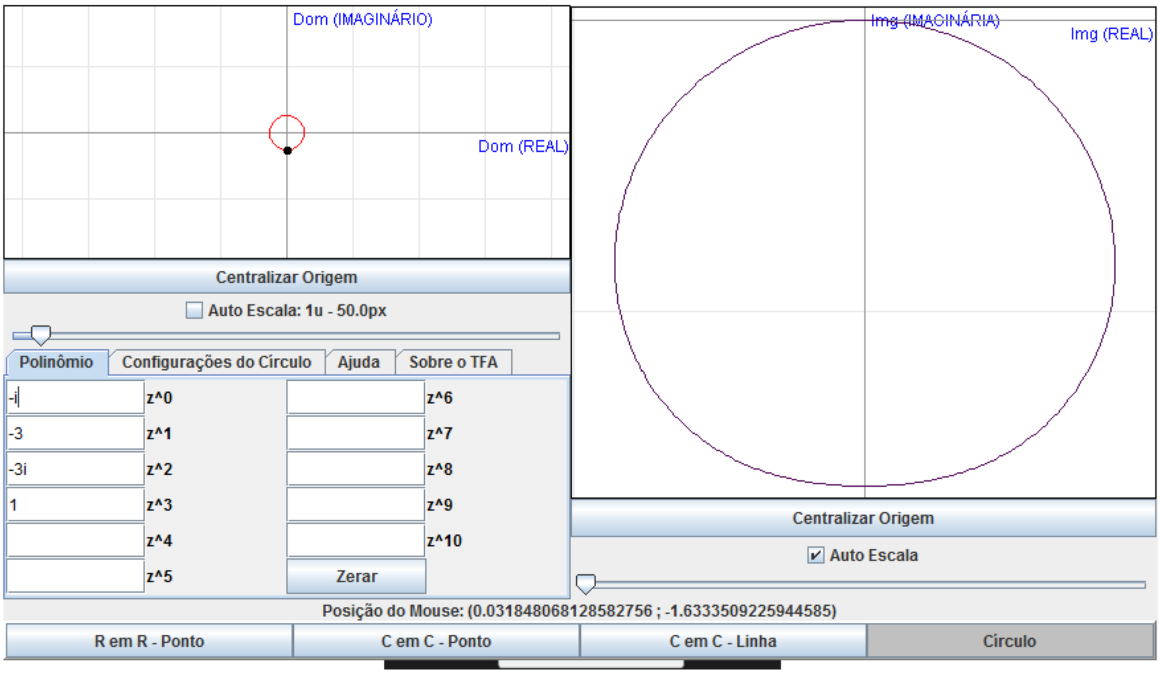

Figura 34: Item 3.2(c)/uma raiz – Construção-Sinopse da Atividade 3.

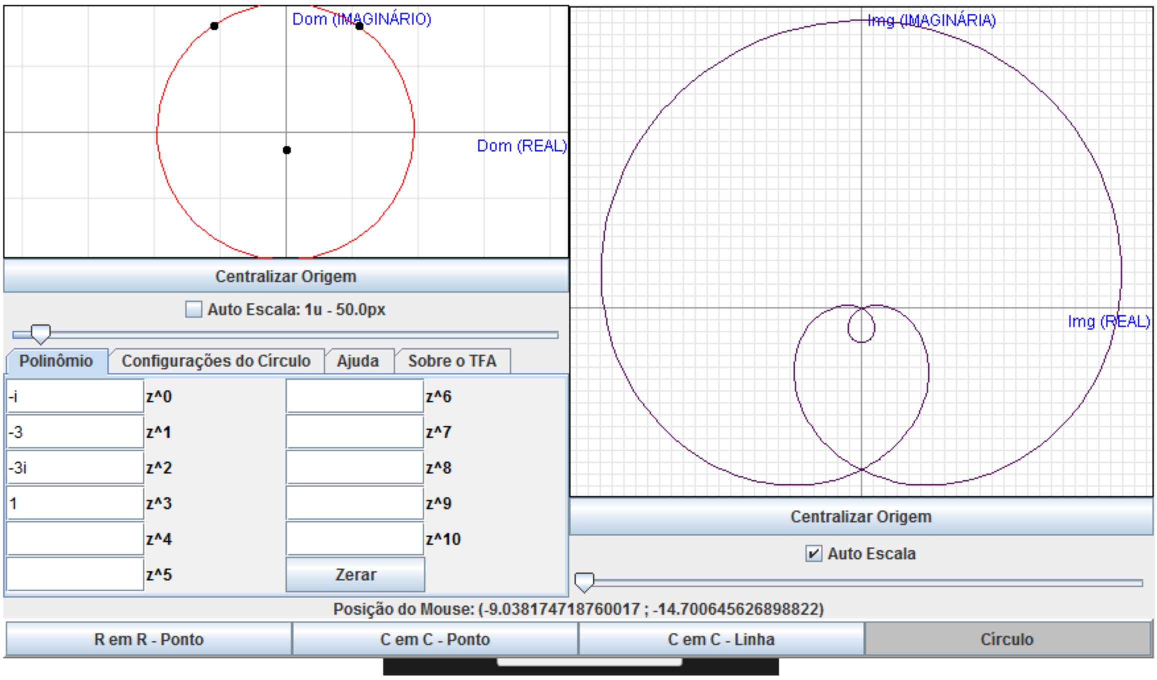

Figura 35: Item 3.2(c)/três raízes – Construção-Sinopse da Atividade 3.

d) Em quaisquer situações, o que você acha quanto ao comportamento das curvas geradas nos planos, à direita e, à esquerda? As propriedades são mantidas? Por quê? Há rompimento de algum trecho da curva? Justifique.

O que se esperava era que os Sujeitos da Pesquisa respondessem que o comportamento das curvas geradas, à esquerda, é sempre um círculo e, à direita, são curvas que vão se deformando. Contudo, sem haver rompimento de nenhum trecho, havendo continuidade. Os Alunos A, B e E responderam corretamente. Os Alunos C e D, de modo parcial, como se pode observar a seguir.

> A curva, à esquerda, representa uma varredura sobre o Domínio. A curva à direita representa as imagens do Domínio “varrido”. As propriedades são mantidas, porque a plotagem de pontos no plano, à direita, segue um comportamento bem definido e correspondente ao ocorrido no plano, à esquerda. Não há rompimento, pois o campo em que os planos trabalham é o dos complexos. Então, sempre há correspondentes na origem. (ALUNOS A, B e E)

> Na esquerda, as propriedades se mantêm (sempre é um círculo, cujo raio cresce). Formam-se na imagem, à direita $(n-1)$ laços, onde n é o grau do

> Polinômio, se existir pelo menos um grau das parcelas do Polinômio, com grau par. Em diversos momentos, dependendo os Polinômios, formam-se laços. (ALUNOS C e D)

5.1.4. Atividade 4: As Raízes do Polinômio

Dessa atividade participaram 5 (cinco) Sujeitos da Pesquisa. Eles foram divididos em 1 (um) grupo de 2 (dois) componentes e um outro, com 3 (três) componentes. A atividade foi respondida no mesmo dia em que foi aplicada a de nº 3. Por essa razão foram mantidos os mesmos grupos. Preferimos que a ordem dos grupos se mantivesse para que os alunos se sentissem à vontade para responder às questões, não havendo objeção à solicitação nem dificuldades quanto ao procedimento da atividade. Ela também foi subdividida em:

4.1**.** O caso da relação entre as raízes e as curvas geradas pelos Polinômios, de coeficientes reais.

4.2. O caso da relação entre as raízes e as curvas geradas pelos Polinômios, de coeficientes complexos.

4.3. O caso da relação entre as raízes e as curvas geradas pelos Polinômios: o caso de deformações de curvas no $\mathbb{R}^2$.

No caso da relação entre as raízes e as curvas geradas pelos Polinômios, de coeficientes reais (4.1), os objetivos foram explorar, argumentar e inferir a relação entre o círculo e as raízes dos Polinômios, estas identificadas pelas deformações de curvas no $\mathbb{R}^{\mathbf{2}}$. Sugerimos o seguinte comando: "Insira os coeficientes do Polinômio de $P(z) = z^{10} + z^9 + z^8 + z^7 + z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$. Utilize o comando ***Círculo***".

A seguir, os subitens e suas análises.

(a) O que podemos dizer, quando o círculo passar pelos pontos do plano, à esquerda, a curva à direita irá se deformar, varrendo todo o plano, passando pela origem desse plano. Quem são os pontos do plano que aparecem à direita, em relação ao Polinômio? Por quê? Justifique.

Esperávamos que os alunos respondessem que são as raízes dos Polinômios, sempre contínuas, em razão de serem Polinômios. (Pesq.: <u>Solicitamos que os alunos corrigissem no lugar “à direita” por “à esquerda”)</u>. Com a intervenção do professor, os Sujeitos da Pesquisa (Alunos A, B e E) responderam corretamente, entretanto, as respostas dos Alunos C e D foram parcialmente corretas, por não terem atentado para as informações do pesquisador. Vejamos suas respostas:

> Os pontos do plano, à esquerda, são raízes do Polinômio (ALUNOS A, B e E).
> Não recebi a aparição de nenhum ponto à direita, mas os que aparecem à esquerda são as raízes (10 pontos). (ALUNOS C e D).

(b) Com a informação obtida pelo item “a”, é sempre possível dizer que qualquer Polinômio, de coeficientes reais, tem sempre raízes? Por quê? Justifique.

Como esperávamos, os Sujeitos da Pesquisa reconheceram que se tratava do Teorema Fundamental da Álgebra (TFA), como se observa nas respostas a seguir.

> Sim, ´pois o Polinômio de grau 10 apresenta 10 (dez) pontos, ou seja, 10 (dez) raízes no plano, à esquerda. (ALUNOS A, B e E).

> De acordo com o Programa, percebemos que um Polinômio, de coeficientes reais e grau n, possui também n raízes. (ALUNOS C e D).

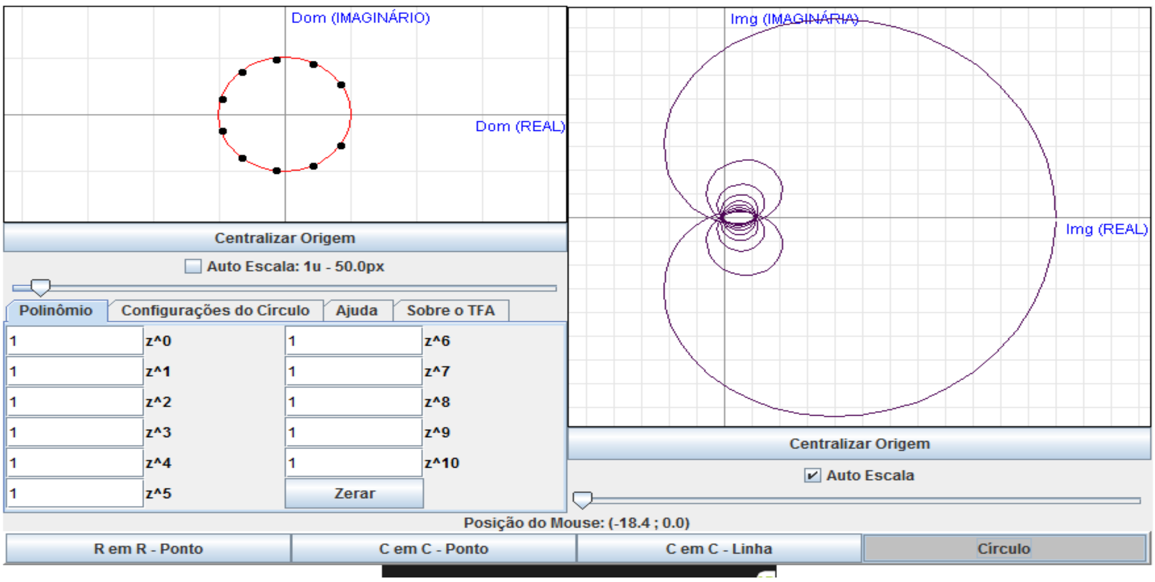

Figura 36: Item 4.1/dez raízes – Construção-Sinopse da Atividade 4.

No caso da relação entre as raízes e as curvas geradas pelos Polinômios, de coeficientes complexos (4.2), os objetivos foram explorar, argumentar e inferir a relação entre o círculo e as raízes dos Polinômios, estas identificadas pelas deformações de curvas no $\mathbb{R}^2$. Sugerimos a seguinte atividade: “Insira os coeficientes de $P(z) = iz^{10} + iz^9 + iz^8 + iz^7 + iz^6 + iz^5 + iz^4 + iz^3 + iz^2 + iz + i$. Utilize o comando ***Círculo***”.

A seguir, os subitens e suas análises.

(a) O que podemos revelar quando os Polinômios têm coeficientes complexos, ou seja, a curva apresentada no plano, à direita, apresenta-se contínua? Por quê? Justifique.

Como esperávamos e se observa nas respostas a seguir, alguns alunos (C e D) concluíram que, independente de os coeficientes serem reais ou complexos, a curva será sempre contínua, pela propriedade dos Polinômios. O Círculo é continuo, logo, a curva é continua. Já os Alunos A. B e E acertaram parcialmente ao que lhes fora perguntado.

> A curva, à direita, é contínua, pois o gráfico à direita tem Imagem Real e Imaginária, contemplando raízes reais e imaginárias. (ALUNOS C e D).
>
> Sim. Porque o gráfico no plano, à direita, não apresenta espaços descontínuos. Além disso, toda Função Polinomial é contínua. (ALUNOS A, B e E)

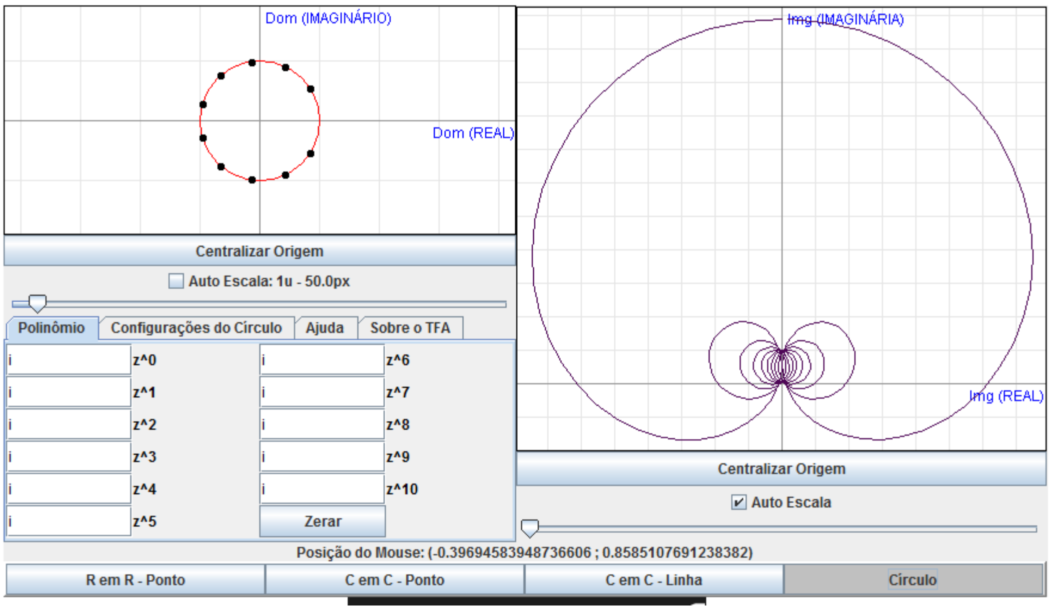

Figura 37: Item 4.2 /dez raízes – Construção-Sinopse da Atividade 4.

(b) Com a informação obtida no item “a”, é sempre possível dizer que qualquer Polinômio, de coeficientes complexos, sempre possui raízes? Por quê? Justifique.

Esperávamos que os Sujeitos da Pesquisa, mais uma vez, fizessem referência ao TFA, o que aconteceu por parte dos Alunos A, B e E. Quanto aos Alunos C e D, apesar de não terem feito menção ao Teorema, também responderam corretamente ao item.

> Sim. A própria definição do TFA é que justifica isso. (ALUNOS A, B e E).
>
> É sempre possível mesmo que não se possa representar esse polinômio graficamente, pois em alguns casos as raízes e as imagens serão complexas. (ALUNOS C e D).

(c) As raízes dos Polinômios, de coeficientes reais e complexos, são identificadas sempre? Por quê? Justifique.

Conforme esperávamos, os Sujeitos da Pesquisa, nessa última análise, concluíram que as raízes dos Polinômios sempre existem, respondendo corretamente à questão.

> Sim, pois o gráfico à esquerda mostra os eixos imaginário e real, que são as possibilidades de raízes de uma Função Polinomial (contínua). (ALUNOS C e D).
>
> Sim. Como foi visto nas questões anteriores, toda Função Polinomial, independentemente dos coeficientes, é continua. (ALUNOS A , B e E)

Quanto ao subitem 4.3, não houve tempo hábil para que os Sujeitos da Pesquisa respondesse ao que estava sendo solicitado: a relação entre as raízes e as curvas geradas por Polinômios, no caso, as deformações de curvas no $\mathbb{R}^2$. Os objetivos eram explorar, argumentar e inferir a relação entre o Círculo e as raízes dos Polinômios, raízes essas identificadas pelas deformações de curvas no $\mathbb{R}^2$.

5.2. Elaborando categorias e analisando as atividades e os diálogos dos Sujeitos da Pesquisa

Sabe-se que, em pesquisa qualitativa, as categorias nos permitem agrupar dados, compará-los e, além disso, todo e qualquer dado permite que se façam observações consistentes e embasadas. Entretanto, há desafios aos quais estamos submetidos quando nos propomos a fazer uma análise descritiva das respostas dadas pelos Sujeitos da Pesquisa, que são de múltiplas interpretações, advindas desse processo de análise, podendo emergir e divergir da análise do pesquisador. Mas estamos conscientes desses fatos e não temos a intenção de que nossa análise constitua-se a correta.

Partindo do contexto da análise dessas atividades, dos diálogos efetivados e do referencial teórico, pudemos estabelecer as seguintes categorias, ou eixos de análise, em nossa pesquisa:

- ***O envolvimento na aprendizagem do TFA*, *mediado pelo ambiente computacional de ensino e aprendizagem.***

- O Software TFA como ferramenta no processo de ensino e aprendizagem do TFA.

- Contribuição para o desenvolvimento do ensino e da aprendizagem do TFA para alunos do Ensino Médio.

Queremos ressaltar que não fizemos questões referentes à análise das atividades. Antes, solicitamos que os Sujeitos da Pesquisa pudessem se manifestar verbalmente, com liberdade de expressão, e de forma objetiva, quanto a suas participações nesta pesquisa.

Vale também destaca que todo esse processo foi gravado e transcrito na íntegra, o que contribuiu para a análise. Pois, segundo Bogdan e Biklen (2003), investigadores qualitativos são aqueles que questionam e dialogam com os Sujeitos da Pesquisa, estabelecendo estratégias e considerando as experiências trazidas por estes.

Destacamos que os sujeitos da pesquisa foram denominados de Aluno A, Aluno B, Aluno C, Aluno D e Aluno E, relembrando que, em acordo com o pesquisador, eles, algumas vezes, manifestaram-se de forma conjunta em algumas de suas atividades propostas, e, algumas vezes, de forma particular. É oportuno lembrar que houve participações a partir de diálogos diretos com o pesquisador. A pesquisa foi concluída no início de dezembro de 2012, no Laboratório de Informática, da Instituição de Ensino já mencionada.

A seguir, a descrição de cada uma das categorias de análise estabelecidas.

5.2.1. O envolvimento na aprendizagem do TFA mediado pelo ambiente computacional de ensino e de aprendizagem;

Ao iniciarmos a análise desta pesquisa, recorremos ao significado da palavra ambiente, descobrindo que pode representar um lugar "[...] que envolve ou rodeia, espaço em que vivemos" (Amora, 2009, p. 36). Adotou-se o sentido de "envolver", pensando-se no envolvimento educacional, proporcionado pelo computador, por professores e alunos. Na verdade, trata-se de um processo potencializado por tecnologias e humanos, cujas ações de ensino e aprendizagem se estabelecem por um repensar no ambiente computacional (Borba e Penteado, 2010).

Em se tratando do processo de educação matemática que utiliza recursos computacionais, vem apresentando nos últimos anos um desenvolvimento significativo, em função do avanço tecnológico e do emprego de novos modelos pedagógicos (Harasim 1987; Abrami e Bures 1996; Dede, 1996). As ferramentas computacionais que utilizam material multimídia, combinadas com sistemas de comunicação, têm atuado como um elemento sinérgico para o aprendizado. Para que este sinergismo ocorra, deve existir um sistema de comunicação comum, que viabilize o acesso às informações e ao conhecimento, de forma que todos possam utilizar facilmente os recursos computacionais, engajando-se no processo de ensino e aprendizagem (Trikic, 2001; Okamoto *et al.*, 2001).

Sobre os inúmeros recursos computacionais disponíveis atualmente, servem como um veículo disseminador e condutor do processo de aprendizagem, cujo sucesso está intimamente ligado à confiabilidade e ao suporte na infraestrutura tecnológica utilizada. A presença de um ambiente computacional de aprendizagem que permite simular situações do mundo real possibilita ao aluno a oportunidade de aplicar o conhecimento teórico, usando um ambiente *realístico*. Ele "[...] pressupõe a utilização de recursos computacionais, como *softwares*, câmara digital, *scanner*, entre outros, embasados por uma filosofia educacional" (Miskulin, 1999, p. 87). A autora remete-nos a uma reflexão sobre o ambiente computacional, relembrando que, nele, os estudantes são sujeitos ativos, envolvendo-se em simulações de fenômenos reais e imaginários. Eles podem processar entradas, variáveis, planejar ações, analisar problemas, tomar decisões, monitorar os progressos e coordenar seus esforços para alcançarem os objetivos delineados.

Segundo D'Ambrosio (1990), precisamos repensar os ambientes de aprendizagem que tradicionalmente estabelecemos, revendo nossas próprias crenças e concepções sobre o ensino e, especialmente, sobre a aprendizagem da Matemática. O aluno deve, então, ser o centro do processo educacional, um ser ativo no processo de construção do conhecimento; o professor, um mediador desse processo, um orientador das atividades propostas. Com base nesses princípios é que buscamos investigar o ensino e a aprendizagem do Teorema Fundamental da Álgebra (TFA), uma prática mediada pelo uso do *Software* TFA. Logo, para proceder com esta pesquisa, encontrou-se um ambiente propício, pois nosso objetivo era promover esse processo em uma instituição militar de Ensino Médio, uma escola já inserida, de certa forma, num ambiente computacional.

Como afirma Miskulin (1999), existem elementos participatórios, no processo de resolução e interação dos estudantes em ambientes de simulação, momento em que se tem adotado diferentes perspectivas teóricas, tais como, John Dewey, Jean Piaget, Jerome Bruner, e Lev Vygotsky. E, concordando com Maddux et. al.(1996), esses ícones sempre concordaram que é essencial haver envolvimento docente e discente no processo de ensino-aprendizagem. Para exemplificar essa interação, mencionamos a seguir algumas falas expressas oralmente e por escrito, por parte dos Sujeitos desta Pesquisa, que aconteceram por ocasião de uma das atividades propostas, no item 1.1.

> Cara, os pontos à direita só podem ser os pontos imagens, não? Ah, tá, esses pontos reais só podem ser pontos reais, real em real, né? No caso dos coeficientes complexos, vai dar zero, não é isso que estamos vendo? (Alunos A e B)

> Dá uma olhadinha nos valores desses pares ordenados (referindo-se à posição do *mouse*). Quer ver, vamos clicar uma vez aqui na origem (referindo-se o par de eixos à esquerda). Agora olha pra onde o ponto vai: clicando outra vez, os pontos ficam sobre o eixo real (referindo-se ao par de eixos à direita). Então, como é de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, teremos imagens pelas parcelas de coeficientes reais. (Alunos C e D)

Percebe-se nesses diálogos que os Sujeitos da Pesquisa envolveram-se de modo participativo no ambiente computacional de aprendizagem. Também pode ser observada uma nova forma de aprendizagem: o aluno aprende fazendo e discutindo. Antes, ele aprendia ouvindo e repetindo. De fato, o computador tem se constituído uma ferramenta "[...] para ajudar o aprendiz a construir o seu conhecimento e a compreender o que faz constitui (sic) uma verdadeira revolução do processo de aprendizagem" (Valente, 1999, p. 107).

Outro processo de envolvimento dos Sujeitos da Pesquisa está no contexto da visualização. Zullato (2002) é categórica quando afirma que os *softwares* são utilizados com a intenção de mostrar as propriedades que estão sendo verificadas e visualizadas. Nesse sentido, as atividades investigativas propostas nesta pesquisa contribuíram, e de modo significativo, para envolver os Sujeitos da Pesquisa, os quais verificaram as situações gráficas, o que foi possível pela visualização de todo o processo de aprendizagem do Teorema Fundamental da Álgebra (TFA). Reforçando essa constatação, a seguir, alguns depoimentos, a partir da solicitação de uma análise sobre a possibilidade de se dizer que, em qualquer Polinômio, de coeficientes reais, sempre haverá raízes.

> Isso aqui (nesse momento apontando para a tela do computador) é a raiz do Polinômio. (Aluno A) Mais interessantes são esses laços se formando, cara (referindo-se à formação de curvas sendo deformadas e passando pela origem do plano, à direita). É mesmo (Aluno B falando): quando o círculo passa pelos pontos, esses laços passam pela origem. (Aluno B), mas acho que deveríamos dizer quem são as raízes. É o TFA ((Aluno A).
>
> Concordamos que é o TFA. Precisamos do Polinômio e, se a gente conseguir resolver, a gente consegue achar as raízes (Aluno D). E preciso achar as raízes, cara. Já pensou se você tivesse um Polinômio com grau 20, cara? Tem que ter o computador. É só saber que tem raiz. (Aluno C)

Entendemos que o ambiente computacional de aprendizagem proporciona elementos criativos, com o uso do *Software* TFA, para o ensino e a aprendizagem da Matemática. Isso ocorre, de acordo com Ponte (2006), por causa de suas potencialidades de cálculo, visualização, modelação e geração de micromundos, funcionando como um dos instrumentos mais poderosos que os educadores matemáticos dispõem para desenvolverem experiências que estimulem o gosto e o prazer da criação matemática.

Quando o processo é viabilizado em um ambiente onde o computador é uma ferramenta auxiliar no processo de construção do conhecimento, como ressalta Almeida (2000), requer-se de uma preparação do professor, no sentido de que ele possa desenvolver em seus alunos a capacidade para aprender a aprender. Isso porque é necessário se ter autonomia para selecionar as informações pertinentes à sua ação, refletir sobre uma situação-problema e sobre os resultados obtidos, levantar e testar hipóteses.

Miskulin (1999) enfatiza que

> O ambiente, por mais rico e construtivo que seja, por si só, não é suficiente para promover contextos propícios para a construção do conhecimento. Nesse sentido, <u>a mediação do professor desempenha um papel determinante</u>, na medida em que o professor (sic) <u>cria as situações desafiantes</u>; recorta esta situação em vários problemas intermediários, que possibilitam aos alunos deslocarem-se muitas vezes do problema principal, olhando-o e percebendo-o, sob uma outra perspectiva, possibilitando-lhe a busca de novos caminhos, e a reavaliação constante de suas estratégias e objetivos, enfim, envolvendo-se, cada vez mais, no processo de construção do conhecimento (MISKULIN, 1999, p.88 – grifo nosso)

Acreditamos que, em todas as atividades propostas nesta pesquisa, promove-se o envolvimento, mediado pelo ambiente computacional de aprendizagem, pelo diálogo e pela escrita. Todos eles contribuíram para que os alunos pudessem refletir, como sujeitos críticos de suas ações, na aprendizagem do TFA. Pois a reflexão nesse processo permitiu que o educando testasse, questionasse e experimentasse o processo matemático.

5.2.2. O Software TFA como ferramenta no processo de ensino e de aprendizagem do TFA

Os *softwares* educativos podem ser um notável auxiliar para o aluno adquirir conceitos em determinadas áreas do conhecimento, pois o conjunto de situações, procedimentos e representações simbólicas oferecidas por essa ferramenta é muito amplo e com um potencial que atende a boa parte dos conteúdos das disciplinas. Eles permitem que os usuários deem novos significados às tarefas recebidas e, ao professor, a oportunidade para que este planeje, de forma inovadora, atividades que efetivamente atendam aos objetivos estabelecidos.

Um *software* será relevante para o ensino da Matemática se o seu desenvolvimento estiver fundamentado em uma teoria de aprendizagem cientificamente comprovada, para que ele possa permitir ao aluno o desenvolvimento da capacidade de construir, de forma autônoma, o conhecimento sobre um determinado assunto. Isso porque "O desenvolvimento dos computadores e dos *softwares* tem ampliado de forma significativa as fronteiras para muitos campos da Matemática" (Zanette, 2000, p. 24). Baseamo-nos nesse princípio, pois, em nosso entendimento, as inúmeras vantagens que os computadores e os *softwares* oferecem permitiu-nos analisar o contexto de nossa pesquisa, referente ao Teorema Fundamental da Álgebra e a interação e a aprendizagem mediada pelo *Software* TFA, experimentado pelos Sujeitos desta pesquisa. Logo, a manipulação dos softwares aliada a multimídias favorecem a aprendizagem de assuntos como Matrizes, na Álgebra Linear, análise de dados, na Estatística, etc., inserindo uma "[...] grande contribuição para o processo educativo em matemática, tanto para o desenvolvimento de novos currículos quanto para as novas abordagens metodológicas" (Idem. Ibidem).

Como já dissemos, em nosso entendimento, não se faz uma proposta de ensino para se usar um *software*. Ao contrário, escolhe-se um, em função da proposta de ensino adotada. Contudo, como precisamos dispor de critérios para a análise do processo de ensino e aprendizagem do *TFA*, torna-se relevante a interação dos Sujeitos da Pesquisa com as TICs. Nesse ínterim, vejamos alguns depoimentos deles, após a última atividade investigativa.

> O *software* exige um conhecimento básico sobre de que se trata o TFA e suas propriedades para poder manuseá-lo com facilidade. Em relação à interação com o usuário e sua instalação, o *software* necessita de uma configuração especifica do computador, com programas pré-definidos, para funcionar com eficiência. Porém, é fácil de utilizar esse *software* e aprender aos poucos, a como utilizar o TFA. (Aluno A)

> O *software* possui uma característica pouco favorável no que tange a sua utilização: é necessário um conhecimento prévio de Matemática para sua abordagem. Em alguns pontos falha, como se houvesse a necessidade de utilização de um manual de instruções. No entanto, o *software* é bem abrangente e é interessante utilizá-lo para fins, como análise de Polinômios e construção de gráficos; porém, a Função-Circulo poderia ser melhor explicada (Aluno C).

Como acontece em todas as áreas do conhecimento, no caso dos “[...] conteúdos matemáticos, se torna imprescindível o monitoramento das atividades realizadas e dos resultados obtidos com ele” (Allevato, 2005, p. ??), o que consubstancia os depoimentos acima. Um aspecto importante na fala do Aluno B, e que merece destaque nesse momento, diz respeito ao papel do professor como mediador das ações de ensino e de aprendizagem, como Miskulin (1999) defende, uma vez que este cria situações desafiantes, possibilitando aos alunos deslocarem- -se muitas vezes do problema principal, olhando-o e percebendo-o, sob uma outra perspectiva, possibilitando-lhes a busca de novos caminhos. Quanto ao professor, reavalia constantemente seus objetivos e estratégias, envolvendo-se, cada vez mais, no processo de construção do conhecimento.

Considerando o depoimento do Aluno D, este comenta que

> O programa tem uma linguagem de fácil manuseio, verificando que qualquer estudante de exatas de nível superior é capaz de usá-lo. Verifica-se um aproveitamento maior do rendimento dos estudos através da análise gráfica, logo, o programa auxilia de forma efetiva aos estudos, no que tange aos complexos e polinômios. (Aluno D)

De fato, é oportuno, mais uma vez, mencionar Zullato (2002), quando afirma que os *softwares* são utilizados com a intenção de mostrar as propriedades que estão sendo estudadas: a verificação e visualização de propriedades. Ao analisarmos as falas dos depoentes desta pesquisa, podemos perceber a deferência, de um modo geral, acerca da questão da abordagem visual que, segundo Allevato (2000), facilita a formação de conjecturas, dando espaço, portanto, a reflexões. Em decorrência disso, admoesta que a visualização e a manipulação simbólica devem complementar-se para que se obtenha uma compreensão matemática mais abrangente e completa, ou ainda, para a resolução de conflitos que se apresentam aos alunos, quando da utilização do computador.

É fato que, com a utilização do *Software TFA,* no desenvolvimento de nossas atividades, marcadas pela visualização gráfica e pela interação dos Sujeitos da Pesquisa, proporcionou-se uma aprendizagem que, de acordo com Gomes et. (2002), não pode ser tomada de forma geral, intransitiva. Na realidade, a aprendizagem envolve sempre a compreensão de algo. Mas, tal afirmação precisa ser considerada em relação à avaliação e à escolha de um *software* educativo: ele é relativo ao ensino de algo. Sua adequação depende da forma como este se insere nas práticas educativas que, segundo Gomes et. (2002), diz respeito a análises das situações realizadas com alunos, para os quais o *software* é destinado, podendo-se, a partir daí, verificar conhecimentos apreendidos e as dificuldades que surgirem.

5.2.3. Contribuição para o desenvolvimento do ensino e da aprendizagem do TFA para alunos do Ensino Médio

Em relação à contribuição para o desenvolvimento da aprendizagem dos Sujeitos desta Pesquisa e, para futuros alunos, que tiverem interesse de usar as TICs na compreensão do Teorema Fundamental da Álgebra (TFA), ou mesmo o professor, fizemos uma comparação da fala de um dos Sujeitos da Pesquisa, considerando seu depoimento, prestado no questionário, que foi aplicado antes das atividades com o *Software*, e, posteriormente com a utilização do *Software* TFA. Tomaremos por base a pergunta 6 do questionário, que consideramos relevante, fundamentando-a, segundo Borba (2010).

"***Já utilizou algum software para o entendimento do TFA? Qual? Em que ocasião? Se a resposta for não, então, em sua opinião, o software poderia ajudá-lo no entendimento dele mesmo? Justifique.”***

> Nunca utilizei nenhum *software*. Acredito que toda ferramenta é valida para auxiliar no entendimento de algo. (Aluno A)

Retomemos opiniões do próprio Aluno, anteriormente apresentadas, em que valida o auxílio prestado pelo *Software* TFA, quando passou efetivamente a utilizá-lo:

> Se a ideia de responder que todo Polinômio tem raiz, acho que o *Software* comprovou isso, não? (Aluno A).
>
> Não tenho dúvida: se tivéssemos que responder que todo Polinômio tem raiz, então, o Teorema que o Senhor tá estudando está respondido. (Aluno A).

Para Borba (2010), os ambientes computacionais condicionam as ações quando se tem que resolver uma atividade ou, um problema matemático. No que se refere ao uso dos *softwares*, diferentes estratégias são utilizadas, em complemento ao uso do lápis e papel. Borba e Villarreal (2005) enfatizam que uma abordagem experimental em Educação Matemática significa fazer uso de procedimentos de tentativas e processos educativos que possibilitem a criação de conjecturas, a descoberta de resultados matemáticos até então desconhecidos, a possibilidade de testar modos alternativos de coletar resultados e a chance de proporcionar novos experimentos. Defenderem a questão do uso do computador e dos *softwares* como auxiliadores no processo da aprendizagem e na criação de conjecturas, afirmando que, em uma abordagem que privilegia uma postura investigativa, possibilitam um envolvimento maior dos estudantes com o conteúdo, levando-os a uma investigação de conceitos. Ainda destacam que, estes, quando explorados em situações investigativas, como se dá nesta pesquisa, com a mediação do TFA, podem, inclusive, implicar mudanças conceituais.

Silva (2007) nos relata que, antes de tudo, devemos entender que o uso do computador na Educação não se resume a aprender a lidar com a tecnologia como um mero componente curricular. Agindo dessa forma, algumas escolas fazem com que o aluno adquira apenas noções de computação, como: o que é o computador, como funciona, aprendendo a lidar com *softwares* que são utilizados principalmente em serviços administrativos. Ainda afirma que precisamos entender que o uso do computador na educação não significa aprender sobre computadores, mas, sim aprender por meio de computadores.

Nesta pesquisa, acreditamos ter contribuído com a aprendizagem de nossos participantes, dando-lhes uma visão mais abrangente e inovadora sobre a importância do uso do computador na prática pedagógica e no ensino do Teorema Fundamental da Álgebra (TFA). Como afirma Allevato (2005), o ensino e aprendizagem, ou ensino-aprendizagem-avaliação. Essa opção de utilizar a palavra composta ensino-aprendizagem-avaliação tem o objetivo de expressar uma concepção em que ensino e aprendizagem devem ocorrer simultaneamente, durante a construção do pensamento, tendo-se o professor como guia e, os alunos, como co-construtores de todo conhecimento. Além disso, segundo a autora, essa metodologia integra uma concepção mais atual sobre avaliação.

Dentro dessa perspectiva, concebemos a importância que o TFA teve no contexto desta pesquisa, principalmente pela maneira como a aprendizagem se consolidou. E, em nossas considerações finais, levaremos em conta que nosso objetivo foi alcançado, na certeza de que o estudo do objeto TFA com o auxílio das TICs contribuiu de forma eficaz no processo de aprendizagem do TFA.

Capítulo 6

Considerações Finais

Retomando a questão metodológica que norteou, buscando identificar uma resposta à proposta desta pesquisa, falar-se-á da importância das atividades investigativas como norteadoras da análise do ensino e da aprendizagem do TFA, em se tratando do Ensino Médio. Nesse ínterim, vale destacar o trabalho de Miskulin (1999), no que se refere a um mundo globalizado, com toda sua diversidade cultural, oferecendo inúmeras possibilidades aos jovens.

Para a autora, a educação deve propiciar uma formação diferente da convencional, em que se proporcione ao sujeito escolher e disseminar aspectos significativos e importantes para a vida, principalmente por se encontrar diante de uma infinidade de informações. De fato, deve-se pensar criticamente, à frente de situações que exijam tomadas de decisões. Além disso, conscientizar-se diante de problemas e fatos imprescindíveis para o seu desenvolvimento, tanto no âmbito cognitivo quanto no afetivo. Enfim, é necessário desenvolver o potencial criativo, integrando-se de maneira plena na sociedade em que se vive.

Mas, para essa tomada de decisão, em prol do desenvolvimento cognitivo do aprendiz, não se pode esquecer que todo cidadão está sujeito às TICs e que sociedade, educação e tecnologia se inter-relacionam com o mundo globalizado. Contudo, a referida autora ressalta que os limites e as fronteiras de cada um desses campos do conhecimento sempre devem ser ultrapassados, sem, porém, se deixar de preservar suas características.

Nesse contexto, deve-se atentar para as especificidades da Informática Educativa descritas por Souza (2001), em que a inserção da Informática em fins educativos deverá ser respaldada através de um projeto pedagógico, resultante de discussões com os segmentos escolares envolvidos: professores, diretores, funcionários, pais e representantes da comunidade. Talvez uma realidade ainda muito distante da que se tem vivenciado. De acordo com Miskulin (1999),

> [...] a Informática, através das manifestações no campo das tecnologias de processamento da informação e da comunicação, tem assumido um espaço cada vez maior e mais sólido, nas mais diversas atividades humanas,

> infiltrando-se nos vários segmentos da sociedade. A sua crescente disseminação provoca problemas de ordem profissional e transforma as concepções mais diversas sobre o exercício da cidadania, conduzindo o indivíduo a dúvidas e incertezas a respeito do próprio significado do saber. (MISKULIN, 1999, p.46)

Por outro lado, entendemos que, nesse contexto, é estabelecida outra especificidade, em se tratando dos computadores, sobre a qual Borba e Penteado (2010) propõe, com muita propriedade. Trata-se da questão de que eles não apenas substituem ou complementam os seres humanos; reorganizam os seus pensamentos.

Para os autores, a premissa é de que o computador, sozinho, nada tem a acrescentar, se não for utilizado pelo homem pensante. De alguma forma, existe uma interação entre humanos e não humanos, de forma que aquilo que é um problema com uma determinada tecnologia passa a ser uma mera questão a ser resolvida, na presença de outra.

Segundo Valente (1999), o uso do computador requer uma análise do que significa ensinar e aprender no contexto ensino-aprendizagem-tecnologia. Por essa razão, a presença do computador e a de um *software* educativo é algo de suma importância em meio a uma sociedade com tantas desigualdades. Mas, além desse aspecto que envolve a modernização, também é indispensável na Educação. Em contrapartida, como afirma Silva (2007), precisamos entender que o uso do computador para fins educacionais não significa aprender tudo sobre computadores. Antes, apreender por meio deles.

Nesse ínterim, Valente (1999) propõe que cabe ao professor um papel desafiador e incentivador nas relações sociais e, ao aluno, um papel ativo na aprendizagem e no trabalho coletivo. Na visão de Almeida (2000), o professor necessita de uma preparação a fim de que possa desenvolver com seus alunos a capacidade para: aprender a aprender; ter autonomia para selecionar as informações pertinentes à sua ação; refletir sobre uma situação-problema e sobre os resultados obtidos; levantar e testar hipóteses. Diante disso, acreditamos que as TICs, a Educação, a sociedade e a tecnologia estão inter-relacionadas.

Nesse contexto de informatização, este trabalho sobre o TFA proporcionou uma larga possibilidade de entendimento, por meio de um coletivo pensante, com o uso de mídias. Observaram-se criatividade, autonomia e criticidade entre os indivíduos envolvidos, levando pesquisador e alunos a uma reflexão quanto ao ensino e, à aprendizagem.

Em face disso, pergunta-se: “[...] é necessário refletir sobre a matemática e sobre sua aplicação nos diversos ramos de atividade?” (SKOVSMOSE, 2008, p.54). Ao responder a sua própria pergunta, o autor considera que, como em qualquer outra atividade social, as práticas envolvendo a Matemática requerem reflexão crítica. Isso porque não se deve pensar que procedimentos mecanizados, com o uso ou não de mídias, podem ser tão somente incluídos em práticas educativas, sem que haja qualquer atitude investigativa. Para ele, o ato meramente mecânico é uma condição humana e, como tal, é também uma criação possível de questionamento.

Retomando a análise feita sobre o ensino do TFA com o uso das TICs, será esclarecida, em termos metodológicos, a principal questão que norteou esta pesquisa: ***É possível identificar a aprendizagem do TFA através da exploração de pontos, círculos e curvas e Polinômios no $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$·, com o uso das TICs, no Ensino Médio?***

Inicialmente, foram estabelecidos alguns objetivos e tarefas, sobre os quais passamos a discorrer.

- Apresentar e discutir o Ensino do Teorema Fundamental da Álgebra (TFA) na perspectiva da Educação Matemática, no Ensino Médio.

A partir da investigação sobre Tecnologias da Informação e Comunicação na Educação Matemática e o Ensino de Polinômios comprovou-se a possibilidade de utilização da tecnologia no ensino do TFA. Tal fato se deve também à visão dos vários autores-pesquisadores, cujas abordagens não só consubstanciaram, mas também serviram como uma bússola educacional para a análise dos dados que constituem esta pesquisa.

- Utilizando TICs, elaborar e avaliar atividades investigativas relacionadas a diversos conteúdos: Pontos, Círculos e Curvas no $\mathbb{R}^2$, no estudo dos Polinômios.

Com base em leituras e reflexões sobre como se utilizarem as TICs, foram elaboradas 4 (quatro) atividades investigativas, a serem realizadas com o auxílio do *Software TFA*, envolvendo diversas definições e propriedades, no que diz respeito aos conceitos de pontos, retas, círculos e curvas. Ao serem propostos os objetivos para cada uma das atividades, acredita-se ter sido alcançada a finalidade de se estudar o TFA. Como Produto Educacional, fruto desta Dissertação, apresentam-se atividades investigativas que podem ser desenvolvidas no Ensino Médio, em se tratando do estudo dos Polinômios.

- **Desenvolver as atividades com alunos do 3º ano do Ensino Médio, de uma escola militar.**

Esta pesquisa de campo foi realizada com alunos do 3º ano do Ensino Médio, de uma escola militar, no Sul do Estado do Rio de Janeiro, no segundo semestre de 2012. Após a elaboração e o desenvolvimento de atividades investigativas utilizando o *Software TFA*, foi possível estabelecer categorias que coadunaram na análise de fatos pertinentes ao uso do *Software* TFA, o que, de forma eficaz, fez-nos enxergar o processo de ensino e aprendizagem do TFA, conforme fora descrito anteriormente.

- **Identificar as contribuições oriundas do desenvolvimento das atividades para o ensino e a aprendizagem do Teorema Fundamental da Álgebra (TFA).**

Ao longo desta pesquisa, faz-se, descritiva e sistematicamente, menção a todas as contribuições em que o uso de tecnologias e do computador favoreceu a prática educativa. No caso desta pesquisa, em se tratando do estudo do Teorema Fundamental de Álgebra (TFA).

6.1. O envolvimento na aprendizagem do TFA, mediado pelo Ambiente Computacional de Aprendizagem, com a utilização das TICs.

A presente pesquisa comprovou que o ensino do Teorema Fundamental da Álgebra (TFA) a partir do uso do *Software* TFA, por meio de atividades investigativas em que foram explorados os itens Pontos, Curvas e Círculos e Polinômios no $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, contribui para que professor e alunos efetivem a construção do conhecimento matemático. No caso, envolvendo a prática da visualização e da experimentação no processo educacional.

Tendo em vista que esse processo não ocorre isoladamente, o uso do computador e do *software* foi fundamental para que se pensasse e refletisse acerca da aprendizagem do conceito de Teorema. Dessa forma, o ambiente computacional de aprendizagem proporcionou aos Sujeitos desta pesquisa uma visão crítico--construtiva, ainda que não se conhecesse, em profundidade, o conteúdo matemático em questão. Eles desenvolveram, no mínimo, autonomia. Além disso, estabeleceram correlações entre as imagens geradas, com a aplicação do *Software* TFA, e raízes dos Polinômios. Tal observação foi de grande importância para uma compreensão tangível de que qualquer Polinômio possui raízes.

6.2. O *Software* TFA como ferramenta no processo de ensino e aprendizagem do TFA

A presente pesquisa ratifica que o envolvimento no processo de ensino--aprendizagem, principalmente com o uso das TICs, é crucial para a construção do conhecimento. Por essa razão, ao elaborarmos as atividades investigativas com o *Software* TFA, foi perceptível o quanto se contribuiu para o domínio do TFA.

Além disso, de forma significativa, vislumbraram-se algumas outras possibilidades de aplicação a outros campos da Matemática, no que se refere ao uso do *Software* em questão. Entendemos com isso que o seu uso e a maneira como foi utilizado é que proporcionaram o efetivo entendimento do TFA, pois o que ocorreu foi a escolha de um *software* em função de uma proposta de ensino e de aprendizagem. Ou seja, primeiramente houve a estruturação de uma proposta pedagógica para que nela se aplicasse um recurso midiático.

Em detrimento disso, o pesquisador sempre esteve voltado para as relações existentes entre os seres humanos e as máquinas. No desenvolvimento desta pesquisa não foi diferente: o aluno esteve no centro das atenções, sendo considerado um ser ativo. O professor, um mediador no processo educacional, orientando as atividades propostas, a serem executadas.

6.3. **Contribuição para o desenvolvimento do ensino e da aprendizagem do TFA para alunos do Ensino Médio**

Entende-se que, em um mundo globalizado e regido por rápidas mudanças tecnológicas, a escola, a educação e a tecnologia fazem parte desse mundo. Sendo assim, para que o ensino e a aprendizagem da Matemática se consolidem, sem falsas expectativas, deve haver interação entre os sujeitos envolvidos nesse processo.

Ao concluirmos esta pesquisa, a importância das práticas pedagógicas estarem aliadas ao uso da Informática Educacional foi mais uma vez reconhecida. Logo, ao se falar na possibilidade de uso das TICs na sala de aula, não se deve pensar meramente em um aparato de máquinas e/ou programas educacionais, mas, na adoção de práticas que valorizam a escola, o aluno e o professor, em prol da construção e aplicação de conceitos, em pauta, o Teorema Fundamental da Álgebra (TFA).

Referências

ABRAMI, P. E BURES, E. (1996). *Computer-supported collaborative learning and distance education. The Am. J. Dist. Ed., 10* (2), 37-47.

ACKER, F. *“Teorema Fundamental da Álgebra.” Cálculo Avançado II.* Rio de Janeiro, Rio de Janeiro: UFRJ, 2009.

ACKER, F. *O Teorema Fundamental da Álgebra e uma pequena introdução às formas diferenciais.* Minicurso EQUAÇÕES POLINOMIAIS: ANÁLISE, GEOMETRIA E TOPOLOGIA. IV Encontro dos Estudantes de Matemática da UFPA, 2012.

ALVES, D. O. *Ensino de funções, limites e continuidade em Ambientes Educacionais Informatizados: uma proposta para cursos de Introdução ao Cálculo.* Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto: Ouro Preto, 2010.

ALLEVATO, N.S.G. *Associando o computador à resolução de problemas fechados: análise de uma experiência.* Tese (Doutorado em Educação Matemática). Rio Claro: Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, 2005.

AMORA, A. S. *Minidicionário Soares Amora da língua portuguesa.* São Paulo: Saraiva S/A, 2009.

ARAÚJO, I.B. *Uma abordagem para a prova com construções geométricas e Cabri-Gèomètre.* Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade de São Paulo, PUC-SP, 2007.

BALACHEFF, N.In: BISHOP, A., S. MELLIN-OLSEN, e J. VAN DORMOLEN. “Benefits and limits of social interaction: the case of teaching.” *International Newsletter on the Teaching*, 1991: p. 175-192.

BARBOSA, J.C. *Modelagem matemáica: concepções e experiências de futuros professores.* Rio Claro - SP: Universidade Estadual Paulista - UNESP, 2001.

BORBA, M. C., CONFREY, J. *"A student´s construction of transformations of functions in a multiple representational environment".* Educational Studies in Mathematics, n.31, p. 319-37, 1996.

BOGDAN, R. C.; BIKLEM, S. K. *Investigação qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora, 1994.

BORBA, M. C. *Tecnologias Informática na Educação Matemática e Reorganização de Pensamento.* In: BICUDO, M. A. V. (ORG.) *Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas.* São Paulo: UNESP, 1999.

BORBA, M.C. *Software e Internet na sala de aula de Matemática.* Artigo (X Encontro Nacional de Educação Matemática, Cultura e Diversidade), Salvador-BA , 7 a 9 de julho de 2010.

BORBA, M. C., ARAUJO, J. L., FIORRENTINI, D., GARNICA, A. M., BICUDO, M. A. V. *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática.* Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

BORBA, M.C., e J. CONFREY. “"A estudent´s construction of transformation in a multiple representational environment".” *Educational Studies in Mathematics, n° 31; pp. 319-371*, 1996: 319-371.

BORBA, M. C. . *Educação a distância online.* Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

BORBA, M. C., PENTEADO, M. G. *Informática e Educação Matemática.* Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

BICUDO, M. A. V. “Pesquisa em Educação Matemática.” *Revista Pró-Posições Vol. 4* , março de 1993: 01-09.

BICUDO, M. A. V. *Filosofia da Educação Matemática.* Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

BONILLA, M.H.S. (1995). *Concepções do Uso do Computador na Educação. Espaços da Escola,* Ano 4, n. 18. Ijuí.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Fundamental.* Brasília, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Ensino Médio. Brasília, 2000.

CONTADOR, P. R. *Matemática, uma breve história.* São Paulo: Livraria da Física.

COURANT, R.; ROBBINS, H. *O que é Matemática?* Rio de Janeiro: Ciência Moderna Ltda, 2000.

DÁMBROSIO, B. S. *Formação de Professores de Matemática para o Século XXi:* o grande desafio. In: *Pró-Posições, Revista da Faculdade de Educação/* UNICAMP, v. 4, n.1 [10]. Campinas, p. 35-45, 1993.

D’AMBROSIO, U. (1997) *Transdisciplinaridade*. São Paulo: Editora Palas Athenas. D’Ambrósio, U. (1994a).*Comportamento e Conhecimento*. Brasília: Universidade de Brasília - Faculdade de Educação (Apostila 4p).

D’AMBRÓSIO, U. (1994b). *As Novas Possibilidades Oferecidas pela Informática”.* In: *Ciências, Informática e Sociedade - Uma Coletânea de Textos*. Brasília: Universidade de Brasília - Faculdade de Educação. p.25-28.

D'AMBROSIO, U. (1993) *Educação Matemática: Uma Visão da Arte.* In: Pro-Posições, v.4,n.1 [10], p.7-17.

D'AMBROSIO, U. (1991) *Matemática, Ensino e Educação: Uma Proposta Global.* In: Temas eDebates, SBEM, Ano IV, n.3, p.1-16.

D'AMBROSIO, U. *Etnomatemática: Arte ou Técnica de Explicar ou Conhecer*. São Paulo: Editora Ática, 1990.

DEDE, C. (1996). *The evolution of distance education: Emerging technologies and istributed* learning. *Am. J. Distance Ed.*, *10* (2), 4-36.

DUVAL, R. *Argumenter, demontrer, expliquer: continuite ou rupture cognitive.* França: IREM de Strasbourg, 1993.

FERREIRA, L. MAGNO. *Álgebra: como as crenças dos professores influenciam na aprendizagem dos alunos.* Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Universidade Federal do Rio de Janeiro. UFRJ, 2009.

FIORENTINI, D., e A. (orgs) (2003) JIMENEZ. *História de aulas de matemática: compartilhando saberes profissionais.* Campinas: CEMPEM, 2003.

FIORENTINI, D., e M.A. (Orgs.) (2001) MIORIM. *Por trás da porta, que matemática acontece?* Campinas: Unicamp, 2001.

FUNDAMENTAL, BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais (5.ª a 8.ª séries). Brasília: MEC, 1998.* Brasília: MEC, 1998.

FREIRE, P. *Pedagogia do Oprimido.* Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1987.

G., HANNA. *Challenges to the importance of proof. For the Learning of Mathematics.* 1995.

GONÇALVES, I. A. *Informática e Educação: panorâmica da produção intelectual brasileira.* Educação & Tecnologia. Belo Horizonte, v. 5, n. 1, p. 43-54, 2000.

GONÇALVES, E. P. *Conversas sobre iniciação à pesquisa científica.* Campinas: Alínea, 2005.

HARASIM, L. (1987) *Teaching and learning online: issues in designing computer-mediated graduate courses*. *Canadian J. Educational Communication*, *16* (2) 117-135.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M. *A Aprendizagem da Matemática em Ambientes Informatizados*. Congresso Ibero-Americano de Informática na Educação, IV, Brasília, 1998. Disponível em: <lsm.dei.uc.pt/ribie/docfiles/txt200342413933117.PDF>. Acesso em 03 de janeiro de 2013.

KENSKI, V. M. *Educação e Tecnologia: O novo ritmo da informação.* Campinas: Papirus, 2007.

IEZZI, Gelson. *Fundametos da Matemática Elementar, vol. 6.* São Paulo: Atual, 1993.

IEZZI, Gelson. *Fundamentos da Matemática Elementar, vol. 6.* São Paulo: Atual, 2005.

JAVARONI, S. L. *Abordagem geométrica: possibilidades para o ensino e aprendizagem de Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias.* Tese (Doutorado em Educação Matemática), Universidade Estadual Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2007.

JUNIOR, P. R. O. *Elicitação de requisitos de softwares através da utilização de questionários.* Dissertação (Mestrado em Informática). Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. PUC-Rio, 2005.

KILPATRICK, J. "Rosearch on mathematical learning and thinking in the United States." *Em Actes du 5° Colloque PME (pp. 18-29) Girenoble*, 1981: 18-29.

LÉVY, P. *As Tecnologias da inteligência : o futuro do pensamento na era da Informática.* Rio de Janeiro: Editora 34, 1993.

LORENZATO, S. *Por que não ensinar Geometria?* In: Educação Matemática em Revista. São Paulo: SBEM, v. 4, 1995.

MADDUX, C. D., JOHNSON, D. L., WILLIS, J. W. (1997) *Educational Computing: Learning with Tomorrow's Tecnologies*. 2nd Ed. Needham Heigths, MA: Allyn & Bacon.

MALHEIROS, A. P. S. *A produção matemática dos alunos em um ambiente de modelagem.* Dissertação (Mestrado em Educação Matemática).Universidade Estadual Júlio Mesquita Filho, UNESP-Rio Claro, 2004.

MARIOTTI, M. A. *La preuve en Mathématique. La Revue Canadienne de L'énseignement des Sciences, des Mathématiques et des Tecnologies.* 2001.

MEIRA, L. Making sense of Instructional Devices : The emergence of Transparence in Mathematical Activity, Journal for Research in Mathematics Education, vol. 29, n. 2, pp. 121-142, 1998.

MISKULIN, R.G.S. *Concepções Teórico-Metodológicas sobre a introdução e a utilização de computadores no processo ensino/aprendizagem de Geometria.* Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação. Campinas, 2009.

MORAN, J. M. Ensino e Aprendizagem inovadores com Tecnologias Audivisuais e Telemáticas. In: MORAN, J. M.; MASSETTO, M. T.; BEHRENS, M. A. (Orgs.) *Novas Tecnologias e Mediação Pedagógica.* Campinas: Papirus, p. 11-65, 2000.

NÓVOA, A. Formação de professores e profissão docente. In: NÓVOA, A. (Org.). *Os professores e a sua formação.* Lisboa: Dom Quixote, 1995.

OKAMOTO, T.; CRISTEA, A. E KAYAMA, M. (2001). *Future integrated learning environments with multimedia. J. Comput. Assist. Learn.*, *17*, 4-12.

PENTEADO, M. G. Possibilidades para a formação de professores de matemática. In: PENTEADO, M. G.; BORBA, M. C. (Orgs.). *A informática em ação:* formação de professores, pesquisa e extensão. São Paulo: Olho d'água, 2000.

PENTEADO, M. G. Novos Atores, Novos Cenários: discutindo a inserção dos computadores na profissão docente. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). *Pesquisa em Educação Matemática:* concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999.

PIETROPAOLO, R. C. "Anais do III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática." *Demonstrações e Educação Matemática Uma Análise de Pesquisas Existentes*, 11-14 de outubro de 2006.

PIERCE, R.; STACEY, K. Observations on Student's responses to learning in a CAS Environment. *Mathematics Education Research Journal*, pp. 28-46, 2001.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações Matemáticas na Sala de Aula.* Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

PONTE, J. P. *O computador: um instrumento da Educação.* Lisboa. Texto Editora, 1986.

PIMENTEL, R. A.; PAULA, M. J. *A dinâmica dos processos de aprendizagem em uma atividade de investigação*. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, IX, Belo Horizonte, 2007. Anais... Recife: SBEM, p. 1-16, 2007.

_______. *Tecnologias de Informação e Comunicação da Formação de Professores: Que Desafios? Revista Iberomericana e Educcación, nº 24, p. 63-90, 2000.* Disponível em < http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/00-Ponte-TIC%20(rie24a03).pdf> . Acesso em 20 janeiro de 2013.

REZENDE, M. C., BORGES, O. *Perfis de entendimento sobre o uso de tecnologias na Educação Matemática.* Artigo em Educação Matemática. Universidade Federal de Minas Gerais, s/d. SANTOS, R. S. *Tecnologias digitais na sala de aula para aprendizagem de conceitos de Geometria Analítica: manipulações no software Grafequation*. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2008.

RICHIT, *A. Projetos em Geometria Analítica usando software de Geometria Dinâmica: Repensando a Formação Inicial Docente em Matemática.* Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

SANTOS, I. N. *Explorando conceitos de geometria analítica plana utilizando tecnologias da informação e comunicação: uma ponte do ensino-médio para o ensino superior construída na formação inicial de professores de matemática.* Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) , Universidade Federal de Ouro Preto -UFOP-MG, 2011.

SANTOS, S. C. *A Produção Matemática em um Ambiente Virtual de Aprendizagem: o caso da geometria euclidiana espacial*. 2006. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

SILVA, C. R. *Explorando equações cartesianas e paramétricas em um ambiente informático.* Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2006.

SOARES, L. H. *Aprendizagem significativa na Educação Matemática: uma proposta para aprendizagem de geometria básica.* Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal da Paraíba. João Pessoa, 2009.

SOUZA, M. J. A. *Informática Educativa na Educação Matemática.* Dissertação (Mestrado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará. Fortaleza: 2001.

SKOVSMOSE, OLE. *Desafios de reflexão em educação matemática crítica.* Campinas - SP: Papirus, 2008.

TARDIF, M., C. LESSARD, e L. LAHAYE. “Os professores face ao saber: esboço de uma problemática do saber docente.” *Teoria e Educação, n° 4, p.289-290*, 1991: 289-290.

TIKHOMIROV, O. K. The psychological consequences of computerization. In: WERTSCH, J. V. (Ed.). *The concept of activity in Soviet Psychology*. New York: M. E. Sharpe, p.256-278, 1981.

TRIKIC, A. (2001). *Evolving open learning environments using hypermedia technology. J. Comput. Assis. Lear. 17* (2), 186-199.

VALENTE, J. A. Por que o computador na Educação? In: VALENTE, J. A. (Org.). *Computadores e Conhecimento:* repensando a Educação. Campinas: UNICAMP/NIED, p. 24-44, 1993.

______________. Análise dos diferentes tipos de software usados na Educação. In: VALENTE, J. A. (Org.). *O Computador na Sociedade do Conhecimento*. Campinas: UNICAMP/NIED, p. 89-99, 1999.

______________. *O Logo hoje.* Actas do II Congresso Ibero-Americano de Informática na Educação. Lisboa, v. 1, 1994.

VARELLA, M. *Prova e demonstração na Geometria Analítica: uma análise das organizações didática e matemática em materiais didáticos.* Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2010.

VENTURI, J. J. *Álgebra Vetorial e Geometria Analítica.* Curitiba: Positivo, 2003.

VILLARREAL, M. E. *O pensamento matemático de estudantes universitários de Cálculo e tecnologias informáticas.* Tese (Doutorado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 1999.

VILLARREAL, M. E. *O Pensamento Matemático de Estudantes Universitários de Cálculo e Tecnologias Informática.* 1999. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1999.

ZANETTE, E. N. *Informática na Educação Matemática: O uso do computador no Processo Educativo no Curso de Licenciatura em Matemática na Perspectiva de Aperfeiçoamento e Prática Profissional.* Dissertação (Mestrado em Educação), Criciúma, SC, 2000.

ZULATTO, R. B. A. *Professores de Matemática que utilizam Software de Geometria Dinâmica: suas características e perspectivas*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 2002.

ZULATTO, R. B. A. *A Natureza da Aprendizagem Matemática em um Ambiente Online de Formação Continuada de Professores*. 2007. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2007.

APÊNDICE 1 - A Pesquisa de Campo: Descrição dos Diálogos e Desenvolvimento das Atividades

1º Encontro: 16/10/2012

Projeto de Campo: "O Uso de Tecnologias da Informação e da Comunicação no Ensino do Teorema Fundamental da Álgebra:

o software TFA."

Descrição do Encontro

Objetivo: Identificar e registrar, a partir de um diálogo e de apresentação e resposta ao questionário, o conhecimento do aluno sobre o uso das TICs, o uso de algum *software* no decorrer de suas atividades acadêmicas e sua relação com o *Teorema Fundamental da Álgebra TFA.*

Pesq.: Vocês conhecem ou já ouviram falar sobre as Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs)?

[Os sujeitos da pesquisa disseram que sim. Compartilham que há uma necessidade de tecnologias durante a realização das aulas de Matemática de uma forma mais eficiente].

Pesq.: Mas que tecnologias seriam essas?

[Os sujeitos da pesquisa foram unânimes em responder que o computador, por exemplo, deveria ser utilizado em todas as aulas, não apenas na aula de Informática ou, em algumas aulas. Em Matemática, a utilização do computador seria fundamental, servindo como suporte para as atividades propostas e desenvolvidas.]

Pesq.: Então as TICs pressupõem o uso de computador. Nesse caso, no uso de um *software, obviamente, o computador* será objeto de nossa pesquisa. Vocês já utilizaram algum *software* para o desenvolvimento dos seus estudos?

[**Aluno A**: Já utilizei o *GeoGebra* no estudo de Funções, principalmente na resolução de problemas de Cálculo.]

[**Aluno B**: Utilizei o Google, o *GeoGebra* nos estudos de uma forma geral, desde que estava no cursinho preparatório para o Colégio Naval.]

[**Aluno D**: Não costumo usar o computador para esse fim, mas compreendo a importância da utilização.]

[**Aluno C**: Já utilizei e utilizo *Wolfran*. Acho mais completo que qualquer outro *software* no mercado.]

[**Aluno E**: Sim, utilizo o *software* principalmente no estudo de Geometria. Como tenho dificuldade de enxergar algumas figuras, o *software* contribui para o entendimento. Mas, às vezes, continuo com dúvidas.]

Pesq.: Todos os softwares até agora mencionados não foram desenvolvidos no Brasil. Vocês conhecem algum *software* que foi desenvolvido no Brasil?

[Todos os sujeitos da pesquisa forma unânimes em responder que nunca pensaram sobre isso. Até mesmo desconhecem que exista um *software* brasileiro com as mesmas características dos anteriormente citados.]

Pesq.: Vocês têm aula de programação. E usa a linguagem Java. Já pensaram em desenvolver algum software para o estudo de Matemática?

[**Aluno A, aluno B, Aluno D** não pensaram nem tentaram desenvolver algum *software* para o estudo de Matemática.]

[**Aluno C**: Estou com um projeto de desenvolver uma Plataforma na Web que possa contribuir com o uso de ensino de Matemática. Ainda não tenho o nome específico do projeto, mas é com o uso de Geometria.]

Pesq.: Em nossa pesquisa o uso do computador é fundamental, pois vamos utilizar um *software* inteiramente brasileiro no estudo *do Teorema Fundamental da Álgebra (TFA).* Vocês recordam o TFA?

[**Aluno A**: Sim. Estudamos o com a professora X na disciplina de Álgebra aqui no colégio, mas não me lembro exatamente.]

[**Aluno B**: Sim. Foi quando estudei Função Polinomial. Só sei que temos que igualar a zero e decompor, em fatores de 1º grau, a Função.]

[**Aluno C**: Sim, mas não lembro exatamente. Só sei que é importante no estudo das Equações Polinomiais.]

[**Aluno D:** Sim. Não compreendi muito bem isso. Quando o senhor expôs para nós a pesquisa, fiquei curioso e fui olhar no livro. Mas fiquei curioso e pensando se isso poderia gerar algo a mais daquilo que li.]

Pesq.: Dirigindo-se ao aluno D: Mas o que você chama de "gerar algo mais?"

Aluno D: Se existiria alguma imagem que o computador pudesse fazer de um Polinômio! Isso é estranho para mim. Polinômio? Não sei, não! Acho que isso deve ser legal! Mas ainda não entendo! Se for Função até entendo. Mas, Polinômio...

[**Aluno E**: Não respondeu, pois tinha que se retirar. Mas pediu para participar dos próximos encontros, pois naquele dia e hora teria que viajar para o Rio de Janeiro. O aluno estava fazendo, no dia seguinte, a 2ª etapa do exame do Instituto Militar de Engenharia (IME-RJ).]

Pesq.: Então, retomando ao diálogo sobre o Polinômio, gostaria que vocês respondessem se Polinômio é o mesmo que Função Polinomial. Pois, pelos nossos diálogos, percebe-se que alguns falaram em Função Polinomial, e outros, em Equação Polinomial.

[**Aluno A**: Pra mim, é só igualar o Polinômio a zero, temos uma Equação Polinomial, certo? Mas, se for Função, tem que ter Domínio e Contradomínio e uma relação entre esse Domínio e esse Contradomínio. Pra mim, Polinômio é a mesma coisa que Função Polinomial.]

[**Aluno B**: Concordo com o aluno A. Posso decompor qualquer Polinômio que eu quiser, desde que se iguale a zero. Aí, quando eu decomponho, tenho os zeros. Se eu tiver com o computador, então a coisa fica melhor. Não? Vou tentar fazer isso no Geogebra. Mas não é isso professor?]. O pesquisador repassa a pergunta para o aluno C.

Pesq.: O que você acha aluno C? O aluno B respondeu corretamente?

[**Aluno C:** Vou pelos questionamentos dos outros colegas e do senhor. Acredito que há diferença, pois nos esquecemos de uma coisa importante, que é a definição. A gente sabe resolver muito bem a matemática envolvida, mas não sei responder se ele tem razão. Acho que não, apenas isso.]

[Há uma controvérsia, pois, nesse momento em que o Aluno C responde, os alunos A e D discutem que não poderiam ser a mesma coisa. No entendimento de A, expresso verbalmente, após sua resposta: “Pensando bem, ainda falando com o aluno D, acho que existe alguma sutileza nessa pergunta. Tenho que pensar melhor”. Aluno D responde que não vê erro na resposta de A, mas que a coisa não é complicada assim. Ambos escrevem algo no papel, e o pesquisador se aproxima para vê o que estavam fazendo. O aluno D escreve uma expressão $p(x) = x^2 - 3x + 2$ e fala para o aluno A que as raízes são 1 e 2. Disse que, se igualar $p(x) = 0$, daí tá certo. Polinômio pode ser Função].

Pesq.: E aí Aluno D, sua opinião?

[**Aluno D**: Ah, professor, não vejo diferença. Estava aqui agora falando com o Aluno A que podemos pegar um Polinômio $\boldsymbol{p(x) = x^2 - 3x + 2}$ e igualar a zero. Podemos tanto achar as raízes como fazer o gráfico dessa Função. Dirige-se ao pesquisador e pergunta: “Mas é ou não é Função, professor?”]

Pesq.: Aluno D, nosso objetivo é esclarecer, a partir desse diálogo, algumas informações que não estão claras. O nosso objetivo maior é, ao final desses encontros que faremos, esclarecer alguns pontos fundamentais sobre os Polinômios e, mais especificamente, sobre o TFA, que tem como objeto de nossa pesquisa o *software TFA*.

Pesq.: Os alunos criam uma expectativa e começam a questionar se o que aprenderam na aula de Álgebra estava errado, pois ficaram inquietos, e o Aluno C faz a seguinte pergunta: “Então tudo que aprendemos está errado? Podemos fazer pesquisas sobre o que dissemos aqui, professor?

Pesq.: Sim. É bastante interessante que vocês se sintam estimulados e não fiquem com dúvidas. Tenho certeza de que isso irá contribuir e muito com nossa pesquisa, mais adiante.

Pesq.: Senhores, o *Software TFA* foi idealizado pelo professor Felipe Acker, professor do Deptº de Matemática Aplicada da UFRJ, e programado pelo aluno de Engenharia Naval da UFRJ, Felipe Sequeira. É software *free*. Mas vou adiantar para vocês que é um *software* que trabalha com Polinômios. Especificamente tem seu viés no Teorema Fundamental da Álgebra. Estão dispostos a entender como funciona o *software* TFA?

[Nesse momento os alunos foram unânimes e disseram que sim, mas perguntaram: “Como seria isso? Um *software* brasileiro?].

[**Aluno D**: Isso funciona mesmo, professor?]

[**Aluno D**: Seria com a fatoração dos Polinômios.].

[**Aluno A**: Vai plotar o gráfico dos Polinômios.]

[**Aluno B**: Ah, então deve ser algo inédito, muito além de fatoração ou plotar gráficos. Deve ser algo além disso. Algo do tipo 3D, 4D, é isso, professor.]

[**Aluno C**: Nunca imaginei que o estudo dos Polinômios pudesse ter alguma aplicação prática. É igual ao assunto de Números Complexos. Pra que serve isso? Nunca entendi para que serve estudar Polinômios. Pra mim, não tem aplicação nenhuma.]

Pesq.: Nesse momento vocês responderão ao questionário que tem relação direta com o nosso diálogo. Tentem responder da forma mais sincera possível. Esse questionário tem o objetivo de identificar o nível de conhecimento sobre o uso do computador e sobre seus conhecimentos em relação ao Teorema Fundamental da Álgebra (TFA). Mais adiante elaboraremos nossas atividades com o uso do *software* TFA, com base nas respostas por vocês no questionário.

[Abaixo, as respostas dadas pelos Sujeitos da Pesquisa, em relação ao questionário.]

[Aluno A]

5) Questionário

UFJF- UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA- MG

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

QUESTIONÁRIO REFERENTE À PESQUISA:

TEMA: ***TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO (TICS) NO ENSINO DO TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA (TFA)***

Objetivo: Verificar o entendimento do Teorema Fundamental da álgebra com o uso de *TICs* (*software TFA*)

Professores: Dr. Orestes Piermatei Filho e Emerson Tomaz

1) A utilização do computador é importante nas suas práticas de estudos? Por quê?

A utilização do computador é muito importante nas práticas de estudos. Ele auxilia e complementa as atividades de estudo.

2) Já ouviu falar em Teorema Fundamental da Álgebra (TFA)? Em que ocasião? Por quê?

Sim. Estudando para o concurso do Colégio Naval.

3) Em linhas gerais, para que serve um Teorema? Justifique.

Serve para determinar o número de raízes de um polinômio de grau n. Sendo assim, um polinômio de grau "n" tem "n" raízes.

4) Sabe dar um exemplo sobre o TFA? Sabe enunciar o Teorema Fundamental da Álgebra (TFA)? Por quê? Justifique.

Não sei dar exemplo. Não lembro ao certo como enuncia perfeitamente o TFA.

5) Já presenciou alguma demonstração do TFA? De que maneira? Por quê?

Não. Nunca presenciei.

6) Já utilizou algum *software* para o entendimento do TFA? Qual? Em que ocasião? Se a resposta for não, então, em sua opinião, o *software* poderia ajudá-lo no entendimento do mesmo? Justifique.

Nunca utilizei nenhum software. Acredito que toda ferramenta é válida para auxiliar no entendimento de algo

7) O TFA é um teorema que se encontra nos estudos dos polinômios. Em sua opinião, qual a importância desse teorema para o estudo dos polinômios com a utilização do computador? Por quê? Justifique.

Esse Teorema, aliado ao computador, pode auxiliar e agilizar em muito os estudos dos mais complicados polinômios.

8) Saberia dar exemplo de exercício e resolvê-lo indicando a presença do TFA, na resolução do mesmo? Justifique.

Não.

9) É possível que, com o avanço de tecnologias, o TFA possa ter característica dinâmica, com o uso do computador. Em sua opinião, essa dinâmica, no contexto virtual, seria de que forma? Justifique.

Acredito que de forma mais fácil e acessível possível para qualquer pessoa com conhecimentos básicos poder utilizá-lo.

[Aluno B]

5) Questionário

UFJF- UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA- MG

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

QUESTIONÁRIO REFERENTE À PESQUISA:

TEMA: ***TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO (TICS) NO ENSINO DO TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA (TFA)***

Objetivo: Verificar o entendimento do Teorema Fundamental da álgebra com o uso de *TICs* (*software TFA*)

Professores: Dr. Orestes Piermatei Filho e Emerson Tomaz

1) A utilização do computador é importante nas suas práticas de estudos? Por quê?

Sim, porque existe uma maior praticidade no que tange as pesquisas e para obter livros de forma ágil e gratuita.

2) Já ouviu falar em Teorema Fundamental da Álgebra (TFA)? Em que ocasião? Por quê?

Sim. Na sala de aula do Colégio Naval quando estudamos sobre complexos e polinômeos.

3) Em linhas gerais, para que serve um Teorema? Justifique.

Para fundamentar determinado assunto.

4) Sabe dar um exemplo sobre o TFA? Sabe enunciar o Teorema Fundamental da Álgebra (TFA)? Por quê? Justifique.

Sim. Para um polinômeo de grau "n", existem "n" raí reais ou complexos, podendo ter raízes reais e complexos simulta neamente, para esse polinômeo.

5) Já presenciou alguma demonstração do TFA? De que maneira? Por quê?

Não.

6) Já utilizou algum *software* para o entendimento do TFA? Qual? Em que ocasião? Se a resposta for não, então, em sua opinião, o *software* poderia ajudá-lo no entendimento do mesmo? Justifique.

Não.

7) O TFA é um teorema que se encontra nos estudos dos polinômios. Em sua opinião, qual a importância desse teorema para o estudo dos polinômios com a utilização do computador? Por quê? Justifique.

É importante para uma melhor visualização e compreensão do teorema, visto que pelo computador obtemos recursos gráficos para resolução do teorema.

8) Saberia dar exemplo de exercício e resolvê-lo indicando a presença do TFA, na resolução do mesmo? Justifique.

Sim. O polinômeo x^2-1, pelo teorema fundamental da algebra, verifica-se a excistência de duas raízes, e de fato isso ocorre, pois: $x^2-1=(x+1)(x-1)$, sendo $x=1$ e $x=-1$ raízes do polinômio

9) É possível que, com o avanço de tecnologias, o TFA possa ter característica dinâmica, com o uso do computador. Em sua opinião, essa dinâmica, no contexto virtual, seria de que forma? Justifique.

Através da forma gráfica, pois se consegue uma melhor análise do comportamento do polinômeo.

[Aluno C]

5) Questionário

UFJF- UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA- MG

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

QUESTIONÁRIO REFERENTE À PESQUISA:

TEMA: ***TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO (TICS) NO ENSINO DO TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA (TFA)***

Objetivo: Verificar o entendimento do Teorema Fundamental da álgebra com o uso de *TICs* (*software TFA*)

Professores: Dr. Orestes Piermatei Filho e Emerson Tomaz

1) A utilização do computador é importante nas suas práticas de estudos? Por quê? Sim, porque facilita muito a pesquisa de novas informações.

2) Já ouviu falar em Teorema Fundamental da Álgebra (TFA)? Em que ocasião? Por quê? Sim, no Colégio Naval, no estudo de polinômios

3) Em linhas gerais, para que serve um Teorema? Justifique.
Um teorema serve para explicar um cálculo ou técnica, conceitualmente.

4) Sabe dar um exemplo sobre o TFA? Sabe enunciar o Teorema Fundamental da Álgebra (TFA)? Por quê? Justifique.
Não sei enunciar perfeitamente, mas diz respeito ao número de raízes de um polinômio ser igual ao seu grau.

5) Já presenciou alguma demonstração do TFA? De que maneira? Por quê?

Sim, no site Wolfram Alpha, por curiosidade.

6) Já utilizou algum *software* para o entendimento do TFA? Qual? Em que ocasião? Se a resposta for não, então, em sua opinião, o *software* poderia ajudá-lo no entendimento do mesmo? Justifique. Sim, o Wolfram Alpha.

7) O TFA é um teorema que se encontra nos estudos dos polinômios. Em sua opinião, qual a importância desse teorema para o estudo dos polinômios com a utilização do computador? Por quê? Justifique.

Importante para saber identificar, somente através do gráfico, várias características do polinômio.

8) Saberia dar exemplo de exercício e resolvê-lo indicando a presença do TFA, na resolução do mesmo? Justifique.

Sim, por exemplo ao estudar multiplicidade de raízes as propriedades do TFA se fazem úteis.

9) É possível que, com o avanço de tecnologias, o TFA possa ter característica dinâmica, com o uso do computador. Em sua opinião, essa dinâmica, no contexto virtual, seria de que forma? Justifique.

Seria na forma de plotagem de gráficos e resolução de equações polinomiais

[Aluno D]

5) *Questionário*

UFJF- UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA- MG

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

QUESTIONÁRIO REFERENTE À PESQUISA:

TEMA: ***TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO (TICS) NO ENSINO DO TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA (TFA)***

Objetivo: Verificar o entendimento do Teorema Fundamental da álgebra com o uso de *TICs (software TFA)*

Professores: Dr. Orestes Piermatei Filho e Emerson Tomaz

1) A utilização do computador é importante nas suas práticas de estudos? Por quê?

Não apenas na disciplina de Informática o computador/internet é de grande ajuda: atualmente grande número de informação e conhecimento circula on-line, auxiliando o estudo de diversas disciplinas.

2) Já ouviu falar em Teorema Fundamental da Álgebra (TFA)? Em que ocasião? Por quê?

Já ouvi falar do TFA no cursinho de preparação para o concurso do Colégio Naval, durante uma aula de álgebra.

3) Em linhas gerais, para que serve um Teorema? Justifique.

Um teorema formaliza, enuncia um conhecimento ou teoria provados ou já verificados.

4) Sabe dar um exemplo sobre o TFA? Sabe enunciar o Teorema Fundamental da Álgebra (TFA)? Por quê? Justifique.

Não tenho certeza, mas acho que o TFA afirma que todo polinômio $p(x)$, de coeficientes complexos e grau n, apresenta n raízes complexas, não necessariamente distintas.

5) Já presenciou alguma demonstração do TFA? De que maneira? Por quê?

Não

6) Já utilizou algum *software* para o entendimento do TFA? Qual? Em que ocasião? Se a resposta for não, então, em sua opinião, o *software* poderia ajudá-lo no entendimento do mesmo? Justifique.

Já tive um contato superficial com um software chamado "Geogebra", que confeccionava gráficos e auxiliava na compreensão do comportamento de funções, que podem ser do tipo polinomiais.

7) O TFA é um teorema que se encontra nos estudos dos polinômios. Em sua opinião, qual a importância desse teorema para o estudo dos polinômios com a utilização do computador? Por quê? Justifique.

Não sei dizer.

8) Saberia dar exemplo de exercício e resolvê-lo indicando a presença do TFA, na resolução do mesmo? Justifique.

Não.

9) É possível que, com o avanço de tecnologias, o TFA possa ter característica dinâmica, com o uso do computador. Em sua opinião, essa dinâmica, no contexto virtual, seria de que forma? Justifique.

Com a ajuda do computador acredito ser possível resolver equações polinomiais e encontrar suas raízes com facilidade, bem como confeccionar gráficos.

APÊNDICE 2 - 2º *Encontro: 23/10/2012*

Projeto de Campo: "O Uso de Tecnologias da Informação e da Comunicação no Ensino do Teorema Fundamental da Álgebra: o software TFA."

Descrição do Encontro

Objetivo: Descrever e empregar o *software TFA* para os Sujeitos da Pesquisa, com o uso do computador: definição de Polinômio e reconhecimento das imagens geradas pelos comandos do *software TFA*.

Nesse encontro, basicamente, houve a oportunidade de expor aos alunos, no *data-show*, o *software TFA* e sua interface. O pesquisador fez um acordo com os Sujeitos da Pesquisa, no primeiro encontro, de que enviaria, por e-mail, os procedimentos para a instalação do *software TFA* em seus computadores.

emerson tomaz da costa <costatomaz@ig.com.br>
para mAlunoatheus.lima.s., amfneto, a.g.campos, jotavrj, caiodoreagt

Prezados amigos e alunos do XXX, aqui quem vos fala é o prof. Tomaz, bom dia!

Estou enviando os arquivos para a executarmos o software TFA na próxima terça-feira. Lembro da importância de levar os documentos assinados pelos responsáveis, exceção do Aluno A, e também por vocês. E também a conclusão das respostas do questionário respondido.

É importante levar o notebook com o software instalado para executarmos as atividades que fornecerei na terça.

Qualquer dúvida escreva para mim costatomaz@ig.com.br ou pode ligar a cobrar para (21) 2***-3181, ou (21) 7***-0952,

Esses comandos são os que podem ser instalados sem usarmos a internet, ok!
Baixar todos os anexos

COMO USAR.txt
1K Visualizar Baixar

EXECUTAR TFA.html
1K Visualizar Baixar

instrucoes.odt
15K Baixar

TFA.jar
42K Baixar

o endereço público do software é http://www.prov01.xpg.com.br/tfa.html

Abraço,

Tomaz

E-mail enviado aos Sujeitos da pesquisa para instalação do *software TFA.*

Contudo, houve problemas quanto à instalação do *software* pelos sujeitos da pesquisa, tanto com o sistema operacional quanto com falhas em alguns procedimentos. Outro fator a ser salientado é que, dos cinco alunos presentes, apenas um estava com seu computador, muito embora, anteriormente, fora combinado que cada um dos Sujeitos da Pesquisa deveria levar sua máquina. Em face disso, houve a necessidade de se mudar a estratégia para os próximos encontros. Acertou-se que seriam utilizados os computadores do laboratório de Informática do colégio, nos quais foi instalado o *software TFA*, estando disponível um computador por aluno.

A seguir, um relato do momento em que o pesquisador apresentou *o software TFA* com o recurso computacional e com a projeção na lousa. Na ocasião foram destacados aspectos importantes dos comandos do *software*.

Pesq.: Iremos utilizar o computador e projetaremos na lousa os objetivos do trabalho, com o tema da pesquisa, para que vocês entendam o que faremos nos próximos encontros. Certo? Mas, antes disso, irei escrever aqui na lousa a definição de Polinômio.

Seja p um Polinômio, de variável complexa, de forma que tenhamos

$$\boldsymbol{p}: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

em que, para cada $z \in \mathbb{C}$, tenhamos um $p(z) \in \mathbb{C}$, escrito na forma

$$\boldsymbol{p(z) = a_n\, z^n + a_{n-1}\, z^{n-1} + a_{n-2}\, z^{n-2} + \cdots + a\, z + a_0}.$$

Lembremos que $\boldsymbol{a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a, a_0}$ **são os coeficientes do Polinômio e** $\boldsymbol{z^n, z^{n-1}, z^{n-2}, \cdots, z}$ são as variáveis complexas, em que $\boldsymbol{z = a + bi}$**.**

[Aluno C: Mas então, vamos trabalhar com variáveis complexas com esse software? Certo?].

Pesq.: Correto.

[Aluno D: Professor, um número da forma $\boldsymbol{z^n}$ é uma potência em que vamos ter aquela fórmula... daquele matemático... como é o nome do Matemático, mesmo?].

Pesq.: Você quer dizer Moivre?

[Aluno D: Sim. Lembro que tem uma representação trigonométrica, certo?].

Pesq.: Sim.

[Alunos A, B, C, D e E: Os alunos começam a conversar e são unânimes em colocar que a presença dessa expressão matemática, referindo-se ao Polinômio, deve ser bastante complexa].

[Aluno D: Professor, teremos a presença de um ciclo trigonométrico em algum momento da exibição do *software*, certo?].

Pesp.: Por que você chegou a essa conclusão?

[**Aluno D:** Chegamos, professor, porque a fórmula de Moivre envolve isso de que falamos. Posso ir ao quadro e mostrar ao Senhor?].

Pesq.: Sim.

[**Aluno D**: A fórmula é assim – O aluno escreve na lousa: $z^n = \rho\,(\cos \mathrm{n}\,\theta + i\,sen\;n\theta$ – Então, como envolve Seno e Cosseno, tem a ver com o círculo trigonométrico. Mas esse *software* deve ser bem difícil, não?]

Pesq.: Gostaria que vocês analisassem primeiro os comandos que vou mostrar aqui e, depois, nas atividades, expressem suas conclusões sobre o *software TFA*.

Pesq.: Bom, vocês viram que o Polinômio tem a forma apresentada com variáveis complexas e que nada, em parte, difere do que vocês já estudaram com a professora de vocês no 3º ano (ref. ao 3º ano do Ensino médio) do colégio. Certo?

[Alunos: Todos concordaram com a fala do pesquisador, dizendo: sim, certo, ok**].**

Nesse momento o pesquisador faz a apresentação do *Software TFA* aos alunos e trabalha com alguns Polinômios, a fim de prepará-los para as atividades que fariam nos próximos encontros.

Pesq.: Bom, senhores, esse é o *software* (referindo-se ao *software TFA*, projetado na lousa) e que foi idealizado pelo professor Felipe Acker, professor da UFRJ, criado na Linguagem Java, pelo aluno de Engenharia Naval da UFRJ, Felipe). Nós temos aqui o panorama geral do *software*. Essa área da esquerda e a da direita é a que vamos chamar de área de trabalho. Observem que temos pares de eixos em ambos os lados.

Pesq.: Observem que temos os comandos *R em R, em Ponto*, *C em C, em Ponto*, *C em C, em Linha*, e o comando *Círculo*. Conforme vocês estão vendo, estes comandos ficam na parte de baixo. Mais acima temos as janelas, em que, à direita das mesmas, estão aparecendo as variáveis complexas z, com seus respectivos graus, de zero a dez. Perceberemos que o comando *Polinômio* nos possibilitará, uma vez inseridos os coeficientes nesses espaços das janelas, vermos as imagens geradas na área de trabalho. Certo?

Pesq.: Os coeficientes inseridos podem ser reais ou complexos.

Pesq.: Vou entregar-lhes a primeira atividade para que vocês possam associar o que estamos expondo e, paralelamente, o que está sendo pedido na atividade, ok?

[**Alunos**: Unânimes dizem ok!]

[**Alunos A, B, C, D e E**: Podemos ler, em poucos minutos, o que está aqui na atividade?].

Pesq.: Sim. É claro. Cinco minutos? Ok?

Pesq.: Podemos começar?

[**Alunos**: Sim.]

Pesq.: Vamos inserir aqui os coeficientes, por exemplo, 1, 2, -2 e 3. Certo?

Pesq.: Qual é o grau desse Polinômio?

[**Alunos:** São unânimes em dizer: É de grau três.]

Pesq.: Se o Polinômio é de grau 3 (três), então ele tem quantas raízes?

[**Alunos:** São unânimes em dizer três raízes**.**]

Pesq.: Nesse caso, as raízes podem ser...?

[**Alunos:** Podem ser reais ou complexas.]

Pesq.: Vamos utilizar o corpo maior (referindo-se ao corpo dos Números Complexos).

Pesq.: Por exemplo, vamos utilizar o comando R em R ponto.

Pesq.: O que é R em R ponto? Façamos o seguinte: cliquemos com o *mouse* na área de trabalho à esquerda, certo? Notem as imagens que aparecem.

Pesq.: Vocês estão vendo pontos, no Domínio Real, indo para onde?

[Alunos: (Foram unânimes na resposta: **Indo para a Imagem Real].**

[**Aluno A:** Por que o Domínio está sendo representado no eixo vertical?]

Pesq.: Qual a sua dúvida em relação à representação do Domínio dessa forma?

[**Aluno A:** É que, quando estudamos o Domínio, ele aparece no eixo horizontal, certo?]

Pesq.: Aluno A, note que não há prejuízo na representação gráfica se colocarmos o Domínio dessa forma diferenciado (Conversando com o idealizador – prof. Felipe Acker – sobre isso, ele esclareceu que essa forma diferente de representação é para se sair do convencional: fazer diferente).

Pesq.: Por exemplo, se construirmos um conjunto $\mathbf{A}\,(\oplus,\ \otimes,)$, em que $\oplus$ representa a adição, e $\otimes$ representa a multiplicação, nesse conjunto, poderemos ter que $2 \oplus (\mathbf{2} \otimes 3) = -3$.

[Aluno B: Podemos fazer isso, professor?**]**

Pesq.: Aluno B, a Matemática não é engessada. Ela faz parte de um construto. Isso que falei é apenas um reflexo de que os conjuntos que conhecemos usualmente foram construídos. E, se houver a base matemática, de modo que consigamos provar que isso é possível, é claro que é perfeitamente aceitável.

[**Aluno B:** Não sabia disso.]

Pesq.: Voltemos à questão: clicando na área de trabalho da esquerda, formam--se pontos, referentes ao Polinômio, que se dirigem para a área de trabalho da direita. Vejam que alguém que mora nessa região (par de eixos à esquerda) vai para a área da direita. Certo?

Pesq.: A grande sacada do *software* é quando utilizarmos o comando Círculo, sobre o que não quero adiantar nada, no momento, para não antecipar as atividades que virão.

Pesq.: Então, utilizaremos o computador para desenvolver as atividades propostas. Seguindo rigorosamente o que está escrito aí, nas atividades, poderemos ter uma resposta ou parâmetro a nossa pergunta-diretriz da pesquisa. Por exemplo: Na atividade de número 1, temos dois Polinômios (a) e (b). Demos todos os passos para vocês seguirem o que está escrito aí. E irão obviamente responder.

Pesq.: Então, como falei com aluno A, qual o objetivo dessa pesquisa? Esse *software* é *free*. Qualquer colaboração de inserção de ideias que melhorem o *software* será muito bem-vinda, também.

Pesq.: Vocês têm alguma pergunta?

[**Aluno A:** Podemos plotar qualquer gráfico com esse *software*?]

Pesq.: Não. Esse software é específico para plotar gráficos relacionados ao Polinômio. E, mais especificamente, ao estudo do Teorema Fundamental da Álgebra.

Pesq.: Esse programa roda *off-line*. Passei para o e-mail de vocês o TFA.Jar e o Executar. Quando clico com o *mouse* à direita na parte Executar, eu posso abrir esse programa tanto com o Google Crome quanto com o Internet Explorer. Quando o programador hospedou esse programa no site da Bol, o programa não abria corretamente. Por esse motivo, às vezes vai abrir com Google Crome, outras, com o Explorer. Vai depender de seu Servidor. Correto? Vocês não precisam ter um computador robusto para empregar esse *software*. Mas é necessário que o instalem via Internet ou, o gravem em algum pen drive, para a instalação, ok?

[**Aluno A:** Então, professor, tipo, eu tentei abrir no meu computador e não consegui**.**]

Pesq.: Qual é o seu Sistema Operacional, Aluno A?

[**Aluno A:** Linux.]

Pesq.: Não sei te responder. Mas acho que, com o Linux, não abre. Pois preciso verificar isso, posteriormente.

[**Aluno B:** O Linux não possui o Java.]

Pesq.: Há, sim. Eu realmente, Aluno B, não sabia disso.

Pesq.: Vou mostrar a vocês o Comando-Círculo. Só para vocês terem uma ideia. Vou colocar o coeficiente 1, 2, 3+i, nas janelas, e clicaremos no Comando-Círculo.

Pesq.: O que vocês estão observando?

[**Alunos A, B, C, D e E:** São unânimes em responder que veem um círculo do lado esquerdo e, outro círculo, ou espécie de um círculo, do lado direito.]

Pesq.: Os alunos ficaram curiosos com a figura formada no lado direito. Começaram a perguntar entre si o que poderia ser aquilo, e os pontos que aparecem na área de trabalho do lado esquerdo.

Pesq.: Notei que o aluno B respondeu aos colegas que poderia ser algo semelhante a uma superfície, pois estava estudando Cálculo II e viu algo parecido.

[Aluno C: Cara (referindo-se ao Aluno B), define pra gente o que é uma Superfície, entende?]

[**Aluno B:** Não sei definir isso, ainda. Mas a imagem que ficou em minha cabeça é que se parece com uma superfície.]

Pesq.: Gostaria de uma pausa. Como vocês estão em período de prova, talvez tenhamos que negociar os nossos próximos encontros, ok?

Pesq.: É importante que vocês comecem a manusear o *software* em casa, já com a primeira atividade em mão. É importante vocês falarem, pois esse é o objetivo da pesquisa. A participação é fundamental, tudo bem?

Pesq.: O Aluno A falou sobre sua preocupação quanto à realização das atividades, pois estariam, nas datas estabelecidas, em semanas de provas e/ou de atividades militares para o ensaio da formatura, inclusive.

Pesq.: O que sugeririam para os próximos encontros?

[Alunos: O Senhor tem prazo para a entrega da pesquisa?]

Pesq.: Tenho prazo. Mas também não quero atrapalhar vocês. Sei que são bem intensas as atividades.

[Alunos: Foram a favor de mais de um encontro por semana, no mês de novembro.]

Pesq.: Essas preocupações nascem, pois as adversidades de tempo eram evidentes. Alguns alunos teriam, nos dias 05 e 06 de novembro, recesso ou, outras atividades. Pois, por se tratar de alunos que estudam em regime de internato em escola militar, qualquer situação poderia acontecer. Mas também poderiam ter a liberação nesses dias, e isso seria de fundamental importância.

[Aluno B: Professor, pode marcar nesses dias, ou, para os dias 06 e 07.]

Pesq.: O Aluno B é o mais antigo. Essa colocação "mais antigo" refere-se ao aluno que exerce a liderança sobre os demais.

[Aluno B: Professor, pode ser o dia em que o Senhor quiser.]

[Alunos: Vamos marcar duas atividades para o dia 06 e duas outras para o dia 07 de novembro.]

Pesq.: Todos estão de acordo?

[Alunos: Sem problemas, professor.]

Pesq.: Senhores, obrigado pela presença. Desculpem-me por ocupar os espaços dos senhores.

APÊNDICE 3 - 3º Encontro: 05/11/2012

Projeto de Campo: "O Uso de Tecnologias da Informação e da Comunicação no Ensino do Teorema Fundamental da Álgebra:

O software TFA."

Descrição do Encontro

Objetivo: Os Sujeitos da Pesquisa, com o uso do computador, r*esponderão às atividades exploratórias 1 e 2, empregando o software TFA.*

Pesq.: Houve um problema nesse encontro. O Oficial de Serviço (Plantão) avisou ao pesquisador que os alunos, por ordem do Sr. Comandante, não poderiam ir ao encontro, pois estariam envolvidos em atividades do quartel e nos preparativos da formatura.

[**Aluno B:** Professor, em acordo com os colegas, vim avisá-lo, pedindo desculpas, de que não poderemos estar aqui, hoje. Os meus colegas e eu estaremos aqui, sem falta, nos encontros dos dias 03 e 04 de dezembro de 2012, se assim o Senhor concordar. Pois nesses dias estaremos disponíveis. Pode ser? Escolhemos essas datas para não atrapalhar o Senhor e podermos participar da pesquisa. Por favor, nos desculpe.]

Pesq.: Obrigado, aluno B. Faremos assim. Um abraço.

APÊNDICE 4 - 3º Encontro: 03/12/2012

Projeto de Campo: “O Uso de Tecnologias da Informação e da Comunicação no Ensino do Teorema Fundamental da Álgebra: o software TFA.”

Professores: Orestes Piermatei Filho e Emerson Tomaz da Costa

Descrição do Encontro

Objetivo: Os Sujeitos da Pesquisa, com o uso do computador, *responderão às atividades exploratórias 1 e 2, empregando o software TFA.*

Atividade 1 - Pontos no $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$

Pesq.: Vocês hoje receberão a atividade 2. Como receberam a atividade 1, no segundo encontro, conforme combinado, responderemos às duas atividades, 1 e 2, ok? Lembramos que o *software TFA* nos ajudará quanto ao estudo do Teorema Fundamental da Álgebra. As imagens geradas pelo software serão úteis e fundamentais nessa pesquisa. Como pudemos perceber, os Polinômios estarão presentes no decorrer de nossas atividades. Eles são fundamentais nessa pesquisa. Queremos lembrar aos senhores que nosso trabalho busca investigar o *software TFA* e o entendimento do *Teorema Fundamental da Álgebra.*

[**Alunos:** Sim, Senhor]

Pesq.: Vamos começar.

[Alunos A, B, C, D: Podemos fazer em dupla?**]**

Pesq.: Fiquem à vontade.

[**Aluno A, B, C e D:** Eles foram unânimes em responder que, na atividade 1, exercício (a), os pontos do plano à direita são imagens dos pontos do plano à esquerda. Pelo fato do Domínio ser de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, as imagens no plano à esquerda serão sempre reais.]

Pesq.: Formamos o grupo A e B e o grupo C e D.

Pesq.: No desenvolvimento da atividade 1.1, os alunos A, B. C e D discutem a questão dos coeficientes dos Polinômios serem reais ou complexos. Ou seja, ao utilizarem o comando R em R ponto, alunos questionam entre si os coeficientes complexos e os coeficientes reais.

[Aluno C e D: Seria legal a gente mexer nos outros comandos.]

[Aluno A e B: Vamos fazer o seguinte: vamos passar aqui pelos comandos do software?]

[Aluno A e B: Cara, os pontos à direita só podem ser os pontos-imagens, não? Ah, tá. Esses pontos reais só podem ser pontos reais, real em real, né? No caso dos coeficientes complexos, vai dar zero. Não é isso que estamos vendo?]

Pesq.: Alunos concluem que pontos reais são levados a pontos reais, no item (a) e (b), atividade 1.1.

Pesq.: Ao discorrerem sobre as atividades 1.1, o grupo dos Alunos C e D não respondeu à pergunta do item (c). Percebe-se que não houve entendimento acerca da pergunta. Contudo, não me fizeram perguntas a respeito.

Pesq.: O grupo formado pelos alunos B e C fica inquieto com a pergunta.

[Aluno B: Cara (referindo-se ao Aluno C), qualquer que seja o inteiro atribuído (referindo-se à atividade 1.1. (c)), a imagem será sempre zero, se os coeficientes forem complexos, não é isso? É verdade.]

[Aluno C: Ah, entendi, cara (no caso dos coeficientes reais, nem se discute...risos).]

[Alunos C e D: (Dando uma olhadinha nos valores desses pares ordenados, (referindo-se à posição do *mouse*) Quer ver: vamos clicar uma vez aqui na origem (referindo-se ao par de eixos, à esquerda). Agora, olha pra onde o ponto vai. Clicando outra vez, os pontos ficam sobre o eixo real (referindo-se ao par de eixos, à direita). Então, como é de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, teremos imagens pelas parcelas de coeficientes real.]

Pesq.: Os grupos de alunos são unânimes em responder que, por se tratar de um comando de real em real, a despeito dos coeficientes serem reais ou complexos, as imagens serão sempre reais.

Pesq.: Na atividade 1.2 (a), os grupos respondem que os pontos de cores distintas, ao se inserirem os coeficientes dos Polinômios da atividade, que aparecem com a utilização do comando C em C ponto referem-se às raízes dos Polinômios.

[Alunos: A, B. C e D: Não é isso, mestre?]

Pesq.: O que vocês acham?

[Alunos: Só pode ser isso (risos). Polinômio de grau dois, duas raízes.]

Pesq.: Há uma satisfação generalizada e, ao mesmo tempo, perguntam-se entre si "Como pode ser isso, cara? Coeficientes Complexos?

[Aluno A: Não deixou de ser Polinômio por isso.]

Pesq.: Ao responderem ao item 1.2.(b), os grupos concluem que, ao clicar com o *mouse* o mais próximo possível dos pontos distintos, os pontos-imagens se aproximam do zero.

Pesq.: Da mesma forma, no item 1.2 (c), os grupos concluem que, ao clicar com uma maior precisão nos pontos distintos, à esquerda, os pontos são levados para zero ou, à origem do plano, à esquerda.

Pesq.: Os alunos discutem sobre a pergunta do item 1.2 (d).

[Alunos A e B: Olha só: só podem ser as raízes dos Polinômios. Diferentemente do Domínio de Real em Real, o Domínio de Complexos em Complexos não ignorará a parte imaginária, tanto no plano à esquerda quanto no à direita.]

[Alunos C e D: Meu amigo, o que vejo aqui (Aluno D falando com o Aluno C) é que Polinômios de Real em Real possuem duas raízes, que são esses pontos de cores distintas. Só que eu não consigo ver essas raízes quanto aparecem no *software*.]

Pesq.: Percebemos que havia desejo de se trabalhar mais com o *software*. Porém, o horário já estava avançado para fazermos a atividade 2. Ficou evidente que a preparação inicial dos Comandos de R em R e do Comando de C em C revelaram-se interessantes do ponto de vista da aprendizagem.

[Aluno A: Achei interessante passarmos por esse Comando, mas, pensando bem, isso não é fácil não, professor.]

Pesq.: O que não é fácil?

[Aluno A: É que a gente acaba estudando Polinômio de coeficientes reais com esses coeficientes complexos. Precisaríamos um pouco mais de compreensão.]

Pesq.: Entendo. Mas é por isso que queremos analisar a resposta de vocês com a utilização do *software*.

[Aluno C: Mestre, não é comum no Ensino Médio a gente estudar com coeficientes complexos, certo?]

Pesq.: Você quer dizer estudar com variáveis complexas?

[Aluno C: Acho que são os dois. Isso é difícil.]

Pesq.: Em função do horário, procedemos com a atividade 2. Permanecemos com os mesmos componentes nos grupos.

Atividade 2 - Círculo no $\mathbb{R}^2$em $\mathbb{R}^2$

Pesq.: O que mais achei interessante nessa atividade foi que os Sujeitos da Pesquisa estavam bem entusiasmados em responder às atividades. A integração era total. Não havia reclamação do horário, que já estava bem avançado. Percebi que queriam registrar novas descobertas e contribuir com a pesquisa.

Pesq.: Nessa atividade 2.1 (a), (b), (c), os alunos foram unânimes em responder que observam, respectivamente, um círculo, cujo raio aumenta; uma circunferência, com centro na origem; que não houve imagem à direita, formando-se no plano.

Pesq.: Notei que eles ficaram apreensivos com a atividade 2.1(d). Nesse momento, alguns alunos migraram para outro grupo e se inicia um debate entre todos os componentes.

[Aluno A: Pessoal, lembra que o Polinômio tem que ter um grau, no mínimo um, para poder atender à condição de se ter a raiz do Polinômio?]

[Aluno C: É, mas, se os coeficientes são todos iguais a zero, então o Polinômio tem que ser zero, e o grau é zero, certo?]

[Aluno D: Concordo, mas aí ele pode ter qualquer grau, porque, se os coeficientes são iguais a zero, então, no mínimo, têm que ter grau um, não?]

[Aluno B: Cara, estamos confundindo. Vamos ler novamente a questão?]

Pesq.: Percebi que a questão causou debate acirrado entre eles.

Pesq.: Fiquem calmos e vamos para o próximo item, ok?

Pesq.: Para o item 2.1(e).

[Alunos A e B: A gente acha que vai ter uma varredura no plano à esquerda e que a imagem à direita será igual a zero.]

[Alunos C e D: Olha só, cara, não faz diferença nenhuma inserir os coeficientes nulos.]

Pesq.: Notei que os componentes do grupo de alunos A e B escreviam que o Polinômio possuía coeficientes iguais a zero, tentando explicar a situação anterior. Porém, não interferi; apenas observava. Não dava para enxergar o Polinômio, pois a escrita era com letras pequenas e, ao mesmo tempo, tinha que filmar e gravar as falas.

Pesq.: Quanto ao item 2.1 (f), tiveram divergências nas respostas, desejando debater um pouco mais sobre o assunto.

[Aluno A e B: (O Aluno B conversa com o aluno A que não existia a condição de se ter “pê de “z” igual a zero, por causa da definição, referindo-se ao item 2.1 (d)) Pô, cara, será isso mesmo? Acho que não tem problema algum termos essa condição, independente da definição. Vamos colocar isso aqui (O Aluno A referindo-se à sua resposta). Tudo bem, então.]

[Aluno C e D: Esses caras estão doidos (palavra do Aluno D). Que bobagem. Podemos ter infinitas soluções, no caso dos coeficientes nulos.]

[Aluno C: É claro que devemos ter cuidado com as afirmações (falando com o Aluno D)]

Pesq.: Nesse item 2.2. (a), percebemos que os alunos respondem, inicialmente, que a imagem formada é um círculo. Depois, vai se deformando, formando-se uma figura dentro da outra, aumentando de área.

Pesq.: Nessa atividade, percebemos que os alunos já começam a entender a importância das raízes dos Polinômios. Ao manusear os comandos, os alunos

C e D apontam para a tela do computador e dizem: Cara, olha aqui (Aluno C): a curva (formada no plano à esquerda) passa pela origem desse plano, quando o círculo à direita passa pelos pontos à direita. A dupla dos alunos A e B ouve isso, e o Aluno B relata que é por isso que os Polinômios têm sempre raízes.

[Aluno B: Muito legal. Os polinômios têm sempre raízes. Isso quer dizer que os Polinômios, independente de ter coeficientes, são reais ou complexos.]

[Aluno A: Acho que nos enganamos (falando com o aluno B). É verdade. Olha para aqui (referindo-se à tela de computador).]

Pesq.: Os alunos foram unânimes em respondem que, no item 2.2. (d), são as raízes dos Polinômios.

Pesq.: No item 2.2. (e), os alunos C e D perguntam aos alunos A e B se entenderam a pergunta.

Pesq.: Para não haver uma única resposta, pedi que os alunos mantivessem as respostas entre os grupos, de modo que pudéssemos avaliar as possíveis respostas de cada grupo e compará-las posteriormente.

[Aluno C: Realmente não compreendi esse item.]

[Aluno A: Cara, lembra que falamos a respeito do Círculo Trigonométrico? Não falamos agora há pouco sobre grau do Polinômio? Então, para ser Polinômio, aquele “n” tem que ser inteiro, cara.]

[Aluno C: É mesmo. É uma questão de prestar atenção. Mas tenho dúvida ainda.]

APÊNDICE 5 - 4º Encontro: 04/12/2012

Projeto de Campo: "O Uso de Tecnologias da Informação e da Comunicação no Ensino do Teorema Fundamental da Álgebra: o software TFA."

Professores: Orestes Piermatei Filho e Emerson Tomaz da Costa

Descrição do Encontro

Objetivo: Os Sujeitos da Pesquisa, com o uso do computador, r*esponderão às atividades exploratórias 3 e 4, empregando o software TFA.*

Atividade 3 – Círculo e Curvas de $\mathbb{R}^2$em $\mathbb{R}^2$

Pesq.: Nessa atividade foi notificada a presença de mais um aluno, que ficou denominado anteriormente, como sendo o Aluno E.

Pesq.: Aluno E, você gostaria de participar de que grupo?

[Aluno E: Grupo do Aluno A e B.]

Pesq.: Tudo bem, então. Só lembrar que já estamos na última atividade. Se tiver alguma pergunta, consulte os seus colegas, tudo bem?

[Aluno E: Tudo bem, mestre.]

Pesq.: Nessa atividade os alunos concordaram que, para o item 3.1 (a), todos concordaram que a deformação sofrida pelo Polinômio à direita passaria pela origem do plano à esquerda.

[Aluno A, B e E: Passará pelo plano à direita.]

[Aluno C e D: Os sete pontos são as raízes dos Polinômios.]

Pesq.: Os alunos inquietos perguntam ao professor se a ideia do Teorema Fundamental da Álgebra já não foi respondida.

[Aluno A: Se a ideia de responder que todo Polinômio tem raiz, acho que o *software* comprovou isso, não?]

Pesq.: O que você acha, Aluno A?

[Aluno A: Não tenho dúvida. Se tivéssemos que responder que todo Polinômio tem raiz, então o Teorema que o Senhor tá estudando estaria resolvido.]

Pesq.: E os demais, o que vocês acham da palavra do aluno A?

[Aluno C: Mestre, é evidente pela imagem. Mas, pelo que pude observar os Polinômios de varáveis complexas. Eu pelo menos não saberia trabalhar com eles com facilidade.]

Pesq.: Mas trabalhar com variáveis complexas é uma extensão do trabalho com variáveis reais.

[Aluno B: É bom sabermos que todo Polinômio tem raiz.]

Pesq.: Aluno B, pelo menos uma?

[Aluno B: Sim, professor.]

Pesq.: Os alunos mostraram que a ideia do TFA estava ficando evidente. Alguns alunos começaram a falar.

[Aluno E: Achei esse *software* legal, mas, qual a finalidade dele, mesmo?]

[Aluno B: Ele te ajuda a entender que qualquer Polinômio possui raízes. Mas ele é um pouco complicado. Acredito que é mais para alunos de Curso Superior, não?]

[Aluno A: Pessoal, acho que mais bacana são essas imagens aqui (referindo-se ao item 3.1). Vi num livro de cálculo. Deve ser o que eles chamam de Lemniscatas.]

Pesq.: Tem certeza disso, Aluno A?

[Aluno A: Certeza, certeza não tenho. Mas fiquei curioso com essas imagens das curvas à direita.]

Pesq.: Esse próximo item tem relação com que vocês já estudaram, em relação à multiplicidade de raízes, certo? Então, peço que respondam com muito cuidado para que possamos avançar em nossa pesquisa.

Pesq.: Todos os alunos foram unânimes em responder ao item 3.2 (a) com a resposta zero.

Pesq.: Da mesma forma, como no item 3.2 (a), o 3.2 (b) segue a mesma linha de raciocínio.

Pesq.: Os alunos começaram a usar a linguagem de alças para designar as imagens formadas na área de trabalho, à esquerda.

[Aluno B: Mestre, é muito bacana isso. Mas funciona do mesmo jeito essa questão de multiplicidade com variáveis complexas, né?]

[Aluno A: Claro, cara. O Polinômio não deixou de ser Polinômio.]

Pesq.: Os alunos começam a usar uma linguagem diferente. Começam a falar de varredura, referindo-se ao item 3.2 (d).

[Aluno A, B e E: Os círculos formados no quadrante à esquerda fazem uma varredura no Domínio, enquanto no Contradomínio fazem uma varredura no Contradomínio.]

[Aluno B e C: Bem, na direita, são sempre o Círculo e o Raio que crescem. Formam-se (n-1) laços, onde n é o grau do Polinômio, se existir pelo menos um grau das parcelas do Polinômio.]

Atividade 4 – As Raízes do Polinômio

Pesq.: Vamos responder às questões da última atividade. Vocês a receberão nesse momento. Mas, quero deixar claro que todos estão muito bem. Porém, suas respostas, nessa última atividade, devem primar por sinceridade e postura, como convém ao aluno de uma escola militar, estamos entendidos?

[Alunos: Sim, Senhor]

Pesq.: Os alunos compreendem nessa última atividade o objetivo de nosso trabalho. Conversam entre si sobre o *software* e, a respeito do cansaço a que são submetidos. Conversamos a respeito da possibilidade do *software* TFA fazer parte da grade curricular da instituição militar, ao que a maioria foi a favor.

[Aluno A: Professor, precisamos inovar nossas práticas em aula. É muito chato querermos entender uma situação complexa sem o uso de um *software* que verdadeiramente funcione.]

Pesq.: Concordo com você, Aluno A. Mas não estamos ainda nos fatos conclusivos de nossa pesquisa.

[Aluno B: Mas, professor, o que o Senhor queria investigar parece ser ou, foi entendido por nós?]

Pesq.: (Referindo-se ao aluno B) Como assim foi entendido?

[Aluno B: Não é o TFA? Se a função tem raízes, é porque o TFA existe sempre. **Aluno C:** (Aponta para o aluno B) Esse *software* não é tão fácil, não.]

[Aluno C: Professor, particularmente achei o *software* difícil. Mas acho legal colocar isso aqui no Colégio.]

Pesq.: Vamos combinar o seguinte: responderemos às atividades propostas e, aí, cada um de vocês faça as considerações sobre o *software*, ok?]

[Alunos: Tudo bem, Senhor.]

[Alunos: Professor, os pontos aos quais o Senhor se refere são os pontos na esquerda, não é isso?]

Pesq.: Sim. Os pontos aos quais me refiro na questão 4.1. (a) são realmente à esquerda.

[Aluno D: É fácil perceber, mais uma vez, que são as raízes do Polinômio, certo?]

[Aluno E: Cara, em Matemática nada é obvio. Quem sabe se nessa questão o professor não quis fazer uma pegadinha, né?]

Pesq.: Não. Não foi pegadinha. Foi erro de digitação.

[Aluno B: Acho que o *software* poderia também nos informar quem são as raízes, não é mesmo?]

[Aluno A: Acredito que, quando colocamos o *mouse* na raiz, os pares ordenados nos dão valores aproximados das raízes, mas não sei como isso foi programado.]

Pesq.: Como assim, Aluno A?

[Aluno A: Mestre, não precisamos ir longe: se eu fizer $P(z) = z + 1$, (aluno falando) para $P(z) = 0$, temos $z = -1$, logo, vou achar no par ordenado um valor aproximado para a=-1 e b=0.]

[Aluno E: É mesmo, cara. Mas é preciso ter muita atenção, se o grau aumentar, né?]

[Aluno A: Cara, é só observar a posição do *mouse* nos pontos que aparecem.]

[Aluno B: Isso dá trabalho, não? Era preciso ter disponível um conjunto delas. Isso ajudaria muito nos estudos.]

Pesq.: Até o presente momento vimos coeficientes reais, referência à questão 4.1. (a). Agora faremos o exercício com coeficientes complexos, ok?

[Aluno C: O procedimento deve ser o mesmo, mestre. Não importa se os coeficientes são reais ou complexos.]

Pesq.: Vamos fazer assim: vamos verificar se a fala do Aluno C está correta?

[Aluno D: Não tenho dúvida. Mas vamos responder.]

Pesq.: Fiquei apreensivo com a próxima resposta, pois essa seria a chave--mestra de nosso trabalho. Estava ansioso com o resultado das respostas. Nesse momento havia uma adversidade, pois, além de acompanhá-los, tive que filmar e gravar os diálogos. Nossa câmera estava com o suporte quebrado, obrigando-me a ficar o tempo todo segurando-a.

[Aluno A, Aluno B: Isso aqui, (nesse momento apontando para a tela do computador) é a raiz do Polinômio (Aluno A). O mais interessante são esses laços se formando, cara (referindo-se à formação de curvas deformadas e que passavam pela origem do plano à direita). É mesmo (Aluno B falando). Quando o círculo passa pelos pontos, esses laços passam pela origem (Aluno B). Mas acho que deveria nos dizer quem são as raízes. **(Aluno A:** É o TFA.]

[Aluno C, Aluno D: Concordamos que é o TFA. Precisamos do Polinômio e, se a gente conseguir resolver, a gente consegue achar as raízes.]

[Aluno D: É preciso achar as raízes, cara. Já pensou se você tivesse um Polinômio com grau 20, cara. É só saber que tem raiz.]

Pesq.: A contento, os alunos responderam que a questão 4.2 (b) tratava-se do TFA. Todos os componentes foram unânimes na resposta. Concluíram que, em 4.2 (c), as raízes dos Polinômios, de coeficientes reais ou complexos, têm sempre raízes.

APÊNDICE 6 - Transcrição das conclusões dos alunos sobre o *Software TFA*

[Aluno A: O *software* exige um conhecimento básico: de que trata o TFA e suas propriedades, para se poder manuseá-lo com facilidade. Em relação à interação com o usuário e sua instalação, o *software* necessita de uma configuração especifica do computador, com programas pré-definidos, para funcionar com eficiência. Porém, é fácil utilizar esse *software* e aprender aos pouco como utilizar o TFA.]

[Aluno B: O s*oftware* realmente é muito completo. Sem dúvida alguma, é uma importante ferramenta para o entendimento do TFA. Porém, para entender seu funcionamento e tudo que é mostrado no *software*, é essencial que se tenha um professor orientando, para interpretar os resultados do programa, que é uma tarefa dificílima. Ainda mais para alunos do Ensino Médio. Acredito que a real utilidade do *software*, o quanto ele realmente nos auxiliaria no entendimento do TFA, só será possível com o auxílio de um professor.]

[Aluno C: O *software* possui característica pouco favorável no que tange a sua utilização. É necessário um conhecimento prévio de Matemática para sua abordagem. Em alguns pontos é falho, como se houvesse a necessidade de utilização de um manual de instruções. No entanto, o *software* é bem abrangente e é interessante utilizá-lo para fins, como: análise de Polinômios e construção de gráficos, porém a Função-Círculo poderia ser melhor explicada.]

[Aluno D: O programa tem uma linguagem de fácil manuseio, mas só um estudante de Exatas, de Nível Superior, é capaz de usá-lo. Em contrapartida, através da análise gráfica, facilita-se o entendimento. Logo, o programa auxilia de forma efetiva os estudos, no que tange aos números complexos e Polinômios.]

[Aluno E: Não se manifestou, pois não se sentiu à vontade para responder, em função das faltas que teve nos encontros.]

APÊNDICE 7 - Respostas *in loco* das atividades realizadas pelos Sujeitos da Pesquisa

Atividades 1 e 2, em 03 de dezembro de 2012.

[Respostas dos Alunos A e B]

6) Atividades

Atividade 1 - Pontos no $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$

MAT II - ÁLGEBRA: NÚMEROS COMPLEXOS E POLINÔMIOS

Projeto: **"Tecnologias da Informação e Comunicação no Ensino do TFA"**

Professores: Orestes Piermatei Filho e Emerson Tomaz da Costa

1.1. O caso dos pontos no domínio e pontos na imagem: reais puros ou imaginários puros?

OBJETIVO: Explorar / argumentar / inferir a relação entre os pontos no domínio e imagem pelos polinômios com coeficientes reais e imaginários.

I) Vamos inserir, respectivamente, os coeficientes de dois polinômios da forma:

a) $P_1(z) = z^2 + 3z + 1;$ b) $P_2(z) = iz^2 + 3iz + i.$

a) Ao inserir os coeficientes de P_1 *no software TFA* e ao utilizar o ***comando R em R – Ponto***, clicando com o mouse várias vezes na área de trabalho, no plano à esquerda, o que você pode concluir sobre o (s) ponto (s) no plano à direita?

Os pontos no plano à direita são imagens dos pontos clicados no plano à esquerda. Pelo fato do domínio ser de R em R, as imagens no plano à esquerda será sempre reais

b) Fazendo o mesmo com o polinômio P_2 o que você pode concluir?

Os pontos no plano à direita também são imagens dos pontos clicados no plano à esquerda. Pelo fato do domínio ser de R em R, as imagens no plano à esquerda se concentrarão no ponto zero.

c) Ao comparar suas análises em a) e b) atribua um valor inteiro qualquer a z e quais são suas conclusões?

Atribuindo um valor a Z no plano à esquerda, aparecerá sua imagem no plano à direita. Porém, como o domínio é de R em R, se os coeficientes forem todos complexos, a imagem será igual a zero.

d) Com a utilização do ***comando R em R – Ponto***, o que se observa se tivermos coeficientes reais e imaginários, ao utilizarmos o mouse clicando no domínio várias vezes? Por exemplo: $P(z) = z^2 + 3iz + 1$.

Utilizando coeficientes reais e imaginários, as imagens no plano à direita estarão sobre a reta das imagens reais, podendo não ser igual a zero.

e) Em sua análise, o que considera essencial nessa abordagem, com a utilização desse comando?

Entender que a parte complexa, tanto no domínio, quanto na imagem, é ignorada.

1.2 O caso dos pontos imagens: reais ou imaginários?

OBJETIVO: **Explorar / argumentar / inferir a relação entre ponto a ponto pelos polinômios com coeficientes reais e imaginários.**

II) Iremos utilizar o ***comando C em C - Ponto*** e inserir os coeficientes dos polinômios abaixo, respectivamente:

a) $P_1(z) = 10z^2 - 2z + 3$ b) $P_2(z) = 10i\,z^2 - 2iz + 3i$

a) Ao inserirmos os coeficientes do polinômio P_1 e P_2, respectivamente, aparecerá no plano à esquerda, pontos com cores distintas dos demais, ao clicarmos várias vezes nesse plano. Para você o que são esses pontos de cores diferentes?

Os pontos de cores diferentes são as raízes do polinômio apresentado.

b) Agora, utilizando o mesmo procedimento do item (a) clique, com o mouse, mais próximo ainda dos pontos diferentes? O que acontecerá com os pontos no plano à direita em relação à origem do mesmo? (Sugestão: tente sempre centralizar o sistema de eixos, no ***comando centralizar origem***).

Os pontos do plano à direita se aproximarão c/o ponto zero.

c) Agora, tente clicar com a melhor precisão possível no (s) ponto(s), de cores distintas no plano à esquerda. O que você analisa em relação à origem do eixo à direita?

Ao clicar nos pontos de cores diferentes suas respectivas imagens no plano à direita serão iguais a zero.

d) Ao analisar as ideias anteriormente investigadas nos itens a, b e c quais as conclusões que podem ser descritas, em relação aos polinômios?

Ao representarmos os polinômios, aparecerá, no plano à esquerda, as raízes dos referidos polinômios e, diferentemente do domínio de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, o domínio de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$ não ignorará a parte imaginária, tanto no plano à esquerda, quanto no plano à direita.

Atividade 2 –Círculo no $\mathbb{R}^2$em $\mathbb{R}^2$

MAT II - ÁLGEBRA: NÚMEROS COMPLEXOS E POLINÔMIOS

Projeto: "Tecnologias da Informação e Comunicação no Ensino do TFA"

Professores: Orestes Piermatei Filho e Emerson Tomaz da Costa

2.1 O caso da relação entre o círculo e os polinômios

OBJETIVO: **Explorar / argumentar / inferir a relação entre o círculo e os polinômios.**

I) Iremos utilizar o ***comando círculo*** e clicarmos na área de trabalho (plano à esquerda) apenas uma vez.

a) O que você observa?

Aparece um círculo no plano à esquerda que varrerá os valores do domínio e os representará no plano à direita dinamicamente.

b) Houve alguma imagem formando-se no plano à esquerda? Justifique. Sim. Essas imagens formavam-se dinamicamente no formato de um círculo.

c) Houve alguma imagem à direita no plano, formando-se? Por quê?

Sim. também formou-se uma imagem, porém esta pode apresentar formas variadas.

d) Se o grau do polinômio é dado pela ordem de maior expoente, do polinômio com coeficiente não nulo, qual é o grau do polinômio $P(z) = 0$, que não possui coeficientes não nulos? Justifique.

O grau é zero porque ele possui todos os coeficientes iguais a zero.

e) Agora, insira zeros aos coeficientes dos polinômios nas janelas do *software*, utilize o ***comando círculo***. E clique apenas uma vez no plano à esquerda, na área de trabalho. O que se observa?

Ocorre a mesma varredura no plano à esquerda, porém para todos os valores, no plano à ~~direita~~ esquerda, a imagem será igual a zero.

f) Podemos dizer que não existiria $P(z) = 0$? Por quê? Justifique.

Podemos sim. Pois, esse polinômio não possui nenhum coeficiente não nulo, enquanto sua definição pede, necessariamente, pelo menos algum coeficiente não nulo.

2.2 O caso do círculo e círculo

OBJETIVO: **Explorar / argumentar / inferir a relação entre o círculo e círculo e/ou curva.**

II) Insira os coeficientes dos polinômios abaixo, respectivamente, e analise e justifique as seguintes perguntas abaixo:

$$P_1(z) = 2i\,z^2 + 2z + i \quad \text{e} \quad P_2(z) = 2z^2 + 2z + 1$$

a) Ao clicar no ***comando círculo***, vê-se formando um círculo na esquerda e aparentemente um círculo à direita no plano. O que ocorre com a imagem à direita, à medida que o raio do círculo aumenta?

Inicialmente ela aparenta ser um círculo e, à medida que vai ganhando valores ela acaba se deformando e aumentando a área.

b) Ao clicar no comando círculo, vê-se aparecer dois pontos no plano à esquerda. Para você, o que são esses pontos?

Também são raízes do polinômio apresentado.

c) Agora, com os mesmos polinômios, volte ao ***comando C em C - Ponto*** e clique no plano à esquerda, próximo onde se observaram os mesmos pontos no item b. O que são esses pontos? Por quê?

Esses pontos também são valores de z que zeram o polinômio apresentado.

d) Com muita atenção e nas mesmas condições dos itens a, b e c acima, utilize o ***comando configurações do círculo***, abrir-se-á uma janela e utilize a opção: ***pausar o círculo*** antes que o círculo à esquerda passe pelos pontos que aparecem no plano. A figura à direita envolve a origem do plano?

Não. Quanto mais se aproxima dos pontos, mais a figura à direita se aproxima da origem. Porém, a figura não envolve a origem.

e) À medida que o raio aumenta o círculo à esquerda deverá dar um número inteiro de voltas em torno da origem. Em sua opinião, por que o número de voltas deve ser um número inteiro?

Porque cada volta na origem desse polinômio representa uma raiz e o número de raízes desse polinômio é sempre um número inteiro.

Atividades 1 e 2, em 03 de dezembro de 2012.

[Respostas dos Alunos C e D]

6) Atividades

Atividade 1 - Pontos no $\mathbb{R}^2$em $\mathbb{R}^2$

MAT II - ÁLGEBRA: NÚMEROS COMPLEXOS E POLINÔMIOS

Projeto: **"Tecnologias da Informação e Comunicação no Ensino do TFA"**

Professores: Orestes Piermatei Filho e Emerson Tomaz da Costa

1.1. O caso dos pontos no domínio e pontos na imagem: reais puros ou imaginários puros?

OBJETIVO: Explorar / argumentar / inferir a relação entre os pontos no domínio e imagem pelos polinômios com coeficientes reais e imaginários.

I) Vamos inserir, respectivamente, os coeficientes de dois polinômios da forma:

$a)\ P_1(z) = z^2 + 3z + 1;$ b) $P_2(z) = iz^2 + 3iz + i.$

a) Ao inserir os coeficientes de P_1 *no software TFA* e ao utilizar o ***comando R em R − Ponto***, clicando com o mouse várias vezes na área de trabalho, no plano à esquerda, o que você pode concluir sobre o (s) ponto (s) no plano à direita?

Os pontos do plano à direita representam as imagens dos pontos do plano à esquerda, sempre de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

b) Fazendo o mesmo com o polinômio P_2 o que você pode concluir?

As imagens do polinômio P_2 aparecem com valor zero no software, porém elas não podem ser representadas de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

c) Ao comparar suas análises em a) e b) atribua um valor inteiro qualquer a z e quais são suas conclusões?

d) Com a utilização do ***comando R em R - Ponto***, o que se observa se tivermos coeficientes reais e imaginários, ao utilizarmos o mouse clicando no domínio várias vezes? Por exemplo: $P(z) = z^2 + 3iz + 1$.

Como o software trabalha com $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, as parcelas do polinômio com coeficiente imaginário são ignoradas, plotando-se apenas as imagens produzidas pelas parcelas de coeficiente real

e) Em sua análise, o que considera essencial nessa abordagem, com a utilização desse comando?

Pode-se concluir que, mesmo inserindo-se polinômios de coeficientes imaginários, gera-se apenas imagens reais, ignorando todo o resto. Também não é possível inserir domínio imaginário ($\mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

1.2 O caso dos pontos imagens: reais ou imaginários?

OBJETIVO: Explorar / argumentar / inferir a relação entre ponto a ponto pelos polinômios com coeficientes reais e imaginários.

II) Iremos utilizar o ***comando C em C - Ponto*** e inserir os coeficientes dos polinômios abaixo, respectivamente:

a) $P_1(z) = 10z^2 - 2z + 3$ b) $P_2(z) = 10i\,z^2 - 2iz + 3i$

a) Ao inserirmos os coeficientes do polinômio P_1 e P_2, respectivamente, aparecerá no plano à esquerda, pontos com cores distintas dos demais, ao clicarmos várias vezes nesse plano. Para você o que são esses pontos de cores diferentes?

Os pontos de cores distintas representam as raízes dos polinômios P_1 e P_2.

b) Agora, utilizando o mesmo procedimento do item (a) clique, com o mouse, mais próximo ainda dos pontos diferentes? O que acontecerá com os pontos no plano à direita em relação à origem do mesmo? (Sugestão: tente sempre centralizar o sistema de eixos, no ***comando centralizar origem***).

Os pontos no plano à direita se aproximam da origem do plano

c) Agora, tente clicar com a melhor precisão possível no (s) ponto(s), de cores distintas no plano à esquerda. O que você analisa em relação à origem do eixo à direita?

Com a melhor precisão possível, ao se clicar nos pontos de cores diferentes, no plano à direita aparecerá pontos na origem

d) Ao analisar as ideias anteriormente investigadas nos itens a, b e c quais as conclusões que podem ser descritas, em relação aos polinômios?

É possível concluir que os polinômios P_1 e P_2 possuem duas raízes e elas são comuns. Os pontos de cores distintas representam as raízes, porém não conseguimos concluir quando essas raízes aparecem no software.

Atividade 2 –Círculo no $\mathbb{R}^2$em $\mathbb{R}^2$

MAT II - ÁLGEBRA: NÚMEROS COMPLEXOS E POLINÔMIOS

Projeto: "Tecnologias da Informação e Comunicação no Ensino do TFA"

Professores: Orestes Piermatei Filho e Emerson Tomaz da Costa

2.1 O caso da relação entre o círculo e os polinômios

OBJETIVO: **Explorar / argumentar / inferir a relação entre o círculo e os polinômios.**

I) Iremos utilizar o ***comando círculo*** e clicarmos na área de trabalho (plano à esquerda) apenas uma vez.

a) O que você observa?

Observa-se (~~[illegible]~~) uma circunferência que o raio vai crescendo com o tempo

b) Houve alguma imagem formando-se no plano à esquerda? Justifique. Sim. Houve uma circunferência com centro na origem

c) Houve alguma imagem à direita no plano, formando-se? Por quê?

Não houve imagem a direita, provavelmente pela ausência dos coeficientes do polinômio

d) Se o grau do polinômio é dado pela ordem de maior expoente do polinômio com coeficiente não nulo, qual é o grau do polinômio $P(z) = 0$, que não possui coeficientes não nulos? Justifique.

Grau n, com $n \geq 1$, pois $p(z)$ será no mínimo da forma $p(z) = az + b$, sendo $a \cdot b \neq 0$, (~~z [illegible]~~) a raiz deverá ser $-b/a$.

e) Agora, insira zeros aos coeficientes dos polinômios nas janelas do *software*, utilize o ***comando círculo***. E clique apenas uma vez no plano à esquerda, na área de trabalho. O que se observa?

Não fez nenhuma diferença aparente não inserir os coeficientes ou inserir (~~[illegible]~~) coeficientes nulos.

f) Podemos dizer que não existiria $P(z) = 0$? Por quê? Justifique.

Não podemos dizer isso. Caso o polinômio apresente todos seus coeficientes nulos, existem infinitas soluções.

2.2 O caso do círculo e círculo

OBJETIVO: Explorar / argumentar / inferir a relação entre o círculo e círculo e/ou curva.

II) Insira os coeficientes dos polinômios abaixo, respectivamente, e analise e justifique as seguintes perguntas abaixo:

$$P_1(z) = 2i\,z^2 + 2z + i \quad \text{e} \quad P_2(z) = 2z^2 + 2z + 1$$

a) Ao clicar no ***comando círculo***, vê-se formando um círculo na esquerda e aparentemente um círculo à direita no plano. O que ocorre com a imagem à direita, à medida que o raio do círculo aumenta?

A imagem deixa de parecer um círculo e começa a surgir uma figura dentro da outra que, a medida que o círculo da (~~direi~~) esquerda (domínio) cresce, a imagem da direita se aproxima de duas circunferências tangentes internas

b) Ao clicar no comando círculo, vê-se aparecer dois pontos no plano à esquerda. Para você, o que são esses pontos?

Devem ser as raízes do polinômio

c) Agora, com os mesmos polinômios, volte ao ***comando C em C - Ponto*** e clique no plano à esquerda, próximo onde se observaram os mesmos pontos no item b. O que são esses pontos? Por quê?

Eles são as raízes do polinômio, pois suas imagens aproximam-se da origem (zero) do plano a direita.

d) Com muita atenção e nas mesmas condições dos itens a, b e c acima, utilize o ***comando configurações do círculo***, abrir-se-á uma janela e utilize a opção: ***pausar o círculo*** antes que o círculo à esquerda passe pelos pontos que aparecem no plano. A figura à direita envolve a origem do plano?

Não

e) À medida que o raio aumenta o círculo à esquerda deverá dar um número inteiro de voltas em torno da origem. Em sua opinião, por que o número de voltas deve ser um número inteiro?

Não compreendi a pergunta.

Atividades 3 e 4, em 04 de dezembro de 2012.

[Respostas dos Alunos A, B e E]

Atividade 3 – Círculo e Curvas de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$

MAT II - ÁLGEBRA: NÚMEROS COMPLEXOS E POLINÔMIOS

Projeto: "**Tecnologias da Informação e Comunicação no Ensino do TFA**"

Professores: Orestes Piermatei Filho e Emerson Tomaz da Costa

3.1. O caso da relação entre o círculo e as curvas geradas pelos polinômios

OBJETIVO: **Explorar / argumentar / inferir a relação entre o círculo e as curvas pelos polinômios.**

III) Insira os coeficientes do polinômio

$$P(z) = 3\,z^7 + 3z^6 + 2z^5 + 3z^4 + 2z^2 + 2z + 1$$

nas janelas abaixo do ***comando polinômio***, como anteriormente, nas atividades 1 e 2.

a) Ao clicar no ***comando círculo***, aparecerão sete pontos. À medida que o círculo à esquerda passar pelos pontos, a figura à direita apresenta deformações e passará por onde? Por quê? Justifique.

Essas deformações passarão pelo ~~[illegible]~~ eixo Img do plano à direita.
Porque cada deformação serve para englobar uma raiz.

b) Agora, focalize os pontos gerados pelo polinômio do item "a", utilize o comando ***C em C - Linha***. Clique no botão da esquerda do mouse e permaneça com o cursor, no plano à esquerda, próximo aos pontos focalizados no item "a", e em seguida faça um desenho livre . O que você observa no plano da direita, quando a linha passar pelos pontos? Justifique.

Quando a linha se aproxima dos pontos, ela também se aproxima da origem do plano à direita.

c) Quais são as conclusões que podemos tirar referentes às figuras formadas e pelo polinômio do item "a" e "b"?

A representação do círculo do item "a" evidencia uma característica na qual o número de voltas em torno da origem do plano à direita representa o número de raízes já varridas pelo domínio. Já a representação em linha do item "b" evidencia que quando a linha desenhada se aproxima dos pontos, a imagem se aproxima da origem no plano à direita.

3.2. O caso em que o polinômio pode ter raízes com multiplicidade

OBJETIVO: Explorar / argumentar / inferir a relação entre o círculo e as multiplicidades de raízes dos polinômios

IV) Inserir os coeficientes do polinômio e utilizar o ***comando Círculo***

$$P(z) = z^2 - 2z + 1.$$

d) Em quaisquer situações, o que você acha quanto ao comportamento das curvas geradas nos planos à direita e à esquerda? As propriedades são mantidas? Por quê? Há rompimento de algum trecho da curva? Justifique.

A curva à esquerda representa uma "varredura" sobre o domínio. A curva à direita representa as imagens do domínio "varrido". As propriedades são mantidas, porque a plotagem de pontos no plano da direita segue um comportamento bem definido e correspondente ao varrido no plano da esquerda. Não há rompimento pois o campo em que os planos trabalham é o dos complexos, então sempre há correspondentes na imagem.

a) Ao adicionar os coeficientes do polinômio, qual a soma encontrada? Nesse caso, quantas vezes a alça no plano à direita passará pela origem desse plano? Por quê? Justifique.

A soma encontrada é zero. A alça no plano à direita passará 1 vez pela origem desse plano. Porém, mesmo assim, 2 círculos envolverão a origem do plano à direita. Isso, provavelmente, indica que a raiz do polinômio é de multiplicidade 2.

b) Agora, insira os coeficientes do polinômio $P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z - 1$. Vale as mesmas propriedades vistas no item "a" para esse polinômio? Justifique.

A soma também deu zero como no item "a". Formou 2 alças no plano à direita que passam uma vez pela origem cada uma. O número de círculos que envolvem a origem do plano à direita é três. Isso indica, provavelmente, que existe 1 raiz de multiplicidade 3.

c) Considere o polinômio $P(z) = z^2 - 3z^2 i - 3z - i$. Insira os coeficientes desse polinômio. O que se observa agora, comparando com os itens "a" e "b". Por quê? Justifique.

Formaram-se 1 alça e 2 círculos que envolvem a origem do plano à direita. A soma dos coeficientes nesse polinômio não é igual a zero. Esse polinômio, diferentemente dos polinômios dos itens "a" e "b", não apresenta raízes com multiplicidade maior que 1 e, por isso, não dá um número diferente de voltas na origem no plano à direita do que o número de pontos representados no plano à esquerda.

APÊNDICE 8 – Atividades 3 e 4, em 04 de dezembro de 2012.

[Respostas dos Alunos B e C]

Atividade 3 – Círculo e Curvas de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$

MAT II - ÁLGEBRA: NÚMEROS COMPLEXOS E POLINÔMIOS

Projeto: **"Tecnologias da Informação e Comunicação no Ensino do TFA"**

Professores: Orestes Piermatei Filho e Emerson Tomaz da Costa

3.1. O caso da relação entre o círculo e as curvas geradas pelos polinômios

OBJETIVO: **Explorar / argumentar / inferir a relação entre o círculo e as curvas pelos polinômios.**

III) Insira os coeficientes do polinômio

$$P(z) = 3\,z^7 + 3z^6 + 2z^5 + 3z^4 + 2z^2 + 2z + 1$$

nas janelas abaixo do ***comando polinômio***, como anteriormente, nas atividades 1 e 2.

a) Ao clicar no ***comando círculo***, aparecerão sete pontos. À medida que o círculo à esquerda passar pelos pontos, a figura à direita apresenta deformações e passará por onde? Por quê? Justifique.

As deformações farão com que a figura a esquerda passe pela origem, pois os sete pontos são as raizes (imagem é zero)

b) Agora, focalize os pontos gerados pelo polinômio do item "a", utilize o comando ***C em C* - *Linha*.** Clique no botão da esquerda do mouse e permaneça com o cursor, no plano à esquerda, próximo aos pontos focalizados no item "a", e em seguida faça um desenho livre . O que você observa no plano da direita, quando a linha passar pelos pontos? Justifique.

Quando a linha passa pelos pontos, a imagem à direita passa pela origem.

c) Quais são as conclusões que podemos tirar referentes às figuras formadas e pelo polinômio do item "a" e "b"?

As imagens dos pontos marcados pelas linhas desenhadas ou pela ferramenta do círculo são representadas automaticamente no plano à direita.

3.2. O caso em que o polinômio pode ter raízes com multiplicidade

OBJETIVO: Explorar / argumentar / inferir a relação entre o círculo e as multiplicidades de raízes dos polinômios

IV) Inserir os coeficientes do polinômio e utilizar o ***comando Círculo***

$$P(z) = z^2 - 2z + 1.$$

a) Ao adicionar os coeficientes do polinômio, qual a soma encontrada? Nesse caso, quantas vezes a alça no plano à direita passará pela origem desse plano? Por quê? Justifique.

A soma dos coeficientes é zero. A alça passará uma única vez pela origem, pois a raiz do polinômio é representada em um único ponto (multiplicidade dois)

b) Agora, insira os coeficientes do polinômio $P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z - 1$. Vale as mesmas propriedades vistas no item "a" para esse polinômio? Justifique.

A soma dos coeficiente é zero e a imagem à direita passará uma única vez pela origem, mas dessa vez formou-se dois laços.

c) Considere o polinômio $P(z) = z^2 - 3\,z^2 i - 3\,z - i$. Insira os coeficientes desse polinômio. O que se observa agora, comparando com os itens "a" e "b". Por quê? Justifique.

Inicialmente a imagem à direita corta a origem ~~[illegible]~~ (quando o círculo à esquerda passa pela primeira raiz) e depois um laço se forma e corta a origem também (quando o círculo cobre duas outras raízes ao mesmo tempo)

d) Em quaisquer situações, o que você acha quanto ao comportamento das curvas geradas nos planos à direita e à esquerda? As propriedades são mantidas? Por quê? Há rompimento de algum trecho da curva? Justifique.

Na esquerda as propriedades se mantém (sempre é um círculo cujo raio cresce). (~~formam-se~~) (~~em~~) Forma-se na imagem a direita (n-1) laços, onde n é o grau do polinômio se (~~existirem~~) existir pelo menos um grau das parcelas do polinômio com grau par. Em diversos momentos, dependendo do polinômio, formam-se laços.

[Respostas dos Alunos A , B e E]

Atividade 4 – As Raízes do Polinômio

MAT II - ÁLGEBRA: NÚMEROS COMPLEXOS E POLINÔMIOS

Projeto: "Tecnologias da Informação e Comunicação no Ensino do TFA"

Professores: Orestes Piermatei Filho e Emerson Tomaz da Costa

4.1. O caso da relação entre as raízes e as curvas geradas pelos polinômios de coeficientes reais

OBJETIVO: Explorar / argumentar / inferir a relação entre o círculo e as raízes dos polinômios identificadas pelas deformações de curvas no $\mathbb{R}^2$.

V) Insira os coeficientes do polinômio de

$$P(z) = z^{10} + z^9 + z^8 + z^7 + z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1.$$

Utilize o comando ***Círculo.***

a) O que podemos dizer, quando o círculo passar pelos pontos do plano à esquerda, a curva à direita irá se deformar varrendo todo o plano passando pela origem desse plano. Quem são os pontos do plano que aparecem à direita em relação ao polinômio? Por quê? Justifique.

Os pontos do plano à ESQUERDA são raízes do polinômio.

b) Com a informação obtida pelo item "a" é sempre possível dizer que qualquer polinômio de coeficientes reais tem sempre raízes? Por quê? Justifique.

Sim, pois o polinômio de grau 10 apresenta 10 pontos, ou seja, 10 raízes no plano à esquerda.

4.2. O caso da relação entre as raízes e as curvas geradas pelos polinômios de coeficientes complexos.

OBJETIVO: **Explorar / argumentar / inferir a relação entre o círculo e as raízes dos polinômios identificadas pelas deformações de curvas no** $\mathbb{R}^2$.

VI) Agora, insira os coeficientes de

$$P(z) = iz^{10} + iz^9 + iz^8 + iz^7 + iz^6 + iz^5 + iz^4 + iz^3 + iz^2 + iz + i.$$

Utilize o comando ***Círculo***.

a) O que podemos revelar quando os polinômios têm coeficientes complexos, ou seja, a curva apresentada no plano à direita, apresenta-se contínua? Por quê? Justifique.

Sim. Porque o gráfico no plano à direita não apresenta espaços descontínuos. Além disso, toda função polinomial é contínua.

b) Com a informação obtida pelo item "a" é sempre possível dizer que qualquer polinômio de coeficientes complexos tem sempre raízes? Por quê? Justifique.

Sim. A própria definição do TFA justifica isso.

c) As raízes dos polinômios de coeficientes reais e complexos são identificadas sempre? Por quê? Justifique.

Sim. Como foi visto nas questões anteriores, toda função polinomial, independentemente dos coeficientes, é contínua.

4.3. O caso da relação entre as raízes e as curvas geradas pelos polinômios: o caso de deformações de curvas no $\mathbb{R}^2$.

OBJETIVO: **Explorar / argumentar / inferir a relação entre o círculo e as raízes dos polinômios identificadas pelas deformações de curvas no $\mathbb{R}^2$ a partir de atividades exploratórias criadas pelos próprios sujeitos da pesquisa.**

[Respostas dos Alunos C e D]

Atividade 4 – As Raízes do Polinômio

MAT II - ÁLGEBRA: NÚMEROS COMPLEXOS E POLINÔMIOS

Projeto: **"Tecnologias da Informação e Comunicação no Ensino do TFA"**

Professores: Orestes Piermatei Filho e Emerson Tomaz da Costa

4.1. O caso da relação entre as raízes e as curvas geradas pelos polinômios de coeficientes reais

OBJETIVO: Explorar / argumentar / inferir a relação entre o círculo e as raízes dos polinômios identificadas pelas deformações de curvas no $\mathbb{R}^2$.

V) Insira os coeficientes do polinômio de

$$P(z) = z^{10} + z^9 + z^8 + z^7 + z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1.$$

Utilize o comando ***Círculo***.

a) O que podemos dizer, quando o círculo passar pelos pontos do plano à esquerda, a curva à direita irá se deformar varrendo todo o plano passando pela origem desse plano. Quem são os pontos do plano que aparecem à direita em relação ao polinômio? Por quê? Justifique.

Não percebi a aparição de nenhum ponto à direita, mas os que aparecem à esquerda são as raízes (10 pontos)

b) Com a informação obtida pelo item "a" é sempre possível dizer que qualquer polinômio de coeficientes reais tem sempre raízes? Por quê? Justifique.

De acordo com o programa, percebemos que um polinômio de coeficientes reais e grau n, tem também n raízes

4.2. O caso da relação entre as raízes e as curvas geradas pelos polinômios de coeficientes complexos.

OBJETIVO: **Explorar / argumentar / inferir a relação entre o círculo e as raízes dos polinômios identificadas pelas deformações de curvas no** $\mathbb{R}^2$.

VI) Agora, insira os coeficientes de

$$P(z) = iz^{10} + iz^9 + iz^8 + iz^7 + iz^6 + iz^5 + iz^4 + iz^3 + iz^2 + iz + i.$$

Utilize o comando ***Círculo***.

a) O que podemos revelar quando os polinômios têm coeficientes complexos, ou seja, a curva apresentada no plano à direita, apresenta-se contínua? Por quê? Justifique.

A curva à direita é contínua, pois o gráfico à direita tem imagem real e imaginária, contemplando raízes reais e imaginários

b) Com a informação obtida pelo item "a" é sempre possível dizer que qualquer polinômio de coeficientes complexos tem sempre raízes? Por quê? Justifique.

É sempre possível, mesmo que não se possa represen-
tar esse polinômio graficamente, pois em alguns casos
as raízes e as imagens serão complexas.

c) As raízes dos polinômios de coeficientes reais e complexos são identificadas sempre? Por quê? Justifique.

Sim, pois o gráfico à esquerda mostra os eixos ima-
ginário e real, que são as possibilidades de raízes
de uma função polinomial (contínua)

4.3. O caso da relação entre as raízes e as curvas geradas pelos polinômios: o caso de deformações de curvas no $\mathbb{R}^2$.

OBJETIVO: **Explorar / argumentar / inferir a relação entre o círculo e as raízes dos polinômios identificadas pelas deformações de curvas no $\mathbb{R}^2$ a partir de atividades exploratórias criadas pelos próprios sujeitos da pesquisa.**

ANEXO 1 - CONCLUSÕES DO ALUNO A

O software exige um conhecimento básico do que se trata o TFA e suas propriedades para poder manuseá-lo com facilidade. Com relação à interação com o usuário e sua instalação, o software necessidade de uma configuração específica do computador, com programas pré-definidos, para funcionar com eficiência. Porém, é muito fácil utilizar esse software e aprender aos poucos como utilizar o TFA.

ANEXO 2 - CONCLUSÕES DO ALUNO B

→ O software é realmente muito completo e, sem dúvida alguma, é uma importante ferramenta para o entendimento do TFA. Para entender seu funcionamento e tudo que é mostrado no software, porém, é essencial que se tenha um professor orientando, pois interpretar os resultados do programa é uma tarefa difisílima, ainda mais para alunos do ensino médio.

Acredito que a real utilidade do software, o quanto ele realmente nos auxiliaria no entendimento do TFA, só seria possível com o auxílio de um professor.

ANEXO 3 - CONCLUSÕES DO ALUNO C

O software possui uma característica pouco favorável no que tange à sua utilização, é necessário um conhecimento prévio de matemática para sua abordagem. Alguns pontos falham, como se houvesse a necessidade de utilização de um manual de instruções. No ~~entato~~ entanto, o software é bem abrangente e é interessante utilizá-lo para fins, tais como: análise de polinômios e construção de gráficos, porém a função círculo poderia ser melhor explicada.

ANEXO 4 - CONCLUSÕES DO ALUNO D

→ O programa tem uma linguagem de fácil manuseio, verificando que qualquer estudante de exatas de nível superior é capaz de usá-lo.

→ Verifica-se um aproveitamento maior do rendimento dos estudos através da análise gráfica, logo, o programa auxilia de forma efetiva aos estudos no que tange aos complexos e polinômeos.