

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

**MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

**A CONSTITUIÇÃO DE CONHECIMENTO COLABORADO EM GEOMETRIA  
DAS TRANSFORMAÇÕES COM FERRAMENTAS DINÂMICAS**

**Débora Bordonal Senra Oliveira**

Juiz de Fora (MG)

Agosto, 2017

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA**

**INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS**

**Pós-Graduação em Educação Matemática**

**Mestrado Profissional em Educação Matemática**

**Débora Bordonal Senra Oliveira**

**A CONSTITUIÇÃO DE CONHECIMENTO COLABORADO EM GEOMETRIA DAS  
TRANSFORMAÇÕES COM FERRAMENTAS DINÂMICAS**

**Orientador: Prof. Dr. Adlai Ralph Detoni**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Juiz de Fora (MG)

Agosto, 2017

Débora Bordonal Senra Oliveira

**A CONSTITUIÇÃO DE CONHECIMENTO COLABORADO EM GEOMETRIA DAS  
TRANSFORMAÇÕES COM FERRAMENTAS DINÂMICAS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Comissão Examinadora

---

Prof. Dr. Adlai Ralph Detoni - UFJF

Orientador

---

Prof. Dr. Flávio de Souza Coelho - CMJF

---

Prof. Dr. Marco Antônio Escher - UFJF

Juiz de Fora, 23 de Agosto de 2017

## **Agradecimentos**

Agradeço primeiramente a Deus por ser meu suporte e ter me guiado e dado forças para continuar.

À minha filha Clara, por ser fonte de amor e alegria para minha vida e por me fazer mais feliz a cada dia.

Ao meu esposo Leonardo por ser companheiro, amigo e me compreender.

À minha família pelo amor incondicional e pelo carinho, meu pai Moacyr, minha mãe Isabel e meus irmãos Diogo e Dayana.

Aos meus sobrinhos Vinícius, Arthur e Bernardo pelas alegrias que proporcionam.

Ao Adlai, pela sua dedicação, paciência e disponibilidade, por compreender minhas dificuldades e me auxiliar com seu conhecimento e com sua amizade.

Aos sujeitos da pesquisa, que contribuíram para a rica experiência e colaboração.

Aos membros da banca de qualificação e de defesa pelo carinho no auxílio dessa pesquisa.

Aos colegas do mestrado pelo apoio e amizade.

Ao meu amigo Marcelo pelo exemplo de profissional e apoio.

A minha amiga Jaqueline que esteve presente durante esse percurso, dando incentivo.

E, a todos que, mesmo não citados aqui, de alguma forma contribuíram para que chegasse ao fim de mais um ciclo.

A todos, meu muito obrigada!

*“Lutar com palavras  
é a luta mais vã.  
Entanto lutamos  
mal rompe a manhã.  
São muitas, eu pouco...  
Palavra, palavra  
se me desafia, aceito  
o combate”.*

*(Carlos Drumond de Andrade)*

## Resumo

O presente estudo investigou como o conhecimento Geométrico-Matemático é constituído por meio de uma metodologia investigativa e colaborativa empreendendo olhar à Geometria das Transformações (GT), trazida como uma geometria não elementar (isto é, a geometria usual de nossa prática curricular) por observar relações e invariâncias nas transformações das figuras, e não em sua estrutura específica. Para tal, fomos a campo para vivenciar o fenômeno de alunos de uma licenciatura em Matemática praticarem ações e pensamentos sobre atividades desenhadas, e compreender essa experiência. Como os sujeitos vivenciaram as atividades que preparamos, no espaço investigativo e colaborativo, é o viés da nossa pesquisa. Chegamos a resultados significativos que nos mostram que a GT é uma Geometria afim a *softwares* de geometria dinâmica. Também ficou evidenciado o potencial contribuinte de grupos colaborativos, que comungam com um espírito de abertura pedagógica ao diálogo, para constituição de conhecimentos peculiares e significativos, em distinção aos modos tradicionais de se construir o conhecimento geométrico. As convergências dos sentidos que fizeram nossa pesquisa, agrupadas em diversos *modos*, são os registros de nossa compreensão de que o conhecimento matemático produzido num grupo é tributário de vários aspectos: de como se vive o diálogo científico, de como se acessa recursos, de como se convive com outros e de como os horizontes se abrem segundo uma intenção pedagógica.

**Palavras-chave:** Educação Matemática; Geometria das Transformações; atividades investigativas e exploratórias; currículo; geometria dinâmica; fenomenologia.

## Abstract

This study investigated how the Geometric-Mathematical knowledge is made of an investigative and collaborative methodology. We undertook seeing the Geometry of Transformations (GT) coming up as a non-elementary geometry (that is, the usual geometry in our curricular practice) since it sees relationships and invariances in the transformations of figures instead of in their specific structure. In order to do so, we went to the field to live the phenomenon in the form of undergraduate Mathematics Teaching students practicing actions and thoughts on the designed activities and tried to understand this experience. The bias of our research is the way the subjects experienced the prepared activities in the investigative and collaborative space. We achieved significant results that show that GT is a Geometry related to dynamic geometry softwares. We also evidenced the potential of the contribution of collaborative group which commune with a spirit of pedagogical opening to dialogue in order to make up peculiar and significant knowledges, in spite of the traditional ways of building geometric knowledge. The convergences of meanings in our research, grouped in many *modes*, are the records of our comprehension that the mathematical knowledge built within a group is tributary to various aspects: of how to experience the scientific dialogue, how to coexist with others and how horizons are open according to a pedagogical intent.

**Keywords:** Mathematics Education; Geometry of Transformations; investigative and collaborative activities; curriculum; dynamic geometry; Phenomenology.

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura</b>	<b>Descrição</b>	<b>Pág.</b>
Figura 1	Teorema de Padrão Geométrico.....	.....18
Figura 2	Máxima Metodológica.....	.....28
Figura 3	Diversos tipos de tarefas .....	.....29



## LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Temas das atividades .....	53
Tabela 2: Análise Ideográfica da Atividade 1 Grupo 1.....	58
Tabela 3: Análise Ideográfica da Atividade 1 Grupo 2.....	76
Tabela 4: Análise Ideográfica da Atividade 4.....	83
Tabela 5: Análise Ideográfica da Atividade 5 .....	101
Tabela 6: Análise Ideográfica da Atividade 7 .....	112
Tabela 7: Convergência do Pedagógico.....	131
Tabela 8: Convergência do Didático.....	132
Tabela 9: Convergência do Epistemológico.....	133
Tabela 10: Convergência do <i>Software</i> .....	134
Tabela 11: Convergência da Geometria das Transformações.....	135
Tabela 12: Convergência do Afetar-se.....	136

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Considerações da Atividade 2.....	116
Quadro 2: Considerações da Atividade 3.....	118
Quadro 3: Considerações da Atividade 6.....	120
Quadro 4: Considerações da Atividade 8.....	122
Quadro 5: Considerações da Atividade 9.....	124
Quadro 6: Considerações da Atividade 10.....	125
Quadro 7: Considerações da Atividade 11.....	128

# SUMÁRIO

<b>CAPÍTULO 1 - PERSPECTIVAS E JUSTIFICATIVAS QUE ENVOLVEM A PESQUISA .....</b>	<b>13</b>
1.1- Perspectivas Acadêmicas que permeiam uma linha de pesquisa.....	13
1.2- Perspectivas teóricas que envolvem a fenomenologia .....	14
<b>CAPÍTULO 2 - ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA COM O USO DE COMPUTADORES.....</b>	<b>16</b>
2.1- O Uso de Tecnologias Digitais no Ensino da Matemática.....	16
2.2- Modos de Fazer Geometria: Transformações Geométricas.....	21
2.3- A Importância do Ensino de Outra Geometria.....	25
<b>CAPÍTULO 3 – AMBIENTES COLABORATIVOS .....</b>	<b>29</b>
3.1- Atividades Investigativas e Exploratórias .....	29
3.2- Interação e Colaboratividade .....	30
3.3- Atitudes do Professor em Ambientes Colaborativos .....	34
<b>CAPÍTULO 4 – UMA COMPREENSÃO DOS ASPECTOS CURRÍCULARES .....</b>	<b>36</b>
4.1- O Pedagógico .....	36
4.2- O Epistemológico.....	38
4.3- O Didático .....	44
<b>CAPÍTULO 5 – A PESQUISA DE CAMPO .....</b>	<b>49</b>
5.1- Metodologia Qualitativa Fenomenológica e a Interrogação.....	49
5.2- Elaboração das Atividades para a Pesquisa .....	51
5.3- O Campo e os Sujeitos .....	52
5.4- Cenário dos Encontros e a Sequência Didática .....	53
<b>CAPÍTULO 6- APRESENTAÇÃO, INTERPRETAÇÃO E ANÁLISE IDEOGRÁFICA DOS DADOS .....</b>	<b>55</b>
6.1- Apresentação das Atividades e seu Desenvolvimento .....	55

<b>6.2- As Cenas e as Ideias.....</b>	<b>57</b>
6.2.1- Atividade PROJETO ARQUITETÔNICO .....	58
Grupo 1.....	58
Grupo 2.....	76
6.2.2- Atividade HOMEM BALA.....	83
6.2.3- Atividade VIVEIRO .....	101
6.2.4- Atividade SINUCA .....	112
<b>6.3- Considerações Gerais das Atividades Não Analisadas .....</b>	<b>115</b>
<b>CAPÍTULO 7 – CONVERGÊNCIA DAS IDEIAS: A ANÁLISE NOMOTÉTICA .....</b>	<b>130</b>
7.1- Núcleos de significação de ideias.....	130
7.2 – Valores Pedagógicos Vividos na Pesquisa .....	137
7.3 – Modos Didáticos Emergentes da Experiência Vivida na Pesquisa.....	140
7.5 - A Geometria das Transformações como Abertura de Horizontes.....	144
7.6 – Modos de Viver o <i>Software</i> .....	146
7.7 – O Afetar-se na Experiência Vivida .....	150
<b>CAPÍTULO 8- TRANSCENDÊNCIA DO VIVIDO: Algumas Considerações .....</b>	<b>153</b>
<b>Referências .....</b>	<b>156</b>
<b>Apêndices.....</b>	<b>159</b>

## CAPÍTULO 1 - PERSPECTIVAS E JUSTIFICATIVAS QUE ENVOLVEM A PESQUISA

### 1.1- Perspectivas Acadêmicas que permeiam uma linha de pesquisa

Em 2008 iniciou-se minha trajetória acadêmica na Universidade Federal de Juiz de Fora quando entrei para o curso de Matemática. Nos primeiros dois anos de curso, dediquei-me exclusivamente aos estudos das disciplinas curriculares, o que foi um grande aprendizado e ajudou a concretizar que era isso mesmo que eu queria.

Tudo era novo e logo no primeiro período o professor de Geometria Plana apresentou o *Software* GeoGebra fazendo abrir meus horizontes para as possibilidades da Matemática com o computador, o que nunca tinha vivido no meu ensino básico.

Minha primeira experiência como aluna naquele momento foi além da expectativa, que até então pensava que a matemática, num *software*, seria apenas uma reprodução sistemática dela construída com papel e lápis. Pude compreender que a Matemática não é uma disciplina estática e, principalmente a Geometria, é cheia de possibilidades de movimentação e experimentação.

Quando comecei a refletir sobre minha experiência e sobre as possibilidades de alunos ainda no ensino básico terem acesso às tecnologias com professores capacitados e alcançando um maior envolvimento, uma maior compreensão, percebendo que a matemática vai além de fórmulas e métodos, iniciei uma compreensão de que poderia, com esse aporte, haver um avanço maior no ensino e na aprendizagem.

Particpei do Projeto de Treinamento Profissional no Colégio de Aplicação João XXIII/UFJF como bolsista de Geometria Dinâmica: “*Possibilidades e Perspectivas com o Recurso do Computador*”, onde aconteceu meu primeiro contato com a “união” do *software* GeoGebra e a interação virtual entre os alunos por meio do *Orkut*, a rede social mais usada à época. O professor coordenador criou um grupo onde aconteciam as postagens síncronas sobre a atividade no momento da aula.

Foi a primeira vez que o *software* de Geometria Dinâmica se mostrou em sua presença didática para mim, levando a questões sobre as quais só depois pude

refletir cientificamente (como ainda reflito) tais como: o novo arranjo político da sala de aula, o tipo de conhecimento matemático constituído e como avaliar a aprendizagem.

Em seguida, participei do programa de Iniciação Científica com o projeto “*O Conhecimento Matemático no Espaço-Tempo Hipermídico: Formação do Licenciando em Ambientes Virtuais*” que fez aflorar ainda mais em mim a vontade e a possibilidade de estudar e familiarizar com pesquisadores e com a Educação Matemática.

## **1.2- Perspectivas teóricas que envolvem a fenomenologia**

Na experiência como bolsista de Geometria Dinâmica, ficou o conhecimento por meio da prática, com a participação em aulas investigativas, ajudando aos alunos a criar argumentos matemáticos sobre o assunto; já na segunda, ficou o conhecimento teórico sobre assuntos ligados à Educação Matemática. Leituras e diálogos sobre textos e livros de assuntos ligados às tecnologias, à Educação Matemática e à Fenomenologia eram frequentes, e, a partir daí, comecei a me envolver e escrever artigos para congressos, relatos de experiências, e, com o grupo, apresentamos trabalhos conjuntos e individualmente em alguns congressos de Educação Matemática sobre vídeo-aulas, interações virtuais, e afetividades e pertencas na Educação à Distância.

As leituras sobre a fenomenologia me ajudaram-me a ampliar minha visão de mundo e minhas perspectivas em relação ao meu futuro profissional. Assim, cursando a graduação, já tinha alguns temas em mente que gostaria de pesquisar no mestrado, como por exemplo, como o aluno aprende matemática fazendo licenciatura a distância; como as vídeo-aulas podem ajudar aos estudantes a compreender a Matemática; ou como os *softwares* podem auxiliar na aprendizagem nas Licenciaturas em Matemática.

Ainda hoje me movo na compreensão das possibilidades da fenomenologia para o pedagógico, onde assento minhas interrogações, explicitadas mais à frente, e trago forte intuição da sua importância e das concepções que ela traz sobre a visão de mundo, que tem consequências para a prática escolar no modo de ver a escola, o aluno, o conhecimento, o currículo, e, enfim, sobre vários aspectos desse vasto mundo da Educação Matemática.

O ambiente de aprendizagem pode permitir a produção de conhecimento peculiar quando cada aluno se manifesta em ação de participação nessa construção, o modo como se porta, como ele vivencia o aprendizado, como o diálogo pode se pôr no espaço e como o aluno habita o ambiente, são alguns aspectos que tenho intuito de que o fenomenológico irá amparar meus anseios.

O acompanhamento do projeto de pesquisa de um professor, que pesquisou “Como se dá o envolvimento de professores e futuros professores de Matemática, com uma proposta que intui gerar Aprendizagem Significativa de conceitos de Geometria Analítica Plana, mediada por atividades exploratórias e investigativas em um ambiente colaborativo de Geometria Dinâmica?” (LOPES, 2013) me trouxe outros questionamentos e interesses referentes às atividades investigativas e exploratórias e aos ambientes colaborativos de Geometria Dinâmica.

Minha trajetória estudantil me leva a perceber que a Matemática deve ser apresentada de maneira inspiradora, trazendo outras metodologias, outras ferramentas para instigar os alunos a desenvolver capacidades e constituição de novos conhecimentos, e horizontes de significação possíveis alternativas da prática tradicional. Atividades que estejam contextualizadas de acordo com o estudante se mostram de maior interesse dos alunos por estarem mais próximos das situações cotidianas.

Profissionalmente vejo que há grande anseio por parte dos alunos em trabalhar com tecnologias digitais por ser uma realidade cotidiana. Percebo que podemos proporcionar o uso dessas tecnologias para o desenvolvimento das habilidades e dos conhecimentos escolares, trazendo esses conhecimentos de maneiras diferentes permitindo melhores formas de aprender.

Dessa forma, nossa proposta é desenvolver uma pesquisa qualitativa fenomenológica com o intuito de compreender como o conhecimento Matemático-Geométrico é constituído por meio de atividades investigativas de Geometria das Transformações com o uso de *software* de geometria dinâmica.

## CAPÍTULO 2 - ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA COM O USO DE COMPUTADORES

### 2.1- O Uso de Tecnologias Digitais no Ensino da Matemática

Em minha prática docente, percebo que as tecnologias estão cada vez mais presentes no dia a dia de todos, inclusive como instrumento de ajuda para tirar dúvidas de conteúdos escolares. Nessa perspectiva, o uso de *softwares* e *applets* estão atraindo a curiosidade dos alunos, e nós, professores e educadores, podemos abarcar esse interesse para aguçar ainda mais a vontade deles de aprender. Buscamos referências na literatura que nos ajudassem a compreender os modos pelos quais as tecnologias podem se apresentar no ensino e na aprendizagem. Maltempi (2005) ressalta que:

A importância do computador e das novas tecnologias para a educação está ampliada atualmente, pois num mundo globalizado e cada vez mais complexo, embora haja muito mais o que se aprender, há muito mais e melhores maneiras de se aprender, graças às novas tecnologias. (MALTEMPI, 2005, p. 5)

As tecnologias nos permitem mais e melhores maneiras de aprender. Elas nos possibilitam diferentes olhares para um mesmo objeto, nos permitem descobrir particularidades ou generalidades. Novas perspectivas são descobertas quando lidamos com o computador e esperamos outro olhar diferente daquele com lápis e papel, como os autores Noss e Hoyles (1996) nos mostram pelo exemplo relatado a seguir.

Esses autores dizem que o computador instaura um ambiente de investigação e de experimentação, quando falamos do uso de um *software* aberto de Geometria Dinâmica, que permite que ocorram *insights*. Temos que ter claro o objetivo para o qual estamos utilizando um *software*, pois,

“[...]se nós estamos utilizando o *software* com o objetivo de revisar a matemática, esse deve ser o estágio inicial de resistência para julgar e testar abordagens, aderindo à experimentação e o questionamento. Sem persistência e movimentação, o uso do *software* inevitavelmente quase torna-se banalizado: usando para reproduzir em vez de reformular.” (NOSS; HOYLES, 1996, p. 233, tradução nossa).

Como vemos nesses autores, o uso de um *software* com propostas fechadas, que seriam aquelas em que todos os alunos chegariam ao mesmo resultado pelo mesmo caminho, não trariam resultados inusitados como os presentes na pesquisa



de Noss e Hoyles (1996), em relação às práticas usuais. Trataria-se apenas de proporcionar ao aluno o mesmo desencadeamento lógico-matemático que tradicionalmente acontece. De outro modo, queremos que com o *software* possamos fazer atividades em que cada aluno possa manipular figuras e utilizar os dados de forma diferente, chegando a alguma resposta dentre as várias possíveis, e em que as manipulações proporcionadas pelo computador tragam novas formas de visualizar e/ou resolver uma atividade.

Quando se utiliza um *software*, esses pesquisadores esperam uma mudança do modo de pensar e agir. Quando o aluno tem a liberdade para fazer testes, investigar invariâncias, arrastar objetos e resolver por tentativa e erro, por meio da experimentação, ele instaura uma nova forma de trabalhar as ideias matemáticas.

Nas atividades investigativas e exploratórias que ocorriam no meu relatado treinamento profissional, era comum se destacarem, no sentido de alcançar o objetivo ou até mesmo ir além, os alunos que geralmente não eram bem sucedidos na aula tradicional. A utilização de varias metodologias de ensino é interessante por atingir uma pluralidade maior de alunos. A importância que a experimentação e a investigação tomam em minha pesquisa requer que seus conceitos sejam mais detalhados, o que faremos mais a frente.

Noss e Hoyles (1996) descrevem uma atividade desenvolvida com alunos que, na época, eram alunos da 8ª série, na qual a proposta inicial era apenas reproduzir o método tradicional com a utilização do *software*. Fazendo uso da experimentação no *software*, surgiram novidades que não tinham aparecido antes. Novos *insights* foram surgindo com a mudança de proposta.

Essa atividade descrita por Noss e Hoyles (1996, p. 233) envolvia “um teorema de padrão geométrico que ligando os pontos médios de qualquer quadrilátero produzirá um paralelogramo.” Iniciou-se a experimentação no *software* Cabri e pesquisou-se empiricamente sobre o procedimento de tentativa e erro. Os autores descrevem o que foi feito:

“Construímos um quadrilátero geral ABCD e depois o conjunto de segmentos, PQ, QR, RS e ST sendo o ponto P um ponto genérico, então construímos de forma que os vértices do quadrilátero original fossem os pontos médios e ligamos os segmentos como ilustrado na figura 10.2 e 10.3. quando movemos o ponto P aleatoriamente notamos um invariante: o vetor PT era fixo (NOSS; HOYLES, 1996, p. 232, tradução nossa, figuras referidas reportadas abaixo)

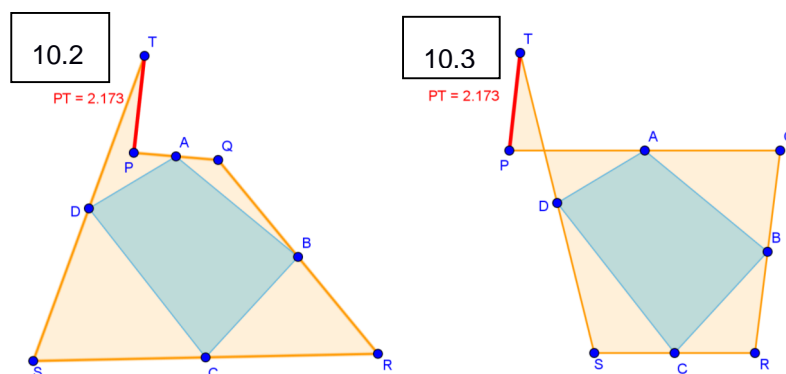


Figura 1: 10.2: figura original, 10.3: P foi movimentado, e PT permaneceu constante mesmo com P em qualquer direção.  
Fonte: NOSS; HOYLES, 1996, p. 232

Os autores relatam que a invariância do vetor PT, do relato acima citado, foi observada pela dinamicidade que o *software* proporciona: “quando movemos o ponto P aleatoriamente notamos um invariante” (NOSS; HOYLES, 1996, p.233, tradução nossa). E acrescentam “notamos que essa invariância tenha mudado completamente nossa perspectiva do velho teorema” (idem). A percepção de que o teorema proposto poderia ser um caso particular de uma família de teoremas é uma emergência epistemológica do que os autores chamam de novos valores pedagógicos.

Nessa experiência descrita por Noss e Hoyles (1996), observamos que existia uma proposta inicial e depois surgiu uma novidade que ressaltou outros aspectos não observados anteriormente. Junto com esses autores, avaliamos que os caminhos pelos quais a atividade se desenvolveu poderiam não ser percorridos, se estando em outro ambiente diferente do informatizado. Com o computador, as possibilidades de resolução de uma atividade podem ser testadas e pensadas com o auxílio de ferramentas como: mover, arrastar, fazer movimentos aleatórios com os objetos da tela do computador, que dificilmente conseguiríamos fazer com o papel e o lápis ou outras mídias.

Tais descobertas acerca do teorema não seriam alcançadas sem a utilização da dinamicidade que o *software* proporciona. Além dessas descobertas, os autores apontam outras questões que mostram que a atividade não está fechada, terminada, ainda há vários questionamentos como: há mais de um vetor associado a um dado quadrilátero? E se nessa situação fosse um pentágono? Talvez todo polígono tenha um vetor invariante? Mais de um? Quantos? etc..

O relato dos autores mostra que uma prática de exploração pode, no entanto, estabelecer uma resistência na execução, vinda do apego ao tradicional, mas permite instalar e fluir interações dialéticas em novas possibilidades matemáticas.

De forma próxima, Souto e Borba (2013, p.51) confirmam que, numa pesquisa em um curso de extensão com professores de Matemática na modalidade *on-line*, onde professores de todas as regiões do país realizavam trabalhos sobre cônicas com o *software* de matemática dinâmica GeoGebra no ambiente virtual de aprendizagem, possibilitou comunicações síncronas e assíncronas onde o “processo de “pensar com” o GeoGebra se intensificou, testar, simular, experimentar, se tornaram procedimentos comuns e indispensáveis” (SOUTO E BORBA, 2013, p.51).

Os autores afirmam que o *software* proporcionou um processo dinâmico e simultâneo o que não foi possível com o uso do papel e lápis. E acrescentam que “os *feedbacks* do recurso arrastar do *software* nos movimentos de experimentar, influenciaram no raciocínio dos professores” (SOUTO E BORBA, 2013, p.51).

À luz epistemológica, e conseqüentemente pedagógica, que emerge da instalação de ambientes de aprendizagem, surgem novas caracterizações políticas, ligadas à formação e atuação profissional docente e à correlação de poderes nesses ambientes. Sant’Ana, Amaral e Borba (2012) relatam que, em uma pesquisa feita com professores numa formação continuada com a utilização de tecnologias, viram que a formação “parece ter gerado segurança nos professores, que foram incorporando as TIC gradativamente; e essa mudança também se reflete progressivamente nas atividades em sala de aula” (SANT’ANA, AMARAL E BORBA 2012, p. 534).

Vemos que para o professor utilizar o computador com outras metodologias de ensino ele tem que estar seguro e para isso tem que conhecer bem o ambiente virtual de aprendizagem no qual irá trabalhar.

Conforme Lopes (2013, p. 22):

“As escolas carregam a responsabilidade de auxiliar na construção social dos alunos, de forma a prepará-los para muitas das adversidades do cotidiano. Este fato torna inevitável a utilização das TIC; no ensino e na aprendizagem, o tratamento didático e metodológico, deve condizer com a atual realidade tecnológica ...” (LOPES, 2013, p. 22).

Para isso, o professor, amparado em todos os âmbitos, estrutural, físico e social, é capaz de apresentar diferentes olhares em diferentes perspectivas para seus alunos. Para isso toda a escola deve estar sempre em transformação para acompanhar todos os avanços didáticos e metodológicos.

Penteado (2000) diz que em metodologias que envolvem atividades investigativas e o uso de computadores, o professor não é mais o detentor único do conhecimento, o aluno é mais responsável por seu conhecimento, e o ensino não é mais um processo de instrução. A aprendizagem pode ser alcançada por um processo de constituição.

É em coro com essa ideia que pretendemos desenvolver essa pesquisa, pois aspectos ligados a tecnologias no ensino, atividades investigativas e exploratórias e ambientes colaborativos abrem nossas discussões para as características didaticopedagógicas que entendemos serem as pertinentes para se trabalhar com novos objetos e objetivos, o que queremos empreender em nossos estudos.

Propomos o uso da Geometria das Transformações (GT) como uma Geometria mais afim para atividades em níveis investigativos e exploratórios, trabalhadas em ambientes colaborativos de aprendizagem como caminhos de investigação para nossa pesquisa.

Em nossos estudos, pretendemos apresentar a geometria das transformações utilizando o computador, em acordo com Heitmann (2013) quando diz que os alunos estão imersos numa “cultura virtual” e é neste lugar que estão se desenvolvendo

nossos conhecimentos e representações e é onde continuará no futuro. E ele acrescenta que para isso devemos formar os professores nessa cultura a fim de que eles possam lidar com essas ferramentas tecnológicas no futuro e com as que ainda nem foram pensadas.

## **2.2- Modos de Fazer Geometria: Transformações Geométricas**

Quando falamos da origem da Geometria, pode ser que nos venham em mente os Gregos Clássicos, mas não podemos desconsiderar os desenvolvimentos geométricos feitos por povos da Antiguidade como os Egípcios e os Babilônicos. De qualquer forma, “sem dúvidas, a Geometria é, nas matemáticas gregas, o ramo que deu prova de tal perfeição que transformou, durante vários séculos, no próprio paradigma da ciência” (PIAGET, 1987 p.91). Tanto é que, mesmo dois mil anos após Euclides, ela foi usada como modelo para Newton construir toda uma teoria científica.

A Geometria, então, é feita e faz. Ela se constitui em um pensamento e permite a abertura de pensamentos. É interessante, mesmo a partir da história, vermos que com ela tem um dinamismo em que ao mesmo tempo se solidifica como ciência na tradição e exige diferentes compreensões abrindo variadas análises e novos horizontes.

A abertura de pensamentos é presente na formulação axiomática de “Os Elementos”, Piaget observa que mesmo a tradição axiomática requer um movimento, já que a obra de Euclides é um livro para ser compreendido em toda a sua profundidade só na transição do século XIX a partir dos trabalhos de Hilbert e de Peano.

“Os Elementos de Euclides têm [...] o interesse de representar de um modo perfeito o tipo de geometria que vai dominar durante todo o período compreendido entre a Antiguidade e a época moderna. Estas características só serão postas em evidência no século XIX, no exato momento de uma profunda evolução metodológica e de uma mudança de conceitos sobre o significado da geometria”(PIAGET, 1987, p.91).

Nesse momento são colocados em evidência todas as características e limitações da Geometria Euclidiana. Para compreendermos esse processo, vamos

considerar a evolução da geometria a partir do século XVII que foi quando surgiram mudanças consideráveis com a Geometria Analítica que, precedida por Fermat (1601-1665), teve em Renè Descartes, com o Discurso do Método, a inauguração da visão da Geometria “reduzida” à Álgebra.

Dois geômetras franceses do século XVIII, Poncelet (1788-1867) e Chasles (1793-1880) exprimem que a Geometria elementar (aquela instituída por Euclides) é considerada um caso particular, sendo a expressão daquilo que é acessível fisicamente, enquanto a geometria analítica vai além; com a geometria analítica pode-se chegar a generalidades de famílias inteiras de figuras e representações imaginárias.

A partir da Geometria Analítica surgiram novas possibilidades para a geometria em geral, os obstáculos anteriores ganharam outros sentidos para desenvolvimentos de outras geometrias. É com ela, ainda que nos processos algébricos, se impõem as transformações.

A noção de transformação só surgiu claramente a partir do século XVI e XVII com a evolução da análise e da álgebra, e avançou no século XVIII com os estudos de Euler que só então “se chega a mostrar como os movimentos e as simetrias das figuras estão ligadas ao problema da mudança dos eixos de coordenadas, e como a simetria pode ser traduzida analiticamente” (PIAGET, 1987, op. cit. p.104).

Esse desenvolvimento inicial exerceu influência até o início do século XX onde as ideias de Sophus Lie e de Felix Klein de um lado, e as de Rieman por outro tiveram aparato para deduzir toda riqueza do conteúdo da Transformação.

“É apenas com Lie e Klein, e baseados na noção de *grupo* de transformação e as invariantes correspondentes, que se disporá do utensílio necessário para introduzir as distinções precisas entre os diferentes tipos de geometria. Desta vez é Felix Klein que vai formular de modo magistral o novo ponto de vista. Uma nova etapa será assim inaugurada. A passagem da etapa das transformações projetivas à etapa das estruturas de grupos constitui uma lição preciosa para a epistemologia” (PIAGET, 1987, p.105).

Segundo Piaget (1987), essa estrutura de grupo vai possibilitar a reformulação de problemas em outro nível já que a ideia de transformação era usada de maneira claramente intuitiva e trazia consigo limitações.

Mas, a formulação feita por Felix Klein em seu *Programa de Erlangen* (1872) é a das mais claras e concisas. O autor passa “das transformações às estruturas que as explicam” (PIAGET e GARCIA, 1987, p.106). Dessa forma, percebe-se que a transformação que deixa alguns invariantes nos objetos geométricos forma os grupos; isso substitui a análise das transformações, propriamente ditas, pelas relações internas de cada grupo. “São as relações entre os elementos de uma estrutura dada que passam ao primeiro plano” (PIAGET e GARCIA, 1987, p.107).

Piaget e Garcia constroem uma compreensão histórico epistemológica acerca da Geometria das Transformações que, mesmo não sendo nossa intenção seguir seus passos, entendemos ser ela clareadora para nossas reflexões. Para Piaget e Garcia (1987) os níveis de organização na construção de conhecimento formam a tríade *intra-inter-trans*.

Detoni e Pinheiro nos ajudam a compreender cada nível. A fase *intrafigural*

“começa em Euclides, em um período no qual se estudavam propriedades de uma figura enquanto relações internas restritas à mesma, não se expandindo e não considerando as transformações dessa figura em um espaço que contempla outros objetos, tais quais outras figuras” (DETONI E PINHEIRO, 2015, p.10)

A fase *interfigural* pode ser associada com o período da Geometria Projetiva, segundo Piaget e Garcia (1987), visto essa “geometria ter sido caracterizada pelo estabelecimento de múltiplas relações entre figuras, incluindo encontrar transformações ao ligá-las segundo diversas formas de correspondências” (DETONI E PINHEIRO, 2015).

A última fase, à qual Piaget e Garcia (1987) destinaram o conceito de *transfigural*, é “caracterizada pela preeminência das estruturas” que permitiam transformar as figuras, gerando multiplicidade delas, em uma integração de suas correlações e diferenciações, fase marcada especialmente pela expressão do *Programa de Erlangen*, de Felix Klein”. Klein, ao propor uma nova visão sobre a Geometria, a partir da estruturação de grupos de invariâncias, é afim com o aspecto piagetiano do *transfigural*, no qual a figura, ela mesma em suas propriedades, já não é o principal, uma vez que são suas relações extrínsecas que importam (DETONI E PINHEIRO, 2015).

Esses níveis nos ajudam a compreender a GT como uma possibilidade de se fazer geometria de uma forma diferente por compor grupos de invariantes, que podem ser trabalhados em dinamos junto a um *software* gráfico aberto, manifestando uma afinidade que Detoni e Pinheiro (2015) intuíram.

O conhecido Programa de Erlangen de Félix Klein foi intitulado como “*Considerações comparativas sobre recentes investigações geométricas*”. Na apresentação, o autor relaciona a geometria euclidiana, a geometria projetiva e as geometrias não euclidianas a partir das transformações geométricas e por meio da teoria dos grupos. Segundo Leme da Silva, Bongiovanni e Valente, (2011), Klein adota uma formulação do ponto de vista algébrico, “[...] amplia essas ideias e apresenta fórmulas para as transformações geométricas no plano e no espaço” (pag. 18).

Em seu trabalho, Klein destaca as invariâncias que ocorrem em cada uma das transformações geométricas, nomeando como transformações geométricas a translação, rotação, reflexão segundo uma reta, semelhança e homotetia. Observam-se os elementos invariantes em cada transformação, e a partir disso são montados os grupos que possuem esses mesmos invariantes. Desse modo,

“observando as fórmulas postas por Klein, conclui-se que a transformação afim, é um caso particular da transformação projetiva, [...], a transformação semelhança é um caso particular da transformação afim, as isometrias são casos particulares da transformação de semelhança.” (LEME DA SILVA, BONGIOVANNI E VALENTE, 2011, p. 19).

E assim, “o estudo das figuras é substituído pelo estudo das propriedades das transformações” (LEME DA SILVA, BONGIOVANNI E VALENTE, 2011, p. 19) facilitando a resolução de problemas complexos, que podem transformar uma situação numa outra mais simples a qual se sabe resolver, e, pela transformação inversa, voltar para o problema de origem.

Essa nova formulação nos sugere pensar na “ideia de grupo mais restrito para grupo mais amplo, sempre em termos de invariâncias” (DETONI E PINHEIRO, 2015, p.5). Esses autores exemplificam uma situação da geometria projetiva feita no computador em que o caso de não paralelismo é tratado em um *software* geométrico e um melhor comportamento geométrico pode ser interpretado sobre situações



limites (em que não paralelas tendem a ser paralelas), o que seria uma singularidade para a geometria elementar.

Assim, intuímos que a Geometria das Transformações seja uma Geometria mais afim para se trabalhar em *softwares* de Geometria Dinâmica por nele se acolher movimentos de figuras e transformações, que, em atividades exploratórias, podem levar a caminhos de solução.

### **2.3- A Importância do Ensino de Outra Geometria**

Ao fazer a revisão bibliográfica no campo do ensino da geometria, percebe-se pouca pesquisa na área de Geometria das Transformações. Aqui, criando um contexto, pretendemos estudar a geometria em seu aspecto geral buscando considerações das Geometrias Não-Euclidianas para uma alternativa à técnica axiomática dedutiva que se caracteriza no modelo Geométrico Euclidiano que é tradicionalmente trabalhado nas escolas. Nossa referência às não euclidianas se escoram no entendimento de que a GT acaba trabalhando, se não no aspecto conceitual e em seus objetos, mas nos aspectos de metodologia e de relações entre objetos, de modo distinto do euclidiano tradicional. Isso nos permite aderirmos à literatura que mostra alternativas para o ensino da Geometria como críticas e fundamentos comuns.

Acreditamos que se a formação geométrica do professor de Matemática não se restringisse somente ao euclidiano em seu modo elementar, o ensino da Geometria poderia estar mais presente na escola, presença, inclusive do ponto de vista qualitativo. Barreto e Tavares (2013, p. 74) em sua pesquisa em diversas instituições de ensino superior no Brasil nos cursos de licenciatura em Matemática, relatam que “de 43 Instituições pesquisadas, somente 5 abordavam conceitos de Geometrias Não Euclidianas nas suas matrizes curriculares, aproximadamente 12%”.

“Tal pesquisa foi refeita em fevereiro de 2010. Das 227 Instituições pesquisadas, 61 não disponibilizavam, no site oficial, a grade curricular do curso de Licenciatura em Matemática. Das 166 Instituições restantes apenas 12 apresentavam, na matriz curricular, alguma disciplina cujo título evidencia o estudo de Geometrias Não Euclidianas, 06 com disciplinas obrigatórias e 06 com disciplinas optativas ou

eletivas. Aproximadamente 7% das 166 Instituições formam professores que sabem da existência de outras geometrias além da euclidiana". (BARRETO; TAVARES, 2013, p.74).

Na verdade, sabemos que, numa análise mais ampla, a restrição ao euclidiano convém a uma prática escorada na tradição que é também presente em cada futuro professor, e que acomoda o uso de materiais e práticas já disponíveis, resultando na perpetuação de se trabalhar aquilo que já é familiar.

Fonseca et alli (2001, p.15), ao pesquisarem acerca da formação geométrica do professor dos ciclos iniciais, entre vários outros apontamentos, indicam a importância de confrontar o docente em formação com possibilidades outras que as usuais da tradição de novas práticas, novos objetivos, novos conteúdos, procurando-se dar a eles um sentido histórico, novo, para suas reflexões e suas ações.

Vários autores lidam com análises sobre o ensino da geometria no Brasil. Vemos que alguns têm uma atitude propositiva, outros uma atitude crítica pessimista. Leme da Silva, Bongiovanni e Valente (2011), procuram nos mostrar um cenário mais sereno, especialmente no que nos interessa aqui, tematizando o trabalho em torno de Martha Dantas e Osmar Catunda.

"O estado da Bahia foi uma referência no ensino de geometria na década de 60, quando, com Martha Maria de Souza Dantas e Osmar Catunda, representantes do MMM (Movimento da Matemática Moderna) no Brasil, se criou, com uma equipe de professores, um programa inovador e ousado de ensino da Geometria que fugia dos padrões até então utilizados nesse ensino". (LEME DA SILVA, BONGIOVANNI E VALENTE, 2011 p. 33)

Uma proposta para o ensino da GT foi apresentada por Catunda com a intenção, entre outras, de fazer frente a então forte tendência à algebrização da geometria. Estamos falando, aqui da década de 60 passada. É interessante notar a proposta de uma geometria de movimentos, fundada na GT, que escaparia de uma rigidez de apresentação, pois poderia ser trabalhada no nível ginasial até em forma pré-conceitual.

Vemos também essa possibilidade em Dienes e Golding. Esses dois autores foram traduzidos no Brasil com intenção de uma política de universalização do esforço pela implantação da Matemática Moderna. Suas propostas vêm na esteira do que se chamou de inversão didática para o aprendizado em Geometria, na qual a

geometria euclidiana seria o último passo escolar. Noções de topologia, depois projetivas e afins, nesta ordem, seriam postas para o trabalho com crianças. O “estudo é baseado em experiências relativas ao espaço, [...] que as crianças devem ter feito durante os dois primeiros anos de estudo” (DIENES e GOLDING, 1959, p. 1), e toda a trajetória de estudos, sempre evocativos de deslocamentos, deságua no estudo de rotações, simetrias e translações, porta de entrada de um euclidianismo renovado metodologicamente e epistemologicamente.

Eles enviaram sua proposta, na obra citada, a professores dos primeiros anos. Esse espírito parece permanecer, pois há, na literatura mesmo parca, indicações de que o conhecimento da Geometria das Transformações pelos professores de Matemática poderia ajudá-los a compreender melhor a própria Geometria Euclidiana e, conseqüentemente, reformular sua prática docente.

Detoni e Lopes (2015) dizem que é “pertinente pensar novas possibilidades de tratamento didático sobre novas geometrias que trariam valores epistemológicos renovados para uma alternativa pedagógica para a geometria” (DETONI E LOPES, 2015, p. 6). Nesse sentido, o pensamento metodológico para a resolução de problemas em transformações geométricas é característico:

*Seja  $f$  uma figura que contém  $A$  (a descobrir), a transformada  $f'$  dessa figura conterá o transformado do ponto  $A$ , o ponto  $A'$*

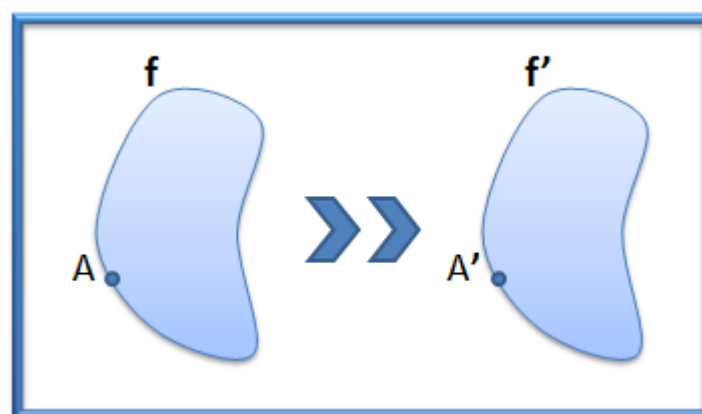


Figura 2: Máxima metodológica  
Fonte: os autores

A aplicação dessa máxima resulta em desdobrar dados na situação geométrica presente. Comumente, a partir do transformado obtido, utiliza-se a mesma transformação com sentido contrário e “volta-se” para se obter o ponto procurado.

Esse modo estrutural de pensar é o que, ao nosso ver, mais destoa do usual tratamento elementar da geometria enquanto ensino e aprendizagem. Na Geometria das Transformações essa máxima metodológica abrange vários tipos de transformações e impera sobre particularidades de objetos envolvidos, o que, entendemos, é pertinente ao que Piaget e Garcia denominam domínio (ou fase) *transfigural*.

## CAPÍTULO 3 – AMBIENTES COLABORATIVOS

Entendemos que o trabalho com a Geometria abre possibilidades das pessoas terem manifestações matemáticas muito próximas do que pensam, vivem e articulam como pensamentos de sua vida cotidiana. Esse entendimento vê-se não afinado com práticas de aprendizado geométrico em que conceitos são postos antes de uma atividade. Cremos que atividades didáticas não devam ser apenas de para exercitar conceitos, mas, também, ser uma oportunidade de se constituir conhecimentos. Vemos esta opção por meio da colaboração proporcionada tanto pela disposição didática, como pelas próprias características interacionais presentes em atividades investigativas e exploratórias.

### 3.1- Atividades Investigativas e Exploratórias

Ponte diz que: “investigar não é mais do que procurar conhecer, procurar compreender, procurar encontrar soluções para os problemas com nos deparamos” (2003, p. 5). Esperamos que atividades investigativas possam desencadear um espírito investigador, no sentido que ele coloca.

Ponte (2003, p. 5) faz um esquema para diferenciar os vários tipos de tarefas, levando em conta quatro aspectos, que segundo ele, se dividem em grau de dificuldade e estrutura.

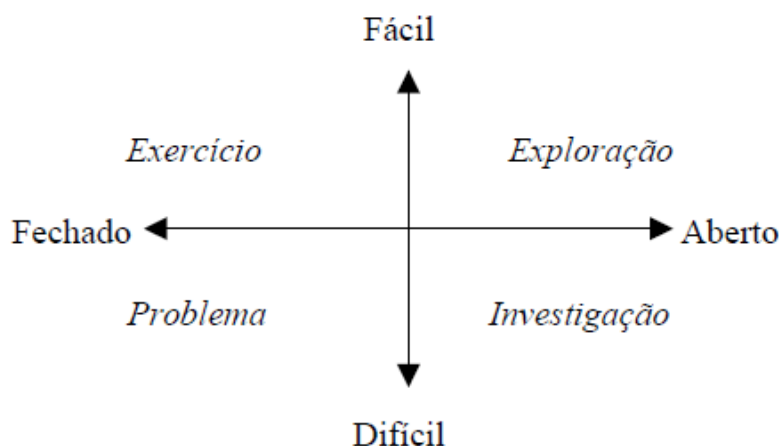


Figura 3: Diversos tipos de tarefas, em termos do grau de dificuldade e abertura.

Fonte: Ponte 2003, p. 5

Segundo Ponte (2003), o fato da distinção de certa atividade ser fácil ou difícil ser levantada acaba turvando a distinção entre o que são as atividades investigativas e as atividades exploratórias. Concordamos com esse autor sobre a importância de fazer essa distinção.

Em nossa pesquisa, não vamos trabalhar com níveis 'difícil' e 'fácil'. Interessa-nos seguir com esse pesquisador no tocante o que é aberto e o que é fechado, em atividades matemáticas que são propostas a grupos de estudantes. Numa perspectiva fenomenológica, atividades são oportunidades de pessoas se manifestarem matematicamente fazendo, desde já, que conhecimento constituído e significação sejam aproximados. Portanto, a abertura é a escolha que se faz para que atividades permitam essas manifestações.

Podemos, como Frota (2005), falar de uma *pedagogia de inquirição* se, ao começar, entendemos os valores contrários aos que aparecem, por exemplo, quando temos uma 'lista de exercícios'. Essa pedagogia, que premia a investigação, permite uma experiência, esta no sentido mais amplo, de pessoas lidando umas com as outras, elas lidando com objetivos que vão se tornando comuns, juntas com o espaço e o tempo que dispõem comum umas às outras.

Borba e Penteado (2001, p. 34) afirmam que as atividades com utilização de *softwares*, "além de naturalmente trazerem a visualização para o centro da aprendizagem matemática, enfatizam um aspecto fundamental na proposta pedagógica da disciplina: a experimentação".

Essa é a postura de investigar que buscamos em nossos sujeitos, tentando proporcionar essa atitude com a formulação das atividades e a constituição do ambiente de nossa pesquisa.

### **3.2- Interação e Colaboratividade**

Interação, segundo o dicionário é "Influência recíproca: a interação da teoria e da prática. Diálogo; contato entre pessoas que se relacionam ou convivem." (<https://www.dicio.com.br/interacao/>). Não estamos falando somente no aspecto de

se comunicar, na forma cotidiana. O que interessa pra nós é uma interação voltada para a constituição do conhecimento e exploração das ideias matemáticas.

Nossa perspectiva pedagógica, que reflete nossa intenção de educação para sujeitos críticos e autônomos, é construída junto com Powell (2013), Ponte (2003), Pinheiro (2013), Valente & Almeida (2012), dentre outros, buscando sempre a interação e a colaboração entre os sujeitos.

Powell (2013) ressalta a importância da interação interpessoal para a elaboração de atividades importantes. A relevância que o autor dá à interação é notável pela sua participação na criação, - em uma equipe de profissionais da Educação - de um ambiente de Equipes Virtuais de Matemática com o GeoGebra (VMTcG) para potencializar a interação síncrona de multiusuários por meio da resolução, de forma colaborativa de problemas matemáticos (POWELL, 2013, p.3).

Ponte (2003) enfatiza ainda que investigar, inquirir, deveria ser uma capacidade que todo cidadão deveria ter em todo o âmbito social. E essa investigação transpassa pela interação entre pessoas que buscam o novo conhecimento, buscam compreender o mundo a sua volta.

Valente & Almeida (2012) entendem a interação como um aspecto importante no aprendizado e promovem a “interação multidirecional, que propicia o fazer e refazer contínuo, impulsionam o trabalho colaborativo e, sobretudo, a produção de conhecimentos, a negociação de significados e a autoria” (Valente e Almeida, 2012, p. 60) por meio das tecnologias digitais.

Pinheiro (2013) destaca a necessidade de interação e compartilhamento de informações a serem negociadas, pois, segundo o autor, é durante essas negociações que se promovem reflexões e discussões que corroboram com um aprendizado colaborativo.

A colaboração pode ser vista como um desencadeamento da interação direcionada a resolução de um determinado problema, em que um grupo, interagindo, pode elaborar uma solução colaborada, onde todos co-participaram de forma significativa para o produto final.

A colaboração parece muito próxima da interação. Mas, na colaboração existe a intenção de ajuda mútua a fim de um resultado, que, na educação, abre possibilidades para a constituição do conhecimento a partir do compartilhamento de ideias. No processo de aprendizagem por colaboração espera-se que os alunos tomem a postura de serem os encarregados do seu próprio conhecimento, tendo a liberdade para tomar suas decisões em conjunto. Dissemos ajuda mútua, mas não na ideia de socorrer ao outro, mas co-elaborar, estar junto na constituição do conhecimento.

Entendemos que a colaboração possa ser estimulada também pela utilização de tecnologias para o desenvolvimento de atividades. Conforme Powell (2013), as tecnologias de informação e comunicação se desenvolvem cada vez mais, e nós pesquisadores temos que investigar o potencial dessas tecnologias para a Educação. O autor diz que:

“são necessárias investigações sobre como professores de matemática de escolas dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio podem usar atributos da Web 2.0 para explorar problemas abertos e vivenciar esse processo numa perspectiva colaborativa, usando aplicativos da matemática dinâmica. (POWELL 2013, p. 1)”

Para incorporar ferramentas computacionais no ensino da Matemática, são necessários três pilares que, segundo Powell (2013, p. 2), são os conhecimentos tecnológico, pedagógico e do conteúdo. Ele conclui, por meio da teoria de Schulman (1986, 1987, in Powell 2013) e outros, que o processo mental que constitui o conhecimento matemático é apresentado por dois componentes: a percepção e o diálogo.

Para que o diálogo faça sentido na aprendizagem e seja fonte de reflexão, é necessário que “seja uma atividade espontânea, mas deliberada e sujeita a ser repensada, relida e revisada” (POWELL, 2013, p. 3). A tecnologia, se usada para potencializar esse diálogo reflexivo, pode ser ferramenta de apoio para o desenvolvimento e constituição do conhecimento matemático.

Uma forma de empregar essas novas ferramentas no ensino e na aprendizagem da matemática é a elaboração do currículo voltado para uma pedagogia que valoriza o diálogo e abra possibilidades para o desenvolvimento do



aluno, que em seu mundo, busca significados relacionados com outros já concebidos anteriormente.

Estamos nos referindo a uma aprendizagem que consiste em a pessoa

“tomar consciência da necessidade de reorganizar um projeto pessoal baseado na discrepância que percebe existir entre o que este sabe e a compreensão das ações dos outros (pais, professores, amigos), em termos do projeto de mesma situação”. (MARTINS,1992. p. 82).

Essa perspectiva nos permite sair do tradicional que envolve a ideia mais restrita de Educação como conteudista e atentar mais para a Educação voltada para a formação ampla do homem.

O currículo, visto como em prática, em constituição, condiciona a expressão de que vive à experiência didática:

Envolve o reconhecimento de uma primazia própria ao humano, a de desenvolver talentos e capacidades que se fundamentam na liberdade de agir [...], um zelo em não permitir que seus talentos permaneçam emperrados [...] que não venham a se expressar. (MARTINS,1992. p. 75).

Precisamos ter a consciência do nosso próprio mundo para que possamos ver o mundo fazer sentido e, dessa forma, ter a sensibilidade de ver as coisas produzindo em nós. Na perspectiva fenomenológica, que buscamos tomar aqui como um veio importante, o conhecimento constituído originalmente por um grupo de pessoas que dialogam, concebe-se não como uma adequação final a um objeto já posto na ciência, mas como pertinente a um campo fenomênico aberto. Tendo sido presentificado um tema para esse diálogo, um horizonte de sentido se abre, e os dialogantes partem para ocupar, e estender esse horizonte, atribuindo significados compreensíveis para quem atribui e com possibilidade de ser tomado compreensível por quem co-habita esse horizonte.

Dentro desse desenho pedagógico de constituição de ambiente colaborativo e investigativo, pretendemos, quando propormos atividades em nossa pesquisa de campo, utilizando o computador, propor questões abertas para serem objetos de investigação e experimentação, para que o sujeito seja o promotor do seu próprio conhecimento, que quando construído de forma conjunta em um grupo de pessoas com o mesmo objetivo, alcance uma aprendizagem mais global.

### 3.3- Atitudes do Professor em Ambientes Colaborativos

Uma parte essencial no ambiente colaborativo é o papel que o professor estabelece na constituição do conhecimento. Concordamos com Pinheiro (2013) quando ressalta o papel do professor que proporciona um ambiente colaborativo, em que ele deixa de ser o detentor do conhecimento e passa a ser um mediador e um incentivador para que seus alunos não desistam, estimulando a investigação e analisando os caminhos que eles estão seguindo.

É interessante o professor pôr em suspensão a resolução ou as possíveis resoluções já conhecidas por ele, para que possa auxiliar no pensamento do aluno e no processo de construção de estratégias para a resolução. Nesse processo, poderão aparecer várias outras soluções diferentes das pensadas preventivamente, o que enriquece todo o processo de constituição do conhecimento dos alunos e também do professor.

Torres (2007) ressalta que no ambiente colaborativo os integrantes internos do grupo devem ter uma consciência de que o sucesso do grupo depende do sucesso de cada integrante. Também, o professor deve estimular cada um dos integrantes promovendo diálogo matemático entre eles.

O papel do professor vai muito além do momento da atividade. As atividades devem ser pensadas para aquele grupo de pessoas, a escolha envolve toda formação acadêmica e profissional além de suas concepções sobre diferentes metodologias. Todo o encaminhamento e formação do espaço tem que ser pensado de forma a contribuir de forma positiva para a colaboração entre os sujeitos.

A consciência de que o aluno é agente de seu próprio conhecimento também tem que ser estimulada pelo professor, um mediador que deve se conter para não dar respostas diretas e antever e falar o desenvolvimento que eles iriam seguir, turvando, assim, a investigação.

Ponte, Brocardo e Oliveira, (2009) trazem as ideias de Pólya para mostrar que os alunos podem se envolver com a investigação e a partir disso, eles podem

“ter um sabor da Matemática em construção e do trabalho criativo e independente... [Eles podem] generalizar a partir da observação de

casos, [usar] argumentos indutivos, argumentos por analogia, reconhecer ou extrair um conceito matemático de uma situação concreta” (Pólya, 1981, p. 157 e 101, apud Ponte, Brocardo e Oliveira, 2009, p. 19)

Vemos pertinência em trazer as ideias pedagógicas de Pólya, pensadas originalmente nas décadas de 50 e 60 do século passado, para ambientes atuais informatizados, fazendo da máquina um aliado em todas as ações didáticas na citação acima.

Sugestões de movimentação, do uso do *software* e de diálogo entre eles, podem favorecer e potencializar a criatividade e a utilização de estratégias que poderão contribuir para a constituição de um pensamento que esteja embasado na lógica matemática por meio de formulações e testes de conjecturas.

Das teorias que dela se ocupam, a realização de uma investigação passa por momentos organizativos, tal como em Ponte, Brocardo e Oliveira, (2009) expõem: “1) a exploração e formulação de questões; 2) Conjecturas; 3) Testes e reformulação; 4) Justificativa e avaliação” (Ponte, Brocardo e Oliveira, 2009, p. 21). As diversas atividades que podem ser incluídas em cada um desses momentos, em todas elas o espírito investigativo pode se presenciar, inclusive uma avaliação, que se incumbe de abranger todo o processo, sendo uma reflexão sobre o constituído.

## **CAPÍTULO 4 – UMA COMPREENSÃO DOS ASPECTOS CURRÍCULARES**

Além da mediação do *software*, a emergência de uma geometria alternativa, traz consigo questões vinculadas a valores didáticos, epistemológicos e pedagógicos. Compreendemos a importância desses valores em nossa pesquisa e buscamos na literatura uma estruturação do que eles são. A seguir, expomos nossa compreensão de cada um desses valores.

### **4.1- O Pedagógico**

Vamos percebendo que a Educação não é um processo linear, é uma rede conectada com o dia a dia das pessoas, em todos os momentos e em todos os âmbitos. Goergen (2009, p. 25), apresenta a Educação como “uma necessidade comum a todos os seres humanos atendida segundo as crenças, os valores, os ideais e as condições materiais de cada circunstância”. E é nesse universo que entendemos o pedagógico, como um processo também antropológico e cosmológico, num horizonte social. Encontramos na Paideia grega clássica elementos para reforçar a nossa ideia de pedagógico.

Como Amorim e Grün (2011, p. 2) expõem, o termo Paideia surge com base na universalidade do bem, do justo, do belo, e é onde se dão os ideais de formação do homem grego. Entendemos dele uma atinência a uma globalidade coimplificada, que se compatibiliza com a ideia de o humano como uma totalidade existencial, abarcando o ser vivente com o ser conhecedor.

Com o avanço intermitente da Matemática e sua exponencial expansão, foi se criando, assim como em outras disciplinas, uma necessidade cada vez maior de tentar “[...] fragmentar o conhecimento e reduzir o saber à busca pela eficiência técnica” (FIGUEIREDO E CAMPOS, 2014, p. 932). O conhecimento, visto dessa forma, é concebido como uma produção estática, como uma verdade específica que está para ser descoberta, não se implementando intenções mais abrangentes que a constituição do conhecimento pode representar. Esses autores nos levam a considerar que nesse tipo de concepção os conteúdos são transmitidos do professor

para o aluno e este aluno tem a 'obrigatoriedade' de reproduzir esse conteúdo para explicitar o seu conhecimento adquirido.

Essa fragmentação tem forte marco histórico com a chamada Ciência Moderna.

A investigação científica e filosófica dos gregos se difere do modelo proposto pela Idade Moderna com Descartes. Quando Descartes desenvolve e se apropria de um método, impreterivelmente, esse mesmo método determina o rumo da investigação e a postura do sujeito para com os objetos. Distintamente, com Sócrates e os gregos os próprios objetos é que dão rumo e sentido à investigação (AMORIM E GRÜN, 2011, p. 7).

Entendemos que é correlato a esse recorte histórico uma disciplinarização da ciência que a faz começar a dissociar-se dos significados mais mundanos, produzindo seus próprios conteúdos. A Paideia vai contra essa convicção de que a formação do aluno é linear conteudista. Definir Paideia é uma tarefa muito complexa, pois não tem um sentido único. Jaeger (2001, p. 2)

“assemelha o conceito de *Paidéia* a outros conceitos difíceis de definir, como filosofia e cultura. Mas, assegura que o termo *Paidéia* é o que define exatamente o que significa a história, os ideais e o percurso da educação grega.” Jaeger (2001, p. 2)

Como na sociedade grega a noção de formação/educação se refere ao modo de ver e estar no mundo, a filosofia, que era o caminho primeiro para a formação, não representava apenas o conhecimento adquirido, ou aprender a fazer algo; o objetivo do ensino fora sempre voltado à formação cidadã na sua totalidade com alcances à coletividade.

Assumimos aqui que é esse tipo formação que buscamos alcançar com o diálogo vivo nas práticas pedagógicas buscando que o conhecimento venha do próprio sujeito, com o auxílio de um mediador, encontre em si suas próprias verdades e o tome em toda a sua complexidade humana.

Procuramos propor objetos (atividades) que, em sentido à investigação se aproxime de uma retomada do ideário socrático, no que ele traz o conhecimento

como um processo entre sujeitos propositores, tal como Amorim e Grün (2011, p. 7) nos mostram na citação acima.

## 4.2- O Epistemológico

Vamos caracterizar o que queremos dizer quando falamos 'epistemológico'. A epistemologia trata da ciência e do seu entorno, em aspectos tais como a crença e o conhecimento, mas, sabemos, nenhuma ciência é um constructo acabado e objetivo, para o qual acesso – aos seus objetos, suas proposições – bastaria termos intelegibilidade suficiente e objetiva. Entendemos, pensando no mundo da educação, que a ciência tem de ocorrer em nós, nós atribuindo significados ao sermos postos diante de sua apresentação, como é o caso do aprendiz frente a uma disciplina escolar. Cada objeto de uma ciência deve ser capaz de nos dar mais uma oportunidade de uma compreensão e aceitação de que o que se manifesta nela é um constructo que têm sua estrutura peculiar.

Em "A origem da Geometria", Edmund Husserl, num misto de preocupação filosófica e pedagógica, pergunta 'qual a origem da geometria?', não a origem histórica da ciência, mas, em que momento, a um jovem aprendiz, a geometria se manifesta de modo que ele reconhece estar diante de um fazer distinto de outros, da álgebra, da física em geral, de uma ciência empírica, etc. Esse apronto husserliano indica o que entendemos por epistemológico, firmando sentido no que uma pessoa constitui quando está diante de um constructo científico.

Estendemos a questão da origem à manutenção do sentido de uma ciência quando um aprendiz vagueia em seus vãos, fazendo ligações, ampliando o campo conceitual, entre outras possibilidades, que está assegurado por este sentido.

Para compreensão dos valores epistemológicos que estariam presentes no fazer matemático, devemos considerar as linguagens por meio das quais o homem estabelece um solo de suas manifestações compreensivas. Sobre o aporte de figuras ou situações gráficas em geral, buscamos em Paulo (2010) indicações de sua presença na constituição do conhecimento geométrico. A autora, na verdade, trabalha sobre diagramas, mas, ela própria se incumbe de aproximar o que trata de

uma ideia mais geral que envolve figuras e a visualização inerente a elas. Nós, tomando suas ideias, generalizamos ainda mais, para podermos olhar para o espaço gráfico no qual indicamos ser o ambiente de produção geométrica em nossos estudos.

Importa-nos acompanhar a ideia da autora sobre ser o espaço gráfico dado à visualização e à operação como um recurso comunicacional do pensar matemático. O questionamento sobre isso abarca a discussão, epistemológica e política (no espaço compartilhado das comunidades científicas que se fazem em torno da matemática), do papel da visualização para a consecução do trabalho de constituição de ideias matemáticas, especialmente em vista dos usuais padrões de rigor que se exige em momentos demonstrativos. Mas, aqui, para os fins que visamos para nossos estudos, de imediato nos alheamos dessa discussão, uma vez o trabalho investigativo que propomos desenvolver subentende outros aspectos que valoram o espaço gráfico.

À questão da Matemática na companhia de espaços gráficos estão implicadas também as características emocionais, as quais estão ligadas com a intuição e a experiência estética. Cifuentes (2003) segue o entendimento de Baumgarten, o grande esteta alemão, da estética como sendo a “ciência do conhecimento sensível, em contraposição ao conhecimento racional, isto é, do conhecimento por meio da percepção inteligível, consciente ou intencional, percepção que dá objetividade aos objetos” (p. 60). Queremos trazer essas ideias observando o estético<sup>1</sup> como sendo um modo que aponta para as possibilidades sensíveis para todas as informações que participam de um momento de constituição e comunicação matemática entre pessoas, a partir de materialidades. Porém, isso se dando sem apelo a juízos artísticos, por um lado, nem de análises de puras sensações fisiológicas, por outro.

O mundo, imediatamente, nos apresenta em sua fisicidade material; a matemática é, em última instância, composta de idealidades. O homem tem o poder de interagir nesse mundo imediato e nele mesmo co-elaborar o pensamento

---

<sup>1</sup> Interessante notar a proximidade de estética com o sensível, que vem de sua escrita no alemão, *ästhetik*, muito próximo do termo e sentido gregos de *aesthesis*, e não uma formulação intelectual.

matemático, movimentando-se entre coisas e ideias e transcendendo experiências em direção ao conhecimento.

Cifuentes traz a importância da elaboração de uma estética da Matemática para dar um embasamento teórico para a diferença sutil, “entre **ensinar** matemática e **ensinar a apreciar** a matemática” (CIFUENTES, 2003, p. 60) o que seria a diferença entre conteúdo científico e o conteúdo estético da matemática. Esse alicerce seria para educar o “olhar” e a intuição matemática.

Nós buscamos, em nossa pesquisa, trazer o contexto geométrico com a disponibilidade de movimentação que o computador propõe. Desenvolvemos e apresentamos aos nossos sujeitos atividades que entendemos ter potencial de criação de um olhar para a beleza. O fundo sobre o qual tais atividades foram desenvolvidas é o trazido pela Geometria das Transformações (GT), geometria a qual subjaz a ideia de movimento, de *deslocamento* e, ainda, é constituída por uma estética que está intimamente ligada com o potencial dos diagramas disponíveis nas atividades, na interface do *software* e dos diagramas construídos pelos sujeitos.

Entre outras características, o trabalho sobre diagramas permite a um estudante explicitar elementos e relações que estariam implicados em uma sequência construtiva, numa função de compreensão mais clara do que se está realizando. Paulo (2010) expõe que esse trabalho permite, e exige, uma *habitação* do aprendiz no espaço gráfico, o que implica um *estar* mais qualificado do que seria o de se operar sobre elementos presentes. Concluímos daí a constituição de um ambiente de produção de conhecimento no qual o estudante pode dialogar consigo mesmo, dialogando com o espaço disponibilizado, enquanto o reorganiza, buscando novas relações.

O aspecto visual da matemática, ligado ao sentido do movimento e ao construtivo, foi essencial do ponto de vista histórico, e não um desvio. A geometria, antes de ser instituída e axiomatizada historicamente em verdades matemáticas, inclusive escritas, é um fazer humano que imbrica sempre um espaço – material ou ideal – no qual o homem espacializa. Espacializar é mover e mover-se, e habitar o movimento, percebendo-o. O sentido do movimento humano e o aspecto visual que lhe dá uma expressão foi-se constituindo como matemática. O movimento está



presente em toda a Geometria, e o movimento proporciona varias relações que talvez, sem ele, seriam dificilmente percebidas.

Quando os sujeitos gesticulam como se o diagrama que está em cima da mesa passasse para todo o espaço livre e disponível, esse movimento já contribuiu para a formação de um pensamento matemático-geométrico, expondo um ponto de vista, uma maneira de se observar. Dessa forma, “a geometria deixa de ser tema para virar método” (CIFUENTES, 2003, p. 72), o qual irá constituir uma estética para aquele que está especializando, realizando conhecimento.

Para Cifuentes (2003), o enfoque para o pedagógico é o primeiro desafio da estética da matemática, e o autor ressalta que tem que se “transformar habilidade em sensibilidade, para poder aceder ao conhecimento matemático por meio de sua apreciação estética” (p. 74). Para esse saber estético, é necessário introduzir o contexto, pois, “para efeito da sensibilidade, é impossível separar os objetos de seus contextos.” (p. 75). A verdade matemática no século XX é reconhecida pela relatividade da verdade matemática que não é mais a matemática trabalhada pelos gregos, que no sentido metodológico, era firmemente apoiada na régua e compasso, não por desprezar outra forma expressiva, como textos numéricos, mas para condicionar sempre a questão da construtibilidade dos objetos geométricos e confirmar a sua existência possível (CIFUENTES, 2003, p. 77).

Paulo (2010), afirmando a potencialidade dos diagramas para soluções, investigações e generalização de situações matemáticas, diz que eles “são [...] importantes na construção do conhecimento matemático, nas situações que exigem a busca de similaridades, padrões e propriedades comuns que favoreçam conjecturas e promovam o raciocínio” (PAULO, 2010, p. 179). A autora afirma que o espaço gráfico favorece o ‘pensar meditativo’ heideggeriano, que quer dizer um modo de pensar que busca considerar relações mais globais sobre o que se dispõe visualmente, sem estar com a imediatez de se operar cálculos em vista de ultimar uma demonstração ou objetivo similar.

Segundo Paulo, uma análise que tem como solo o diagrama, “incentiva o aluno à exposição do caminho empreendido na investigação das conclusões obtidas. [...] Ao expor seu raciocínio, [...] o aluno mostra como pôde fazer

associações que [...] são essenciais à generalização” (PAULO, 2010, p. 180). Percebemos que esse ideário nos leva a outros valores epistemológicos, nos quais a verdade matemática se constitui como maior densidade significativa que a que ocorre sem o aporte de elementos gráficos.

Portanto, em sua presença de forma significativa, os diagramas “levam à necessidade de uma reflexão epistemológica e didática sobre o verdadeiro estatuto na aprendizagem geométrica” (Pais 1996, p. 68). Pais (1996) destaca ainda, que a necessidade de transpor o próprio desenho é o desafio principal da didática quando se busca as características abstratas do conceito, ele entendendo o desenho como essencialmente concreto.

Pais (1996) analisa quatro elementos principais que, segundo o autor, intervém fortemente no ensino e aprendizagem da geometria euclidiana e que são muito usados como elementos didáticos para o ensino da geometria. São eles: o objeto, o conceito, o desenho e a imagem mental. E o autor ressalta que o termo objeto está relacionado com materiais concretos, modelos didáticos, os quais, segundo Pais, “têm uma influência predominante nos procedimentos de raciocínio do aluno no transcurso da construção de seu conhecimento geométrico” (Pais 1996, p. 66).

No caminho para a constituição do conhecimento, esses elementos estão fortemente ligados “aos aspectos intuitivo, experimental e teórico do conhecimento geométrico que formam uma estrutura básica de uma teoria epistemológica da geometria” (PAIS 1996, p. 66). O autor faz uma análise da materialidade do objeto, mas, aqui, para fins de nossos estudos, nos alheamos dessa discussão visto que nosso trabalho investigativo nos leva aos diagramas no papel e/ou na tela de um *software*.

O desenho tem que ser entendido como sendo também um material concreto, mas não se pode ficar somente na observação. Tem-se que ter um auxílio significativo, e uma compreensão abstrata daquele diagrama. Sua presença leva a necessidade de uma “reflexão epistemológica e didática” (PAIS 1996, p. 68) sobre o seu real papel naquele processo de aprendizagem geométrica que há uma exigência de transpor o próprio objeto. Entendemos, em nossos estudos, que essa reflexão

didática e epistemológico se faz a partir mesmo dos aprendizes, no caso nossos sujeitos de pesquisa, para os quais a presença de recursos visuais e até dinâmicos pode criar aberturas para diversas novas inteligibilidades sobre os objetos.

Pais (1996) ressalta que o desenho plano vem sendo utilizado pelos alunos como sendo o próprio conceito, diferente do que acontece com a geometria espacial que faz uso de perspectiva pra evidenciar a terceira dimensão, mas é uma dificuldade grande por parte dos alunos na compreensão dos conceitos geométricos espaciais. O grande uso do desenho permite considerá-lo uma segunda forma de conceituar “com um nível de complexidade bem maior do que a representação por um objeto” (PAIS 1996, p. 69).

Já as imagens mentais são destacadas por duas características básicas: a subjetividade e a abstração, que podem ser relacionadas com os conceitos por serem abstratas, mesmo que o seu aspecto subjetivo as afaste da natureza científica. Mas o aprendiz que tem essas imagens mentais é aquele capaz de enunciar de forma descritiva, descrevendo propriedades de um objeto ou de um desenho na ausência desses elementos. Porém, “a formação dessas imagens mentais é uma consequência quase que exclusiva do trabalho com desenhos e objetos” (PAIS 1996, p. 70). E essas imagens mentais, segundo esse autor, proporcionam o desenvolvimento de um raciocínio mais dinâmico e é esse o potencial necessário para a aprendizagem da geometria por meio da resolução de problemas ou novas aprendizagens muito mais rápida e eficiente.

Com a dificuldade do aluno de compreender um conceito, talvez até mesmo no ponto crítico da sua evolução conceitual histórica, estabelece-se uma necessidade lançar mão de recursos que são os objetos, os desenhos e por fim, as imagens mentais. Dessa forma, com o aluno perante as dificuldades da abstração, ocorre a identificação entre o conceito e sua representação. “A transposição desta dupla correlação dialética, envolvendo o particular e o geral, o concreto e o abstrato, é talvez o principal obstáculo vivenciado pelo aluno no desenvolvimento inicial da aprendizagem” (PAIS 1996, p. 71).

O desenho, muitas vezes é usado “para descobrir ou verificar uma proposição: é uma forma de conhecimento experimental” (PAIS 1996, p. 72). E,

quando temos o auxílio de um *software* que reproduz figuras de forma exata ou em proporções, com a possibilidade de movimento, fica facilitado ainda mais o conhecimento experimental. Concordamos com o autor, porém enfatizando que a experiência nunca é uma relação estrita da pessoa com o objeto de conhecimento; é sempre uma experiência vivida, o que nos leva a dizer que a ação experimental tem, também, seus mecanismos de ativação da imaginação e abstração.

Para esse pesquisador, estruturado essencialmente pelos conceitos, para a constituição do conhecimento teórico geométrico, faz-se necessário o recurso simultâneo tanto das bases intuitivas como da atividade experimental para a sua construção teórica, estes recursos são auxiliares à construção de conceitos (PAIS, 1996, p. 73). Ampliamos essas ideias caracterizando o intuitivo vindo da capacidade de a pessoa ver o todo, empreendendo noções globais que traz em aproximação do que está estudando.

#### **4.3- O Didático**

Na pesquisa de campo, que realizamos, foram propostas atividades aos sujeitos que, entendemos, são de forma similares à proposta de Resolução de Problemas (RP) por apresentar um fundo investigativo e contextualizado. O ponto central dos atuais trabalhos na área de RP levam os estudos para a compreensão de como acontece a aprendizagem *por meio* da resolução de problemas (ONUCHIC & ALLEVATO, 2011). Tomamos aqui a produção na Educação Matemática em torno da RP como um modo de partida para refletirmos sobre aquilo que trabalhamos.

Colocamos nossas atividades como sendo problemas, no sentido de não serem exercícios de aplicação algorítmica e por serem atividades dentro de um contexto com sujeitos que não resolveriam os problemas de forma imediata, mas apresentam interesse de saber resolvê-los. Onuchic e Allevato (2011) ressaltam que o conjunto de pesquisas classifica os problemas como sendo ou de fixação, ou problemas abertos, ou fechados, entre outros tipos. Mas, são todos problemas, com estratégias diferentes de resolução. Enfatiza-se que, em grande parte, são as

estratégias usadas pelo resolvidor para encaminhar a resolução do problema e seus conhecimentos prévios, fatores determinantes do tipo de problema em questão.

Consoante com o pensamento em RP, nós pesquisadores, buscando tomar atitudes diferentes da convencional, deixamos de ser nossa exposição o centro e passamos o foco para o problema. Planejamos, em nossa preparação das atividades, uma proposta em que os sujeitos tomariam uma postura de resolvidores, colocando em prática o *poder matemático* como diz Onuchic e Allevato (2011, p. 82), para desenvolver a capacidade de pensar matematicamente e utilizar diferentes estratégias, o que pode aumentar a compreensão e a constituição dos conceitos matemáticos.

Nós acompanhamos todo o processo de raciocínio e de desenvolvimento dos nossos sujeitos de pesquisa, participando e estando atento aos desenvolvimentos feitos por eles, olhando o que estava sendo feito e perguntando sobre os passos e as decisões tomadas. Buscamos tomar atitudes, que, conforme Onuchic e Allevato (2011, p. 84), fossem de professores incentivadores para os alunos utilizarem conhecimentos prévios e técnicas operatórias, métodos diferentes e atuando como interventores e questionadores.

As autoras também afirmam que as tecnologias computacionais exercem grande influência no uso e na criação da matemática. Allevato (2005) menciona vários autores como Borba e Penteadó (2001), Villarreal (1999) e Pierce e Stacey (2001) que apresentam pesquisas com resultados positivos quanto ao uso de computador. E, de acordo com esses resultados, a construção do conhecimento mediado pelo computador se faz na presença de visualização, simulação e experimentação. Em relação à reorganização de pensamento, os resultados ficaram mais evidentes no 'pensar com' o computador; além disso, destaca também que o conhecimento dos alunos que participaram de aulas com o uso de computadores se mostrou mais significativo na compreensão dos conceitos matemáticos.

São nessas direções que nós buscamos a constituição de uma Geometria das Transformações-com-o-Computador, por meio das atividades aplicadas e do uso do *software* como instaurador de novos conhecimentos.

O ambiente investigativo proporcionado aos sujeitos também foi pensado para que eles deixassem a visão já formada do professor detentor do conhecimento, da verdade que passa para o aluno uma matemática pronta e acabada, para favorecer a aprendizagem. Segundo Pinheiro (2013, p 53), o ambiente investigativo também favorece a construção de um pensamento crítico e reflexivo do aluno, fazendo com que os sujeitos, futuros professores estabeleçam relações metodológicas e possam voltar seus olhares somando às práticas pedagógicas do cotidiano docente.

Daí a relevância de se propiciar um ambiente investigativo com grupos, pois, “várias pessoas a trabalhar em conjunto tem mais ideias, mais energia e mais força pra derrubar obstáculos do que uma pessoa trabalhando sozinha” Ponte (2003, p. 18). Uma diversidade dos componentes desse grupo cria uma rica troca de conhecimentos em busca de objetivo que é trazido pela atividade.

Ponte (2003) coloca que:

“investigar pressupõe, sobretudo uma atitude, uma vontade de perceber, uma capacidade para interrogar, uma disponibilidade para ver as coisas de outro modo e para pôr em causa aquilo que parecia certo. Investigar envolve sobretudo três atividades: estudar, conversar e escrever” (PONTE 2003, p. 21).

Quando o diálogo permeia uma construção feita a partir de um *software*, apresentando um esboço melhor que aquele feito a mão, com cores diferenciadas, e recursos diferentes do papel e lápis, a “construção do conhecimento se faz [...] com a forte presença de processos como, por exemplo, a simulação, a experimentação e a visualização” (ALLEVATO, 2005, p. 75) o que pode proporcionar a construção de um pensamento e de um conhecimento qualitativamente diferente daquele produzido com o papel e o lápis.

Allevato (2005, p. 75) destaca o trabalho de Pierce e Stacey (2001) que em sua pesquisa fez uso de tecnologia com um grupo de alunos e outro grupo frequentou aulas sem a tecnologia. O grupo que fez uso do CAS<sup>2</sup> mostrou “significativa superioridade na compreensão dos conceitos matemáticos em relação

---

<sup>2</sup> CAS (*computer algebra system*) - Sistemas de computação algébrica são programas que, em contraste com os programas de computação numérica, permitem cálculos matemáticos com expressões simbólicas ou, como são também chamadas, expressões algébricas. (Allevato, 2005, p. 76)

ao grupo de controle, que frequentou aulas sem essa tecnologia” (ALLEVATO, 2005, p. 76). Allevato mostra vários outros autores como Villarreal (1999) e Borba e Penteado (2001), que em suas pesquisas, chegaram a resultados semelhantes, que apontam experiências com *softwares* mais numerosas e intensas que é possível ser feitas com lápis e papel.

Há um pensamento de que o *software* é apenas uma forma de se fazer esboços de forma mais exata que à mão livre, mas não podemos deixar de considerar que é uma forma diferente de pensar. O movimento que o *software* proporciona com as diferentes formas para se construir o mesmo objeto, depende exclusivamente do sujeito que está na frente da tela.

Não podemos deixar de considerar também o estímulo por parte dos alunos quando se trabalha com computadores, pelo fato dessa ferramenta já fazer parte do dia a dia da maioria deles. Existem estudos, como de David Tall (1989, in ALLEVATO 2005, p. 77) que sugerem novos currículos baseados nas possibilidades que o computador oferece. Allevato ressalta que Tall sugere um currículo não mais sequencial de ideias mais simples para ideias mais complexas, mas sim o uso contínuo do computador com ambientes de aprendizagem em que ele possibilita ao aluno desenvolver ideias mais complexas desde o início.

Nas análises já iniciadas dos dados de nossa pesquisa de campo, ampliamos cada ideia sobre o didático posto acima na consideração de como cada sujeito manifesta-se em ação de participação ao constituir conhecimento. O didático não se basta nos recursos disponíveis, numa metodologia de trabalho proposta, no ambiente arquitetônico. Tudo isso perfaz uma proposta, e o modo como as pessoas a tomam é que resulta no *didático ocorrido*.

Nossos sujeitos mostraram que a presença de uma mídia eletrônica, como articuladora de novos modos de produzir conhecimento, é marcante e decisiva para o andamento e os resultados da ação cognitiva. Na maioria dos instantes das atividades da pesquisa a tela do computador não foi tomada para reproduções de pensamentos, mas complementarmente. Eles mostram uma crença no *software*, o que permite iniciativas de trazerem recursos eletrônicos para construções intelectuais, mas, não ficaram à sua mercê, como simples usuários.

A imagem social mais marcante que a Didática tem, faz a associarmos com técnicas. Mas, já compreendemos em nossas análises iniciadas, as vicissitudes do humano se mostram quando a metodologia de desenvolvimento de atividades didáticas está em aberto, a ser realizada. Nossos sujeitos mostram como as interações investigativas fomentam um ambiente de aprendizagem imprevisível de como avanços intelectivos possam ocorrer. Lidar com abertura sobre as atividades propostas, tomar a tarefa sobre conteúdos de maneira alheia a determinações pré-conceituadas e articular caminhos próprios e conjugados de discussão para obtenção de resultados são características que, entendemos, mostram como os sujeitos eles mesmos traçaram seu modo de aprender.

Passamos a entender, como Merleau-Ponty faz em sua fenomenologia, que a didática não se debruça sobre o problema de como as verdades se fazem para mim, mas sobre “como minha experiência se liga à experiência que os outros têm dos mesmos objetos” (MERLEAU-PONTY, 1989, p. 48). Estamos dizendo de como uma pessoa percebe o outro, inclusive a presença do outro nos meios que se põem à vivência cotidiana: a percepção não é mero conjunto de sensações – e ela seria privativa -, e não é simplesmente ato de uma inteligência – pois que todo o percebido seria igual para todos. Nem as sensações nem a inteligência dão conta da experiência vivida. O conhecimento constituído (sempre) no diálogo não é um acordo de equivalências, mas um ato de se deixar *constranger* pela presença do outro:

Se eu e um amigo estamos diante de uma paisagem e se tento mostrar a meu amigo algo que eu vejo e que ele ainda não vê, não podemos dar conta da situação dizendo que eu vejo algo em meu mundo próprio e que tento, por mensagens verbais, suscitar no mundo de meu amigo uma percepção análoga. [...] Há, e sinto bem isso se me impaciento, uma espécie de exigência de que o que é visto por mim seja visto por ele. [...] A coisa se impõe não como verdadeira a toda uma inteligência, mas como real para todo sujeito que partilha minha situação. (MERLEAU-PONTY, 1989, p. 50).



## CAPÍTULO 5 – A PESQUISA DE CAMPO

### 5.1- Metodologia Qualitativa Fenomenológica e a Interrogação

Buscamos indicações dos modos do investigado ser e se mostrar, não almejando verdades lógicas. Estamos considerando um trabalho com dados qualitativos à espera de análise. Não estamos preocupados com a generalização de metodologias e, sim, com a descrição da realidade vivida baseada nos procedimentos que sustentem a pesquisa. Dessa forma, nosso trabalho se trata de uma pesquisa qualitativa sob a visão fenomenológica.

Respostas lineares tomadas como verdade não fazem parte do contexto dessa pesquisa. Como nos diz Bicudo (2011, p.12), “[...]’quais as características do que quero conhecer?’, e, ‘[...]como proceder para avançar no conhecimento disso que me proponho a conhecer?’” são perguntas com as quais o pesquisador vai a campo tendo em vista uma pesquisa qualitativa fenomenológica. Nós tomamos a postura de que “concebemos que somos à medida que nos tornamos, fazendo, acontecendo” (Bicudo, 2011, p.13). Portanto, em nossa pesquisa, não temos à priori o que queremos conhecer, temos uma intuição de que os sujeitos poderiam vivenciar atividades que proporíamos a eles, cada um com o seu modo de pensar, agir e proceder conforme sua experiência vivida e nós, pesquisadores atinentes com a interrogação, também vivenciamos o momento de pesquisa tentando desvelar aspectos da interrogação.

A pesquisadora Bicudo explica o que é fenomenologia:

“É uma palavra composta pelos termos *fenômeno* mais *logos*. Fenômeno diz do que se mostra na intuição ou percepção e *logos* diz do articulado nos atos da consciência em cujo processo organizador a linguagem está presente, tanto como estrutura, quanto como possibilidade de comunicação e, em consequência, de retenção em produtos culturais postos à disposição no mundo-vida.” (BICUDO, 2011, p. 29)

Portanto, com as ideias trazidas pela fenomenologia, estamos atinentes com todo o processo de pesquisa, pois a preocupação com a relação sujeito/objeto está sempre à frente, respeitando as vivências de cada aluno para que ele possa decidir e manipular cada objeto de acordo com suas percepções. Mesmo esse binômio

sujeito/objeto pomos em suspensão, uma vez que nosso olhar não os vê em relações exteriores, mas, imbricados. Desse modo, o conhecimento nem está como objeto, nem no sujeito.

Segundo Bicudo (2011):

“O rigor no âmbito da pesquisa fenomenológica não se funda em metodologias construídas e aceitas como válidas em si, ou seja, independentemente da interrogação, da região de inquérito, da indagação pelo *quê* se pesquisa e como procede à investigação, mas se constitui no próprio movimento de perseguição à interrogação. Ele se instaura na própria dialética de perguntar, buscar pelo inquirido sempre atento ao *o quê* se busca conhecer, suas características antevistas, e os modos de proceder para dar conta do indagado”(BICUDO, 2011, p. 56).

Uma pesquisa qualitativa fenomenológica segue uma intensidade filosófica que busca o sentido de determinado fenômeno e como ele é experienciado. A interrogação, que é o norte da pesquisa, vai se fazendo no movimento da pesquisa e em consonância do pesquisador consigo mesmo que quando colocada em um momento de atuação em campo, possa direcionar olhares para as vivências presentes em cada movimento.

O que nos incomoda é assumir para a Geometria, tal como usualmente ela nos chega por meio da prática escolar, e está disposta em suas formas escritas tradicionais, que ela, pretensamente, tenha entrada imediata como conhecimento disposto a alguém, que, supostamente, teria o espelho da razão para o entendimento dela, para decifrar seus signos.

Mas, então, o que é o conhecimento de alguém se articular de um modo que diríamos: é uma compreensão do espaço?

Assim, interrogação e o interrogado se colocam desde a trajetória acadêmica e profissional com várias inquietações que se fizeram presentes em vários momentos, e, que neste trabalho procuramos focar e debruçar em questões que irão nortear todo o processo de desenvolvimento da pesquisa. Aqui, buscamos viver a pesquisa junto com os sujeitos a fim de “ir-à-coisa-mesma, isto é, compreender o fenômeno em sua essência, na forma como é, dado na experiência vivida, sem embasamento em teorias previamente estabelecidas, avançando no movimento de compreensão”. (SANTOS, 2013, p. 37).

O como os sujeitos vivem a experiência e manifestam suas compreensões de uma construção de conhecimento de Transformações Geométricas ligadas a dinamicidade em grupo colaborativo, com mediação de um *software* é o que queremos compreender. Desse modo, não é o corpo de objetos geométricos e não é a concepção que os pesquisadores têm deles – e que se transformam em atividades – que se investiga, mas, como os sujeitos vivem essas atividades num espaço investigativo e colaborativo.

As pessoas que estão em aprendizagem se articulam em um modo pedagógico, que queremos ver no sentido da Paideia, mesmo que lhes sejam dada uma pedagogia. O pedagógico é um modo de estar na atividade de aprendizagem, e pode ajudar na construção do conhecimento geométrico mediado por um *software*. Essa afirmação, na verdade, se põe como uma questão de pesquisa. ***Como aprendizes em colaboração constituem sentidos à Geometria das Transformações com mediação de ferramentas dinâmicas?***

A manifestação dos sujeitos, como eles percebem a constituição do geométrico, como eles se apoderam de recursos e métodos, suas escolhas epistemológicas, são pistas deles que, intuímos ser relevantes.

## **5.2- Elaboração das Atividades para a Pesquisa**

Bicudo (2011, p. 30) explica que o fenômeno que se mostra não pode ser confundido com o objeto “dado no mundo exterior ao sujeito e que pode ser observado, manipulado, experimentado, medido, contado por um sujeito observador” e, sim, que o fenômeno se constrói num processo com o sujeito vivente que está imerso um contexto particular.

Dessa forma, sentimos necessidade de ir a campo para desvelar o significado do fenômeno em como ele é experienciado pelos sujeitos. A proposta de atividades abertas vem ao encontro do pensamento fenomenológico, pois ao propô-las estávamos atentos às vivências do sujeito, respeitando as individualidades e também à sua condição dialógica.

Para colocarmos em prática esse movimento de vivenciar atividades com sujeitos, foram preparadas doze atividades de Geometria das Transformações, sendo três de cada tópico do conteúdo: simetria, translação, rotação e homotetia.

Nesse momento de preparação, houve várias sessões de estudo sobre os conteúdos. Tínhamos certa experiência com montagem de atividades, mas, para o que queríamos, devíamos repensá-la. Atividades mais conhecidas na verdade eram um material de situações geométricas diretas. Nosso objetivo foi criar situações-problema para algumas atividades que nós intuímos que teriam potencialidade de serem abertas, exploratórias e investigativas, além de criarem possibilidades de manifestação no dinamismo do *software*.

A discussão sobre conteúdos, ao fim, acabou sendo subjacente à questão da situacionalidade deles no ambiente em que planejávamos. No decorrer da atividade, mais interessa a capacidade deles em promover diálogos e caminhos de investigação geométrica que a resolução final.

Compor cada atividade, e fazer com que elas se tornassem interessantes para serem resolvidas no computador também abriu outros questionamentos, especialmente de como o computador seria promovedor de situações didáticas mais interativas.

### **5.3- O Campo e os Sujeitos**

Os sujeitos da pesquisa eram alunos do curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública e cursavam uma disciplina próxima do tradicional Desenho Geométrico, tendo como pré-requisito a Geometria Plana. Todos os alunos foram convidados a participar da pesquisa cujo conteúdo Geométrico já teria sido estudado por eles no decorrer da disciplina. Nós pensamos ser produtivo, antes das atividades, serem trabalhados com os alunos da disciplina os fundamentos geométricos do conteúdo. Com isso, situações que propusemos puderam ter um nível de requisição mais alto em termos de articulação dos objetos geométricos inerentes à transformação geométrica.

Escolhemos trabalhar com os sujeitos em grupos por apresentar maior possibilidade de interação entre os integrantes, o que possibilita constituição de conhecimento compartilhado que podem chegar a resultados mais interessantes que quando sozinhos. Propomos, inicialmente, aos sujeitos escolherem seus companheiros para facilitar o entrosamento, e deixamos em aberto a possibilidade de troca de duplas nos encontros posteriores para também haver uma troca de conhecimento maior, podendo promover a constituição de conhecimento de forma mais heterogênea.

Deixamos claro para todos os sujeitos que a identidade de cada um seguia padrões profissionais e éticos de sigilo e que os resultados da pesquisa estariam à sua disposição quando finalizada, além de afirmar que materiais que indicassem abertamente sua participação não seriam liberados sem permissão específica.

No registro das atividades feitas pelos sujeitos, foi deixado que cada um deles optasse por anotação que achasse mais conveniente. Por fim, a maioria dos sujeitos preferiu escrever na tela do *software*, fazendo uso da ferramenta [texto]. Mas tivemos também registros no papel, o que não diminuiu significados registrados. Em algumas atividades, os sujeitos fizeram uso de cores nos objetos construídos na tela do *software* para organizar a escrita na tela.

#### **5.4- Cenário dos Encontros e a Sequência Didática**

As atividades foram aplicadas em quatro encontros sendo que foram feitos dois encontros por semana. Foram duas atividades em cada encontro e uma para ser feita em casa e entregue até a sessão seguinte. Somente no último encontro que não foi deixada nenhuma atividade para fazer em casa. Portanto, temos um total de 11 atividades aplicadas. Sendo que são 10 arquivos de áudio/vídeo, pois um vídeo não foi salvo por problemas técnicos.

As atividades aplicadas foram escolhidas em ordem aleatória, do seguinte modo:

Tabela 1: Distribuição dos temas das atividades por encontro.

Encontro	Tema da atividade em sala	Tema da atividade em casa
<b>Primeiro</b>	Homotetia e translação	Simetria
<b>Segundo</b>	Rotação e homotetia	Simetria
<b>Terceiro</b>	Simetria e rotação	Homotetia
<b>Quarto</b>	Translação e rotação	----

Fonte: os autores

Como os alunos foram orientados a fazerem duplas e não havia a necessidade que fosse a mesma dupla em todos os encontros, acarretou que em nenhum dia tivemos duplas repetidas.

Em todos os encontros, os computadores utilizados estavam com o *software* GeoGebra à disposição para os sujeitos usarem quando achassem necessário. Além disso, em todos os encontros foram utilizados três meios para registros de dados: um aparelho de gravação de áudio e vídeo, um programa que capta a tela, o áudio e o vídeo pela *webcam*, que foi instalada em cada máquina. Os arquivos trabalhados no GeoGebra também foram salvos a fim de tentarmos captar a maior quantidade de informações como atos intuitivos de expressões corporais e tomadas de decisões que nos ajudassem a compreender o indagado.

Em todos os encontros, foram entregues aos sujeitos uma folha com a atividade que seguia sempre o mesmo formato.

Algumas atividades possuíam um *Applet* no GeoGebra, com as imagens relativas a atividade, sendo que em um deles havia a possibilidade de animação de alguns pontos. Em outras atividades, os próprios sujeitos passavam do papel para o *software*, processo que também foi material de análise nossa.

## CAPÍTULO 6- APRESENTAÇÃO, INTERPRETAÇÃO E ANÁLISE IDEOGRÁFICA DOS DADOS

### 6.1- Apresentação das Atividades e seu Desenvolvimento

Na pesquisa qualitativa fenomenológica, após o momento da pesquisa de campo, é feita a transcrição das falas – e outros meios de expressão dos sujeitos, como fisionômicos, gestuais, etc., a critério do pesquisador -, atentando às experiências vivenciadas pelos sujeitos, que serão interpretadas, indo-se das manifestações genuínas a articulações escritas que são compreensões do percebido. Segundo Bicudo (2011), “a explicitação pela linguagem do percebido e trabalhado pelos atos da consciência lança a experiência vivida pelo sujeito definitivamente na esfera da realidade intersubjetiva e objetiva [...]”(BICUDO 2011, p.47).

Manifestações são analisadas no movimento do pesquisador, que também é um movimento de existir junto aos dados,

“não tomando como uma sequência linear e hierárquica, mas entendendo-os e assumindo-os como movimento do pensar que se realiza efetuando *insights*, abstrações, comparações, articulações, reunindo e separando aspectos, expressando o compreendido pela linguagem, quando obtemos clareza e ficamos em dúvida, enfim são movimentos do pensar ao percorrer os meandros do pensamento investigativo” (BICUDO, 2011, p.59).

Nesse processo, pelo qual o pesquisador pode iniciar sua compreensão das ideias fundamentais que estruturam o fenômeno, é feita uma primeira síntese delas, quando é interessante dar primeiros nomes para as que são vistas próximas, no que seria uma primeira convergência. Por isso chamamos esse processo de análise ideográfica.

Em nosso trabalho, faremos uma tabela organizativa que possuirá três colunas, sendo que a primeira é a transcrição do ocorrido. O contínuo do ocorrido será recortado em *cenas* que podem ser apenas de uma fala, ou um conjunto de falas que formam um *motivo*, este percebido pelos pesquisadores, que entendem uma sequência de acontecimentos que giram em torno desse motivo.

A transcrição de falas traz significados do vivido nas ações de pesquisa, em texto produzido pelos pesquisadores na intenção da idoneidade com o que ocorreu. Na segunda coluna os pesquisadores tomam o que está expresso, buscando “retomar a experiência vivida com os sujeitos nos movimentos de uma síntese de identificação [...] que tem fundamentos nas percepções do todo que se dá em sua pesquisa de campo” (DETONI E PAULO, 2011, p. 101), e interpreta as manifestações buscando já indícios de ideias que vê pertinentes à sua interrogação.

Na terceira coluna da tabela, que compreende a análise ideográfica, os pesquisadores realizam uma primeira convergência dos significados manifestos, buscando detectar, em uma nomeação própria, as ideias dos sujeitos que foram percebidas e interpretadas. Esta terceira coluna vem, então, culminando essa análise ideográfica, e as ideias nela constante vão ser fontes para sequentes movimentos de compreensão do fenômeno estudado, que chamamos de análises nomotéticas – que serão desenvolvidas posteriormente.

Iniciando as análises ideográficas e tendo o material original em transcrições escritas, partimos para o reconhecimento do que seriam significados manifestos pelos sujeitos, tendo em vista o foco da interrogação. O fato de nossa pesquisa partir de dados produzidos ao menos em dupla, e frente à tela mediadora do computador na maioria dos momentos, nos levou a considerar que os diálogos construtivos do conhecimento e da interação se mostraram em fluxos alusivos a um tema identificável por nós, o que nos levou a criar cenas. Entendemos que nenhuma palavra ou expressão manifestada teria mais significação do que ela ocorrendo num fundo contextual, que vimos nesses fluxos.

Percebemos que esses momentos cumpriam um ritmo percorrendo um início sugerido por alguém, ganhavam corpo no diálogo e interação, e se findavam, quando era satisfeita a tarefa compreendida em cada momento. Isso nos levou a recortar as transcrições em significações mais amplas, como se fossem cenas numa peça teatral onde “a dicção, o ritmo, o tom, a modulação, enfim, todos os modos para se performar o discurso vêm para a ocupação da abertura de possibilidades de estar-com-o-outro.” (DETONI, 2014, p. 105). Buscando elementos teóricos na literatura, iniciamos praticando uma metodologia de tratamento de dados em *cenas*



*significativas* como Detoni e Paulo (2011) expõem e na qual indicam fazer recortes em torno do “*clima* criado em torno das intencionalidades e a espontaneidade de situação que o texto emerge” (p. 111). Segundo os autores, esse clima criado é mais importante que o “texto motivador da atividade e respostas temáticas a ele” (p.111). Fazendo com que

“mesmo ao se chegar ao nível mais interpretativo das análises, a nuance que a cena significou no sentido do todo da atividade ainda está impregnada no texto que articula, nesse nível, as ideias da estrutura que assim se fizeram transcritas nas *cenar significativas*” (DETONI E PAULO, 2011, p. 118, grifo original).

Ao organizarmos o texto em cenas significativas mantemo-nos ligados à originalidade das ações dos sujeitos quando das atividades de pesquisa, que após esse passo vão se compondo num núcleo de significação sobre as ideias analisadas, e que são, em primeira compreensão, “um meio pelo qual o pesquisador pode compreender o investigado” (Detoni & Paulo, 2011, p. 119).

Em nossas análises ideográficas, a passagem de uma cena a outra indica o esgotamento de um tema e nascedouro de outro, ocorrendo, às vezes, de nós pormos um interlúdio entre duas cenas a fim de pôr mais compreensão em nosso texto em tabela. Influenciou-nos a escrita dos dramaturgos.

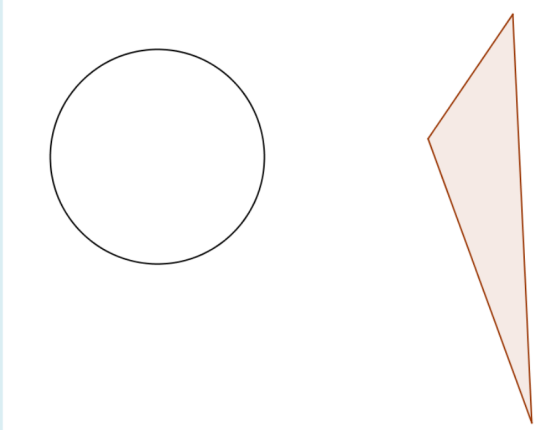
Algumas atividades têm tabelas com grupo 1 e grupo 2; outras tem só um deles. A numeração das atividades está de acordo com a numeração do Produto Educacional, parte integrante desse estudo.

O Produto Educacional objetiva um aporte como uma proposta de intervenção didática na geometria escolar. Ele contém três partes: uma primeira teórica, onde, de maneira sucinta, embasamos algumas fundamentações que norteiam a pesquisa, como a investigação matemática em sala de aula e a Geometria das Transformações. Na segunda parte é apresentada a sequencia didática utilizada na pesquisa e uma separação das atividades por temas: Simetria, Translação, Rotação e Homotetia. Já a terceira parte conta com as resoluções comentadas e reflexões pedagógicas sobre a proposta.

## **6.2- As Cenas e as Ideias**

## 6.2.1- Atividade PROJETO ARQUITETÔNICO - Grupo 1

Tabela 2: Análise Ideográfica da Atividade 1 do grupo 1.

ATIVIDADE 1.1 – Não foi dado o applet		
<p>Uma construtora está projetando para a área de lazer de um condomínio a construção de uma região triangular e um espaço circular, como mostra o projeto abaixo. Um arquiteto, vendo esse projeto, sugeriu que dentro do círculo também tivesse uma região triangular, a maior possível, com seus lados paralelos, cada um, aos lados do triângulo já projetado. Como fazer esse projeto?</p>		
		
Cena 1.1		
Testes empíricos		
INTERAÇÃO	INTERPRETAÇÃO	IDEIAS
<p>Os sujeitos leem a atividade individualmente.</p> <p>S2 (tom de voz sereno, como quem quer inaugurar uma questão): aqui a gente tem que fazer o homotético.</p> <p>S1 (mais resolutivo que o companheiro): é homotetia. (Feição</p>	<p>O sujeito identifica, no material e em sua apresentação, elementos que <b>domina</b>, e é capaz de elaborar uma fala que inaugura atribuições de significado dentro do que a atividade propõe.</p>	<p>A apresentação surte efeito: o horizonte geométrico é habitado.</p> <p>Diálogo científico posto (um Pensamento matemático se põe).</p>

<p>de dúvida). Será que o maior lado tem que ser necessariamente o maior possível?</p> <p>S2: não sei, acho que não. A gente pode trazer ele pra cá, que ai a gente consegue achar o centro de homotetia aqui. (dentro do círculo ) (pensativo)</p> <p>S1: então, esse é o problema.</p> <p>S2: não sei se vou garantir que ele é o maior possível.</p> <p>S1: pois é.</p>	<p>Dúvida se o triângulo inscrito é o maior possível homotético ao triângulo dado.</p> <p>Metodologia de criar um círculo circunscrito ao triângulo dado, ao invés de construir o triângulo no círculo dado.</p> <p>A dúvida de o triângulo inscrito é o maior possível, continua. Mas os sujeitos não ficam estagnados, buscam a solução mesmo sem essa garantia</p>	<p>Utilização de estratégias para a resolução.</p> <p>Preocupação com fundamentação além do que o vivido permite (intuição para demonstração)</p>
--	---	---

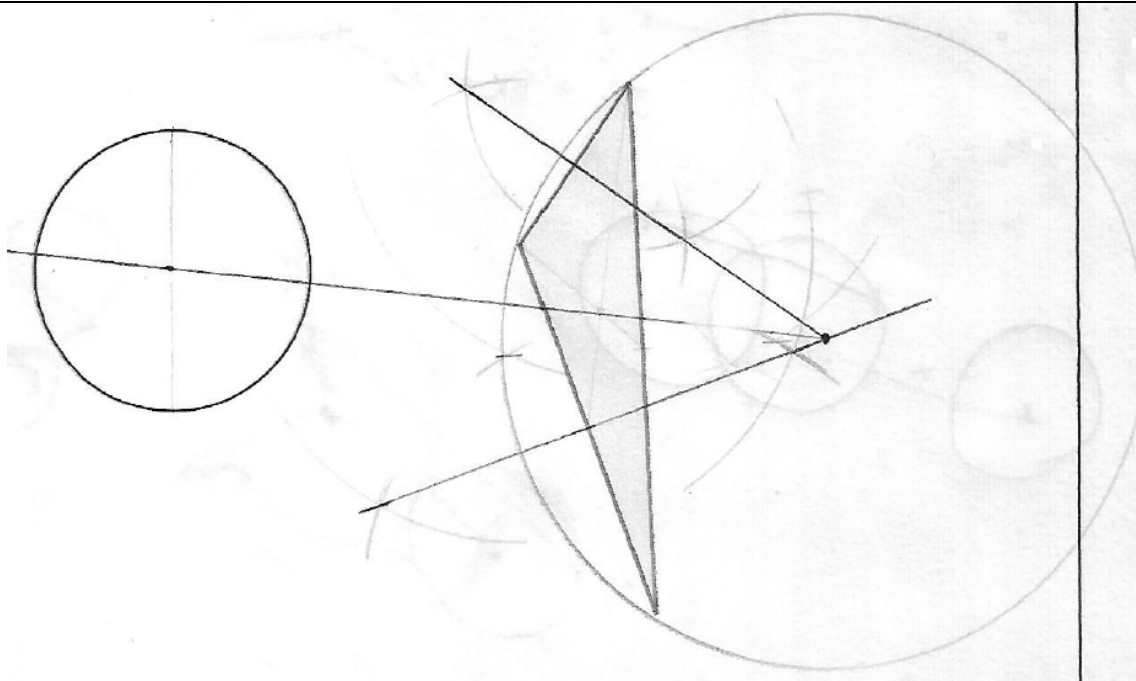
### Cena 1.2

#### Testes empíricos

INTERAÇÃO	INTERPRETAÇÃO	IDEIAS
<p>S2(argumentando com a ajuda de um desenho que vai rabiscando): eu sei que se o centro do triângulo for o centro do círculo, posso trazer ele pra cá (indica um local no desenho), fazer o homotético e vai coincidir os três lados, ele vai ser construtível e tal.</p>	<p>A visualização do movimento garante para os sujeitos um esteio de argumentações.</p> <p>A discussão sobre o centro permite uma ampliação da compreensão geométrica mútua (um vendo como o</p>	<p>O uso de diagrama como espacialização.</p> <p>Argumentação apropriando-se de conhecimento teórico e movimento.</p> <p>O movimento é usado</p>

<p>S1: mas qual seria o centro de homotetia? Aqui? (apontando o centro do círculo)</p>	<p>outro compreende).</p>	<p>como uma prova matemática.</p>
<p>S2: não, por exemplo, a gente acha o centro do círculo e o centro do triângulo. A gente traça a linha (ligando os dois centros), ai pego os vértices e acho o centro. Ai eu vejo a razão, trago o centro e depois trago os pontos.</p>	<p>A interação e a colaboração dos sujeitos são contínuas na busca pela resolução da atividade. Abertura de diálogo colaborativo, por meio da interação: acordo de que desenhar o círculo circunscrito ao triângulo dado, será mais fácil que a construção do triângulo no círculo dado.</p>	<p>Movimento ajuda na constituição do conhecimento.</p>
<p>S1: hum, é. Então vamos fazer isso.</p>		<p>Preocupação com fundamentação além do que o vivido permite (da intuição para demonstração)</p>
<p>S2: Mas o problema é que...(pausa, com dúvida) talvez funcione, mas o problema é saber o pq ele é o maior de todos.</p>	<p>Dúvida na decisão sobre o centro de homotetia abre um diálogo.</p>	<p>Interação e colaboração.</p>
<p>S1(mais resoluto que o companheiro): é, então vamos lá: paralelismo é o que garante a homotetia, né!</p>	<p>O sujeito antecipa todo o processo de se trabalhar com a homotetia e busca interação com o companheiro pra alcançar um entendimento. (no sentido de os parâmetros gerais gerarem conforto de solução para o caso em questão)</p>	<p>Diálogo científico posto (ocupação do horizonte da ciência)</p>
<p>S2: sim, e se a gente imaginar, o que está aqui dentro (do círculo dado) tem que ser pequeno, né, mas ao mesmo tempo, com os lados paralelos, então à medida que a gente for diminuindo, (movimenta a mão como se o triângulo estivesse diminuindo) só tem um único que cabe aqui dentro. Então acho que essa é a garantia, né.</p>		<p>Metodização para compreensão do fazer científico</p>
<p>S1: é, (concorda, mas questiona), mas será que tem que ser inscrito,</p>	<p>Compreensão que o método</p>	<p>Utilização de estratégias facilitadoras para a resolução.</p>
		<p>Utilização de estratégias</p>

<p>entendeu? Ou será que o inscrito é o maior possível.</p> <p>3' S2: é, dentro terá que ter uma região triangular...(pensativo)</p> <p>S1: é. (dúvida) fica olhando para o desenho com feição de dúvida</p> <p>S2: imagine que você tenha o triângulo aqui dentro. Como ele seria o maior possível?</p> <p>(pausa, os dois olham para o papel com feição de dúvida)</p> <p>S1: não é melhor se fizer nesse aqui não, oh! (fazer um círculo circunscrito ao triângulo dado)</p> <p>S2 (faz as medianas no papel e acha o centro do círculo circunscrito ao triângulo)</p>	<p>está funcionando com clareza. (consideram estar no caminho certo)</p> <p>O sujeito retoma a ideia do paralelismo, COMO? Para garantir a homotetia.</p> <p>.</p> <p>O sujeito fica na dúvida, se o fato do triângulo ser inscrito é uma condição suficiente ou necessária. O sujeito pergunta, com o intuito de organizar suas ideias.</p>	<p>para resolução. (facilitadoras)</p> <p>Pensamento lógico-matemático.</p>



Rascunho feito no papel pela dupla 1 atividade 1.

Fonte: O autor

### Cena 1.3

#### O uso do *Software*

INTERAÇÃO	INTERPRETAÇÃO	IDEIAS
<p>O GGB, que já estava presente, mas não focado, agora se torna uma referência forte nas significações atribuídas.</p> <p>S2: acho que o GGB nos dá o</p>	<p>Sugestão de trabalho com o GeoGebra para facilitar a construção.</p> <p>O sujeito agiliza para a ida pro <i>software</i>. E usa o termo “jogar” as figuras para a tela do <i>software</i>.</p>	<p>O <i>software</i> como facilitador de construções.</p> <p>Utilização de estratégias para a resolução junto ao <i>software</i>.</p>

<p>baricentro, né? Num dá?</p> <p>S1: é, não sei... será que já tem a figura pronta no GGB, ou eu posso jogar pra lá?</p> <p>Pesquisadora : Não, esse não tem não.</p> <p>Pesquisador: pode fazer lá;(pausa) o GGB não é só pra fazer arte final, não, né!?</p> <p>S1: é, você pode pensar com ele, né!</p> <p>S2: é, você sabe que pode demorar muito aqui... (fica um tempo em silencio).</p>	<p>O pesquisador ressalta que a tela do ggb pode ser ocupada livremente, para se rabiscar rascunhos.</p> <p>Logo o sujeito já diz que pode-se pensar com o <i>software</i>. Abrindo possibilidades de construção.</p> <p>O sujeito sabe que a construção no <i>software</i> pode ser mais rápida que a construção com o papel e o lápis.</p>	<p>Constituição do pensamento junto ao <i>software</i>.</p>
---	--	---

**Cena 1.4**

**A construção do centro do círculo**

<b>INTERAÇÃO</b>	<b>INTERPRETAÇÃO</b>	<b>IDEIAS</b>
<p>baricentro é o encontro das medianas, num é?</p> <p>S1: uhum.</p> <p>(S1 cria na tela um círculo e um triângulo, conforme estão na folha da atividade, porém com o triângulo um</p>	<p>Preocupação em colocar o companheiro no mesmo pensamento. Necessidade da comprovação do companheiro da dupla.</p> <p>O sujeito cria as três</p>	<p>Diálogo Interacional</p> <p>Uso do <i>software</i> para</p>

<p>pouco menor).</p> <p>S2: baricentro é o centro das medianas, num é?</p> <p>S1: uhum. (S1 cria as três medianas do triângulo).</p> <p>S2: podia ter feito só duas só. Rsrtrs (ele fez as três medianas)</p> <p>S1: é(risos)... é bom, que tem a garantia aí.</p> <p>S2: mania de matemático né (risos). E agora pra achar o centro (do círculo dado)? É só fazer qualquer segmento perpendicular aqui dentro?</p> <p>S1(desconfiado): deixa eu só entender aqui. Você quer garantir que... ta blz entendi.</p> <p>S2: isso, o centro do circulo pra cá. Só que eu preciso achar o centro do círculo. (silêncio) Como que eu acho?</p> <p>S1: é, não tem, né. (dúvida )</p> <p>S2: provavelmente o centro já seja dado. Acredito que já tenha o centro.</p> <p>6' S1: não. Não ué. Você quer fazer desenhado?</p> <p>S2: não, não, só o circulo, o centro... eu não sei onde tá, vou tentar</p>	<p>medianas do triângulo e usa a justificativa de garantia. Mesmo sabendo que elas iriam se encontrar no mesmo ponto.</p> <p>Para prosseguir com a construção, era necessário o centro do círculo dado. (eles encontraram o centro do círculo circunscrito ao triângulo dado).</p> <p>Dúvida nos dados da atividade.</p> <p>O sujeito critica o companheiro da dupla por supor um centro para o</p>	<p>comprovar conhecimentos prévios.</p> <p>Diálogo científico posto. (Argumentação transita do apelo visual ao conhecimento já constituído na ciência)</p> <p>Preocupação com fundamentação além do</p>
--	---	---



<p>imaginar. Aqui assim?</p> <p>(S2 marca um ponto onde visualmente é o centro do círculo)</p> <p>S1: mas ai, você tá pegando uma parada meio loca... arbitrária, né.</p> <p>S2: mas será que ele não tem o centro?</p> <p>S1: não, tem o centro! Mas ele não deu não foi à toa.</p> <p>S2: Será?</p> <p>((pausa) S2, pensativo, olha para o desenho no papel e S1 olha para a tela do computador).</p> <p>S1(pensativo): agora, meu Deus... o baricentro,(pequena pausa) é o encontro das medianas, é o ponto de equilíbrio, não é?</p> <p>S2: aqui, não é o encontro das mediatrizes não?</p>	<p>círculo.</p> <p>Na fala coloquial o sujeito diz que o círculo não tem centro. E seu companheiro afirma que tem, mas não foi dado. E muda de assunto com a pergunta de que o baricentro, o encontro das medianas, é o ponto de equilíbrio.</p> <p>Os sujeitos têm dúvidas nas nomenclaturas dos pontos de encontros dos elementos de um triângulo.</p>	<p>que o vivido permite.</p>
---	--	------------------------------

**Cena 1.5**

**O circuncentro**

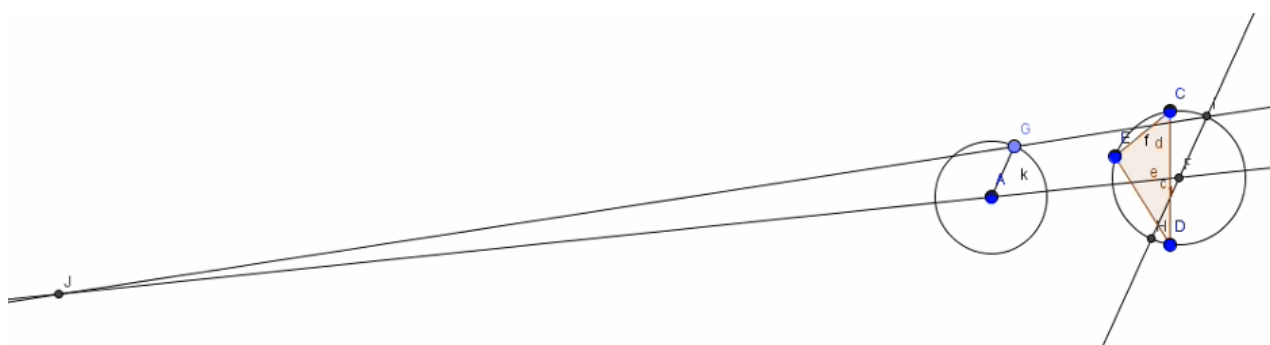
<b>INTERAÇÃO</b>	<b>INTERPRETAÇÃO</b>	<b>IDEIAS</b>
<p>S1: poxa, hein. A gente poder dar o Google aqui, ou não? É possível dar uma olhada no Google?</p>	<p>O sujeito vê o Google como uma solução para solucionar as dúvidas dos pontos de</p>	<p>Busca esclarecimento de dúvidas.</p>

<p>Pesquisadora : acho que estamos sem internet.</p> <p>S1: a gente teve uma dúvida euclidiana agora.(pausa) Se você responder a gente tá tudo certo. Mas ai, você resolve o problema.</p> <p>Pesquisador: bom, a gente tirar dúvida não é problema não.</p> <p>(Pausa e os dois olham para a tela do computador).</p> <p>S2: faz o seguinte, vem aqui e faz o teste. Constrói a círculo definida por 3 pontos</p> <p>S1: boa</p> <p>(S1 construiu um círculo circunscrito ao triângulo, utilizando a ferramenta círculo, definido por três pontos).</p> <p>S2: ai agora, faz o seguinte: pega a mediatriz desse lado, desse... e acha o centro da círculo.</p> <p>S1: Agora vamos ver, né, se cabe.</p> <p>(S1 fez o círculo com o centro no encontro das mediatrizes e confirmou que essa é o círculo circunscrito ao triângulo).</p> <p>S1: é o mesmo!</p> <p>S2: encontro das mediatrizes é o</p>	<p>encontro no triângulo.</p> <p>O sujeito não quer que o pesquisador esclarece, acredita que daria a resposta final com o esclarecimento.</p> <p>O pesquisador esclarece que não é problema esclarecer dúvidas.</p> <p>Mas a dupla prefere fazer o teste utilizando as ferramentas do <i>software</i> para comprovar que o encontro das mediatrizes é o centro do círculo circunscrito ao triângulo.</p> <p>O sujeito usa o termo “cabe” para comprovar se o círculo coincide com o círculo circunscrita.</p> <p>Os sujeitos comprovam que o encontro das mediatrizes é o centro do círculo circunscrito.</p>	<p>Uso do <i>software</i> para comprovar conhecimentos prévios.</p> <p>Diálogo interacional</p> <p>Diálogo científico posto (ocupação do horizonte da ciência)</p> <p>Uso do <i>software</i> para comprovar conhecimentos prévios.</p>
---	--	--



<p>tem.</p> <p>S2: Ah pode?</p> <p>S1: então a gente usa aqui oh. (no circulo(centro em A) feito inicialmente que já tinha o centro marcado). O GGB resolve o problema. Blz. Então vamos apagar essas coisinhas aqui. (apagou as mediatrizes).</p> <p>S1: É possível fazer isso? Rsr é possível achar o centro da círculo ?</p> <p>S2: é, conhecendo o triângulo, sim.</p> <p>S1: agora a reta passando por aqui e por aqui. (A e F) agora...</p> <p>S2: agora você leva... leva só um ponto.</p> <p>S1: pois é, a questão é essa! Deixa eu apagar esse B aqui, pq pode confundir a gente.</p> <p>S2: e se a gente usar o centro como sendo o centro de homotetia, e trazer ele pra cá, entendeu?</p> <p>S1:(surpresa). Então tá. Vamos fazer o seguinte, como é homotético, a gente traça aqui (AG) e traça uma reta paralela aqui (na círculo que eles construíram). Paralela ao AG.</p> <p>(S1 cria a reta CG para encontrar o</p>	<p>tentando resolver há um tempo, e descobre que as dúvidas poderiam ter sido sanadas anteriormente.</p> <p>O sujeito destaca que o GGB resolve o problema do centro do circulo. Que quando criando o circulo, o GGB já fixa o centro.</p> <p>O sujeito ainda quer saber se seria possível descobrir o centro do círculo, se não tivesse sido fornecido pelo <i>software</i>.</p> <p>Os sujeitos dão prosseguimento a atividade.</p> <p>Sugere um centro de homotetia para resolver o problema.</p> <p>Surpresa do centro de homotetia J estar longe na janela de visualização.</p>	<p>fundamentação além do que o vivido permite (intuição para demonstração)</p> <p>Argumentação apropriando-se de conhecimento teórico e movimento.</p> <p>Utilização de estratégias para a resolução junto ao <i>software</i>.</p> <p>Interação com o <i>software</i>.</p> <p>O <i>software</i> como facilitador de construções.</p>
---	---	--

<p>ponto J que é o ponto de homotetia)</p> <p>S1(surpresa ): Nosso Jesus! (o ponto J ficou longe na janela de visualização). Então o ponto J é o ponto de homotetia. Pronto. Agora é só ligar esse, nesse, e esse nesse.</p>	<p>Diminui o zoom para visualizar o ponto J.</p>	
--	--	--



**Cena 1.7**

INTERAÇÃO	INTERPRETAÇÃO	IDEIAS
<p>S2: é ai quando você pega esse homotético aqui, ai você vê a razão e faz o homotético no de lá.</p> <p>S1: pera aí, mas se eu ligar esse ponto aqui lá, o ponto que der aqui, já é o ponto homotético.</p> <p>S2: éh..</p> <p>S1(silêncio/dúvida) num é isso?</p> <p>S2: aham. Eu acho.</p> <p>(S1 começa a ligar os vértices do</p>	<p>S2 com pensamento mais algébrico e S1 com o pensamento geométrico.</p>	<p>Diálogo científico posto (ocupação do horizonte da ciência)</p> <p>Uso do <i>software</i> para comprovar conhecimentos prévios.</p>

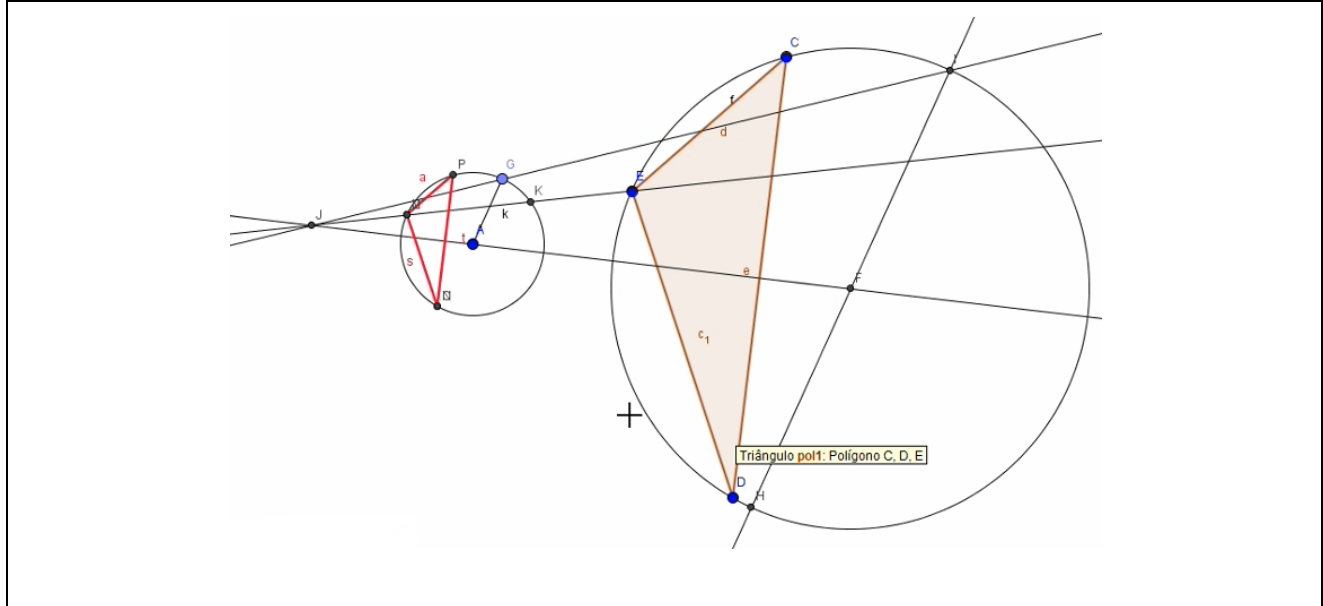
<p>triângulo com o centro de homotetia).</p> <p>S2: ai depois a gente vai ter que conferir se a razão é igual aqui e aqui. (se referindo aos lados do triângulo)</p> <p>S1: como assim? Ahh só passar a paralela, né. Viajei.</p> <p>S2: é.</p> <p>(S1 coloca a mão no rosto, com dúvida)</p> <p>S1: mas, por que você quer achar a razão?</p> <p>S2: pq eu tenho o centro de homotetia, ai eu preciso da razão pra colocar ele do lado de cá. Ai eu já garanto que são homotéticos.</p> <p>S1: sim, só que se eu ligar esse ponto lá ele já é homotético.</p> <p>S2 (com titubeio): ah sim, é...</p> <p>(conversa entre os pesquisadores)</p> <p>(S1 está fazendo as paralelas para construir o triângulo homotético).</p> <p>S1: paralela... ah não, primeiro tenho que colocar o ponto aqui. (fazer a intercessão da reta com a círculo)</p> <p>Pesquisador: agora eu entendi pq a</p>	<p>Novamente S2 quer conferir fazendo a razão.</p> <p>Para um dos sujeitos, com a construção feita, já está garantida a homotetia. O outro sujeito ainda tem dúvidas e pretende conferir utilizando a razão.</p> <p>S1 não entendeu o pq S2 queria achar a razão.</p>	<p>Preocupação com fundamentação além do que o vivido permite (intuição para demonstração, além da certeza da construção).</p> <p>Diálogo científico posto (ocupação do horizonte da ciência)</p> <p>Constituição do pensamento junto ao <i>software</i>.</p> <p>O movimento é usado como uma prova matemática.</p>
---	---	---

<p>Pesquisadora colocou um triângulo tão grande, e ao fazer aqui vocês optaram por um menor.</p> <p>(S1 olha para a folha e para a tela)</p> <p>S1: é</p> <p>Pesquisador: mas se vocês aumentarem o triângulo isso aqui...</p> <p>S1: é verdade! Você é um cara bom, heim rrsrs</p> <p>(S1 aumenta bem o triângulo, arrastando dois de seus vértices)</p> <p>S1: Agora ficou melhor. É ficou bonitinho, mas eu me perdi.</p> <p>S2: você tem que marcar esse ponto de encontro.</p> <p>S1: ah blz. Obrigado. Sabe o que eu quero fazer, ao invés de ligar eu quero fazer a paralela. Pq? Só pra garantir, não é garantir... não é que eu tô com medo. Aí perfeito, oh. (um sorriso e rosto de satisfação)</p> <p>S2: aí marca aí, tem que fazer de vermelho, né!.</p> <p>S1: o quê? A resposta? Então primeiro vou transformar aqui em segmento. Pode ser? (S1 olha para o rosto de S2, que mostra certa dúvida)</p>	<p>Cuidado na exigência do <i>software</i> de existir um ponto para definir uma reta. A interseção pode ser que não seja exata se feita de outra forma que não seja a interseção de dois objetos.</p> <p>Se surpreende com a movimentação dos vértices do triângulo (aumentando o triângulo) o centro de homotetia J se aproxima da círculo.</p> <p>Ajuda mutua da dupla</p>	<p>Uso do <i>software</i> para comprovar conhecimentos prévios.</p> <p>Cuidado no “estar junto” com o outro e com o pensamento do outro.</p>
--	--	--

<p>Você acha melhor não?</p> <p>S2: pode colocar cor ué, mas acho que pode ser assim</p> <p>S1: mas eu acho que se eu colocar cor assim, vai na reta inteira!</p> <p>S2: é... provavelmente.</p> <p>S1: Pode apagar as retas aqui, né. Ta gravando, né.</p> <p>Pesquisadora : pode</p> <p>S1: apagar assim, exibir, né. Ué, parou de exibir outra coisa. Queria essa reta aqui.</p> <p>S2: é!</p> <p>S1: Alá, o A, oh que viagem, cliquei aqui embaixo. (surpresa) reta aqui passando por N. blz. Agora você quer que eu mudo a cor.</p> <p>S2: é</p> <p>S1: então, propriedades... vou fazer ela mais grossinha. Pesquisadora vem aqui, não, daqui a pouquinho. Por que eu quero que você corrige. Você vai corrigir, ou vê vai deixar a gente na... (faz gesto passando a mão por cima da cabeça, (deixar a gente na dúvida)).</p> <p>Pesquisadora : Não, a gente vai</p>	<p>o sujeito poderia somente ter ligado os pontos para fechar o triângulo, mas ele prefere traçar a paralela para garantir que a construção está certa.</p> <p>Exigência do <i>software</i> de transformar reta em segmento para que o triângulo construído ficasse todo vermelho.</p> <p>Não esperava que o ponto estaria nesse lugar.</p> <p>Preocupação com os dados da pesquisa.</p>	<p>Utilização de estratégias para a resolução junto ao <i>software</i>.</p> <p>Dinamicidade Didática.</p>
---	--	---



<p>conversando e vai vendo se faz sentido.</p> <p>S1: ah tá... você quer que a gente argumente. (...)</p>		
---	--	--



**Cena 1.8**

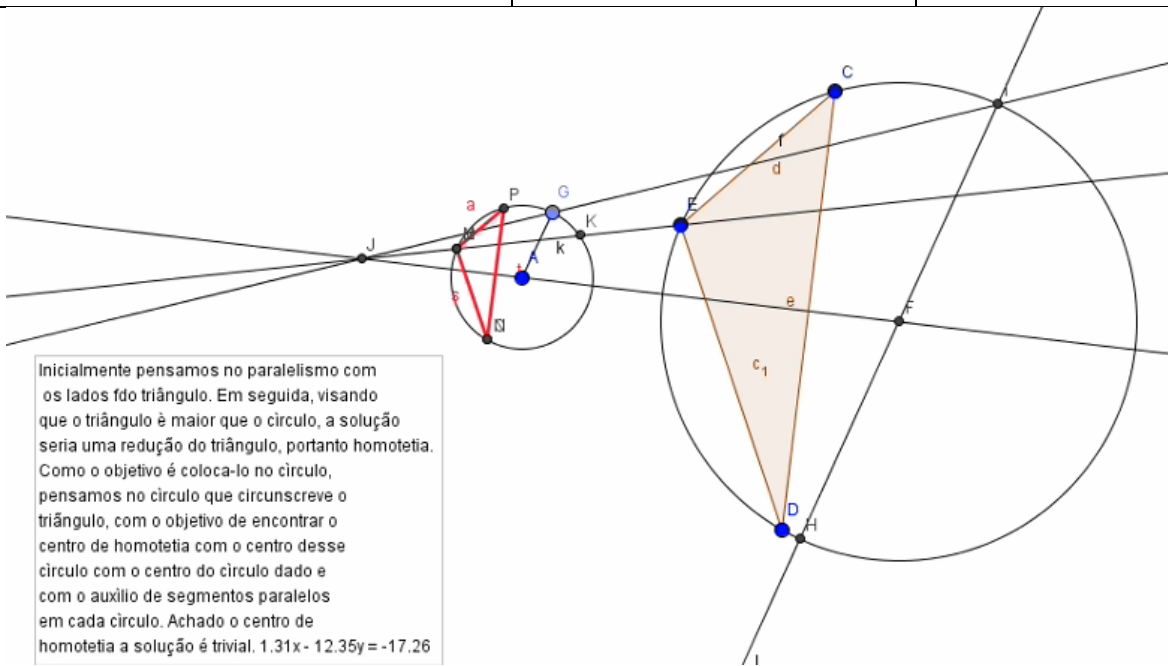
**Momento de reflexão sobre o ocorrido: transcendência do vivido**

<p>S1: Pesquisadora , olha aqui.</p> <p>Explicação do S1 sobre o que a dupla pensou para a resolução:</p> <p>S1: o que a gente pensou? A gente pensou em homotetia. Aí a gente criou esse círculo...</p> <p>Pesquisadora : Mas o que levou vocês a decidir que era a homotetia?</p> <p>S1: o paralelismo.</p>	<p>Indicador de movimento, de pensar com movimento.</p>	<p>O movimento está presente na constituição do conhecimento.</p> <p>Diálogo científico posto</p>
---	---	---

<p>Pesquisadora : tá. Só o paralelismo?</p> <p>S2: é que a gente observou que tinha que haver uma diminuição do triângulo e essa diminuição, caracteriza a homotetia. Aí a ideia é considerar o círculo que circunscreve o triângulo e imaginar que ele é este círculo. E passar o triângulo pro outro círculo por homotetia.</p> <p>A nossa maior duvida é se esse é o maior triângulo.</p> <p>Pesquisadora: que é homotético a esse e com os lados paralelos e os vértices pertencentes a círculo, sim. Porque quando você traça o triângulo aqui no círculo e tenta colocar um ponto "maior" (para tornar o triângulo maior), esse triângulo já não será mais inscrito.</p> <p>S1: é, essa que é a questão. Tem que ser o maior inscrito, né.</p> <p>Pesquisadora: sim.</p> <p>S2. Acaba que a gente nem trabalha com o círculo, você constrói outro e só depois que o triângulo vai pra dentro do outro círculo (o círculo dado).</p> <p>Pesquisadora : Isso! Isso mesmo!</p> <p>S1: show. Você quer que a gente</p>		<p>(ocupação do horizonte da ciência)</p> <p>Reflexão sobre o vivido.</p>
--	--	---

escreve? A gente escreve!

Pesquisadora : pode. (...)

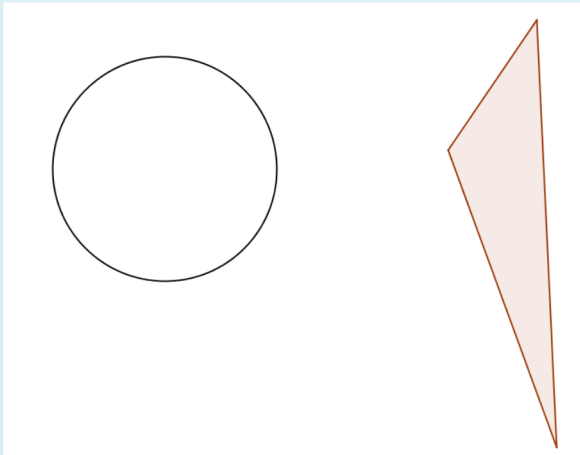


Inicialmente pensamos no paralelismo com os lados do triângulo. Em seguida, visando que o triângulo é maior que o círculo, a solução seria uma redução do triângulo, portanto homotetia. Como o objetivo é colocá-lo no círculo, pensamos no círculo que circunscreve o triângulo, com o objetivo de encontrar o centro de homotetia com o centro desse círculo com o centro do círculo dado e com o auxílio de segmentos paralelos em cada círculo. Achado o centro de homotetia a solução é trivial.  $1.31x - 12.35y = -17.26$

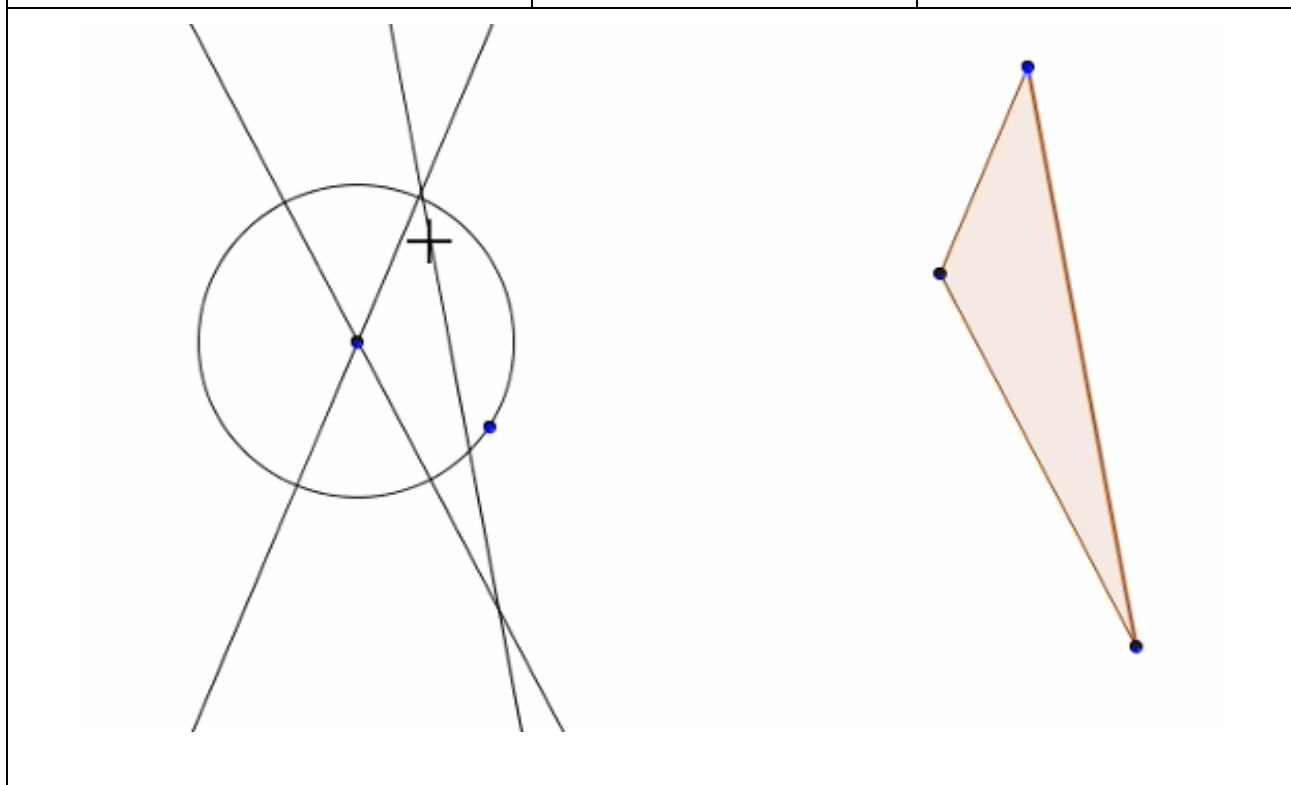
Fonte: os autores

## Grupo 2

Tabela 3: Análise Ideográfica da Atividade 1 Grupo 2

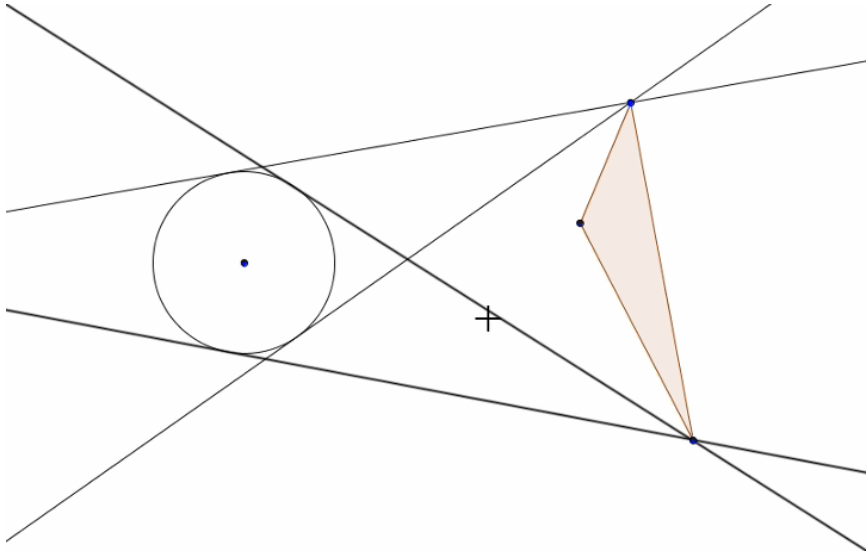
ATIVIDADE 1.2 – Não foi dado o applet-		
<p>Uma construtora está projetando para a área de lazer de um condomínio a construção de uma região triangular e um espaço circular, como mostra o projeto abaixo. Um arquiteto, vendo esse projeto, sugeriu que dentro do círculo também tivesse uma região triangular, a maior possível, com seus lados paralelos, cada um, aos lados do triângulo já projetado. Como fazer esse projeto?</p>		
		
<p><b>INTERLÚDIO:</b> essa dupla já iniciou sua atividade um tempo depois, por problemas técnicos com o computador que logo foi solucionado e a dupla pode trabalhar normalmente.</p>		
<p style="text-align: center;"><b>Cena 1.1</b></p> <p style="text-align: center;"><b>Primeira interpretação</b></p>		
INTERAÇÃO	INTERPRETAÇÃO	IDEIAS
<p>S5 e S3 leram e releeram a atividade em silêncio.</p> <p>S5: O quê que é pra fazer? As</p>	<p>S3 ficou empenhada em resolver a atividade, o que impediu a interação com o companheiro.</p>	<p>Utilização de estratégias para a resolução.</p>

<p>medianas, as bissetrizes?</p> <p>S3 não responde, fica tentando fazer no papel e S5 olhando para o computador.</p> <p>S5 mexeu no mouse depois de um tempo olhando para a tela do computador. E S3 continua empenhada em fazer no papel sozinha.</p> <p>S5 começou a ver as “janelas” do GGB e, de acordo com o que a S3 estava fazendo no papel, traçou três retas paralelas aos lados do triângulo passando pelo centro do círculo e verificou que não iria “fechar” (não dava um triângulo inscrito no círculo).</p> <p>S5: é não vai não... não fecha.</p>	<p>S5 criou duas retas paralelas ao lado do triângulo passando pelo centro do círculo. E observou que quando fez o terceiro lado do triângulo no círculo, paralelo ao terceiro lado do triângulo dado, o triângulo que estava sendo construído, não fechava num triângulo inscrito no círculo.</p>	<p>Utilização do <i>software</i> para formular e testar conjecturas.</p>
---	--	--



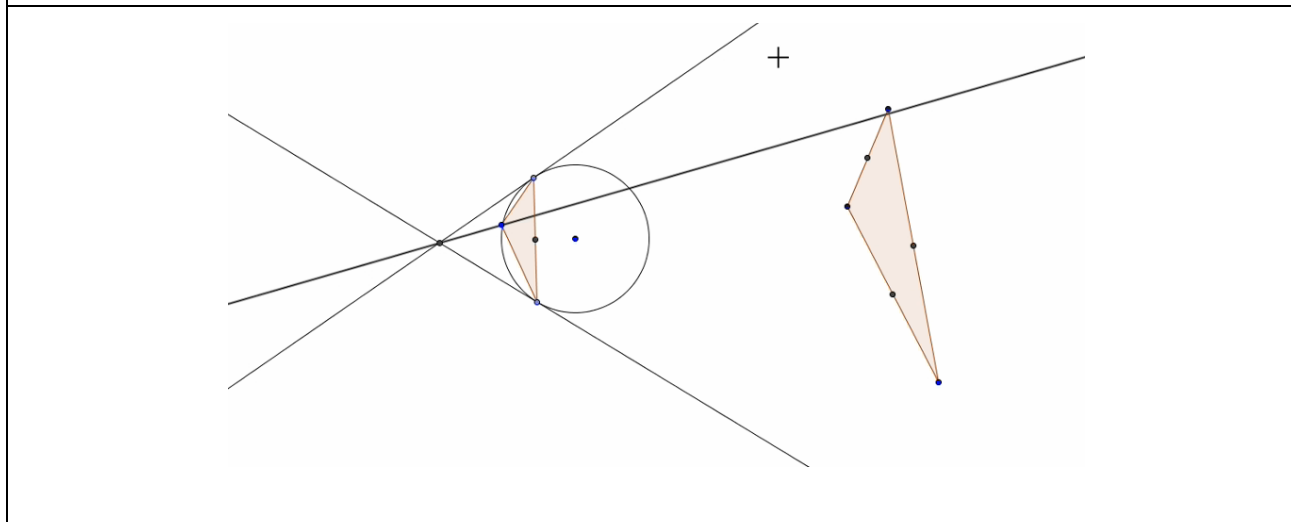
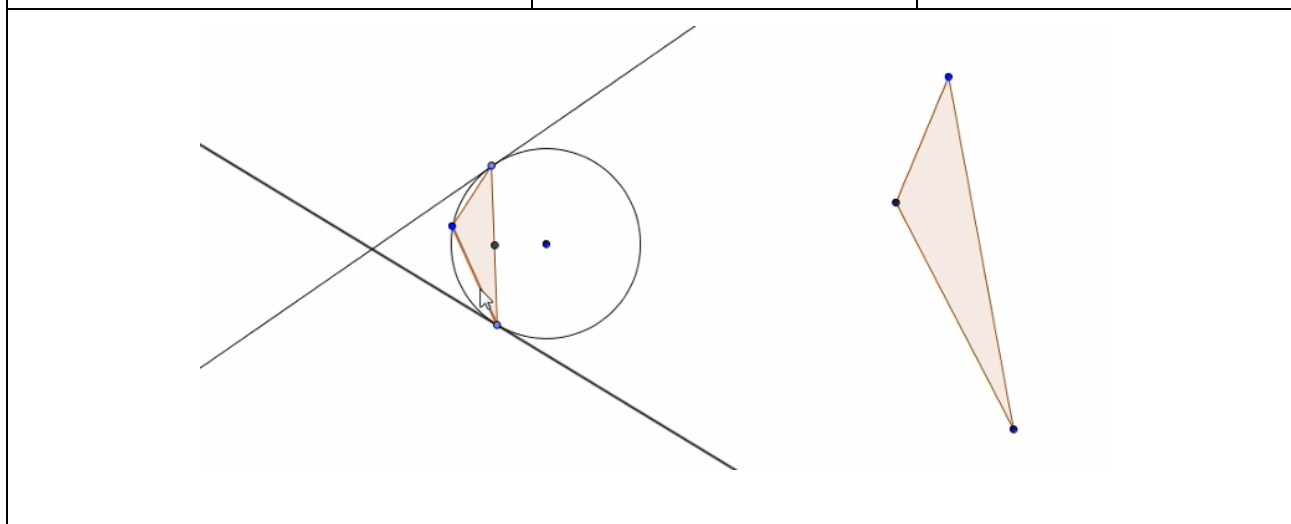
## Cena 1.2

### Outros Testes Empíricos

<p>Como que desfaz? liii</p> <p>Pesquisadora: é só apertar ctrl + z.</p> <p>você acha que ... [olha o que a S3 está fazendo no papel e vai mexer no PC]</p> <p>essa ai você chama de reta tangente?</p> <p>S3 [sem titubeio]: aham</p>	<p>Em busca de ideias, o sujeito busca no companheiro uma saída para o desenvolvimento da atividade.</p> <p>A S3 se focou no perguntado, evitando manifestar o seu pensamento.</p>	<p>Dúvida no uso das ferramentas do <i>software</i>.</p> <p>O estar em dupla proporcionou uma ajuda na decisão de onde partir.</p> <p>Utilização do <i>software</i> para formular e testar conjecturas.</p>
		
<p>S5: Olhou a construção e desfez as tangentes.</p> <p>Pegou novamente a folha para ler o enunciado da atividade.</p> <p>Pesquisador: é fazer isso dentro</p>	<p>Na dúvida com o que fazer, o aluno volta ao enunciado para ver se acha alguma informação não percebida anteriormente.</p>	<p>Busca pela compreensão das informações.</p>

<p>disso, ne? Pode rabiscar ai gente, pode imaginar aí oooh...</p> <p>S5: to tentando fazer alguma coisa aqui</p> <p>Pesquisador: a sugestão que eu dou nessa hora, esquece o triângulo. Faz um triângulo qualquer aqui dentro depois faz um...</p> <p>S5: dentro desse? (no círculo)</p>	<p>A sugestão dada pelo pesquisador desperta a curiosidade da S3 que direciona sua atenção para o computador.</p>	
<p><b>INTERLÚDIO:</b> (...) Os pesquisadores intervêm na construção que o S5 investia, e sugere uma construção iniciando-se pelo o que se quer construir e fazer o caminho inverso.</p> <p>S5 inicia a construção, mesmo com dúvidas aparentes.</p> <p>Logo depois S3 sugere que S5 apague e construa no computador o que ela havia pensado sozinha e construído no papel.</p>		
<p><b>Cena 1.3</b></p>		
<p>S3 olha para o computador. Mas se volta novamente pro papel sozinha.</p> <p>S3(segura, e se dirigindo ao S5 e ao que ele havia feito no <i>software</i>): Não! Esquece isso daqui. Como que acha o centro de homotetia desse triângulo aqui? eu acho que você vai pegar um lado, achar o meio, traça uma...</p> <p>S5: você fez aqui a... você ta falando aqui a mediana?</p> <p>S3: isso!</p> <p>S5: Como que eu traço a mediana aqui nesse GGB? Deve ser o ponto</p>	<p>Intervenção dos pesquisadores para um desenvolvimento colaborativo.</p> <p>Inicia uma interação na busca da resolução.</p>	<p>O <i>software</i> possibilita uma abertura para a solução.</p> <p>O <i>software</i> como facilitador de construções.</p>

<p>médio, né. Ponto médio, oh! [olha o que a S3 fez no papel]</p> <p>S3: eu acho que pega a reta tangente, e traça uma tangente lá [no vértice do triângulo]</p> <p>S5: aqui também ? [no outro vértice do triângulo]</p> <p>S3: ahan.</p>		<p>Constituição do pensamento junto ao software.</p>
--	--	--



<p>S5 mexe no zoom e fica olhando para o computador. Cria um ponto qualquer fora de qualquer reta. Cria uma reta paralela a cada lado do</p>		
--	--	--



<p>triângulo e forma um outro triângulo.</p> <p>Parece que ele não acredita estar correto. Muda as cores das retas.</p> <p>Fica um tempo olhando para o computador e para o que a S3 está fazendo.</p> <p>Pesquisadora: ah você fez esse daqui</p> <p>S5: é esse triângulo. Eu já até colori. Como que preenche aqui?</p> <p>(...) S5 tira dúvida sobre colorir o preenchimento do triângulo .</p> <p>S5 olha para o computador durante um tempo e não diz nada.</p>	<p>Não encontra justificativas para garantir sua construção.</p>	<p>Preocupação com fundamentação além do que o vivenciado permite.</p>
--	--	--

## Cena 1.4

### Finalização da Atividade

<p>S3: Então S5 vamos lá. Apaga tudo aí...</p> <p>S5: Ah... risos</p> <p>S3: Já resolvi o problema, deixa eu te explicar.</p> <p>S5: Como é que é? Arquivo... novo</p> <p>Pesquisadora: põe nova janela!</p> <p>S3 deu as orientações e o S5 construiu de novo sem nenhuma argumentação, agora do jeito que a S3 fez no papel.</p>		<p>O <i>software</i> como facilitador de construções.</p>
--	--	---

Fonte: os autores

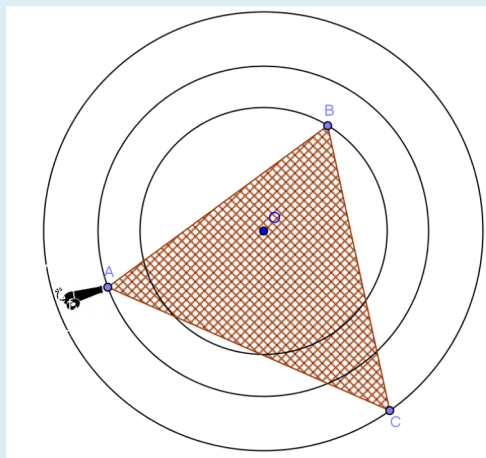
## 6.2.2- Atividade HOMEM BALA

Tabela 4: Análise Ideográfica da Atividade 4

### ATIVIDADE 4: HOMEM BALA - Dado o applet com animação.

No circo, a apresentação do espetáculo do Homem-Bala está causando preocupação com a segurança dos seus participantes. O cenário da apresentação é formado por três círculos concêntricos onde o canhão (A) gira no círculo do meio, os assistentes B e C deverão ficar um no círculo de dentro e o outro no de fora. Quando o apresentador terminar de anunciar o espetáculo, a música irá parar e onde o canhão estiver ele lançará o homem-bala. A rede de proteção estará presa ao canhão. E, a distância entre os assistentes, com a rede esticada, deve ser a mesma que a de cada um à boca do canhão.

Onde os assistentes deverão estar para esticar a rede de proteção e salvar o homem-bala?



**INTERLÚDIO:** A pesquisadora inicia a animação da situação no GGB, onde o canhão (A) se move em torno do círculo que pertence.

**CENA 4.1**

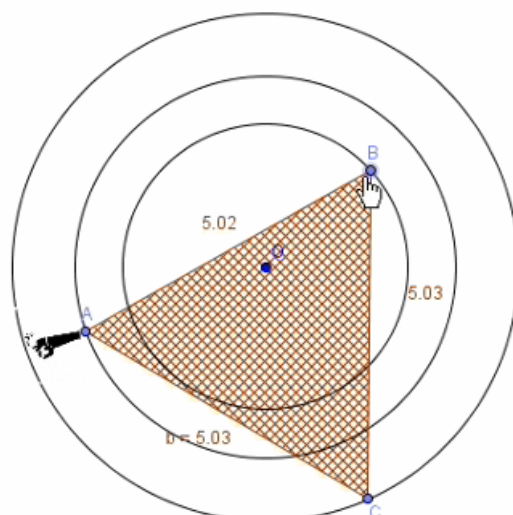
**Primeira interpretação dada a animação.**

<b>INTERAÇÃO</b>	<b>INTERPRETAÇÃO</b>	<b>IDEIAS</b>
<p>S1(olhando para a animação na tela e com a mão no queixo exclama): Uhum... (e balança a cabeça para cima e para baixo, como quem concorda):</p> <p>S4 (levanta as sobrancelhas com surpresa).</p> <p>Pesquisadora: Então essa é a situação pedida pelo problema, só que a gente precisa que siga as condições exigidas para garantir que pegue o homem-bala. (Pesquisadora para a animação).</p> <p>S4 (aponta na tela do computador o centro do círculo): o homem bala é esse ponto aqui?</p> <p>Pesquisadora e S1(afirmam juntos): Não!</p> <p>Pesquisadora: esse é o centro do círculo, (falando junto com S1) o homem bala sai do canhão.</p> <p>S4: é! Tá! Uhum, entendi. (coloca a mão na testa como quem está analisando a situação).</p> <p>Pesquisadora: se quiser animar são</p>	<p>A visualização do que está sendo falado no problema auxilia na compreensão.</p> <p>Diálogo voltado para uma compreensão.</p> <p>O <i>software</i> proporciona uma trajetória metodológica diferente da proporcionada sem ele.</p> <p>Busca por uma solução mais dentro da familiaridade geométrica elementar, ao intencionar medir um lado.</p>	<p>O <i>software</i> possibilita uma abertura para a solução. Dinamicidade didática.</p> <p>Utilização de estratégias facilitadoras para a resolução.</p> <p>Interação e colaboração</p> <p>Interação com o <i>software</i>.</p> <p>Trânsito entre geometrias</p>

<p>esses pontos que vão ter que mover (mostra na tela do <i>software</i> quais pontos terão que ser selecionados e deixa a dupla).</p> <p>S4 (ainda com a mão na testa, apoiando na mesa e olhando para a tela): mas... ela quer saber onde vão estar os pontos pro triângulo ser equilátero. S1(concorda): uhum!</p> <p>S4(olhando para a tela): então, mas aí é só... se colocasse o controle deslizante ai acharia rapidinho.</p> <p>S1 (fica olhando para o rosto da S4, junta as sobrancelhas como quem está com dúvida, olha para a tela e volta o olhar para a S4 novamente e pergunta): controle deslizante?</p> <p>S4 (ainda olhando para a tela): Não! Eu pensei... pra saber onde eles vão ser iguais.</p> <p>S1: controle deslizante, ou medir assim? (coloca o mouse num lado do triângulo).</p> <p>S4: é... não, medir! Só que aí, tipo assim, coloca pra medir e o controle deslizante ia colocando as medidas, entendeu?</p> <p>S1(balança a cabeça como quem concorda): faz aí, que eu não sei fazer isso não.</p>	<p>Pensa em utilizar uma ferramenta que, segundo S4, resolveria o problema. E interagindo com o <i>software</i> desconsidera a ferramenta.</p> <p>A interação não foi suficiente para fazer com que o outro entendesse o procedimento pensado. E o sujeito que estava com a posse do mouse, passa o comando para o outro.</p>	<p>O <i>software</i> possibilita uma abertura para a solução.</p> <p>Interação e colaboração</p> <p>Tentativa de uma resolução empírica.</p>
---	---	--

<p>S4(procura onde é a ferramenta de distancia):</p> <p>S1: é por aí... (mais pro final dos ícones)</p> <p>S4: não, é por aqui! (olhou o ícone ao lado e encontrou a ferramenta de medida de distância). Este... este... e este. (mediu todos os lados do triângulo). Agora a gente tem todas as medidas. Dá até pra gente mesmo ir rodando e ver. É difícil, né...</p>		
<p><b>Cena 4.2</b></p> <p><b>Testes empíricos</b></p>		
<p>S1: pera aí! (pega o mouse e mexe nos vértices do triângulo tentando colocar os três lados com a mesma medida).</p> <p>S4: tem um comando pra colocar quando... as medidas forem iguais?</p> <p>S1(olha para ela e pergunta intrigado): tem?</p> <p>S4(risos): não sei, só to perguntando. Será que teria? Que aí seria de cara, né?! Senão tem que ir mexendo.</p> <p>S1(mexendo nos vértices do triângulo concentrado)</p> <p>S4(observando o que o S1 está fazendo na tela): Não! Tem que ser</p>	<p>Busca por ferramentas facilitadoras.</p> <p>Utilização de testes empíricos motiva uma interação e participação do outro no empenho e no “estar junto” na atividade.</p> <p>Lembra-se da visualização da animação que é ignorada pela surpresa do companheiro chegar muito perto da resposta. O que a coloca novamente em interação.</p> <p>Essa atividade aberta,</p>	<p>O <i>software</i> abre possibilidades de investigação.</p> <p>Interação com o <i>software</i>.</p> <p>Cuidado no “estar junto” com o outro e com o pensamento do outro.</p> <p>Tentativa de uma resolução empírica.</p>





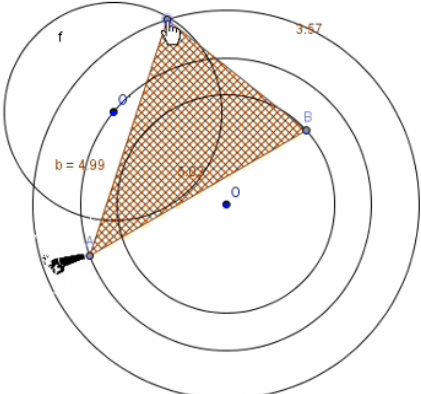
### CENA 4.3

#### A utilização da ferramenta “rotação”

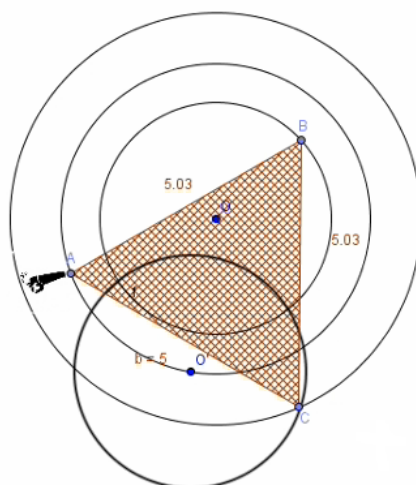
INTERAÇÃO	INTERPRETAÇÃO	IDEIAS
<p>S1: é... então olha só... C é B rotacionado <math>60^\circ</math> em torno de A. Beleza?</p> <p>S4: uhum</p> <p>S1: Se eu rotacionar esse círculo aqui onde ele tocar aqui, é o C.</p> <p>S4 (olhando para a tela): Sim!</p> <p>S1 (olhando para a S4): e eu posso arbitrar o A, concorda?</p> <p>S4(olhando para tela com certa dúvida): uhm?</p> <p>S1: Pq o A pode ser qualquer um, por que o A tá rodando aqui onde ele</p>	<p>Mudança de estratégia de resolução.</p> <p>Utilização de conhecimento prévio.</p>	<p>Diálogo científico posto (ocupação do horizonte da ciência)</p> <p>Argumentação apropriando-se de conhecimento teórico.</p>



<p>parar é beleza.</p> <p>S4: Uhm, e como a gente vai fazer isso? No GeoGebra?</p> <p>Pesquisador(de longe diz): até pq o circulo ele todo é redondo... só to corroborando com o que você acabou de falar.</p> <p>S1 : ahm , mas tá certo isso? Pq o A tá parado beleza, aí, existe um lugar para B e C para que é fixo, mas o A não! Dependendo do A, B e C vão variar. (Para e olha para a tela) Agora como faz isso no GGB? Como que rotaciona no GGB?</p> <p>Pesquisadora(se aproxima da dupla): tem uma ferramenta que é rotação em torno de um ponto. Acho que aqui (aponta na tela do computador, enquanto o S1 com o mouse procura entre as ferramentas). Alá! Rotação em torno de um ponto.</p> <p>S1: mas eu ponho o ângulo?</p> <p>Pesquisadora: isso! Você acrescenta o ângulo que você quer.</p> <p>S1: Ah, beleza. Então seleciona primeiro o objeto, depois o centro, depois o ângulo, ta. (ele seleciona o ponto O e rotaciona 60° em torno de A, tem-se O'). Agora eu espero .... (o computador processar) (S1 olha para</p>	<p>O conhecimento prévio já posto, tem que ser reformulado para a realidade do <i>software</i>.</p>	<p>O <i>software</i> possibilita uma reformulação de um conhecimento já posto.</p> <p>Preocupação com fundamentação além do que o vivido permite.</p>
---	---	---

<p>o lado e estica o corpo e volta o olhar novamente para tela do computador). Ah... já parou aqui. Agora eu meço, tem aqui o compasso..., faço aqui com esse raio aqui e boto ele aqui. (raio OB e coloca no centro O'). Beleza. Então... quando rotacionei ele, ele veio aqui, aqui é o C, é isso?</p> <p>S4: é! mas pq não é aqui?(na outra intersecção do círculo construído com o círculo dado).</p> <p>S1: é que são duas possibilidades, né! [...] na hora que eu voltar, vai ter um circulozinho menor também. Posso jogar C pra lá? (pergunta pra si mesmo).</p> <p>S4(questiona): Para cá, não?</p> <p>S1(intrigado): onde?</p>	<p>Utilização da ferramenta do <i>software</i> seguindo todas as exigências reafirma seus conhecimentos prévios sobre a coisa.</p>	
		
<p>S4: aqui oh. (Aponta o centro O' na tela)</p> <p>S1:Não! Esse aqui é o centro.</p>	<p>Busca de um entendimento comum.</p>	<p>Cuidado no “estar junto” com o outro e com o pensamento do outro.</p>

<p>Entendeu? Ou não?</p> <p>S4(com titubeio): Não... entendi.</p> <p>S1: e agora, como é que volta? (coloca a mão no queixo pensativo)... Não! Pera aí, eu rodei num sentido, e eu queria rodar pro outro sentido, tem como escolher isso?</p> <p>S4: tem é só você clicar aqui (mostra com a mão o ícone da ferramenta rotação)</p> <p>S1(coloca a mão na cabeça, pensativo e fica olhando para a tela) : agora me confundi (...)</p> <p>S1 apaga a construção feita. E faz a rotação no sentido contrário ao feito anteriormente.</p> <p>S1: Olha só!</p>		<p>Modos de movimento como abertura de horizontes.</p> <p>Afetar-se da atividade.</p>
---	--	---



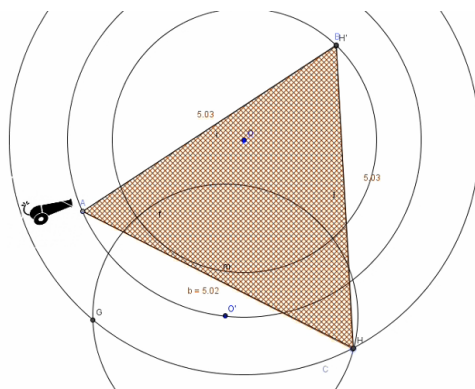
**Cena 4.4**

**Construção do pedido**

<b>INTERAÇÃO</b>	<b>INTERPRETAÇÃO</b>	<b>IDEIAS</b>
<p>S1: Agora... Oh Pesquisador, como eu volto depois? Aqui, eu achei o C, tá vendo? O C tá aqui, nesse H aqui, que eu rotacionei esse círculo pra cá. Então aqui seria o C, ou aqui, como que eu volto mesmo? Esqueci, deu branco.</p> <p>Pesquisadora: Ué, outra rotação!</p> <p>S1(com dúvida): eu rotaciono esse aqui... lá de novo? Não!?</p> <p>Pesquisador: você quer voltar o que, pra ele virar o quê?</p> <p>S1(afirma com certeza): B!</p> <p>Pesquisador: B tá aonde?</p> <p>S1: nesse daqui (mostra a círculo menor)</p> <p>Pesquisador: qual rotação você tá fazendo?</p> <p>S1: eu to fazendo... eu pensei assim... a gente pensou assim: C é o B rotacionado 60° em torno do A.</p> <p>Pesquisador: então é tudo rotação 60° em torno do A, então tem os dois</p>	<p>Utilização do conhecimento prévio.</p>	<p>Metodização para compreensão do fazer científico.</p>

<p>sentidos. Os parâmetros básicos são sempre os mesmos.</p> <p>S1 (mexe no zoom e fica olhando para a tela): então C é esse aqui. agora vou rotacionar o H em torno de A, não é isso. (olha para o Pesquisador pedindo aprovação)</p> <p>S4(olhando para tela): é o H?</p> <p>Pesquisador: sabe renomear, num sabe?</p> <p>S1: Sei!</p> <p>Pesquisador: o G é o A né?!</p> <p>S1: G? quem é o G?</p> <p>S1(com a mão na cabeça olhando para a tela): é o H! O H aqui num é o C? é o C.</p> <p>S1: o G e o H são os possíveis C... deixa eu tirar o C daqui, senão...</p> <p>(S1 rotaciona H em torno de A 60° no sentido anti-horário e o ponto H' fica muito próximo do ponto B dado. Ele tenta arrastar o ponto B, mas o B não se movimenta. Ele se irrita e diz um palavrão. Coloca a mão na boca, pede desculpas).</p> <p>S1(ainda com a mão na boca): então a resposta é essa aqui, oh! (e liga o</p>	<p>A dupla, junto com o pesquisador, dialoga em busca de um entendimento comum.</p>	<p>Interação e colaboração.</p> <p>Diálogo interacional.</p>
---	---	--

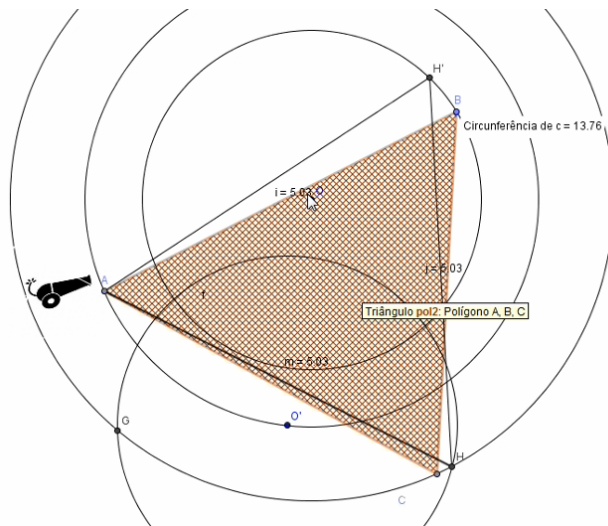
<p>triângulo A H e H')</p> <p>S4( focando seu olhar na tela): Aqui, depois que você rotacionou aqui achou o H, o que você fez?</p> <p>S1: rotacionei o H 60° de volta, no sentido anti-horario. Cliquei aqui (coloca o mouse em cima do H )e aqui (no A) e 60° no sentido anti-horário.</p> <p>S1 termina a construção e liga os pontos formando o triângulo .</p> <p>S4(pergunta): aí deu certinho?(olhando as medidas dos lados do triângulo)</p> <p>S1: Deu, agora vão por pra medir aqui; esse é do dela.</p> <p>S1 tenta colocar os pontos dados em cima dos pontos que ele achou como resposta.</p> <p>S4: Não, mas aqui deu errado [um centésimo de diferença]</p>		<p>Uso do <i>software</i> para comprovar conhecimentos prévios. (construção exata)</p>
---	--	--



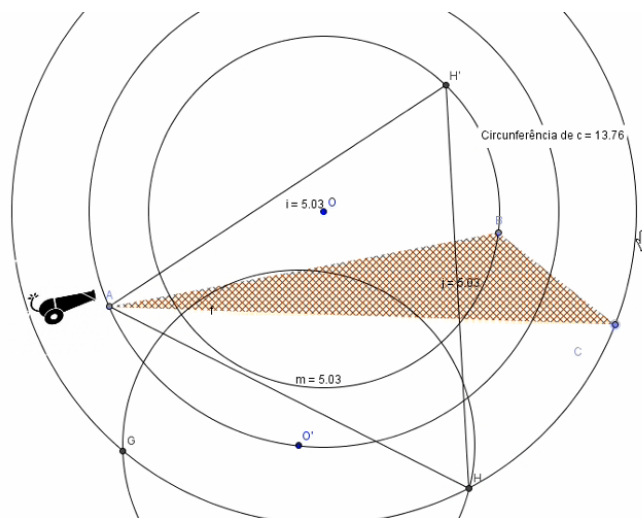


2 (na imagem 5,02).

S4: (também se aproxima da tela):  
Ué!



S1 movimenta a malha quadriculada e vê que realmente é 5,03.



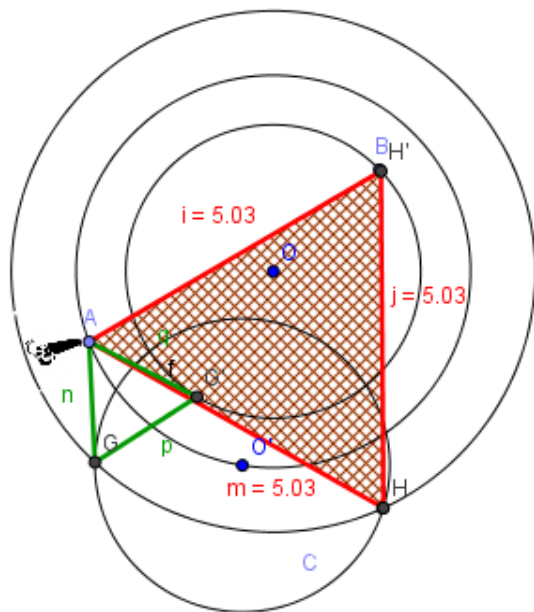


**4.5- Momento de reflexão sobre o ocorrido: a finalização do trabalho dos sujeitos como transcendência das vivências**

<p>S1: Ah... (S1 e S4 se encostam na cadeira, com satisfação, “dever cumprido”). Beleza!</p> <p>S4: Certinho! O nosso num tinha dado 03? (se referindo ao teste empírico).</p> <p>S1: É. Mas no olho é difícil. Aqui tem que tá certo, não é possível.</p> <p>Tem que gravar aqui! (fala pausadamente) nós usamos... tá gravando minha voz aqui, Pesquisadora?</p> <p>Pesquisadora: eu espero que sim! Risos.</p> <p>S1(falando para a câmera): nós usamos rotação! (risos)</p> <p>Enquanto isso, S4 mexe no mouse e tenta colocar a malha nos vértices do triângulo construído, mas desiste e mexe no zoom.</p> <p>S1: vamos escrever aqui o que a gente...</p> <p>S1olha para o computador da outra dupla pra ver se eles também terminaram e comenta com a S4: poxa, ele digita muito rápido.</p>		<p>Diálogo científico posto (ocupação do horizonte da ciência)</p> <p>O <i>software</i> como facilitador de construções (exatas).</p> <p>Reflexão sobre o vivido.</p>
--	--	---

<p>S1: (silêncio olhando para tela tentando lembrar): é... rotação... (junta as sobrancelhas e olha para a S4 pedindo ajuda)</p> <p>S4: do ponto P em torno de A...</p> <p>S1: com centro em O ... em torno de A... 60° (olha para o teclado) cadê o grau aqui? O meu é por aqui assim (aponta uma região no teclado)</p> <p>S4 (olha ajudando o S1a procurar no teclado).</p> <p>S1: Oh Pesquisador, onde é a bolinha aqui do seu...</p> <p>S4: do grau</p> <p>S1 (ainda procurando no teclado) a bolinha do grau do computador aqui. (com a ajuda do Pesquisador, encontrou)</p> <p>S4: na verdade foi o círculo, né!</p> <p>S1(olha para a S4): o círculo né! É... mas, rotacionando o centro, rotaciono o círculo, né!</p> <p>S4(concorda): ah é! Verdade.</p> <p>S1: 60 graus... (olha para a S4) no sentido anti - horário!? É horário...</p> <p>S4: Horário! Se a gente tivesse feito no sentido anti-horário ia achar outro</p>		
---	--	--

<p>triângulo , né!</p> <p>S1: é! Mas como a gente fez no sentido horário, achamos H , H é C...(falando pausadamente o que estava escrevendo). Beleza? (olha para a S4).</p> <p>S1 escreve em silêncio no GGB o procedimento que eles usaram para a construção.</p> <p>Depois muda a cor da solução para vermelho, conforme pedido, e marca de azul uma segunda solução que pelo contexto do problema não seria viável.</p> <p>S1 coloca sua solução para rotacionar e disse que ficou chique.</p> <p>Pesquisadora: então quer dizer que a construção de vocês tá... certinha, né, porque você rotacionou e não mudou nada, continuou sendo o mesmo triângulo equilátero, a condição de pertencer as círculos continuaram...</p> <p>S1: isso mesmo! Então é só clicar aqui, em salvar....</p>	<p>Satisfação ao concluir a construção.</p>	<p>Afetar-se da atividade.</p> <p>O movimento é usado como uma prova matemática.</p>
--	---	--



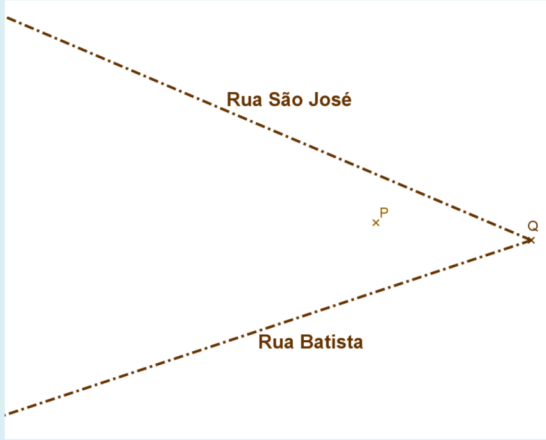
Nós usamos rotação do centro O em torno do ponto A, 60° horário achando H (H é C, C é B') interseção do círculo rotacionado (de dentro) com o círculo maior (de fora). Depois voltamos com H (rot, A, 60°) encontrando H'.

o objetivo foi encontrar o triangulo equilatero AHH'. Sabemos que existe uma segunda solução AGG'.

Fonte: os autores

### 6.2.3- Atividade VIVEIRO

**Tabela 5: Análise Ideográfica da Atividade 5**

ATIVIDADE 5: VIVEIRO - Dado o applet		
<p>Antônio precisa construir um viveiro triangular equilátero, tendo como vértices três mourões: A, B e C. Para aproveitar o espaço, ele considerou que B e C ficassem juntos aos muros das margens das ruas São José e Batista.</p> <p>No encontro dos muros ( Q ), há uma fonte d'água que servirá de irrigação para o viveiro. Um dos pontos de irrigação será em P que pertence à cerca BC, e o outro será em A. Por questão de economia P e A estarão alinhados com a fonte principal Q.</p> <p>Ajude Antônio a construir esse viveiro.</p>		
		
CENA 5.1		
Primeira interpretação.		
INTERAÇÃO	INTERPRETAÇÃO	IDEIAS
<p>Os sujeitos leem a atividade juntos e começa a interação na frente do computador:</p> <p>S1: Então a gente podia arbitrar um ponto A nessa reta, montar um triângulo equilátero aí tem que pensar nisso só. Aí depois tem que pensar em homotetia. Entendeu?</p>	<p>A apresentação surte efeito. O sujeito identifica por meio da leitura o que a atividade propõe.</p> <p>Uma trajetória metodológica vai sendo articulada, dando-se liberdade de se pensar em rascunho.</p> <p>Há uma preocupação da</p>	<p>O horizonte geométrico é habitado.</p> <p>Utilização de estratégias para a resolução.</p> <p>Diálogo científico posto; (um Pensamento matemático se põe).</p>

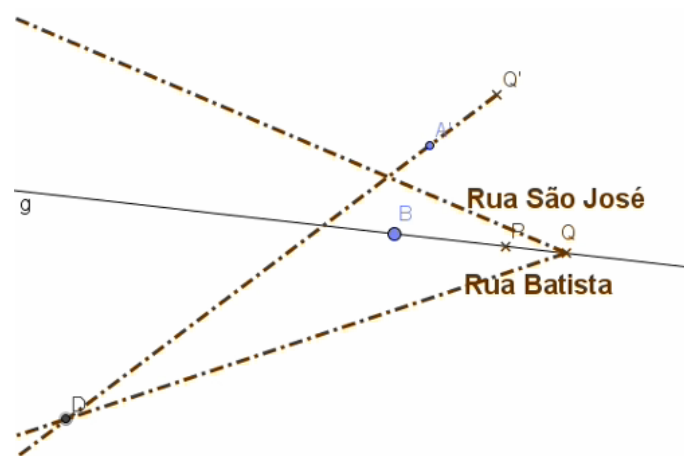
	<p>dupla funcionar, no diálogo matemático ocorrido.</p>	
<p><b>INTERLÚDIO:</b> o pesquisador com uma metáfora didática lembra aos sujeitos que em uma situação geométrica, quando não se consegue fazer uma figura, pode-se fazer uma auxiliar que tem a ver com a figura procurada.</p>		
<p>S1: A gente arbitra um ponto aqui assim (aponta na tela do computador), ou aqui (na reta construída no computador) vou por aqui assim e monta o triângulo equilátero aqui, pq? depois a gente ou volta ou vai com ele, pode ser? .</p> <p>S2: agora ver aí, um polígono regular.</p> <p>S1: aí como é que é? Seleciona primeiro dois pontos e a quantidade de vértices... (lendo no <i>software</i>) Não, não pode ser assim, tem que construir aqui.</p> <p>S2: é, é isso que eu to pensando, é vai ter que construir ele.</p> <p>S1: éh.</p> <p>S2: é, porque senão ele vai jogar... não vai jogar nessas duas (retas).</p> <p>S1:(silêncio, olhando para a tela do computador pensativo): puxa, danou!</p>	<p>O sujeito imagina uma possível solução e pede ao companheiro uma confirmação para sua ação.</p> <p>O diálogo na dupla para elaborar a construção e para os dois chegarem a um ponto em comum de resolução.</p> <p>Busca de um caminho metodológico.</p> <p>O recurso decidido pela dupla é desconsiderado também por ela, quando leem as especificações da ferramenta. Apesar de um desconsolo da dupla ao perceber que a ferramenta não resolveria.</p>	<p>O <i>software</i> possibilita uma abertura para a solução. Dinamicidade Didática.</p> <p>Metodização para compreensão do fazer científico.</p> <p>Interação com o <i>software</i>.</p> <p>Interação e colaboração.</p> <p>Preocupação com fundamentação além do que o vivido permite.</p>

## CENA 5.2

### A rotação da reta.

INTERAÇÃO	INTERPRETAÇÃO	IDEIAS
<p>S2: joga um ponto aqui, (mostrando uma distância com o polegar e o indicador de uma mão, na tela do computador) aí a gente vai ter que achar uma distancia que seja igual a essa daqui, aqui... Mas aí aqui não vai ser igual.</p> <p>S1: to pensando em fazer pra lá. Porque o A tá aqui... num dá, P e A estão alinhados com a fonte.</p> <p>S4: Então o A está nessa reta mesmo. Mas até aqui assim mesmo, mas como é que faz pra traçar aqui embaixo?</p> <p>S1: esse aqui, o B é um dos vértices, né. (faz um vê com os dedos indicador e médio, e fica olhando e movimentando para tentar encaixar o vê no desenho da tela).</p> <p>S4: é</p> <p>S1: Então, se eu tenho um ponto nessa reta aqui, o ponto nessa (outra) reta ... 60° né!?</p>	<p>Antecipação do potencial dinâmico/exploratório do <i>software</i> por indicações orais e gestuais.</p> <p>Utiliza a visualização nas mãos para organizar suas ideias.</p> <p>A mão personaliza um compasso que junto ao <i>software</i> motiva o desencadeamento de uma interação que progride no desenvolvimento da atividade.</p> <p>A utilização das ferramentas do <i>software</i> motiva uma interação.</p> <p>O <i>software</i> proporciona a visualização de um ponto que no papel seria inacessível.</p>	<p>Interação com o <i>software</i>.</p> <p>O movimento está presente na constituição do conhecimento.</p> <p>O movimento está presente na constituição do conhecimento.</p> <p>Utilização das ferramentas do <i>software</i>.</p>

<p>S4: é rotacionar o vértice.</p> <p>S1: o ponto</p> <p>S4: em torno desse ponto (B).</p> <p>S1: Mas essa reta é rotacionável? É! Então rotaciona aqui (utilizando a ferramenta do <i>software</i>)</p> <p>S4: é porque a reta tá em volta, né, rrsrsrs dá impressão....</p> <p>S1: é pode crer (procura na janela de álgebra a ferramenta de rotacionar). Cadê?</p> <p>Puxa danou... (a interseção da reta A'Q' com a Rua Batista ficou muito distante, o sujeito teve que diminuir o zoom para visualizar essa interseção (D) ).</p> <p>Nossa senhora.... muito ruim.... ah mais ou menos (encontrou a interseção D).</p>	<p>Sujeito exclama a surpresa de um movimento imprevisto a partir do <i>software</i>, que vai sendo posto em compreensão enquanto é usado.</p>	<p>Constituição do pensamento junto ao <i>software</i>.</p>
--	--	---

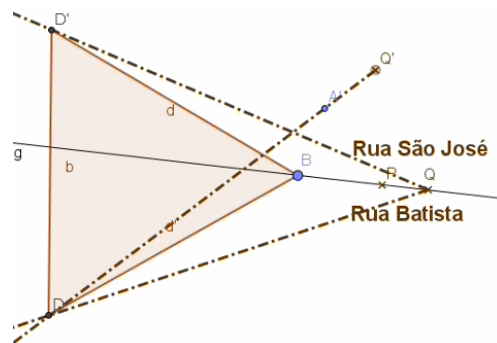




### CENA 5.3

#### Construção do triângulo por rotação.

INTERAÇÃO	INTERPRETAÇÃO	IDEIAS
<p>S1: pega esse ponto... D, rotaciona ele de volta</p> <p>S4 (surpresa): Nossa! (ela não esperava que o rotacionado do ponto D ficasse onde ficou).</p> <p>S1: Não tem problema não. Talvez porque a gente pegou um B muito longe</p> <p>S4: agora pega um polígono</p> <p>S1: é... isso!!! Regular? Não, polígono! (afirma) a gente já sabe que ele é regular!</p> <p>S4: é, tanto faz.</p> <p>(conversa entre os dois, enquanto ele constrói o triângulo equilátero no <i>software</i>).</p>	<p>Sujeito exclama a surpresa de um movimento imprevisto a partir do <i>software</i>, que executa a construção exata.</p> <p>Compreensão que o método está funcionando com clareza.</p> <p>Diálogo geométrico se põe em franca interatividade.</p> <p>Oralização permite também diálogo consigo próprio.</p>	<p>Interação e colaboração.</p> <p>O movimento está presente na constituição do conhecimento.</p> <p>Diálogo científico posto (ocupação do espaço gráfico)</p> <p>Pensamento lógico-matemático.</p> <p>Utilização de estratégias para a resolução.</p> <p>O <i>software</i> abrindo possibilidades de investigação.</p>

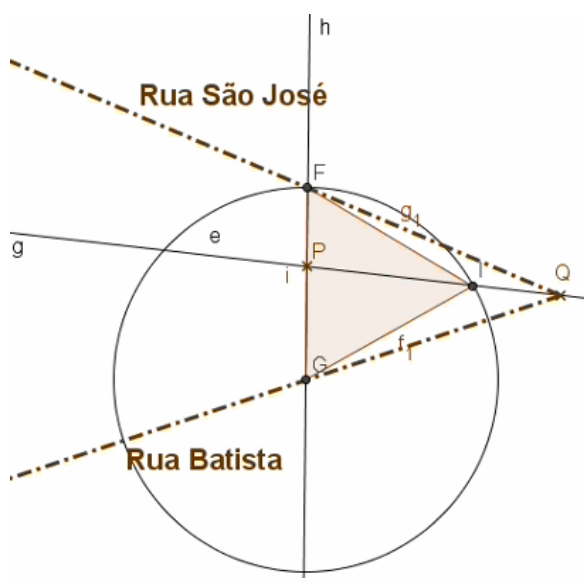


**CENA 5.4**

**Construção do homotético.**

<b>INTERAÇÃO</b>	<b>INTERPRETAÇÃO</b>	<b>IDEIAS</b>
<p>S4: é, de boa. Agora é só achar aqui (mostra com o dedo indicador o ponto P).</p> <p>S1(olha para o lado e diminui o zoom com feição de “vamos esperar”. Com a mão na cabeça. E confiante na articulação que vêm fazendo e na potencialidade do <i>software</i> diz): é e agora como é que faz?</p> <p>S4 (afirma): é agora a gente acha o B', né!?</p> <p>S1(assustado): que B'?</p> <p>S4: esse B' aqui... (para fechar o triângulo, mostra na tela do computador um ponto aleatório pertencente à reta PQ).</p> <p>S1: mas agora a gente já tem o tamanho do segmento, entendeu? Entendeu ou não?</p> <p>(S1 traça uma reta (h) paralela a DD' para formar o triângulo homotético ao construído passando por P).</p> <p>S4 (dúvida): Não!</p>	<p>A dinamicidade do <i>software</i> impulsiona uma interação, mesmo a impaciência com sua ocasional demora para marcar, às vezes, o tempo do conhecimento.</p> <p>Preocupação em colocar o companheiro no mesmo pensamento.</p> <p>Compreensão que o método está funcionando com clareza.</p> <p>O ambiente instaurado permite um diálogo pedagógico interacional entre os sujeitos.</p> <p>A construção do geométrico é fluente.</p> <p>Concordâncias e discordâncias são marcas de um conhecimento dialogado.</p>	<p>Interação com o <i>software</i>.</p> <p>Diálogo interacional.</p> <p>Construção do pensamento junto/ e ao tempo do <i>software</i>.</p> <p>Interação e colaboração.</p> <p>Metodização para compreensão do fazer científico.</p> <p>Pensamento lógico-matemático.</p>

<p>S1(sem titubeio): eu já tenho o tamanho do segmento, agora só venho com isso aqui e traço aqui, como é que chama isso aqui? É compasso!</p> <p>S4(concordando): uhum. É, dá no mesmo(vendo que o que tinha falado fazia sentido)!</p> <p>53' S1: é, essa distância aqui,(Distância FG) centrada em G e aqui é A.</p> <p>S4: Dá pra achar até dois, né?</p> <p>S1: não! Esse aqui, não é não!</p> <p>S4: ah é, por que aqui vai dar diferença.</p> <p>S1: É.</p> <p>- Gostei desse!</p>		<p>Diálogo científico posto.</p>
---	--	----------------------------------



<p>Pesquisadora : Gostou?</p> <p>S1: desse eu gostei! Não que os outros eu não tenha gostado, mas esse eu gostei mais.</p> <p>S4: se for pra pensar bem, e não é tão complicado.</p> <p>S1: não é tão complicado. É legal pq você faz uma rotação e uma homotetia. Esse eu gostei muito desse e o contexto ficou bom também. Esse aqui (o anterior) ficou meio confuso.</p>	<p>A fluidez no desenvolvimento da atividade proporciona um contentamento.</p> <p>A nova experiência faz refletir sobre uma passada.</p>	<p>Afetar-se da atividade.</p>
---	--	--------------------------------

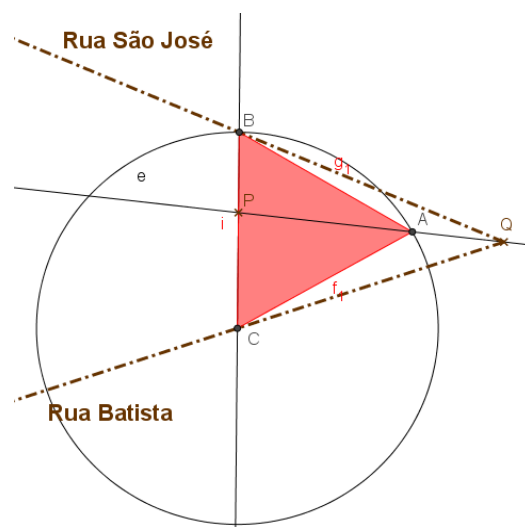
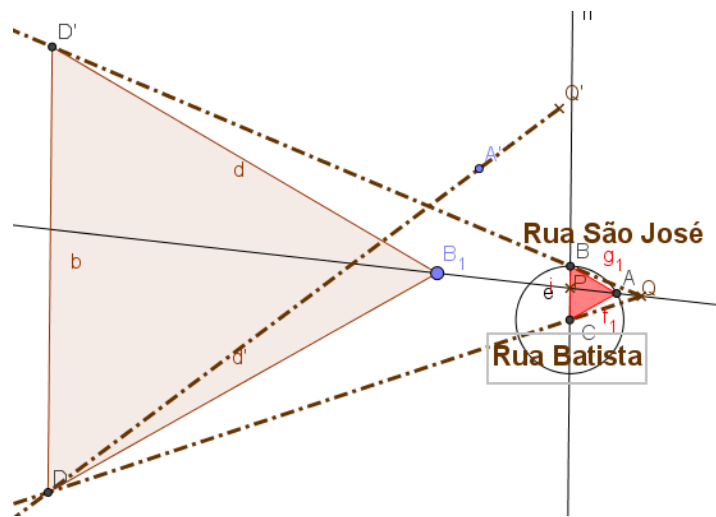
#### 5.5- Momento de reflexão sobre o ocorrido: transcendência do vivido

<p>S1: Assim (Mostrou somente a resposta)...</p> <p>Pesquisadora: hum? Como assim?</p> <p>S1: A gente fez pra cima... (diminuiu o zoom para ver a construção completa). Risos</p> <p>Pesquisadora: Um macro... risos.</p> <p>S1: é porque pra baixo, a gente achou que talvez... ficasse muito pequeno.... mas, tinha o zoom, né, bobagem. Podia ter feito menorzinho, a primeira ideia foi fazer menorzinho. Mas depois a gente falou: - ah vamos fazer o maior mesmo.</p>	<p>O ambiente, pessoas, <i>software</i>, tela e horizonte matemático, permite uma constituição dialogal do conhecimento.</p> <p>Intervenção do pesquisador não é professoral, a aula é de todos.</p>	<p>Diálogo científico posto (ocupação do horizonte da ciência).</p> <p>Reflexão sobre o vivido.</p> <p>Movimento está presente na constituição do conhecimento.</p>
---	--	---

<p>Pesquisadora: Mas o que você fez ai, traçou o quê?</p> <p>S1(com um pouco de dúvida): Primeiro eu fiz....</p> <p>S4(toma a fala): Primeiro a gente traçou a reta PQ pra ver onde o A podia tá?</p> <p>S1: ai a gente arbitrou um ponto B e...</p> <p>S4: E rotacionou 60° ...</p> <p>S1: Rotacionou a rua são José, 60° (...)</p> <p>S4: a gente rotacionou aqui (mostrando com o dedo indicador a tela do computador), ai...</p> <p>S1: é! Agora a gente vai mudar os nomes aqui, só pra ficar na ideia (da atividade) (...)</p> <p>Pesquisador: tem só uma solução? Tem duas, né. Quando você arbitrou o B... Como se fosse uma maior e outra menor, né. Ou não?</p> <p>S1: Não! Por que BC tem que passar em P.</p> <p>S4: BC tem que passar em P.</p> <p>S1: só tem uma!</p>		<p>Habitação no <i>software</i>.</p>
---	--	--------------------------------------

<p>Pesquisador: você num rotacionou a reta?</p> <p>S1: sim!</p> <p>Pesquisador: Porque sempre que a gente rotaciona, podemos rotacionar no sentido horário ou no sentido anti-horário, então... tem duas soluções.</p> <p>S1: Sim! Ah é mesmo!</p> <p>Pesquisador: então, então tem duas soluções.</p> <p>S1: Ah é mesmo! tá...</p> <p>Pesquisador: todo problema de....</p> <p>S1 : Ahhh (rotacionar a reta) Pra traz o A tá aqui... o A podia tá em outro lugar. Não exatamente aqui... (risos).</p> <p>S4: Não?</p> <p>S1: eu acho que não. Com certeza não. Né? (surge uma incerteza) Quer tentar? Vamos tentar?</p> <p>S4: Ah, a gente pode tentar.</p> <p>S1: Puxa, vai dá um trabalho....</p> <p>Pesquisador: Não... não... a minha fala foi só pq... ficou muito pequenininho.</p> <p>S1: Não a gente salva esse aqui e</p>		<p>Argumentação apropriando-se de conhecimento teórico.</p>
---	--	---

<p>abre um novo! Não ficou pequenininho, o outro que ficou muito grande.</p> <p>1h S1: acho que ainda podia pedir pra fazer um galinheiro triangular equilátero de perímetro mínimo. Usando o menor material possível.</p> <p>Pesquisadora: é, legal.</p> <p>S1 e S4 já abrem a atividade 6 que era pra ser feita em casa.</p>		
--	--	--

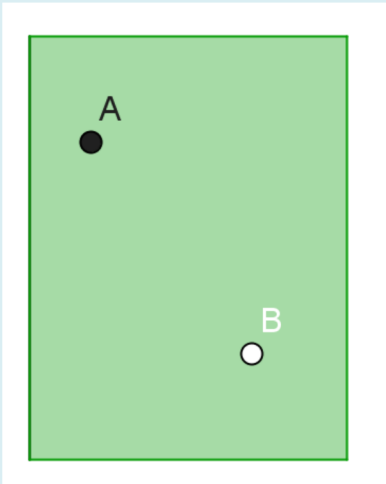


Ampliando-se a resposta

Fonte: os autores

## 6.2.4- Atividade SINUCA

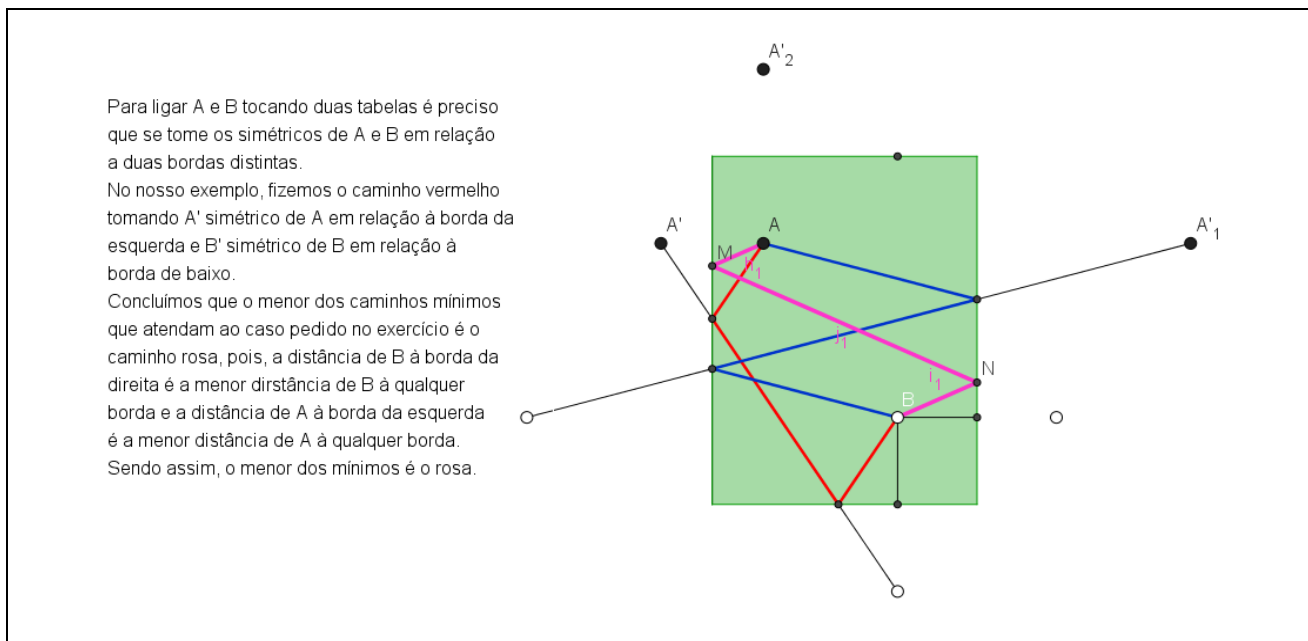
**Tabela 6: Análise Ideográfica da Atividade 7**

ATIVIDADE 7: SINUCA - <i>Dado o applet</i>		
<p>Dada uma sinuca retangular e duas bolas A e B, bater a bola B na bola A depois de tocar duas tabelas.</p> <p>OBS: Tabela na sinuca significa que deverá tocar em dois lados da sinuca antes de bater na outra bola.</p> <div style="text-align: center;">  </div>		
<p><b>CENA 7 .1</b></p> <p><b>Primeira interpretação.</b></p>		
INTERAÇÃO	INTERPRETAÇÃO	IDEIAS
<p>S1 e S3 leem a atividade em silêncio.</p> <p>S3: ... tal que toque em duas tabelas e que a distância seja a menor possível?! (frisando isso).</p> <p>S1: Não! (balança a cabeça com dúvida) Não... Tal que A e B toque em duas tabelas. Primeiro é geralção mesmo. Você tá falando o menor dos</p>	<p>Diálogo na busca de um entendimento comum.</p> <p>Já se sabe o que deve ser feito, mas o diálogo se mostra imprescindível para esse saber se estruturar na atividade.</p> <p>A dupla, por meio do diálogo, percebe que deve tomar os simétricos referentes a bordas distintas.</p>	<p>Diálogo científico posto</p> <p>(Preocupação com fundamentação)</p> <p>Interação e colaboração.</p> <p>Cuidado no “estar junto” com o outro e com o pensamento do outro.</p>



<p>menores... Não. É o geral mesmo que tá pedindo. (silêncio)</p> <p>Pera ai, agora eu fiquei na dúvida. Porque pra você ligar A e B passando por duas tabelas é preciso que você faça o simétrico de A e B . Mas, não é qualquer simétrico. Posso tomar, por exemplo,</p> <p>S3: você tem 4 simétricos.</p> <p>S1(em acordo): Ah... Eu tenho que tomar o simétrico de A e B cada um à uma tabela diferente. Porque olha (aponta para a tela do PC) se eu tomar o simétrico em relação à mesma borda, eu continuo com o mesmo problema.</p> <p>S3: isso! Tem que ser tabelas distintas.</p>		<p>Metodização para compreensão do fazer científico.</p> <p>Apresentação surte efeito. Horizonte geométrico é habitado.</p>
---	--	---

<b>Cena 7.2</b> <b>Finalização</b>		
<p>S1: ah, mas nem me lembra do basquete não, por que ontem fiquei pensando a tarde toda naquela atividade do basquete.</p> <p>[conversa sobre a atividade do basquete]</p> <p>O S1 em silêncio, faz os simétricos no GeoGebra, em relação a cada uma das bordas.</p> <p>S1 se dirigindo a S3: o menor caminho de A até B fazendo duas tabelas, é o caminho rosa, porque é o que A está mais próximo de uma borda e B mais próximo de outra borda.</p> <p>S3(concorda): É!</p>		<p>Reflexão do vivido.</p> <p>O <i>software</i> como facilitador de construções.</p> <p>Preocupação com fundamentação além que o vivido permite.</p>



Fonte: os autores

### 6.3- Considerações Gerais das Atividades Não Analisadas

Fazem-se necessárias essas considerações para que possamos ressaltar alguns pontos positivos e também alguns negativos que vivemos com nossas atividades, mas analisá-las não se faz parte principal por conseguirmos alcançar resultados esclarecedores com as já apresentadas.

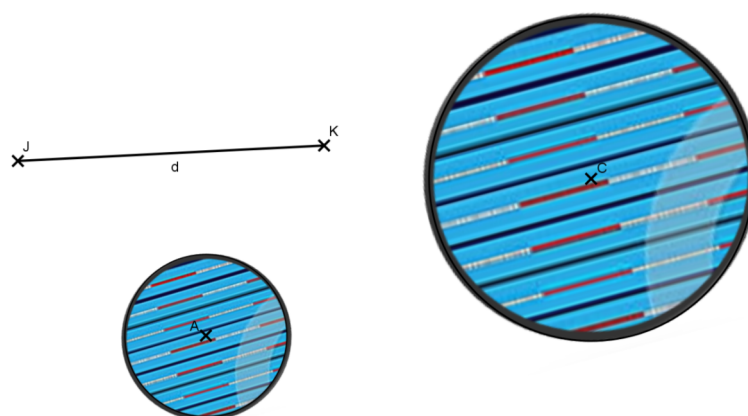
Como já foi dito anteriormente, é um total de onze atividades aplicadas, sendo que cinco foram analisadas e neste momento vamos apresentar as outras seis atividades em linhas gerais com os objetivos da atividade e do caminho percorrido pelos sujeitos para o desenvolvimento das mesmas.

## Quadro 1: Considerações da Atividade 2

### Atividade 2

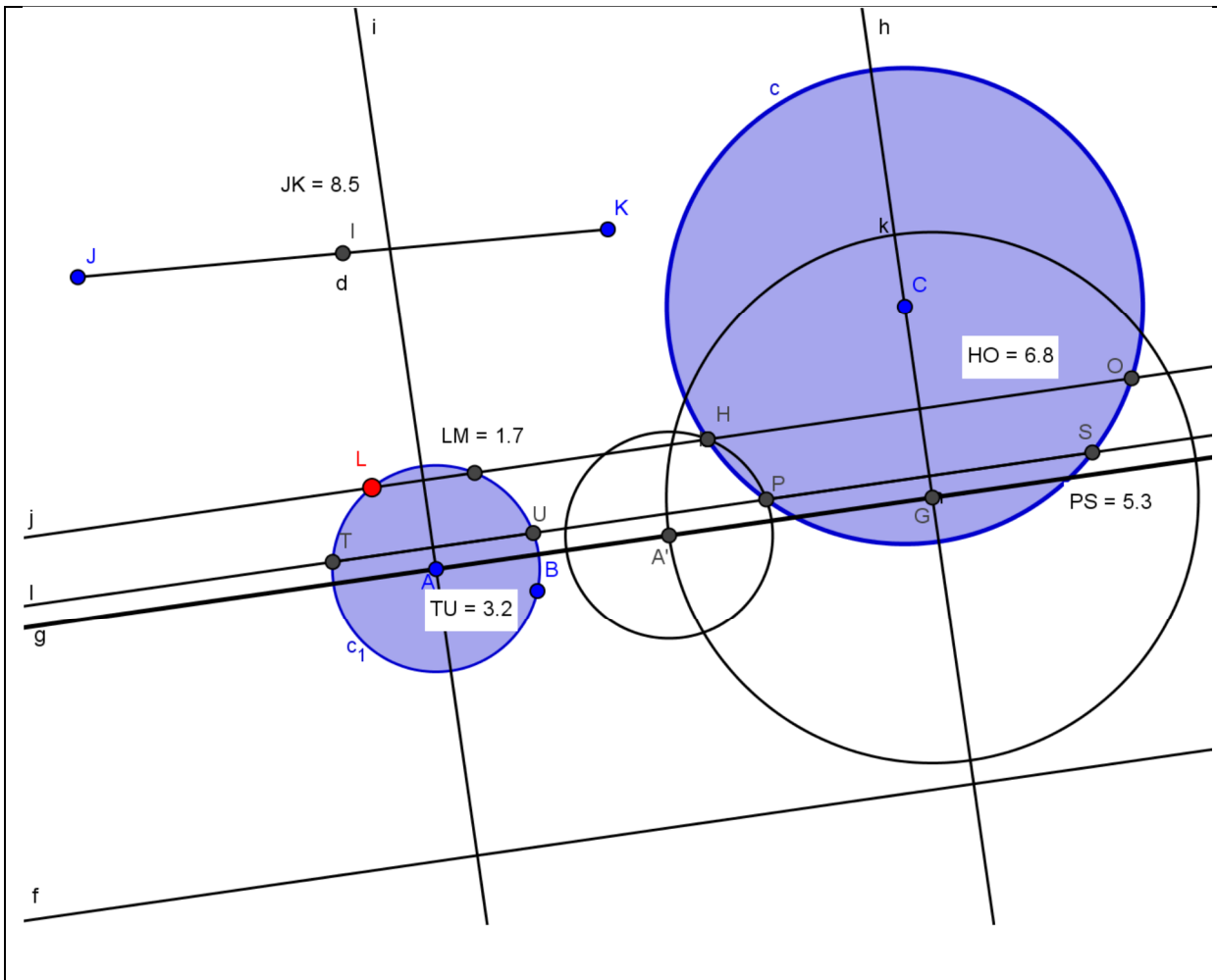
O treinador resolveu criar um treino diferenciado para o seu atleta de Triatlon. No clube escolhido para os treinos, há duas piscinas redondas e o treinador quer que o atleta percorra, numa só reta e na direção das raias das piscinas, um trecho nadado na primeira piscina, um trecho correndo entre as piscinas e um último trecho nadado na segunda piscina, de modo que os dois trechos nadados somem  $d$  metros.

Onde terá que ser a largada para que o atleta nade  $d$  metros?



**Objetivos da Atividade:** Identificar e utilizar a translação.

**Estratégias utilizadas pelos sujeitos:** Traça uma reta  $g$  na direção das raias passando pelo centro  $A$ . Trace perpendiculares à essa reta  $g$  passando pelos centros  $A$  e  $C$ . A partir da intersecção dessa perpendicular com  $g$ , temos ponto  $G$ . Traçamos o círculo com centro em  $G$  e raio  $d/2$  encontrando o ponto  $A'$  como intersecção dele com a reta  $g$ . Traçamos o círculo com centro em  $A'$  e raio  $AB$  encontrando os pontos  $H$  e  $P$  como intersecção desse círculo com o círculo  $c$ . Traçamos uma reta paralela a  $g$  passando por  $H$  obtendo como intersecção com  $c_1$  os pontos  $L$  e  $M$  e com o círculo  $c$  os pontos  $H$  e  $O$ . Obtemos o ponto  $L$  como um ponto de largada e  $LM + HO = JK = d$ . E traçando uma paralela a  $g$  passando por  $P$  obtendo como intersecção com  $c_1$  os pontos  $T$  e  $U$  e com o círculo  $c$  os pontos  $P$  e  $S$ . Obtemos, nesse caso, o ponto  $T$  como um ponto de largada e  $TU + PS = JK = d$ .



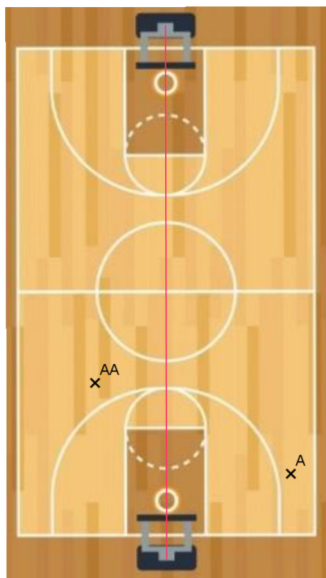
**Comentários:** Neste dia estavam presentes duas duplas, mas somente uma dupla fez essa atividade. Houve muita dificuldade para a conclusão, o que proporcionou muita discussão de estratégias e validação matemática. A imagem foi disponibilizada no *software*, mas a dupla preferiu fazer a construção dos círculos novamente.

Fonte: os autores

## Quadro 2: Considerações da Atividade 3

### Atividade 3

Um técnico de basquete, desenhando em sua prancheta, quer combinar uma jogada com seu armador, que deverá estar no início da jogada sobre o eixo da quadra (linha rosa), e, em relação a esse eixo, ver o ala-armador (AA) e o Ala (A) sob mesmo ângulo. Onde ele deve desenhar o armador dele?



**Objetivos da Atividade:** Identificar e utilizar a transformação simetria.

**Estratégias utilizadas pelos sujeitos:** S1 entregou um arquivo onde a solução não estava correta, e foi orientado fazer novamente. No segundo arquivo, fez a solução que consideramos tradicional. *Fazendo a simetria de um dos pontos em relação ao eixo, ligando o transformado de AA com A. A intercessão dessa reta com o eixo é a solução.*

S5 utilizou o empírico que o *software* proporciona e moveu um ponto, criado por ele, pertencente à linha rosa até conseguir ângulos iguais. Mesmo as casas dos milésimos não dando igual, ele considerou válida a solução e a entregou. Mesmo orientado, ele não entregou outro arquivo.

S2 também utilizou a solução que consideramos tradicional.

S3 fez uma construção que não se obtém ângulos iguais. Ela não utilizou a ferramenta do *software* de medida de ângulos para confirmar sua construção. Ela acreditava estar precisa sua construção, mas quando medimos os ângulos juntas verificou-se como falsa.

S6 também utilizou a solução que consideramos tradicional.

S4 fez uma construção que nós, pesquisadores, não tínhamos pensado anteriormente. Ela utilizou o teorema das bissetrizes, o círculo de Apolônio e rotação da razão harmônica que ela mesma encontrou. Essa construção é uma construção correta e robusta (pode-se mover o ponto A que a solução continua sendo válida).

**Comentários:** Essa atividade foi feita individualmente em casa e proporcionou uma construção inusitada. O sujeito utilizou conceitos estudados anteriormente na disciplina e encontrou uma solução correta e euclidiana.

Fonte: os autores

### Quadro 3: Considerações da Atividade 6

#### Atividade 6

O governador prometeu aos prefeitos da cidade Arantina e da cidade Bom Jardim de Minas fazer uma ponte (a mais curta possível) sobre o Rio Grande, que passa reto na região entre as duas cidades. Mas ele exigiu que o projeto considerasse que uma futura ligação rodoviária entre elas, que passaria por essa ponte, fosse de menor comprimento possível. Veja o mapa da situação e

desenhe a ponte.

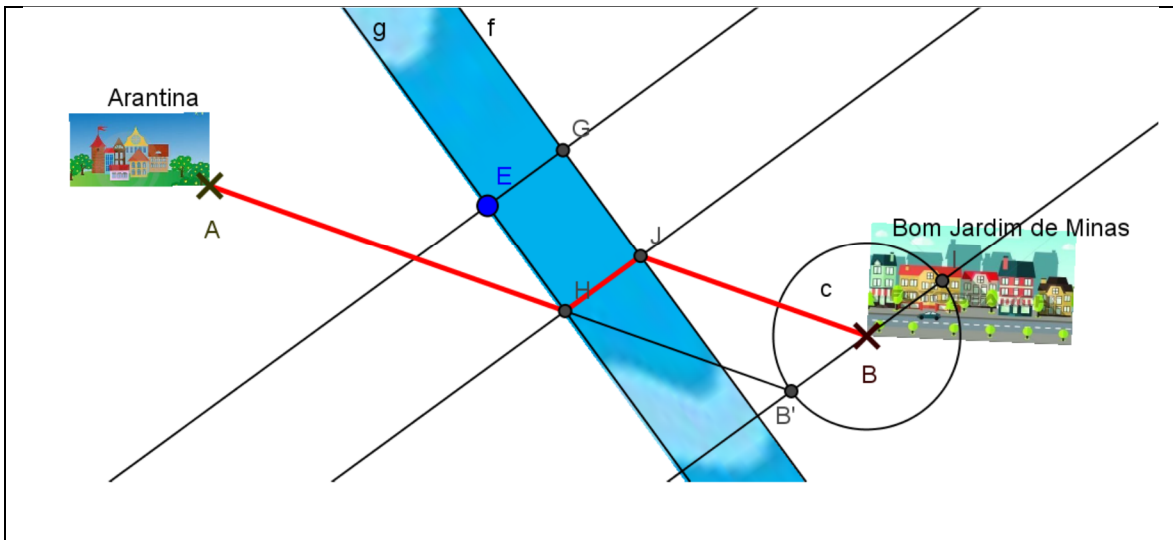


**Objetivos da Atividade:** Identificar e utilizar translação em problemas de otimização.

**Estratégias utilizadas pelos sujeitos:** As três duplas presentes utilizaram a mesma estratégia de solução. *Mediram o rio traçando uma reta perpendicular às margens e transladaram o ponto B na direção e tamanho da largura do rio. Traçaram uma reta AB' encontrando o ponto "J" na margem do rio, onde criaram uma reta perpendicular passando por esse ponto, que é a ponte (JH), e, em seguida criando um seguimento HB.  $AJ+JH+HB$  é o caminho pedido.*

Uma dupla não completou o raciocínio de marcar a ponte como sendo perpendicular às margens do rio. Fez AB' como sendo a resposta, o que está incorreto. Talvez pela ansiedade de ir embora.





**Comentários:** Mesmo sendo uma atividade pensada para ser feita em casa, essa atividade foi feita no ambiente de pesquisa, pois a maioria dos sujeitos finalizaram as outras duas e aproveitaram o tempo e já fizeram a atividade de casa.

Imagem disponibilizada no *software*.

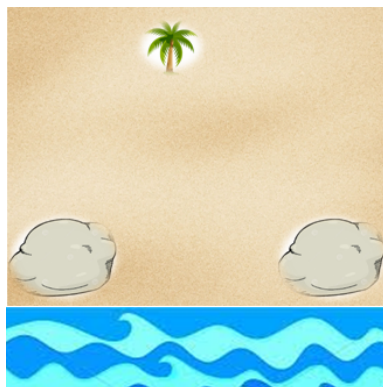
Fonte: os autores

#### Quadro 4: Considerações da Atividade 8

### Atividade 8

Há muitos anos, o pirata Barba-Ruiva resolveu enterrar o seu tesouro. Escolheu uma ilha onde a única praia tinha duas grandes rochas junto à água, a 100 metros uma da outra, e uma enorme palmeira entre as duas rochas, mas a 80 metros da linha da água. Mandou um dos piratas do seu bando para cada uma das rochas e deu-lhes as seguintes instruções: olhar em direção à palmeira, rodar 90° e andar uma distância igual à que a respectiva rocha estava da palmeira. Nenhum dos piratas se molhou. Os dois piratas ficaram parados e o pirata Barba-Ruiva enterrou o tesouro exatamente a meio caminho entre eles.

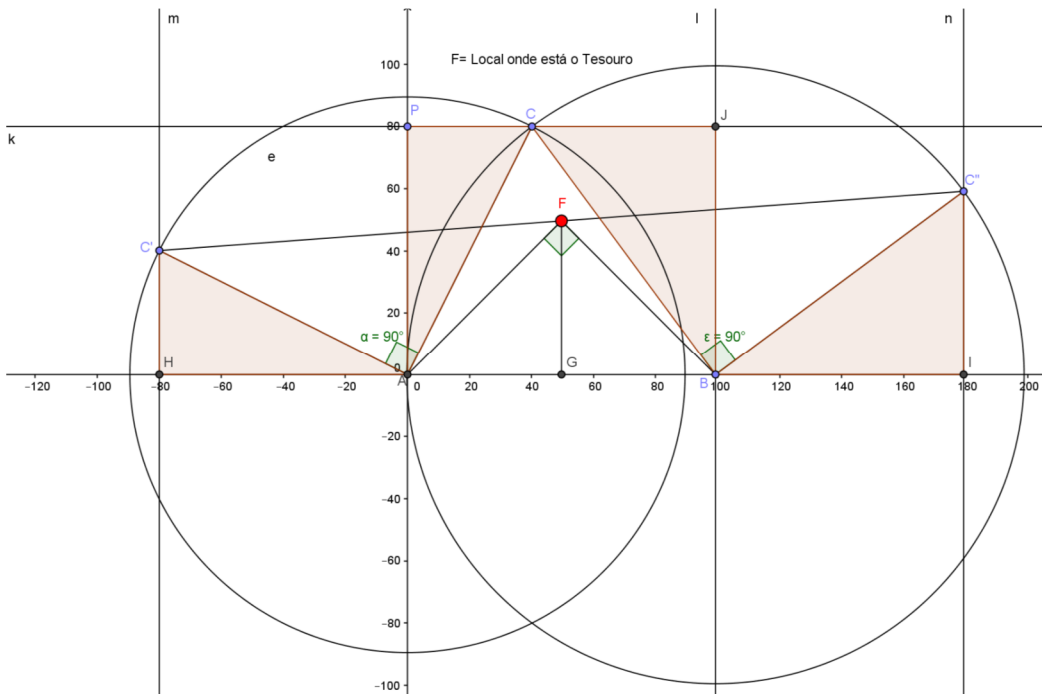
Por acaso, encontramos o documento onde isto estava escrito e decidimos ir até à ilha à procura do tesouro. Lá encontramos as rochas junto à água, mas infelizmente a palmeira tinha desaparecido, provavelmente derrubada por um furacão. Como a praia agora é um destino turístico conhecido, não podemos andar a escavar por todo o lado. A única hipótese é aproveitar uma noite antes de amanhecer e fazer apenas um buraco. Onde devemos escavar para termos hipóteses de descobrir o tesouro?



**Objetivos da Atividade:** Interpretar e utilizar rotação.

**Estratégias utilizadas pelos sujeitos:** Nessa atividade foi utilizada a mesma estratégia pelos dois trios. A maior dificuldade é perceber que essa construção independe do lugar onde está a palmeira, desde que ela esteja entre as duas

pedras. Basta supor um lugar para a palmeira, fazer a rotação em torno das pedras  $90^\circ$  uma rotação no sentido horário e a outra no sentido anti-horário, traçar o segmento que liga os dois pontos rotacionados e marcar o ponto médio. Esse ponto médio é o lugar onde se encontra o tesouro.



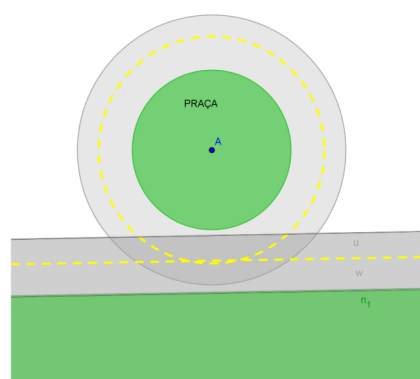
**Comentários:** Atividade feita no ambiente de pesquisa e imagem disponibilizada no *software*. Essa atividade foi retirada do livro do Malba Tahan e é a única atividade que não é de nossa autoria. Ela foi muito produtiva e todos ficaram empenhados, inicialmente na construção e em seguida na justificativa que pedimos aos sujeitos que comprovassem, que fizessem uma demonstração para garantir tal construção. Fizemos uma plenária, onde foi apresentada a demonstração geométrica e a demonstração algébrica.

Fonte: os autores

## Quadro 5: Considerações da Atividade 9

### Atividade 9

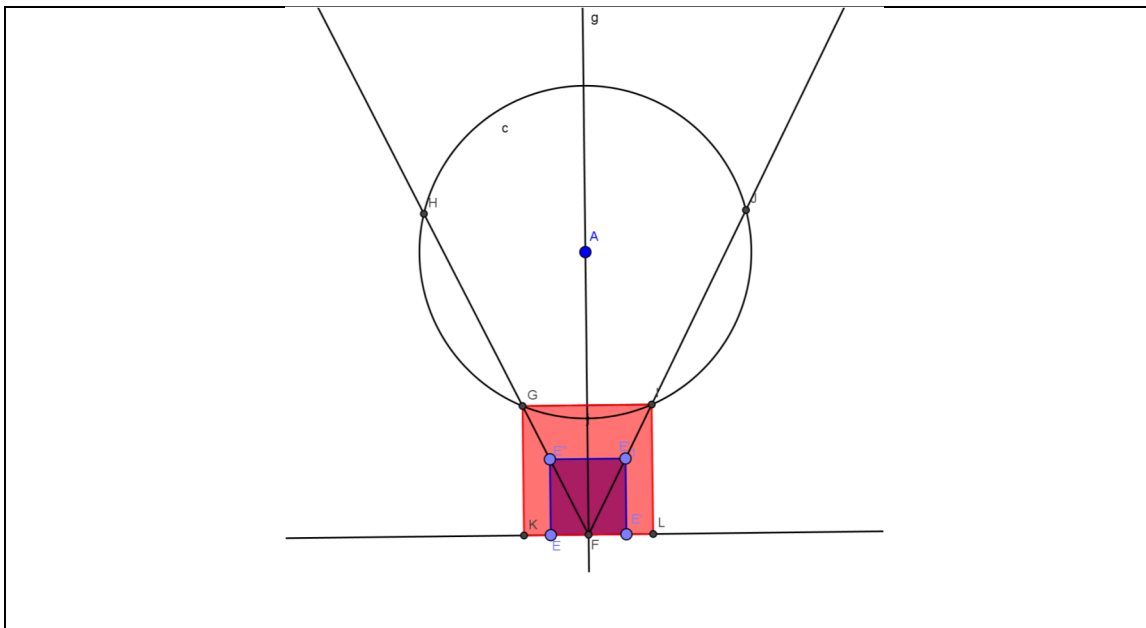
Deseja-se construir um palco quadrangular para as festividades de aniversário da cidade. Para não precisar furar o asfalto, decidiram que dois mourões de sustentação ficassem na grama da praça e os outros dois ficassem na linha do limite da grama com a rua retilínea, conforme a figura abaixo. Desenhe o menor palco possível.



**Objetivos da Atividade:** Identificar e utilizar homotetia.

**Estratégias utilizadas pelos sujeitos:** Nessa atividade houve um pouco de dificuldade por parte de alguns sujeitos em identificar qual a construção do quadrado iria satisfazer as condições pedidas quando construísse o homotético.

Traça-se uma perpendicular a rua retilínea passando por A, obtendo F como intercessão. Constrói-se um quadrado que tenha esse ponto F como ponto médio de um dos lados. Basta usar F como ponto de homotetia, traçando as retas que passam pelos vértices desse quadrado. A intercessão dessa reta com a círculo (a praça) seriam possíveis respostas, mas é pedido na atividade o menor palco possível, restringindo, assim, para uma única resposta que é o quadrado vermelho.



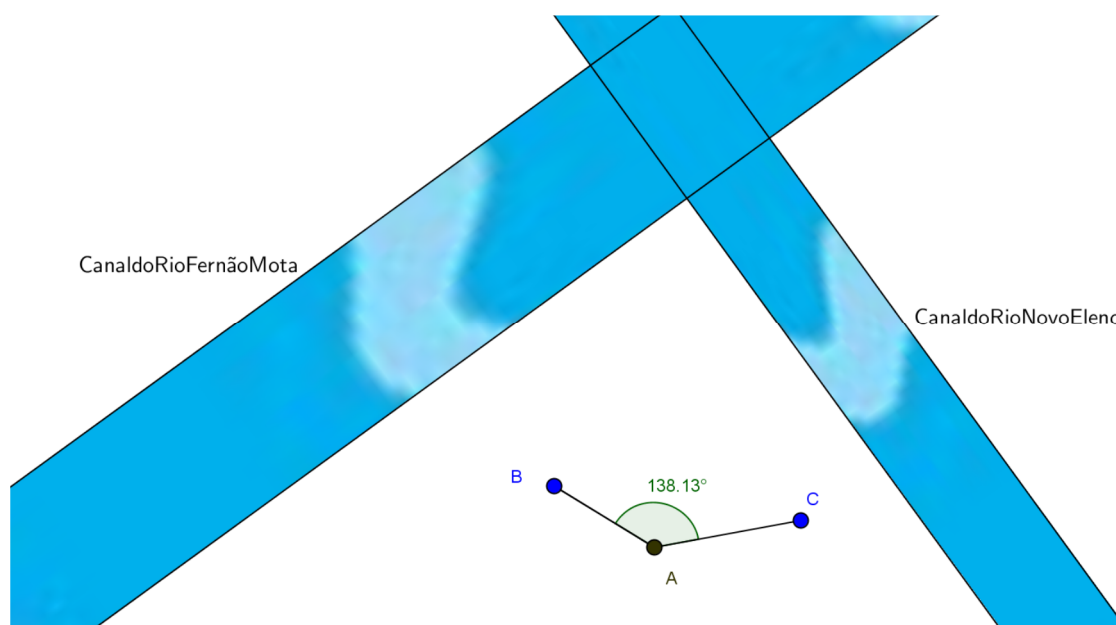
**Comentários:** Atividade feita no ambiente de pesquisa e imagem disponibilizada no *software*. Inicialmente, foi pedido que construísse o palco. Mas com a construção dos sujeitos no ambiente de pesquisa tivemos algumas colocações que faziam com que a atividade tivesse várias soluções. Sendo que a resposta é essa construção com o quadrado vermelho pequeno.

Fonte: os autores

## Quadro 6: Considerações da Atividade 10

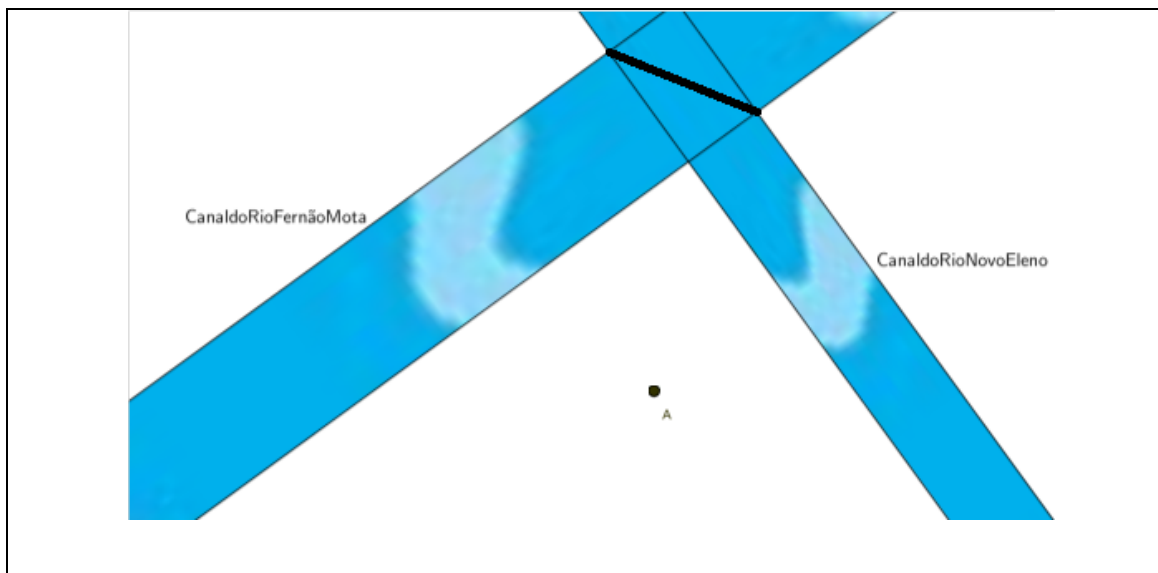
### Atividade 10

A prefeitura projeta a construção de uma passarela que permita o tráfego de pessoas sobre os canais dos rios Fernão Mota e Novo Eleno. Uma parte desta passarela terá suas extremidades apoiadas em dois pilares, um deles, o pilar B, a ser posicionado sobre a borda do canal do Rio Fernão Mota e, o outro, o pilar A, já posicionado entre os dois canais. A outra parte da passarela será construída a partir do pilar A, terminando sobre o pilar C, a ser posicionado na borda do canal do Rio Novo Eleno. Determine as posições dos pilares B e C, de forma que as duas partes da passarela tenham o mesmo tamanho e estejam sobre uma mesma reta.



**Objetivos da Atividade:** Identificar a diagonal do retângulo como comum, e utilizar translação.

**Estratégias utilizadas pelos sujeitos:** Depois de todas as duplas fazerem testes empíricos e concluir que a resposta exata não seria possível, todos fizeram o mesmo procedimento de construção. Identificando a diagonal do retângulo como sendo comum e traçando uma paralela passando por A.



**Comentários:** Atividade feita no ambiente de pesquisa e imagem disponibilizada no *software*. Os segmentos BA e AC estão com a marcação do ângulo formado por eles para facilitar na condição de que BAC devem estar alinhados, objetivando alcançar amplitude de 180°.

Fonte: os autores

## Quadro 7: Considerações da Atividade 11

### Atividade 11

Um parque em forma quadrangular é formado por avenidas. Uma delas contém o mercado M e a outra a lanchonete L. O armazém A e o mercado se encontram na esquina do bar B, outras duas avenidas A e L se encontram na esquina da doceria D e as avenidas L e M se encontram na esquina da Câmara Municipal C.

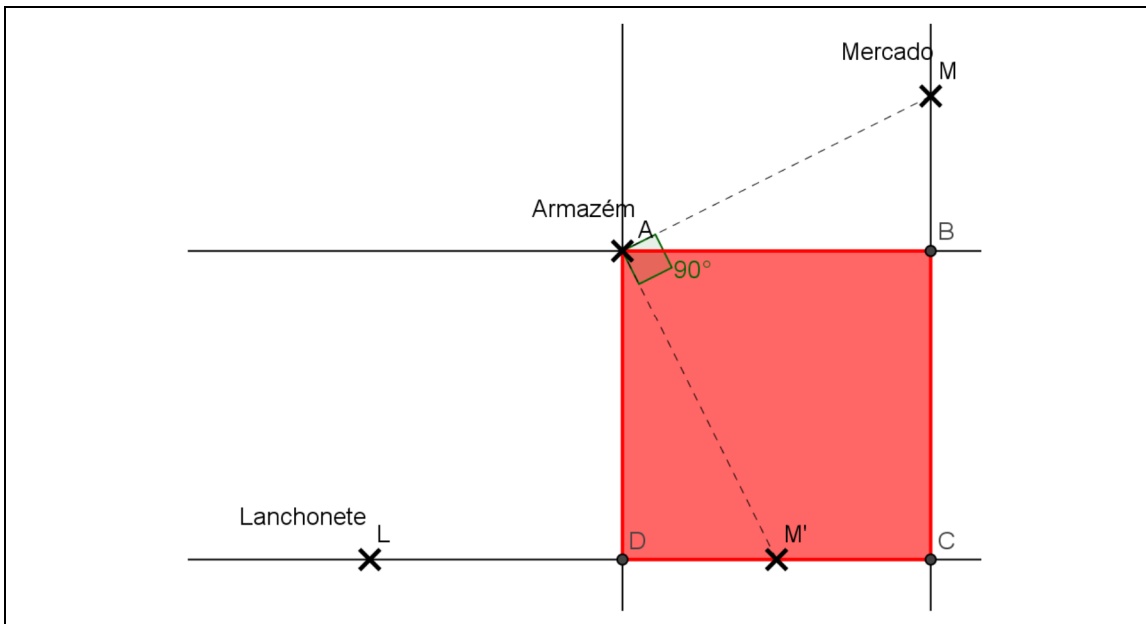
Um desenhista decalcou do mapa da situação apenas os três estabelecimentos, como abaixo. Como desenhar o parque recuperando os traçados urbanísticos?



**Objetivos da Atividade:** Identificar e utilizar rotação.

**Estratégias utilizadas pelos sujeitos:** Todas as duplas utilizaram a mesma estratégia de desenvolvimento. Identificaram que a reta que passa por M e B é perpendicular à reta que passa por L e C. Utilizaram a máxima metodológica de “quando não se conhece o objeto que tem-se que transformar, transforma um ponto pertencente a esse objeto”, dessa forma, rotaciona-se M em torno de A,  $90^\circ$  no sentido horário, obtendo-se  $M'$ , e traça a reta  $LM'$ . E, então, por construção fundamental, constrói-se o quadrado ABCD.





**Comentários:** Atividade feita no ambiente de pesquisa e imagem disponibilizada no *software*. Os sujeitos já haviam certo conhecimento sobre o método utilizado nessa atividade, pois já tinham feito uma atividade parecida anteriormente. Não havendo assim, dificuldades para seu desenvolvimento.

Fonte: os autores

## **CAPÍTULO 7 – CONVERGÊNCIA DAS IDEIAS: A ANÁLISE NOMOTÉTICA**

As ideias que a terceira coluna de nossa análise anterior contém são elementos para nós desvelarmos e estruturarmos o investigado. Com elas, partimos para um movimento de fazê-las **convergir** para **núcleos de significação**, quando, sempre pela nossa tarefa interpretativa atenta à nossa interrogação, estaremos estabelecendo unidades mais abrangentes de ideias, que abrigarão a compreensão da estrutura do fenômeno.

### **7.1- Núcleos de significação de ideias**

A partir das ideias que os sujeitos nos doaram e que caracterizamos norteadoras para todo o movimento de constituição dos núcleos de significação, buscamos as confluências das Ideias Nucleares, e, estas por sua vez, se agruparam formando as Ideias Nucleares Abrangentes, movimento que se vê organizado na tabela seguinte.

Essas Ideias Nucleares mais Abrangentes sempre alimentadas remissivamente pelas Ideias Nucleares, pelas Ideias, e, enfim, pelas manifestações dos sujeitos fazem parte do movimento de interpretação dos dados que nos levam a compreender o fenômeno pesquisado. Ressaltamos que as Ideias Nucleares Mais Abrangentes não foram instituídas antes das transcrições e análises. Elas se constituíram no movimento de análise e busca por convergências. São elas:

- **Valores Pedagógicos Vividos na Pesquisa**
- **Modos Didáticos Emergentes da Experiência Viva na Pesquisa**
- **Modos de Realizar, Compreender e Conceber a Ciência na Experiência Viva**
- **Modos de viver o *Software***
- **GT como Abertura de Horizontes**
- **O afetar-se na Experiência Viva**

O movimento pela busca das Ideias Nucleares Abrangentes está apresentado nas seguintes tabelas:

Tabela 7: Convergência do Pedagógico

Ideias	Ideias Nucleares	Ideias Nucleares Abrangentes		
Interação e colaboração	<b>Diálogo como valor pedagógico</b>	<b>Valores Pedagógicos Vividos na Pesquisa</b>		
Argumentação apropriando-se de conhecimento teórico e movimento.				
O estar em dupla proporcionou uma ajuda na decisão de onde partir.				
Utilização de estratégias facilitadoras para a resolução.	<b>Conhecimento como encontro e horizonte</b>			
Movimento ajuda na constituição do conhecimento				
Pensamento lógico-matemático.	<b>Constituição científica como tarefa escolar</b>			
Utilização do <i>software</i> para formular e testar conjecturas				
Metodização para compreensão do fazer científico				

Fonte: os autores

Tabela 8: Convergência do Didático

Ideias	Ideias Nucleares	Ideias Nucleares Abrangentes
O uso de diagrama como espacialização.	<b>Estratégias</b>	<b>Modos Didáticos Emergentes da Experiência Vivida na Pesquisa</b>
Metodização para compreensão do fazer científico.		
Utilização de estratégias para a resolução.		
Tentativa de uma resolução empírica.		
Busca esclarecimento de dúvidas.		
Utilização de estratégias para a resolução junto ao <i>software</i> .	<b>Conhecimento por meio dos sentidos</b>	
O movimento está presente na constituição do conhecimento.		
Cuidado no “estar junto” com o outro e com o pensamento do outro.		
O <i>software</i> possibilita uma abertura para a solução (Dinamicidade Didática)		

Fonte: os autores

Tabela 9: Convergência do Epistemológico

Ideias	Ideias Nucleares	Ideias Nucleares Abrangentes
Habitação no <i>software</i> .	<p style="text-align: center;"><b>A ciência compreendida</b></p>	<p><b>Modos de Realizar, Compreender e Conceber a Ciência na Experiência Viva</b></p>
Diálogo científico posto (ocupação do horizonte da ciência)		
Diálogo científico posto; (um Pensamento matemático se põe).		
Apresentação surte efeito (horizonte geométrico é habitado)		
O uso de diagrama como espacialização.		
Metodização para compreensão do fazer científico.	<p style="text-align: center;"><b>Conhecimento encarnado</b></p>	
Movimento ajuda na constituição do conhecimento.		
Uso do <i>software</i> para comprovar conhecimentos prévios.		
Preocupação com fundamentação além do que o vivido permite (intuição para demonstração)	<p style="text-align: center;"><b>Estruturação Científica</b></p>	
Pensamento Lógico Matemático		
O movimento é usado como uma prova matemática.		

Fonte: os autores

Tabela 10: Convergência do *Software*

Ideias	Ideias Nucleares	Ideias Nucleares Abrangentes	
Constituição do pensamento junto ao <i>software</i> .	<p style="text-align: center;"><b>Interação com o <i>software</i>.</b></p>	<p><b>Modos de viver o <i>Software</i></b></p>	
O <i>software</i> possibilita uma abertura para a solução. Dinamicidade didática.			
O <i>software</i> possibilita uma reformulação de um conhecimento já posto.			
O <i>software</i> abre possibilidades de investigação.			
Uso do <i>software</i> para comprovar conhecimentos prévios.	<p style="text-align: center;"><b>Utilização de estratégias junto ao <i>software</i>.</b></p>		
O <i>software</i> como facilitador de construções.			
Utilização de estratégias para a resolução junto ao <i>software</i> .			
Utilização do <i>software</i> para formular e testar conjecturas			
Utilização das ferramentas do <i>software</i> .	<p style="text-align: center;"><b>Utilização do <i>Software</i>.</b></p>		
Dúvida no uso das ferramentas do <i>software</i> .			

Fonte: os autores

Tabela 11: Convergência da Geometria das Transformações

Ideias	Ideias Nucleares	Ideias Nucleares Abrangentes
Movimento ajuda na constituição do conhecimento	<b>Cinestesia</b>	<b>GT como Abertura de Horizontes</b>
Modos de movimento como abertura de horizontes.		
O movimento é usado como uma prova matemática.		
Apresentação surte efeito (horizonte geométrico é habitado)	<b>A GT no mundo da Geometria</b>	
Transito entre as Geometrias		
Constituição do pensamento junto ao <i>software</i> .		
Diálogo científico posto	<b>GT falada</b>	
Argumentação apropriando-se de conhecimento teórico.		

Fonte: os autores

Tabela 12: Convergência do Afetar-se

Ideias	Ideias Nucleares	Ideias Nucleares Abrangentes	
Reflexão sobre o vivido	<p><b>Vivência do outro com os meios</b></p>	<p><b>O afetar-se na Experiência Viva</b></p>	
Cuidado no “estar junto” com o outro e com o pensamento do outro.			
Afetividade no “estar junto”			
O afetar-se da atividade			
O afetar-se do outro			
O afetar-se do <i>software</i>			
Diálogo interacional	<p><b>Ciência expressa como modo de vivência</b></p>		
Interação e colaboração			
Diálogo científico posto (ocupação do horizonte da ciência)			
O movimento está presente na constituição do conhecimento.	<p><b>A Espacialidade Compartilhada</b></p>		
Modos de movimento como abertura de horizontes.			

Fonte: os autores



## 7.2 – Valores Pedagógicos Vividos na Pesquisa

O núcleo de significação dos Valores Pedagógicos vividos na pesquisa abrange os sujeitos em todas as suas dimensões nas quais estruturam e evoluem o todo que constituem nas atividades. A técnica não é mais conteudista, mas voltada para a investigação, quando possibilita manifestações do modo de ver e estar no mundo por meio do diálogo. A partir desse ponto de vista entendemos os valores que atribuem ao conhecimento e à sua elaboração em ato, como observado nas cenas da pesquisa.

Na cena 1.2 do grupo 1, a argumentação de um dos sujeitos, com a ajuda de um desenho que vai rabiscando, amplia a compreensão geométrica junto ao companheiro, vendo como o outro compreende a homotetia e o processo metodológico de resolução. Por meio da interação e colaboração contínua dos sujeitos há uma abertura do diálogo colaborativo e, em comum acordo, desenham o círculo circunscrito ao triângulo dado em detrimento da construção do triângulo no círculo dado.

Já na cena 1.2 do grupo 2, o sujeito, em busca de ideias, vê o companheiro como uma saída para o desenvolvimento das ações, e o estar em dupla proporciona uma ajuda na decisão de onde partir. Entendemos, assim, a importância do trabalho em dupla que traz o *diálogo como valor pedagógico*.

A procura para conhecer, compreender e encontrar soluções para a situação proposta na atividade 5, são as aberturas que os sujeitos mostram na cena 5.1, na interação entre eles e na busca do novo conhecimento, promovendo reflexões e discussões que corroboram com um aprendizado colaborativo. Entendemos que eles se dirigem à constituição do ser pedagógico, numa postura assumida como processo de constituição de conhecimento.

Por meio da interação entre os sujeitos e da interação dos sujeitos com o *software*, o conhecimento vai se realizando e trazendo sentidos e compreensão comum de que um método está funcionando. O diálogo geométrico vai se pondo em franca interatividade na construção do triângulo equilátero sem a utilização da ferramenta 'polígono regular' na cena 5.3. Podemos reiterar que temos o

*conhecimento como encontro e horizonte* se dando em várias situações e momentos expressos nas análises.

Quando S2 diz na cena 1.2 do grupo 1:

*“(...) a gente imaginar, o [triângulo] que está aqui dentro [do círculo dado] tem que ser pequeno, né, mas ao mesmo tempo, com os lados paralelos, então a medida que a gente for diminuindo, (movimenta a mão como se o triângulo estivesse diminuindo) só tem um único que cabe aqui dentro. Então acho que essa é a garantia, né!?”;*

Ele manifesta que a constituição do conhecimento foi sendo gerada a partir do movimento gestual das mãos se encaixando no desenho feito na tela do computador. Assim como o movimento no *software* é utilizado na cena 1.7 do grupo 1, também é fonte de conhecimento quando movimenta-se a janela de álgebra para a visualização de um ponto inacessível. Notamos o movimento como sendo importante componente na constituição do espaço do pensar gráfico e imaginativo e no encontro que realiza conhecimento.

Na cena 4.4, após a construção do objeto pedido na atividade, a dupla utiliza a ferramenta “comprimento” para medir os lados do triângulo equilátero construído para confirmar. Mas há uma malha quadriculada que dificulta a visualização dos números, causando certo desconforto em relação à construção exata. A dupla decide, então, movimentar a malha e observa que o número que representa a medida está sim correto. Mostrando, para nós pesquisadores, que o agir junto aos recursos ajuda na constituição do conhecimento e na comprovação dele.

*A constituição científica como tarefa escolar* é vista em algumas situações onde o pensamento logicomatemático se põe em compreensão com o ambiente e com o companheiro. Na cena 5.3, S4 sugere que S1 “pegue” a ferramenta- polígono regular, mas concluem juntos, na inserção de conhecimento geométrico sobre construção já feita, pela não necessidade disso.

Na cena 1.2, onde se observa que não será possível determinar a razão da homotetia, pois ela está implícita, o grupo 1 tenta metodizar a resolução por meio do

diálogo e de testes empíricos, estruturando o fazer mediante ações para colocar em prática estratégias que consideram promissoras. Buscam atualizar conhecimentos prévios sobre o tema para criar uma estratégia de resolução e o ato de metodizar diz de um sentido pedagógico que eles mesmos atribuem.

Na cena 1.1 e 1.2 o grupo 2 utilizou o *software* para formular e testar conjecturas. Na primeira cena, S3 conjecturou que um dos vértices do triângulo inscrito estaria no centro do círculo dado. S5 fez a construção no *software* e comprovou que, de acordo com essa construção, o triângulo não seria inscrito, o que era uma condição necessária para a sua construção. Já na cena seguinte, S3 propõe que se trace retas tangentes ao círculo passando pelos vértices do triângulo dado. S5 fez a construção sugerida no *software* e novamente concluiu que não seria uma possível solução. A construção exata feita no *software* fez com que deixassem de considerar a conjectura levantada, proporcionando que o conhecimento fosse sendo constituído com investigações. Entendemos que o ato de conjecturar livre e comprometidamente expõe um modo de conceber-se pedagogicamente.

Já na cena 4.2 a dupla faz testes empíricos tentando encontrar o local onde daria as medidas exatas do lado do triângulo equilátero. E, depois de muitos movimentos com os vértices do triângulo, aproximando-se da resposta em alguns momentos, a dupla fica desapontada por não conseguir as medidas exatas e parte para outra estratégia de solução, mas já sendo conhecido o lugar aproximado onde deveriam estar os vértices do triângulo, auxiliando na constituição do conhecimento e das estratégias utilizadas a seguir. Notamos que a interação direcionada para uma resolução propiciou um conhecimento científico como base pedagógica dialogada com o conhecimento geométrico que têm.

A dupla tenta compreender o fazer científico na cena 7.1, e, ao interagir numa primeira interpretação, já vai traçando estratégias de resolução, definindo os elementos simétricos que devem ser feitos. Essa metodização contribuiu para a compreensão do enunciado e já para a definição dos passos de resolução, um auxiliando o outro da dupla, a observar condições postas na atividade. Metodizar, junto com o tempo que se disponibiliza para isso, é uma prática que assinala uma opção pedagógica.

### 7.3 – Modos Didáticos Emergentes da Experiência Vivida na Pesquisa

O núcleo de significação dos modos didáticos emergentes da experiência vivida na pesquisa mostra como cada sujeito manifesta-se em ação de participação ao construir conhecimento. O modo como pessoas se portam no ambiente e como as experiências de um sujeito se ligam às experiências do outro nos mesmos objetos.

Na cena 1.1 o grupo 1 identifica que se deve utilizar homotetia para resolver a atividade e traça possíveis *estratégias* para utilizá-la, encontrando obstáculos que são discutidos e analisadas suas possibilidades de resolução. S2 diz: “(...) A gente pode trazer ele pra cá, que aí a gente consegue achar o centro de homotetia aqui (apontando o centro do círculo)” e S1 responde: “Então, esse é o problema”. Entendemos que a emergência de estratégias em grupo é uma manifestação de como o arranjo didático está funcionando, ao mesmo tempo em que ele propriamente se faz.

O uso de diagrama garante aos sujeitos um esteio de argumentações e uma espacialização na cena 1.2 do grupo 1, quando eles discutem onde seria o centro de homotetia, e, compreendem o fazer científico metodizando e fazendo a movimentação das mãos indicando a diminuição do triângulo homotético, onde já antecipam todo o procedimento de se trabalhar com a homotetia e após interação, a dupla mostra uma clareza na compreensão de que o método está funcionando quando consideram estar no caminho certo. A disponibilização de tempo para um grupo viver a espacialidade que diagramas trazem é um elemento imprescindível, compreendemos, para que uma investigação se dê.

Na cena 4.1, S4, numa interpretação inicial, sugere o uso de uma ferramenta específica do *software*, o controle deslizante, como uma estratégia facilitadora para a solução, mas após interação com o *software*, ele, juntamente com sua dupla, desconsidera a trajetória metodológica sugerida; logo após, a dupla faz testes empíricos em busca da solução alternativa. Concluímos que os sujeitos não são meros usuários, mas, habitam as potencialidades tecnológicas, recriando-as.

Ao ler o enunciado da atividade na cena 5.1, o sujeito S1 identifica o que a atividade propõe e já traça a trajetória metodológica de resolução pensando em rascunho o que deve ser feito. Mas, ao colocar em prática, a dupla usa da dinamicidade didática do *software* ao escolher a ferramenta de construção de um triângulo equilátero, e verifica que essa ferramenta não irá satisfazer as condições necessárias da construção. Logo partem para a metodização em um pensamento de construção de um triângulo equilátero que siga todas as condições do enunciado colaborando para a compreensão do fazer científico posto.

Na cena 5.3, a dupla tem que decidir a estratégia de construção do triângulo, quando o diálogo geométrico já determina o tipo de construção a ser feita. A disponibilidade de tempo ao diálogo, e a valorização de seus resultados, constroem o fundo didático para práticas investigativas.

O grupo1 na cena 1.6, mostra-se em sintonia ao ter cuidado um com o pensamento do outro ao traçar as estratégias. S1 acreditava que havia terminado a solução e seu companheiro ressalta que a conclusão teria sido de um problema intermediário e que a resolução deveria continuar.

Na cena 5.2, S1 diz “(...) o B é um dos vértices, né!? (faz um vê com os dedos indicador e médio, e fica olhando e movimentando para tentar encaixar o vê no desenho da tela)(...)”. Ele utiliza a mão para personificar um compasso, que, junto ao *software*, motiva o desencadeamento de uma interação por meio da visualização, organizando suas ideias e suscitando um *conhecimento por meio dos sentidos*. Independente de ser Geometria o tema, pensamos, a abertura de oportunidade para que o aprendiz seja ator em seu momento de constituição do conhecimento é condizente com a abertura de espaços de manifestações, onde palavras e gestos ampliam as significações produzidas.

Ao S4 visualizar onde o ponto rotacionado ficou, exclama surpreso: “Nossa!” na cena 5.3. O local dado pela construção exata do *software* mostra um movimento inesperado proporcionando a constituição do conhecimento e promovendo a compreensão de que o método está funcionando com clareza. Os modos de produção têm afinidade com os objetivos educacionais que estão propostos.

#### 7.4 – Modos de Realizar, Compreender e Conceber a Ciência na Experiência Vivida

O núcleo de significação dos modos de realizar, compreender e conceber a ciência na experiência vivida constitui o epistemológico vivido na pesquisa. Esses modos nos mostram como a ciência ocorre nos sujeitos, como o raciocínio geométrico deles se põe e como a visualização das figuras juntamente com o recurso comunicacional compreende o pensar matemático. Dizem, também, de como os sujeitos habitam o ambiente, espacializando e percebendo-o.

A apresentação da atividade 1 surte efeito no grupo 1 quando S2 inaugura uma fala apresentando contribuições de significado dentro do que a atividade propõe. Notamos que o horizonte geométrico é habitado na fala do S2: “é homotetia!”; e a partir daí, o diálogo entre a dupla instaura compreensões de significados e condições exigidas na atividade mostrando *a ciência compreendida*.

Na cena 1.2, S2 faz uso de diagrama como espacialização para fazer com que a visualização do movimento garanta um esteio de argumentações. Esse diagrama foi feito no papel e trouxe várias discussões que permitiram a compreensão geométrica mútua, que garante a possibilidade de utilizar as atividades sem o *software*, podendo alcançar resultados consideráveis e proporcionando a constituição de conhecimento.

A cena 4.3 inicia-se com uma mudança na estratégia de resolução, quando a dupla desiste da resolução empírica e faz uso de conhecimento prévio estruturado e por meio do diálogo científico. O pensamento matemático põe-se nos formatos de construção que o *software* permite. Observamos uma estruturação no conhecimento quando se utiliza o *software*: primeiramente, os sujeitos tiveram que adaptar seus conhecimentos para a realidade do *software* para, depois, dar continuidade à resolução.

Na cena 5.5, quando os sujeitos expressam todo o procedimento utilizado para a resolução da atividade, eles nos mostram uma habitação junto ao *software*, um fazer-com-o-*software*. Falam na possibilidade de tentar fazer a outra construção,

que é obtida quando rotaciona-se a reta no outro sentido. Expressam o gosto pela atividade e é notável que o movimento é parte essencial para a solução.

Na cena 5.1, ao perceber que a ferramenta de construção de polígono regular não seria útil na construção do triângulo equilátero, a dupla por meio da interação entre eles e com o *software*, decide que a construção deva ser feita criando uma nova metodização que auxilie na compreensão do fazer científico proporcionando à eles um *conhecimento encarnado*.

Pode ser observado, também, o movimento ajudando na constituição do conhecimento na cena 1.2 do grupo 1. O conhecimento é constituído a partir de colaboração, mas também de pensar meditativo, tentando buscar relações globais sem preocupação com a demonstração, mas tendo noção global do que está estudando.

O conhecimento, em certos momentos, já faz parte dos sujeitos, mas precisa ser reorganizado; na cena 1.4, os sujeitos buscam o ponto notável do triângulo que dê o centro do círculo que o circunscreve. Não lembram o nome desse ponto, e confundem os procedimentos que devam ser feitos para construir esse ponto. Mas a dupla utiliza-se da construção exata do *software*, e constrói as mediatrizes e o círculo com centro no ponto de encontro das mediatrizes, comprovando assim, que essa é a construção que eles buscavam. Nesse caso, é incontestável que o *software* foi essencial para o desencadeamento da atividade e para a colocação do conhecimento em prática. Não é mais necessária a nomenclatura que o ponto traz, mas, sim, a sua construção que pôde ser comprovada pelo *software*.

A busca pela garantia de construção de um triângulo que seja o maior possível transpassa por toda a atividade 1 do grupo 1, e a fundamentação teórica trazida pelos sujeitos permite que eles busquem uma demonstração para formalizar uma *estruturação científica*. Mas a intuição de movimentação do triângulo diminuindo é trazido como uma justificativa que garante que o maior triângulo homotético ao triângulo dado é o inscrito no círculo. Vemos, aqui, uma interposição de argumentos de diversas naturezas, resultando num apronto epistemológico renovado.

Na cena 4.5 a dupla ao finalizar a construção, faz a animação da sua construção, conforme feito anteriormente na apresentação da atividade, garantindo uma construção exata, pois não alterou nenhuma das condições exigidas. Executando uma movimentação, os sujeitos puderam visualizar o contexto da atividade e ao mesmo tempo ficaram satisfeitos de tal construção, ampliando para o visual dinâmico a compreensão geométrica.

A construção do geométrico é fluente na cena 5.4, o pensamento lógico-matemático é posto em dinamicidade junto ao *software* e o diálogo garante a compreensão como resultado de concordâncias, mas também de discordâncias que enriquecem um conhecimento dialogado.

## **7.5 - A Geometria das Transformações como Abertura de Horizontes**

O núcleo de significação da Geometria das Transformações como abertura de horizontes traz a espacialização como modo de conhecimento. Percebemos que os sujeitos vivenciaram as diferenças da GT, apesar deles não mostrarem explicitude ao manifestar isso.

Na cena 1.2 do grupo 1, podemos observar que o movimento é usado como uma prova matemática e que esse movimento, juntamente com toda movimentação dinâmica do *software* e com a movimentação corporal, ajuda na constituição do conhecimento dialogado da dupla. Vemos que os sujeitos constituem um todo corporal em que sua percepção sinestésica faz dispor avanços para a compreensão geométrica.

Na cena 4.3 a dupla tem facilidade ao utilizar as ferramentas do *software* e esse uso faz com que eles repensem no processo de decidir o que deve ser modificado para ter um resultado diferente.

Já na cena 4.4 o movimento da imagem no *software* traz a verificação de construção exata que até então era dúvida para a dupla. Podemos observar vários tipos de movimentação: do corpo, da ferramenta do *software* de arrastar, de uma



imagem no *software*, e, todas elas, colaboram para a constituição de um conhecimento peculiar.

Na cena 5.1, na primeira interpretação da dupla, a *GT no mundo da Geometria* se põe em compreensão do proposto pela atividade por meio da leitura. Uma trajetória metodológica vai sendo articulada, dando liberdade de se pensar em rascunho com a preocupação da dupla funcionar por meio do diálogo matemático. O mesmo ocorre na cena 7.1.

O trânsito entre as geometrias pode ser observado na cena 4.1 onde a dupla busca uma solução mais dentro da familiaridade geométrica elementar, ao intencional medir os lados do triângulo. Ao constatar que não seria possível a resolução por esse caminho, a dupla traça uma nova trajetória metodológica utilizando a máxima metodológica da GT e as ferramentas do *software* na cena 4.3.

Ainda na cena 4.3 a dupla utiliza-se de conhecimento teórico para argumentar e construir conhecimento colaborado ao decidirem que o melhor desenvolvimento seria por meio da utilização da máxima metodológica da GT. Notamos que a GT proporciona um diferente modo de olhar, e que o *software* se mostra mais afim do que quando é operado sobre situações geométricas elementares.

Na cena 5.2, por meio da interação dos sujeitos entre eles e com o *software*, eles puderam perceber explicitamente que conhecimento estava sendo constituído junto ao *software* com a geometria que estava podendo ser observada acontecendo na tela do computador. Foi surpresa o posicionamento do ponto construído por eles, confrontando a intuição da dupla, que não estava de acordo com a Geometria que estava sendo constituída na tela.

O ambiente, as pessoas, o *software*, a tela e o horizonte matemático permitem uma constituição dialogal do conhecimento em várias cenas da pesquisa – 1.1/ 1.7/ 4.3/ 5.5/ 7.1 - trazendo a *Geometria das Transformações falada* por meio do diálogo científico posto.

Na cena 5.5, quando os sujeitos transcendem o vivido, eles buscam lembrar o que foi feito, mas também há constituição de conhecimento no diálogo com o

pesquisador que interfere não com uma postura professoral, mas entendendo que a aula é de todos, e, neste momento, são os sujeitos que exprimem o desencadeamento de uma solução. A geometria falada contribui para a sua compreensão geral.

Na argumentação, apropriando-se de conhecimento teórico, também foi observada em vários momentos uma postura na qual podemos notar a presença forte da máxima metodológica da GT, que possibilita que as atividades sejam repensadas de um modo diferente da Geometria Elementar.

## **7.6 – Modos de Viver o *Software***

O núcleo de significação do modo como o conhecimento mediado pelo *software* se põe em nossa pesquisa, é trazido pelos sujeitos em vários momentos, e se faz imprescindível à reflexão sobre a sua constituição geral.

Na cena 1.3 do grupo 1 o sujeito afirma que: “ ... é, pode pensar com ele, né! (se referindo ao *software*)”, como uma situação que não estava sendo considerada anteriormente. Na mesma cena, o sujeito faz o movimento de voltar à construção e marcar um ponto de intercessão– exigência do *software* para antes de se definir uma reta. Isso mostra a constituição de um pensamento junto ao *software* que possibilitou uma reformulação de um conhecimento já posto.

Os sujeitos usaram o *software*, fazendo testes, desconsiderando possibilidades, na procura de ideias para a resolução como na cena 1.3 do grupo2. Já na cena 5.2 ao fazer a rotação da reta, um dos sujeitos exclamou: “Nossa... Muito ruim” referindo-se ao ponto distante na tela que pôde ser visualizado por meio do *zoom*, e logo após a visualização desse ponto. O *software* vai sendo posto em compreensão enquanto é usado, constituindo um pensamento por meio da visualização, pois quando é visto a imagem como um todo afirma-se: “ah... mais ou menos”, neste momento já se mostrando um entendimento do construído. Todos esses movimentos se mostram como essenciais para a constituição do pensamento matemático-geométrico junto ao *software*.

Podemos verificar também, que o conhecimento já elaborado é redirecionado para as condições do *software*, como na cena 4.3. O sujeito se preocupa se o *software* irá abarcar todas as exigências já conhecidas da rotação como: amplitude, direção e centro de rotação, mostrando, assim, uma preocupação com a fundamentação teórica adquirida e uma reformulação de um conhecimento já posto, além trazer o *software* para se fazer investigador.

Na cena 4.1, com a animação apresentada no *software*, o sujeito S1 compreendeu a situação dada. A utilização de ferramentas específicas como o controle deslizante, traz possibilidades de abertura para a solução, mesmo que, no caso, seu uso não desse certo diretamente. Seu uso é incorporado na constituição da solução levando a uma ampla interação sobre a solução. Isso também pode ser vista na cena 5.1.

Já na cena 4.2, o sujeito busca verificar se há alguma ferramenta específica do *software* que ajudaria na construção pretendida; mesmo não tendo certeza da construção, usa das ferramentas do *software* como horizonte de investigação. Na cena 5.3, o sujeito se surpreende com o lugar onde o ponto ficou após sua rotação. Isso não era esperado, e a construção exata que o *software* proporcionou abriu possibilidades de compreensão e novas investigações de lugares geométricos.

Observamos a interação das duplas com o *software* em busca de um desenvolvimento da atividade como na cena 4.2. Na cena 4.4, a dupla acredita que a construção feita está correta, e busca no *software* as justificativas de não estar conseguindo visualizar os comprimentos corretos do triângulo que seria a solução final. Interage com as possíveis condições exigidas pela máquina que não estariam sendo contempladas, até verificar, por meio da movimentação da malha quadriculada, que as medidas dos lados do triângulo são iguais.

Na cena 5.1, depois da compreensão do que a atividade propunha, a dupla intencionou a utilização de uma ferramenta já pronta, “polígono regular”, para construir um triângulo equilátero, mas, ao ler as especificações da ferramenta, a dupla desconsiderou seu uso e partiu para a construção do triângulo, caracterizando assim uma construção de ideias por meio *da interação com o software*.

As indicações orais e gestuais antecipando o potencial dinâmico e exploratório do *software* é notável na cena 5.2, em que o objetivo principal era de rotacionar a reta, o sujeito mostra a distância com o polegar e o indicador de uma mão, na tela do computador e diz : “ aí a gente vai ter que achar uma distância que seja igual a essa daqui... aqui! (...)”.

A *interação com o software* acontece na cena 5.4, já vindo acontecendo em cenas anteriores e, em vários momentos, os sujeitos interagem mostrando e marcando pontos na tela com as mãos. Nessa cena, destaca-se a dinamicidade da constituição de pensamento no decorrer da retirada do zoom para a construção do triângulo equilátero pedido traçando com o compasso a distância igual ao lado.

O *software* permite o *estabelecimento de novas estratégias*. Vemos isso quando o potencial de facilitação e agilização do *software* é extrapolado para permitir ações mais livres, conforme o grupo 1, na cena 1.3, que age quando o espaço no papel se mostra insuficiente. O *software* permite, mas também requer, novas especializações.

Na cena 1.6 do grupo 1, o movimento é pensado de acordo com as possibilidades do *software*. A dupla tem que encontrar uma estratégia para utilizar as ferramentas de acordo com a construção pensada. “S2: agora você leva... leva só um ponto. S1: pois é, a questão é essa!(...)”.

Essa potencialidade de criação com o *software* está manifesta na Cena 4.2, quando se inicia um teste empírico para visualizar uma construção final. Os testes empíricos motivaram uma peculiar interação – bastante observada nas pesquisas em geral – em que a associação entre a GT e o *software* proporcionou um caminho alternativo para descobertas e *insights*.

A *utilização de estratégias junto ao software* é observada na cena 1.3 grupo 2 onde os sujeitos fazem uma tangente sem ter um desencadeamento para essa construção. No papel, podendo ser uma construção trabalhosa, poderiam pensar primeiro se isso iria resolver o problema, mas, pela facilidade e rapidez de construção feita no *software*, os sujeitos fazem as construções para visualizarem primeiro e, a partir disso, ver se encontram uma possível solução.

O uso do *software* para comprovar conhecimento prévios, pôde ser presenciado em vários momentos, como na cena 1.4 do grupo 1. A dupla já sabia que o encontro das três medianas coincidiria, mas não se contenta em construir duas, usa o *software* pra “ter a satisfação” de ver que as três se encontram em um único ponto. De forma similar, na cena 1.5 do grupo 1, na dúvida de qual ponto notável seria o centro do círculo circunscrito ao triângulo, os sujeitos constroem um círculo com um triângulo inscrito, e fazem as mediatrizes para comprovar que o encontro delas é o centro do círculo que circunscribe o triângulo. Dessa forma, o nome do ponto notável já não é mais o essencial para a construção.

Na cena 4.4, depois de fazer a construção final, a dupla usa a ferramenta do *software* de medida de comprimento para garantir que a construção feita foi de um triângulo equilátero. Desse modo, por meio da medida dos segmentos, os sujeitos têm a garantia de que os lados estão realmente com a mesma medida, pela precisão possibilitada pelo *software*, o que não se poderia garantir numa construção com lápis e papel.

o que não seria tão exato numa medição na construção com papel e lápis.

A estratégia junto ao *software* também foi observada na sua utilização para formular e testar conjecturas, como nas cenas 1.2 do grupo 2, na cena 4.2, e na cena 1.1 do grupo 2, onde S3 formulou uma conjectura e S5 fez a construção no computador para testá-la. De acordo com a construção exata feita, a dupla desconsiderou a conjectura tendo a garantia de que era falsa.

A *utilização do software* foi um dos modos como os sujeitos vivenciaram-no. Seja como nas cenas 1.3 do grupo 1, e na cena 4.5, em que o *software* foi visto como um modo de se fazer construções exatas e mais rápidas, seja na utilização do zoom na cena 5.2, na construção da reta rotacionada. Os sujeitos tiveram que utilizar o zoom do *software* para visualizar um ponto, seja por dúvidas no uso dessas ferramentas, ou na existência e visualização de um objeto construído, como na cena 1.2 do grupo 2.

## 7.7 – O Afetar-se na Experiência Vivida

O núcleo de significação do Afetar-se na Experiência Vivida são os modos com os quais os sujeitos se percebem com os meios, com o outro - o cossujeito<sup>3</sup> -, e com o ambiente.

Na cena 1.6 do grupo 1, há um cuidado no estar junto com o outro e com o pensamento do outro ao estarem sempre preocupados em fazer com que o outro entenda seu ponto de vista e veja aquilo que um está vendo, auxiliando no entendimento na *vivência do outro com os meios*.

Na cena 1.7 notamos uma ajuda mútua. Do mesmo modo ocorre na cena 4.2, onde a utilização de testes empíricos motiva uma interação e participação do outro no empenho e no “estar junto” na atividade, havendo sempre a necessidade da aprovação do companheiro da dupla.

Há busca por um entendimento comum, na cena 4.3, assim como na cena 7.1, onde o diálogo se mostra imprescindível para o entendimento da atividade e para a determinação do que se deve fazer para resolver.

Ainda na cena 4.3 observamos que a dupla teve certa satisfação ao finalizar a atividade e observar a animação no *software* da solução feita por eles. Indicando que foram afetados pela atividade, o estar junto se mostrou imprescindível nessa ambientação.

Em todas as atividades houve o momento onde os sujeitos expressavam o desenvolvimento feito por eles da atividade em questão. Esse foi um momento muito importante no qual os sujeitos, ao expressarem o que foi feito por meio da fala, mostraram uma reflexão sobre o vivido, uma transcendência, em que os sujeitos de uma dupla se completavam no pensamento de desencadeamento da resolução. Essa reflexão sobre o vivido teve importantes conclusões, em argumentações nas

---

<sup>3</sup> Compreendemos cossujeitos como Barbariz (2017, p. 49), “aqueles com quem estamos no ciberespaço que, como eu mesma, sente, percebe, toma ciência de..., reflete e expõe o que para ele faz sentido e o modo como compreende isso que faz sentido para ele (...)”.

quais a geometria pode ser vista em movimento de pensar e em movimento com o outro.

A *ciência expressa como modo de vivência*, pode ser percebida em vários momentos nos quais há um Diálogo interacional. A busca por entendimento mútuo, o modo como é importante que duas pessoas estejam encaminhando a solução juntos, faz com que a ciência seja vivida naquele momento, e proporciona a constituição do conhecimento colaborado com ferramentas dinâmicas. Como acontece na cena 1.4, o sujeito do grupo 1 necessita da aprovação de seu cossujeito para dar continuidade à ideia, e por meio do Diálogo interacional coloca-o no mesmo pensamento.

Os sujeitos interagem entre si na maioria de momentos das atividades, com objetivos geralmente pontuais no seu desenvolvimento, colaborando na constituição de pensamentos e de construções que consideram convenientes. Esse modo de vivenciar a atividade pôde ser observado em várias cenas, como 1.2; 4.1; 4.4; 5.1; 5.3; 7.1; apontando potencial de interação e colaboração nas atividades aplicadas, além da disposição dos grupos e postura dos pesquisadores como interventores.

A ocupação do horizonte da ciência se mostra na argumentação que transita do apelo visual ao conhecimento já constituído na ciência, por meio do diálogo científico posto na interação permanente das duplas, como ocorre nas cenas 1.4; 1.7; 4.3; 4.5; 5.3; 7.1, por exemplo.

Na cena 1.8, quando a dupla 1 faz a reflexão sobre o vivido, indicam por meio do diálogo científico o movimento na constituição do conhecimento como um modo de pensar-com-o-movimento, apontando, assim, a *espacialidade compartilhada*. Assim como na cena 5.2, o movimento motiva uma interação e a dupla compreende também por meio do movimento o que deverá ser feito no próximo passo da resolução. O ambiente, as pessoas, o *software*, a tela e o horizonte matemático, permitem essa espacialidade.

A facilidade de manusear as ferramentas do *software* pôde ser observada na cena 4.3 quando observamos a importância de um movimento que propiciou a abertura de horizontes. Assim como na cena 5.2, o movimento está presente na

constituição do conhecimento, com o movimento sendo uma iniciativa dos sujeitos afim de novas possibilidades.



## CAPÍTULO 8- TRANSCENDÊNCIA DO VIVIDO: Algumas Considerações

Os sujeitos são convidados a habitar um horizonte que se dispõe. Se dispõe com seu ambiente de recursos tecnológicos, com a tarefa de aprendizagem, as intenções pedagógicas, as possibilidades didáticas, com os sujeitos seus companheiros, enfim, com a vontade de seguirem juntos numa empreitada que percebem ser importantes em suas vidas.

Desse modo, os horizontes são habitados a partir de ações e pensamentos que seguem com atribuições de significados de variadas naturezas. O horizonte geométrico vai se fazendo em sentido, isto é, o sentido vai se constituindo junto àqueles que lhe atribuem.

As atividades de nossa pesquisa de campo foram pensadas e aplicadas como atividades que possam contribuir para a constituição de um pensamento lógico-matemático de Geometria das Transformações. Elas apresentaram grande potencial quando trabalhadas com o auxílio do *software* de geometria dinâmica GeoGebra.

Acreditamos que as atividades que implementamos possam contribuir para o ensino e para a aprendizagem por meio de grupos colaborativos nas salas de aula, que sugerimos seja com o auxílio do *software* GeoGebra ou outro potencialmente similar, dado que é um programa aberto, na característica de objetos e situações a realizarem-se. Sua ideologia de ser tela aberta comunga com o espírito de uma abertura pedagógica.

A interação das duplas para o desenvolvimento das atividades se mostraram muito produtivas e importantes para o processo de constituição do conhecimento. Percebeu-se que o movimento de trocas e ajudas mútuas propiciou um ambiente colaborativo.

A colaboratividade não pode ser confundida com uma simples interação de pessoas que, afinal, estão constrangidas no ambiente didático que se propõe. A potencialidade de um conhecimento coelaborado em ser significativo é notável, perdurando como experiência intelectual indelével, conforme entendi sobre os movimentos de pesquisa realizados.

No movimento de pesquisar fenomenologicamente, nos cabe a interpretação das ideias nucleares abrangentes com o horizonte de trazer significados à

interrogação norteadora dessa pesquisa. Para tanto, faço, aqui agora, um movimento retrospectivo da trajetória da investigação com a finalidade de transcender o vivido.

Essa pesquisa tinha a intenção de compreender como aprendizes em colaboração constituem sentidos à Geometria das Transformações tendo mediação de ferramentas dinâmicas. Para isso, após uma revisão comentada da literatura de Educação Matemática, de Ensino de Geometria, de Uso de tecnologias no Ensino da Matemática, de Ambientes Colaborativos e dos Aspectos Curriculares, fomos à pesquisa de campo para buscar dados do investigado, como quem vai à coisa mesma: o fenômeno do conhecimento e como ele é experienciado. O conhecimento se dá no sujeito que aprende como algo que se lhe disponibiliza no mundo que vivencia com outros, mesmo que o outro lhe venha como recursos ou textos. Buscamos os sentidos que os sujeitos e os cossujeitos dão à GT e, para isso, criamos atividades investigativas que consideramos satisfatórias ao proporcionar um ambiente colaborativo e de constituição de conhecimento colaborado de Geometria das Transformações.

No processo de convergência de significados, fizemos a análise nomotética de seis ideias nucleares abrangentes, explicitadas no capítulo anterior, que nos permitem refletir sobre a importância de cada uma delas, e como que elas se interligam constituindo significados para o vivido em todo nosso estudo.

Percebemos que a constituição do geométrico se deu pelos modos com os quais os sujeitos realizaram, compreenderam e conceberam a ciência por meio das atividades propostas, num processo eminentemente implicado pelo modo de viver o *software* que possibilitou abertura de horizontes para a Geometria das Transformações, afetando-se dos modos pedagógicos e didáticos intrínsecos na ambientação pensada para as atividades.

Respondo a interrogação construída aqui, trazendo o que foi percebido durante todo processo de pesquisa. O “como” da interrogação traz uma abertura de se pensar uma pesquisa e seus objetivos. Não é nosso objetivo trazer respostas fechadas para essa interrogação, mas o caminho que ela proporcionou que fizéssemos. As convergências que apontamos ao longo do capítulo anterior são

muito mais um tecido de significações, que vieram de nossas análises, que um conjunto de conclusões num eixo de amarração, que seria a linha de uma resposta mais crucial.

Observamos que uma ação curricular alternativa é possível de se trabalhar e trazer resultados interessantes e diversos. Buscamos novos sentidos pedagógicos no fazer colaborativo, interacional e notamos que o diálogo é forte aliado pedagógico. O uso de tecnologia proporcionou uma mudança metodológica, didática e epistemológica, assim como Noss e Hoyles (1996, p. 233) perceberam o inusitado emergir.

Os *insights* geométricos ocorridos a partir das manifestações de nossos sujeitos se ligam aos que vivemos em nossa pesquisa, se dando em clarividência para alternativas metodológicas possíveis no tratamento escolar da geometria. Eles se articulam como clarividência.

*“Grata pela graça  
a graça que eu acho  
em tudo que fica  
por tudo que passa”.*  
*(Paulo Leminski)*

## Referências

ALLEVATO, N. S. G. **Associando o Computador à resolução de Problemas Fechados: Análise de uma Experiência**. Tese UNESP- Rio Claro , 2005. 378p.

AMORIM E GRUN, **Entre a Paidéia e a Modernidade: O Diálogo Como Prática Pedagógica**, IV colóquio internacional de Educação, 2011. 10p.

BARBARIZ, T. A. M. **A constituição do conhecimento matemático em um curso de matemática à distância**. Tese UNESP – Rio Claro, 2017. 451p.

BARRETO, M E TAVARES, S. **Do Mito da Geometria Euclidiana ao ensino das Geometrias Não euclidianas - A Experiência no IF Fluminense Campus-Centro-X ENEM**, 2010. 10p. Disponível em: [http://www.lematec.net.br/CDS/ENEM10/artigos/RE/T12\\_RE999.pdf](http://www.lematec.net.br/CDS/ENEM10/artigos/RE/T12_RE999.pdf) >Acesso em 19 out. 2016.

BICUDO, M. A. V. A. A pesquisa qualitativa olhada para além de seus procedimentos. In: BICUDO, M. A. (Orgs.). **Pesquisa Qualitativa segundo a visão fenomenológica**. São Paulo: Cortez, 2011.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2001. 98 p.

CIFUENTES, C. C. Fundamentos Estéticos da Matemática – da habilidade à sensibilidade. In: Bicudo, M A V. (Org.) **Filosofia da Educação Matemática: Concepções e Movimento**. Brasília: Plano Editora, 2003. p. 59/79.

DETONI, A. R. O estar-presente a distância: possíveis contribuições de Martin Heidegger. In BICUDO, M. A. (Org.) **Ciberespaço: possibilidades que abre ao mundo da educação**. São Paulo: Livraria da Física, 2014. p. 93 - 108.

DETONI, A. R.; PAULO, R. M. A organização dos dados da pesquisa em cena: um movimento possível de análise. In: Bicudo, M A V. (Org.) **Pesquisa qualitativa segundo a visão fenomenológica**. São Paulo: Editora Cortez, 2011. p. 99 – 120.

DETONI, A. R.; PINHEIRO, J. M. – **Direções para uma Filosofia Geométrica das Transformações**. VI SIPEM – Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. 2015.

\_\_\_\_\_. **Compreensões Filosóficas para Uma Alternativa do Pensamento Geométrico**. REVEMAT. Florianópolis (SC), v.11, Ed. Filosofia da Educ. Matemática, p. 232-243, 2016.

DIENES, Z., GOLDING, E. **Exploração do Espaço**, 1959, Melhoramentos.

FIGUEIREDO, M. D. E CAMPOS, G. W. S. **O apoio Paideia como metodologia para processos de formação em saúde**, Interface Comunicação Saúde e Educação. 2014, 18 Supl 1:931-43.

FROTA, M.C.R. **Experiência matemática e investigação matemática**. V CIBEM, Porto, Portugal, jul. 2005. Disponível em: <http://www.matematica.pucminas.br/Grupos de Trabalho/Grupo PINEM>> Acesso em: 18 out. 2016.

HEITMANN. F.P. **Atividades Investigativas em Grupos Online: Possibilidades para a Educação Matemática a Distância**. (Dissertação de Mestrado UNESP) 2013, 174p.

LEME DA SILVA, M.C; BONGIOVANNI, V.; VALENTE, V. R. **Abandono da Geometria: Vivam as Geometrias!** Educação Matemática na Amazônia, Coleção II, Volume 9, Belém- PA, 2011.

MALTEMPI, M. V. (2005) **Novas Tecnologias e Construção do Conhecimento: reflexões e perspectivas**. In: CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., Porto. **Anais...** Porto: APM, 2005. p. 1-10.

MARTINS, J. **Um Enfoque Fenomenológico do Currículo: Educação Como Poiesis**. São Paulo: Cortez, 1992.

NOSS, R. & HOYLES, C. (1996) **Windows on Mathematical Meanings: Learning Cultures and Computers** – Mathematics Education Library; v. 17,

NUNES E ONUCHIC (2010). **O Ensino-Aprendizagem da Geometria das Transformações Por meio da Resolução de Problemas**. X ENEM. Disponível em [http://www.lematec.net.br/CDS/ENEM10/artigos/RE/T12\\_RE984.pdf](http://www.lematec.net.br/CDS/ENEM10/artigos/RE/T12_RE984.pdf)

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G., **Pesquisa em Resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas**. Bolema, Rio Claro (SP), v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011

Pais, L. C. **Intuição, Experiência e Teoria Geométrica**. Zetetiké, Campinas, SP. v.4, n. 6, p. 45-63. jul/dez. 1996

PAULO, R. M. O significado dos diagramas na produção do conhecimento geométrico. In: Bicudo, M. A. V. (Org.) **Filosofia da Educação Matemática: fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógicas**. São Paulo: Ed. Unesp, 2010. P. 169/192.

PIAGET, J. ; GARCIA, R. **Psicogênese e História das Ciências**. Traduzido por Maria F. M. R. Jesuíno. Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1987.

PENTEADO, M. G. Possibilidade para a formação de professores de Matemática. In: PENTEADO, M. G.; BORBA, M. (Orgs.). **A informática em ação: formação de professores, pesquisa e extensão**. São Paulo: Olhos D'Água, 2000. p. 23-34.

PINHEIRO, J. M. L. **A Aprendizagem significativa em Ambientes Colaborativo-Investigativos de Aprendizagem: Um Estudo de conceitos de Geometria Analítica Plana** (Dissertação de Mestrado)- Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013, 202p.

PONTE, J. P. **Investigar, Ensinar e Aprender**. Actas do ProfMat (CD-ROM, p.25-39). Lisboa: APM, 2003.

POWELL, A. B (2013) **Educação Matemática e Tecnologias da Informação e Comunicação: Novos Desafios e Novas Possibilidades**. VI Congresso internacional de ensino de matemática. Disponível em: <http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/viewFile/2157/971>

SANT'ANA, C. C. ;AMARAL, R. B.; BORBA, M. C. (2012) **O uso de Softwares na prática Profissional do Professor de Matemática**. Ciência & Educação, v. 18, n. 3, p. 527-542, Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/ciedu/v18n3/03.pdf> Acesso em 19 out. 2016

SANTOS, M. R. (2013) **Um Estudo Fenomenológico Sobre o Conhecimento Geométrico**. 214p. Tese (Doutorado)

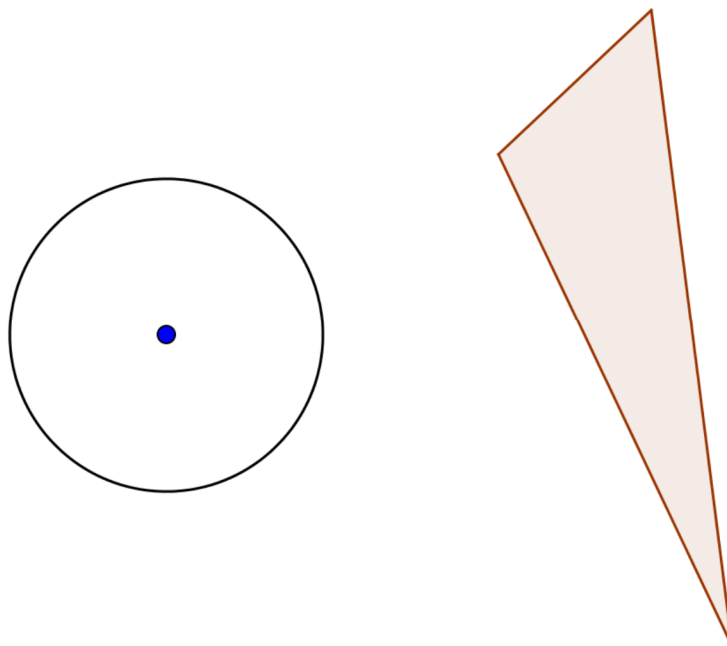
SOUTO. D. L. P. e BORBA. M. C. **Transformações Expansivas em Sistemas de Atividade: O Caso da Produção Matemática com a Internet**. Perspectivas da Educação Matemática, Campo Grande, MS, v. 6, n. Temático, 2013, p.41-57, Disponível em: [http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/artigos/souto\\_borba/souto\\_borba\\_2013.pdf](http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/artigos/souto_borba/souto_borba_2013.pdf) . Acesso em 18 out. 2016

TORRES, P. L. Laboratório on-line de aprendizagem: uma experiência de aprendizagem colaborativa por meio do ambiente virtual de aprendizagem. **Cad.Cedes**, Campinas, v. 27, n. 73, p. 335-352. set./dez. 2007.

VALENTE. J.A. e ALMEIDA. M. E. B. (2012). **Integração Currículo e Tecnologias e a Produção de Narrativas Digitais**. Currículo sem Fronteiras, v. 12, n. 3, p. 57-82, Set/Dez 2012

### ATIVIDADE 1

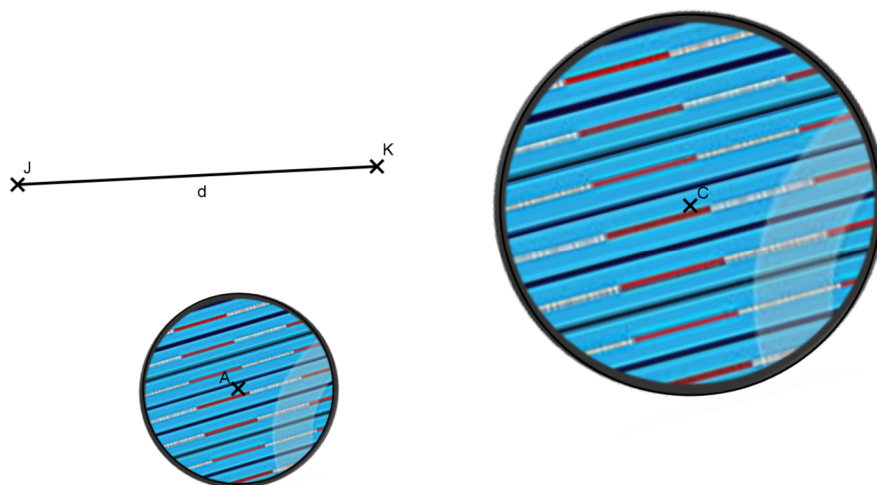
Uma construtora está projetando para a área de lazer de um condomínio a construção de uma região triangular e um espaço circular, como mostra o projeto abaixo. Um arquiteto, vendo esse projeto, sugeriu que dentro do círculo também tivesse uma região triangular, a maior possível, com seus lados paralelos, cada um, aos lados do triângulo já projetado. Como fazer esse projeto?



## ATIVIDADE 2

O treinador resolveu criar um treino diferenciado para o seu atleta de Triatlon. No clube escolhido para os treinos, há duas piscinas redondas e o treinador quer que o atleta percorra, numa só reta e na direção das raias das piscinas, um trecho nadado na primeira piscina, um trecho correndo entre as piscinas e um último trecho nadado na segunda piscina, de modo que os dois trechos nadados somem  $d$  metros.

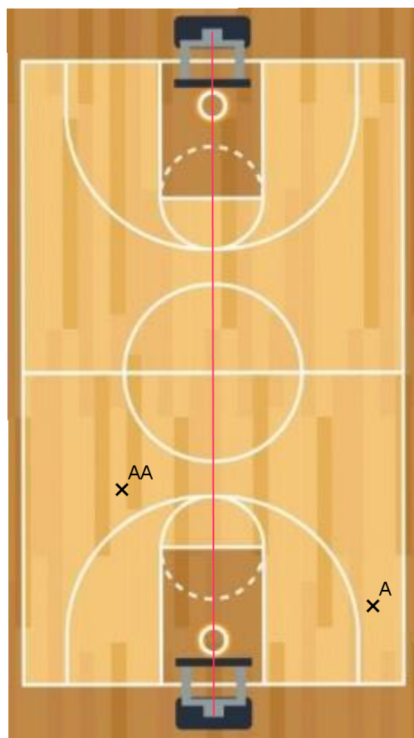
Onde terá que ser a largada para que o atleta nade  $d$  metros?





### ATIVIDADE 3

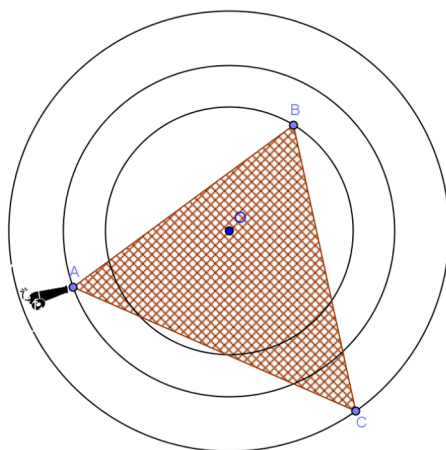
Um técnico de basquete, desenhando em sua prancheta, quer combinar uma jogada com seu armador, que deverá estar no início da jogada sobre o eixo da quadra (linha rosa), e, em relação a esse eixo, ver o ala-armador (AA) e o Ala (A) sob mesmo ângulo. Onde ele deve desenhar o armador dele?



#### ATIVIDADE 4

No circo, a apresentação do espetáculo do Homem-Bala está causando preocupação com a segurança dos seus participantes. O cenário da apresentação é formado por três círculos concêntricos onde o canhão (A) gira na círculo do meio, os assistentes B e C deverão ficar um na círculo de dentro e o outro na de fora. Quando o apresentador terminar de anunciar o espetáculo, a música irá parar e onde o canhão estiver ele lançará o homem-bala. A rede de proteção estará presa ao canhão. E, a distância entre os assistentes, com a rede esticada, deve ser a mesma que a de cada um à boca do canhão.

Onde os assistentes deverão estar para esticar a rede de proteção e salvar o homem-bala?

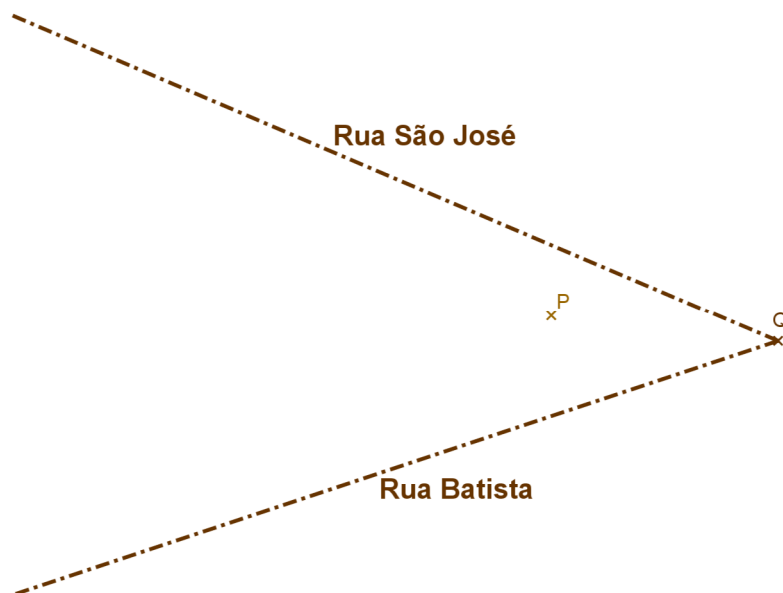


### ATIVIDADE 5

Antônio precisa construir um viveiro triangular equilátero, tendo como vértices três mourões: A, B e C. Para aproveitar o espaço, ele considerou que B e C ficassem juntos aos muros das margens das ruas São José e Batista.

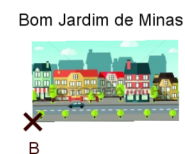
No encontro dos muros ( Q ), há uma fonte d'água que servirá de irrigação para o viveiro. Um dos pontos de irrigação será em P que pertence à cerca BC, e o outro será em A. Por questão de economia P e A estarão alinhados com a fonte Q.

Ajude Antônio a construir esse viveiro.



## ATIVIDADE 6

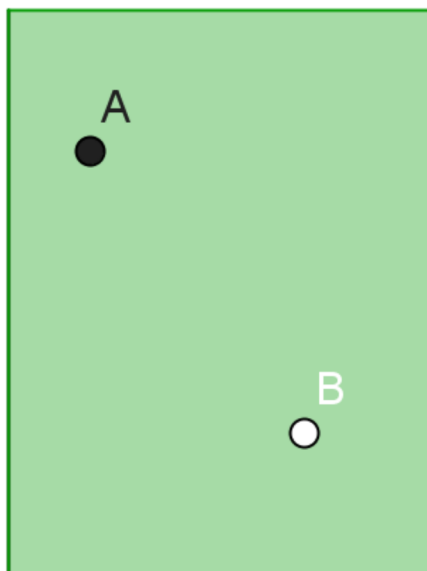
O governador prometeu aos prefeitos da cidade Arantina e da cidade Bom Jardim de Minas fazer uma ponte (a mais curta possível) sobre o rio Quixeramobim, que passa reto na região entre as duas cidades. Mas ele exigiu que o projeto considerasse que uma futura ligação rodoviária entre elas, que passaria por essa ponte, fosse de menor comprimento possível. Veja o mapa da situação e desenhe a ponte.



## ATIVIDADE 7

Dada uma sinuca retangular e duas bolas A e B, bater a bola B na bola A depois de tocar duas tabelas.

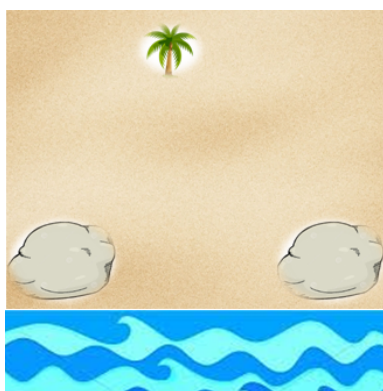
OBS: Tabela na sinuca significa que deverá tocar em dois lados da sinuca antes de bater na outra bola.



## ATIVIDADE 8

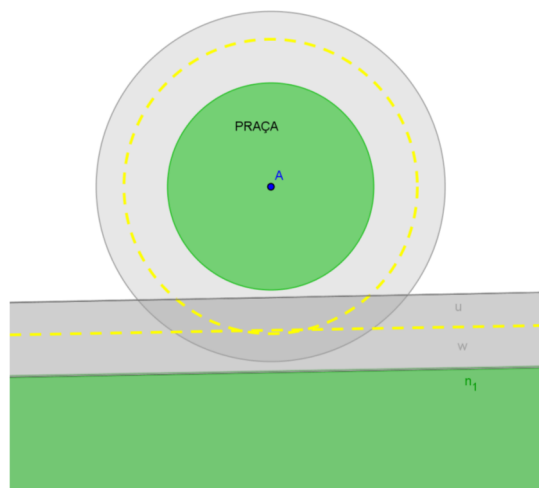
Há muitos anos, o pirata Barba-Ruiva resolveu enterrar o seu tesouro. Escolheu uma ilha onde a única praia tinha duas grandes rochas junto à água, a 100 metros uma da outra, e uma enorme palmeira entre as duas rochas, mas a 80 metros da linha da água. Mandou um dos piratas do seu bando para cada uma das rochas e deu-lhes as seguintes instruções: olhar em direção à palmeira, rodar  $90^\circ$  e andar uma distância igual à que a respectiva rocha estava da palmeira. Nenhum dos piratas se molhou. Os dois piratas ficaram parados e o pirata Barba-Ruiva enterrou o tesouro exatamente a meio caminho entre eles.

Por acaso, encontramos o documento onde isto estava escrito e decidimos ir até à ilha à procura do tesouro. Lá encontramos as rochas junto à água, mas infelizmente a palmeira tinha desaparecido, provavelmente derrubada por um furacão. Como a praia agora é um destino turístico conhecido, não podemos andar a escavar por todo o lado. A única hipótese é aproveitar uma noite antes de amanhecer e fazer apenas um buraco. Onde devemos escavar para termos hipóteses de descobrir o tesouro?



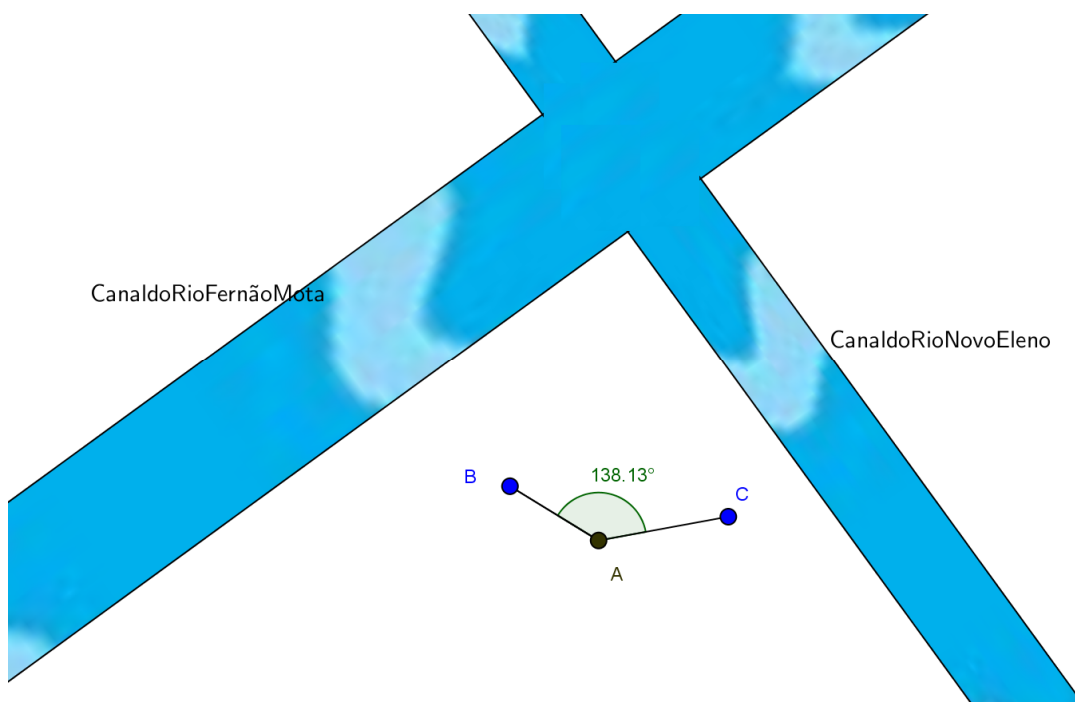
## ATIVIDADE 9

Deseja-se construir um palco quadrangular para as festividades de aniversário da cidade. Para não precisar furar o asfalto, decidiram que dois mourões de sustentação ficassem na grama da praça e os outros dois ficassem na linha do limite da grama com a rua retilínea, conforme a figura abaixo. Desenhe o menor palco possível.



### ATIVIDADE 10

A prefeitura projeta a construção de uma passarela que permita o tráfego de pessoas sobre os canais dos rios Fernão Mota e Novo Eleno. Uma parte desta passarela terá suas extremidades apoiadas em dois pilares, um deles, o pilar B, a ser posicionado sobre a borda do canal do Rio Fernão Mota e, o outro, o pilar A, já posicionado entre os dois canais. A outra parte da passarela será construída a partir do pilar A, terminando sobre o pilar C, a ser posicionado na borda do canal do Rio Novo Eleno. Determine as posições dos pilares B e C, de forma que as duas partes da passarela tenham o mesmo tamanho e estejam sobre uma mesma reta.





### ATIVIDADE 11

Um parque em forma quadrangular é formado por avenidas. Uma delas contém o mercado M e a outra a lanchonete L. O armazém A e o mercado se encontram na esquina do bar B, outras duas avenidas A e L se encontram na esquina da doceria D e as avenidas L e M se encontram na esquina da Câmara Municipal C.

Um desenhista decalcou do mapa da situação apenas os três estabelecimentos, como abaixo. Como desenhar o parque recuperando os traçados urbanísticos?

