

**UMA ABORDAGEM ECOLÓGICA ENVOLVENDO
PROPORCIONALIDADE NA EDUCAÇÃO BÁSICA**

Dayane Cristina Rocha Tinoco

Juiz de Fora (MG)

Dezembro, 2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
Pós-Graduação em Educação Matemática
Mestrado Profissional em Educação Matemática

Dayane Cristina Rocha Tinoco

**UMA ABORDAGEM ECOLÓGICA ENVOLVENDO
PROPORCIONALIDADE NA EDUCAÇÃO BÁSICA**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Orientador(a): Prof(a) Dr(a) Chang Kuo Rodrigues

Juiz de Fora (MG)
Dezembro, 2016

Ficha catalográfica elaborada através do programa de geração automática da Biblioteca Universitária da UFJF, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Tinoco, Dayane Cristina Rocha.

Uma abordagem ecológica envolvendo proporcionalidade na educação básica / Dayane Cristina Rocha Tinoco. -- 2016.

153 p. : il.

Orientadora: Chang Kuo Rodrigues

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós Graduação em Educação Matemática, 2016.

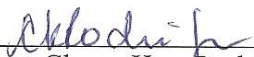
1. Educação Matemática. 2. Perspectiva ecológica do saber. 3. Proporcionalidade. 4. Teoria da transposição didática. 5. Livro didático. I. Rodrigues, Chang Kuo, orient. II. Título.

Dayane Cristina Rocha Tinoco


**“UMA ABORDAGEM ECOLÓGICA ENVOLVENDO PROPORCIONALIDADE NA
EDUCAÇÃO BÁSICA”**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Comissão Examinadora



Profa. Dra. Chang Kuo Rodrigues
(Colaboradora UFJF)



Prof. Dr. Adriano Vargas Freitas
(UFF)



Profa. Dra. Maria Cristina Araújo de Oliveira
(UFJF)

Aprovada em 22/12/2016

AGRADECIMENTOS

À banca participante da qualificação e da defesa, composta pelos professores Dr. Adriano Vargas Freitas e Dr^a. Maria Cristina Araújo de Oliveira, pelas sugestões que fizeram deste trabalho mais rico e coerente.

Meus sinceros agradecimentos à minha orientadora e amiga Chang Kuo Rodrigues pela seriedade, confiança, paciência e pelas inúmeras contribuições dadas na minha vida acadêmica desde a graduação, fazendo possível a realização deste trabalho.

Aos meus amigos, pelas trocas de experiências e ouvidos durante as fases mais difíceis dessa caminhada.

Ao autor Luiz Márcio Imenes, que, gentilmente, aceitou compartilhar um pouco de sua trajetória enquanto educador e renomado autor de livros didáticos.

Aos meus pais, João Paulo e Catarina, a minha irmã Débora, e ao meu marido, Felipe, pelo amor incondicional, incentivo e compreensão nos momentos de ausência.

A todos que, direta ou indiretamente, fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

Agradeço a Deus, pelo dom da vida e pela oportunidade de alcançar mais esta vitória.

“A coisa mais indispensável a um homem é reconhecer o uso que deve fazer do seu próprio conhecimento”.

Platão

RESUMO

O presente trabalho refere-se à construção das ideias matemáticas relacionadas à Proporcionalidade, dada sua importância enquanto conceito matemático fundamental para a formação matemática dos estudantes na Educação Básica. O quadro teórico da investigação é fundamentado sob a perspectiva ecológica do saber, utilizando-se como metodologia a pesquisa bibliográfica aliada à Teoria da Transposição Didática. O procedimento metodológico foi realizado a partir da análise de quatro coleções de livros didáticos do segundo segmento do Ensino Fundamental, sendo cada uma delas representativas das respectivas décadas, a saber: 1980, 1990, 2000 e 2010. Também foi realizada uma entrevista com um autor de livro didático, cuja coleção foi escolhida para representar a década de 2010. Após a análise dos livros didáticos e da entrevista, foi possível detectar as transformações ocorridas no processo de ensino, cujo início tem o marco na década de 80, além de verificar quais são os saberes imprescindíveis, ou não, para que o tema Proporcionalidade “sobreviva” nos manuais de ensino.

Palavras-chave: Educação Matemática. Perspectiva ecológica do saber. Proporcionalidade. Teoria da transposição didática. Livro didático.

ABSTRACT

The present work refers to the construction of mathematical ideas related to Proportionality, given its importance as a fundamental mathematical concept for the mathematical formation of students in Basic Education. The theoretical framework of the research is based on the ecological perspective of knowledge, using as a methodology the bibliographic research allied to the Theory of Didactic Transposition. The methodological procedure was carried out from the analysis of four collections of textbooks of the second segment of Elementary School, each one representing the following respective decades: 1980, 1990, 2000 and 2010. An interview was also conducted with a book author whose collection was chosen to represent the decade of 2010. After the analysis of the textbooks and the interview, it was possible to detect the transformations that occurred in the teaching process, which began in the 1980s, as well as verifying which are the essential knowledge, or not, so that the theme Proportionality "survives" in the teaching manuals.

Keywords: Mathematical Education. Ecological perspective of knowledge. Proportionality. Theory of didactic transposition. Textbook.

LISTA DE ESQUEMAS

Esquema 1	Proporcionalidade e os blocos de conteúdos	31
Esquema 2	Ecossistema inicial da proporcionalidade e algumas aplicações na Matemática	31
Esquema 3	Ecossistema dos tipos de problemas envolvendo proporcionalidade segundo Lesh, Post e Behr	36
Esquema 4	Ecossistema da proporcionalidade da coleção C1	79
Esquema 5	Ecossistema da proporcionalidade da coleção C2	97
Esquema 6	Ecossistema da proporcionalidade da coleção C3	118
Esquema 7	Ecossistema da proporcionalidade da coleção C4	145

LISTAS DE FIGURAS

Figura 1-	Problema típico em textos sobre proporções	38
Figura 2-	Conceito de razão	65
Figura 3-	Razões inversas	65
Figura 4-	Razão especial: velocidade média	66
Figura 5-	Razão especial: escala	66
Figura 6-	Conceito de proporção	67
Figura 7-	Propriedade fundamental da proporcionalidade	67
Figura 8-	Quarta proporcional de três números dados/ Terceira proporcional de dois números dados	68
Figura 9-	Propriedade 1	68
Figura 10-	Propriedade 2	69
Figura 11-	Aplicação das propriedades	69
Figura 12-	Sequência de razões iguais (proporção múltipla)	70
Figura 13-	Introdução (Números proporcionais)	70
Figura 14-	Números diretamente proporcionais	71
Figura 15-	Divisão de um número n em partes diretamente proporcionais ..	71
Figura 16-	Números inversamente proporcionais	72
Figura 17-	Divisão de um número n em partes inversamente proporcionais	72
Figura 18-	Grandezas diretamente proporcionais	73
Figura 19-	Grandezas inversamente proporcionais	73
Figura 20-	Regra de três simples	74
Figura 21-	Exemplos de questões envolvendo regra de três simples	75
Figura 22-	Regra de três composta	76
Figura 23-	Segmentos proporcionais	77
Figura 24-	Teorema de Tales	77
Figura 25-	Semelhança de triângulos	78
Figura 26-	Polígonos semelhantes	78
Figura 27-	Razão entre duas grandezas	80
Figura 28-	Razões equivalentes	81
Figura 29-	Razões inversas	81
Figura 30-	Proporções	82

Figura 31-	Propriedade Fundamental das Proporções	83
Figura 32-	Propriedade da soma dos termos de uma proporção	83
Figura 33-	Propriedade da diferença dos termos de uma proporção	84
Figura 34-	Sucessões diretamente proporcionais	84
Figura 35-	Divisão em partes diretamente proporcionais	85
Figura 36-	Sucessões inversamente proporcionais	86
Figura 37-	Divisão em partes inversamente proporcionais	86
Figura 38-	Grandezas diretamente proporcionais	87
Figura 39-	Grandezas inversamente proporcionais	88
Figura 40-	Regra de três simples	88
Figura 41-	Processo prático que facilita a resolução de problemas envolvendo regra de três simples direta e inversa	89
Figura 42-	Regra de três composta	90
Figura 43-	Cálculo da taxa de porcentagem	91
Figura 44-	Fórmula da porcentagem	92
Figura 45-	Juros simples	93
Figura 46-	Gráfico em setores	93
Figura 47-	Teorema de Tales	94
Figura 48-	Conceito de semelhança de triângulos	94
Figura 49-	Lema da semelhança	95
Figura 50-	Razão de semelhança	96
Figura 51-	Fragmento artigo “Razões e Proporções na vida diária e na escola”	100
Figura 52-	Gráfico de setores	101
Figura 53-	Proporcionalidade	101
Figura 54-	Método de resolução utilizando comparação	102
Figura 55-	Razão	102
Figura 56-	Razões constantes	103
Figura 57-	Receitas e proporcionalidade	104
Figura 58-	Porcentagens	104
Figura 59-	Variação de grandezas proporcionais	105
Figura 60-	Grandezas diretamente proporcionais	105
Figura 61-	Grandezas inversamente proporcionais	106

Figura 62-	Nem tudo é proporcional	106
Figura 63-	Ampliando e reduzindo figuras	107
Figura 64-	Escalas e maquetes	108
Figura 65-	O termo desconhecido de uma proporção	109
Figura 66-	Proporções na construção de gráficos.....	110
Figura 67-	Triângulos semelhantes.....	110
Figura 68-	Tales e a pirâmide	111
Figura 69-	Figuras semelhantes	112
Figura 70-	Triângulos semelhantes	112
Figura 71-	Teorema de Tales	113
Figura 72-	Relação de Tales e a semelhança de triângulos	114
Figura 73-	Ampliação de figuras por homotetia	115
Figura 74-	Divisão de segmentos em partes proporcionais	116
Figura 75-	O retângulo áureo	117
Figura 76-	Noções de escala	120
Figura 77-	Cálculo de frações com o uso do diagrama de setas (método de redução à unidade)	121
Figura 78-	Construção de figuras geométricas proporcionais com malha quadriculada	122
Figura 79-	Raciocínio Proporcional	123
Figura 80-	Equivalência de frações e proporcionalidade	123
Figura 81-	Proporcionalidade e previsões - Situação passível de previsão .	124
Figura 82-	Proporcionalidade e previsões - Situação não passível de previsão	124
Figura 83-	Grandezas diretamente proporcionais	125
Figura 84-	Mais proporcionalidade direta	126
Figura 85-	Escalas	127
Figura 86-	Gráficos de setores	128
Figura 87-	Proporcionalidade e pesquisas estatísticas	128
Figura 88-	Grandezas inversamente proporcionais	129
Figura 89-	Regra de três - Retomando a noção de proporcionalidade	130
Figura 90-	Regra de três - Situação envolvendo grandezas diretamente proporcionais	130

Figura 91-	Regra de três – Situação envolvendo grandezas inversamente proporcionais	131
Figura 92-	Razões especiais	132
Figura 93-	Razões e comparações	133
Figura 94-	Divisão em partes proporcionais	133
Figura 95-	É proporcional ou não é? – Segmentos proporcionais	134
Figura 96-	Construção de triângulos semelhantes usando compasso	135
Figura 97-	Investigando a proporcionalidade	135
Figura 98-	Proporção entre diâmetro e perímetro de uma circunferência ...	136
Figura 99-	Proporção entre o arco de uma circunferência e a medida do ângulo central correspondente	136
Figura 100-	Condição de semelhança e razão de semelhança	137
Figura 101-	Homotetia	138
Figura 102-	Triângulos semelhantes	139
Figura 103-	Aplicação da propriedade de triângulos	140
Figura 104-	Semelhança no triângulo retângulo e as relações métricas	141
Figura 105-	Paralelismo e proporcionalidade	142
Figura 106-	Teorema de Tales	142
Figura 107-	Produção e proporcionalidade - Regra de três composta	143
Figura 108-	Função e proporcionalidade	144

LISTA DE QUADROS

Quadro 1	Denominação dos livros didáticos	64
Quadro 2	Abordagem do conteúdo de proporcionalidade na coleção	119
Quadro 3	Proporcionalidade na Geometria	119
Quadro 4	Proporcionalidade na Álgebra	120

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	REVISÃO DA LITERATURA, PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS E QUADRO TEÓRICO	17
2.1	REVISÃO DA LITERATURA	17
2.2	PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	25
2.3	QUADRO TEÓRICO DA INVESTIGAÇÃO	27
	2.3.1 A problemática ecológica sob o ponto de vista do saber	28
	2.3.2 A noção de ecossistema	28
	2.3.3 A abordagem ecológica do saber: a proporcionalidade	30
2.4	A PROPORCIONALIDADE E OS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS.....	32
2.5	REGRA DE TRÊS	34
2.6	RACIOCÍNIO PROPORCIONAL	35
2.7	PROPORCIONALIDADE: UM BREVE CENÁRIO HISTÓRICO	41
	2.7.1 Proporcionalidade no Egito	42
	2.7.2 Proporcionalidade na Mesopotâmia (Babilônia)	43
	2.7.3 Proporcionalidade na Grécia	44
	2.7.4 Proporcionalidade na China	50
	2.7.5 Proporcionalidade na Índia	50
	2.7.6 Proporcionalidade na Arábia	51
3	ENTREVISTA COM LUIZ MÁRCIO IMENES	54
4	ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS	63
4.1	ANÁLISE DA COLEÇÃO C1 - DÉCADA 1980	64
4.2	ANÁLISE DA COLEÇÃO C2 - DÉCADA 1990	80
4.3	ANÁLISE DA COLEÇÃO C3 - DÉCADA 2000	98
4.4	ANÁLISE DA COLEÇÃO C4 - DÉCADA 2010	118
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	146
	REFERÊNCIAS	151

1 INTRODUÇÃO

Em determinadas situações simples do cotidiano somos levados a escolher a melhor opção entre duas ou mais ofertas, ou seja, escolher dentre elas a que apresenta a melhor relação custo-benefício. Por exemplo, é mais vantajoso comprar um pacote de 5 kg de açúcar por R\$ 7,50 ou comprar cinco pacotes de 1 kg de açúcar por R\$ 1,70 cada?

Um médico ou enfermeiro precisam, por exemplo, administrar alguns medicamentos cuja dosagem varia de acordo com a massa corporal do paciente. Isso ocorre, pois, via de regra, a dosagem específica e eficaz do medicamento já vem pré-determinada pelos laboratórios e, por isso, deve-se tomar muito cuidado para evitar uma dosagem em excesso, já que pode causar danos à saúde do paciente, ou seja, é vital que a proporção entre massa corporal e quantidade de medicamento seja respeitada.

Quando nos deparamos com situações como essas e tantas outras, na qual a Proporcionalidade está inserida, é necessária atenção a cálculos simples para uma tomada de decisão acertada. Comparar as grandezas que nos cercam é crucial no cotidiano de um comerciante, de um engenheiro, de um estudante, de uma cozinheira, de um atleta, enfim, é fundamental para que qualquer cidadão possa avaliar uma dada situação quando as relações entre as grandezas envolvidas são comparáveis.

Diante desse panorama, entendemos que o processo de ensino e de aprendizagem relacionado ao objeto de conhecimento Proporcionalidade merece destaque, já que sua ocorrência é na Educação Básica e sua aplicabilidade é, dentre muitas, de relevância social.

Nesse sentido, a criação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que objetiva definir quais conhecimentos essenciais os estudantes brasileiros têm o direito de ter acesso e se apropriar durante sua trajetória na Educação Básica, torna-se importante a análise minuciosa desse documento de modo que sejam contemplados de fato os conhecimentos relevantes para o processo de aprendizagem e desenvolvimento dos estudantes.

Dessa forma, o presente trabalho surgiu da motivação em tentar verificar quais saberes relacionados à Proporcionalidade foram priorizados e quais foram omitidos em alguns manuais de ensino. Para isso, serão analisadas quatro coleções

de livros didáticos do segundo segmento do Ensino Fundamental II das últimas quatro décadas, de modo a observar o processo de modificação sofrido por esse objeto de conhecimento no decorrer dessas décadas e, então, investigar a imprescindibilidade dos tópicos relacionados ao mesmo.

Para realizar essa investigação, iremos utilizar uma abordagem ecológica do saber, uma opção teórica advinda após a leitura do trabalho de Rodrigues (2009), que trata sobre o Teorema Central do Limite sob uma abordagem ecológica do saber e do didático. Nesta investigação, em particular, não iremos trabalhar sob o ponto de vista do didático, tendo em vista que a mesma não será aplicada diretamente em um ambiente como a sala de aula. Contudo, vale dizer que a transposição didática justifica a pertinência do tema por fazer parte da tarefa daquele que é responsável em transformar o saber científico em saber a ser ensinado: o professor.

Este trabalho está dividido em quatro capítulos. No primeiro e presente capítulo, estão apresentadas as motivações sob o ponto de vista social do objeto do saber: “Proporcionalidade” e a estruturação da pesquisa.

Em seguida, no capítulo 2, será apresentada a revisão da literatura relativa à Proporcionalidade e à ecologia do saber, ambas feitas a partir dos bancos de dados de periódicos e dissertações e teses da Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior (CAPES), seguido dos procedimentos metodológicos utilizados na presente pesquisa.

Além disso, apresentaremos o quadro teórico da investigação, ecologia do saber; algumas considerações sobre a regra de três e o raciocínio proporcional; um breve cenário histórico da Proporcionalidade e, ainda, como o tema Proporcionalidade é tratado nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998).

No capítulo 3, apresentaremos a entrevista realizada com Luiz Márcio Imenes, referente à sua carreira e quanto à sua posição sobre o tema Proporcionalidade no processo de ensino e de aprendizagem. Vale ressaltar que essa entrevista foi publicada na Revista Cadernos da Educação Básica, culminando, assim, no Produto Educacional preconizado em Programas de Mestrado Profissional.

No capítulo 4, por sua vez, serão analisados os livros didáticos das coleções selecionadas para cada uma das décadas, da década de 80 à década de 2010.

Por fim, serão apresentadas as considerações finais com o intuito de responder a problemática da presente pesquisa.

2 REVISÃO DA LITERATURA, PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS E QUADROTEÓRICO DA INVESTIGAÇÃO

O presente capítulo está dividido em sete partes. Inicialmente, apresentaremos a revisão da literatura feita a partir dos bancos de dados de dissertações e teses da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e do portal de periódicos, também da CAPES, que tratam sobre a ecologia do saber e sobre proporcionalidade. Nesta parte, serão apresentados também outros dois trabalhos que não estão no Portal da Capes, sendo que um deles foi encontrado a partir das referências bibliográficas dos trabalhos catalogados nessa revisão da literatura, mas, com uma abordagem histórica; e o outro é referencial teórico deste trabalho. Na segunda parte, falaremos sobre a metodologia de pesquisa escolhida. Na terceira parte, discorreremos sobre o referencial teórico adotado no trabalho, relativo à ecologia do saber, com base nos trabalhos de Artaud (1998) e Rodrigues (2009). Na quarta parte, apresentaremos a abordagem dada ao conteúdo de Proporcionalidade nos Parâmetros Curriculares Nacionais. Na quinta e sexta parte, faremos algumas considerações sobre a regra de três e o raciocínio proporcional, respectivamente. E, por fim, na sétima parte, trataremos um breve cenário histórico da proporcionalidade.

2.1 REVISÃO DA LITERATURA

Na revisão da literatura, verificamos que, embora a Proporcionalidade seja indispensável para a resolução de inúmeros problemas, existem poucos trabalhos vinculados ao tema. Além disso, em nenhum local pesquisado foi encontrado um trabalho que relacionasse o objeto de conhecimento, Proporcionalidade, sob o ponto de vista ecológico.

Para organizar os aspectos pesquisados na revisão da literatura, inicialmente, discorreremos sobre os trabalhos encontrados sobre a ecologia do saber, referencial teórico desta dissertação e, em seguida, sobre os trabalhos voltados à Proporcionalidade.

Para encontrar as pesquisas relacionadas à ecologia do saber no Portal da Capes, foram considerados apenas os trabalhos catalogados a partir de 1995 e as palavras-chave utilizadas na busca foram: ecologia, ecológica, saber e ecologia do

saber. Após aplicar esses filtros e realizar a leitura dos títulos e resumos, foi possível encontrar quatro trabalhos que utilizam uma abordagem ecológica do saber, porém a Matemática, não está no discurso de nenhum deles.

O primeiro artigo, de 2010, intitulado “Ecologia de Saberes: O diálogo entre a universidade e a alfabetização de adultos”, de autoria de Esméria de Lourdes Saveli, objetivou relatar a experiência vivenciada por acadêmicos do 3º e do 4º ano do Curso de Pedagogia, que se inscreveram para discutir e acompanhar as atividades que alfabetizadores desenvolviam em um Projeto de Alfabetização Solidária, composto por duas etapas. A primeira etapa foi voltada para a formação de professores, com o desenvolvimento de atividades teórico práticas com os acadêmicos sobre o tema alfabetização de adultos, na perspectiva teórica de Paulo Freire. E, a segunda etapa, denominada ecologia de saberes, fundamentação teórica desta pesquisa, possibilitou a promoção do diálogo entre o saber científico, que a universidade produz e os outros saberes provindos de diferentes culturas e experiências dos participantes do projeto. No decorrer do projeto foram citadas algumas dificuldades dos alfabetizadores ao lidar, por exemplo, com o desconhecimento em programar atividades diversificadas para atender aos alunos, em seus diferentes níveis de conhecimento/aprendizagem. Dessa forma, os acadêmicos de posse dessa informação puderam orientar esses alfabetizadores, o que possibilitou avanços qualitativos da prática pedagógica do alfabetizador e, também, o desenvolvimento da aprendizagem dos alfabetizandos, mostrando que o diálogo entre os saberes proporcionou um progresso satisfatório no projeto supracitado.

O segundo artigo, de 2010, intitulado como “Formação com educadores/as e os desafios da práxis da Educação Popular na Universidade”, de Ana Lúcia Souza de Freitas e Maria Elisabete Machado, põe em diálogo as referências de Paulo Freire e de Boaventura de Souza Santos para enfatizar a validade epistemológica do saber da experiência e propor a ecologia dos saberes como uma alternativa à monocultura do saber e do rigor, monocultura essa com a ideia de que o único saber rigoroso é o saber científico. Ressalta também que a partir da escuta dos educandos é possível obter um caminho para a refundamentação da Educação Popular e para sua práxis no contexto da Universidade.

Os dois artigos assemelham-se, visto que o foco está na formação de professores e por utilizar a ecologia dos saberes como mecanismo para troca de

experiências entre educadores/educandos, ou seja, acolhe diferentes saberes e os reúne aos diferentes conhecimentos científicos acumulados pela humanidade. As referidas autoras citam Boaventura de Souza Santos para definir ecologia dos saberes:

[...] a ecologia de saberes é, por assim dizer, uma forma de extensão ao contrário, de fora da universidade para dentro da universidade. Consiste na promoção de diálogos entre o saber científico que a universidade produz, e saberes [...] que circulam na sociedade. (SANTOS, 2004, p. 76).

O terceiro trabalho encontrado foi uma dissertação de mestrado em Educação, defendida no ano de 2012, na Universidade Católica de Brasília, cujo título é “A ecologia de saberes na formação de professores”, de autoria de José Roberto de Souza Santos.

Essa dissertação teve por objetivo investigar como os saberes docentes influenciam o currículo do curso de Pedagogia. Nela, o autor analisa o atual currículo dentro do projeto moderno/colonial e as possibilidades de uma ecologia de saberes na formação de professores. A pesquisa foi de natureza qualitativa e os dados foram coletados a partir de pesquisa documental, em documentos institucionais, e entrevista semiestruturada com professores do referido curso. O autor constatou, ao final da pesquisa que, mesmo diante de um currículo com características fortemente coloniais¹, há na prática dos docentes alguns sinalizadores da valorização de um saber pluri-versal (epistemologias plurais que considera novas formas de produzir saber além da tradicional) e de uma ecologia de saberes.

Por fim, ao pesquisar ecologia dos saberes, encontramos também o uso desse referencial teórico em mais um artigo no Portal de Periódicos da CAPES, porém ligado à área de Ciências Biológicas. Achemos importante mencionar esse trabalho em nossa pesquisa, para enfatizar que a ecologia dos saberes pode ser aplicada em diversos contextos. O artigo, de 2013, intitulado “Mudanças de paradigmas e as possibilidades da sustentabilidade ambiental na sociedade de consumo: algumas reflexões teóricas” de Gracy Kelly Monteiro Dutra Teixeira ressalta a personalidade individualista da sociedade, o consumo exacerbado, o

¹ A colonialidade é uma forma de relação entre nações e povos em que um lado explora e impõe sua vontade, enquanto que o outro é explorado e mantido sob controle. Embora o colonialismo em sua dimensão política de controle direto de uma metrópole sobre “suas” colônias praticamente tenha chegado ao fim, o mesmo não se pode dizer do padrão de poder criado por ele. (SANTOS, 2004, p. 11)

limite dos recursos naturais e complementa que caso os sujeitos sociais não buscarem uma postura sustentável, serão os responsáveis de seu próprio extermínio. Assim, traz o consumo como elemento norteador da discussão sobre a efetividade da sustentabilidade ambiental, além de avaliar sobre a possibilidade de inserção da ecologia dos saberes que poderia alterar a relação de distanciamento do ser humano com o outro, com as coisas e com o ambiente, ou seja, o ser humano deve se sentir parte do ambiente que o circunda, como uma unicidade sujeito-ambiente.

A escolha do referencial teórico dessa investigação ocorreu a partir da leitura da tese de doutorado de Rodrigues (2009), cujo título é: O teorema central do limite: um estudo ecológico do saber e do didático. Portanto, finalizaremos a revisão da literatura sobre ecologia do saber com esse trabalho, o qual relaciona um objeto matemático, no caso o teorema central do limite, com o referencial teórico em questão. Esse trabalho partiu do questionamento sobre quais saberes são imprescindíveis de modo que o teorema central do limite persistisse em “sobreviver”, como tema, em livros textos de nível superior, na disciplina de Estatística de diferentes cursos de graduação. A partir da análise desses livros e da construção de ideias surgidas de algumas atividades aplicadas aos licenciandos, sujeitos da pesquisa, foi possível observar os fenômenos didáticos que auxiliaram na análise das ideias e dos conceitos sobre o teorema central do limite, detectando os saberes indispensáveis para que o teorema sobreviva, bem como as limitações nas obras consultadas que interferem na elaboração das atividades por parte do professor.

Sobre o objeto do saber, Proporcionalidade, encontramos ao todo dez trabalhos no Portal da CAPES. Vale ressaltar que em alguns desses casos, o termo proporcionalidade não aparece explicitamente nos títulos, mas sim, a regra de três, que relaciona duas grandezas diferentes por meio de uma proporcionalidade entre elas. Isso ocorreu porque a palavra-chave “regra de três” também foi considerada na busca, além das palavras “proporção” e “proporcionalidade”. Assim como na pesquisa sobre ecologia dos saberes, foram considerados apenas trabalhos publicados no Portal da Capes a partir do ano de 1995 e para selecionar os trabalhos foi realizada a leitura dos títulos e resumos. Vale destacar que a maioria deles foi descartada apenas por meio da leitura dos títulos, pois se tratavam de pesquisas voltadas para a área de Direito, não se encaixando assim às especificidades do presente trabalho.

A tese de título “Medidas e Proporcionalidade na escola e no mundo do trabalho”, de Maria Gilvanise de Oliveira Pontes, defendida em 1996, objetivou verificar a relação entre a matemática advinda da escola a partir da análise das aulas das turmas de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental, nos conteúdos de Medidas e Razão e Proporção, com as atividades do dia a dia de uma costureira, uma comerciante, uma cozinheira, um marceneiro, um mestre de obras e um oleiro, procurando verificar que itens eram abordados e como eram trabalhados por esses profissionais. Em seguida, foram confrontadas as duas abordagens constatando que as estratégias mais usadas por esses profissionais não são ensinadas na matemática escolar, concluindo que há uma lacuna entre “o que” e “como” se ensina Matemática na escola e “o que” e “como” se usa essa disciplina na prática diária dos profissionais observados.

A dissertação intitulada “Educação de Jovens e adultos: Uma aplicação da regra de três e porcentagem em cálculos trabalhistas”, de David Luiz Mazzanti, defendida em 2008, traz à tona o interesse dos alunos da 3ª série do Ensino Médio do segmento de ensino da EJA, na aprendizagem dos cálculos trabalhistas e a influência da regra de três e porcentagem na solução de problemas vinculados ao tema. O autor traz quatro indagações em sua pesquisa, no sentido de entender o porquê desse interesse dos alunos, as maiores dificuldades apresentadas por eles quando solucionam esses problemas, quais os conhecimentos prévios necessários para sua resolução e qual o impacto quando a Matemática é apresentada de uma maneira contextualizada para a vida dos alunos desse segmento de ensino. Foram utilizados dois instrumentos para tentar responder a essas questões: o instrumento 1, que identificava os conceitos trabalhistas que os alunos pesquisados tinham o interesse em conhecer e aprender e o instrumento 2, composto de quatro situações-problema, concluindo, a partir deles, que o interesse em aprender os cálculos referentes às leis trabalhistas deriva-se do próprio fato de pertencer à rotina dos alunos pesquisados, já que todos trabalhavam durante a realização da pesquisa.

Em relação aos conhecimentos prévios, o autor verificou a necessidade de conhecimento da linguagem natural (leitura e escrita), interpretação de situações-problema, cálculo envolvendo as quatro operações no conjunto dos números racionais, regra de três simples, porcentagem, conversões de medida de tempo (base sexagesimal para base centesimal). Ele notou também que as maiores dificuldades são relativas aos descontos obrigatórios para empregados com registro

na carteira de trabalho (INSS, FGTS e Vale Transporte), alguns erros relacionados ao uso da regra de três, porcentagem, tarefas com as quatro operações envolvendo números decimais e de interpretação para a resolução das situações-problema. Mas, de modo geral, constatou-se um bom desempenho desses alunos na resolução das questões aplicadas, nas quais o uso de regra de três e porcentagem era necessário e o impacto foi bastante positivo, dado que a aplicação de uma situação-problema voltada ao interesse do aluno pesquisado facilitou o aprendizado mais significativo.

Outra dissertação encontrada foi “A prática de ensino de Física no Ensino Médio e o conceito de proporcionalidade: conexão fundamental na construção e (re)construção de conhecimentos” defendida em 2009 por Luis Carlos da Silva. Essa dissertação, construída à luz da Teoria Antropológica do Didático, de Yves Chevallard, teve por objetivo apontar caminhos para a construção de novas praxeologias que considerassem a (re)ligação/articulação dos vários conteúdos de Física, evocando os conceitos de proporcionalidade e a regra de três algebrizada, para auxiliar na compreensão dos fenômenos físicos observáveis no dia a dia. A pesquisa foi realizada por meio de uma entrevista semiestruturada, com cinco professores que lecionam Física no Ensino Médio, com o objetivo de descobrir qual tipo de conexão os professores estabelecem entre o pensamento de grandezas diretas e inversamente proporcionais e regra de três simples e fenômenos relacionados, principalmente, com a Cinemática, por exemplo, velocidade média ($v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$), força ($f = m \cdot a$), densidade ($d = \frac{m}{v}$), trabalho ($\tau = f\Delta s$), potência ($P = F \cdot v$), dentre tantas outras, a fim de potencializar a incorporação estruturada de saber. Após analisar as entrevistas com os cinco professores, o autor concluiu que a construção de conhecimentos de Física possui um perfil mecânico, estático e irrefletido e que não era comum articular a Física e a Matemática para compreender os fenômenos físicos.

No artigo de uma das edições de 2009 da revista *Bolema*, intitulado como “Proporcionalidade: estratégias utilizadas na resolução de problemas por alunos do Ensino Fundamental no Quebec”, de Izabella Oliveira, o objetivo foi relatar as estratégias usadas por alunos do 6º ano do Ensino Fundamental na resolução de problemas envolvendo Proporcionalidade antes do ensino formal do conceito. Os resultados mostraram que os alunos utilizam diferentes e boas estratégias para a

resolução dos problemas e, ainda, revelaram quais as maiores dificuldades encontradas por eles nessas resoluções, como por exemplo, a passagem das relações aditivas às relações multiplicativas e o reconhecimento das relações não proporcionais, considerando tais resultados encontrados como possíveis.

Com uma abordagem tecnológica, a tese “Atividades digitais e a construção dos conceitos de proporcionalidade: uma análise a partir da teoria dos campos conceituais”, defendida em 2010, por Leandra Anversa Fioreza, teve por objetivo desenvolver uma investigação com alunos da zona rural do 8º ano utilizando atividades digitais feitas com os *softwares* Régua e Compasso, planilha eletrônica, geoplano, dois objetos de aprendizagem criados pelo grupo de pesquisa RIVED/UNIFRA, um vídeo “Matemática na Vida: Razão e Proporção”, do portal Domínio Público e objetos materiais como maquetes, molas, moedas, folhas de papel, sendo todas elas relacionadas com o conceito de Proporcionalidade. Após a análise dos resultados obtidos, constatou-se que as atividades digitais contribuíram, significativamente, para o desenvolvimento das estruturas multiplicativas e da proporcionalidade.

A dissertação, cujo título é “Matemática e cidadania: O ensino da regra de três em uma classe do 2º ano do Ensino Médio noturno” apresentado por Mauro José dos Santos Flora, no ano de 2011, objetivou analisar a relação entre o ensino da Matemática e o exercício da cidadania, com foco na regra de três como ferramenta de cálculo no cotidiano do aluno de um ensino regular noturno. O autor relaciona o ensino da Matemática com as ações práticas da vida de um indivíduo, que, enquanto cidadão, precisa ter capacidade de entender a sua situação no mundo e seus direitos para, somente assim, poder reivindicá-los. Foram coletadas informações a partir de questionários socioeconômicos, atividades prático-acadêmicas e por meio do contato com a direção e com os alunos do Colégio. A partir desses relatos, constatou-se que os estudantes passaram a usar a matemática de forma a facilitar seu desempenho no emprego, denotando assim relacionar um conteúdo matemático com o exercício da cidadania.

A pesquisa intitulada “Regra de três: prática escolar de modelagem matemática”, apresentada, em 2011 por Denivaldo Pantoja da Silva, teve por objetivo apontar caminhos que pudessem, mesmo que parcialmente, levar à compreensão do ensino da regra de três na formação de uma consciência crítica, que revele os modelos matemáticos como algo não restrito apenas à Matemática.

No decorrer da dissertação, o autor fez uma análise histórica acerca do conteúdo de regra de três e, a partir disso, verificou o caráter prático da regra de três ao longo do tempo e a possibilidade de permitir um fazer docente de regra de três algebrizada, que poderá promover o ensino da modelagem matemática na escola, tornando-a mais atuante e reflexiva socialmente.

No banco de teses da CAPES, encontramos também um trabalho intitulado “Labirintos da compreensão de regras em Matemática: um estudo a partir da regra de três” de Janeisi de Lima Meira, do ano de 2012. Nessa dissertação, a autora teve como objetivo analisar os procedimentos adotados por alunos do Ensino Fundamental na resolução de regra de três simples e composta e o processo de tratamento que é dado à linguagem, particularmente à linguagem matemática, destacando grande dificuldade dos alunos na resolução desses problemas, bem como a maneira mecânica da aplicação da regra de três, sem atribuição de sentido. Destaca ainda a confusão gerada com regras aprendidas em experiências anteriores que não se adéquam à nova situação de aprendizagem e que a maneira como aplicamos uma regra depende de como fomos ensinados, embora sua aplicação faça parte de nossa subjetividade.

A dissertação intitulada “Proporcionalidade à luz da Teoria dos Campos Conceituais: uma sequência de ensino diferenciada para estudantes da EJA”, de Eduardo Lopes de Macedo, foi defendida em 2012 e teve como intuito investigar as potencialidades de uma sequência de ensino focada na aprendizagem do conceito de proporção simples, embasado nos conhecimentos prévios dos estudantes da Educação de Jovens e Adultos (EJA) e à luz da Teoria dos Campos Conceituais. O autor utilizou um grupo de controle e um grupo experimental, que passaram por intervenções distintas e, por meio de um pré-teste e um pós-teste, constatou ao final que os alunos do grupo experimental apresentaram uma ampliação em seus conhecimentos acerca do tema e que o método utilizado tornou-se eficiente.

O artigo, de 2013, intitulado como “O desenvolvimento do raciocínio proporcional num ambiente dinâmico de geometria dinâmica: ressonância de um programa de formação contínua em matemática” de José Pinheiro e Isabel Cabrita resume-se a uma experiência de aprendizagem que pudesse contribuir para o desenvolvimento do raciocínio proporcional e de representação gráfica das situações em causa, envolvendo o conceito de função linear. Após a análise qualitativa dos dados, a partir de um ambiente dinâmico de geometria, usando

GeoGebra, verificou-se que tal ambiente pode criar condições para a compreensão e desenvolvimento do raciocínio proporcional.

Por fim, encontramos a dissertação intitulada “Atribuição de significado ao conceito de proporcionalidade: contribuições da História da Matemática”, a partir das referências de um dos outros trabalhos citados anteriormente, e ele foi muito útil na abordagem de alguns aspectos históricos da presente pesquisa. Nesse trabalho de 2010, o autor José Roberto Costa Júnior realiza uma coleta de dados utilizando notas de campo, questionário, sequência de atividades e entrevista como instrumentos de pesquisa. Esse estudo objetivou conhecer os significados atribuídos ao conceito de proporcionalidade por meio de atividades voltadas à História da Matemática e verificar se essa abordagem colabora no processo de ensino e aprendizagem voltada a esse objeto de conhecimento. Os resultados indicaram que as atividades desenvolvidas corroboraram no alcance dos objetivos, revelando que há um longo percurso a ser trilhado no sentido de tornar a História da Matemática subsídio na prática desses professores, devido à falta de formação na área, além da carência de livros que abordam adequadamente o tema.

Há de se destacar, após a revisão da literatura, a evidente preocupação dos autores quanto ao ensino e à aprendizagem dos alunos sobre o conteúdo de proporcionalidade. É notória também a preocupação da formação de uma consciência crítica que leve não somente à aprendizagem de um conceito, mas, também, à formação do indivíduo enquanto cidadão.

De fato, os trabalhos catalogados na revisão da literatura, tanto os relacionados ao objeto de conhecimento “Proporcionalidade”, quanto à fundamentação teórica, “ecologia do saber”, cada um com suas devidas importâncias e particularidades, delimitam um universo pequeno de pesquisas relacionadas a ambos os temas. Nesse sentido, esta dissertação vem com o objetivo de contribuir ainda mais com as pesquisas voltadas a esse objeto de conhecimento de grande relevância no contexto social e matemático.

2.2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Para responder a questão desta investigação, serão analisadas quatro coleções de livros didáticos, sendo uma coleção da década de 1980, uma da década de 1990, uma da década de 2000 e outra da década de 2010, cuja seleção será

detalhada ulteriormente. Assim, foi realizada uma pesquisa bibliográfica com a finalidade de identificar como o conteúdo de Proporcionalidade foi explorado no segundo segmento do Ensino Fundamental pelos autores das coleções de livro didáticos escolhidos para análise. De fato, conforme Gil (2008) salienta a seguir, a pesquisa bibliográfica é a melhor forma de investigar e extrair informações de materiais desenvolvidos anteriormente.

A pesquisa bibliográfica é desenvolvida a partir de material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos. Embora em quase todos os estudos seja exigido algum tipo de trabalho desta natureza, há pesquisas desenvolvidas exclusivamente a partir de fontes bibliográficas. Parte dos estudos exploratórios podem ser definidos como pesquisas bibliográficas, assim como certo número de pesquisas desenvolvidas a partir da técnica de análise de conteúdo. A principal vantagem da pesquisa bibliográfica reside no fato de permitir ao investigador a cobertura de uma gama de fenômenos muito mais ampla do que aquela que poderia pesquisar diretamente. Esta vantagem se torna particularmente importante quando o problema de pesquisa requer dados muito dispersos pelo espaço. (GIL, 2008, p. 50)

Os dados dispersos ao longo do tempo, quando reunidos, podem trazer um conjunto de informações muito relevantes sobre o objeto a ser pesquisado. Para tanto, a transposição didática, que é “o trabalho que faz de um objeto de saber a ensinar em um objeto de ensino” (CHEVALLARD, 1991), constitui-se como instrumento para justificar o processo de transformação no qual o saber científico perpassa ao longo do tempo, no caso da presente pesquisa, o processo de transformação pelo qual o objeto do saber “Proporcionalidade” passou nas décadas analisadas.

Sua capacidade de abrangência permite justificar tanto os processos envolvidos na construção do saber e na sua divulgação como a estruturação deste saber quando este saber é apresentado em livros textos, como também nos permite compreender as modificações pelas quais ele passa até ser ensinado na sala de aula. Mesmo tendo sido concebido por um determinado grupo social, este conceito pode ser utilizado por outros grupos sociais, com diferentes práticas sociais de referência, desde que estas sejam levadas em consideração na realização da análise. (ALVES FILHO, 2000, p.178)

Chevallard e Joshua (1982) estabeleceram algumas diretrizes que nortearam as transformações ocorridas do saber sábio para o saber a ensinar e essas

diretrizes encaixam-se muito bem nesta investigação, pois o livro didático tem um papel muito importante no processo de ensino e de aprendizagem.

- Regra 1 - Modernizar o saber escolar. A modernização faz-se necessária, pois o desenvolvimento e o crescimento da produção científica são intensos. Novas teorias, modelos e interpretações científicas e tecnológicas forçam a inclusão desses novos conhecimentos nos programas de formação (graduação) de futuros profissionais.
- Regra 2 - Atualizar o saber a ensinar. Saberes ou conhecimentos específicos, que de certa forma já se vulgarizaram ou banalizaram, podem ser descartados, abrindo espaço para introdução do novo, justificando a modernização dos currículos.
- Regra 3 - Articular saber “velho” com “saber” novo. A introdução de objetos de saber “novos” ocorre melhor se articulados com os antigos. O novo se apresenta como que esclarecendo melhor o conteúdo antigo, e o antigo hipotecando validade ao novo.
- Regra 4 - Transformar um saber em exercícios e problemas. O saber sábio, cuja formatação permite uma gama maior de exercícios, é aquele que, certamente, terá preferência frente a conteúdos menos “operacionalizáveis”. Esta talvez seja a regra mais importante, pois está diretamente relacionada com o processo de avaliação e controle da aprendizagem.
- Regra 5 - Tornar um conceito mais compreensível. Conceitos e definições construídos no processo de produção de novos saberes elaborados, muitas vezes, com grau de complexidade significativo, necessitam sofrer uma transformação para que seu aprendizado seja facilitado no contexto escolar. (CHEVALLARD; JOSHUA, (1982) apud ALVES FILHO, 2010, p.178)

As regras 2 e 3, principalmente, afirmam a imprescindibilidade de nossa investigação, dado que atualizar o saber a ensinar faz-se necessário para a renovação dos currículos e, para isso, um estudo aprofundado é indispensável para introduzir algum saber novo ou retirar algum que não faz mais sentido. As regras 1, 4 e 5 justificam e também coadunam com as outras duas ao expressarem a necessidade de modernizar o saber escolar, tornar um saber mais operacionalizável e tornar um conceito mais compreensível, respectivamente.

O tópico a seguir diz respeito à fundamentação teórica que irá subsidiar os argumentos da pesquisa.

2.3 QUADRO TEÓRICO DA INVESTIGAÇÃO

Nesta parte do trabalho, vamos apresentar o quadro teórico que utilizamos para o desenvolvimento desta pesquisa. Para concatenar o objeto matemático e as

ideias advindas da análise dos livros didáticos, elegemos uma abordagem sob o ponto de vista ecológico do saber inspirada na problemática de Rodrigues (2009), isto é, quais saberes “resistiram” em permanecer no ensino da proporcionalidade em livros didáticos nas últimas quatro décadas?

Para aprofundarmos a relevância ecológica conferida à problemática desse estudo, faremos um delineamento sobre o que vem a ser uma estrutura ecológica a partir de um ecossistema do saber, segundo a mesma autora (RODRIGUES, 2009).

2.3.1 A problemática ecológica sob o ponto de vista do saber

Para realizar a investigação, quanto à problemática ecológica, optamos pela abordagem de Artaud (1998) que nos permite questionar o real, diante de perguntas como: O que existe e por quê? O que não existe e por quê? Poderia existir? Sobre quais condições? Dado um conjunto de condições, quais objetos são forçados ou impedidos de viver nessas condições?

Dessa forma, retomaremos à questão de nossa investigação, agora em forma de pergunta:

Quais saberes relacionados à Proporcionalidade foram priorizados e quais foram omitidos em alguns manuais de ensino das últimas quatro décadas?

Para salientar a importância ecológica relativa à problemática apresentada, faremos um breve esboço sobre o que é essa estrutura ecológica, a qual irá subsidiar teoricamente a pesquisa, a partir de um ecossistema, direcionada para a ideia e o conceito de proporcionalidade na Educação Básica.

2.3.2 A noção de ecossistema

A ecologia didática surgiu após a ecologia biológica. Segundo Artaud (1998) a ecologia didática inspirou-se na ecologia biológica, tal qual se desenvolveu no fim do século XIX.

A criação da palavra ecologia veio de Haeckel, em 1866. Ele definiu “ecologia” como a ciência que engloba todas as relações dos organismos com o mundo exterior que os envolve, incluindo suas condições de existência, isto é, as relações extrínsecas e intrínsecas

dos organismos com o meio, formando uma estrutura ecológica chamada de ecossistema. (RODRIGUES, 2009, p.55).

Um conceito que se mostrou bastante importante nessa ciência foi o conceito de ecossistema, que originou da tentativa em compreender a organização das plantas em sociedade, após verificarem que em uma região havia uma espécie de árvore dominante e outras plantas associadas a essa espécie.

Dajoz (2005 apud RODRIGUES, 2009, p. 55) conceitua ecossistema como “um conjunto de elementos em interação uns com os outros, formando um todo coerente e ordenado. É um sistema hierarquizado no qual os próprios elementos constitutivos são subsistemas estruturados”.

Diante desses subsistemas estruturados, um conjunto de espécies, que ocupam e partilham de um mesmo meio bem delimitado, é conhecido por biocenose (DAJOZ, 2005 apud RODRIGUES, 2009), e Rodrigues (2009, p. 56) diz que “as diversas espécies não são independentes: os elementos do ecossistema são interdependentes, porque mantêm entre si relações múltiplas, coerentes e ordenadas, formando, assim, um conjunto, em geral, estável e autônomo”.

Artaud (1998) ressalta quatro tipos de ecossistema para o saber matemático, identificados por alguns didatas a partir do pensamento eco - sistemático, no qual um ecossistema deve ser considerado como a unidade ecológica mais fundamental. São eles:

[...] ecossistema do saber, no qual se produz a matemática; ecossistema didático escolar, no qual se estuda a matemática; ecossistema profissional, onde utilizam a matemática para concretizar algumas tarefas; ecossistema noosferiano, enfim, aonde a matemática é manipulada para fins de transposição. Estes são os objetos matemáticos que, os primeiros, constituíram o “biótico do didata” (ARTAUD, 1998, p. 4).

Neste trabalho, o ecossistema predominante é o noosferiano, pois é na noosfera (CHEVALLARD, 1991) que se produz o saber a ser ensinado e estes são expressos nos livros didáticos em geral.

Como elemento de análise do processo de transformação do saber, a transposição didática, estabelece a existência de três estatutos, patamares ou níveis para o saber: (a) **o saber sábio** (savoir savant); (b) **saber a ensinar** (savoir à enseigner) e (c) **saber ensinado** (savoir enseigné). A existência destes patamares ou níveis sugere a existência de grupos sociais diferentes que respondem pela

existência de cada um deles. Estes grupos diferentes, mas com elementos comuns ligados ao “saber”, fazem parte de um ambiente mais amplo, que se interligam, coexistem e se influenciam, denominado de **noosfera**. (ALVES FILHO, 2000, p.176)

Para se ter uma noção da estrutura ecológica da Proporcionalidade como objeto do saber, compreendemos que um ecossistema é abarcado de relações de dependência e independência em relação a outros ecossistemas.

Segundo Rodrigues (2009, p. 56), “a dependência nos proporciona uma visão global do nosso estudo, e a independência nos permite distinguir o surgimento de objetos do saber a partir das diferentes tarefas que requerem a instrumentalização dos mesmos.” Dessa forma, neste trabalho, a dependência global pode ser justificada pela importância que a proporcionalidade desempenha devido sua aplicabilidade, por sua relevância enquanto objeto de conhecimento matemático, pelos demais objetos matemáticos indispensáveis para seu estudo e a forma como esse conteúdo é apresentado nos livros didáticos. Quanto à independência do ecossistema desse objeto de conhecimento, podemos ressaltar sua abordagem histórica e epistemológica, tal qual como será apresentada.

2.3.3 A abordagem ecológica do saber: a Proporcionalidade

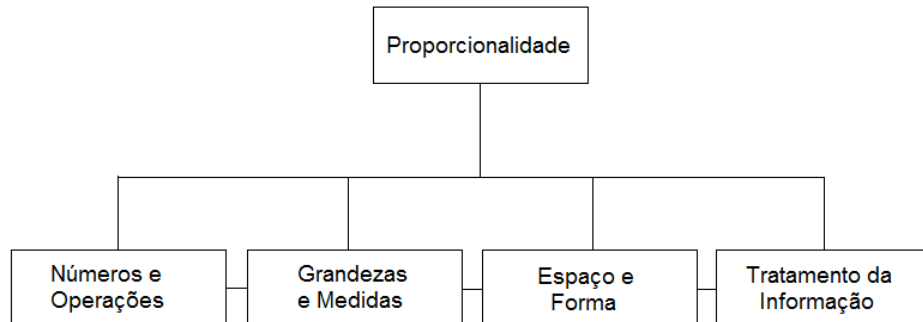
O conceito de Proporcionalidade é muito relevante devido ao seu emprego basilar para o entendimento de vários assuntos relacionados à Matemática e também para a compreensão de muitas relações quantitativas existentes nas demais Ciências. Ademais, dentro da própria Matemática, o estudo desse objeto de saber percorre os quatro blocos de distribuições de conteúdos estabelecidos pelos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, a saber: Números e Operações, Grandezas e Medidas, Espaço e Forma e Tratamento da Informação. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) intentam sobre como essa inter-relação pode ocorrer:

[...] algumas ideias ou procedimentos matemáticos, como proporcionalidade, composição e estimativa, são fontes naturais e potentes de inter-relação e, desse modo, prestam-se a uma abordagem dos conteúdos em que diversas relações podem ser estabelecidas. A proporcionalidade, por exemplo, está presente na resolução de problemas multiplicativos, nos estudos de porcentagem,

de semelhança de figuras, na matemática financeira, na análise de tabelas, gráficos e funções. (BRASIL, 1997, p. 38)

A seguir, Esquema 1, apresentamos um esboço que pode indicar um primeiro ecossistema associado à Proporcionalidade, evidenciando a existência desse objeto de conhecimento em cada bloco de conteúdo relacionado à Matemática estabelecido pelos PCN:

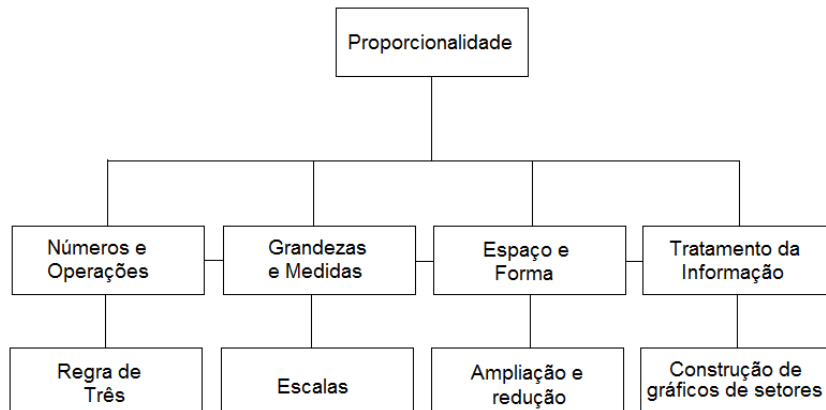
Esquema 1 - Proporcionalidade e os blocos de conteúdos



Fonte: Dados da autora

O Esquema 1 retrata a abrangência do conteúdo de Proporcionalidade na Matemática. É o ponto inicial para estruturarmos um sistema ecológico, isto é, para que o tema proporcionalidade esteja “vivo” nos quatros blocos de conteúdo dos PCN, é necessário justificar sua aplicabilidade em todos eles. Em Números e Operações, podemos citar, por exemplo, a regra de três; em Grandezas e Medidas, as escalas; em Espaço e Forma, problemas relacionados à ampliação e redução e em Tratamento da Informação, a construção de gráficos de setores. O Esquema 2 ilustra essa justificativa inicial.

Esquema 2 - Ecossistema inicial da proporcionalidade e algumas aplicações na Matemática



Fonte: Dados da autora

Assim, podemos enunciar que a biocenose da Proporcionalidade é o conjunto de saberes imprescindíveis que o faz existir na estrutura do conhecimento matemático, ou seja, um “conjunto de espécies que ocupam e partilham de um mesmo meio, bem delimitado, no qual foram reunidas de maneira fortuita” (DAJOZ, 2005 apud RODRIGUES, 2009, p. 55).

Sendo assim, a biocenose da Proporcionalidade pode ser entendida como a forma em que os blocos de conteúdo foram sugeridos nos PCN de Matemática para o segundo segmento do Ensino Fundamental e, além disso, destacam-se os exemplos atribuídos para cada um desses blocos, de modo a caracterizar a natureza da imprescindibilidade do tema.

A seguir, iremos abordar, brevemente, como a Proporcionalidade é tratada nos dois ciclos do Ensino Fundamental II nos PCN.

2.4 A PROPORCIONALIDADE E OS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental dos anos finais objetivam o ensino de proporcionalidade do seguinte modo no terceiro ciclo (5ª e 6ª séries):

Neste ciclo, o ensino de Matemática deve visar ao desenvolvimento do raciocínio que envolva proporcionalidade, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a observar a variação entre grandezas, estabelecendo relação entre elas e construir estratégias de solução para resolver situações que envolvam a proporcionalidade. (BRASIL, 1998, p. 65).

É perceptível que o principal objetivo nessa fase de ensino está na exploração do pensamento matemático a ser desenvolvido no estudante. É necessário que o docente, desde cedo, estimule a análise crítica das situações que envolvam um contexto matemático e, nesse caso, faça perguntas como: nessa situação existe a noção de proporcionalidade? Se existir, o que acontece com “aquela” grandeza se reduzirmos à metade “essa” grandeza? E se dobrarmos? Quando uma grandeza aumenta, a outra aumenta também ou diminui na mesma proporção? Essas grandezas são diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais?

Essas perguntas não requerem necessariamente que o aluno faça nenhum cálculo, mas os auxilia na construção do conhecimento com mais significado,

facilitando, assim, o desenvolvimento de técnicas para a resolução de situações-problema. Portanto, é necessário que a proporção seja tratada de modo a construir o conceito de modo gradativo e munido de significado.

O fato de que muitas situações da vida cotidiana funcionam de acordo com leis de proporcionalidade evidencia que o desenvolvimento do raciocínio proporcional é útil na interpretação de fenômenos do mundo real. Assim, é desejável explorar no terceiro ciclo problemas que levem os alunos a fazer previsões por meio de questões que envolvam aspectos qualitativos e quantitativos (O número encontrado deveria ser maior ou menor? Quanto maior? Essa resposta faz sentido?). Para resolver esses problemas os alunos poderão construir procedimentos não-convencionais, deixando para o quarto ciclo o estudo dos procedimentos convencionais. (BRASIL, 1998, p. 67).

De maneira adicional, no quarto ciclo, os PCN intentam esse ensino da seguinte forma:

Neste ciclo, o ensino de Matemática deve visar ao desenvolvimento do raciocínio proporcional, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a: representar em um sistema de coordenadas cartesianas a variação de grandezas, analisando e caracterizando o comportamento dessa variação em diretamente proporcional, inversamente proporcional ou não proporcional; resolver situações-problema que envolvam a variação de grandezas direta ou inversamente proporcionais, utilizando estratégias não-convencionais e convencionais, como as regras de três.(BRASIL, 1998, p. 82).

Fica evidente, que nesse ciclo, o estudante deve ser estimulado a desenvolver tarefas mais complexas do que aquelas explicitadas no ciclo anterior, pois, nessa fase de ensino, o estudo de proporcionalidade visa a preparar o estudante para outros conteúdos matemáticos, cuja proporcionalidade seja o alicerce, tais como Teorema de Tales ou até mesmo como análise do comportamento de funções, posteriormente.

Uma das habilidades matemáticas a serem ensinadas no quarto ciclo, que é de grande importância enquanto algoritmo de resolução de problemas envolvendo proporcionalidade e também alvo de inúmeras discussões é a Regra de Três. Para tanto destinaremos uma pequena parte a esse assunto, conforme apresentado a seguir.

2.5 REGRA DE TRÊS

Um dos processos mais práticos e utilizados para resolver problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais é a regra de três.

Diz-se regra de três porque nela ocorrem três números contínuos ou descontínuos proporcionais. E toda sua prática não é para outra coisa, se não para achar um quarto número desconhecido, que se acha em tal proporção com o terceiro, como o segundo com o primeiro. (PEREZ de MOYA, 1569 apud SILVA, 2009, p.21)

Na regra de três, tem-se uma grandeza x , direta ou inversamente proporcional, a outra grandeza y e os valores admitidos por x e y correspondem, respectivamente, a x' e y' . Conhecendo três desses valores, o problema consiste em determinar o quarto valor, desconhecido. Quando y é diretamente proporcional a x , chamamos de regra de três direta e quando y é inversamente proporcional a x , chamamos de regra de três inversa.

Supondo conhecer os valores de x , x' e y . temos que:

- i) se a regra de três é direta, tem-se que $y = k \cdot x$ e $y' = k \cdot x'$, logo $k = \frac{y}{x}$ e substituindo k em $y' = k \cdot x'$, tem-se que $y' = y \cdot \frac{x'}{x}$;
- ii) se a regra de três é inversa, tem-se que $x \cdot y = x' \cdot y' = k$, logo $y' = y \cdot \frac{x}{x'}$.

Dessa forma, em uma regra de três é possível calcular um valor desconhecido, quando se conhecem os outros três valores da proporção, sem precisar conhecer o valor de k (constante de proporcionalidade).

Vale lembrar também que é preciso observar com cuidado se as grandezas são realmente comparáveis antes de resolver uma situação-problema com o uso da regra de três. Há grandezas que não se relacionam como, por exemplo, a massa corporal de uma pessoa e sua idade. “Resolver um problema não se resume em compreender o que foi proposto e em dar respostas aplicando procedimentos adequados” (BRASIL, 1998, p. 42). Ou seja, a apropriação de um determinado conhecimento não está intrinsecamente ligada a uma resposta certa. Nessa forma de trabalho, “a importância da resposta correta cede lugar a importância do processo de resolução” (BRASIL, 1998, p. 42).

[...] grande ênfase tem sido dada apenas aos problemas de valor desconhecido e ao algoritmo da “regra de três”, tornando-se um algoritmo mecanizado que, muitas vezes, é erroneamente empregado. [...] Parece que, muitas vezes, no trabalho com proporcionalidade, o produto final desejado é a regra de três em si e não o raciocínio proporcional. (BOTTA, 1997, p. 126).

Por isso, o raciocínio proporcional é imprescindível no processo de ensino e de aprendizagem, ou seja, o estudante deve ser levado a verificar a relação entre as grandezas envolvidas na situação-problema antes de encontrar o resultado. A seguir discorreremos sobre esse conceito que é pertinente nesse processo que envolve a habilidade de relacionar grandezas.

2.6 RACIOCÍNIO PROPORCIONAL

O raciocínio proporcional é um conceito fundamental no desenvolvimento matemático dos alunos (LESH; POST; BEHR, 1988, p. 6-7). Raciocinar proporcionalmente é fundamental para a consolidação dos conhecimentos relativos à proporcionalidade, pois “[...] o raciocínio proporcional é amplamente conhecido como uma capacidade que conduz ao deslocamento conceptual significativo dos níveis operacionais do pensamento concreto para os níveis operacionais formais do pensamento”. (PIAGET; BETH, 1966 apud LESH; POST; BEHR, 1988, p. 7).

Considerações subjacentes a muitos dos mais elementares conceitos usados em ciência, na matemática e à resolução de problemas do cotidiano consistem muitas vezes em reconhecer modelos similares ou similaridades, mas profundos ao nível da formação conceptual em muitos campos da ciência ou da matemática. [...], acreditamos que o raciocínio proporcional é o culminar da aritmética elementar e o alicerce de tudo o que se segue. Consequentemente ocupa uma posição pivot nos programas escolares de Matemática (e das Ciências). (LESH; POST; BEHR, 1988, p. 4)

O raciocínio proporcional é, portanto, relevante para a aprendizagem efetiva do conceito, pois, é a partir dele que as situações-problema passam a ter mais sentido para o estudante, ou seja, quando o estudante entende a relação entre as grandezas sem precisar, efetivamente, realizar cálculos.

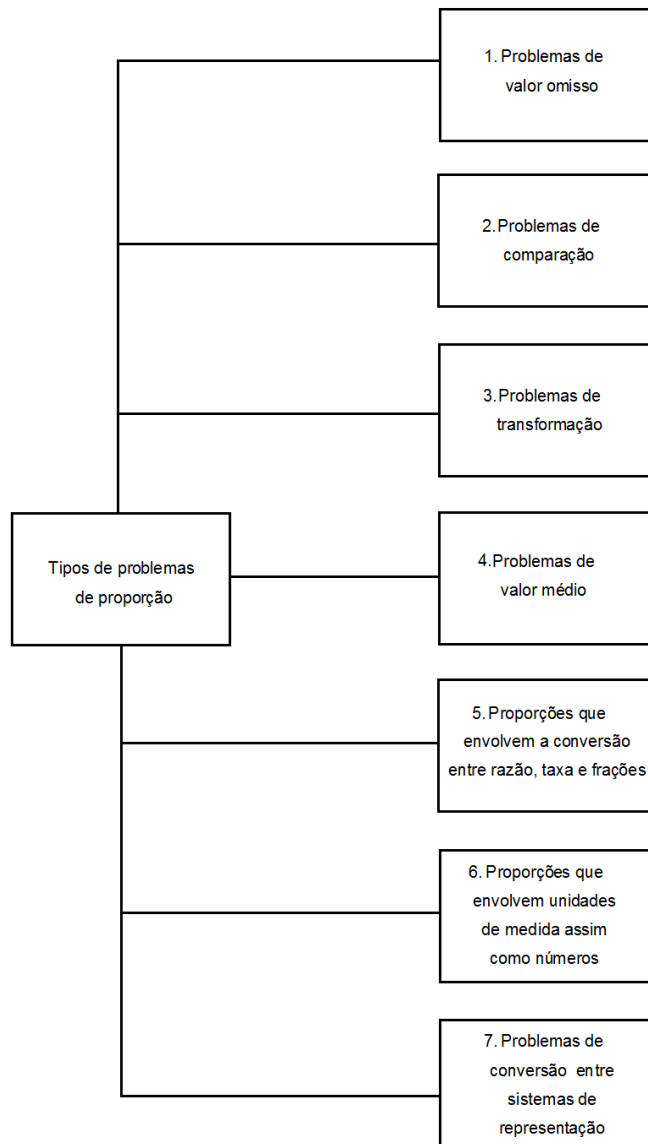
O fato de que vários aspectos do cotidiano funcionam de acordo com leis de proporcionalidade evidencia que o raciocínio proporcional é útil na interpretação de fenômenos do mundo real. Ele está ligado à

inferência e à predição e envolve métodos de pensamento qualitativos e quantitativos (Essa resposta faz sentido? Ela deveria ser maior ou menor?). Para raciocinar com proporções é preciso abordar os problemas de vários pontos de vista e também identificar situações em que o que está em jogo é a não-proporcionalidade. (BRASIL, 1997, p. 38)

Para atender às necessidades peculiares existentes na disciplina, esse raciocínio proporcional tende a ser modificado.

Segundo LESH, POST, BEHR (1988), surgem naturalmente sete tipos de problemas sobre proporções. Para elucidar esses problemas, foi possível elaborar o ecossistema a seguir, conforme Esquema 3.

Esquema 3 - Ecossistema dos tipos de problemas envolvendo proporcionalidade segundo Lesh, Post e Behr



Fonte: Dados da autora

Lesh, Post e Behr (1987) apontam ainda que desses sete problemas, os problemas do tipo 3 a 7 têm sido negligenciados na instrução centrada no manual e na investigação. A seguir discorreremos sobre esses sete tipos de problemas apontados pelos autores.

1. Problemas de valor omissa

Nos problemas desse tipo são conhecidos três valores e o objetivo é encontrar a parte omissa da segunda (e equivalente) razão $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$.

Geralmente, esse tipo de problema é o mais encontrado nos livros didáticos.

2. Problemas de comparação

Nesses tipos de problemas são dados os quatro valores A, B, C e D de $\frac{A}{B} \leq$ $\frac{C}{D}$ e o objetivo é avaliar qual das situações é válida:

$$\frac{A}{B} < \frac{C}{D} \text{ ou } \frac{A}{B} = \frac{C}{D} \text{ ou } \frac{A}{B} > \frac{C}{D}.$$

3. Problemas de transformação

Segundo os autores, os problemas de transformação podem ocorrer das seguintes formas: alteração de raciocínio e transformações para obter uma igualdade.

(a) Alteração de raciocínio: É dada uma equivalência na forma $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$. Depois, aumenta-se ou diminui-se uma certa quantidade de um ou dois dos quatro valores A, B, C ou D e o objetivo é decidir qual a relação (<, > ou =) que é agora válida.

(b) Transformações para obter uma igualdade: É dada uma desigualdade sob a forma $\frac{A}{B} < \frac{C}{D}$. Depois, para um dos quatro valores A, B, C ou D, um valor x deve ser determinado, de modo que, por exemplo, $\frac{(A+x)}{B} = \frac{C}{D}$, as razões sejam equivalentes.

4. Problemas do valor médio

São dados dois valores A e B e o objetivo é encontrar um terceiro:

(a) Média geométrica: $\frac{A}{x} = \frac{x}{B}$;

(b) Média harmônica: $\frac{A}{B} = \frac{(A-x)}{(x-B)}$,

5. Proporções que envolvem a conversão entre razão, taxas e frações

Exemplo:

A razão entre rapazes e raparigas na turma é de 15 para 12. Qual é a fração de rapazes na turma?

6. Proporções que envolvem unidades de medida assim como números

Exemplo:

$$\frac{3 \text{ pés}}{2 \text{ segundos}} = \frac{x \text{ milhas}}{1 \text{ hora}} \text{ ou } \frac{5 \text{ pés}}{1 \text{ segundo}} = \frac{x \text{ milhas}}{1 \text{ hora}}$$

7. Problemas de conversão entre sistemas de representação

A razão (fração, taxa ou quociente) é dada em um sistema de representação e o objetivo é representar essa mesma relação em outro sistema de representação.

Para Lesh, Post e Behr (1987, p. 5), “os problemas sobre raciocínio proporcional baseados na vida real envolvem frequentemente comparações entre sistemas de representação e esses tendem a ser surpreendentemente difíceis para a maioria dos alunos”.

O problema para elucidar esse tipo de problema foi o seguinte:

Figura 1 - Problema típico em textos sobre proporções

Susana pode andar 15 milhas em 5 horas.

A razão entre milhas por hora é de:

A) 5 para 15

B) 10 para 5

C) 3 para 1

D) nenhuma das alíneas anteriores.

Fonte: LESH; POST; BEHR (1988, p. 6)

Um aluno pode pensar sobre o problema da figura 1:

(a) Parafrazeando (isto é, traduzindo em linguagem mais simples): quinze está para cinco como...está para... .

(b) Desenhando um diagrama (isto é, traduzindo em uma imagem ou diagrama):

1ª HORA	2ª HORA	3ª HORA	4ª HORA	5ª HORA
MMMMM	MMMMM	MMMMM	MMMMM	MMMMM

(c) Escrevendo uma equação (isto é, traduzindo em linguagem simbólica):

$$\frac{15}{5} = \frac{m}{h}$$

Segundo os autores, mesmo quando um problema parece estar representado apenas em um sistema de representação, a sua solução pode envolver várias conversões entre sistemas.

Para determinar quais os aspectos do raciocínio proporcional que devem ser futuramente enfatizados, é importante reconhecer o seu papel de “conceito *watershed*”², enquanto fronteira que separa os conceitos elementares dos conceitos mais complexos. Isto é, constitui (1) um dos mais elementares conhecimentos de alto nível e (2) um dos conhecimentos elementares de nível mais elevado. (LESH; POST; BEHR, 1988, p. 7)

Nesse sentido, é notório seu emprego em situações mais elementares, em que o uso de uma regra de três simples seria suficiente para sua resolução ou em seu emprego como artifício na resolução de problemas mais complexos de Geometria, por exemplo, corroborando assim com a exposição anterior de Lesh, Post e Behr (1988), na qual é possível perceber a capacidade de transição do conteúdo entre problemas elementares e de nível mais elevado. Portanto, a noção de Proporcionalidade deve ser muito bem fundamentada para que essa transição entre os diferentes níveis de complexidade ocorra da melhor maneira.

Mas o que é proporcionalidade? Lima; Morgado; Wagner (2001) trazem a seguinte definição:

Diz-se que duas grandezas são proporcionais quando existe uma correspondência $x \mapsto y$, que associa a cada valor x de uma delas um valor y bem definido da outra, de tal modo que sejam cumpridas as seguintes condições:

²*Watershed* significa importante mudança histórica do curso [...] (LESH; POST; BEHR, 1988, p. 7, tradução nossa)

1) Quanto maior for x , maior será y . Em termos matemáticos: se $x \mapsto y$ e $x' \mapsto y'$ então $x < x'$ implica $y < y'$.

2) Se dobrarmos, triplicarmos, etc. o valor de x então o valor correspondente de y será dobrado, triplicado, etc. Na linguagem matemática: se $x \mapsto y$ então $nx \mapsto ny$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Nas condições acima, a correspondência $x \mapsto y$ chama-se uma proporcionalidade. (LIMA; MORGADO; WAGNER, 2001, p. 3)

O modelo matemático de proporcionalidade pode ser caracterizado por uma função linear e a demonstração a seguir, do livro Temas e Problemas, (LIMA; MORGADO; WAGNER, 2001, p.16), refere-se ao Teorema Fundamental da Proporcionalidade, no qual é possível verificar essa relação.

Teorema Fundamental da Proporcionalidade

Seja $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função com as seguintes propriedades:

$$1) x < x' \Rightarrow f(x) < f(x');$$

$$2) f(nx) = n \cdot f(x) \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e todo } x \in \mathbb{R}^+.$$

Então $f(cx) = c \cdot f(x)$ para todo $c \in \mathbb{R}^+$ e todo $x \in \mathbb{R}^+$.

Consequentemente, $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$, com $a = f(1)$.

Demonstração

Em primeiro lugar, para todo número racional $r = \frac{m}{n}$, com $m, n \in \mathbb{N}$, e todo $x \in \mathbb{R}^+$ vale

$$n \cdot f(rx) = f(n \cdot rx) = f(mx) = m \cdot f(x)$$

por 2), logo $f(rx) = \frac{m}{n} \cdot f(x) = r \cdot f(x)$. Assim, a igualdade $f(cx) = c \cdot f(x)$ é válida

quando c é racional. Suponhamos, por absurdo, que exista $c > 0$ irracional tal que $f(cx) \neq c \cdot f(x)$ para algum $x \in \mathbb{R}^+$. Então ou $f(cx) < c \cdot f(x)$ ou

$f(cx) > c \cdot f(x)$. Consideremos o primeiro caso. Temos então $\frac{f(cx)}{f(x)} < c$. Seja r um

valor racional aproximado de c , de modo que $\frac{f(cx)}{f(x)} < r < c$, logo

$f(cx) < r \cdot f(x) < c \cdot f(x)$. Como r é racional, vale $r \cdot f(x) = f(rx)$. Assim,

podemos escrever $f(cx) < f(rx) < c \cdot f(x)$. Em particular $f(cx) < f(rx)$. Mas, como $r < c$, tem-se $rx < cx$ e, pela propriedade 1), isso obriga $f(rx) < f(cx)$ e não $f(cx) < f(rx)$. Esta contradição mostra que não é possível ter-se $f(cx) < c \cdot f(x)$. De modo inteiramente análogo se vê que $f(cx) > c \cdot f(x)$ é impossível. Portanto deve ser $f(x) = c \cdot f(x)$ para quaisquer $c, x \in \mathbb{R}^+$.

Observação. Um teorema análogo, com a mesma demonstração vale para $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, escrevendo, na propriedade 2), $n \in \mathbb{Z}$ em vez de $n \in \mathbb{N}$.

Geralmente, esse tipo de definição não é utilizado no ensino inicial de proporções, já que o conceito de proporcionalidade é introduzido, na maioria das vezes, no 6º ano do Ensino Fundamental e a definição de função, no 1º ano do Ensino Médio.

A seguir, apresentaremos um breve cenário histórico sobre o conceito de Proporcionalidade.

2.7 PROPORCIONALIDADE: UM BREVE CENÁRIO HISTÓRICO

Acreditamos que entender, como ocorreu o processo histórico relativo à Proporcionalidade, possa nos auxiliar a construir uma estrutura ecológica mais consolidada. Para isso, faremos uma síntese das principais contribuições históricas relativas ao objeto de conhecimento de nosso estudo: “a Proporcionalidade”.

A proporcionalidade sempre foi de extrema importância para vários estudos e muitos matemáticos célebres utilizaram-se dela para obter êxito em várias experimentações. Existem algumas histórias na qual a Proporcionalidade teve grande repercussão. Neste trabalho, no entanto, citaremos apenas algumas para ilustrar sua importância, seguindo uma ordem cronológica do aparecimento dessa abordagem nos diferentes períodos e nas diferentes civilizações.

Para delinear essa parte histórica, partimos das civilizações apresentadas no quadro de Períodos Matemáticos, no qual Eves (2004) apresenta as principais contribuições dos matemáticos no decorrer da história com as datas aproximadas de suas principais colaborações. São eles: Egípcio e Babilônico (3000 a.C. - 260 d.C.); Grego (600 a. C - 450 d.C.), Chinês (1030 a.C - 1644 d.C), Hindu (200 a.C. - 1250 d.C.) e Árabe (650 d.C - 1250 d.C.).

2.7.1 Proporcionalidade no Egito

O Papiro de Rhind ou Ahmes³ foi um dos primeiros documentos encontrados, no qual há evidência do estudo de Proporcionalidade. Ele é datado aproximadamente no ano 1650 a. C. e contém 85 problemas copiados pelo escriba Ahmes em escrita hierática⁴. Segundo Boyer (1974, p. 12), “muitos dos problemas de Ahmes mostram conhecimento de manipulações equivalentes à regra de três”. Dentre eles, dois problemas, cuja resolução dada é aritmética, são citados a seguir e conhecidos como os de número 63 e 72.

O problema 72 pergunta qual o número de pães de força 45 que são equivalentes a 100 de força 10, e a solução é apresentada como $\frac{100}{10} \times 45$ ou 450 pães. Nos problemas sobre pães ou cerveja a força ou *pesu* é o inverso da densidade de grão, sendo o quociente do número de pães ou de unidades de volume dividido pela quantidade de grão. São numerosos os problemas sobre pães e cerveja no Papiro Ahmes. O Prob. 63, por exemplo, pede que sejam repartidos 700 pães entre quatro pessoas, sendo que as quantidades que devem receber estão na proporção prolongada $\frac{2}{3} : \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$. A solução é encontrada fazendo o quociente de 700 pela soma das frações na proporção. Nesse caso o quociente de 700 por $1\frac{3}{4}$ é encontrado multiplicando 700 pelo recíproco do divisor, que é $\frac{1}{2} + \frac{1}{14}$. O resultado é 400: calculando $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ disto são obtidas as parcelas de pão requeridas. (BOYER, 1974, p. 12).

Boyer (1974) aponta também que no Papiro de Rhind havia problemas que mereciam a designação de algébricos⁵, pois se referiam a procura de números desconhecidos, como nas soluções de equações lineares, da forma $x + ax + bx = c$,

³Rhind foi um antiquário escocês que comprou o papiro no Egito, em 1858 d.C. e Ahmes foi o escriba que o copiou, por volta de 1650 a.C., de documentos que datam de 2000 a 1800 a.C.(BOYER, 1974)

⁴Escrita cursiva, melhor adaptada ao uso da pena e da tinta sobre folhas de papiro preparadas.(BOYER, 1974)

⁵ [...] ao mesmo tempo em que uma parcela da sociedade começou a se dedicar especificamente à matemática, as práticas que podem ser designadas por esse nome teriam passado a incluir também procedimentos para resolução de problemas numéricos, tratados como “algébricos” pela historiografia tradicional. Essa versão começou a ser desconstruída pelo historiador da matemática J. Høyrup, nos anos 1990, com base em novas traduções dos termos que aparecem nos registros. Ele mostrou que a “álgebra” dos babilônicos estava intimamente relacionada a um procedimento geométrico de “cortar e colar”. Logo, tal prática não poderia ser descrita como álgebra, sendo mais adequado falar de “cálculos com grandezas”. Tanto os mesopotâmicos quanto os egípcios realizavam uma espécie de cálculo de grandezas, ou seja, efetuavam procedimentos de cálculo sobre coisas que podem ser medidas (grandezas). E essa é uma das principais características de sua matemática. (ROQUE, 2012, p. 28)

em que a, b e c são conhecidos e x é desconhecido. Nesse documento a incógnita era denominada “aha”.

O Prob. 24, por exemplo, pede o valor de aha sabendo que aha mais um sétimo de aha dá 19. A solução de Ahmes não é dos livros modernos, mas é característica de um processo conhecido com “método de falsa posição”, ou “regra de falso”. Um valor específico, provavelmente falso, é assumido para aha, e as operações indicadas à esquerda do sinal de igualdade são efetuadas sobre esse número suposto. O resultado é então comparado com o resultado que se pretende, e usando proporções chega-se à resposta correta. No problema 24 o valor tentado para a incógnita é 7, de modo que $x + \frac{1}{7}x$ é 8, em vez de 19 como se queria. Como $8\left(2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = 19$, deve-se multiplicar 7 por $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ para obter a resposta: Ahmes achou $16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$. Então conferiu sua resposta mostrando que se a $16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$ somarmos um sétimo disto (que é $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$) de fato obteremos 19. Aqui notamos outro passo significativo no desenvolvimento da matemática, pois a verificação é um exemplo mais simples de prova. (BOYER, 1984, p.12)

Assim, essas foram as primeiras evidências relatadas no que diz respeito ao conteúdo de Proporcionalidade na civilização egípcia.

2.7.2 Proporcionalidade na Mesopotâmia (Babilônia)

As civilizações antigas da Mesopotâmia, frequentemente chamadas babilônias, segundo Boyer (1974, p. 18) usavam tabletas de barro para registrar leis, registros de impostos, histórias, lições de escola, cartas pessoais, entre outras. O conhecimento matemático dos babilônios também provém dessas tabletas, cuja escrita é cuneiforme (em forma de cunha) e os símbolos eram marcados por estilete enquanto a tableta ainda estava úmida.

A partir do estudo dessas tabletas, verificou-se que o sistema de numeração dos babilônios era de base sexagesimal e que em algumas delas a proporcionalidade estava inscrita como, por exemplo, a tableta de multiplicação por 9 e a tableta babilônica de recíprocos.

Sobre a tableta de multiplicação, Costa Jr. (2010, p. 48) salienta que “os babilônios utilizavam o raciocínio multiplicativo que é um tipo de raciocínio proporcional e este fato evidencia que esta civilização já usava o conceito de proporcionalidade a aproximadamente 4 000 anos atrás”.

Apesar das grandes lacunas em suas tabelas exponenciais, os matemáticos babilônios não hesitavam em interpolar por partes proporcionais para obter valores intermediários aproximados. A interpolação linear parece ter sido comumente usada na Mesopotâmia antiga, e a notação posicional é conveniente para a regra de três. (BOYER, 1974, p. 22)

Uma das tabletas, denominada Plimpton 322, também revela indícios da Proporcionalidade na Geometria. Assim, “[...] os babilônios tinham conhecimento de que os lados correspondentes de dois triângulos retângulos semelhantes são proporcionais” (EVES, 2004, p. 61).

Os Babilônios também usavam conceitos de Proporcionalidade na resolução de equações quadráticas, quando faziam o que atualmente denominamos de transformação algébrica.

Fica claro que na resolução da equação os babilônios utilizavam o conceito de proporcionalidade fundamentado no princípio multiplicativo, que é um raciocínio proporcional. Na multiplicação de ambos os membros de uma equação por um mesmo número, eles obtinham uma equação proporcional à primeira. Assim tornavam possível a aplicação dos seus métodos para a resolução. (COSTA JR., 2010, p. 60)

Assim, verifica-se que a civilização mesopotâmica, já nessa época, usava conceitos relativos ao objeto de saber Proporcionalidade em vários campos da Matemática.

2.7.3 Proporcionalidade na Grécia

A civilização grega trouxe inúmeras e significativas contribuições no desenvolvimento da Matemática e no conceito de proporção não foi diferente.

Os maiores matemáticos relacionados a essa época e a essa civilização foram Tales de Mileto (624 a.C. - 548 a.C. aproximadamente) e Pitágoras de Samos⁶

⁶O testemunho mais citado sobre a existência de um matemático chamado Pitágoras é o “Catálogo dos geômetras”, de Proclus. Afirma-se aí que Pitágoras transformou sua filosofia em uma forma de educação liberal, procurando derivar seus princípios de fontes superiores, de modo teórico. Esse catálogo, como vimos, pode ter sido inspirado em Eudemo, mas sobretudo em Jâmblico, uma vez que contém transcrições literais da obra deste último. É interessante observar que Eudemo não menciona Pitágoras, mas somente os “pitagóricos”. Ou seja, Proclus pode ter sido responsável por uma síntese que mistura as ideias de Eudemo sobre a pureza dos métodos pitagóricos com a atribuição desses feitos a um homem, Pitágoras. Era conveniente, para Proclus, reconhecer aí os fundamentos de seu próprio platonismo. A escassez das fontes, somada à convergência interessada

(580 a.C. - 500 a.C. aproximadamente). Sobre as contribuições de ambos, Boyer salienta que não sobreviveu nenhuma obra de qualquer um deles, portanto, o que fizeram deve ser reconstruído com base numa tradição persistente não muito digna de confiança e não sobre documentos históricos.

Uma das histórias mais famosas e relacionadas ao conteúdo de Proporcionalidade é sobre como Tales determinou a altura da pirâmide Quéops sem escalá-la. Esse acontecimento teria acontecido na presença do rei do Egito, Amasis, que esperava ansioso juntamente com seu povo como aquele grego resolveria aquele desafio. Segundo Eves (2011, p. 115):

Há duas versões de como Tales calculou a altura de uma pirâmide egípcia por meio da sombra. O relato mais antigo, dado por Hierônimos, um discípulo de Aristóteles, diz que Tales anotou o comprimento da sombra no momento em que esta era igual a altura da pirâmide que a projetava. A versão posterior, dada por Plutarco, diz que ele fincou verticalmente uma vara e fez uso da semelhança de triângulos. Ambas as versões pecam ao não mencionar a dificuldade de obter, nos dois casos, o comprimento da sombra da pirâmide — isto é, a distância da extremidade da sombra ao centro da base da pirâmide.

Um teorema muito conhecido da Geometria é o Teorema de Tales: “Se um feixe de retas paralelas é interceptado por duas retas transversais então os segmentos determinados pelas retas paralelas sobre as transversais são proporcionais”. Essa enunciação por muito tempo foi chamada de Teorema dos Segmentos Proporcionais e somente no final do século XIX, ocorreu a mudança para o nome de Teorema de Tales. Segundo Bongiovani (2007), a primeira publicação de que se tem notícia sobre essa substituição de nomes é no livro francês *Éléments de géométrie* de Rouche e Comberousse (reedição de 1883).

A demonstração do Teorema de Tales era acerca da utilização de grandezas comensuráveis e até hoje se encontra nos livros esse tipo de demonstração, embora tenha se tornada incompleta com a descoberta dos números incomensuráveis.

Quanto aos pitagóricos, um dos indícios de proporcionalidade refere-se à construção do pentagrama ou pentágono estrelado.

dos únicos textos disponíveis, nos permite duvidar até mesmo da existência de um matemático de nome Pitágoras. (ROQUE, 2012, p. 78)

Se começamos com um polígono regular ABCDE (Fig. 4.1) e traçamos as cinco diagonais, essas diagonais se cortam-se em pontos A'B'C'D'E', que formam outro pentágono regular.

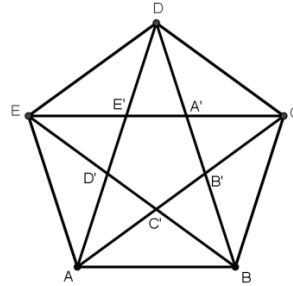


Figura 4.1

Observando que o triângulo BCD', por exemplo, é semelhante ao triângulo isósceles BCE e observando também os muitos pares de triângulos congruentes no diagrama, não é difícil ver que os pontos A'B'C'D'E' dividem as diagonais de um modo notável. Cada um deles divide uma diagonal em dois segmentos desiguais, tais que a razão da diagonal toda para a maior é igual à deste para a menor. Essa subdivisão das diagonais é a bem conhecida “secção áurea” de um segmento, [...].(BOYER, 1974, p. 38)

Boyer (1974, p. 38) enfatiza que a palavra “secção” foi usada com substituição da designação “divisão de um segmento em média e extrema razão”.

Uma das propriedades importantes da “secção” é:

Se um ponto P_1 , divide um segmento RS (Fig. 4.2) em média e extrema razão, sendo RP_1 o segmento maior e se sobre esse segmento maior marcamos o ponto P_2 tal que $RP_2 = P_1S$, então o segmento RP_1 por sua vez ficará subdividido em média e extrema razão pelo ponto P_2 .

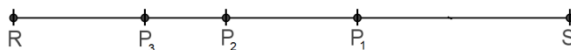


Figura 4.2

Novamente, se marcarmos em RP_2 o ponto P_3 tal que $RP_3 = P_2P_1$, o segmento RP_2 ficará subdividido em média e extrema razão por P_3 . Esse processo iterativo, é claro, pode ser repetido tantas vezes quanto se queira, obtendo-se segmentos RP_n cada vez menores divididos em média e extrema razão por P_{n+1} . Se os pitagóricos observaram ou não esse processo sem fim, ou dele tiraram conclusões significativas, não se sabe. Mesmo a questão mais fundamental de saber se os pitagóricos de cerca de 500 A. C. sabiam dividir um segmento em média e extrema razão não pode ser respondida com segurança, embora fosse muito provável que sim. [...]. A construção equivale à resolução de uma equação quadrática. Para mostrar isso, seja $RS=a$ e $RP_1=x$ na Fig. 4.2. Então, pela propriedade da secção áurea $a : x = x : (a - x)$ e multiplicando médios e extremos temos a equação $x^2 = a^2 - ax$. (BOYER, 1974, p. 38)

Acredita-se que os pitagóricos tenham usado o método geométrico, a seguir, para sua resolução, conforme apresentado a seguir:

Para dividir um segmento de reta AB em média e extrema razão, Euclides construía primeiro sobre AB o quadrado ABCD (Fig. 4.3).

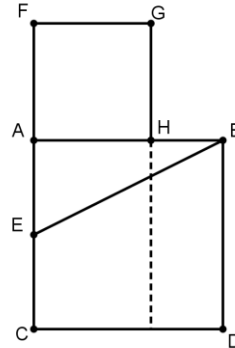


Figura 4.3

Então bissectava AC pelo ponto E, traçava EB e prolongava a reta CEA até F tal que EF = EB. Completado o quadrado AFGH o ponto H será o ponto procurado, pois pode-se ver imediatamente que $AB : AH = AH : HB$. (BOYER, 1974, p. 38)

A teoria das proporções também é mencionada na história como uma das descobertas gregas.

A teoria das proporções claramente se ajusta ao esquema de interesses matemáticos dos gregos antigos, e não é difícil achar uma provável fonte de inspiração. Conta-se que Pitágoras soube na Mesopotâmia das três médias aritmética, geométrica e subcontrária (mais tarde chamada harmônica) – e da “proporção áurea” que relaciona duas delas: o primeiro de dois números está para sua média aritmética como a média harmônica está para o segundo número. (BOYER, 1974, p. 41).

Supondo $a > b > c$, com a, b e c naturais:

Média Aritmética: $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ equivalente a $a + c = 2b$

Média Geométrica: $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{b} = \left[\frac{b}{c}\right]$, equivalente a $ac = b^2$

Média Harmônica: $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{c}$, equivalente a $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b}$ ou $b = \frac{2ac}{a+c}$

Proporção áurea: $a : \frac{a+c}{2} = \frac{2ac}{a+c} : c$

(HEATH, 1993 apud COSTA Jr., 2010, p. 64)

O desenvolvimento da teoria das médias facilitou o descobrimento da relação existente entre intervalos numéricos e razões numéricas.

Outro exemplo relacionado à aplicação da teoria das proporções foi o teorema sobre as quadraturas de lunas. Esse teorema é atribuído a Hipócrates de Chios (430 a.C.) no qual os segmentos de círculos estão na mesma razão que os quadrados de suas bases (BOYER, 1974).

O relato de Eudemo diz que Hipócrates provou isso, mostrando primeiro que as áreas dos círculos estão entre si como os quadrados dos diâmetros. Aqui Hipócrates usa a linguagem e conceito de proporção que desempenhou papel tão grande no pensamento pitagórico. [...] Eudemo acreditava que Hipócrates tinha dado uma prova do teorema, mas uma demonstração rigorosa parece improvável nessa época (digamos 430 a.C.). A teoria das proporções provavelmente estava feita só para grandezas comparáveis. A prova dada em Euclides XII, 2 provém de Eudoxos, que viveu numa época intermediária entre o tempo de Hipócrates e o de Euclides. (BOYER, 1974, p. 48)

Mais tarde, uma das maiores frustrações dos pitagóricos foi a descoberta da existência dos números irracionais.

A primeira demonstração é essencialmente a tradicional que Aristóteles (384-322 a.C.) conhecia. A descoberta da irracionalidade de $\sqrt{2}$ provocou alguma consternação nos meios pitagóricos. Pois não só ela parecia perturbar a suposição básica da escola, de que tudo dependia dos números inteiros, como também porque a definição pitagórica de proporção, assumindo como comensuráveis duas grandezas quaisquer similares, fazia com que todas as proposições da teoria pitagórica das proporções se limitassem a grandezas comensuráveis, invalidando sua teoria geral das figuras semelhantes. Tão grande foi o “escândalo lógico⁷” que por algum tempo se fizeram esforços para manter a questão em sigilo. (EVES, 2011, p.107-108).

No entanto, por volta de 370 a.C., esse “escândalo” foi resolvido por Eudoxo, por meio de uma nova definição de proporção.

⁷Não se encontra alusão a escândalo em nenhuma passagem dos escritos a que temos acesso e que citam o problema dos incomensuráveis, como os de Platão ou Aristóteles. Aristóteles, aliás, não cita o problema dos incomensuráveis nem mesmo em sua crítica aos pitagóricos. Na verdade, a descoberta da incomensurabilidade representou uma nova situação que motivou novos desenvolvimentos matemáticos – apenas isso. Logo, não seriam exatamente as lacunas nos fundamentos da matemática que teriam sido resolvidas com a definição dos números irracionais, como se diz muitas vezes. Esse modo de ver as coisas é típico do século XIX e bem diferente do que movia o mundo grego.[...] Mas, ainda que não seja confiável a tese de que um pitagórico tenha descoberto os incomensuráveis, e de que isso tenha provocado uma crise, tal problema existiu. Os matemáticos gregos que trabalhavam com aritmética no final do século V a.E.C. conheciam o procedimento como *antifairese*, bem como o modo de empregá-lo no tratamento de alguns segmentos incomensuráveis. (ROQUE, p. 96, 2012)

O Livro V é uma exposição magistral da teoria das proporções de Eudoxo. Foi por meio dessa teoria, aplicável tanto as grandezas comensuráveis como as grandezas incomensuráveis, que se resolveu o “escândalo lógico” decorrente da descoberta dos números irracionais pelos pitagóricos. A definição de proporção, ou igualdade de duas razões, eudoxiana é notável e digna de ser repetida aqui. *Diz-se que grandezas estão na mesma razão, a primeira para a segunda e a terceira para a quarta quando, tomando-se equimúltiplos quaisquer da primeira e da terceira e equimúltiplos quaisquer da segunda e da quarta, os primeiros equimúltiplos são ambos maiores que, ou ambos iguais a, ou ambos menores que os últimos equimúltiplos considerados em ordem correspondente.* Em outras palavras, se A, B, C e D são quatro grandezas desprovidas de sinal, sendo A e B da mesma espécie (ambas segmentos de reta, ou ângulos, ou áreas, ou volumes) e C e D também da mesma espécie, então a razão entre A e B é igual a razão entre C e D se, para inteiros positivos arbitrários m e n, $m \cdot A > n \cdot B$ conforme $m \cdot C > n \cdot D$. (EVES, 2011, p. 173).

A partir dessa nova definição várias demonstrações foram desenvolvidas. Antes disso, muitas demonstrações pré-eudoxianas eram falhas, pelo fato de se basearem em uma teoria incompleta das proporções.

O Livro VI aplica a teoria das proporções eudoxiana à geometria plana. Encontramos nele os teoremas fundamentais da semelhança de triângulos; construções de terceiras, quartas e médias proporcionais; a resolução geométrica de equações quadráticas [...]; a proposição que assegura que a bissetriz de um ângulo de um triângulo divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos outros dois lados; uma generalização do Teorema de Pitágoras na qual, em vez de quadrados traçam-se sobre os lados de um triângulo retângulos três figuras semelhantes descritas de forma análoga; e muitos outros teoremas. (EVES, 2011, p. 173).

O livro V é uma exposição da teoria das proporções de Eudoxo, porém outros livros de Euclides também têm registros do uso de proporções.

Os Livros VII, VIII e IX, que no total têm 102 proposições, tratam da teoria elementar dos números. O livro VII começa com o processo, hoje conhecido como algoritmo euclidiano, para achar o máximo divisor comum de dois ou mais números inteiros e o usa para verificar se dois inteiros são primos entre si [...]. Encontra-se nela também uma exposição da teoria das proporções numérica ou pitagórica. Estabelecem-se ainda nesse livro muitas propriedades numéricas básicas. O livro VIII ocupa-se largamente das proporções contínuas e progressões geométricas relacionadas. Se temos uma proporção contínua $a : b = b : c = c : d$, então a, b, c, d formam uma progressão geométrica. (EVES, 2011, p.173)

É perceptível as inúmeras contribuições gregas. Aqui, falamos apenas das principais relacionadas ao objeto do saber proporcionalidade, no entanto, por ser um conteúdo extremamente aplicável em várias situações, outros problemas podem ter usado esse conteúdo como artifício de resolução de vários problemas na época.

2.7.4 Proporcionalidade na China

A regra de três, extremamente utilizada na atualidade para a resolução das mais diversas situações problemas, foi supostamente desenvolvida na China. Segundo Eves (2011, p. 263), “a regra de três, que provavelmente se originou na China antiga, alcançou a Arábia através da Índia, onde Brahmagupta e Bháskara a tratavam por essa mesma designação”.

O *K'ui-ch'ang Suan-shu* (Nove capítulos sobre a Arte da Matemática) é o mais importante dos textos de Matemática dos chineses antigos, no qual há uma síntese do conhecimento matemático chinês antigo. Nesse texto, há capítulos em que o conteúdo de proporção é evidenciado. Eves (2011, p. 243-244) faz uma breve indicação dos nove capítulos do *K'ui-ch'ang Suan-shu*, sendo no capítulo 2, porcentagem e proporção; no capítulo 3, regra da sociedade e regra de três; e, no capítulo 7, regra da falsa posição explícita essa condição.

Outro documento chinês descoberto recentemente foi um livro de aritmética, que é o trabalho matemático chinês mais antigo de que se tem notícia. Eves (2011) ressalta que ele foi desenterrado em 1984 de túmulos que remontam à dinastia Han e foi transcrito por volta do século II a. C., contendo mais de 90 problemas envolvendo as quatro operações fundamentais, dentre eles alguns envolvendo proporções.

2.7.5 Proporcionalidade na Índia

“A regra de três foi denominada dessa forma por Brahmagupta e Bhaskara e enunciada por eles quase da mesma forma, como uma regra arbitrária e sem nenhuma justificção” (SMITH, 1958 apud COSTA Jr., 2010, p. 74). Eves (2011, p.255) complementa que “o vínculo da regra de três com as proporções só foi reconhecido no fim do século XIV”. Ainda segundo Eves (2011), Brahmagupta enunciava a regra da seguinte forma: “Na regra de três, os nomes dos termos são

Argumento, Fruto e Requisito. O primeiro e o último termos devem ser semelhantes. Requisito multiplicado por Fruto e dividido por Argumento é o Produto.”

A título de esclarecimento Boyer (1974) traz o seguinte problema dado por Bháskara:

Se dois palas e meio de açafão custam três sétimos de niska, quantos palas se comprarão com nove niskas? Neste caso $\frac{3}{7}$ e 9 que têm a mesma denominação, são o Argumento e o Requisito e $\frac{5}{2}$ é o Fruto. A resposta, ou Produto, é dada por $(9) \cdot (5/2) / (3/7) = 52 \frac{1}{2}$. Hoje em dia, simplesmente resolveríamos a proporção $x : 9 = (5/2) : (3/7)$ (BOYER, 1974, p. 255).

Assim como os Elementos de Euclides era na Grécia, assim era uma obra conhecida e intitulada na Índia com Aryabhatya, do hindu Aryabhata. “Essa obra foi escrita no ano 499, em 123 estrofes metrificadas, destinadas a fornecer regras de cálculo usadas na astronomia e na matemática de mensuração, sem nenhum espírito lógico ou de metodologia dedutiva” (BOYER, 1974, p. 153).

Por fim, veremos a seguir as contribuições da civilização árabe.

2.7.6 Proporcionalidade na Arábia

O povo árabe também deu algumas contribuições para o desenvolvimento da matemática e aparecem vestígios referentes ao conceito de proporcionalidade, embora esse conceito não haja relatos de nada além do que já havia sido produzido pelos outros povos das civilizações citadas anteriormente. A aritmética árabe iniciou com Al-Khowarizmi e, em seguida, várias outras surgiram. Eves (2011) salienta que eles usavam as regras de falsa posição e falsa posição dupla para resolver alguns problemas algébricos de maneira não algébrica, além de explicarem, raízes quadradas e cúbicas, frações e a regra de três.

Segundo Smith (1958 apud COSTA Jr., 2010, p. 76):

Os árabes usavam as formas abaixo para indicar uma proporção, mas não nomeavam os números, isto é, eles não se preocupavam em atribuir nomes aos números, como os hindus faziam; ou como fazemos atualmente, cujos termos da proporção denominamos de antecedentes e consequentes.

$$\begin{array}{l|l} 1 & 5 \\ \hline 3 & 15 \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 5 \\ \hline 3 & 15 \\ \hline \end{array}$$

(SMITH, 1958 apud COSTA JR., 2010, p. 76)

Uma das principais contribuições árabes foi a tendência em romper com a separação entre a álgebra numérica e a geométrica.

O passo decisivo veio mais tarde, com Descartes, mas Omar Khayyam estava avançado nesta direção quando escreveu: “Quem quer que imagine que a álgebra é um artifício para achar quantidades desconhecidas pensou em vão. Não se deve dar atenção ao fato de a álgebra e a geometria serem diferentes na aparência. As álgebras são fatos geométricos que são provados”. Ao substituir a teoria das proporções de Euclides por um método numérico, ele chegou perto da definição de números irracionais e lutou com o conceito de número real geral. (BOYER, 1974, p. 175-176)

Dalmedico e Peiffer (1986 apud BERNAL, 2004, p. 33), alegam que “Khayyan expôs uma teoria elaborada de proporções, pois, para ele, a teoria de Euclides, Livro V, não exprimia a essência de uma razão que é a medida de uma grandeza por outra, e comparava razões incomensuráveis decompondo-as em frações contínuas”.

O algoritmo das frações contínuas, segundo D’Ambrosio (1986 apud BERNAL, 2004, p. 33), é apenas o algoritmo euclidiano. Para a razão $\frac{a}{b}$, temos o algoritmo euclidiano $a = qb + r$, que pode ser escrito como $\frac{a}{b} = q + \frac{1}{b/r}$, o que é aplicado novamente à razão $\frac{b}{r}$ e assim por diante. Segue abaixo, o algoritmo euclidiano para as razões $\frac{32}{42}$ e $\frac{48}{63}$.

Razão $\frac{32}{42}$:	$42 = 1 \cdot 32 + 10;$	$32 = 3 \cdot 10 + 2;$	$10 = 5 \cdot 2 + 0.$	(1)
	$\frac{42}{32} = 1 + \frac{1}{32/10};$	$\frac{32}{10} = 3 + \frac{1}{10/2};$	$\frac{10}{2} = 5 + 0.$	

Por substituição, podemos escrever

$$\frac{32}{42} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{5}}} \tag{2}$$

Aplicando o processo para a razão $\frac{48}{63}$, encontraremos o mesmo resultado que em (2):

$$\frac{48}{63} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{5}}}$$

Assim, é possível perceber que as razões acima, são comensuráveis, pois existe um número finito de quocientes, ou seja, 1, 3 e 5.

Segundo Dalmedico e Peiffer (1986 apud BERNAL, 2004, p. 34), “Khayyan indicou que há igualdade entre duas razões se há igualdade de seus quocientes parciais para todo n , dando assim um critério que permite comparar duas razões”. No caso das razões apresentadas, é possível verificar essa proporção, pois os quocientes 1, 3 e 5 são iguais em ambas as frações contínuas.

No próximo capítulo, trataremos da entrevista com um dos autores de uma obra selecionada para o estudo de Proporcionalidade. O convite feito a ele para participar foi imediatamente aceito, demonstrando, sobretudo, presteza em contribuir para a pesquisa. Vale ainda destacar que sua obra se diferencia das outras no que diz respeito aos pressupostos teóricos preconizados pela Educação Matemática, durante o anúncio dos PCN, final da década de 1990.

3 ENTREVISTA COM LUIZ MÁRCIO IMENES

A coleção de livros didáticos a ser analisada como representativa da década de 2010 é a coleção Matemática de Imenes e Lellis. Após a análise dessa coleção, publicada na atual década, será possível constatar o processo de transformação ocorrido no ensino de proporcionalidade desde a década de 80 e, assim, responder a questão desta pesquisa.

Para acrescentar e enriquecer ainda mais o presente trabalho, contamos com a colaboração de um dos autores dessa coleção, Luiz Márcio Imenes, que aceitou compartilhar, em entrevista, um pouco sobre sua trajetória enquanto autor de livros didáticos e educador e ainda seu olhar para o ensino de Matemática, sobretudo quanto ao ensino do objeto de conhecimento “Proporcionalidade”.

Para realizar a entrevista com o referido autor, optamos por uma entrevista semiestruturada, via e-mail, na qual selecionamos previamente alguns questionamentos de acordo com o interesse da presente pesquisa. Para Triviños (1987, p. 146) “a entrevista semiestruturada tem como característica questionamentos básicos que são apoiados em teorias e hipóteses que se relacionam ao tema da pesquisa”.

Manzini (1990/1991, p. 154), salienta que “a entrevista semiestruturada está focalizada em um assunto sobre o qual confeccionamos um roteiro com perguntas principais, complementadas por outras questões inerentes às circunstâncias momentâneas à entrevista”. Para esse autor, a entrevista semiestruturada pode fazer emergir informações de forma mais livre e as respostas não dependem de uma padronização de alternativas.

Após a elaboração das perguntas para a entrevista, enviamos por e-mail ao autor Imenes, que gentilmente nos retornou com as respostas corroborando de forma efetiva para o presente trabalho.

Segue abaixo a entrevista.

1) Prof. Imenes, ser professor de Matemática foi sua primeira opção de carreira?
Não. Desde a infância, sonhava com engenharia. De fato, tenho um diploma de engenheiro, mas nunca exerci a profissão.

2) Como era o ensino primário na época em que cursou?

Ingressei no 1º ano do curso primário em 1952, aos 7 anos de idade. São bem conhecidas as características da escola dessa época, na qual, essencialmente, ensinava-se a ler, escrever e contar. Decorávamos tudo: nomes, datas e fatos. Essa era a escola possível na época.

3) Você se lembra dos livros didáticos de Matemática que foram usados durante seu ensino? Qual sua opinião sobre eles?

Tenho algumas lembranças da escola, das professoras e de colegas, mas são poucas e vagas. Quanto aos livros, como trabalho com eles e tenho vários daquela época (obtidos em sebos), acredito que as lembranças da infância tenham se misturado ao olhar adulto.

4) Qual é a sua formação?

Na graduação, fiz Engenharia Civil na Escola Politécnica da USP e Licenciatura em Matemática na Faculdade de Filosofia Ciências e Letras de Moema. Fiz o mestrado em Educação Matemática na Unesp de Rio Claro.

5) O que é Matemática para você?

Minha formação não é de matemático, mas de professor de Matemática (as pessoas, em geral, não compreendem essa distinção).

Para saber o que é Matemática, recorro aos matemáticos. Bem, aí não há consenso. São muitas as respostas a essa pergunta. Os matemáticos dividem-se, quanto ao que seja Matemática.

Mas, como educador, aprendi que certas concepções sobre Matemática são mais adequadas que outras para nortear a matemática escolar. Deve-se entendê-la como construção humana (daí a importância da História da Matemática) que se conecta com nossas outras construções, com o mundo físico e social.

6) De onde surgiu a motivação para se tornar autor de livros didáticos?

Desde o início, aos 16 anos, como professor particular, habituei-me a redigir notas de aula. Aos poucos, elas foram ganhando substância e se tornaram apostilas. Os livros nasceram dessas experiências iniciais. Não foi um caminho traçado previamente; as coisas foram acontecendo, as oportunidades foram surgindo. Nesse processo, é claro, há muito suor e um tanto de sorte (acaso).

7) Quando foi que você escreveu seu primeiro livro didático?

A primeira publicação, em 1972, em parceria com José Jakubovic (falecido em 1995) e Fernando Trotta, chamava-se Curso Abril Vestibular; eram fascículos vendidos em banca de jornal.

A primeira coleção de livros didáticos chamava-se Matemática Aplicada; era voltada para o ensino médio, em 3 volumes para o aluno e 3 volumes para o professor. Feita em parceria com os mesmos colegas, foi publicada em 1978/1979 pela Editora Moderna. Até hoje, recebo elogios por esse trabalho; mas o desastre comercial foi grande e não houve 2ª edição.

8) Para você, o que é um bom livro didático?

O livro didático é instrumento de trabalho para alunos e professores. O bom livro didático é aquele que traz um projeto adequado para a matemática escolar. Isso significa que ele deve ser concebido tendo como primeiríssimo objetivo contribuir para o aprendizado dos alunos. Sucede que, para isso, é preciso romper com o projeto arcaico herdado de um passado em que (1) não se sabia o que se sabe hoje sobre o fenômeno da aprendizagem, (2) não havia calculadoras nem computadores e (3) o mundo era muitíssimo diferente do que é hoje. Sucede que a esmagadora maioria do professorado é (ainda hoje!) formada pelo projeto arcaico. Então, o autor de livro didático que visa ao aprendizado dos alunos precisa orientar o professor para que ela entenda o projeto inovador e incorpore práticas pedagógicas adequadas, que se harmonizem com as proposições do material didático. Isso fazemos no Manual (ou Guia) do professor. Assim, vê-se que o autor de livros didáticos tem dois interlocutores distintos: o aluno e o professor.

Mas, essa concepção esbarra numa dificuldade: por mil razões, os professores, em geral, não leem.

9) Você ainda leciona ou dedica-se, exclusivamente, a escrever suas obras?

Quando o tempo permite, dou cursos para professores; mas são cursos de curta duração. O trabalho com os livros é exaustivo, toma todo o meu tempo porque tem muitas frentes: os estudos, o trabalho de criação (ideias), a redação dessas ideias, as orientações para os professores, a interação com o corpo editorial, as revisões de provas, a elaboração de pautas e roteiros para conteúdos digitais, as gravações em

vídeo, a divulgação da obra, as orientações nas escolas adotantes (viaja-se pelo país inteiro), orientações à distância (e-mail), encontros com as famílias, encontros com os alunos...

10) As ideias incorporadas aos seus livros são retiradas de algum material como referência ou são inspiradas em suas próprias vivências? De onde surgem suas ideias?

As duas fontes são essenciais. Muitos livros foram e são fundamentais para nortear e inspirar esse trabalho. As experiências vividas em sala de aula fornecem as bases que sustentam a criação do material didático.

11) Quantos livros publicados você tem? Quais são esses livros?

- *Curso Abril Vestibular, Ed. Abril, 1973*
- *Matemática Aplicada (3 vol.-1ª a 3ª série do 2º grau), Ed. Moderna, 1978/1979*
- *Matemática, Telecurso 1º grau, Ed. Globo, 1981*
- *Matemática, Telecurso 2º grau, Ed. Globo, 1985*
- *Vivendo a Matemática (7 vol.), Ed. Scipione, 1986*
- *P'ra que serve Matemática? (9 vol), Ed. Atual, 1992*
- *Cadernos da TV Escola, Conversa de professor, Matemática, MEC, 1995*
- *Microdicionário de Matemática, Ed. Scipione, 1997*
- *Cadernos da TV Escola, PCN na escola, Matemática 2, MEC, 1998*
- *Matemática – Imenes & Lellis (4 vol.- 6º ao 9º ano do EF), Ed. Moderna, 2010*
- *Outro olhar sobre a Matemática: Padrões e simetrias, Ed. Moderna, 2011*
- *Outro olhar sobre a Matemática: A Matemática é lógica!, Ed. Moderna, 2011*
- *Matemática – Projeto Presente (5 vol.- 1º ao 5º ano do EF), 2ª edição, Ed. Moderna, 2015*

12) Quanto tempo você leva para escrever um livro?

Esse tempo, é claro, depende do livro.

No caso da coleção para os anos iniciais do EF, publicada pela 1ª vez em 1992, em 4 volumes, Lellis, Jakubovic e eu gastamos 4 anos de trabalho.

Na coleção para os anos finais do EF, cuja 1ª edição é de 1996, Lellis e eu gastamos mais 4 anos.

13) O que você espera que os leitores (no caso, professores e alunos) encontrem ao utilizar a sua coleção?

Essencialmente, espero e desejo que os alunos aprendam o que precisam aprender e, mais importante ainda, vejam a Matemática com bons olhos e que os colegas professores sintam-se recompensados pelo sucesso de seu trabalho.

14) Você acha que se tornar autor influenciou no seu modo de pensar como educador?

Com certeza, sim. Afinal, o que pensamos (na esfera profissional ou na pessoal) também é fruto das experiências vividas.

15) Qual parte de seus livros de que você mais gosta ou acha importante? Tem alguma parte a que se deve ter mais atenção?

Não sinto essa diferenciação. Todos os aspectos são importantes e merecem sempre muita atenção. O bom resultado do conjunto depende dessa consideração.

16) Você acha que a abordagem didática contida nos livros didáticos em geral foi muito modificada ao longo do tempo? Nos seus livros, em específico, você notou alguma reestruturação significativa?

O livro didático é um produto cultural e, portanto, traz as marcas de seu tempo. A análise da produção didática ao longo do tempo deixa isso muito claro.

No caso particular das produções de que participei (sempre em coautoria), há uma grande distância entre a primeira publicação (Curso Abril Vestibular) e a segunda (Matemática Aplicada). Sobre esse salto, conto parte da história em minha dissertação de mestrado.

17) Nos PCN, há os Blocos temáticos e, pelo período do lançamento de sua primeira edição para o Ensino Fundamental II, esse documento é praticamente o mesmo até nos dias de hoje. Sendo assim, percebemos que sua obra coaduna com os preceitos defendidos pelos PCN e, então, para você, quais são os tópicos (ou temas) (ou saberes) matemáticos imprescindíveis para a formação do aluno no Ensino Fundamental II?

Antes de responder à pergunta, cabe um esclarecimento.

De fato, nossas coleções para EF1 e EF2 têm muita sintonia com os PCN, apesar de suas primeiras edições serem anteriores aos parâmetros. Mas, não tínhamos bola de cristal!

A verdade é que, para quem milita no Movimento de Educação Matemática, os PCN não trouxeram novidades. Boa parte de suas proposições já constavam da Proposta Curricular do Estado de São Paulo publicada em 1986.

Quanto à pergunta, observo que ela já carrega a própria resposta: os PCN explicitam quais são esses saberes matemáticos essenciais na formação dos alunos (no Manual do Professor de nossas coleções fazemos o mesmo).

18) Ao manusear seus livros, nota-se uma quebra de paradigma no sentido de ser um livro didático diferente da maioria. O que te motivou a escrever dessa forma? Você acha que sua formação em Educação Matemática influenciou significativamente nesse sentido?

No início de minha atividade profissional, reproduzi a formação que havia recebido. Meus professores, os livros por onde havia estudado, os cadernos com minhas notas de aula eram as únicas referências de que dispunha.

Com o tempo, fui percebendo que esse modelo que eu reproduzia não funcionava, ou seja, gerava mais fracasso que sucesso na formação matemática das pessoas (essa história comprida está resumida também em minha dissertação de mestrado).

Essa percepção foi essencial como ponto de partida para buscar alternativas. Logo descobri que esse problema era (é) geral e não só meu, e que o Movimento de Educação Matemática é o espaço de ação dos que se empenham em melhorar a formação matemática básica das pessoas.

Como autor, tenho me empenhado em levar para o livro didático os saberes gerados no campo da Educação Matemática.

19) Nossa pesquisa explora a importância da Proporcionalidade para os alunos, no sentido de que, independente da profissão que escolha, esse conhecimento será potencialmente estável. Assim, o que o aluno precisa saber, efetivamente, para compreender a proporcionalidade neste nível de ensino?

De fato, proporcionalidade é noção central em Matemática, relevante nas atividades sociais, nas profissões e em muitos campos de estudo.

No projeto arcaico que ainda norteia o trabalho com Matemática na maior parte das escolas, a abordagem de proporcionalidade é totalmente equivocada. Seu estudo costuma concentrar-se em um bimestre (quando muito!) letivo: define-se razão, depois proporção como igualdade de razões, a seguir vem as propriedades das proporções (que, em geral, são ditadas como regras que caem do céu!), em seguida surge a regra de três e os exercícios de aplicação dessas receitas.

Em um projeto inovador, entende-se que a importância central do tema merece mais atenção e que os diferentes aspectos do conceito e suas múltiplas conexões apresentam diferentes níveis de dificuldade para os alunos. Como consequência, o estudo de proporcionalidade passa a ser concebido ao longo do EF (9 anos, não 1 bimestre!), sendo que é possível avançar um pouco mais no EM. Sob o aspecto estritamente matemático, proporcionalidade se resume à função $y = kx$ (que pode ser apresentada aos alunos no final do EF ou, melhor ainda, no EM).

Nessa abordagem, o conceito nasce da resolução de problemas, em contextos nos quais a proporcionalidade está presente e, também, naqueles em que ela é ausente. Importante é que o aluno relacione a noção com a presença de um fator multiplicativo constante na relação entre duas variáveis. Assim, proporcionalidade nasce no campo das funções, como um tipo especial de função.

Essa é a abordagem adotada em nossos livros.

20) Como autor e educador matemático, você acha que, em relação às etapas em que foram distribuídos os conteúdos matemáticos, existe algum item que poderia ser retirado sem danos algum para os demais?

No caso do EF, os PCN já apontaram o pouco valor (formativo e de uso) de alguns tópicos presentes no projeto arcaico, como racionalização de denominadores, equações biquadradas e irracionais.

Já no EM, apesar de algumas recomendações oficiais, pouco se avançou no sentido de distinguir essencial de secundário. A trigonometria é um exemplo; não se justifica o tempo dedicado a ela, nem o nível de detalhamento apresentado a estudantes que estão, ainda, em sua formação básica.

21) Você se recorda como o conceito de proporcionalidade era abordado nos livros didáticos no decorrer de seu ensino? A abordagem dada a esse conteúdo era a

mesma explorada no livro didático ou seus professores traziam propostas diferentes?

Nos livros de meu tempo de estudante da escola básica, bem como na maioria dos materiais didáticos atuais, predomina a abordagem arcaica citada acima.

22) Vocês deixam claro no Guia do Professor que o conteúdo de proporcionalidade merece destaque, visto que a proporcionalidade contribui muito para estabelecer o conceito de função e conclui que isso é um bom exemplo da “trama pedagógica em espiral”. Como a obra já está há mais de dez anos no mercado, você acredita que essa “trama pedagógica em espiral” foi validada nos dias de hoje?

No âmbito da Educação Matemática, as ideias de espiral e de rede, que sustentam essa trama pedagógica, respondo que sim.

Entretanto, o mais importante, que é a compreensão e a adoção dessa trama pedagógica no trabalho de sala de aula, permanece totalmente distante da esmagadora maioria do professorado. Em geral, no primeiro contato com essas ideias, os colegas professores rejeitam-nas.

23) Para você, por que há tanta dificuldade no processo de ensino e de aprendizagem de Matemática?

Essa é uma questão extremamente complexa, afetada por quantidade enorme de variáveis e que, portanto, não admite resposta simples. Os estudos em Educação, bem como os estudos em Educação Matemática e áreas afins, vêm encontrando respostas para o problema, bem como soluções para o mesmo.

24) Você tem algum projeto em mente? Qual o seu próximo projeto? Quer falar sobre algum deles?

Atualmente, tenho me interessado e trabalhado bastante com a produção de conteúdos digitais.

Um projeto há muito em mente, e que não tenho conseguido concretizar por que o tempo não tem sobrado, é a coleção para o EM. Espero chegar lá!

Professor Imenes, muito obrigada por ter respondido a essas perguntas e esperamos que, de alguma forma, possamos também contribuir para que o ensino e a aprendizagem da Matemática sejam mais viáveis a todos.

Diante desta entrevista, nesta oportunidade, a mesma foi submetida e, posteriormente, publicada⁸ na revista Cadernos da Educação Básica, ficando assim registrado o Produto Educacional decorrente desta investigação.

Vale ainda destacar que esta entrevista corrobora o contexto desta investigação pelo fato de que o próprio autor defende a importância do tema na aplicabilidade da matemática em situações problemas do dia a dia e, por isso, a natureza basilar para este objeto matemático do saber: a Proporcionalidade.

A seguir, abordaremos a análise dos livros didáticos selecionados com relação ao tema proposto.

⁸ <https://www.cp2.g12.br/ojs/index.php/cadernos/article/view/978/705>

4 ANÁLISES DOS LIVROS DIDÁTICOS

O livro didático é um grande norteador do trabalho do professor e pode ser de grande auxílio na condução do aprendizado dos estudantes. No entanto, não deve ser considerado como única fonte de conhecimento disponível e, por isso, é preciso utilizar outras fontes no intuito de enriquecê-lo e complementá-lo.

A análise dos livros didáticos nesta pesquisa, entretanto, fornece-nos subsídios para compreender melhor o ensino, sob o ponto de vista do livro didático, do conteúdo de Proporcionalidade das últimas quatro décadas. Em virtude do grande número de obras do período, não foi possível fazer uma análise geral, mas, como a estrutura dos livros didáticos de cada período analisado era similar, a delimitação desse universo de obras permitiu-nos traçar um panorama e obter informações relevantes de quatro perspectivas diferentes quanto ao objeto do saber pesquisado.

Para isso, analisaremos o desenvolvimento do conteúdo de Proporcionalidade nas versões dos livros do professor do segundo segmento do Ensino Fundamental, de quatro coleções escolhidas para representar cada década, a partir da década de 80.

As justificativas para a escolha de cada coleção foram as seguintes:

- pertencer ao acervo pessoal de uma professora com mais de 30 anos em sala de aula, período equivalente ao analisado nessa pesquisa, e por terem sido coleções adotadas por ela ao longo de sua experiência no ensino de Matemática;
- verificar o impacto dos Parâmetros Curriculares Nacionais (1997) na elaboração dos livros didáticos e, para tal, optamos por escolher duas coleções antes desse período e outras duas após, objetivando o confronto entre os livros didáticos e seus respectivos anos de lançamento;
- ser a primeira edição da coleção, pois acreditamos que as primeiras edições possuem novas estruturas e ideias;

Para fazer a análise desses livros, não foram procuradas evidências de Proporcionalidade apenas em seus índices e sim, por meio de uma procura, página a página, no intuito de verificar a exploração, ou não, desse objeto de conhecimento nas quatro séries, ou anos, dos anos finais do Ensino Fundamental, de cada coleção selecionada.

Vale ressaltar que para responder à questão desta pesquisa, foi preciso detectar como o ensino de Proporcionalidade ocorreu nos livros das coleções selecionadas. Para isso, serão apresentados neste capítulo alguns fragmentos desses livros nos quais o conteúdo de Proporcionalidade encontra-se presente a fim de criar um ecossistema desse objeto de conhecimento para cada coleção e verificar quais saberes sobreviveram ou não em seu ensino no período pesquisado.

Como iremos analisar um livro de cada década, a partir da década de 80, optamos por denominar como C1 a coleção de livros dos autores da década de 80, C2 a coleção de livros dos autores da década de 90 e assim, sucessivamente, conforme representado no quadro abaixo:

Quadro 1: Denominação dos livros didáticos.

DÉCADA	DENOMINAÇÃO	COLEÇÃO	AUTORES
1980	C1	A conquista da matemática	Giovanni e Castrucci (1985)
1990	C2	Matemática: conceitos e histórias	Scipione (1995)
2000	C3	Matemática hoje é feita assim	Bigode (2000)
2010	C4	Matemática: Imenes e Lellis	Imenes e Lellis (2010)

Fonte: Dados da autora

A seguir iniciaremos a análise dos livros didáticos denominados no quadro anterior.

4.1 ANÁLISE DA COLEÇÃO C1

Para a década de 80, escolhemos como representante a coleção intitulada “A conquista da Matemática”, de José Ruy Giovanni⁹ e Benedito Castrucci¹⁰, do ano de 1985.

Ao analisar o livro da 5ª série dessa coleção não foi encontrado nenhum vestígio do conteúdo proporcionalidade.

No entanto, no livro da 6ª série, após o estudo de equação do 1º grau, foram encontrados 4 capítulos seguidos (capítulos 11, 12, 13 e 14) sobre proporção. No

⁹ Bacharel e licenciado em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP). Disponível em: <http://www2.ftd.com.br/hotsite/didaticos2011/pdf/Cat_MFQD.pdf>. Acesso em: 20 out. 2016.

¹⁰ Bacharel e licenciado em Ciências Matemáticas pela Universidade de São Paulo (USP).

capítulo 11, os autores iniciam com o conceito de razão. Na Figura 2, está apresentado o fragmento do livro no qual o autor traz esse conceito.

Figura 2 – Conceito de razão

RAZÃO

Vimos que:

- comparamos dois números, dividindo um deles pelo outro;
- chama-se razão o resultado obtido.

Então, de modo geral, diz-se que:

Razão de dois números racionais (com o segundo diferente de zero) é o quociente do primeiro pelo segundo.

A razão de dois números racionais a e b pode ser representada na forma $\frac{a}{b}$ ou na forma $a : b$; em ambos os casos lê-se: “razão de a para b ” ou “ a está para b ” ou “ a para b ”.

O primeiro número denomina-se **antecedente** e o segundo, **conseqüente**.

$\frac{a}{b}$

→ antecedente

→ conseqüente

Vejam alguns exemplos:

1) Determinar a razão de 20 para 16.

$$\frac{20}{16} = \frac{5}{4}$$

↳ fração irredutível que corresponde à razão pedida

Fonte: GIOVANNI; CASTRUCCI, 1985, p. 115 (6ª série)

Apresentam também o conceito de razões inversas, conforme indicado na Figura 3:

Figura 3 - Razões inversas

RAZÕES INVERSAS

Sejam as razões $\frac{3}{4}$ e $\frac{4}{3}$.

Vemos que:

- o antecedente de uma é o conseqüente da outra e vice-versa;
- o produto das duas é igual a 1 $\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 1\right)$.

Duas razões nestas condições são denominadas inversas.

Deve-se notar que a razão de antecedente zero não possui inversa.

Fonte: GIOVANNI; CASTRUCCI, 1985, p. 115 (6ª série)

Em seguida, salientam duas razões especiais, sendo a primeira delas a velocidade média, indicado pela Figura 4, a seguir.

Figura 4 - Razão especial: velocidade média

▷ VELOCIDADE MÉDIA

Denomina-se **velocidade média** a razão entre uma distância percorrida e o tempo gasto em percorrê-la.

$$\text{velocidade média} = \frac{\text{distância}}{\text{tempo}}$$

Exemplo

Um automóvel percorreu 384 km em 5 horas. Qual foi a velocidade média desse automóvel?

Distância percorrida = 384 km
 Tempo gasto = 5 h

Velocidade média = $\frac{384 \text{ km}}{5 \text{ h}} = 76,8 \text{ km/h}$ (lê-se: 76,8 quilômetros por hora)

Fonte: GIOVANNI; CASTRUCCI, 1985, p. 117(6ª série)

E a segunda, relativo à escala, na Figura 5:

Figura 5 - Razão especial: escala

▷ ESCALA

Denomina-se **escala** de um desenho a razão entre um comprimento considerado no desenho e o correspondente comprimento real, medidos com a mesma unidade.

$$\text{escala} = \frac{\text{comprimento no desenho}}{\text{comprimento no real}}$$

Exemplo

No desenho de uma casa, o comprimento da sala, que é de 6 m, está representado por um segmento de 3 cm. Qual foi a escala utilizada para o desenho?

Comprimento no desenho = 3 cm
 Comprimento no real = 6 m = 600 cm

Escala = $\frac{3}{600} = \frac{1}{200}$ ou 1 : 200

Fonte: GIOVANNI; CASTRUCCI, 1985, p.117 (6ª série)

No capítulo 12, os autores iniciam trazendo o conceito de proporção da seguinte forma:

Figura 6- Conceito de proporção

Quatro números racionais a , b , c e d , diferentes de zero, nessa ordem, formam uma proporção quando a razão do primeiro para o segundo é igual à razão do terceiro para o quarto.

$a : b = c : d$ ou $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (lê-se: a está para b assim como c está para d)

Fonte: GIOVANNI; CASTRUCCI, 1985, p.121 (6ª série)

Percebe-se que nesse livro, o conceito de proporção é explorado como sendo uma igualdade de razões, apresentado como um conceito matemático sem nenhuma contextualização. Em seguida, na Figura 7, introduzem a Propriedade Fundamental da Proporcionalidade.

Figura 7 – Propriedade fundamental da proporcionalidade

Daf a propriedade fundamental:

Em toda proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios, e vice-versa.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \underbrace{a \cdot d}_{\text{produto dos extremos}} = \underbrace{b \cdot c}_{\text{produto dos meios}}$

Fonte: GIOVANNI; CASTRUCCI, 1985, p.122 (6ª série)

Essa propriedade é extremamente aplicável, no entanto, sua inserção nesse livro didático, é apresentada simplesmente como uma regra.

No mesmo capítulo, os autores trazem o conceito de quarta proporcional de três números dados e terceira proporcional de dois números dados e exemplos de como esses dois conceitos são trabalhados nos exercícios, conforme apresentado na Figura 8:

Figura 8 - Quarta proporcional de três números dados / Terceira proporcional de dois números dados

5. QUARTA PROPORCIONAL DE TRÊS NÚMEROS DADOS

Dados três números racionais, a , b e c , denomina-se quarta proporcional desses números um número x , tal que $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$.

Exemplo

Calcular a quarta proporcional dos números 3, 10 e 6.

$$\frac{3}{10} = \frac{6}{x} \quad \longrightarrow \text{pela definição de 4.ª proporcional}$$

$$3 \cdot x = 10 \cdot 6$$

$$3x = 60$$

$$x = \frac{60}{3}$$

$$x = 20$$

Resposta: A 4.ª proporcional dos números dados é 20.

6. TERCEIRA PROPORCIONAL DE DOIS NÚMEROS DADOS

Dados dois números racionais, a e b , denomina-se terceira proporcional desses números um número x , tal que $\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$.

Exemplo

Calcular a terceira proporcional dos números 2 e 6.

$$\frac{2}{6} = \frac{6}{x} \quad \longrightarrow \text{pela definição de 3.ª proporcional}$$

$$2 \cdot x = 6 \cdot 6$$

$$2x = 36$$

$$x = \frac{36}{2}$$

$$x = 18$$

Resposta: A 3.ª proporcional dos números dados é 18.

Fonte: GIOVANNI; CASTRUCCI, 1985, p.125 (6ª série)

Além disso, são exploradas duas propriedades. A primeira delas está apresentada na Figura 9.

Figura 9 - Propriedade 1

Em toda proporção, a soma ou a diferença dos dois primeiros termos está para o primeiro (ou para o segundo), assim como a soma ou a diferença dos dois últimos termos está para o terceiro (ou para o quarto).

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c} \quad \text{ou} \quad \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c} \quad \text{ou} \quad \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

Fonte: GIOVANNI; CASTRUCCI, 1985, p.126(6ª série)

E a segunda propriedade, apresentada na Figura 10, a seguir.

Figura 10 - Propriedade 2

Em toda proporção, a soma (ou a diferença) dos antecedentes está para a soma (ou a diferença) dos conseqüentes, assim como cada antecedente está para o seu conseqüente.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a + c}{b + d} = \frac{a}{b} \quad \text{ou} \quad \frac{a + c}{b + d} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a - c}{b - d} = \frac{a}{b} \quad \text{ou} \quad \frac{a - c}{b - d} = \frac{c}{d}$$

Fonte: GIOVANNI; CASTRUCCI, 1985, p.127 (6ª série)

Após a apresentação dessas duas propriedades, são apontadas suas aplicações, Figura 11, também com exemplo usando apenas números.

Figura 11 - Aplicação das propriedades

▶ **APLICAÇÃO DAS PROPRIEDADES**

Veremos, por meio de exemplos práticos, como aplicar essas propriedades na resolução de exercícios.

1.º exemplo: Determinar x e y na proporção $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$, sabendo-se que $x + y = 28$.

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{x + y}{x} = \frac{3 + 4}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{x + y}{y} = \frac{3 + 4}{4} \rightarrow \text{aplicando-se } P_1$$

Como $x + y = 28$, resulta:

$$\frac{28}{x} = \frac{7}{3} \Rightarrow x \cdot 7 = 28 \cdot 3 \Rightarrow 7x = 84 \Rightarrow x = \frac{84}{7} \Rightarrow x = 12$$

2.º exemplo: A razão de dois números é de 5 para 2, e a diferença entre eles é 60. Determinar os dois números.

Resolução

Representando os números por x e y , temos:

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{2} \rightarrow \text{a razão é de 5 para 2}$$

$$x - y = 60 \rightarrow \text{a diferença é 60}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{x - y}{x} = \frac{5 - 2}{5} \quad \text{ou} \quad \frac{x - y}{y} = \frac{5 - 2}{2} \rightarrow \text{aplicando-se } P_1$$

Como $x - y = 60$, resulta:

$$\frac{60}{x} = \frac{3}{5} \Rightarrow x \cdot 3 = 60 \cdot 5 \Rightarrow 3x = 300 \Rightarrow x = \frac{300}{3} \Rightarrow x = 100$$

$$\frac{60}{y} = \frac{3}{2} \Rightarrow y \cdot 3 = 60 \cdot 2 \Rightarrow 3y = 120 \Rightarrow y = \frac{120}{3} \Rightarrow y = 40$$

Logo: Os números são 100 e 40.

3.º exemplo: Sabendo-se que $\frac{a}{3} = \frac{b}{2}$ e $a + b = 30$, determinar a e b .

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{2} \Rightarrow \frac{a + b}{3 + 2} = \frac{a}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{a + b}{3 + 2} = \frac{b}{2} \rightarrow \text{aplicando-se } P_2$$

Como $a + b = 30$, resulta:

$$\frac{30}{5} = \frac{a}{3} \Rightarrow 5 \cdot a = 30 \cdot 3 \Rightarrow 5a = 90 \Rightarrow a = \frac{90}{5} \Rightarrow a = 18$$

$$\frac{30}{5} = \frac{b}{2} \Rightarrow 5 \cdot b = 30 \cdot 2 \Rightarrow 5b = 60 \Rightarrow b = \frac{60}{5} \Rightarrow b = 12$$

Logo: $a = 18$ e $b = 12$.

Fonte: GIOVANNI; CASTRUCCI, 1985, p.127-128 (6ª série)

Nesse capítulo, explica-se ainda o que seria uma sequência de razões iguais (proporção múltipla), conforme Figura 12.

Figura 12 - Sequência de razões iguais (proporção múltipla)

8. SEQÜÊNCIA DE RAZÕES IGUAIS (PROPORÇÃO MÚLTIPLA)

Consideremos as razões: $\frac{3}{6}$, $\frac{10}{20}$, $\frac{16}{32}$.

Verificamos que todas são iguais, pois:

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \frac{10}{20} = \frac{1}{2} \quad \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$$

Podemos, então, escrever:

$$\frac{3}{6} = \frac{10}{20} = \frac{16}{32}$$

Ao igualarmos as razões acima, formamos **uma seqüência de razões iguais** ou **uma proporção múltipla**.

Fonte: GIOVANNI; CASTRUCCI, 1985, p.128 (6ª série)

No capítulo 13, os autores trazem alguns conceitos relativos a números proporcionais. Para iniciar o capítulo, é apresentada uma parte introdutória, Figura 13, na qual os autores trazem uma situação problema antes de introduzir os conceitos, conforme será visto adiante.

Figura 13 - Introdução (Números proporcionais)

1. INTRODUÇÃO

Consideremos o seguinte problema:

Dois amigos jogaram na loteria esportiva e ganharam Cr\$ 6 000 000. Como o primeiro entrou com Cr\$ 1 200 e o segundo com Cr\$ 1 800, combinaram que o prêmio seria dividido em partes proporcionais a estas quantias. Quanto coube a cada um?

Para darmos a resposta a esta situação, devemos aprender a dividir um número (no caso, Cr\$ 6 000 000) em partes proporcionais a dois outros (no caso, Cr\$ 1 200 e Cr\$ 1 800). É o que estudaremos nesta Unidade.

Fonte: GIOVANNI; CASTRUCCI, 1985, p.131 (6ª série)

Assim, os autores organizam o capítulo com a definição de números diretamente proporcionais e fator de proporcionalidade e exemplificam, conforme Figura 14.

Figura 14 - Números diretamente proporcionais

► **2. NÚMEROS DIRETAMENTE PROPORCIONAIS**

Sejam dois conjuntos, A e B, de números racionais em correspondência biunívoca:

$$A = \{ 2, 3, 5, 6, 10 \}$$

$$\downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow$$

$$B = \{ 6, 9, 15, 18, 30 \}$$

Determinando as razões entre os elementos correspondentes, verificamos que são iguais, isto é:

$$\frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{5}{15} = \frac{6}{18} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

Neste caso, dizemos que os elementos dos conjuntos A e B são **diretamente proporcionais**.
O número $\frac{1}{3}$ é chamado **fator de proporcionalidade**.

Exemplos

1) Verificar se os elementos das sucessões (2, 5, 12) e (4, 10, 24) são diretamente proporcionais.

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad \frac{5}{10} = \frac{1}{2}, \quad \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

Como $\frac{2}{4} = \frac{5}{10} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$, as sucessões são diretamente proporcionais.

2) As sucessões (4, x, 10) e (y, 14, 20) são diretamente proporcionais. Calcular o valor de x e de y.

$$\frac{4}{y} = \frac{x}{14} = \frac{10}{20} \longrightarrow \text{pela definição}$$

$$\frac{4}{y} = \frac{10}{20} \Rightarrow 10 \cdot y = 4 \cdot 20 \Rightarrow 10y = 80 \Rightarrow y = \frac{80}{10} \Rightarrow y = 8$$

$$\frac{x}{14} = \frac{10}{20} \Rightarrow 20 \cdot x = 14 \cdot 10 \Rightarrow 20x = 140 \Rightarrow x = \frac{140}{20} \Rightarrow x = 7$$

Logo: $x = 7$ e $y = 8$.

Fonte: GIOVANNI; CASTRUCCI, 1985, p.131 (6ª série)

Após essa definição, os autores mostram como fazer a divisão de um número n em partes diretamente proporcionais (Figura 15).

Figura 15 - Divisão de um número n em partes diretamente proporcionais

► **3. DIVISÃO DE UM NÚMERO N EM PARTES DIRETAMENTE PROPORCIONAIS**

Seja o problema:

Dividir o número 180 em partes diretamente proporcionais aos números 4, 2 e 3.

Para resolver o problema, devemos:

- representar os números procurados por x, y e z;
- considerar as sucessões (x, y, z) e (4, 2, 3) como diretamente proporcionais.

Então:

$$\begin{cases} x + y + z = 180 & \longrightarrow \text{a soma dos três números é igual a 180} \\ \frac{x}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} & \longrightarrow \text{os números são diretamente proporcionais a 4, 2 e 3} \end{cases}$$

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \Rightarrow \frac{x + y + z}{4 + 2 + 3} = \frac{x}{4} \text{ ou } \frac{y}{2} \text{ ou } \frac{z}{3} \longrightarrow \text{pela propriedade das proporções}$$

$$\frac{180}{9} = \frac{x}{4} \Rightarrow \frac{20}{1} = \frac{x}{4} \Rightarrow x = 20 \cdot 4 \Rightarrow x = 80$$

$$\frac{180}{9} = \frac{y}{2} \Rightarrow \frac{20}{1} = \frac{y}{2} \Rightarrow y = 20 \cdot 2 \Rightarrow y = 40$$

$$\frac{180}{9} = \frac{z}{3} \Rightarrow \frac{20}{1} = \frac{z}{3} \Rightarrow z = 20 \cdot 3 \Rightarrow z = 60$$

Resposta: Os números são 80, 40 e 60.

Fonte: GIOVANNI; CASTRUCCI, 1985, p.132 (6ª série)

De forma análoga, é introduzida a noção de números inversamente proporcionais, Figura 16.

Figura 16 - Números inversamente proporcionais

NÚMEROS INVERSAMENTE PROPORCIONAIS

Consideremos dois conjuntos, A e B, em correspondência biunívoca:

$$A = \{ 2, 3, 5, 6, 10 \}$$

$$\quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$B = \{ 45, 30, 18, 15, 9 \}$$

Determinando o produto entre os elementos correspondentes, vemos que são iguais, isto é:

$$2 \cdot 45 = 3 \cdot 30 = 5 \cdot 18 = 6 \cdot 15 = 10 \cdot 9 = 90$$

Neste caso, dizemos que os elementos dos conjuntos A e B são **inversamente proporcionais**.
O número 90 é chamado **fator de proporcionalidade**.

Fonte: GIOVANNI; CASTRUCCI, 1985, p.132 (6ª série)

E também como efetuar a divisão de um número n em partes inversamente proporcionais (Figura 17).

Figura 17 - Divisão de um número n em partes inversamente proporcionais

DIVISÃO DE UM NÚMERO N EM PARTES INVERSAMENTE PROPORCIONAIS

Seja o problema:

Dividir o número 390 em partes inversamente proporcionais aos números 2, 4 e 3.

Para resolver o problema, devemos:

- representar os números procurados por x, y, z;
- considerar as sucessões (x, y, z) e (2, 4, 3) como inversamente proporcionais.

Então:

$$\begin{cases} x + y + z = 390 & \longrightarrow \text{a soma dos três números é 390} \\ \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} & \longrightarrow \text{os números são diretamente proporcionais aos} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \text{inversos de 2, 4 e 3} \end{cases}$$

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} \Rightarrow \frac{x + y + z}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}} = \frac{x}{\frac{1}{2}} \text{ ou } \frac{y}{\frac{1}{4}} \text{ ou } \frac{z}{\frac{1}{3}}$$

Como $x + y + z = 390$, resulta:

$$\frac{390}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}} = \frac{390}{\frac{6 + 3 + 4}{12}} = \frac{390}{\frac{13}{12}} = \frac{390}{1} \cdot \frac{12}{13} = 360$$

Fonte: GIOVANNI; CASTRUCCI, 1985, p.133 (6ª série)

O último capítulo do livro da 6ª série destinado ao ensino de proporções, capítulo 14, intitulado “Regra de três”, é iniciado com o conceito de grandezas diretamente proporcionais (Figura 18).

Figura 18 - Grandezas diretamente proporcionais

GRANDEZAS DIRETAMENTE PROPORCIONAIS

Quando colocamos gasolina em nosso carro, despendemos certa importância dinheiro. A quantidade colocada e o preço que pagamos por ela são duas grandezas variáveis dependentes.

O mesmo ocorre quando compramos arroz, feijão, batata, açúcar ... O peso e o custo da mercadoria comprada são grandezas variáveis dependentes.

Consideremos, então, o exemplo seguinte, tomando como base o preço da batata em janeiro de 1985:

1 kg de batata custa Cr\$ 1 000
 2 kg de batata custam Cr\$ 2 000
 3 kg de batata custam Cr\$ 3 000
 4 kg de batata custam Cr\$ 4 000

Pelos valores encontrados, verificamos que:

- variando o peso, o custo também varia;
- duplicando, triplicando, . . . o peso, o custo duplica, triplica, . . .

Neste caso, dizemos que as grandezas peso e custo são **diretamente proporcionais**.

Dá a definição:

Duas grandezas variáveis dependentes são **diretamente proporcionais** quando, ao dobro, ao triplo . . . de uma, corresponde o dobro, o triplo . . . da outra.

Fonte: GIOVANNI; CASTRUCCI, 1985, p.135-136 (6ª série)

E também de grandezas inversamente proporcionais (Figura 19):

Figura 19 - Grandezas inversamente proporcionais

3. GRANDEZAS INVERSAMENTE PROPORCIONAIS

Consideremos a velocidade de um automóvel (suposta constante) e o tempo que ele gasta para percorrer certa distância:

Com velocidade de 40 km/h, gasta 6 horas para percorrer a distância.
 Com velocidade de 80 km/h, gastará 3 horas para percorrer a mesma distância.
 Com velocidade de 120 km/h, gastará 2 horas para percorrer a mesma distância.

Pelos valores encontrados, verificamos que:

- variando a velocidade, o tempo também varia;
- duplicando, triplicando . . . a velocidade, o tempo fica reduzido à metade, à terça parte . . .

Neste caso, dizemos que as grandezas velocidade e tempo são **inversamente proporcionais**.

Dá a definição:

Duas grandezas variáveis dependentes são **inversamente proporcionais** quando, ao dobro, ao triplo . . . de uma, corresponde a metade, a terça parte . . . da outra.

Fonte: GIOVANNI; CASTRUCCI, 1985, p.136-137 (6ª série)

A seguir, Figura 20, a regra de três simples é apresentada como uma técnica operatória. Observe.

Figura 20 - Regra de três simples

4. REGRA DE TRÊS SIMPLES

Aprenderemos, agora, a resolver problemas que relacionam dois valores de uma grandeza A com dois valores de uma grandeza B, chamados **problemas de regra de três simples**.

Resolver esses problemas significa determinar um desses quatro valores, conhecendo os outros três.

▷ **TÉCNICA OPERATÓRIA**

Representaremos por $\left\{ \begin{array}{l} a_1 \text{ e } a_2 \text{ os dois valores da grandeza A.} \\ b_1 \text{ e } b_2 \text{ os dois valores da grandeza B.} \end{array} \right.$

Teremos, então, o seguinte esquema:

Grandeza A	Grandeza B
a_1 _____	b_1
a_2 _____	b_2

Quando as grandezas A e B são diretamente proporcionais, escrevemos a proporção:

$$\boxed{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}} \longrightarrow \text{as razões são iguais}$$

Quando as grandezas A e B são inversamente proporcionais, escrevemos a proporção:

$$\boxed{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_2}{b_1}} \longrightarrow \text{a 1.ª razão é igual ao inverso da 2.ª}$$

Fonte: GIOVANNI; CASTRUCCI, 1985, p.137-138 (6ª série)

Nos exemplos, constata-se a presença de cenários na construção dos enunciados das questões, conforme Figura 21 abaixo.

Figura 21 - Exemplos de questões envolvendo regra de três simples

1.º exemplo: Uma máquina, trabalhando durante 40 minutos, produz 100 peças. Quantas peças iguais a essas serão produzidas pela máquina em 2 h 30 min?

Tempo	Produção
40 min	100 peças
150 min	x peças (lembrete: 2h 30 min = 150 min)

As grandezas são diretamente proporcionais, pois, dobrando-se o tempo de funcionamento, o número de peças produzidas também dobrará.

$$\text{Então: } \frac{40}{150} = \frac{100}{x}$$

$$40 \cdot x = 150 \cdot 100 \Rightarrow 40x = 15\,000 \Rightarrow x = \frac{15\,000}{40} \Rightarrow x = 375$$

Resposta: Em 2h 30 min, a máquina produzirá 375 peças.

2.º exemplo: Para realizar um serviço de terraplenagem, 4 máquinas levam 15 dias. Em quantos dias 6 máquinas iguais às primeiras fariam o mesmo serviço?

N.º de máquinas	Tempo
4 máq.	15 dias
6 máq.	x dias

As grandezas são inversamente proporcionais, pois, dobrando-se o número de máquinas, o tempo gasto para fazer o mesmo serviço fica reduzido à metade.

Então:

$$\frac{4}{6} = \frac{x}{15}$$

$$6 \cdot x = 4 \cdot 15 \Rightarrow 6x = 60 \Rightarrow x = \frac{60}{6} \Rightarrow x = 10$$

Resposta: As 6 máquinas fariam o serviço em 10 dias.

Fonte: GIOVANNI; CASTRUCCI, 1985, p.138 (6ª série)

Para finalizar o capítulo, os autores utilizaram dois exemplos que relacionam três grandezas para introduzir a técnica operatória utilizando a regra de três composta. (Figura 22).

Figura 22 - Regra de três composta

5. REGRA DE TRÊS COMPOSTA

Estudaremos, agora, problemas que relacionam três ou mais grandezas.

1.º exemplo: 4 operários produzem, em 10 dias, 320 peças de certo produto. Quantas peças desse mesmo produto serão produzidas por 10 operários em 16 dias?

N.º de operários	N.º de dias	N.º de peças
4 _____	10 _____	320
10 _____	16 _____	x

Para verificar a proporcionalidade, consideremos separadamente a grandeza que possui a incógnita com cada uma das outras grandezas.

Assim:

- Número de operários e número de peças são grandezas diretamente proporcionais.
- Número de dias e número de peças são grandezas diretamente proporcionais.

Teremos, então, as razões: $\frac{4}{10}$ $\frac{10}{16}$ $\frac{320}{x}$

Escrevemos a proporção igualando a razão que contém o termo desconhecido com o produto das outras razões:

$$\frac{320}{x} = \frac{4}{10} \cdot \frac{10}{16}$$

$$\frac{320}{x} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = 320 \cdot 4 \Rightarrow x = 1\ 280$$

Resposta: Serão produzidas 1 280 peças.

2.º exemplo: 18 operários, trabalhando 7 horas por dia, fazem determinado serviço em 12 dias. Em quantos dias, 12 operários que trabalham 9 horas por dia farão serviço idêntico?

N.º de operários	N.º de horas por dia	N.º de dias
18 _____	7 _____	12
12 _____	9 _____	x

- Número de operários e número de dias são grandezas inversamente proporcionais.

Fonte: GIOVANNI; CASTRUCCI, 1985, p. 140 (6ª série)

No livro da 7ª série não aparecem vestígios do ensino de Proporcionalidade.

Na 8ª série, no entanto, há uma breve retomada da Propriedade Fundamental da Proporção e da propriedade da soma para iniciar o estudo dos segmentos proporcionais, em geometria, conforme Figura 23.

Figura 23 - Segmentos proporcionais

4. SEGMENTOS PROPORCIONAIS

Dizemos que quatro segmentos \overline{AB} , \overline{CD} , \overline{EF} e \overline{GH} , nessa ordem, são **proporcionais** quando os números que exprimem suas medidas (tomadas na mesma unidade) formam uma proporção, isto é:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{GH}}$$

Assim, os segmentos $\overline{AB} = 4$ cm, $\overline{CD} = 6$ cm, $\overline{EF} = 8$ cm e $\overline{GH} = 12$ cm, nessa ordem, são proporcionais, pois os números que exprimem suas medidas (4, 6, 8 e 12) formam a proporção $\frac{4}{6} = \frac{8}{12}$, isto é, $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{GH}}$.

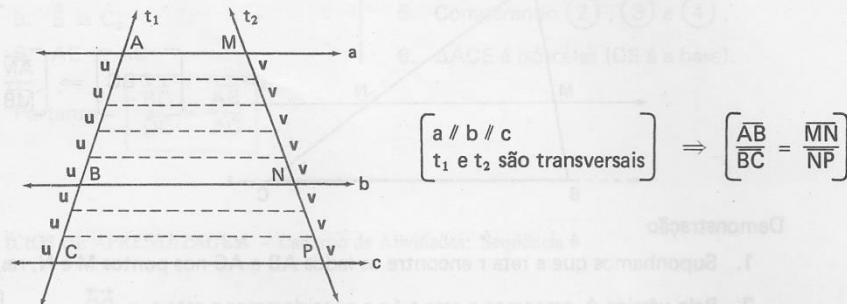
Fonte: GIOVANNI; CASTRUCCI, 1985, p. 117 (8ª série)

De posse dessa definição, é apresentado em seguida o Teorema de Tales (Figura 24).

Figura 24 - Teorema de Tales

6. TEOREMA DE TALES

Um feixe de paralelas determina em duas transversais, quaisquer, segmentos proporcionais.



Demonstração

1. Suponhamos que \overline{AB} e \overline{BC} sejam comensuráveis e seja u a unidade padrão de medida.

Logo:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{5u}{3u} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{5}{3}$$

2. Tracemos pelos pontos de divisão de \overline{AB} e \overline{BC} as paralelas à reta $a = \overleftrightarrow{AM}$ do feixe, que vão interceptar t_2 em segmentos congruentes (v), de acordo com a propriedade do feixe de paralelas.

Então:

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{NP}} = \frac{5v}{3v} \Rightarrow \frac{\overline{MN}}{\overline{NP}} = \frac{5}{3}$$

3. Comparando (1) e (2), temos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{NP}} \rightarrow \overline{AB}, \overline{BC}, \overline{MN}, \overline{NP} \text{ são proporcionais.}$$

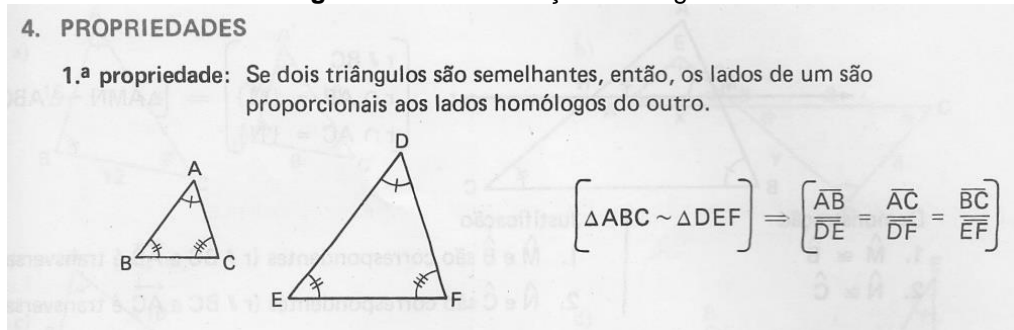
OBSERVAÇÃO

Se \overline{AB} e \overline{BC} forem incomensuráveis, o teorema também é verdadeiro, fato que aceitaremos sem demonstração.

Fonte: GIOVANNI; CASTRUCCI, 1985, p. 119 (8ª série)

No capítulo seguinte, há vestígios do uso de proporcionalidade em semelhança de triângulos (Figura 25).

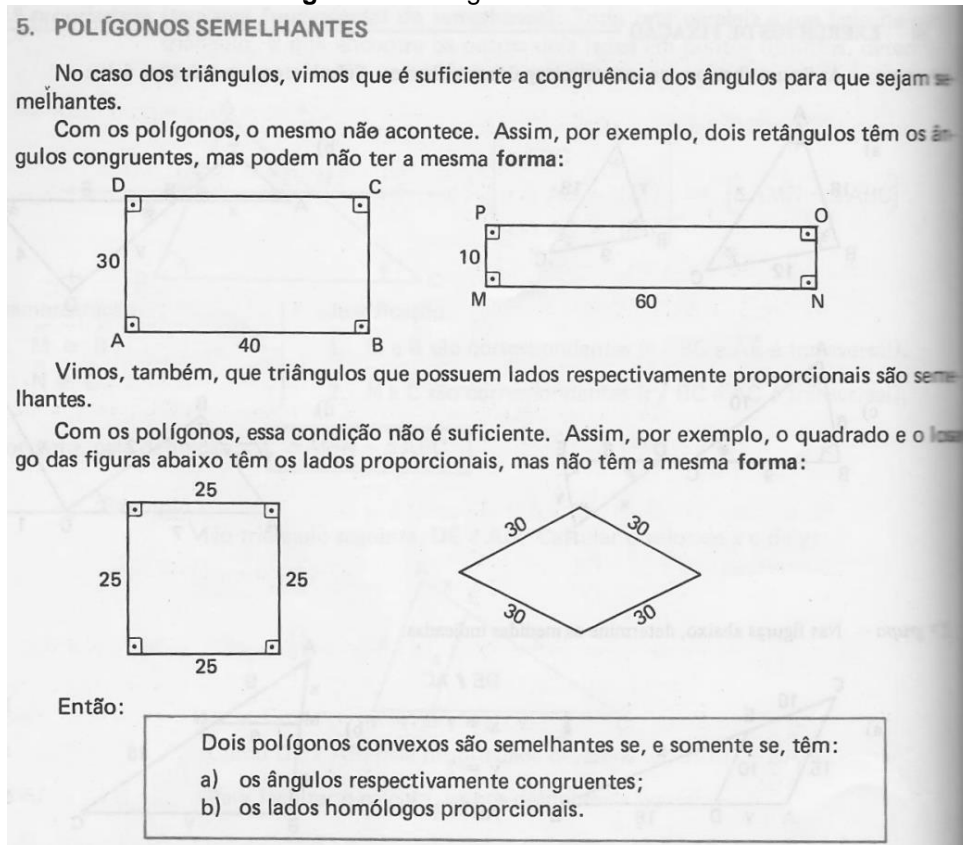
Figura 25 - Semelhança de triângulos



Fonte: GIOVANNI; CASTRUCCI, 1985, p. 127 (8ª série)

E, em seguida, na semelhança dos demais polígonos (Figura 26).

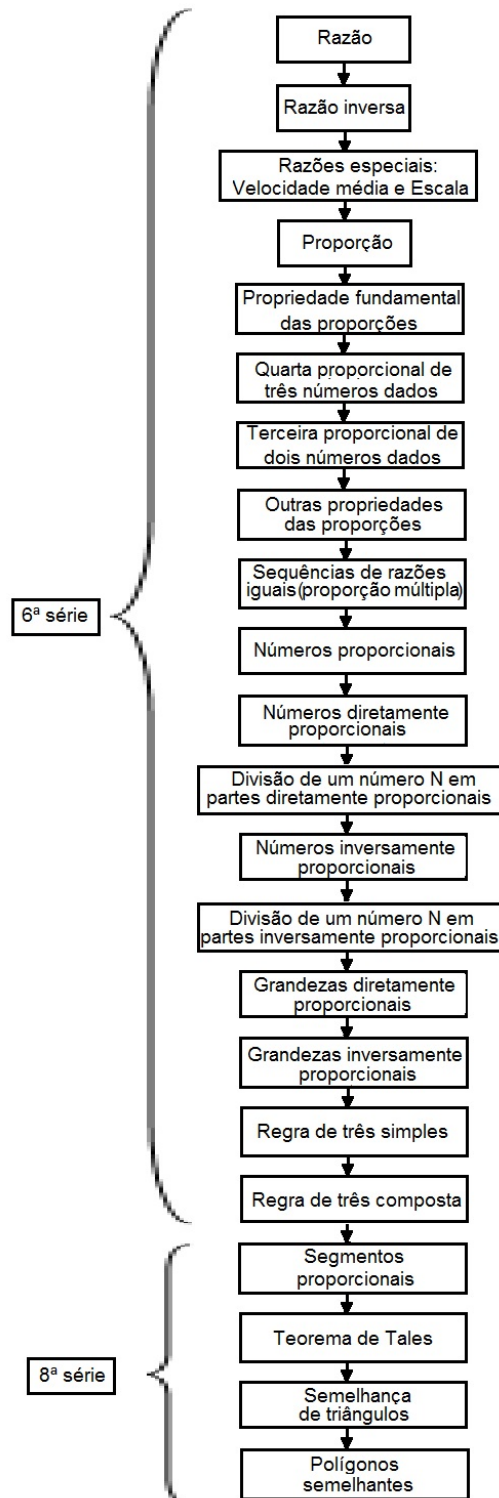
Figura 26 - Polígonos semelhantes



Fonte: GIOVANNI; CASTRUCCI, 1985, p. 130 (8ª série)

É perceptível a linearidade na qual o conteúdo de Proporcionalidade é tratado nos livros da coleção C1. Assim, foi possível traçar um ecossistema que retrate como esse conteúdo foi abordado pelos autores, conforme Esquema 4.

Esquema 4 - Ecossistema da proporcionalidade da C1



Fonte: Dados da autora

Essa estrutura ecológica evidencia o quanto a coleção de livros C1 preconizava um ensino pautado em conceitos ao invés de situações problemas que incitem o raciocínio proporcional dos estudantes.

A coleção C2 toma um rumo um pouco diferente, conforme veremos a seguir.

4.2 ANÁLISE DA COLEÇÃO C2

Nessa parte do trabalho, será analisada a coleção de livros didáticos Conceito e Histórias, do autor Scipione Di Pierro Netto¹¹, cujo ano de publicação foi 1995.

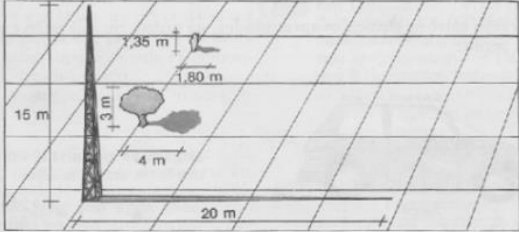
No livro da 5ª série da referida coleção não aparecem vestígios do conteúdo de proporcionalidade. No livro da 6ª série, no entanto, há três capítulos consecutivos sobre o tema (Capítulos VIII, IX e X).

O capítulo VIII é iniciado com o conceito de razão entre grandezas, a partir de uma situação problema envolvendo semelhança, conforme Figura 27.

Figura 27 - Razão entre duas grandezas

**RAZÃO
ENTRE DUAS GRANDEZAS**

Observe as situações a seguir, em que a **altura real** de pessoas, árvores e construções são comparadas com as suas **sombras** projetadas pela luz do Sol.



Vamos representar esses dados numa tabela:

	MENINO	ÁRVORE	TORRE
ALTURA REAL	1,35 m	3 m	15 m
COMPRIMENTO DA SOMBRA	1,80 m	4 m	20 m

Comparando a altura real e a sombra, temos:

menino: $\frac{1,35}{1,80} = \frac{135}{180} = \frac{3}{4}$

árvore: $\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$

torre: $\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$

Observe que o quociente entre a altura real e o comprimento da sombra é sempre o mesmo; ou seja, para cada 3 partes na altura tem-se 4 partes no comprimento da sombra. Dizemos então, nesse caso, que a razão entre a altura real e sua sombra é 3 para 4, e indicamos $\frac{3}{4}$ ou 3 : 4, que se lê “3 para 4”.

Assim, podemos definir:

A razão de duas grandezas é o quociente dos números que medem essas grandezas numa mesma unidade.

Os termos de uma razão são denominados **antecedente** e **conseqüente**. Assim, em 3 : 4 ou $\frac{3}{4}$ temos:

antecedente: 3
conseqüente: 4

Fonte: SCIPIONE, 1995, p.131-132 (6ª série)

¹¹É graduado em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP) e doutor em Educação pela Universidade de São Paulo (USP).

Em seguida, caracterizam razões equivalentes, conforme Figura 28 abaixo.

Figura 28 - Razões equivalentes

RAZÕES EQUIVALENTES

Vimos que $\frac{1,35}{1,80}$ e $\frac{15}{20}$ são razões que valem $\frac{3}{4}$ ou 0,75. Dizemos que são razões equivalentes a $\frac{3}{4}$ ou “3 para 4”.

Podemos sempre obter razões equivalentes a uma razão dada, por exemplo, a $\frac{3}{4}$. Basta multiplicar o antecedente e o conseqüente por um mesmo número não-nulo e indicar:

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16} = \frac{15}{20} = \frac{18}{24} = \dots$$

Fonte: SCIPIONE, 1995, p.133(6ª série)

E razões inversas (Figura 29):

Figura 29 - Razões inversas

RAZÕES INVERSAS

Vamos considerar as razões $\frac{2}{5}$ e $\frac{5}{2}$. Observe que o **antecedente** da primeira é igual ao **conseqüente** da segunda e que o **conseqüente** da primeira é igual ao **antecedente** da segunda. Quando isso ocorre, dizemos que as razões são **inversas**.

Duas razões são inversas quando o antecedente de uma é igual ao conseqüente da outra, e vice-versa.

Assim:

O produto de duas razões inversas é sempre igual a 1.

De fato:

- $\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} = 1$
- $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 1$
- $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = 1$

Fonte: SCIPIONE, 1995, p.135 (6ª série)


Em seguida, é iniciado o conceito de proporções com uma situação problema comparando a razão entre o número de para-choques e o número de pneus para cada quantidade de automóveis analisado (Figura 30).

Figura 30– Proporções

PROPORÇÕES

Vamos comparar o número de pára-choques e o número de pneus de carros de passeio em

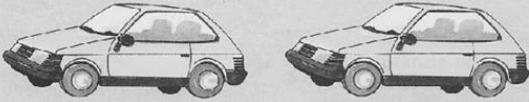
um automóvel:



$$\left. \begin{array}{l} \text{dois pára-choques} \\ \text{quatro pneus} \end{array} \right\} \frac{\text{número de pára-choques}}{\text{número de pneus}} = \frac{2}{4} \text{ ou } \frac{1}{2}$$

lê-se: **2 para 4** ou **1 para 2**

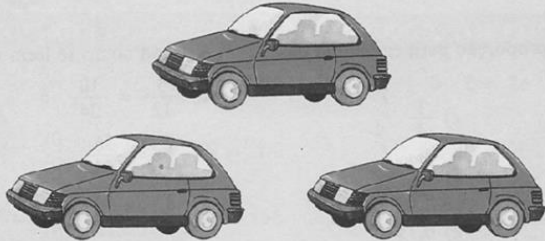
dois automóveis:



$$\left. \begin{array}{l} \text{quatro pára-choques} \\ \text{oito pneus} \end{array} \right\} \frac{\text{número de pára-choques}}{\text{número de pneus}} = \frac{4}{8} \text{ ou } \frac{1}{2}$$

lê-se: **4 para 8** ou **1 para 2**

três automóveis:



$$\left. \begin{array}{l} \text{seis pára-choques} \\ \text{doze pneus} \end{array} \right\} \frac{\text{número de pára-choques}}{\text{número de pneus}} = \frac{6}{12} \text{ ou } \frac{1}{2}$$

lê-se: **6 para 12** ou **1 para 2**

Dizemos então que o número de pára-choques está para o número de pneus na razão “1 para 2” ou “2 para 4” ou “4 para 8” ou “6 para 12”, e assim por diante.

As razões $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{6}{12}$ foram igualdades, ou:

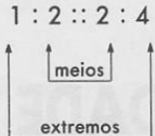
$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} \quad \frac{1}{2} = \frac{6}{12} \quad \frac{2}{4} = \frac{6}{12} \quad \frac{4}{8} = \frac{6}{12}$$


Cada uma dessas igualdades chama-se **proporção**.

Assim:

Denomina-se **proporção** a uma igualdade entre duas razões.

A proporção $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ também pode ser escrita na forma $1 : 2 :: 2 : 4$ ou “um está para dois, assim como dois está para quatro”. Essa forma de escrever deu nomes próprios aos termos:

$1 : 2 :: 2 : 4$


ou $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$


Fonte: SCIPIONE, 1995, p.136-137 (6ª série)

Em seguida, é citada também a Propriedade Fundamental das Proporções (Figura 31):

Figura 31 - Propriedade Fundamental das Proporções

PROPRIEDADE FUNDAMENTAL DAS PROPORÇÕES

Vamos considerar a proporção $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$.

Se multiplicarmos os meios ($3 \cdot 4$) e os extremos ($2 \cdot 6$), obteremos valores iguais. Podemos observar que ocorre o mesmo fato para outras proporções:

PROPORÇÃO	PRODUTO DOS MEIOS	PRODUTO DOS EXTREMOS
$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$	$4 \cdot 6 = 24$	$3 \cdot 8 = 24$
$\frac{5}{10} = \frac{20}{40}$	$10 \cdot 20 = 200$	$5 \cdot 40 = 200$
$\frac{7}{14} = \frac{14}{28}$	$14 \cdot 14 = 196$	$7 \cdot 28 = 196$

De um modo geral, temos:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow b \cdot c = a \cdot d \text{ ou } a \cdot d = b \cdot c$$

Assim, podemos enunciar a propriedade:

Em toda proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos.

Fonte: SCIPIONE, 1995, p.138-139 (6ª série)

Nesse livro, são explicitadas outras duas propriedades além da fundamental. A primeira delas é a propriedade da soma dos termos em uma proporção a seguir (Figura 32):

Figura 32 - Propriedade da soma dos termos de uma proporção

PROPRIEDADE DA SOMA DOS TERMOS EM UMA PROPORÇÃO

Vamos considerar a proporção:

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

Observe que podemos obter outras proporções fazendo:

$$\frac{2+3}{2} = \frac{4+6}{4} \Leftrightarrow \frac{5}{2} = \frac{10}{4}$$

ou

$$\frac{2+3}{3} = \frac{4+6}{6} \Leftrightarrow \frac{5}{3} = \frac{10}{6}$$

De um modo geral, temos:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c} \\ \text{ou} \\ \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \end{cases}$$

que se enuncia:

Em toda proporção, a soma dos dois primeiros termos está para o primeiro ou para o segundo termo assim como a soma dos dois últimos está para o terceiro ou para o quarto termo.

Fonte: SCIPIONE, 1995, p.141 (6ª série)

E a segunda é a propriedade da diferença dos termos de uma proporção (Figura 33):

Figura 33 - Propriedade da diferença dos termos de uma proporção

PROPRIEDADE DA DIFERENÇA DOS TERMOS EM UMA PROPORÇÃO

A partir da proporção $\frac{8}{5} = \frac{16}{10}$, podemos obter outras proporções:

$$\frac{8-5}{8} = \frac{16-10}{16} \Leftrightarrow \frac{3}{8} = \frac{6}{16}$$

ou

$$\frac{8-5}{5} = \frac{16-10}{10} \Leftrightarrow \frac{3}{5} = \frac{6}{10}$$

De um modo geral:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c} \\ \text{ou} \\ \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \end{cases}$$

que se enuncia:

Em toda proporção, a diferença dos dois primeiros termos está para o primeiro ou o segundo termo assim como a diferença entre os dois últimos está para o terceiro ou para o quarto termo.

Fonte: SCIPIONE, 1995, p.143(6ª série)

Em seguida, os autores apresentam a definição do que são sucessões diretamente proporcionais e razão de proporcionalidade (Figura 34).

Figura 34 - Sucessões diretamente proporcionais

SUCESSÕES DIRETAMENTE PROPORCIONAIS

Vamos considerar as igualdades entre as razões dadas a seguir:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \dots$$

Observe que elas apresentam uma sucessão numérica de antecedentes e uma sucessão numérica de consequentes:

(r) : 1, 2, 3, 4, 5, ... (s) : 2, 4, 6, 8, 10, ...

onde a razão dos elementos que são correspondentes em cada sucessão vale sempre $\frac{1}{2}$.

Dizemos que (r) e (s) são sucessões **diretamente proporcionais** e a **razão de proporcionalidade** ou o **coeficiente de proporcionalidade** é $\frac{1}{2}$.

Num outro exemplo, as razões iguais $\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{9}{15} = \frac{12}{20} = \frac{15}{25}$ formam duas sucessões:

(r') : 3, 6, 9, 12, 15, ...
(s') : 5, 10, 15, 20, 25, ...

Novamente, (r') e (s') são sucessões diretamente proporcionais e o coeficiente de proporcionalidade é $\frac{3}{5}$.

De um modo geral, se a, b, c, d, ... é uma sucessão de números diretamente proporcional à sucessão a', b', c', d', ..., então podemos escrever:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = \dots = k$$

em que k é o coeficiente de proporcionalidade.

Fonte: SCIPIONE, 1995, p.145 (6ª série)

Apresentam também como realizar uma divisão em partes diretamente proporcionais, conforme Figura 35.

Figura 35 - Divisão em partes diretamente proporcionais

DIVISÃO EM PARTES DIRETAMENTE PROPORCIONAIS

Considere o número 160. Vamos dividi-lo em partes diretamente proporcionais aos números 5, 2 e 3.

Para isso, vamos representar os números procurados por x , y e z .

As sucessões x , y , z e 5, 2, 3 são diretamente proporcionais; então, podemos escrever:

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$$

Como $x + y + z = 160$, temos:

$$\begin{cases} x + y + z = 160 \\ \frac{x}{5} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \end{cases}$$

Aplicando a propriedade da adição dos termos de uma proporção, temos:

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x + y + z}{10} = \frac{x}{5} \\ \frac{x + y + z}{10} = \frac{y}{2} \\ \frac{x + y + z}{10} = \frac{z}{3} \end{cases}$$

Lembrando que $x + y + z = 160$, temos:

$$\frac{160}{10} = \frac{x}{5} \Rightarrow 10 \cdot x = 160 \cdot 5 \quad \text{ou} \quad x = 80$$

$$\frac{160}{10} = \frac{y}{2} \Rightarrow 10 \cdot y = 160 \cdot 2 \quad \text{ou} \quad y = 32$$

$$\frac{160}{10} = \frac{z}{3} \Rightarrow 10 \cdot z = 160 \cdot 3 \quad \text{ou} \quad z = 48$$

Os números procurados são 80, 32 e 48.

Fonte: SCIPIONE, 1995, p.146-147 (6ª série)

Analogamente, apresentam a definição de sucessões inversamente proporcionais (Figura 36):

Figura 36 - Sucessões inversamente proporcionais

**SUCESSÕES
INVERSAMENTE
PROPORCIONAIS**

Considerando as sucessões:

(r) 2, 3, 5, 6

(s) 15, 10, 6, 5

observe que o produto dos elementos correspondentes das sucessões é sempre igual a um mesmo valor:

$$2 \cdot 15 = 3 \cdot 10 = 5 \cdot 6 = 6 \cdot 5 = 30$$

Note ainda que:

$$\frac{2}{15} = \frac{3}{10} = \frac{5}{6} = \frac{6}{5}$$

Os números da sucessão (r) são **proporcionais aos inversos** dos números da sucessão (s).

Dizemos que (r) e (s) são sucessões **inversamente proporcionais**.

De um modo geral, se a, b, c, d, \dots é uma sucessão de números inversamente proporcional à sucessão a', b', c', d', \dots então podemos escrever:

$$a \cdot a' = b \cdot b' = c \cdot c' = \dots = k$$

ou

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \dots = k$$

em que k é o coeficiente de proporcionalidade.

Fonte: SCIPIONE, 1995, p.148 (6ª série)

E também como realizar uma divisão em partes inversamente proporcionais (Figura 37):

**DIVISÃO EM
PARTES INVERSAMENTE
PROPORCIONAIS**

Considere o número 45. Vamos dividi-lo em partes inversamente proporcionais aos números 3, 4 e 6.

Vamos representar os números procurados por x, y e z . Como as sucessões x, y, z e 3, 4, 6 são inversamente proporcionais, temos:

$$\begin{cases} x + y + z = 45 \\ \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{6} \end{cases}$$

• $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{6} \Rightarrow \frac{x + y + z}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}} = \frac{x}{\frac{1}{3}}$ ou $\frac{y}{\frac{1}{4}}$ ou $\frac{z}{\frac{1}{6}}$

Como $x + y + z = 45$ e $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{9}{12}$, temos:

• $\frac{45}{\frac{9}{12}} = \frac{x}{\frac{1}{3}} \Rightarrow 45 \cdot \frac{12}{9} = x \cdot \frac{3}{1} \Rightarrow 60 = 3x \Rightarrow x = 20$

• $60 = \frac{y}{\frac{1}{4}} \Rightarrow 60 = y \cdot 4 \Rightarrow y = 15$

• $60 = \frac{z}{\frac{1}{6}} \Rightarrow 60 = z \cdot 6 \Rightarrow z = 10$

Os números procurados são 20, 15 e 10.

Fonte: SCIPIONE, 1995, p.149-150 (6ª série)

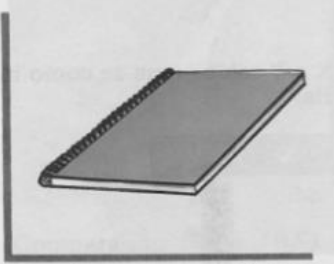
No capítulo IX, intitulado “Regra de Três”, o autor inicia com a definição de grandezas proporcionais (Figura 38).

Figura 38 - Grandezas diretamente proporcionais

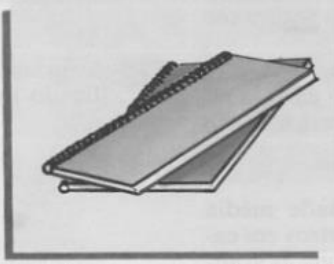
GRANDEZAS DIRETAMENTE PROPORCIONAIS

Vamos considerar a seguinte situação:
 “Carla compra cadernos que custam \$ 100,00 cada.”

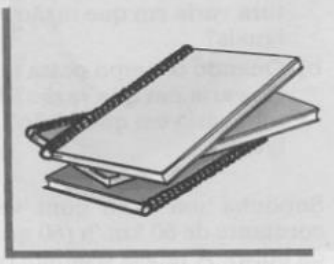
Assim:



1 caderno custa \$ 100,00.



2 cadernos custam \$ 200,00.



3 cadernos custam \$ 300,00.

Observe que, quando a primeira grandeza (cadernos) aumenta na razão 1 para 2, a segunda grandeza (preços) passa de 100 para 200.

Como $\frac{100}{200}$ é equivalente a $\frac{1}{2}$, temos a proporção:

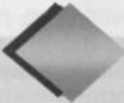
$$\frac{1}{2} = \frac{100}{200}$$

Do mesmo modo, quando o aumento do número de cadernos é de 1 para 3, os preços variam também segundo razões equivalentes, ou seja:

$$\frac{1}{3} = \frac{100}{300}$$

Nesse caso, dizemos que as duas grandezas (quantidade de cadernos e preços) são **diretamente proporcionais**.

Assim:



Duas grandezas são diretamente proporcionais quando, variando uma delas, a outra varia na mesma razão da primeira.

Fonte: SCIPIONE, 1995, p.155 (6ª série)

E grandezas inversamente proporcionais (Figura 39):

Figura 39 - Grandezas inversamente proporcionais

GRANDEZAS INVERSAMENTE PROPORCIONAIS

A distância entre Salvador e Feira de Santana é 120 km. Um veículo pode percorrer essa distância com diferentes velocidades. Vamos examinar a relação que existe entre as grandezas **velocidade** e **tempo gasto** no percurso:

	VELOCIDADE	TEMPO GASTO
A	30 km/h	4 horas
B	40 km/h	3 horas
C	60 km/h	2 horas
D	120 km/h	1 hora

Comparando (A) e (B), temos:

- a razão entre as **velocidades**:

$$\frac{30 \text{ km/h}}{40 \text{ km/h}} = \frac{3}{4}$$
- a razão entre os **tempos**:

$$\frac{4 \text{ horas}}{3 \text{ horas}} = \frac{4}{3}$$

Comparando (A) e (D), temos:

- a razão entre as **velocidades**:

$$\frac{30 \text{ km/h}}{120 \text{ km/h}} = \frac{1}{4}$$
- a razão entre os **tempos**:

$$\frac{4 \text{ horas}}{1 \text{ hora}} = \frac{4}{1}$$

Em qualquer desses casos, uma razão é a inversa da outra, e, para se obter uma proporção, deve-se inverter os termos de uma das razões, ou seja:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{30 \text{ km/h}}{40 \text{ km/h}} = \frac{30}{40} \\ \text{e} \\ \frac{4 \text{ horas}}{3 \text{ horas}} = \frac{4}{3} \end{array} \right\} \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$$

De fato: $4 \cdot 30 = 3 \cdot 40$
 Dizemos então:

Duas grandezas são inversamente proporcionais quando, variando uma delas, a outra varia na razão inversa da primeira.

Fonte: SCIPIONE, 1995, p.157-158 (6ª série)

Em seguida, caracteriza regra de três simples (Figura 40):

Figura 40 - Regra de três simples

REGRA DE TRÊS SIMPLES

Vamos considerar a seguinte situação:
 “Bianca comprou 3 camisetas e pagou \$ 1 200,00. Quanto pagaria se comprasse 5 camisetas do mesmo tipo e preço?”
 Observe que estão relacionados dois valores da grandeza **camisetas** com dois valores da grandeza **preço**. Vamos organizar esses dados numa tabela:

CAMISETAS	PREÇO (\$)
3	1 200
5	x

Note que nessa tabela conhecemos **três** de seus elementos e procuramos o valor do quarto. Problemas desse tipo são chamados de **problemas de regra de três simples**.
 Veja que as grandezas **camisetas** e **preço** são diretamente proporcionais; assim, podemos escrever a proporção:

$$\frac{3}{5} = \frac{1\ 200}{x}$$

Aplicando a propriedade fundamental, temos:

$$\begin{aligned} 3x &= 1\ 200 \cdot 5 \\ x &= \frac{1\ 200 \cdot 5}{3} \\ x &= 2\ 000 \end{aligned}$$

Logo, Bianca pagaria \$ 2 000,00 pelas 5 camisetas.

Fonte: SCIPIONE, 1995, p.159 (6ª série)

Durante a explicação sobre regra de três, o autor apresenta um processo prático para facilitar a resolução de problemas envolvendo regra de três simples. Observe na Figura 41.

Figura 41 - Processo prático que facilita a resolução de problemas envolvendo regra de três simples direta e inversa

Podemos estabelecer um processo prático que facilite a resolução de problemas desse tipo. Acompanhe esse processo nos problemas resolvidos a seguir.

1º problema

Carla comprou 2 cadernos e pagou \$ 450,00. Quanto pagaria se comprasse 5 cadernos do mesmo tipo e preço?

- Organizam-se os dados do problema numa tabela ou esquema:

cadernos	preço (\$)
2	450,00
5	x

- Verifica-se se as grandezas são diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais; no 1º caso, colocam-se **flechas de mesmo sentido**, indicando esse fato; se forem inversamente proporcionais, colocam-se **flechas de sentidos opostos**.

cadernos	preço (\$)
↓ 2	450,00 ↓
↓ 5	x ↓

- Como as grandezas são diretamente proporcionais, escreve-se a proporção na forma direta:

$$\frac{2}{5} = \frac{450}{x}$$

- Calcula-se o valor da incógnita:

$$x = \frac{5 \cdot 450}{2}$$

$$x = 1\,125$$

Assim, Carla pagaria \$ 1 125,00 pelos 5 cadernos.

2º problema

Com velocidade média de 500 km por hora, um avião percorre uma distância entre duas cidades em 3 horas. Que tempo levaria uma aeronave que desenvolve 800 km por hora de velocidade média para percorrer o mesmo espaço?

- Organizam-se os dados:

velocidade (km/h)	tempo (h)
500	3
800	x

- As grandezas **velocidade** e **tempo** são inversamente proporcionais. Assim, as flechas terão sentidos discordantes:

velocidade (km/h)	tempo (h)
↓ 500	3 ↑
↓ 800	x ↑

- Escreve-se a proporção, invertendo-se os termos de uma das razões:

$$\frac{500}{800} = \frac{x}{3}$$

- Calcula-se x:

$$x = \frac{3 \cdot 500}{800} \Rightarrow x = \frac{15}{8} \Rightarrow x = 1\text{ h } 52\text{ min } 30\text{ s}$$

Logo, a aeronave levaria 1 h 52 min 30 s para percorrer o mesmo espaço.

No final do capítulo, apresentam o processo de resolução de problemas envolvendo regra de três composta. Observe, a seguir (Figura 42), que os autores utilizam setas para evidenciar a relação entre as grandezas envolvidas.

Figura 42 - Regra de três composta

REGRA DE TRÊS COMPOSTA

Vamos analisar a seguinte situação:

“Duas máquinas produzem 60 m de tecido em 3 horas.”

Vamos variar só a grandeza **máquinas** e ver o que acontece com a produção:

“Quatro máquinas produzirão 120 m de tecido em 3 horas.”

Vamos variar agora a grandeza **horas** e ver o que acontece com a produção:

“Quatro máquinas trabalhando 9 horas produzirão 360 m de tecido.”

Observe que, ao **duplicarmos** as máquinas e **triplicarmos** as horas, **sextuplicamos** a produção: de 60 m para 360 m de tecido.

Assim:

Quando uma grandeza variável é proporcional a duas outras, a variação da primeira é proporcional ao **produto** da variação das duas outras.

Organizando os dados da situação citada, temos:

	máquinas	horas	metros de tecido
	2	3	60
duplicar ↓	4	triplicar ↓	9
		sextuplicar ↓	360

Observe que todas as flechas têm o mesmo sentido, pois **umentando-se** as máquinas **umentam** os metros de tecido e **umentando-se** as horas **umentam** os metros de tecido.

Assim:

máquinas por hora	metros de tecido
$2 \cdot 3$	60
$4 \cdot 9$	360

ou

$$\frac{2 \cdot 3}{4 \cdot 9} = \frac{60}{360} \text{ ou } \frac{6}{36} = \frac{60}{360}$$

Se o problema fosse calcular quantos metros de tecido 4 máquinas produziriam nessas condições, bastaria fazer:

máquinas	horas	metros de tecido
2	3	60
↓	↓	↓
4	9	x

máquinas por horas	metros de tecido
$2 \cdot 3$	60
↓	↓
$4 \cdot 9$	x

$$\frac{6}{36} = \frac{60}{x}$$

$$x = \frac{36 \cdot 60}{6}$$

$$x = 360$$

Assim, 4 máquinas produziram 360 m de tecido.

Fonte: SCIPIONE, 1995, p.162-163 (6ª série)

No capítulo X, sobre porcentagem e juros simples, o cálculo da taxa de porcentagem é apresentado utilizando-se de uma regra de três simples, conforme apresentado a seguir (Figura 43):

Figura 43 - Cálculo da taxa de porcentagem

CÁLCULO DA TAXA DE PORCENTAGEM

O cálculo da **taxa de porcentagem** pode ser realizado utilizando-se uma **regra de três simples**. Vejamos algumas situações em que esse cálculo é utilizado.

1ª situação

Se eu depositar \$ 60,00 numa caderneta de poupança, ao final de um mês terei \$ 75,00. Qual é a taxa de porcentagem desse rendimento?

Temos:

- \$ 60,00 é a **quantia principal** do problema.
- \$ 15,00 é o **rendimento** obtido no período.

Organizamos uma regra de três simples, em que:

\$ 60,00 correspondem a 100% investidos;
\$ 15,00 correspondem a x% do que foi investido.

Essa regra de três simples é direta:

$$\begin{array}{ccc} \downarrow \$ 60,00 & \text{-----} & 100 \downarrow \\ \downarrow \$ 15,00 & \text{-----} & x \downarrow \end{array}$$

$$\frac{60}{15} = \frac{100}{x} \Leftrightarrow x = \frac{100 \cdot 15}{60}$$

$$x = 25$$

Portanto, a taxa de rendimento é 25% ou $\frac{25}{100}$ ou 0,25 na forma centesimal.

2ª situação

Numa classe de 40 alunos, 18 são meninas. Qual é a taxa de porcentagem das meninas dessa classe?

Temos:

- 40 alunos correspondem a 100%.
- 18 alunos correspondem a x%.

$$\begin{array}{ccc} \downarrow 40 & \text{-----} & 100\% \downarrow \\ \downarrow 18 & \text{-----} & x\% \downarrow \end{array}$$

$$\frac{40}{18} = \frac{100}{x} \Rightarrow x = \frac{18 \cdot 100}{40}$$

$$x = 45$$

Na classe, 45% dos alunos são meninas, ou $\frac{45}{100}$ ou 0,45 na forma centesimal.

Fonte: SCIPIONE, 1995, p.169-170 (6ª série)

Em seguida, utilizam a regra de três para esboçar uma fórmula para porcentagem (Figura 44):

Figura 44 - Fórmula da porcentagem

FÓRMULA DA PORCENTAGEM

Vamos considerar a seguinte situação:
 “Na venda de um imóvel de \$ 500 000,00, um corretor deve receber 4% de comissão.”
 Vamos calcular o ganho desse corretor na venda do imóvel, montando uma regra de três, em que:

- 500 000 é a **quantia principal** ou **principal**;
- 4% é a **taxa de porcentagem**;
- **x** é a **porcentagem**.

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & 500\ 000 & \text{-----} & 100\% & \downarrow \\ & x & & 4\% & \\ \hline \frac{500\ 000}{x} & = & \frac{100}{4} & \Rightarrow & x = \frac{4 \cdot 500\ 000}{100} \\ & & & & x = 20\ 000 \end{array}$$

Assim, a porcentagem que o corretor vai receber é \$ 20 000,00.
 Esse mesmo problema pode ser generalizado para se obter a fórmula da porcentagem, que será útil na solução de problemas semelhantes. Veja:
 “Quantas unidades (**p**) são produzidas por um principal de **C** unidades, a uma taxa de **i**%, sabendo-se que 100 unidades a uma taxa de 1% produzem 1 unidade?”

principal	taxa	porcentagem
100	1	1
↓	↓	↓
C	i	p

$$\frac{100 \cdot 1}{C \cdot i} = \frac{1}{p}$$

$$p = \frac{C \cdot i}{100}$$

Quando a taxa **i** é expressa na forma centesimal, a fórmula $p = \frac{C \cdot i}{100}$ reduz-se a $p = C \cdot i$.

$$p = C \cdot i$$

Fonte: SCIPIONE, 1995, p.171-172 (6ª série)

Utilizam também a regra de três composta para expressar a fórmula de juros simples, conforme Figura 45 a seguir.

Figura 45 - Juros simples

JUROS SIMPLES

Considere a seguinte situação:
 “A importância de \$ 100 000,00 foi emprestada durante 1 mês por um banco ao cliente Epaminondas da Silva. O banco cobrará do cliente 10% de juro mensal. Quanto será cobrado?”
 Vamos convencionar uma representação para cada dado do problema:

- O dinheiro emprestado, \$ 100 000,00 é a **quantia principal** ou **capital**. Representa-se por **C**.
- A retribuição periódica pelo empréstimo do dinheiro, que corresponde à quantia que será cobrada pelo banco, é o aluguel que se paga em cada período. Recebe o nome de **juro** e representa-se por **j**.
- A **taxa de juro**, 10%, é a taxa que funciona como o aluguel que o cliente paga pelo dinheiro que o banco lhe empresta; representa-se por **i**.
- A referência de **tempo**, um mês em que o dinheiro ficou aplicado, representa-se por **t**.

Problemas desse tipo podem ser resolvidos utilizando-se uma regra de três. Vamos estabelecer um problema genérico e obter uma fórmula que possibilite a solução de problemas semelhantes:

“Quem aplica \$ 100,00 à taxa de 1% ao período (ano, mês, dia, etc.) recebe, no fim do período, \$ 1,00 de juro. Se aplicasse um capital **C** à taxa **i** ao período, então receberia o juro **j**.”

Monta-se uma regra de três composta:

capital	taxa	tempo	juro
↓ 100	↓ 1	↓ 1	↓ 1
C	i	t	j

Como são grandezas diretamente proporcionais em relação à grandeza juro, podemos escrever:

$$\frac{100}{C} \cdot \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{t} = \frac{j}{i}$$

$$i = \frac{Cit}{100}$$

Fonte: SCIPIONE, 1995, p.173(6ª série)

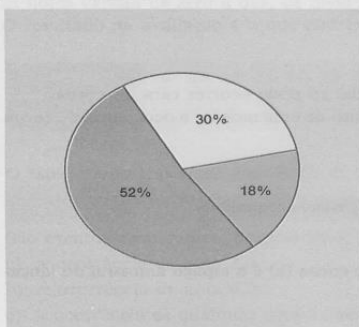
No livro da 7ª série dessa coleção não foi encontrado nada sobre o conteúdo de Proporcionalidade.

No livro da 8ª série, na parte destinada exclusivamente à Estatística, utiliza-se a regra de três na construção de gráficos de setores, conforme fragmento a seguir (Figura 46).

Figura 46 - Gráfico em setores

5 GRÁFICOS EM SETORES

1º exemplo



Vamos supor o problema:

- 52% dos congressistas brasileiros são presidencialistas
- 30% dos congressistas brasileiros são parlamentaristas
- 18% dos congressistas brasileiros são indefinidos

Setores circulares são formas adequadas para representar fenômenos que se expressam em termos de porcentagens. Isso porque o círculo todo é uma excelente representação de 100% desse fenômeno. Para representar os 18% dos congressistas no círculo, escrevemos a seguinte regra de três simples:

$$\begin{array}{l} 100\% \text{ — correspondem — } 360^\circ \\ 18\% \text{ — correspondem — } x^\circ \end{array} \Leftrightarrow \frac{100}{18} = \frac{360}{x} \Leftrightarrow x = (64,8)^\circ$$

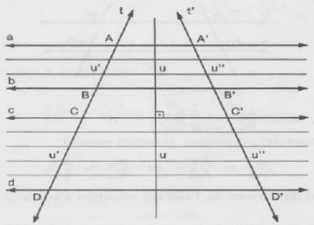
Note que 64° e $\left(\frac{8}{10}\right)$ é o mesmo que $64^\circ \left(\frac{8}{10} \cdot 60'\right) = 64^\circ 48'$. Basta tomar um arco de 64° e $48'$ para representar no círculo os 18% dos congressistas brasileiros indefinidos. Dessa forma, obtemos 108° para representar os 30% dos congressistas parlamentares e $187^\circ 12'$ para representar os 52% dos congressistas presidencialistas.

Fonte: SCIPIONE, 1995, p.11 (Estatística, 8ª série)

Na Figura 47, a seguir, os autores inserem a Proporcionalidade na Geometria ao enunciarem o Teorema de Tales:

Figura 47 - Teorema de Tales

Teorema de Tales
 Consideremos o feixe de paralelas $a \parallel b \parallel c \parallel d$ que corta as transversais t e t' :



Suponhamos que haja um segmento comum, de medida u , contido 3 vezes entre as retas a e b e 5 vezes entre as retas c e d .

Como, pela propriedade demonstrada anteriormente, segmentos congruentes sobre uma transversal determinam segmentos congruentes sobre a outra, teremos segmentos congruentes de medida u' sobre t e segmentos congruentes de medida u'' sobre t' . Portanto, podemos escrever:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{3u'}{5u'} \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{3}{5} \quad \text{I}$$

Do mesmo modo:

$$\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{3u''}{5u''} \Rightarrow \frac{A'B'}{C'D'} = \frac{3}{5} \quad \text{II}$$

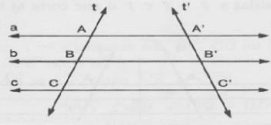
Comparando I e II, temos:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$$

que permite enunciar o teorema de Tales:

Um feixe de paralelas determina, em duas transversais quaisquer, segmentos que são proporcionais.

Existem formas equivalentes de se escrever o teorema de Tales. Considere o feixe de paralelas $a \parallel b \parallel c$:



Pelo teorema de Tales, temos $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$.

Aplicando as propriedades das proporções, podemos escrever:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'} \quad \text{ou} \quad \frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'}$$

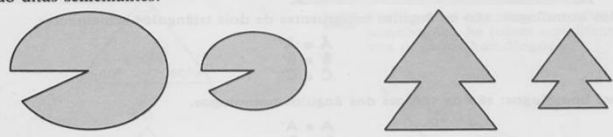
Fonte: SCIPIONE, 1995, p.83-84 (8ª série)

E depois, no conceito de semelhança de triângulos (Figura 48).

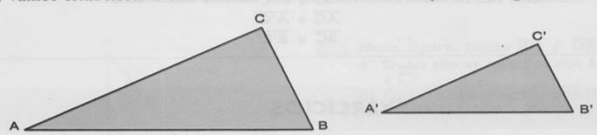
Figura 48 - Conceito de semelhança de triângulos

CONCEITO DE SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

A semelhança é um conceito natural e intuitivo. Figuras "parecidas" ou "que têm a mesma forma" são ditas **semelhantes**:



Todavia, vamos estabelecer o conceito matemático de **semelhança de triângulos**:



Define-se:

Dois triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes quando e somente quando têm os ângulos correspondentes congruentes e os lados correspondentes proporcionais.

Fonte: SCIPIONE, 1995, p.97 (8ª série)

Utilizam a proporcionalidade também para apresentar o lema da semelhança (Figura 49).

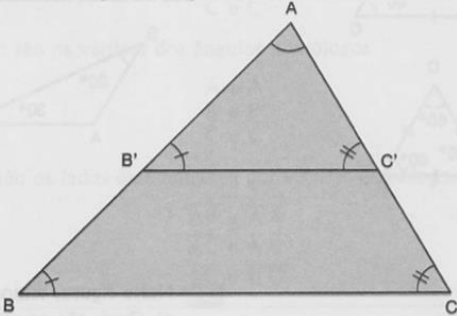
Figura 49 - Lema da semelhança

LEMA DA SEMELHANÇA

A semelhança de triângulos se baseia numa propriedade fundamental, conhecida com o nome de **lema da semelhança** de triângulos:

Toda paralela a um dos lados de um triângulo que intersecciona os outros lados forma, com esses lados, um triângulo semelhante ao primeiro.

No triângulo ABC, vamos traçar $\overline{B'C'}$, paralelo ao lado \overline{BC} :



Vamos provar que o triângulo obtido $\triangle AB'C'$ é semelhante ao triângulo ABC. Para tanto, precisamos provar que os três ângulos do $\triangle ABC$ são congruos aos três ângulos do $\triangle AB'C'$ e ainda que vale a proporcionalidade entre os lados.

Demonstração:

1.ª parte Os ângulos são congruentes:

$$\triangle ABC \text{ e } \triangle AB'C' \rightarrow \begin{cases} \hat{A} \cong \hat{A} \text{ (é o mesmo ângulo)} \\ \hat{B} \cong \hat{B}' \text{ (ângulos correspondentes)} \\ \hat{C} \cong \hat{C}' \text{ (ângulos correspondentes)} \end{cases}$$

2.ª parte Os lados correspondentes são proporcionais:

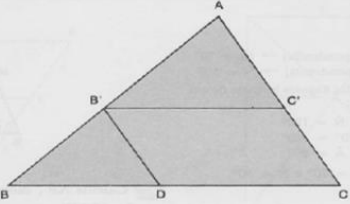
Pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} \quad \textcircled{I}$$

Falta apenas provar que a razão $\frac{B'C'}{BC}$ é igual a qualquer uma das anteriores expressas em \textcircled{I} . Para tanto, vamos acrescentar um novo elemento nessa figura.

Por B' vamos traçar $\overline{B'D} \parallel \overline{AC}$.

A figura obtida $B'DCC'$ é um paralelogramo, pois os lados opostos são paralelos.



Observando o triângulo a partir do vértice B e aplicando o teorema de Tales, temos:

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{CD}{CB}$$

Como $CD = B'C'$, temos:

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} \quad \textcircled{II}$$

Comparando \textcircled{II} e \textcircled{I} , obtemos:

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$$

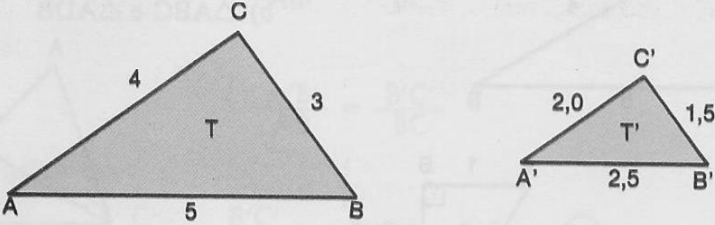
Logo, os três ângulos do $\triangle ABC$ e do $\triangle AB'C'$ são congruos e os lados homólogos são proporcionais.

E finalizam com a razão de semelhança para quaisquer polígonos (Figura 50).

Figura 50 - Razão de semelhança

RAZÃO DE SEMELHANÇA

Vamos considerar dois triângulos semelhantes, tais que os lados do maior sejam o dobro dos lados do menor.



Dizemos que a **razão de semelhança** entre os triângulos T' e T é 1 para 2, e indicamos $1 : 2$ ou $\frac{1}{2}$.

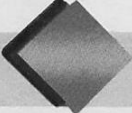
Do mesmo modo, a razão de semelhança dos triângulos T e T' é 2 para 1, e indicamos $2 : 1$ ou $\frac{2}{1}$.

A razão de semelhança de dois triângulos semelhantes A'B'C' e ABC é igual à razão de semelhança de qualquer um de seus lados homólogos.

Assim:

$$\frac{T}{T'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{2}{1} \quad \text{ou} \quad \frac{T'}{T} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{1}{2}$$

Esse conceito pode ser estendido aos polígonos semelhantes, isto é, àqueles que podem ser decompostos no mesmo número finito de triângulos semelhantes.

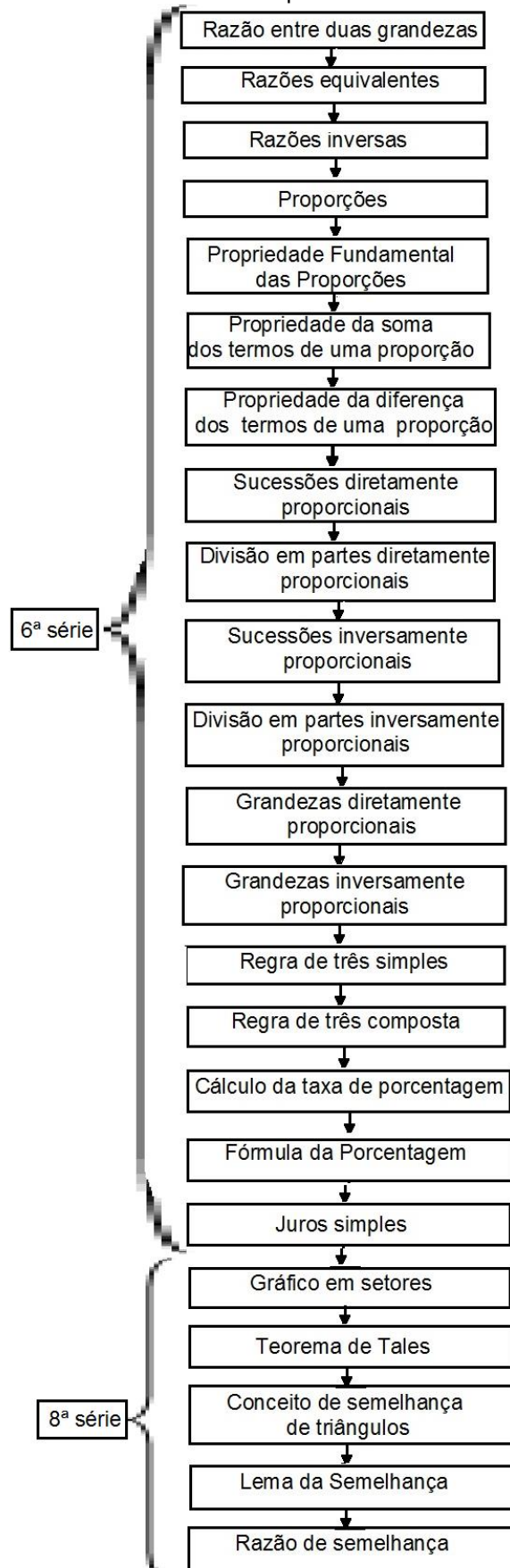


$$\frac{P'}{P} = \frac{A'B'}{AB}$$

Fonte: SCIPIONE, 1995, p.110 (8ª série)

Com base nos fragmentos retirados dos livros didáticos da coleção C2, foi possível construir o Esquema 4, que representa o ecossistema da Proporcionalidade da coleção C2, que assim como na coleção C1, expressa uma certa linearidade na apresentação dos conteúdos.

Esquema 5 - Ecossistema da Proporcionalidade da coleção C2



Fonte: Dados da autora

A estrutura ecológica da coleção C2 assemelha-se, em grande parte, com a estrutura esboçada para a coleção C1 como, por exemplo, na apresentação das propriedades relacionadas à Proporcionalidade. Percebe-se, entretanto, que na coleção C2, a regra de três assume um papel integrador com outros conteúdos matemáticos quando é utilizada para chegar à fórmula para o cálculo da taxa percentual e à fórmula para o cálculo de juros simples. Além disso, é utilizada também em Estatística, na apresentação do gráfico de setores. É válido mencionar também, que os conceitos são abordados de forma mais contextualizada na coleção C2, enquanto que na coleção C1 essa contextualização é muito pouco explorada.

A seguir iremos analisar a coleção C3.

4.3 ANÁLISE DA COLEÇÃO C3

Os livros didáticos da coleção “Matemática hoje é feita assim” de autoria de Antônio José Lopes Bigode¹² publicados no ano 2000 foram os escolhidos para representar a respectiva década.

No volume 5 (5ª série), o autor tece, na parte pedagógica do livro, algumas considerações sobre o modo como o ensino era abordado anteriormente e expõe sua opinião sobre a organização observada no período.

Nos livros dos anos 60/70 era comum que certos tópicos fossem abordados em apenas uma série. Assim, as frações eram ensinadas apenas no vol. 5, as proporções no vol. 6, a álgebra no vol. 7 e as funções no vol. 8. Esta organização estanque é equivocada e não está de acordo com os estudos mais recentes sobre a aprendizagem de conceitos matemáticos. (BIGODE, 2000, p. 14)

E propõe a seguinte estrutura para a coleção:

No vol. 5, quando o pensamento aditivo dos alunos ainda é forte, a porcentagem é explorada a partir das ideias intuitivas que associam 50% a $\frac{1}{2}$ e 10% a $\frac{1}{10}$. Os alunos calculam, estimam e aproximam

¹²Doutor em Didática das Ciências e das Matemáticas pela Universidad Autònoma de Barcelona (UAB), mestre em Didática das Ciências e das Matemáticas pela Universidad Autònoma de Barcelona (UAB) e graduado em Licenciatura em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP). Disponível em: <<http://lattes.cnpq.br/7100876578985579>> Acesso em: 4 jun. 2016.

porcentagens fazendo composições e decomposições de números e porcentagens. No vol. 6, a porcentagem é retomada como razão, o que é mais adequado à fase em que os alunos estão desenvolvendo seu pensamento multiplicativo. No vol. 7, as porcentagens são utilizadas como no contexto de cálculo de probabilidades, tanto no que atribui certas especificidades à ideia de porcentagem, em que a ideia de 101%, por exemplo, não tem significado. Finalmente, no vol. 8, as porcentagens são exploradas e utilizadas no contexto da Matemática Comercial e Financeira, e a ideia associada é a de taxa que é um fator multiplicativo. A partir desse momento, podemos tratar porcentagem como número. O que se fez com as porcentagens na coleção também é feito com as frações, álgebra, funções e geometria. (BIGODE, 2000, p.14)

Sobre essa estrutura curricular o autor salienta que:

Alguns atribuem a esta opção de organização curricular o nome de “desenvolvimento em espiral”. Entretanto esta denominação é associada a outras formas de organização curricular, na qual os tópicos são meramente repetidos com números maiores ou mais complexos. Por esse motivo optamos por não utilizar essa denominação. Achamos que ela esconderia os pressupostos teóricos que embasaram nossa tomada de decisão. O tratamento progressivo que demos aos vários campos da Matemática implica numa **ruptura e reconstrução conceitual contínua**. (BIGODE, 2000, p.14, **grifo do autor**)

Vale ressaltar que a informação dada na citação anterior será muito importante para a construção do ecossistema dessa coleção após a análise.

Sobre o conteúdo de Proporcionalidade, o autor faz a seguinte consideração:

Já há algum tempo que se questiona a necessidade do ensino de razões, proporções e regra de três, como se fazia anos atrás, desconectado de outros temas da Matemática e exageradamente centrado em regras que usavam esquemas complexos para os alunos (Você se lembra das flechas para cima e para baixo?). Uma pesquisa realizada na Inglaterra, nos anos 80, constatou que, entre os alunos que compreendiam a regra de três, só 2% a aplicavam em qualquer situação. Na maioria das vezes, esses alunos não sabiam explicar o que estavam fazendo. Esta coleção não trata como especial razões, proporções e regra de três. Em contrapartida, prioriza a exploração de situações-problemas diversificadas que exigem dos alunos o exercício do pensamento proporcional. (BIGODE, 2000, p. 37-38)

E complementa que os itens abordados referentes ao conteúdo serão abordados na coleção da seguinte forma:

Em comparações indiretas são explorados problemas de razão e proporção sem a necessidade de uma formalização exagerada e fora de hora. Tal abordagem, de um lado exige a atenção dos alunos nas relações entre os dados dos problemas e, de outro, provoca atitudes de problematização diante de situações do cotidiano. Quanto às razões e seus usos, procurou-se aproximar ideias relacionadas às razões (densidade, velocidade média, escala, porcentagens) ao conceito matemático em construção. (BIGODE, 2000, p. 38)

Segundo o autor, o caminho utilizado para o ensino de atividades de proporcionalidade nos livros da 6ª série está pautado em um artigo intitulado “Razões e Proporções na vida diária e na escola”, dos professores Analúcia D. Shilemann e David W. Carraher, publicado no livro Estudos em Psicologia da Educação Matemática da UFPE. Bigode (2000, p. 38) traz o seguinte fragmento desse artigo.

Figura 51 - Fragmento do artigo “Razões e Proporções na vida diária e na escola”

“Por um lado, é necessário que o conhecimento novo se apóie naquilo que o aluno já sabe e compreende. Por outro lado, é necessário introduzir rupturas e saltos no conhecimento, pois os conceitos novos não podem ser totalmente reduzidos aos conceitos já adquiridos. Nossa opinião é de que a escola, com frequência, tenta minimizar os erros associados a este dilema, organizando e sistematizando a matéria nova de tal forma que o aluno acerte os problemas, não porque compreendeu os conceitos, mas sim porque havia diversas ‘dicas’ ou pistas para auxiliá-lo na resolução desses problemas.

Os problemas que o aluno encontra na escola passam por uma rigorosa ‘dedetização’ em que muitos dos ‘grilos’ são eliminados. Sobram os ‘problemas não-problemáticos’. O aluno é poupado do esforço de fazer sua própria interpretação do problema. Em primeiro lugar, ele sabe de antemão que questões de razão e proporção cairão apenas nos exercícios e provas referentes à unidade de razão e proporção. Em segundo lugar, o livro-texto não incluiria informações relevantes para a resolução do problema, como o peso do aluno no problema 2 no início deste artigo⁽¹⁾.

Na escola, os problemas de proporção tipicamente envolvem quatro valores, dois em cada uma das variáveis. O texto daria três valores e pediria que o aluno encontrasse o quarto valor. Além do mais, a linguagem identificaria, de forma clara, o procedimento a ser utilizado. Desde as primeiras aulas sobre resolução de problemas de adição e subtração, o aluno fica atento às palavras chaves (por exemplo, ‘Joãozinho tinha 5 bolas e **ganhou** mais 3. Ao **todo**, ficou com quantas bolas?’). Infelizmente, como resultado desta prática, quando o aluno tiver que enfrentar um problema ‘não dedetizado’, ele terá bastante dificuldade.

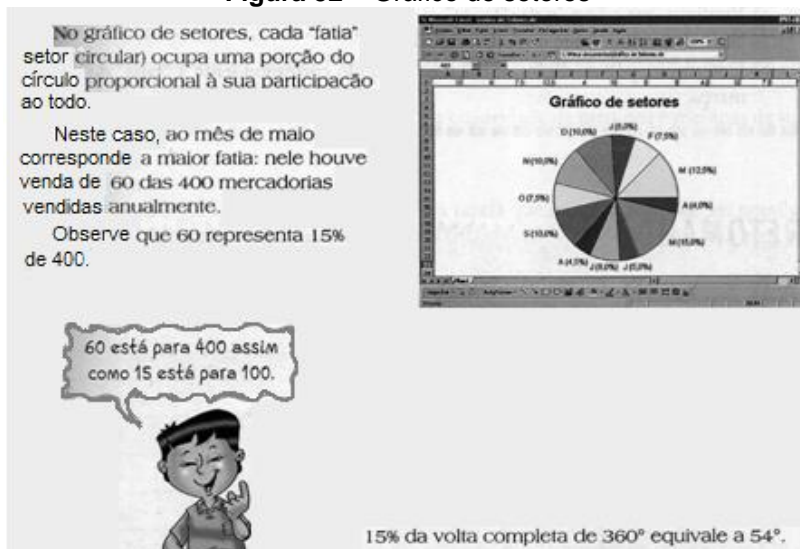
As práticas pedagógicas tradicionais são prejudiciais à aprendizagem, pois transmitem aos alunos a falsa impressão de que a Matemática consiste em uma série de receitas a serem cegamente seguidas. Nas aulas mais tradicionais não há lugar para interpretar, para discutir representações alternativas, para explorar significados. Se o aluno está acertando problemas, pouco importa se ele está entendendo. Se ele está errando, manda-se que ele pratique mais até acertar”.

Fonte: BIGODE, 2000, p. 38

No livro da 5ª série da coleção não foi encontrado nenhum conteúdo relacionado à Proporcionalidade.

No livro da 6ª série, foram encontrados dois capítulos que tratam do objeto do saber Proporcionalidade. Antes desses dois capítulos, também foi encontrado uma parte sobre gráficos de setores, que ilustra o uso da proporção, conforme Figura 52, a seguir.

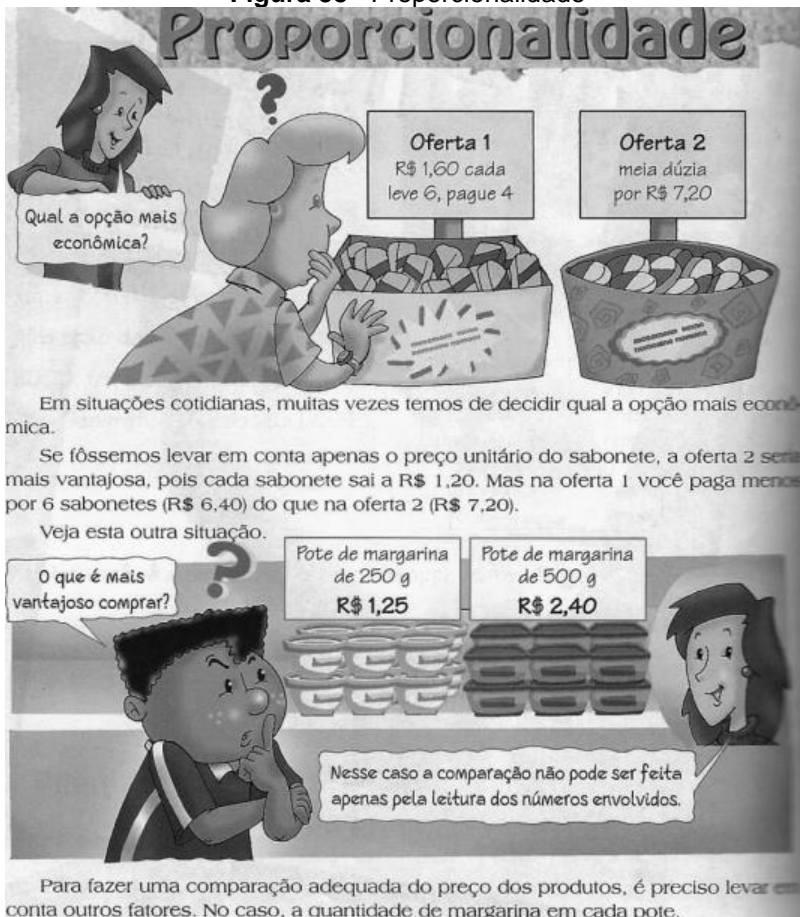
Figura 52 – Gráfico de setores



Fonte: BIGODE, 2000, p. 205(6ª série)

Em seguida, inicia-se o capítulo 11, referente à Proporcionalidade, com algumas situações problemas envolvendo comparação. Uma delas está representada a seguir (Figura 53):

Figura 53– Proporcionalidade



Fonte: BIGODE, 2000, p. 212(6ª série)

Para resolver a situação problema expressa na figura anterior, o autor sugere encontrar o preço de cada 1g de margarina dividindo o valor total da margarina pela quantidade de gramas contida na embalagem, que nada mais é que o método de redução à unidade, conforme veremos na Figura 54 a seguir:

Figura 54 - Método de resolução utilizando comparação

Por exemplo, pode-se calcular o preço de 1 grama de margarina.

Acompanhe o raciocínio:

Na embalagem de 250 g Se 250 g custam R\$ 1,25 então 1 g custa R\$ $1,25 : 250$ 1 g custa R\$ 0,005	Na embalagem de 500 g Se 500 g custam R\$ 2,40 então 1 g custa R\$ $2,40 : 500$ 1 g custa R\$ 0,0048
--	---

A embalagem de 500 g é mais econômica, pois R\$ 0,0048 < R\$ 0,005.

Para comparações desse tipo basta fazer uma divisão usando uma calculadora ou usar outras estratégias.

10 potes de 250 g têm 2 500 g e custam R\$ 12,50.
5 potes de 500 g têm 2 500 g e custam R\$ 12,00.

Vamos explorar outras situações semelhantes.

Fonte: BIGODE, 2000, p. 213(6ª série)

Essa e outras situações exploradas no início do capítulo são muito importantes no desenvolvimento do raciocínio proporcional dos estudantes, pois não se apoia em regras ou fórmulas e sim na construção de significados apoiadas em situações reais nas quais as pessoas estão sempre em contato.

Em seguida, apresenta algumas razões importantes (Figura 55):

Figura 55- Razão

As relações exploradas até aqui (candidatos/vagas, gols marcados/jogos, médicos/habitantes e outras) em sua maioria envolvem o quociente ou razão entre dois números inteiros.

Esse tipo de relação é expressa da seguinte forma:

$\frac{a}{b}$ ou a/b ou ainda $a : b$

onde a e b são números racionais e b é diferente de 0.

Muitos conceitos importantes são expressos por razões. Vejamos:

- ◆ Densidade demográfica: É a razão entre o número de habitantes de uma região e a área dessa região.
densidade demográfica = $\frac{\text{nº de habitantes}}{\text{área}}$
- ◆ Densidade de um corpo: É a razão entre a massa de um corpo e o seu volume.
densidade = $\frac{\text{massa}}{\text{volume}}$
- ◆ Escala: É a razão entre a medida de um comprimento no desenho e a medida correspondente ao comprimento real.
escala = $\frac{\text{medida do comprimento no desenho}}{\text{medida do comprimento real}}$
- ◆ Taxa percentual: É a razão entre um número e 100.
taxa percentual = $\frac{\text{número}}{100}$

É comum ler a razão $\frac{a}{b}$ como "a está para b".

Fonte: BIGODE, 2000, p. 218(6ª série)

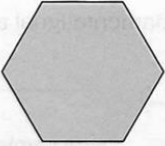
E algumas situações envolvendo razões constantes, também conhecidas como constantes de proporcionalidade (Figura 56):

Figura 56 - Razões constantes

Razões constantes

Várias situações envolvem razões constantes. Verifique usando régua e compasso e, se necessário, uma calculadora.


1ª situação:
 Desenhe um hexágono regular de lado ℓ .
 A razão entre o perímetro desse hexágono, 6ℓ , e a medida ℓ do lado desse hexágono é constante e igual a 6.

$$\frac{6\ell}{\ell} = 6$$


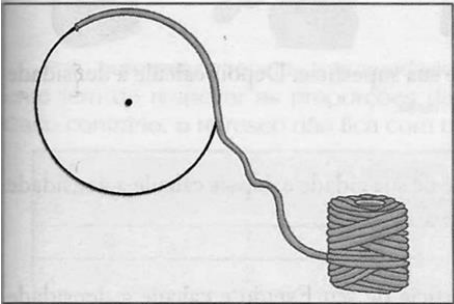
2ª situação:

A medida do raio de uma circunferência é a distância de um ponto qualquer dessa circunferência até o seu centro.

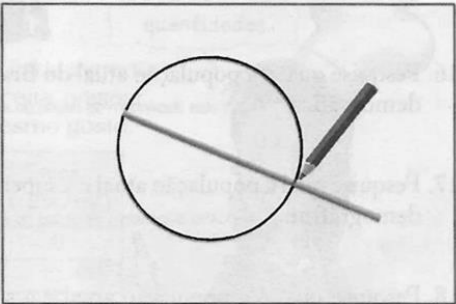
A medida do diâmetro é igual a duas vezes a do raio.



Tome uma circunferência qualquer de raio r .
 Use um barbante e meça o comprimento dessa circunferência.



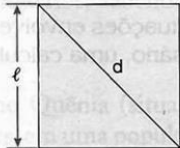
Use uma vareta para medir um diâmetro dessa circunferência.



Quantas vezes o diâmetro marcado na vareta cabe no barbante esticado?
 Repita o procedimento acima para outras circunferências.
 A razão entre o comprimento de uma circunferência e a medida do seu diâmetro é constante e aproximadamente igual a 3,14, não importando o tamanho. O número que representa essa razão é conhecido pelo nome de pi.

3ª situação:

Desenhe um quadrado de lado ℓ .
 A razão entre a medida da diagonal d deste quadrado e a medida ℓ do lado é constante e aproximadamente igual a $\frac{7}{5}$ ou 1,4.



Fonte: BIGODE, 2000, p. 219-220 (6ª série)

Em seguida, apresentam situações nas quais o estudante precisa observar, que para aumentar ou diminuir uma receita de modo que ela apresente o mesmo sabor ou mesma propriedade, deve-se aumentar ou diminuir proporcionalmente os ingredientes utilizados. Um dos exemplos dados no livro está representado a seguir (Figura 57):

Figura 57 - Receitas e proporcionalidade

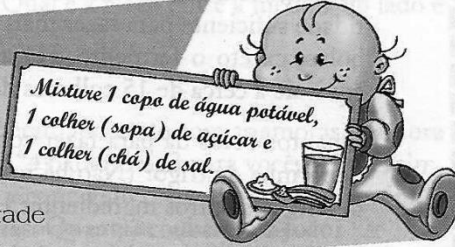
Uma receita importante

Uma receita muito importante é a de soro caseiro para combater a desidratação, que mata anualmente milhares de crianças:

Não há nenhum segredo para aumentar esta receita. Se desejamos 10 copos de soro, multiplicamos por 10 a quantidade dos componentes da receita básica.

Se queremos $\frac{1}{2}$ copo de soro, utilizamos a metade da quantidade de componentes da receita básica.

Misture 1 copo de água potável,
1 colher (sopa) de açúcar e
1 colher (chá) de sal.



Fonte: BIGODE, 2000, p. 223(6ª série)

Ainda no capítulo 11, sobre Proporcionalidade, é inserido o conteúdo de porcentagem, expressa como uma razão de denominador 100.

Figura 58– Porcentagens

Porcentagens

O que dizem as manchetes?

Pesquisa de opinião revela hábitos da população

23 em cada 100 habitantes usam o sabonete Cheiroso	De cada 100 habitantes, 11 preferem vôlei a futebol	90 em cada 100 famílias assistem ao Jornal Regional
--	---	---

Cada uma das notícias foi expressa por uma porcentagem.


As porcentagens expressam relações entre uma quantidade e o número 100. Daí o nome porcentagem.

Uma razão cujo segundo termo é igual a 100 é chamada de taxa percentual.

Dizer que "23 em cada 100 habitantes usam o sabonete Cheiroso"...

... é o mesmo que dizer que 23% da população usam essa marca de sabonete.

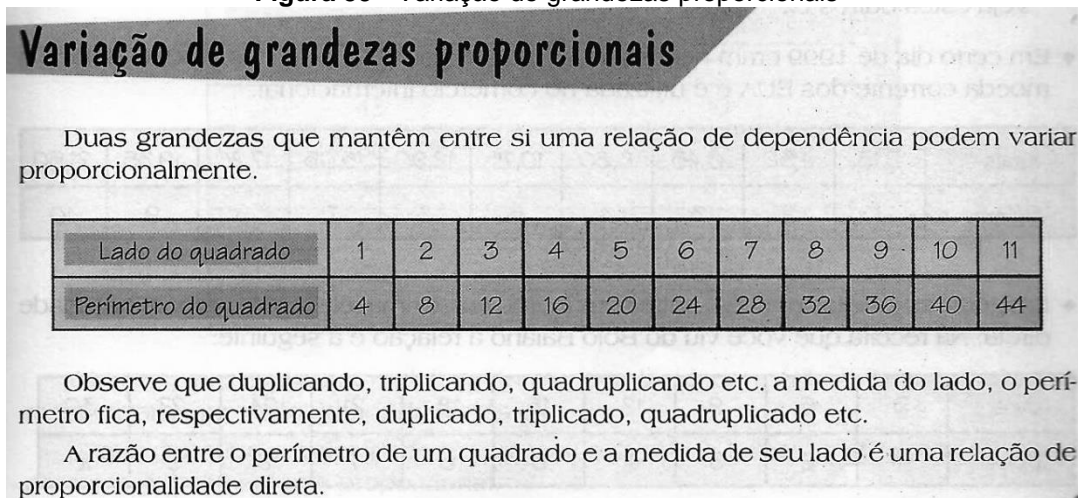
Suponha uma cidade com 50 mil habitantes. Quantas pessoas, nessa cidade, usam o sabonete Cheiroso? Quantas preferem vôlei a futebol? Quantas assistem ao Jornal Regional?



Fonte: BIGODE, 2000, p. 226 (6ª série)

Algumas páginas após, é introduzido o conceito de variação de certas grandezas proporcionais (Figura 59):

Figura 59 - Variação de grandezas proporcionais



Fonte: BIGODE, 2000, p. 229(6ª série)

Em seguida, apresentam algumas situações para ilustrar algumas grandezas que são diretamente proporcionais (Figura 60).

Figura 60 - Grandezas diretamente proporcionais

Certa marca de automóvel consome na cidade 1 ℓ de combustível a cada 11 km rodados.

Litros	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
km rodados	11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121

Nesse caso a relação entre a distância percorrida e o consumo de combustível é uma relação de proporcionalidade direta.



Há diversas outras situações em que duas grandezas mantêm entre si uma relação de proporcionalidade direta. Então se diz que são diretamente proporcionais.

Veja estes outros exemplos:

- ◆ Em certo dia de 1999 eram necessários R\$ 2,15 para comprar US\$ 1,00. O dólar é a moeda corrente dos EUA e é utilizada no comércio internacional.

Reais	2,15	4,30	6,45	8,60	10,75	12,90	15,05	17,20	19,35	21,50
Dólares	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

- ◆ Em geral, as receitas mantêm entre seus ingredientes uma relação de proporcionalidade direta. Na receita que você viu do Bolo Baiano a relação é a seguinte:

Ovos	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
Bolos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Fonte: BIGODE, 2000, p. 230 (6ª série)

E depois, um exemplo envolvendo grandezas inversamente proporcionais (Figura 61):

Figura 61 - Grandezas inversamente proporcionais

Há situações em que as grandezas envolvidas mantêm entre si uma relação inversamente proporcional. Veja alguns exemplos:

Imagine que um piloto de teste faça diversas vezes uma viagem entre duas cidades distantes uma da outra em 480 km. Cada viagem é feita com uma velocidade conforme a tabela.

Velocidade média (km/h)	Tempo gasto no percurso (h)
40	12
48	10
60	8
75	6,4
80	6
100	4,8
120	4

Observe que duplicando, triplicando etc. a velocidade média, o tempo gasto fica, respectivamente, dividido por dois, três etc.

A relação entre a velocidade de um automóvel e o tempo gasto para fazer esse percurso é inversamente proporcional.

Fonte: BIGODE, 2000, p. 231(6ª série)

O autor se preocupa-se ao final do capítulo em mostrar algumas situações em que não há proporcionalidade. Uma delas está representada na Figura 62 abaixo.

Figura 62 - Nem tudo é proporcional

Analise esta próxima situação:

Quanto tempo um atleta que corre os 100 m rasos em 10 segundos leva para correr os 200 m rasos? E os 400 m rasos?

Se você pensa que o atleta corre os 200 m rasos em 20 segundos, cuidado!

A relação entre distância e tempo não varia proporcionalmente, pois outros fatores, como fadiga, perda de sais minerais, respiração etc. influem no rendimento dos atletas.

É provável que o atleta que corre 100 m em 10 segundos faça os 200 m em 19 segundos e os 400 m em 43 segundos.

Recordes mundiais de Atletismo em metros rasos

100 m	200 m	400 m	800 m
9 s 84 Donovan Bailey (Canadá) – 1996	19 s 32 Michael Johnson (EUA) – 1996	43 s 29 Harry Reynolds (EUA)	1 min 41 s 24 Wilson Kipketer (Dinamarca) 1997

Fonte: BIGODE, 2000, p. 233-234 (6ª série)

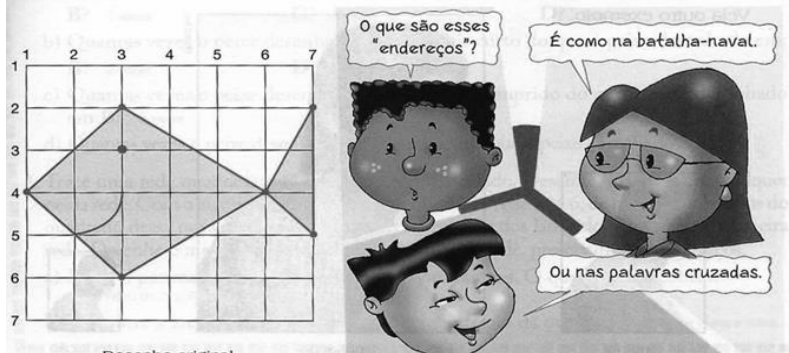
No capítulo seguinte, intitulado “Geometria e proporcionalidade”, o autor explora situações nas quais a proporcionalidade está presente na geometria, conforme fragmento a seguir (Figura 63):

Figura 63 – Ampliando e reduzindo figuras

Ampliando e reduzindo figuras

Ampliar ou reduzir figuras com computação gráfica é bem simples. Mas como ampliar ou reduzir uma figura quando não se tem esses recursos?

Nos cursos de Educação Artística ou Desenho Geométrico, é comum o ensino de uma técnica que permite ampliar ou reduzir figuras. A técnica consiste em copiar o desenho numa segunda rede, preservando os "endereços" que os pontos têm no original.

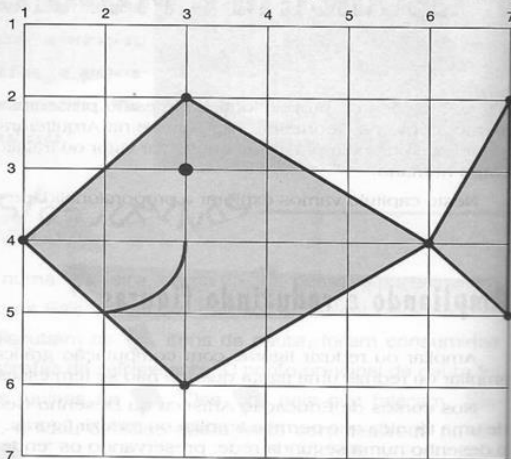


Desenho original

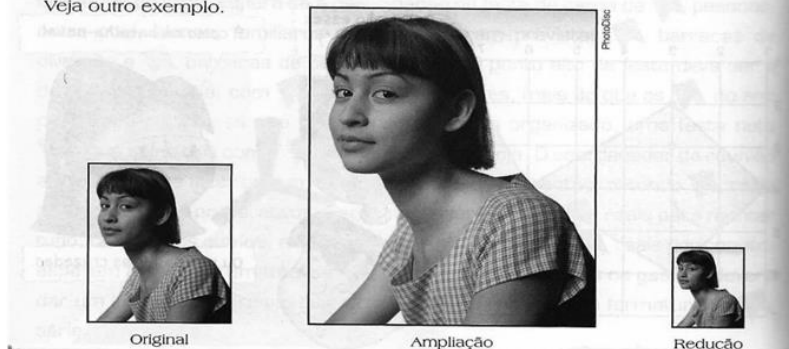
Para reduzir, os lados dos quadrados da segunda rede têm que ser menores que os da rede original.

Desenho reduzido

Para ampliar, basta escolher uma rede em que os lados dos quadrados são maiores que os da rede original.



Veja outro exemplo.



Na ampliação da página anterior, cada medida de comprimento é o dobro da medida correspondente à da foto original.

A razão de ampliação é de 2 : 1.

Na redução, cada medida de comprimento é a metade da medida correspondente à da foto original.


A razão de redução é de 1 : 2.




No mesmo capítulo, é inserida a noção de escalas (Figura 64):

Figura 64 - Escalas e maquetes

Já imaginou o tamanho do papel necessário para representar esse local em tamanho natural?






Assim, representações gráficas de objetos ou regiões são feitas em tamanho reduzido, porém preservando as relações de tamanho, ou seja, a proporcionalidade.

A razão entre o comprimento no desenho e o comprimento real expressos na mesma unidade é chamada escala.

$$\text{Escala} = \frac{\text{comprimento no desenho}}{\text{comprimento real}}$$



Escala
1 : 70 000 000

No mapa, a escala 1 : 70 000 000 indica que cada 1 cm do mapa ilustrado representa 70 000 000 cm no real.

Distância no mapa	Distância real
1 cm	70 000 000 cm
1 cm	700 000 m
1 cm	700 km

Fonte: BIGODE,2000, p. 248 (6ª série)

Após alguns exercícios, é apresentada a Propriedade Fundamental da Proporção em uma parte do capítulo intitulada “O termo desconhecido de uma proporção” (Figura 65).

Figura 65 – O termo desconhecido de uma proporção

O termo desconhecido de uma proporção

Igualdades do tipo $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ são chamadas de proporção.

Lê-se: “**a** está para **b**, assim como **c** está para **d**”.

Os “elementos” **a**, **b**, **c** e **d** são chamados termos da proporção.

Não se esqueça
que é proibido
dividir por zero.
 $b \neq 0$ e $d \neq 0$



Como, na leitura da proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, iniciamos por **a** e terminamos por **d**, chamamos esses termos de extremos. Nessa leitura **b** e **c** vêm entre **a** e **d**, por isso **b** e **c** são termos conhecidos como meios.

Numa equação, se multiplicamos os dois membros pelo mesmo número, não nulo, a igualdade não se altera.

Para eliminar os denominadores, na igualdade $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ multiplicamos o primeiro e o segundo membros por bd .

$$\frac{a \cdot bd}{b} = \frac{c \cdot bd}{d}$$

No primeiro membro os “bês” do numerador e do denominador se cancelam; no segundo membro os “dês” do numerador e do denominador também se cancelam.

O resultado é a igualdade $ad = bc$.

Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então $a \cdot d = b \cdot c$.

Esta é a propriedade
fundamental das proporções.



O produto dos extremos é igual ao produto dos meios.

Veja como se aplica essa propriedade na resolução de alguns problemas.

- ◆ Numa atividade que fizemos na página 257, é pedida a medida da altura da ampliação de uma foto 5×7 , de modo que a medida da base da ampliação seja 7,5 cm.

Pelo princípio fundamental das proporções, temos:

$$\frac{5}{7} = \frac{7,5}{x}$$

$$5x = 7 \cdot 7,5$$

$$5x = 52,5$$

$$x = \frac{52,5}{5}$$

$$x = 10,5$$

5 está para 7, assim
como 7,5 está para x .



A altura da foto ampliada é de 10,5 cm.

Fonte: BIGODE, 2000, p. 258 (6ª série)

Depois de alguns exemplos de aplicações utilizando o Teorema Fundamental da Proporcionalidade, o autor cita que a proporção também pode ser usada na construção de alguns gráficos, conforme fragmento a seguir (Figura 66):

Figura 66 – Proporções na construção de gráficos

As proporções também são usadas para construir certos gráficos.

Imagine que os alunos das 8^{as} séries pretendem arrecadar fundos para a formatura, coletando latas para reciclagem. A 8^{as} **A** recolheu 3 600 latas. A 8^{as} **B** recolheu 3 000 latas. Para exibir o placar da coleta resolveram fazer um cartaz com barras. Nele, a maior barra, da 8^{as} **A**, deve ter 40 cm. Qual deve ser a altura da barra correspondente à coleta da 8^{as} **B**?

3 600 latas correspondem a 40 cm.
3 000 latas correspondem a x cm.

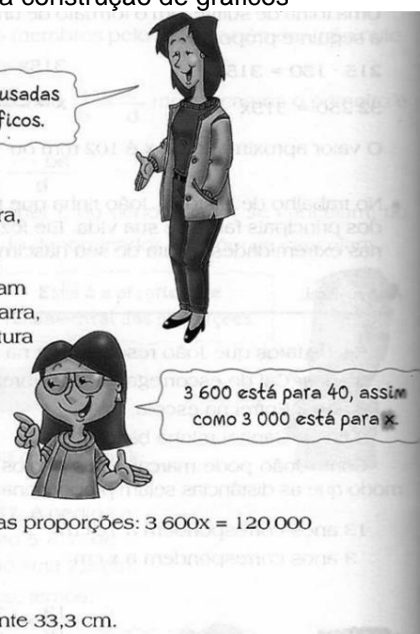
$$\frac{3\ 600}{40} = \frac{3\ 000}{x}$$

Aplicando a propriedade fundamental das proporções: $3\ 600x = 120\ 000$

$$x = \frac{120\ 000}{3\ 600}$$

A pilha da 8^{as} **B** deve ter aproximadamente 33,3 cm.

3 600 está para 40, assim como 3 000 está para x.



Fonte: BIGODE, 2000, p. 260 (6^a série)

Na página seguinte, o autor explora a construção de triângulos semelhantes, representado na figura 67 a seguir.

Figura 67 – Triângulos semelhante

Triângulos semelhantes

Siga as etapas propostas a seguir.

1 Recorte 3 retângulos semelhantes, com as seguintes dimensões:
3 cm × 5 cm; 6 cm × 10 cm e 9 cm × 15 cm.

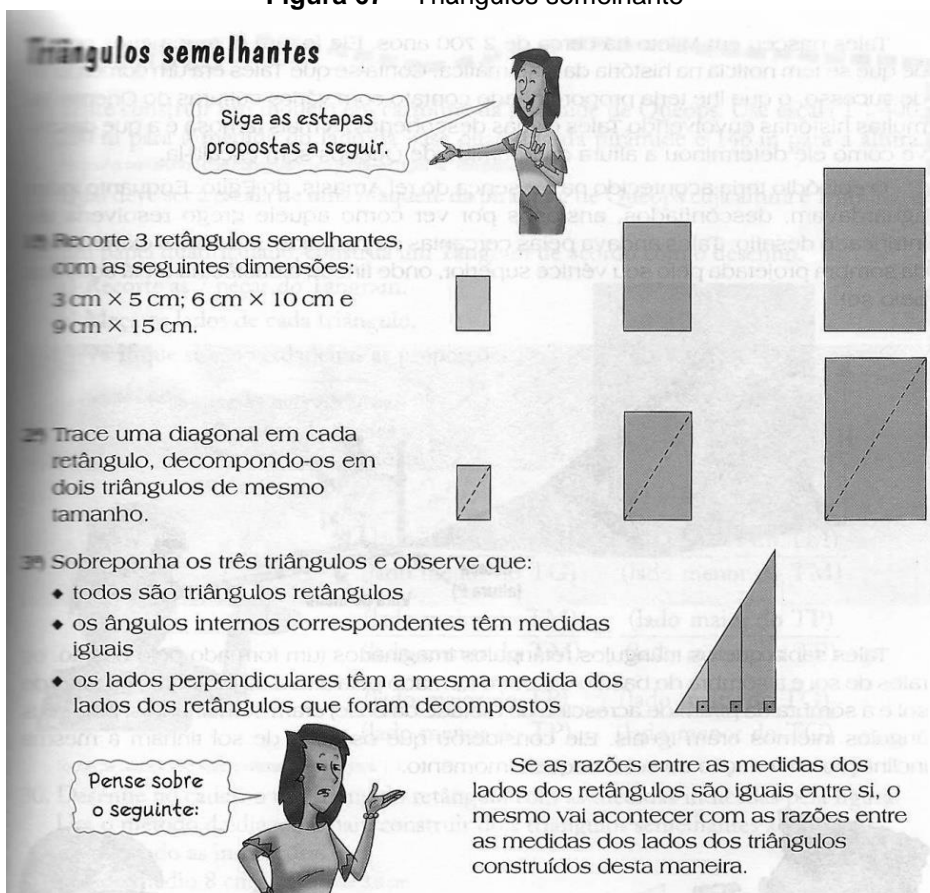
2 Trace uma diagonal em cada retângulo, decompondo-os em dois triângulos de mesmo tamanho.

3 Sobreponha os três triângulos e observe que:

- ♦ todos são triângulos retângulos
- ♦ os ângulos internos correspondentes têm medidas iguais
- ♦ os lados perpendiculares têm a mesma medida dos lados dos retângulos que foram decompostos

Pense sobre o seguinte:

Se as razões entre as medidas dos lados dos retângulos são iguais entre si, o mesmo vai acontecer com as razões entre as medidas dos lados dos triângulos construídos desta maneira.



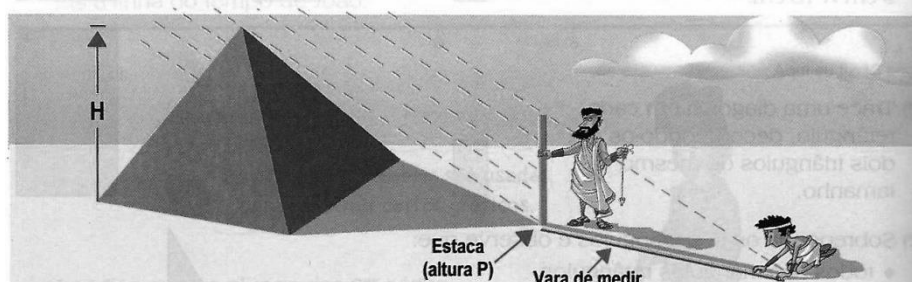
Fonte: BIGODE, 2000, p. 261 (6^a série)

Logo em seguida, apresenta uma das histórias relacionadas a Tales e à pirâmide (Figura 68) para elucidar a semelhança de triângulos apresentada anteriormente.

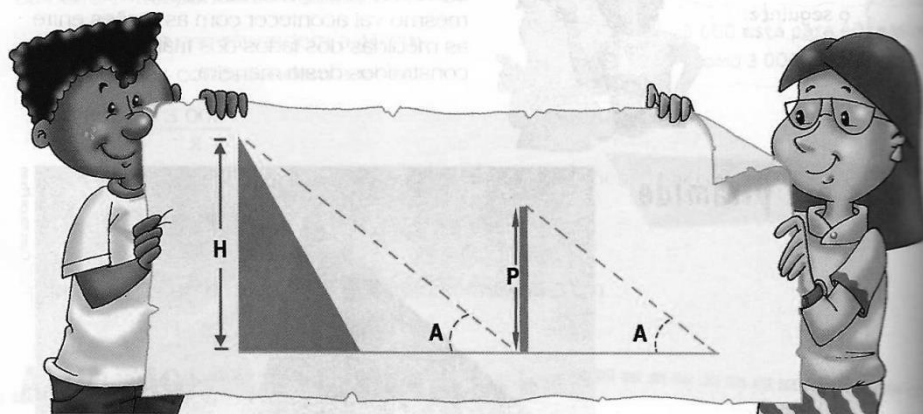
Figura 68 – Tales e a pirâmide

Tales nasceu em Mileto há cerca de 2 700 anos. Ele foi um dos primeiros nomes de que se tem notícia na história da Matemática. Conta-se que Tales era um comerciante de sucesso, o que lhe teria proporcionado contato com várias culturas do Oriente. Há muitas histórias envolvendo Tales e suas descobertas. A mais famosa é a que descreve como ele determinou a altura da pirâmide de Quéops sem escalá-la.

O episódio teria acontecido na presença do rei Amasis, do Egito. Enquanto todos aguardavam, desconfiados, ansiosos por ver como aquele grego resolveria tão intrincado desafio, Tales andava pelas cercanias da pirâmide, indo até a extremidade da sombra projetada pelo seu vértice superior, onde fincou o bastão na areia aquecida pelo sol.



Tales sabia que os triângulos retângulos imaginários (um formado pelo bastão, os raios de sol e a sombra do bastão e o outro formado pela altura da pirâmide, os raios do sol e a sombra da pirâmide acrescida da metade da base) eram semelhantes, pois seus ângulos internos eram iguais. Ele considerou que os raios de sol tinham a mesma inclinação em relação ao solo, naquele momento.



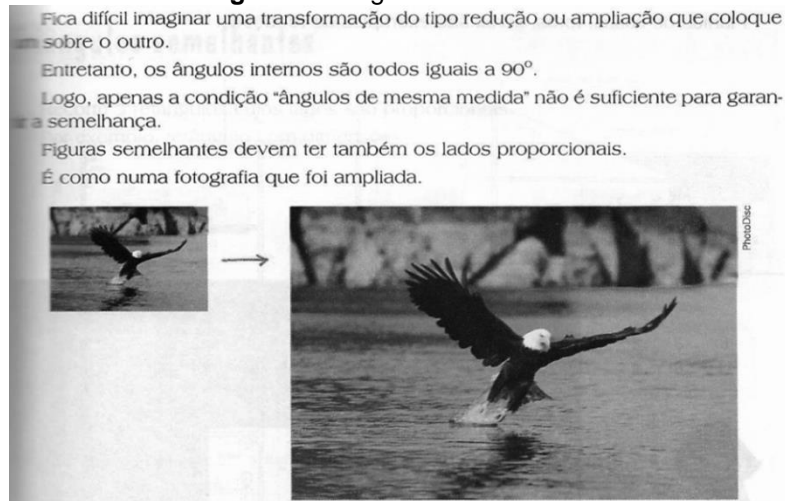
Uma vez que dois triângulos são semelhantes, seus lados são proporcionais. Assim, os lados correspondentes de dois triângulos estão um para o outro na mesma razão que os outros dois lados correspondentes.

Fonte: BIGODE, 2000, p. 262 (6ª série)

No livro da 7ª série não apareceram vestígios relacionados à proporcionalidade.

Já no livro da 8ª série da coleção, a semelhança de figuras é reforçada, conforme Figura 69 a seguir.

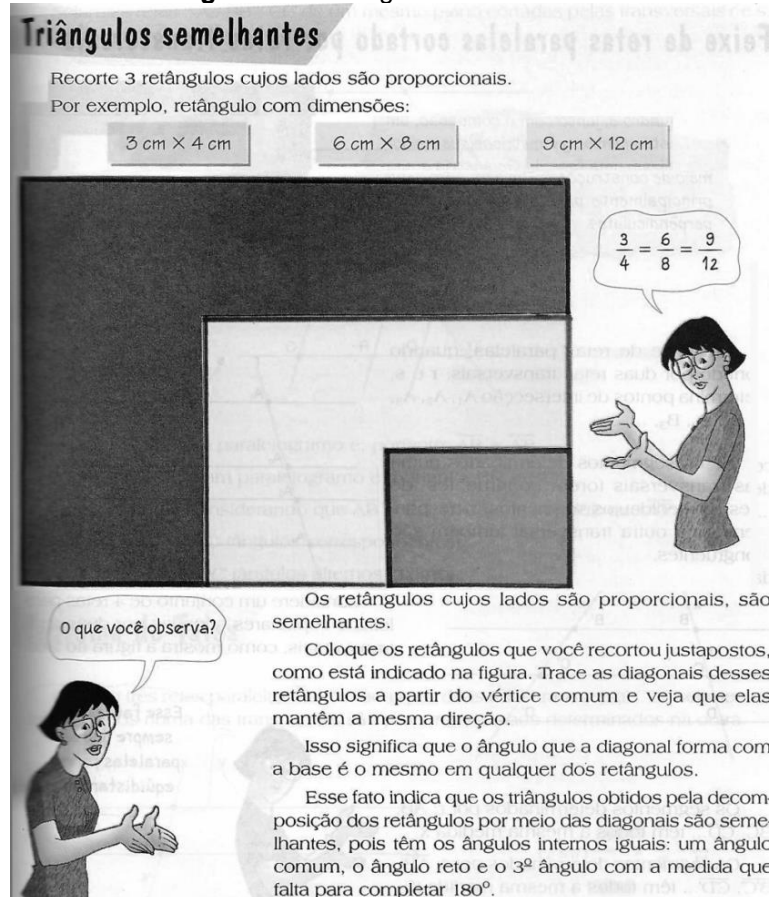
Figura 69 - Figuras semelhantes



Fonte: BIGODE, 2000, p. 187 (8ª série)

O autor também retoma a noção de triângulos semelhantes (Figura 70).

Figura 70 - Triângulos semelhantes



Fonte: BIGODE, 2000, p. 189 (8ª série)

Em seguida, apresenta o Teorema de Tales, conforme a Figura 71, abaixo.

Figura 71 - Teorema de Tales

Teorema de Tales

Quando três retas paralelas são cortadas por duas transversais, os segmentos determinados numa das transversais são proporcionais aos determinados na outra.

$r // s // t \rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$

Diz-se que dois segmentos são comensuráveis quando há uma unidade que cabe um número inteiro de vezes tanto em um como em outro.

Sejam por exemplo dois segmentos, \overline{PQ} e \overline{RS} , sendo $PQ = 18 \text{ cm}$ e $RS = 15 \text{ cm}$. \overline{PQ} e \overline{RS} são comensuráveis, pois ambos podem ser medidos com um segmento de 3 cm. Veja:

$$18 \text{ cm} = 6 \cdot 3 \text{ cm}$$

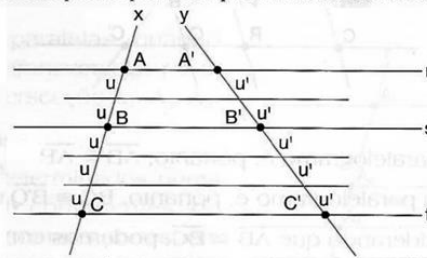
$$15 \text{ cm} = 5 \cdot 3 \text{ cm}$$

Então as razões $\frac{PQ}{RS}$ e $\frac{RS}{PQ}$ são números racionais, respectivamente, $\frac{6}{5}$ e $\frac{5}{6}$.

Veremos, agora, uma demonstração do teorema de Tales para um caso particular em que os segmentos determinados nas transversais são segmentos comensuráveis. Sejam as retas $\overleftrightarrow{AA'} // \overleftrightarrow{BB'} // \overleftrightarrow{CC'}$ de um mesmo plano.

Considere a razão $\frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}$.

Trace paralelas às retas pelos pontos que dividem \overline{AB} e \overline{BC} em segmentos unitários.



Então, como vimos anteriormente, os segmentos determinados em $A'C'$ são congruentes. Vamos chamar de u' a medida desses segmentos.

Portanto:

$$(I) AB = 2u \rightarrow A'B' = 2u'(III)$$

$$(II) BC = 3u \rightarrow B'C' = 3u'(IV)$$

Dividindo (I) por (II):

$$\frac{AB}{BC} = \frac{2u}{3u} = \frac{2}{3} \text{ (V)}$$

Dividindo (III) por (IV):

$$\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{2u'}{3u'} = \frac{2}{3} \text{ (VI)}$$

De (V) e (VI), podemos escrever:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} = \frac{2}{3}$$



Neste caso que acabamos de ver, a razão $\frac{AB}{BC}$ pode ser expressa por um número racional (fração).

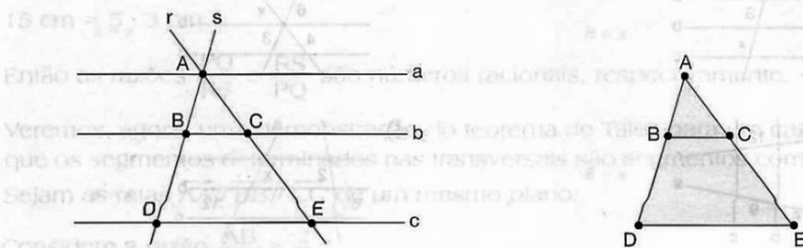
Não é objetivo deste livro mostrar os casos em que a razão $\frac{AB}{BC}$ é um número irracional, como $\sqrt{2}$, por exemplo. Entretanto, também nesse caso a proporcionalidade $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$ vai estar mantida.

Logo depois, associa a relação de Tales e a semelhança de triângulo, conforme Figura 72 a seguir.

Figura 72 - Relação de Tales e a semelhança de triângulos

Relação de Tales e a semelhança de triângulos

Considere um feixe de retas paralelas cortadas por duas retas transversais, r e s , de modo que uma das paralelas corta r e s num único ponto de intersecção.



Ficam assim determinados dois triângulos ABC e ADE semelhantes.

Atente para este fato:

$\overline{DE} // \overline{BC}$ garante que $\hat{B} = \hat{D}$ e $\hat{C} = \hat{E}$.
O ângulo de vértice A é comum.

A relação de Tales garante que os lados dos triângulos ABC e ADE mantêm relações de proporcionalidade.

Tales teria formulado isso da seguinte maneira:

Se dois triângulos são semelhantes, seus lados correspondentes são proporcionais.

Uma consequência importante desse fato é que um segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo:

(I): é paralelo ao terceiro lado;
(II): mede a metade do que mede o terceiro lado.

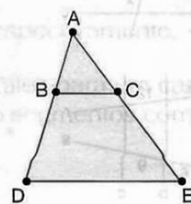
Assim:

Se M é o ponto médio de \overline{AB} e N é ponto médio de \overline{AC} , então $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{1}{2}$.

Como o ângulo \hat{A} é comum, então os triângulos AMN e ABC são semelhantes.

Logo, $\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$.

Explique por que $\overline{MN} // \overline{BC}$.



Fonte: BIGODE, 2000, p. 194 (8ª série)

No mesmo capítulo, o autor introduziu o conceito de ampliação por homotetia (Figura 73).

Figura 73 - Ampliação de figuras por homotetia

Ampliação de figuras por homotetia

Em certas atividades da vida cotidiana, pode haver necessidade de ampliar ou reduzir uma foto, um desenho ou uma figura plana.

Há vários métodos práticos para ampliar ou reduzir figuras. Um deles é fazer uma grade reticulada sobre a figura e, a seguir, reproduzir a figura sobre uma grade maior.

As máquinas copiadoras e certos programas de computador ampliam ou reduzem automaticamente, bastando para isso apertar um botão ou executar um comando.

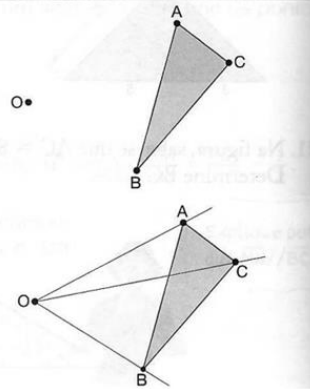


Uma vez que não dispomos de tanta tecnologia, o jeito é aprender a fazer ampliações e reduções com instrumentos de fácil acesso, como a régua e o compasso.

Eis um método prático:

Suponha que queremos ampliar o triângulo ABC, de modo a obter um triângulo A'B'C' em que cada lado é o dobro do seu correspondente em ABC.

Trace semi-retas com origem em O, passando pelos vértices A, B e C.



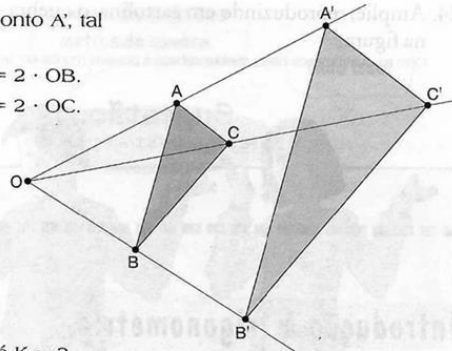
Sobre a semi-reta \overrightarrow{OA} marque o ponto A', tal que $OA' = 2 \cdot OA$.

Sobre \overrightarrow{OB} marque B', tal que $OB' = 2 \cdot OB$.

Sobre \overrightarrow{OC} marque C', tal que $OC' = 2 \cdot OC$.

Verifique que:

- $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \parallel \overline{A'C'}$, $\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$
- $AC' = 2 \cdot AC$
- $AB' = 2 \cdot AB$
- $BC' = 2 \cdot BC$



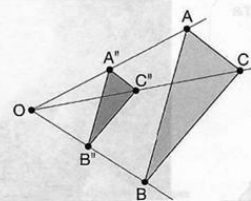
Neste caso, o fator de ampliação é $K = 2$.

Se $K = 3$, então toda figura fica triplicada, se $K = 5$, a figura fica quintuplicada, e assim por diante.

Se $0 < K < 1$, então K é fator de redução e a figura fica reduzida.

No exemplo que estamos analisando, se o fator de redução for $k = \frac{1}{2}$, obtenhamos a figura A''B''C''.

Observe que A'' é o ponto médio de \overline{OA} , B'' é ponto médio de \overline{OB} e C'' é ponto médio de \overline{OC} .



Tente responder: O que acontece com o triângulo A'B'C' quando $K = 1$?

A ampliação e redução de figuras por meio desta transformação, conhecida como homotetia, dá os fundamentos do funcionamento de um sistema de hastes articuladas — o pantógrafo.

Fonte: BIGODE, 2000, p. 196-197 (8ª série)

E, por fim, apresenta como dividir segmentos em partes proporcionais, conforme Figura 74 a seguir:

Figura 74 - Divisão de segmentos em partes proporcionais

Divisão de segmentos em partes proporcionais

Em atividades como construir uma linha de tempo, muitas vezes temos que dividir um segmento com extremidades conhecidas em partes iguais, marcando pontos que serão usados como datas.

Dividir um segmento em 2, 4 ou 8 partes iguais não é difícil e pode ser feito com o auxílio de régua e compasso obtendo-se os pontos médios dos segmentos.

Porém, se um segmento de extremidades M e N tem que ser dividido em 5 partes iguais, precisamos usar outros procedimentos.

A solução do problema pode ser obtida pela aplicação da relação de Tales.

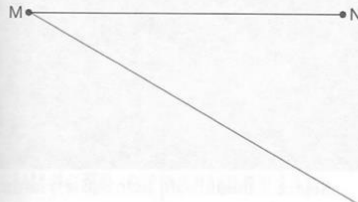


Acompanhe os passos:

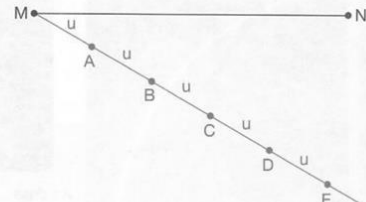
1ª) Trace o segmento \overline{MN} .



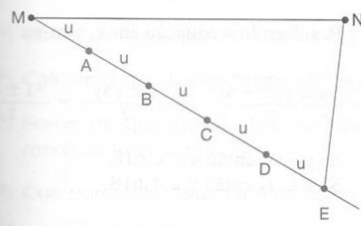
2ª) Trace uma semi-reta com origem no ponto M e direção distinta do segmento \overline{MN} .



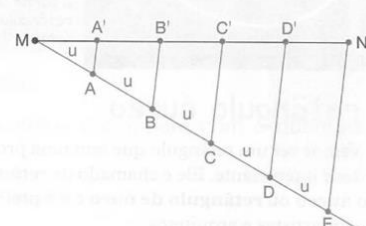
3ª) Escolha uma unidade u qualquer e marque sobre a semi-reta 5 segmentos, \overline{MA} , \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} e \overline{DE} , consecutivos e iguais de medida u, conforme a figura abaixo.



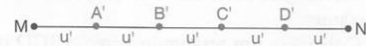
4ª) Trace o segmento \overline{EN} .



5ª) Trace paralelas ao segmento \overline{EN} , passando pelos pontos A, B, C e D, determinando no segmento \overline{MN} os pontos A', B', C' e D'.



6ª) Deste modo, o segmento \overline{MN} ficou dividido em 5 partes iguais de medida u' .

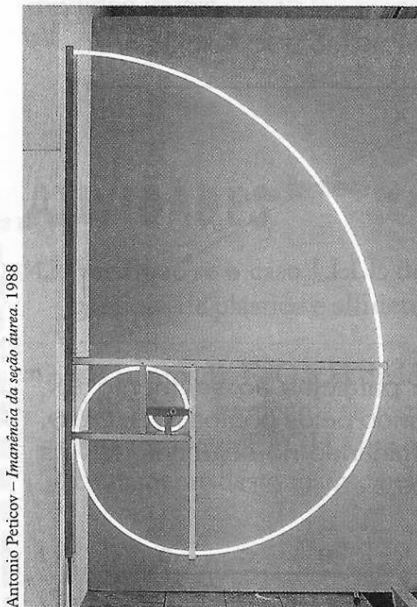


A justificativa é o teorema da Geometria plana que diz que "se um feixe de retas paralelas determina segmentos congruentes sobre uma transversal, então determina também segmentos congruentes sobre outra transversal".

Fonte: BIGODE, 2000, p. 210-211 (8ª série)

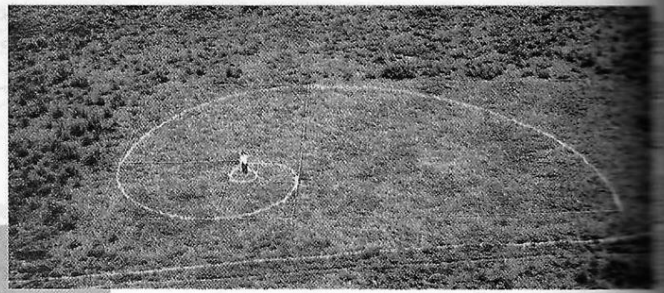
Ao final desse capítulo, o autor complementa com uma página sobre o retângulo áureo (Figura 75), mostrando através de uma proporção como chegar à razão áurea correspondente ao número irracional 1,618..., bem como realizar a sua construção geométrica. Observe a seguir.

Figura 75 - O retângulo áureo



Antonio Peticov - *Imanência da seção áurea*. 1988

As duas obras que vemos nas fotos, do artista Antonio Peticov, são espirais construídas a partir de retângulos áureos.



Seja x a medida do lado \overline{AB} e y a medida do lado \overline{AD} . Então, vale a proporção:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{ED}{EF} \text{ ou } \frac{x}{y} = \frac{y-x}{x}$$

De onde se deduz que $x^2 = y^2 - yx$, ou seja, $x^2 + yx - y^2 = 0$.

Resolvendo a equação em x , tem-se:

$$x = \frac{-y \pm \sqrt{y^2 + 4y^2}}{2} = \frac{-y \pm \sqrt{5y^2}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Se $y = 1$, então $x = 0,618$.

Se $x = 1$, então $y = 1,618$.

O número irracional 1,618... é chamado razão áurea.

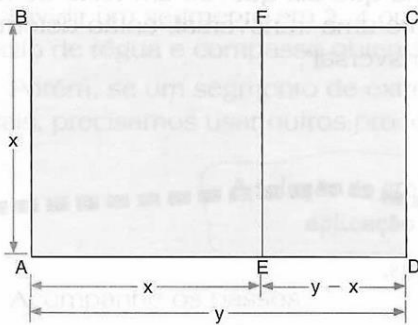
A construção do retângulo áureo é simples. Basta seguir o esquema:

O retângulo áureo

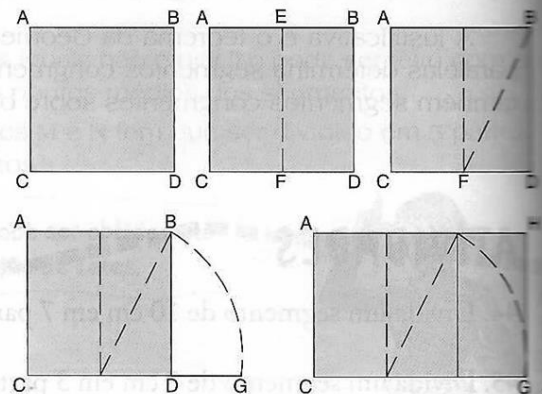
Vamos ver um retângulo que tem uma propriedade interessante. Ele é chamado de **retângulo áureo** ou **retângulo de ouro** e é o preferido dos artistas e arquitetos.

O retângulo áureo tem uma propriedade interessante.

Considere um retângulo áureo ABCD de onde foi retirado um quadrado ABEF, como mostra a figura:



O retângulo que sobra, EFCD, é semelhante ao retângulo ABCD.

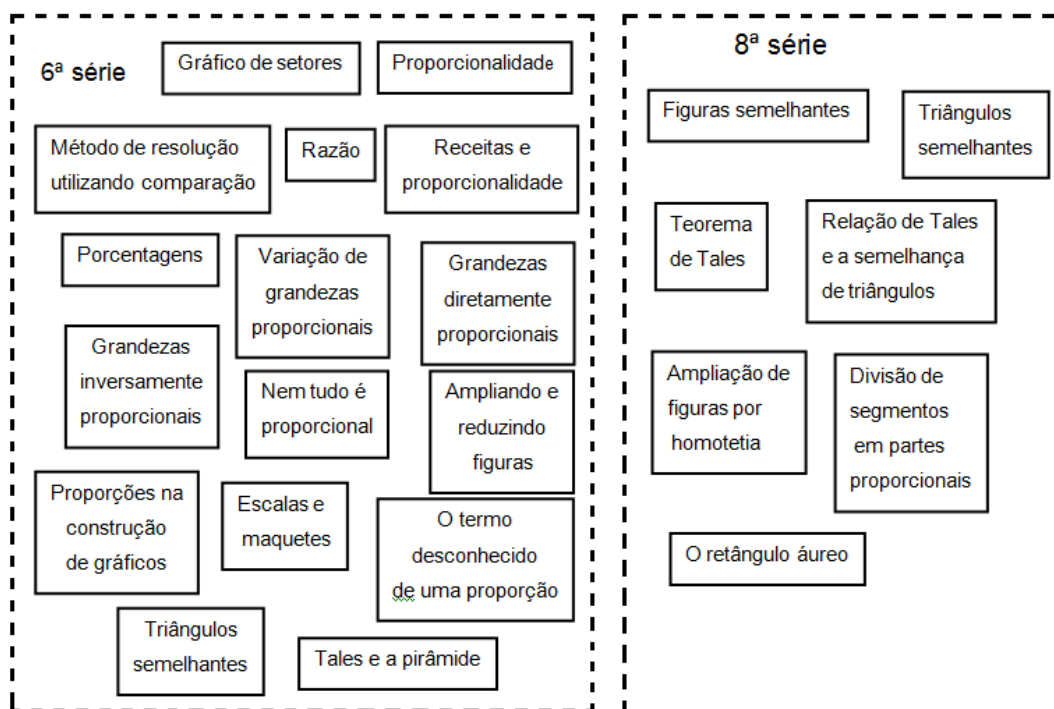


O retângulo AHCG é áureo.

Fonte: BIGODE, 2000, p. 212 (8ª série)

Observando a forma como os conteúdos relacionados à Proporcionalidade foram trabalhados ao longo da coleção C3, foi possível construir o ecossistema representado no Esquema 6 a seguir.

Esquema 6 - Ecosistema da proporcionalidade da coleção C3



Fonte: Dados da autora

Dessa forma, é possível observar que esse ecossistema representa o tratamento progressivo, no qual os conceitos novos não são totalmente reduzidos aos já adquiridos, sendo retomados e reconstruídos continuamente de modo a evidenciar a importância e a extensa aplicabilidade do conteúdo de Proporcionalidade em diferentes cenários sem lançar mão das técnicas matemáticas.

4.4 ANÁLISE DA COLEÇÃO C4

A coleção de 2010 “Matemática: Imenes e Lellis” dos autores Luiz Márcio Imenes¹³ e Márcio Lellis¹⁴ foi a escolhida para representar as obras publicadas na década em questão.

Na versão do professor, os autores trazem um detalhamento no início do livro do 6º ano e 9º ano, com a finalidade de auxiliar o professor na inserção dos conteúdos em sala de aula. Quanto ao conteúdo de Proporcionalidade, os autores,

¹³Engenheiro civil pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (EPUSP), licenciado em matemática pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Moema (FFCLM) e mestre em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (Unesp).

¹⁴Bacharel em Matemática pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IMEUSP), mestre em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP).

ao fazerem algumas considerações sobre o desenvolvimento dos conteúdos dos anos do segundo segmento do Ensino Fundamental, apresentam com certo destaque esse objeto de conhecimento, conforme trecho abaixo.

No estudo da proporcionalidade (que se liga a conteúdos numéricos, algébricos e geométricos), o destaque é sua presença nos vários anos, em particular no 9º ano, quando contribui para estabelecer o conceito de função. É um bom exemplo da trama pedagógica em espiral¹⁵. (IMENES; LELLIS, 2010, p. XV).

No intuito de facilitar a visualização do desenvolvimento dos conteúdos matemáticos em toda a coleção, os autores elaboraram alguns quadros com os tópicos centrais de cada tema. Aqui, no entanto, fizemos um recorte desses quadros, ressaltando apenas a parte no qual a Proporcionalidade está inserida.

No quadro abaixo, os autores enfatizam como a Proporcionalidade será abordada em cada um dos volumes da coleção.

Quadro 2 – Abordagem do conteúdo de proporcionalidade na coleção

Conteúdo	6º ano	7º ano	8º ano	9º ano
Proporcionalidade	Uso informal em escala (mapa e planta), em ampliação e redução de figuras e em equivalência de frações.	Análise de situações com e sem proporcionalidade; grandezas direta ou inversamente proporcionais; regra de três.	Análise de situações com e sem proporcionalidade em Geometria; uso na construção de gráfico de setores e no cálculo do perímetro da circunferência.	Regra de três composta; uso em semelhança, no Teorema de Tales e na ideia de função.

Fonte: IMENES; LELLIS, 2010, p. XV (Guia do professor)

Na Geometria são apresentados os seguintes tópicos:

Quadro 3 - Proporcionalidade na Geometria

Conteúdo	6º ano	7º ano	8º ano	9º ano
Semelhança	Uso informal em plantas e mapas e ampliações ou reduções em malha quadriculada.	-	Relações de proporcionalidade entre comprimentos de polígonos ampliados.	Definição de polígonos semelhantes; semelhança no triângulo retângulo.

Fonte: IMENES; LELLIS, 2010, p. XVII (Guia do professor)

Na Álgebra, também existem alguns tópicos nos quais a Proporcionalidade também é abordada.

¹⁵ Quando o tema é retomado várias vezes, a fim de serem abordados os conceitos e os procedimentos adequados para cada nível de maturidade.

Quadro 4 - Proporcionalidade na Álgebra

Conteúdo	6º ano	7º ano	8º ano	9º ano
Funções	Uso natural das expressões: depende de, varia com, é função de.	Variações direta e inversamente proporcionais.	Fórmulas em geral.	Funções: tabelas, fórmulas e gráficos cartesianos; função polinomial de 1º grau e a reta; função polinomial de 2º grau e a parábola.

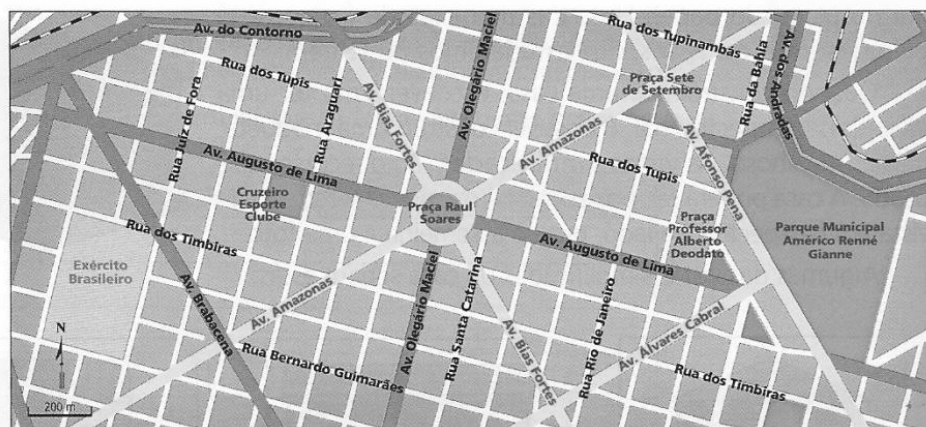
Fonte: IMENES; LELLIS, 2010, p. XIX (Guia do professor)

No quadro referente à parte de Tratamento da Informação, não aparece nenhuma menção explícita à Proporcionalidade, no entanto, veremos adiante que está presente, por exemplo, na construção de gráficos de setores.

No capítulo 2, do 6º ano do Ensino Fundamental, já aparecem vestígios de Proporcionalidade no ensino de escala ao falar sobre vistas, conforme fragmento apresentado seguir:

Figura 76- Noções de escala

Em um mapa mais preciso, porém, a vista deve ser rigorosamente superior e as distâncias têm de ser exatas. Veja este mapa da região central de Belo Horizonte, capital de Minas Gerais:




Essa é uma vista superior simplificada do lugar, em que as medidas foram todas respeitadas. A escala (1 cm : 200 m) indica que cada 1 centímetro do mapa corresponde a 200 metros na realidade. Assim, podemos descobrir as distâncias reais.

Fonte: IMENES; LELLIS, 2010, p. 44(6EF)


No capítulo 6, os autores iniciam o estudo sobre frações e porcentagens e, apresentam como sugestão a utilização de diagramas com setas para encontrar o todo sendo dado quanto a parte representa. O exemplo a seguir pode ser resolvido usando esse artifício, já que a Álgebra ainda não foi apresentada aos estudantes dessa etapa de escolarização.

Figura 77 - Cálculo de frações com o uso do diagrama de setas (método de redução à unidade)

Um automóvel estacionou em um posto de gasolina com o tanque praticamente vazio. Veja como ficou o marcador de combustível depois de o automóvel ser abastecido com 42 L de gasolina e responda: quantos litros de combustível cabem no tanque cheio?

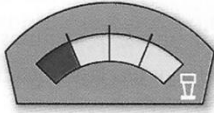


Sugestão
Note que, neste problema, não queremos saber uma fração de um total, mas sim o próprio total.
Sabemos que $\frac{3}{4}$ do tanque contém 42 L.

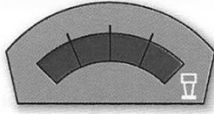


Queremos saber quantos litros há em $\frac{4}{4}$ do tanque, ou seja, quantos litros há no tanque cheio.
Para isso, convém:

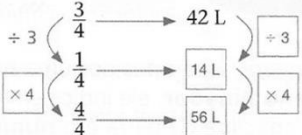
- calcular $\frac{1}{4}$ do tanque



- em seguida, calcular $\frac{4}{4}$ do tanque



Apresente a resolução em um esquema como este:



Fonte: IMENES;LELLIS,2010, p. 127(6EF)

Com base nesse e em outros exemplos e exercícios similares, é perceptível o trabalho implícito com os estudantes do método de redução à unidade. Esse mesmo método é utilizado novamente, mais adiante (p. 137), no estudo de porcentagens. Os autores também utilizam esse diagrama de setas para reduzir a 1% determinada quantidade e depois calcular facilmente qualquer outro percentual pedido. Dessa forma, é possível encontrar um valor desconhecido, sem lançar mão da regra de três, por exemplo. Sobre a associação de regra de três e porcentagem, os autores salientam em uma nota do livro que:

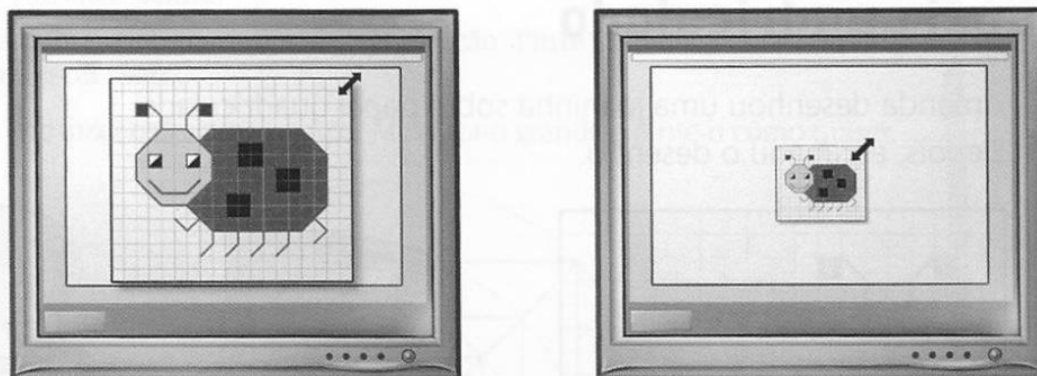
A tradição escolar associa a noção e o cálculo de porcentagens à regra de três. Tal abordagem, além de confusa, é inadequada. Pessoas que aprendem porcentagem desse modo em geral têm dificuldade em resolver, por exemplo, problemas em que ocorrem dois aumentos percentuais sucessivos (como no cálculo da inflação de um bimestre conhecendo-se os percentuais de inflação de cada mês). Daí nossa opção por um tratamento simples e eficaz, que se estenderá até o 9º ano. (IMENES; LELIS, 2010, p. 137-Guia do Professor).

Nesse capítulo também trabalham a comparação entre frações e a equivalência entre elas, importantes na construção do significado de proporção.

No capítulo 7, do 6º ano, referente a construções geométricas inicia-se o trabalho com a construção de figuras usando papel quadriculado, mostrando que ampliando ou reduzindo a figura proporcionalmente, a mesma não fica deformada.

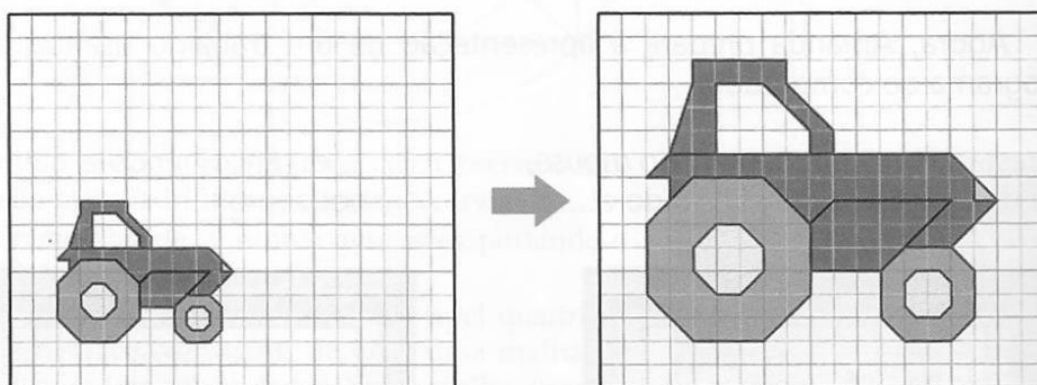
Figura 78 -Construção de figuras geométricas proporcionais com malha quadriculada

O programa de computador permite também ampliar ou reduzir a figura proporcionalmente, sem deformá-la:



Nesses casos, dizemos que a figura ampliada (ou reduzida) é **semelhante** à figura original.

Com auxílio de papel quadriculado, também podemos construir figuras semelhantes. Observe:



Nesse exemplo de ampliação proporcional, todos os comprimentos da figura original foram multiplicados por 2. Confira!

Fonte: IMENES; LELLIS, 2010, p.152 (6EF)

No capítulo 8, referente a medidas e números decimais, a noção de escala é inserida novamente, com maior ênfase. Ao final do capítulo seguinte, é apresentada uma atividade chamada ação-investigação que, segundo as próprias notas explicativas dos autores, explora informalmente noções de proporcionalidade e ainda a noção de equivalência de frações usando a calculadora. Observe:

Figura 79- Raciocínio Proporcional
Mais descobertas com a calculadora

	Dividendo	Divisor	Quociente
	33	8,25	4
÷ 2	66	8,25	8
÷ 2	132	8,25	16
× 2	264	8,25	32
× 2	528	8,25	64

	Dividendo	Divisor	Quociente
	82,5	3	27,5
÷ 2	165	6	27,5
÷ 2	330	12	27,5
× 2	660	24	27,5
× 2	1320	48	27,5

Primeira parte
 Use a calculadora para fazer as divisões da primeira tabela e complete a coluna dos quocientes. A seguir, descubra as operações indicadas pelas setas e complete os espaços reservados para isso. Faça o mesmo na segunda tabela.

Segunda parte
 Fazendo essas divisões, você deve ter percebido algumas propriedades. Por exemplo, se o divisor for o mesmo (como na primeira tabela), então, quando o dividendo dobrar, o quociente também dobrará, certo? Agora, escreva pelo menos duas conclusões relacionadas com a primeira tabela e duas relativas à segunda.

Fonte: IMENES; LELLIS, 2010, p. 194(6EF)

Na segunda parte da atividade, fica evidente a exploração do raciocínio proporcional nessa atividade, mesmo antes de inserir o conceito propriamente dito.

No capítulo 14, que trata de adição e subtração de frações, nota-se que a ideia de Proporcionalidade também está presente no estudo de noção de equivalência de frações.

Figura 80 - Equivalência de frações e proporcionalidade

Frações equivalentes

Veja como Camila pensou:

A pizza foi dividida em 8 partes iguais, e eu comi 3. Logo, comi $\frac{3}{8}$ da pizza.

Se ela fosse dividida em 16 (dobro de 8) partes iguais e eu comesse 6 pedaços (dobro de 3), comeria $\frac{6}{16}$ da pizza.

Daria tudo na mesma! Dobraria o número de pedaços que eu comeria, mas cada pedaço seria metade do anterior. É por isso que $\frac{6}{16}$ é a mesma coisa que $\frac{3}{8}$!

O raciocínio de Camila está correto. Por isso, dizemos que $\frac{3}{8}$ e $\frac{6}{16}$ são frações equivalentes.

Fonte: IMENES; LELLIS, 2010, p. 263(6EF)

Segundo os próprios autores em suas notas, Camila usa Proporcionalidade em seu raciocínio: “Se dobro o número de partes em que a pizza é dividida e também dobro o número de pedaços que como, dá no mesmo”. (IMENES; LELLIS, 2009, p. 264)

No capítulo 5 do livro do 7º ano da coleção, é indagado ao estudante o conceito de grandeza, mas somente no capítulo 7, inicia-se o trabalho envolvendo o conteúdo de Proporcionalidade propriamente dito. Nesse capítulo, os autores iniciam propondo uma atividade investigativa em que os estudantes são levados a discutir se algumas situações são passíveis de previsão ou não. Na Figura 81 a seguir, é apresentada a situação 1, em que a Proporcionalidade pode ser utilizada para fazer previsões.

Figura 81 - Proporcionalidade e previsões – Situação passível de previsão

Usando a Matemática para fazer previsões

Forme um grupo com dois colegas para examinarem as situações propostas a seguir, nas quais deverão fazer previsões com base em cálculos matemáticos. Mas atenção: nem sempre vocês conseguirão fazer uma previsão; nesses casos, o grupo deverá explicar o motivo da impossibilidade.

Todas as conclusões devem ser anotadas. Depois, o professor coordenará um debate para discuti-las.

Situação 1

Com seu carrinho de 1988, vovô gastou 1,5 hora para andar 43 quilômetros. Se ele continuar a viagem nessa velocidade, será possível prever quantos quilômetros andará nas próximas 3 horas?

Se for possível, indiquem quantos quilômetros ele percorrerá.

Fonte: IMENES; LELLIS, 2010, p. 143 (7EF)

Já na Figura 82 abaixo, a situação 3 apresentada não possibilita a utilização da proporcionalidade para realizar previsões.

Figura 82-Proporcionalidade e previsões – Situação não passível de previsão

Situação 3

Aos 30 minutos de jogo, meu time ganhava de 3 a 1. Como um jogo de futebol dura 90 minutos, qual será o placar final? Se não for possível prever o placar final, expliquem por quê.

Fonte: IMENES; LELLIS, 2010, p.144(7EF)

Somente depois dessa atividade investigativa, em que o raciocínio proporcional dos estudantes é estimulado, o conceito de grandezas diretamente proporcionais é apresentado, conforme Figura 83.

Figura 83 - Grandezas diretamente proporcionais
Grandezas diretamente proporcionais

Na **Ação** da qual você participou, os cálculos permitiram fazer previsões em duas das situações. Eram situações que envolviam **grandezas diretamente proporcionais**. Para entender o que isso significa, vamos analisar um exemplo.

Exemplo

Certo helicóptero pode percorrer 150 quilômetros em 0,5 hora. Mantendo essa velocidade, quantos quilômetros ele percorrerá em 2 horas?

Aqui, o *tempo gasto* e a *distância percorrida* são **grandezas diretamente proporcionais**. Isso significa que, se o tempo dobrar, a distância também dobrará; se o tempo triplicar, a distância também triplicará; e assim por diante.

Note que há um **padrão de relação** entre as duas grandezas: se o *tempo gasto* for multiplicado por determinado número, a *distância percorrida* será multiplicada pelo mesmo número.

Veja como resolver a questão com a ideia de **proporcionalidade**. Primeiro, organize as informações do enunciado em uma tabela como esta:

Tempo gasto (h)	Distância percorrida (km)
0,5	150
2,0	?

Note que, de 0,5 h para 2 h, o tempo foi multiplicado por **4** (descobrimos o número 4 calculando mentalmente $2 : 0,5$). Como o *tempo gasto* e a *distância percorrida* são grandezas diretamente proporcionais, podemos multiplicar a distância também por **4**. Observe como fica a tabela:

Tempo gasto (h)	Distância percorrida (km)
0,5	150
2,0	600

$\times 4$ ← → $\times 4$

Concluimos que, em 2 h, o helicóptero percorrerá 600 km.

Porém, atenção! Nem sempre há proporcionalidade em uma situação, como no do jogo de futebol (situação 3) que você analisou na **Ação**. Nele, o tempo de jogo triplica, de 30 minutos para 90 minutos, mas nada garante que o placar também triplique, não é verdade? Isso porque *tempo de jogo* e *placar* não são grandezas proporcionais. Aliás, não há relação alguma entre essas grandezas que permita aplicar a Matemática para prever o placar final. O time que está perdendo pode até mesmo “virar o jogo”, não é?



Fonte: IMENES; LELLIS, 2010, p. 144-145(7EF)

Algumas páginas depois é averiguada mais uma forma de resolver problemas em que as grandezas exploradas são diretamente proporcionais (Figura X).

Figura 84 - Mais proporcionalidade direta

Mais proporcionalidade direta

Agora vamos mostrar uma maneira ligeiramente diferente de resolver problemas que envolvem proporcionalidade. Acompanhe a situação.

Para fazer 6 bengalas de pão, o padeiro gasta 1 800 gramas de farinha. Quanto ele gasta para fazer 5 bengalas?



Compreendeu a ideia? Em vez de verificar de que maneira variou a grandeza *número de bengalas*, relacionamos essa grandeza com a *quantidade de farinha*. A quantidade de farinha é sempre igual ao número de bengalas multiplicado por 300.

Algo parecido ocorre em qualquer situação de proporcionalidade direta. Por isso, podemos **generalizar** assim: quando duas grandezas são **diretamente proporcionais**, o valor de uma delas é igual ao valor correspondente da outra multiplicado sempre por um mesmo número.

Então, nas tabelas com valores de duas grandezas diretamente proporcionais, há relações multiplicativas "na vertical" e "na horizontal". Veja:

	Grandeza A		Grandeza B
	4	$\times 5$	20
$\times 2$	8	$\times 5$	40

Fonte: IMENES; LELLIS, 2010, p. 150 (7EF)

Em seguida, há uma parte destinada à linguagem da proporcionalidade, na qual os autores mostram as diferentes maneiras de expressar proporcionalidade entre duas coisas. No livro, o exemplo dado é entre o número de garotas e garotos. Por exemplo:

- Há 4 garotas para cada grupo de 3 garotos;
- o número de garotas e o número de garotos estão na proporção de 4 para 3;
- o número de garotas está para o número de garotos assim como 4 está para 3;
- os números de garotas e de garotos estão na razão de 4 para 3.

Após apresentar as diferentes linguagens relacionadas à Proporcionalidade, os autores trazem novamente conceitos já trabalhados no 6º ano, como o conceito de escala, construção de gráficos de setores e situações relacionadas a pesquisas estatísticas, porém enfatizando o uso da proporcionalidade em resoluções de situações-problema que envolva essas aplicações, conforme figuras 85, 86 e 87 a seguir. Segue figura 85:

Figura 85– Escalas

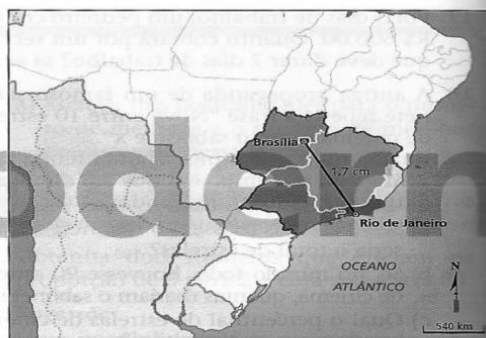
Tratamento da informação: aplicando a ideia de proporcionalidade

Desde o início deste capítulo, você deve ter notado que a proporcionalidade está presente em situações muito variadas. Neste item, vamos apresentar três dessas aplicações, todas ligadas à informação.

Escalas

Você já sabe que os mapas são um importante recurso de informação. Eles ajudam na localização em geral, no planejamento de viagens, no conhecimento da região em que se vive e do mundo todo. Os mapas têm estreita relação com a ideia de proporcionalidade, porque os comprimentos em um mapa costumam ser **diretamente proporcionais** aos comprimentos da realidade que representam.

A **escala** de um mapa indica como se relacionam o comprimento da representação e o correspondente comprimento no mundo real, ou seja, a escala indica qual é a **proporção** entre os *comprimentos do mapa* e os *comprimentos da realidade*. No mapa ao lado, a escala é **1 cm para 540 km**, pois, medindo o traço que indica a escala (no canto inferior direito), obtemos exatamente 1 cm. Isso significa que cada 1 centímetro no mapa vale 540 quilômetros na realidade.



Veja outras maneiras de indicar essa escala:

- 1 cm : 540 km
- 1 : 540 000 000 (isto é, 1 cm corresponde a 540 000 000 cm)

Com a escala, conseguimos saber por quanto devemos multiplicar os comprimentos do mapa para obter os comprimentos reais. Por exemplo, medindo no mapa a distância Rio de Janeiro-Brasília, obtemos 1,7 cm. Com essa medida, calculamos a distância real, que é 918 km. Veja:

Mapa (cm)	Realidade (km)
1	540
1,7	918

$$\begin{array}{r}
 540 \\
 \times 1,7 \\
 \hline
 3780 \\
 540 \\
 \hline
 918,0
 \end{array}$$

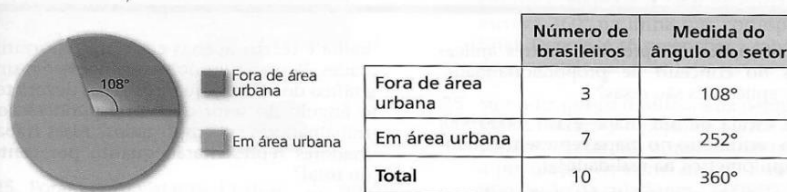
Segue Figura 86, na qual a ideia de Proporcionalidade aparece na construção de gráfico de setores:

Figura 86 - Gráficos de setores

Gráficos de setores

Você também já sabe que os gráficos são outro recurso muito útil para apresentar informações. Os **gráficos de setores** (também chamados “gráficos tipo pizza”) estão entre os mais usados na comunicação e se valem da ideia de proporcionalidade. Cada setor circular é determinado por um ângulo central. A *medida do ângulo de cada setor é diretamente proporcional à quantidade representada pelo setor.*

O gráfico abaixo mostra que, de cada 10 brasileiros, 3 vivem fora de áreas urbanas (fora de cidades) e 7 vivem em áreas urbanas (em cidades). As medidas dos ângulos desse gráfico são diretamente proporcionais aos números 3 e 7. Na tabela, cada medida é igual ao número da coluna esquerda multiplicado por 36.



A medida do ângulo de cada setor também pode ser encontrada aplicando-se a noção de porcentagem. Como 3 brasileiros, em um total de 10, vivem fora de áreas urbanas, sabemos que 30% dos brasileiros vivem fora das cidades. Calculando 30% de 360°, temos: $0,3 \cdot 360^\circ = 108^\circ$

Fonte: IMENES; LELLIS, 2010, p. 155(7EF)

Segue figura 87, na qual a ideia de Proporcionalidade aparece em pesquisas estatísticas.

Figura 87 - Proporcionalidade e pesquisas estatísticas

Pesquisas estatísticas

Com frequência, órgãos governamentais, institutos e organizações que lidam com opinião pública e empresas realizam pesquisas estatísticas para obter informações sobre a população em geral ou sobre clientes e produtos. Em muitas dessas pesquisas, a proporcionalidade desempenha papel fundamental. Acompanhe o exemplo:

Uma indústria de televisores deseja saber a durabilidade dos produtos que fabrica. Naturalmente, não se pode testar toda a produção, porque seria impossível vender os televisores já usados. Por isso, testa-se um grupo (uma amostra) de, digamos, 200 televisores.

Suponha que, dos 200 televisores testados, 180 mostrem que durariam mais de 4 anos quando usados em condições normais em uma casa de família. Nessa situação, considera-se que o resultado obtido na amostra do teste é **proporcional** ao que ocorre na *produção total*. Assim, se a empresa produz 200 000 televisores por ano, 180 000 durariam mais de 4 anos, ou seja, 90% da produção duraria mais de 4 anos.

Os resultados de uma pesquisa como essa podem ajudar a empresa a fazer propaganda de seu produto, a fixar o tempo de garantia que oferece aos clientes, ou mesmo a orientar os profissionais responsáveis pela elaboração do produto a pesquisar maneiras de melhorar seu desempenho.

Fonte: IMENES; LELLIS, 2010, p.155-156(7EF)

E, finaliza o capítulo, com a introdução de grandezas inversamente proporcionais.

Figura 88- Grandezas inversamente proporcionais

Grandezas inversamente proporcionais

Agora, uma grande novidade! Vamos começar examinando uma situação que você provavelmente conhece.

Robson tem 16 exercícios de Língua Portuguesa para fazer.
Veja o que ele pensou:

Nessa situação, ocorre a novidade: a **proporcionalidade inversa**. Observe:

Número de exercícios por hora	Horas de trabalho
4	4
$\times 2 \rightarrow 8$	$\div 2 \rightarrow 2$
$\times 4 \rightarrow 16$	$\div 4 \rightarrow 1$

Dizemos que esse é um caso de **grandezas inversamente proporcionais** porque, se a primeira grandeza dobra, a outra se reduz à metade; se a primeira triplica, a outra se reduz à terça parte; e assim por diante. Portanto, o padrão que relaciona as duas grandezas é: quando duas grandezas são **inversamente proporcionais**, se uma delas é multiplicada por um número positivo, a outra é dividida por esse mesmo número. Também dizemos que, se a primeira grandeza é multiplicada por 2, ou por 3, a segunda é multiplicada por $\frac{1}{2}$, ou por $\frac{1}{3}$.

Fonte: IMENES; LELLIS, 2010, p. 158 (7EF)

No capítulo 11, de equações, a regra de três é apresentada. Nada mais plausível, pois somente após a inserção de equações é possível calcular o valor de um número desconhecido, usando uma manipulação algébrica. Antes, há uma breve retomada sobre a noção de Proporcionalidade, conforme figura 89 abaixo.

Figura 89 - Regra de três – Retomando a noção de proporcionalidade

Regra de três

Vamos recordar a noção de proporcionalidade.

Quando duas grandezas são **diretamente proporcionais**, os valores correspondentes podem ser colocados em uma tabela na qual **dois padrões** podem ser observados:

- multiplicando os valores de uma linha por um número adequado, obtemos os valores da segunda linha;
- os valores da coluna da direita são os valores da coluna da esquerda multiplicados sempre por um mesmo número.

Aqui, vamos explorar só o primeiro desses padrões. Observe a tabela:

	A	B	
× 3	6	11	× 3
	18	33	

O padrão indicado pode ser apresentado em forma de divisão. Veja:

$$18 : 6 = 33 : 11 = 3$$

ou

$$\frac{18}{6} = \frac{33}{11} = 3$$

ou

$$\frac{6}{18} = \frac{11}{33} = 0,333...$$

Raciocinando com base em **padrões multiplicativos**, chegamos a esta propriedade: nas situações em que há **proporcionalidade direta**, podemos escrever uma **igualdade de razões** (uma razão é simplesmente a divisão de dois números como $\frac{6}{18}$ ou $\frac{11}{33}$).

Fonte: IMENES; LELLIS, 2010, p. 242(7EF)

Em seguida, mostram, através de um exemplo (Figura 90), como calcular um valor desconhecido, conhecidos outros três, aplicando a regra de três em uma situação envolvendo grandezas diretamente proporcionais.

Figura 90 - Regra de três – Situação envolvendo grandezas diretamente proporcionais

Exemplo 1

A pé, de casa até a escola, eu percorro 840 metros em 11 minutos. Vou mudar de casa, e a distância de minha nova casa à escola passará a ser 1 800 metros. Quanto tempo levarei para fazer o novo trajeto, supondo que consiga manter a mesma velocidade?

Já resolvemos problemas desse tipo fazendo cálculos mentais. Nesse problema, porém, isso não é fácil, pois os números não ajudam.

O tempo gasto é diretamente proporcional à distância.

	tempo	distância
	11	840
x		1800

Mas, com esses números, não consigo fazer de cabeça.

Aplicando a propriedade de **proporcionalidade direta** que apresentamos, deduzimos que x dividido por 11 deve ser igual a 1 800 dividido por 840:

$$\frac{x}{11} = \frac{1800}{840}$$

Note que escrevemos uma **igualdade de razões**, que, no caso, é uma equação, a qual resolvemos assim:

$$x = \frac{11 \cdot 1800}{840}$$

Agora, simplificamos a fração:

$$x = \frac{11 \cdot 1800}{840} = \frac{11 \cdot 180}{84} = \frac{11 \cdot 45}{21} = \frac{11 \cdot 15}{7} = \frac{165}{7}$$

x = 23,57...

Portanto, o novo trajeto será percorrido em aproximadamente 23,5 minutos (23 minutos e meio ou 23 min e 30 s). Arredondando, são 24 minutos.

A equação que obtivemos no exemplo anterior será chamada de **regra de três**, porque são usados três números conhecidos para descobrir um número desconhecido.

Fonte: IMENES; LELLIS, 2010, p.242-243(7EF)

Por meio de outro exemplo (Figura 91), os autores também mostram como calcular um termo desconhecido, conhecido outros três, aplicando a regra de três, porém agora em uma situação-problema envolvendo grandezas inversamente proporcionais.

Figura 91- Regra de três – Situação envolvendo grandezas inversamente proporcionais

Com esse tipo de equação, também podemos resolver problemas que envolvem grandezas **inversamente proporcionais**. Mas é preciso não esquecer um detalhe: o padrão observado na proporcionalidade direta muda quando a proporcionalidade é **inversa**.

Na tabela ao lado, você pode notar que $\frac{6}{3}$ não é igual a $\frac{4}{8}$. Isso porque os números são **inversamente proporcionais**, e não diretamente proporcionais. Essas razões são chamadas inversas, pois, invertendo uma delas, passamos a ter uma igualdade. Veja:

A	B
3	8
6	4

$$\frac{6}{3} = \frac{8}{4} = 2$$

Exemplo 2

Se duas impressoras produzem 6 000 exemplares de um livro em 2,5 horas de funcionamento, em quanto tempo três dessas impressoras produzirão o mesmo resultado?

Expressando o intervalo de tempo em minuto, montamos a tabela:

Número de impressoras	Tempo de produção (min)
2	150
3	x

Como o número de impressoras é **inversamente proporcional** ao tempo de produção (por exemplo, dobrando o número de impressoras, o tempo de produção cai para a metade), a equação é esta:

$$\frac{2}{3} = \frac{x}{150}$$

A resolução da equação fica por sua conta...

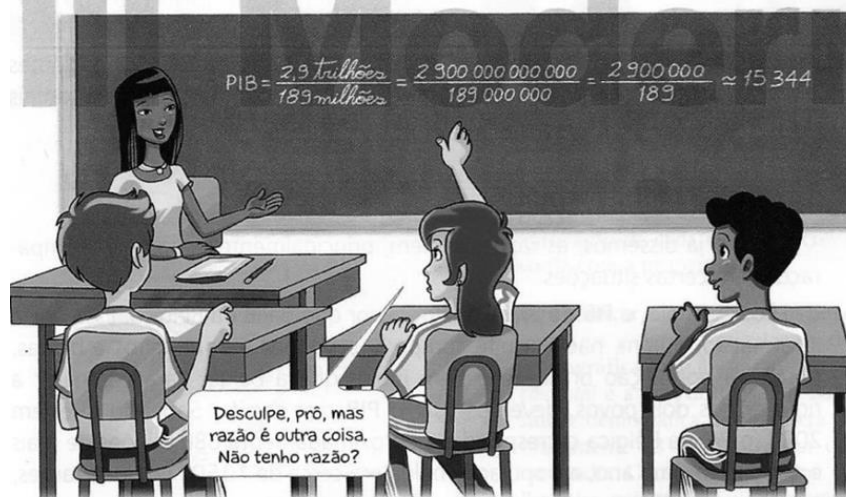
Fonte: IMENES; LELLIS,2010, p. 243-244 (7EF)

No capítulo 13, de Tratamento da Informação, os autores apresentam algumas razões especiais, importantes para o desenvolvimento do raciocínio proporcional dos estudantes (Figura 92).

Figura 92 - Razões especiais

Razões

A divisão de dois números, como no exemplo de cálculo do PIB *per capita*, é chamada **razão**.



A palavra **razão** vem do latim *ratio*, que tem, entre diversos significados, o sentido de “divisão” e deu origem a várias outras palavras de nossa língua, como rateio, racional e raciocínio. Por isso, um dos muitos significados de **razão** é o de uma divisão que relaciona dois números ou duas grandezas e que, de certa forma, permite comparar esses números ou grandezas. Há vários outros exemplos de razão, e você já conhece alguns.

Exemplos

- A **velocidade média** é uma razão: dividimos a *distância percorrida* pelo *tempo gasto*.
- A **escala** de um mapa também é uma razão, embora, nesse caso, a divisão seja apenas uma indicação. Por exemplo, a escala 1 : 2 000 000 é lida como “1 para 2 milhões”.
- Uma razão importante é a **porcentagem**, na qual o segundo número é sempre 100. Por exemplo, 3,5% é o mesmo que $\frac{3,5}{100}$.

A porcentagem é um recurso eficiente para dar ideia da relação entre a **parte** e o **todo**. Suponha que você saiba que certo hospital atendeu, em um ano, 7 550 pessoas com doenças pulmonares, das quais 6 795 eram fumantes. Com esses números, é difícil perceber de imediato se a parte dos fumantes é “grande” ou “muito grande”. Mas, se expressarmos em porcentagem qual parte do todo o número de fumantes representa, fica muito mais fácil interpretar os dados numéricos. Acompanhe:

$$\frac{6795}{7550} = 0,9 = \frac{90}{100} = 90\%$$

Agora, você compreende imediatamente que parte do total de pacientes é constituída por fumantes (uma parte enorme!) e talvez até decida que jamais vai fumar em sua vida — o que seria muito sensato de sua parte!

Fonte: IMENES; LELLIS, 2010, p. 277-278(7EF)

Por fim, indaga aos estudantes porque a razão é importante para fazer comparações, conforme Figura 93.

Figura 93 - Razões e comparações**Razões e comparações**

Como já dissemos, as razões servem, principalmente, para fazer comparações em certas situações.

Por exemplo, o PIB do Brasil é bem maior que o PIB da Bélgica. Essa única informação, porém, não permite comparar a riqueza de brasileiros e belgas, porque a população brasileira é bem maior que a belga. Para comparar a riqueza dos dois povos, devemos usar o **PIB per capita**. Sabendo que, em 2008, o PIB da Bélgica correspondia a aproximadamente 680 bilhões de reais e que, no mesmo ano, a população belga era cerca de 10 500 000 habitantes, calculamos o PIB *per capita* belga em reais:

$$\frac{680\,000\,000\,000}{10\,500\,000} = \frac{6\,800\,000}{105} \approx 64\,760$$

E, então, como você compara a riqueza de brasileiros e de belgas?

Fonte: IMENES; LELLIS, 2010, p. 278 (7EF)

No livro do 8º ano da coleção de Imenes e Lellis, percebemos a retomada e aprofundamento dos conceitos ensinados nos anos anteriores, trazendo no capítulo 4, alguns exercícios, sobre aplicações da Matemática, no qual são abordados alguns problemas matemáticos que surgem no dia a dia, dentre eles alguns problemas envolvendo Proporcionalidade.

No capítulo 5, intitulado “Retomando a Álgebra” são apresentadas algumas situações-problema envolvendo divisão de lucros em partes proporcionais e outros de regra de três, conforme figura 94 a seguir.

Figura 94- Divisão em partes proporcionais**A divisão dos lucros**

Ana tinha R\$ 2 000,00, Maria, R\$ 4 000,00 e Antônia, R\$ 5 000,00. Juntaram esses valores, abriram uma oficina de costura e se saíram tão bem que seis meses depois tinham um lucro de R\$ 46 200,00. Como dividir esse lucro?

Esse é um caso de divisão em partes proporcionais. A parte de cada sócia deve ser diretamente proporcional ao capital investido por ela. Por exemplo, se Ana receber o dobro de R\$ 2 000,00, Maria deve receber o dobro de R\$ 4 000,00 e Antônia, o dobro de R\$ 5 000,00. Assim, podemos organizar esta tabela:

	Ana	Maria	Antônia	Total
	2 000	4 000	5 000	11 000
(x 2)	4 000	8 000	10 000	22 000
(x 3)	6 000	12 000	15 000	33 000

Nessas linhas da tabela, o total não dá 46 200. Mas, prosseguindo com as tentativas, obteríamos os valores corretos.

Outra maneira de resolver o problema, em geral mais rápida, consiste em pensar algebricamente. Procuramos descobrir por qual número x devemos multiplicar 2 000, 4 000 e 5 000 para que o total dê 46 200. Isso porque $2\,000 \cdot x$, $4\,000 \cdot x$ e $5\,000 \cdot x$ são partes do lucro proporcionais a 2 000, 4 000 e 5 000. Temos então uma equação, que vamos resolver:

$$2\,000x + 4\,000x + 5\,000x = 46\,200$$

$$11\,000x = 46\,200$$

$$x = \frac{46\,200}{11\,000}$$

$$x = 4,2$$

Agora, é só calcular a parte de cada uma:

$$\text{Ana: } 2\,000 \cdot x = 2\,000 \cdot 4,2, \text{ o que dá R\$ } 8\,400,00.$$

$$\text{Maria: } 4\,000 \cdot x = 4\,000 \cdot 4,2, \text{ o que dá R\$ } 16\,800,00.$$

$$\text{Antônia: } 5\,000 \cdot x = 5\,000 \cdot 4,2, \text{ o que dá R\$ } 21\,000,00.$$

$$\text{Confira: } 8\,400 + 16\,800 + 21\,000 = 46\,200.$$

Fonte: IMENES; LELLIS, 2010, p. 95-96(8EF)

No capítulo 13, destinado a Geometria experimental, os autores propõem aos estudantes a descoberta de algumas propriedades geométricas, relacionadas com a Proporcionalidade. O termo descoberta merece destaque já que os próprios estudantes são levados a observar, medir e tirar suas conclusões. Nesse capítulo os autores iniciam com a indagação: “É proporcional ou não é?” (Figura 95)

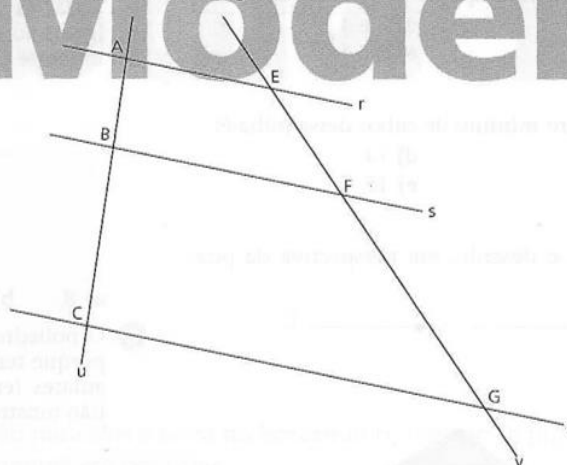
Figura 95 - É proporcional ou não é? – Segmentos proporcionais

É proporcional ou não é?

Na Geometria, existem diversas situações em que aparecem **segmentos proporcionais**, isto é, cujas medidas são números proporcionais.

Exemplo 1

Talvez a mais simples das situações que envolvem proporcionalidade seja aquela em que um feixe de retas paralelas é cortado por retas transversais, como mostra a figura:



As paralelas são as retas r , s e t , e as transversais, as retas u e v . As paralelas determinam **segmentos proporcionais** nas transversais. Na ilustração, BC é o dobro de AB ; da mesma forma que FG é o dobro de EF . Veja as medidas, que exemplificam a proporcionalidade:

	Na reta u	Na reta v
$\times 2$	$AB = 1,5 \text{ cm}$	$EF = 2,1 \text{ cm}$
	$BC = 3,0 \text{ cm}$	$FG = 4,2 \text{ cm}$
		$\times 2$

Fonte: IMENES; LELLIS,2010, p. 270 (8EF)

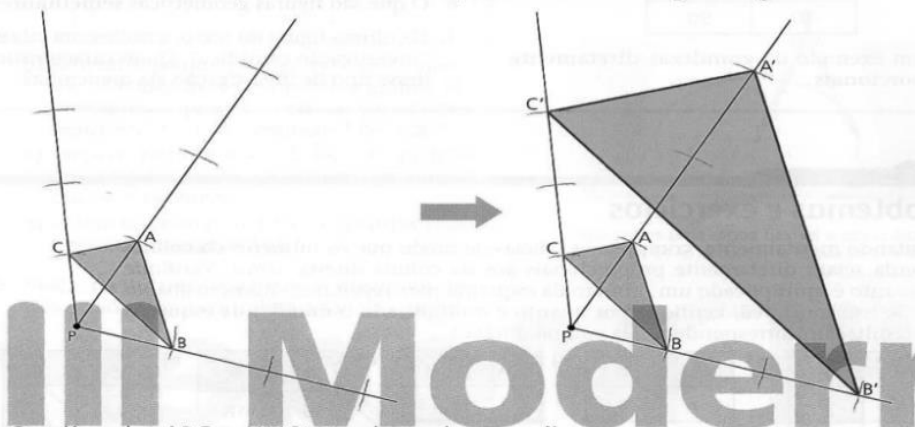
Em um dos exemplos, os autores mostram como realizar a construção de um triângulo semelhante a outro com auxílio de um compasso (Figura 96).

Figura 96 - Construção de triângulos semelhantes usando compasso

Exemplo 2

Acompanhe uma construção que produz **proporcionalidade**.

1. Começamos a construção por um triângulo (ABC) e um polo (P).
2. Com auxílio do compasso, marcamos três vezes a distância PA na semirreta PA.
3. Fazemos o mesmo com as distâncias PB e PC.
4. Aproveitando as marcas do compasso, desenhamos o triângulo A'B'C', cujos lados medem o triplo dos lados correspondentes no triângulo original.



Os triângulos ABC e A'B'C' são chamados **semelhantes**.

Note que, na Matemática, a palavra **semelhante** é mais do que *parecido*. As duas figuras têm mesmíssima forma e seus lados são **proporcionais**. Temos:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{1}{3}$$

Fonte: IMENES; LELLIS, 2010, p. 271(8EF)

Em seguida, apresentam um tópico chamado “Investigando a proporcionalidade”, que inicia várias atividades relacionadas à proporcionalidade e à Geometria.

Figura 97 - Investigando a proporcionalidade

Investigando a proporcionalidade

Nas atividades deste item, propomos que você examine algumas outras situações e tente descobrir propriedades relacionadas com proporcionalidade. Em vez de provar a proporcionalidade com raciocínios lógicos, método típico da Matemática, você usará o método das ciências experimentais.



Nas atividades, vocês farão uma investigação científica. Será preciso observar, medir e tirar conclusões.

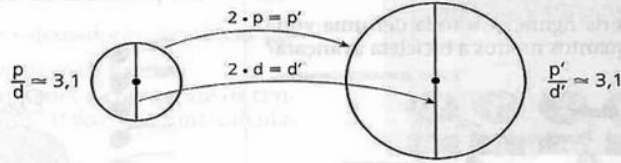
Como fazem os cientistas!

Fonte: IMENES; LELLIS, 2010, p. 271(8EF)

Ao final, apresentam uma dedução da fórmula do perímetro da circunferência $p = \pi d$, evidenciando a proporção existente entre o diâmetro e o perímetro de qualquer circunferência, conforme Figura 98 a seguir.

Figura 98 - Proporção entre diâmetro e perímetro de uma circunferência

Por que a fórmula é válida para todas as circunferências? Porque, em **duas** circunferências, quaisquer comprimentos correspondentes são **sempre proporcionais**. Assim, aumentar o diâmetro de uma circunferência faz seu perímetro aumentar na mesma proporção. Por exemplo, se o diâmetro duplica, o perímetro também duplica e continua valendo, aproximadamente, 3,1 vezes o diâmetro.



Portanto, em qualquer circunferência, a **razão** entre o perímetro e o diâmetro é aproximadamente **3,1**, sempre. Esse número é tão importante que recebeu um nome especial: é indicado pela letra grega π (pi). Nossa fórmula pode, então, ser escrita assim:

$$p = \pi \cdot d$$

A fórmula do perímetro da circunferência em função de seu diâmetro **tem** grande importância na Matemática e em outras ciências, além de ser frequente na atividade de muitos profissionais. Essa fórmula é um bom exemplo das **conduções** úteis que podemos deduzir do estudo da proporcionalidade em Geometria.

Fonte: IMENES; LELLIS, 2010, p. 279(8EF)

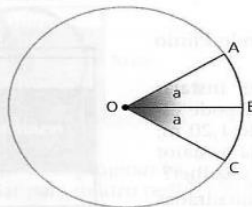
Em seguida (Figura 99), apontam outra aplicação da Proporcionalidade na Geometria, em que o comprimento de um arco da circunferência é diretamente proporcional à medida do ângulo central correspondente.

Figura 99 - Proporção entre o arco de uma circunferência e a medida do ângulo central correspondente

Geometria experimental

Algumas situações em que há proporcionalidade

O comprimento de um **arco** de circunferência é diretamente proporcional à medida do **ângulo central** correspondente. Na figura abaixo, por exemplo, o arco AC corresponde a um ângulo central que mede **2a**, e o arco AB, a um ângulo central que mede **a**. Portanto, o comprimento do arco AC é o dobro do comprimento do arco AB.

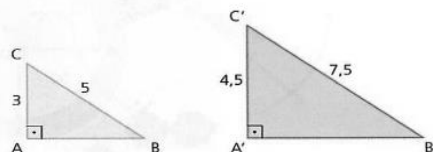


No entanto, não há proporcionalidade entre as medidas dos **ângulos centrais** e as medidas das **cordas** correspondentes. Assim, o segmento AC **não** mede o dobro do segmento AB.

Quando uma figura é **ampliação perfeita** de outra, as duas figuras são chamadas **semelhantes**, e seus lados têm medidas **diretamente proporcionais**.

Por exemplo, na figura ao lado, os triângulos ABC e A'B'C' são semelhantes. Observe que $\frac{3}{4,5} = \frac{5}{7,5}$. O triângulo ABC foi ampliado 1,5 vez.

Nas ampliações, as medidas dos ângulos não se alteram.



Fonte: IMENES; LELLIS, 2010, p. 282(8EF)

No último ano da coleção, 9º ano, os autores retomam o trabalho envolvendo semelhança, que já tinha sido iniciado nos anos iniciais do ensino fundamental II, porém, nesse último volume, são evidenciadas as condições nas quais dois polígonos são semelhantes e o modo de encontrar a constante de proporção entre dois polígonos semelhantes, chamada razão de semelhança, conforme Figura 100.

Figura 100 - Condição de semelhança e razão de semelhança

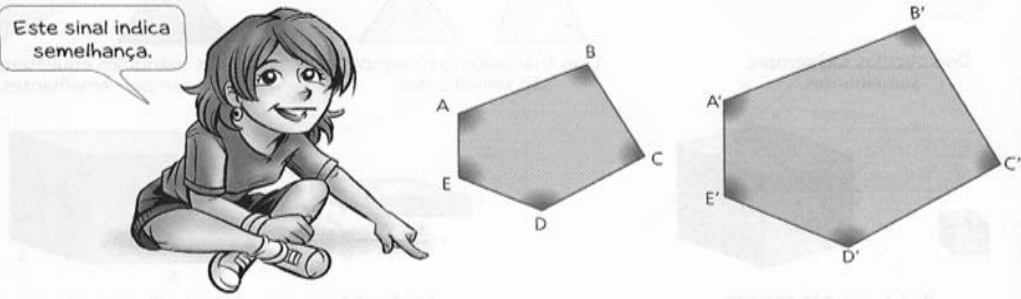
Dois polígonos são semelhantes quando satisfazem as duas condições:

- as medidas dos lados que se correspondem são proporcionais;
- as medidas dos ângulos que se correspondem são iguais.

Lados ou ângulos que se *correspondem* são os que estão na mesma posição relativa nos dois polígonos. Nos dois pentágonos a seguir, AB corresponde a A'B', \hat{A} corresponde a \hat{A}' etc. Os pentágonos foram desenhados de modo que sejam semelhantes. Por isso, ocorrem estas relações:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \dots = k \quad \text{e} \quad \hat{A} = \hat{A}', \hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}', \dots$$

Este sinal indica semelhança.



pentágono ABCDE ~ pentágono A'B'C'D'E'

O número k , que é a constante da proporção, chama-se **razão de semelhança**. No exemplo dado, temos $k = \frac{2}{3}$, ou seja, a razão dessa semelhança é de 2 para 3. Confira essa informação medindo todos os pares de lados que se correspondem.

Para dois polígonos serem semelhantes, é preciso que as duas condições presentes na definição anterior sejam satisfeitas. Uma só não basta.

Fonte: IMENES; LELLIS, 2010, p. 14(9EF)

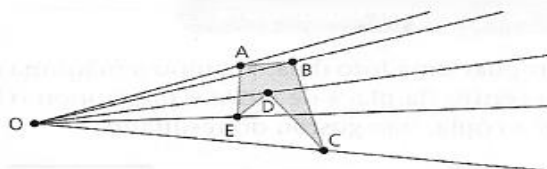
Em seguida, Figura 101, os autores inserem o conceito de homotetia propriamente dito e mostram como obter figuras semelhantes por meio desse recurso, utilizando régua e compasso.

Figura 101– Homotetia

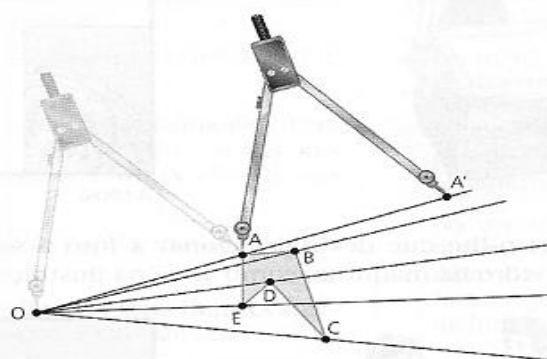
Construindo figuras semelhantes

Há vários recursos para se obter figuras semelhantes, tais como máquinas copiadoras e ampliação de fotos. Vamos mostrar um recurso que utiliza instrumentos de desenho.

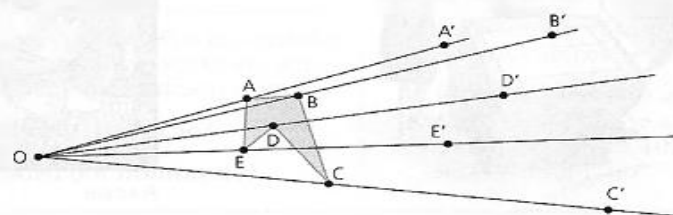
- Para ampliar ou reduzir este polígono de 5 lados, marcamos um ponto O (o polo) e traçamos as semirretas OA, OB, OC etc.



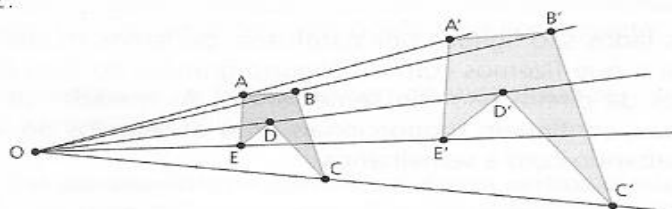
- Para duplicar o polígono, marcamos o ponto A' sobre a semirreta OA de modo que $OA' = 2 \cdot OA$. Usar o compasso diminui o trabalho.



- Da mesma forma, fazemos $OB' = 2 \cdot OB$, $OC' = 2 \cdot OC$ etc.



- Para completar, ligamos A' com B', B' com C' etc. Neste exemplo, a ampliação é de 1 para 2.



Nesse processo de ampliação ou redução a partir de um polo, obtemos figuras semelhantes, semelhantemente dispostas, isto é, na mesma posição relativa. Essa relação entre duas figuras se chama homotetia. O termo é derivado do grego (*homós* – igual + *thetós* – colocado + *ia*) e se refere ao fato de as figuras estarem igualmente colocadas e dispostas. Essas figuras são também conhecidas como figuras homotéticas.

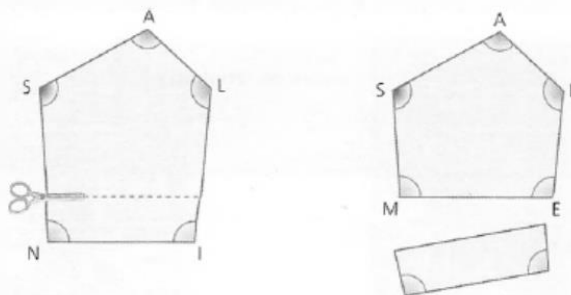
Fonte: IMENES; LELLIS, 2010, p. 15-16 (9EF)

Nesse mesmo capítulo, mostram como obter triângulos semelhantes (Figura 102).

Figura 102 - Triângulos semelhantes

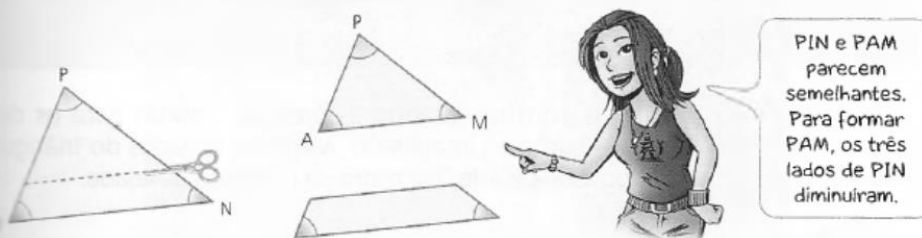
Triângulos semelhantes

O pentágono SALIN foi cortado por uma reta paralela a um de seus lados:



Por observação visual, percebe-se que os pentágonos SALIN e SALEM não são semelhantes. De fato, eles têm ângulos de mesma medida, mas seus lados não são proporcionais, pois de SN para SM o lado diminuiu, enquanto outros lados, como SA, não foram alterados.

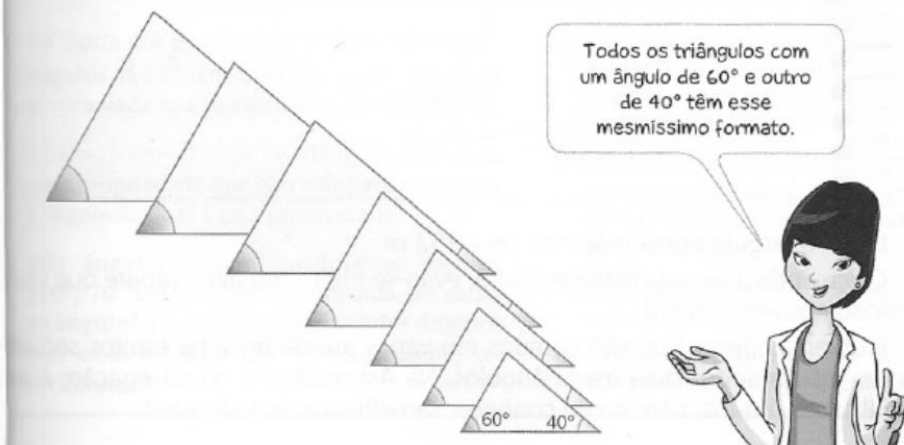
Agora, vamos cortar o triângulo PIN por uma reta paralela a um de seus lados. Os triângulos PIN e PAM têm ângulos iguais:



O que a garota percebeu é correto. Basta que dois triângulos tenham os ângulos respectivamente iguais para serem semelhantes.

Essa propriedade só é válida para os triângulos, ou seja, não se aplica a outros polígonos, como é possível perceber no exemplo dos pentágonos SALIN e SALEM.

A forma de um triângulo fica completamente definida quando são conhecidos os seus ângulos. Aliás, basta conhecer dois ângulos, pois o terceiro é o que falta para a soma das medidas dos três totalizar 180° .

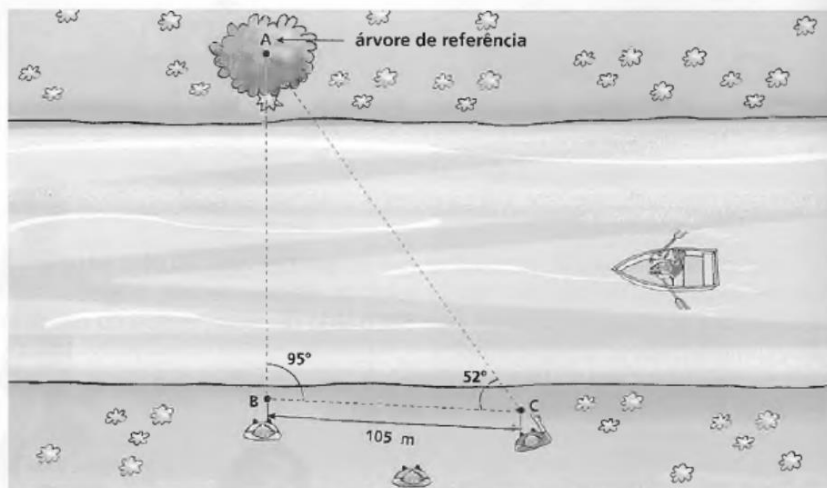


Fonte: IMENES; LELLIS, 2010, p. 22(9EF)

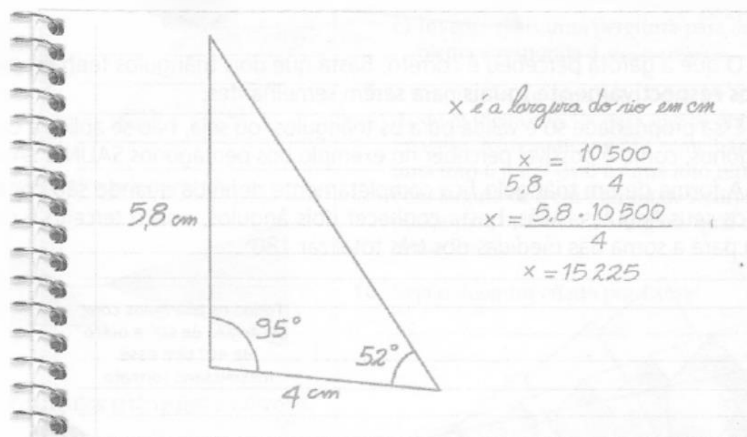
E relacionam a uma das aplicações dessa propriedade de triângulos (Figura 103).

Figura 103 - Aplicação da propriedade de triângulos

Essa propriedade dos triângulos oferece inúmeras aplicações. Uma delas é determinar certa medida, sem verdadeiramente fazer essa medição. Por exemplo, veja como se pode obter a largura aproximada de um rio. Com instrumentos apropriados, agrimensores medem os ângulos \hat{B} e \hat{C} e o lado BC de um triângulo imaginário.



A seguir, um desenhista constrói, usando as medidas obtidas para os dois ângulos, um triângulo semelhante ao imaginado. Medindo os lados do triângulo desenhado e usando proporcionalidade, encontra-se a largura desejada.



Logo, a largura aproximada do rio é 152 m.

Calculando a largura dessa maneira, evita-se muito trabalho; repare que nem é preciso atravessar o rio!

Problemas desse tipo são comuns em várias atividades e há muitos séculos existem instrumentos para medir ângulos. Na Astronomia e na navegação, é essencial saber usá-los, bem como conhecer semelhança de triângulos.

Fonte: IMENES; LELLIS, 2010, p. 23(9EF)

Em seguida (Figura 104), apresentam a semelhança no triângulo retângulo. Conforme notas dos autores ao lado do assunto, afirmam utilizar esse título, pois julgam que a origem das fórmulas é mais importante que as fórmulas em si, destacando a semelhança dos triângulos formados, quando se traça a altura relativa à hipotenusa em um triângulo retângulo, ou seja, as relações métricas decorrentes dessa semelhança.

Figura 104 - Semelhança no triângulo retângulo e as relações métricas

Semelhança no triângulo retângulo

Os ângulos retos são frequentes nas construções: em portas, janelas, na quinas de paredes e pisos e em muitos outros locais. Por isso, em uma paisagem urbana, podemos imaginar inúmeros ângulos retos:



Os triângulos retângulos aparecem tanto nos objetos, nas edificações e na própria Matemática, que seus lados acabaram recebendo nomes especiais, como se vê no triângulo ao lado.



Há uma propriedade envolvendo semelhança que só os triângulos retângulos possuem. Você vai conhecê-la agora.

Em um triângulo retângulo, traçando a altura relativa à hipotenusa, dois novos triângulos retângulos são formados. Vamos designar por I, II e III esses três triângulos.



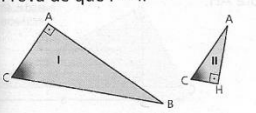
A propriedade especial é que esses triângulos retângulos são semelhantes dois a dois: $I \sim II$, $II \sim III$ e $I \sim III$.

Mas esses triângulos não parecem ser semelhantes!

É que eles não estão em posições semelhantes.

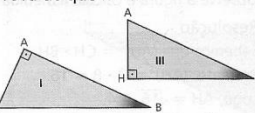
Vamos provar que essa propriedade dos triângulos retângulos é verdadeira. Acompanhe:

Prova de que $I \sim II$



- I e II têm ângulo reto (\hat{A} em I e \hat{H} em II).
- O ângulo \hat{C} é o mesmo nos dois triângulos.

Prova de que $I \sim III$

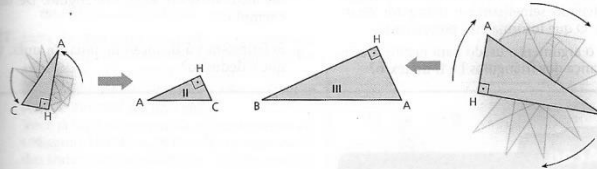


- I e III têm ângulo reto (\hat{A} em I e \hat{H} em III).
- O ângulo \hat{B} é o mesmo nos dois triângulos.

Prova de que $II \sim III$

Os triângulos II e III têm ângulos congruentes porque cada um deles possui ângulos com as mesmas medidas dos de I. Portanto, $II \sim III$.

Com base nessas semelhanças, podemos encontrar diversas relações entre as medidas dos lados desses triângulos. Como exemplo, veremos o caso dos triângulos II e III.



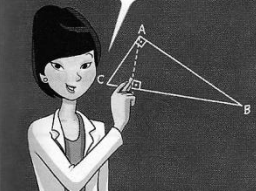
Colocando-os em posição semelhante, é fácil escrever as relações de proporcionalidade: $\frac{AH}{BH} = \frac{CH}{AH}$.

Multiplicando os dois lados da igualdade por BH, temos: $AH = \frac{CH \cdot BH}{AH}$

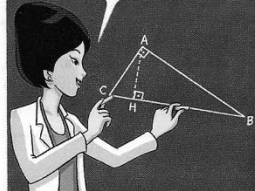
E, multiplicando os dois lados por AH, obtemos: $(AH)^2 = CH \cdot BH$

Veja como se lê essa fórmula:

O quadrado da medida desta altura...



... é igual ao produto das medidas dos dois segmentos formados na hipotenusa.



Fonte: IMENES; LELLIS, 2010, p. 28-29(9EF)

Somente depois é apresentado o Teorema de Pitágoras propriamente dito.

No capítulo 7, intitulado Geometria Dedutiva, os autores invertem a abordagem costumeira de apresentar primeiro o Teorema de Tales, que é utilizado para demonstrar que, “se dois triângulos têm ângulos iguais então seus lados são proporcionais (e, por isso, os triângulos são semelhantes), adotando agora que é da semelhança que se demonstra o Teorema”. Antes disso, recordam propriedades importantes sobre medidas de ângulos e de segmentos associadas aos conceitos de retas paralelas, conforme Figura 105.

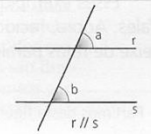
Figura 105- Paralelismo e proporcionalidade

Paralelismo

Ao conceito de retas paralelas estão associadas propriedades importantes sobre medida de ângulos e de segmentos. Vamos recordar algumas que você já conhece e, depois, apresentar um famoso teorema.

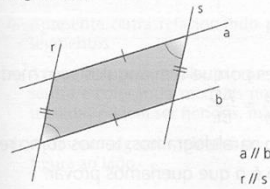
Paralelismo e igualdade dos ângulos correspondentes

Se as retas r e s são paralelas, os ângulos correspondentes \hat{a} e \hat{b} são congruentes.
Essa propriedade sugere a seguinte ideia: "o paralelismo preserva medidas de ângulos".



Paralelismo e o paralelogramo

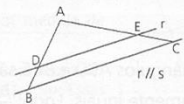
Se duas retas paralelas são cortadas por outras duas paralelas, forma-se um paralelogramo. Nos paralelogramos, os lados opostos são congruentes e os ângulos opostos também são congruentes.



Paralelismo e proporcionalidade

Se $r // s$, então os triângulos ABC e ADE têm ângulos congruentes e, portanto, são semelhantes. Por isso, as medidas de seus lados são proporcionais:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} = \frac{AC}{AE}$$



Essa propriedade sugere que "paralelismo relaciona-se com proporcionalidade".

Fonte: IMENES; LELLIS, 2010, p. 153(9EF)

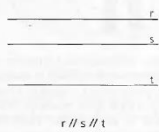
Em seguida, apresentam o Teorema de Tales (Figura 106).

Figura 106 - Teorema de Tales

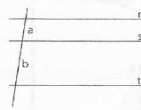
O teorema de Tales

Dessas propriedades já conhecidas decorrem outras. Há uma famosa, que dizem ter sido descoberta pelo célebre matemático grego Tales de Mileto (século VII a.C.), aliás o mais antigo matemático registrado pela História. De início, vamos ver um exemplo:

Temos três retas paralelas, formando um feixe:

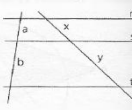


Traçamos uma transversal.



Nesse exemplo, $b = 2a$, ou seja, $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$.

Traçando qualquer outra transversal...



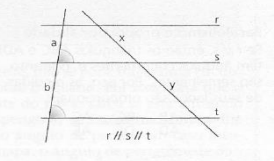
... observa-se também que $y = 2x$, ou seja, que $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$.

Na figura anterior, você pode medir a , b , x e y , desprezando pequenas diferenças, comprovar que vale a proporcionalidade, isto é, que a sentença $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$ é verdadeira.

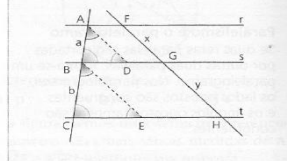
Se tivéssemos, por exemplo, $\frac{a}{b} = \frac{17}{42}$, então teríamos também $\frac{x}{y} = \frac{17}{42}$.

Esses exemplos servem para você compreender do que trata o teorema de Tales. Agora, raciocinando dedutivamente, vamos provar que tal propriedade de feixe de retas paralelas é válida sempre. Acompanhe a demonstração:

Partimos desta figura:



Traçamos AD e BE, paralelos a FH:

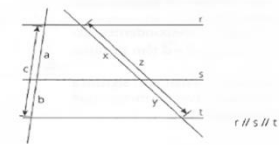


Os triângulos ABD e BCE são semelhantes porque têm ângulos com medidas respectivamente iguais. Logo: $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{BE}$ ou $\frac{a}{b} = \frac{AD}{BE}$.

Como os quadriláteros ADGF e BEHG são paralelogramos, temos como resultado: $AD = x$ e $BE = y$. Portanto: $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$. Isso é o que queríamos provar.

Fonte: IMENES; LELLIS, 2010, p. 154-155(9EF)

Usando conhecimentos de Álgebra, é possível escrever outras relações de proporcionalidade, associadas à mesma figura. Veja um exemplo:



Já provamos que: $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$

Da igualdade anterior, deduzimos esta: $\frac{a}{b} + 1 = \frac{x}{y} + 1$

Efetuando as adições, temos: $\frac{a+b}{b} = \frac{x+y}{y}$

Uma vez que $a + b = c$ e $x + y = z$, concluímos ainda que: $\frac{c}{b} = \frac{z}{y}$

De maneira parecida podemos provar que: $\frac{c}{a} = \frac{z}{x}$

Considerando as várias relações de proporcionalidade, o teorema de Tales pode ser enunciado assim:

Em um feixe de retas paralelas cortado por duas transversais, considere os segmentos que as paralelas determinam sobre as transversais: as medidas dos segmentos que estão sobre uma das transversais são diretamente proporcionais às medidas dos segmentos correspondentes que estão sobre a outra transversal.

No capítulo 8, chamado “Matemática, comércio e indústria”, são tratadas ideias matemáticas frequentes em situações relacionadas com impostos, empréstimos bancários, operações comerciais e produção industrial, além de serem retomados preceitos relacionados à porcentagem e proporcionalidade, apresentando um avanço: a regra de três composta, conforme Figura 107

Figura 107 - Produção e proporcionalidade - Regra de três composta

Produção e proporcionalidade

Nos itens anteriores, tratamos de problemas matemáticos relacionados com compras, vendas, empréstimos, impostos e juros. Agora, abordaremos problemas relativos à produção de bens. Acompanhe um exemplo típico:

O supervisor de uma fábrica tem um problema a resolver. Seu setor costuma produzir 3 000 peças a cada 5 dias, operando com 6 máquinas iguais. A fábrica recebeu uma encomenda de 8 000 peças, mas, por azar, duas máquinas estão em manutenção. Quantos dias serão necessários para atender à encomenda?

Começamos organizando as informações em uma tabela:

Número de dias	Número de peças	Número de máquinas
5	3 000	6
?	8 000	4

O número de dias necessários para produzir a encomenda depende de outros dois números:

- o número de peças encomendadas;
- o número de máquinas em funcionamento.

Observe que, quanto maior a encomenda, mais dias serão necessários para produzi-la; por exemplo, se o número de peças triplica, de 3 000 para 9 000, o tempo de produção também triplica, de 5 para 15 dias. Por isso, as variáveis número de peças e número de dias são diretamente proporcionais.

Observe ainda que, quanto maior é o número de máquinas em atividade, menos dias são necessários para produzir as peças; se dobrarmos o número de máquinas, cai para a metade o número de dias. Por isso, as variáveis número de máquinas e número de dias são inversamente proporcionais.

Se o número procurado (número de dias de produção) variasse proporcionalmente em função de apenas outro número, o problema poderia ser resolvido por meio de uma regra de três, que você já conhece. Entretanto, o número procurado depende de duas variáveis. O que deve ser feito?

A estratégia é considerar somente uma variação de cada vez. Veja como se faz isso.

Primeiro, supomos a fábrica operando com 6 máquinas e não variamos esse número, mas apenas o número de peças. Veja a tabela:

Número de dias	Número de peças	Número de máquinas
5	3 000	6
x	8 000	6

Como o número de dias é diretamente proporcional ao número de peças, temos:

$$\frac{5}{x} = \frac{3\,000}{8\,000}$$

Resolvendo essa equação, obtemos $x = \frac{40}{3}$, o

que, considerando o dia de 8 horas de trabalho, equivale a 13 dias mais 2 horas e 40 minutos.

Desse modo, concluímos que em $\frac{40}{3}$ de dia a fábrica produziria 8 000 peças funcionando com 6 máquinas. Sabendo disso, vamos verificar o que aconteceria se tivéssemos apenas 4 máquinas (pois duas estão em manutenção) para produzir as mesmas 8 000 peças. Agora, a tabela fica assim:

Número de dias	Número de peças	Número de máquinas
5	3 000	6
$\frac{40}{3}$	8 000	6
y	8 000	4

Sabemos que o número de dias necessários para produzir certo número de peças é inversamente proporcional ao número de máquinas. Por isso, temos:

$$\frac{40}{3} \cdot \frac{1}{y} = \frac{4}{6}$$

Note que invertemos a ordem dos números de uma coluna da tabela porque há proporcionalidade inversa.

Podemos resolver a equação usando a ideia de operação inversa. O termo y, que está dividindo do lado esquerdo, passa a multiplicar do lado direito da igualdade. O termo 6, que está dividindo do lado direito, passa a multiplicar do lado esquerdo. De forma resumida, costumamos dizer que “multiplicamos em cruz”. A continuação é esta:

$$6 \cdot \frac{40}{3} = 4 \cdot y \Rightarrow 80 = 4 \cdot y \Rightarrow y = \frac{80}{4} = 20$$

Concluímos que serão necessários 20 dias para atender à encomenda.

O problema do supervisor da seção é um exemplo dos problemas cuja solução envolve a chamada **regra de três composta**. Isto é, eles exigem duas ou mais regras de três para serem resolvidos.

A seguir, você trabalhará com problemas desse tipo.

Alguns alunos se incomodam com a fração, mas você não deve se preocupar: é um número como outro qualquer.

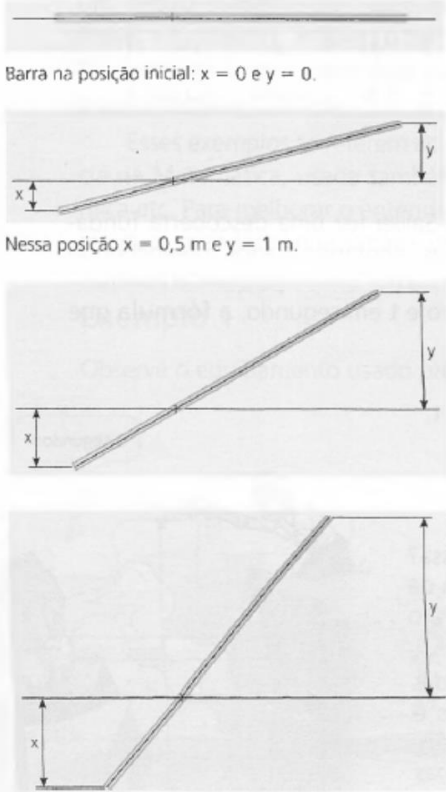


Fonte: IMENES; LELLIS, 2010, p. 171-173 (9EF)

Por fim, os autores abordam no Capítulo 10, sobre Funções, preceitos relacionados à Proporcionalidade, conforme exercícios 1, 3 e 23 a seguir (Figura 108).

Figura 108- Função e proporcionalidade

1. Vamos considerar uma barra giratória como a do exemplo 1 do texto. Os desenhos estão na escala 1 : 100.



Barra na posição inicial: $x = 0$ e $y = 0$.

Nessa posição $x = 0,5$ m e $y = 1$ m.

a) Meça os comprimentos de x e y em cada posição da barra. Depois, complete a tabela com as medidas obtidas:

x (em metro)	0	0,5	1,0	1,5
y (em metro)	0	1,0	2,0	3,0

y é diretamente proporcional a x .

b) A variável y é diretamente **proporcional** a x ? Ou a variação é de algum outro tipo?
 c) A fórmula dessa função é $y = x + 0,5$? Ou é $y = \frac{x}{2}$? Qual é a fórmula? $y = 2x$

3. Em certa cidade, a bandeirada de uma corrida de táxi custa R\$ 4,10 e o quilômetro rodado custa R\$ 2,30. Use essas informações para responder às questões.

a) Sendo x o número de quilômetros rodados e P o preço da corrida, complete a tabela.

x (km)	0	0,5	1,0	1,5	2,0
P (real)	4,10	5,25	6,40	7,55	8,70

b) As variáveis x e P são diretamente proporcionais, são inversamente proporcionais, ou a variação não é de nenhum desses tipos?
 c) A variável P depende de x . Temos, então, uma função. Qual é a fórmula dessa função?
 d) Paguei R\$ 22,10 por uma corrida de táxi nessa cidade. Quantos quilômetros rodei?
 7,8 km, aproximadamente.

23. Considere a função de fórmula $y = \frac{1}{x}$, sendo x um número qualquer, diferente de 0.

a) Complete as tabelas:

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

x	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4
y	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$

b) Nessa função, y é direta ou inversamente proporcional a x ?
 c) Agora, tente fazer um esboço do gráfico da função. (Dica: Lembre-se de que um esboço não tem muita exatidão ou detalhes.)

Fonte: IMENES; LELLIS, 2010, p. 206-218(9EF)

Com base na análise do conteúdo na coleção C4 foi possível traçar o ecossistema da proporcionalidade da respectiva coleção, conforme esquema 7 a seguir.

Essa estrutura ecológica, no formato de uma espiral, incorpora a perspectiva do autor quanto à imprescindibilidade do tema e por ser um objeto de conhecimento ligado a conteúdos numéricos, algébricos e geométricos, presente em vários anos de estudo, além de um bom exemplo do ensino em espiral, nos quais os conteúdos vão sendo trabalhados e retomados para a compreensão de outros.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O saber sofre modificações de acordo com as necessidades que vão aparecendo no decorrer do tempo. É perceptível as mudanças ocorridas no ensino da Proporcionalidade desde seu surgimento nas antigas civilizações e também durante as últimas décadas, a partir das obras analisadas no presente estudo. Isso ocorre, via de regra, pela necessidade de conduzir o ensino desse objeto de conhecimento da melhor forma possível, dada sua importância no currículo de Matemática e sua extensa aplicabilidade, inclusive em outras áreas de conhecimento.

Atualmente, o pilar de sustentação de todo o conceito relativo à Proporcionalidade é o raciocínio proporcional, pois é a partir dele que o estudante poderá atribuir significado às situações-problema que confrontará adiante em seu ensino e também em seu dia a dia.

O livro didático é um grande auxiliador nesse processo, já que esse raciocínio precisa ser estimulado pelos professores e a prática docente baseia-se, em grande parte, no modo em que os conteúdos são abordados no interior desses livros. Esses livros didáticos, por sua vez, são modificáveis ao longo do tempo, graças às novas ideias e transformações que vão surgindo no ensino e nas áreas de conhecimento. Documentos norteadores como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e a exigência advinda da avaliação das obras pelo Plano Nacional do Livro Didático (PNLD), por exemplo, assumem um papel muito importante na estruturação e na qualidade dos livros didáticos colocados em circulação. Como os guias dos livros didáticos do PNLD são relativamente recentes, sendo o primeiro lançado no ano de 1996 e tendo contemplado apenas as séries iniciais do Ensino Fundamental I, as coleções C1 e C2 analisadas neste trabalho, por serem dos anos 1985 e 1995, respectivamente, não foram contempladas nesses guias e, portanto, não foram passadas pelos critérios de avaliação do MEC. No ano 2000, o PNLD ainda estava sofrendo algumas modificações e no site do próprio FNDE só disponibilizam-se os guias a partir de 2004, impossibilitando assim avaliar se a coleção de livros didáticos C3 foi contemplada em algum PNLD anterior. Das coleções analisadas, somente a C4 encontra-se no PNLD de 2011 e, por isso, optamos por não utilizar a inserção

das coleções no PNLD como uma justificativa para a escolha, pois a maioria delas não se encontra analisada.

É válido mencionar que o foco das análises dos livros didáticos no presente trabalho foi apenas quanto ao desenvolvimento do objeto de saber Proporcionalidade, não objetivando, portanto, uma radiografia das coleções, pois não foram levados em consideração os modelos de organização, os tipos de exercícios, entre outros.

Ao fazer a análise dos livros didáticos das quatro coleções, foi possível observar o seguinte:

- Na coleção C1, a Proporcionalidade não aparece nos livros de 5ª e 7ª séries, sendo que toda a noção de Proporcionalidade é trabalhada no livro da 6ª série e retomada parcialmente (propriedade fundamental da proporção e propriedade da soma) no livro da 8ª série para iniciar o estudo dos segmentos proporcionais.
- Na coleção C2, a Proporcionalidade, assim como na coleção C1, não aparece nos livros de 5ª e 7ª séries. Nos livros da 6ª série, também foram exploradas todas as noções de Proporcionalidade, porém com maior presença de situações contextualizadas na abordagem de alguns conceitos que na coleção C1. Já no livro da 8ª série, além do trabalho com semelhança de polígonos e Teorema de Tales, a Proporcionalidade é usada também na apresentação do conteúdo de gráficos de setores.
- Na coleção C3, há uma ruptura na linearidade verificada nas coleções C1 e C2, e o exercício do pensamento proporcional apresenta-se como foco do autor em detrimento das excessivas regras, esquemas e propriedades. A Proporcionalidade não aparece também nos livros didáticos de 5ª e 7ª séries, como nas coleções C1 e C2. Já no livro da 6ª série, são explorados problemas envolvendo razão e proporção, mas sem uma formalização exagerada. Diferentemente das demais coleções, conceitos como terceira proporcional, quarta proporcional, propriedades da proporção, regra de três simples e composta não são apresentados e a construção do significado e do raciocínio proporcional são priorizados. Na 8ª série, a Proporcionalidade é apresentada em Geometria com maior ênfase ao trabalhar semelhança de

figuras, Teorema de Tales, homotetia e divisão de segmentos em partes proporcionais.

- Na coleção C4, o conteúdo de Proporcionalidade aparece em todos os anos da coleção, de forma contextualizada e gradativa, sempre utilizando cenários relacionados ao cotidiano para inserir cada conceito. Situações em que o estudante é levado a fazer previsões estão presentes na coleção, bem como situações que fazem com que o raciocínio proporcional seja exercitado. Assim como na coleção C3, conceitos como terceira proporcional, quarta proporcional e propriedades da proporção também são omitidos, mas a regra de três simples e composta, são apresentadas nos livros de 7º e 9º ano, respectivamente. Um diferencial dessa coleção foi o uso da Proporcionalidade para auxiliar na construção do conceito de função.

Com base nas análises das coleções C1, C2, C3 e C4, constatamos abordagens distintas para o conteúdo de Proporcionalidade. Comparando o ecossistema de cada uma das coleções, foi possível verificar uma mudança radical de uma estrutura ecológica linear para uma estrutura espiralada. Como as duas primeiras coleções foram de anos anteriores à existência dos PCN e, conseqüentemente, as duas últimas após, podemos verificar o impacto significativo dos PCN na inserção dos conteúdos. Regras e propriedades cedem lugar a situações que priorizam o desenvolvimento do raciocínio proporcional, levando o aluno a fazer mais observações e inferências, conforme orientam as diretrizes desse documento.

Observando o conteúdo das quatro coleções, foi possível verificar que conceitos como razão e proporção, grandezas diretamente e inversamente proporcionais, semelhança de triângulos e nos demais polígonos e o Teorema de Tales, estiveram presentes em todas as coleções. Já conceitos como terceira proporcional e quarta proporcional antes vistas nas coleções C1 e C2, desapareceram nas coleções C3 e C4. Isso nos faz indagar o seguinte: Será que esses conteúdos podem ser realmente omitidos do ensino sem nenhum dano ao ensino? Na coleção C3, sequer foi apresentada a Regra de Três Simples e Composta. Exercícios de regra de três composta, por exemplo, podem ser solucionados resolvendo duas ou mais regras de três simples. Embora seja um processo de resolução rápido, será que não poderá confundir o estudante e se tornar apenas uma regra que ele tentará aplicar a qualquer custo e nem sempre com

êxito? Esses e tantas outras indagações faz-nos questionar a imprescindibilidade de alguns conteúdos.

É nessa perspectiva que a presente pesquisa apoia-se, pois, assim, poderemos refletir sobre a importância ecológica de alguns saberes em detrimento de outros de tal modo a justificar a sobrevivência ou não de cada um deles no ensino atual.

É claro que nós, enquanto pesquisadores/professores, não podemos modificar o ensino como um todo, mas podemos participar desse processo. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) veio com esse intuito, trazendo uma proposta preliminar aberta a todos para que pudesse ser estudada por quem tivesse interesse e, posteriormente, modificada de acordo com as sugestões advindas das pessoas participantes nesse processo.

Diante de tantas transformações iminentes no ensino brasileiro como, por exemplo, a reforma do Ensino Médio e a inserção dessa base nacional comum curricular, fica em aberto a possibilidade de futuras pesquisas nesse âmbito, pois a reflexão e a seleção acertada a respeito do que deve ser de fato priorizado no ensino influencia diretamente na aprendizagem efetiva dos estudantes.

É necessário renovar o ensino e essa renovação somente é possível se houver uma constante reflexão sobre sua prática, assim como, com a associação do que está sendo ensinado com sua aplicabilidade. Atualizar, articular, modernizar e transformar o saber escolar faz-se imprescindível para que tenhamos sempre conceitos mais compreensíveis aos olhos de quem é o principal protagonista da escola, o estudante.

REFERÊNCIAS

ALVES FILHO, J.P. Regras da transposição didática aplicadas ao laboratório didático. **Cad. Cat. Ens. Fís.** Departamento de Física UFSC. Florianópolis, v.17, n. 2, p.174-188, ago.2000.

ARTAUD, M. Introduction à l'approche écologique du didactique, L'écologie des organisations mathématiques et didactiques. **Actes de la neuvième École d'Été de didactique des mathématiques.** Houlgate: Bailleul, 1998, p.101-139.

BIGODE, A.J.L. **Matemática Hoje é feita assim.** 5ª a 8ª série. 1. ed. São Paulo: FTD, 2000. (livro do professor)

BOTTA, L. S. **Números Racionais e Raciocínio Proporcional:** considerações sobre ensino-aprendizagem. Rio Claro, 1997. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) –Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PPGEM. Universidade Estadual Paulista, 1997.

BOYER, C. B. **História da Matemática.** Trad: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgar Blücher, 1974.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC / SEF, 1998. 148p.

CASTRUCCI; GIOVANNI. **A Conquista da Matemática:** teoria e aplicação, 5ª a 8ª série. 1. ed. São Paulo: FTD, 1985. (livro do professor.)

CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné.** Grénoble, France: La Pensée Sauvage, 1991.

CHEVALLARD, Y.; JOHSUA, M-A. Un exemple d'analyse de la transposition didactique – La notion de distance. **Recherches en Didactique des mathématiques.** 3.2, 157-239,1982.

COSTA Jr., J. R. **Atribuição de significado ao conceito de proporcionalidade:** contribuições da História da Matemática. 237 F. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2010.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática.** Trad: Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas: Unicamp, 2011.

FIOREZA, L. A. **Atividades digitais e a construção dos conceitos de proporcionalidade:** uma análise a partir da teoria dos campos conceituais. 240 f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010.

FLORA, M. J. S. **Matemática e cidadania:**O ensino da regra de três em uma classe do 2º ano do Ensino Médio noturno.2011. 149 f. Dissertação (Mestrado em Ciências da Educação) – Universidade Unigranrio, Duque de Caxias, 2011.

FREITAS, A. L. S.; MACHADO, M. E. Formação com educadores/as e os desafios da práxis da Educação Popular na Universidade. **Educação**, Porto Alegre, v. 33, n. 2, p. 137-144, maio/ago. 2010.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. Livro didático, Porcentagem, Proporcionalidade: uma crítica da crítica.**Revista Bolema**, Rio Claro, Ano 18, nº 24, 2005. p. 1 a 30.

_____. **Matemática:** Imenes e Lellis, 6º ao 9º ano: guia do professor. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2010.

LESH, R.; POST, T.; BEHR, M. (1988). Proportional reasoning. In: HIEBERT, J.; BEHR, M. (Eds.) **Number Concepts and Operations in the Middle Grades**. Trad. Ana Isabel Silvestre, Escola EB 2,3 de Fernão Lopes. Reston, VA: Lawrence Erlbaum & National Council of Teachers of Mathematics, 1988, p. 93-118.

LIMA, E. L.; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. **Temas e Problemas**. Rio de Janeiro: SBM, IMPA e VITAE, 2001. (Coleção do Professor de Matemática)

MACEDO, E. L. **Proporcionalidade à luz da Teoria dos Campos Conceituais:** uma sequência de ensino diferenciada para estudantes da EJA. 2012. 168 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2012.

MANZINI, E. J. A entrevista na pesquisa social. **Didática**, São Paulo, v. 26/27, p. 149-158, 1990/1991.

MAZZANTI, D. L. **Educação de Jovens e adultos:** Uma aplicação da regra de três e porcentagem em cálculos trabalhistas. 2008. 103 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

MEIRA, J. L. **Labirintos da compreensão de regras em Matemática:** um estudo a partir da regra de três. 2012. 99 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2012.

NETTO, S.D.P. **Matemática Scipione:** Conceitos e histórias, 5ª a 8ª série. 1. ed. São Paulo: Scipione, 1995. (livro do professor)

OLIVEIRA, I. Proporcionalidade: estratégias utilizadas na resolução de problemas por alunos do Ensino Fundamental no Quebec. **Revista Bolema**, Rio Claro, ano 22, n. 34, p. 57-80, 2009.

PINHEIRO, J. CABRITA, I. O desenvolvimento do raciocínio proporcional num ambiente dinâmico de geometria dinâmica: ressonância de um programa de formação contínua em matemática. **Indagatio Didactica**. Aveiro, v. 5(1), jul. 2013. Edição especial.

PONTES, M. G. O. **Medidas e Proporcionalidade na escola e no mundo do trabalho**. 1996. 223 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de Campinas, Campinas, 1996.

RODRIGUES, C. K. **O teorema central do limite: um estudo ecológico do saber e do didático**. 2009. 213 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012

SANTOS, J. R. S. **A ecologia de saberes na formação de professores**. 2012. 110 f. Dissertação (Mestrado em Educação)-Universidade Católica de Brasília, Brasília, 2012.

SAVELI, E. L. Ecologia de Saberes: O diálogo entre a universidade e a alfabetização de adultos. **Lectura y vida**, Buenos Aires, ano 31, n. 1, p. 68-77, mar. 2010.

SILVA, D. P. **Regra de três: prática escolar de modelagem matemática**. 2011. 85 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2011.

SILVA, L. C. **A prática de ensino de Física no Ensino Médio e o conceito de proporcionalidade: conexão fundamental na construção e (re) construção de conhecimentos**. 2009. 107 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2009.

TEIXEIRA, G. K. M. D. Mudanças de paradigmas e as possibilidades da sustentabilidade ambiental na sociedade de consumo: algumas reflexões teóricas. **Revista Desarrollo Local Sostenible**, Malaga, v. 6, n. 18, p. 1-9, out. 2013.

TRIVIÑOS, A. N. S. **Introdução à pesquisa em ciências sociais: a pesquisa qualitativa em educação**. São Paulo: Atlas, 1987.

