A MODELAGEM MATEMÁTICA COMO METODOLOGIA PARA O ESTUDO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Cleuza Eunice Pereira Brumano

Juiz de Fora (MG)

Outubro, 2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

CLEUZA EUNICE PEREIRA BRUMANO

A MODELAGEM MATEMÁTICA COMO METODOLOGIA PARA O ESTUDO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Orientador: Prof. Dr. Orestes Piermatei Filho

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Mestrado Profissional em Educação Matemática, da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

JUIZ DE FORA – MINAS GERAIS
Outubro, 2014

Cleuza Eunice Pereira Brumano

A MODELAGEM MATEMÁTICA COMO METODOLOGIA PARA O ENSINO DA ANÁLISE COMBINATÓRIA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Mestrado Profissional em Educação Matemática, da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Orestes Piermatei Filho
Orientador

Prof. Dr. Frederico da Silva Reis
Convidado externo UFJF

Prof. Dr. Amarildo Melchiades da Silva
Convidado interno UFJF

Dedico este trabalho à minha família
e aos amigos que sempre estiveram comigo
nesta caminhada.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me dado a possibilidade de vivenciar esta experiência e por estar sempre presente em minha vida, indicando os caminhos a serem tomados.

Aos meus pais Etelvino e Madalena, fonte de inspiração e minha fortaleza.

A Daniel e aos meus filhos Danielle, Larissa e Bruno, pelo incentivo e por acreditarem no sucesso deste desafio.

Ao amigo orientador Prof. Dr. Orestes Piermatei Filho, pelo incentivo, acolhida, amizade, paciência e principalmente pela confiança e responsabilidade em mim depositadas.

Aos professores do mestrado, pela competência, dedicação e pela forma harmoniosa, amigável e responsável de conduzir nossa formação.

À amiga de todas as horas Renata Pires Gonçalves, pelo estímulo, amizade e confiança.

Ao Paulo Tadeu Gandra Campos, pela amizade, companheirismo e por fazer com que nossas idas e vindas a Juiz de Fora se tornassem momentos agradáveis de encontro e troca de experiências.

À direção, professores e alunos do CAp/COLUNI-UFV, pela amizade e atenção.

Aos membros das bancas de qualificação e defesa pela dedicação, sugestões e desafios propostos.

À sobrinha Camila, à amiga Thaís Escobar, pela contribuição dada a esta dissertação.

A todos que contribuíram para este trabalho.

“No esforço para compreender a realidade, somos como um homem tentando entender o mecanismo de um relógio fechado. Ele vê o mostrador e os ponteiros, ouve o seu tique-taque, mas não tem meios para abrir a caixa. Se esse homem for habilidoso, poderá imaginar um mecanismo responsável pelos fatos que observa, mas nunca poderá ficar completamente seguro de que sua hipótese seja a única possível”.

(Albert Einstein)

RESUMO

O presente trabalho aborda a modelagem matemática como uma alternativa de ensino que se dá através de uma concepção que permite ao educador desenvolver uma busca pela interação proveniente da matemática contextualizada na realidade dos estudantes, e que prioriza a construção do conhecimento por parte do aluno. Dessa forma, os conteúdos matemáticos são estudados partindo-se de um tema sugerido pelos alunos, o que proporciona maior interação entre estes e o professor. Neste contexto, objetiva-se analisar a aplicação desta estratégia como uma proposta eficaz para favorecer o ensino de Análise Combinatória. O estudo aponta para a possibilidade de compreensão acerca deste conteúdo tomando-se como base as implicações obtidas em um grupo de quatro alunos da segunda série do Ensino Médio e, metodologicamente, utilizando-se da Modelagem Matemática para tal fim. Foi realizada uma pesquisa bibliográfica buscando identificar como a modelagem pode ser aplicada ao ensino da disciplina em questão. A abordagem de pesquisa adotada se caracteriza qualitativa e os dados foram coletados por meio de dispositivos de áudio/vídeo e anotações. As informações obtidas estão organizadas neste trabalho da seguinte forma: inicialmente, apresenta-se o conceito de modelo, modelagem e modelação matemática; em seguida, expõe-se sobre o ensino de Análise Combinatória e finalmente apresenta-se a pesquisa de campo com os devidos comentários e conclusões.

Palavras-chave: Modelagem Matemática, Análise Combinatória, ensino e aprendizagem de Matemática.

ABSTRACT

This paper addresses the mathematical modeling as an educational alternative through a conception that allows the educator to develop a search for the interaction from the contextualized mathematics on the students reality and that gives priority to the student knowledge construction. Thus the mathematical contents are studied starting from a topic suggested by students which provides greater interaction between them and the teacher. In this context, I aim to analyze the application of this strategy as an effective proposal to assist the teaching of the Combinatorial Analysis. The study indicates the possibility of understanding about this content taking as a basis the implications obtained in a group of four students from the second year of the high school, and methodologically, using Mathematical Modeling for that purpose. A bibliographical research was made seeking to identify how modeling can be applied to teach mathematics. The research approach adopted was qualitative and the data were collected through audio/video devices and notes. The information obtained are organized in this work as follow: at the beginning, we present the concept of model, modeling and mathematical modeling; then, we expose about the teaching of Combinatorial Analysis and finally we present the field research with the comments and conclusions.

Keywords: Mathematical Modeling, Combinatorial Analysis, Mathematics teaching and learning

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A presente pesquisa trata de abordar a modelagem matemática como uma alternativa de ensino que se dá através de uma concepção que permite ao educador desenvolver uma busca pela interação proveniente da matemática contextualizada na realidade dos estudantes, e que prioriza a construção do conhecimento por parte do aluno.

Para discuti-la iniciarei por minha trajetória acadêmica, que teve início em 1977, quando comecei o curso superior de Licenciatura em Ciências, me habilitando em 1979, para, posteriormente, complementar minha formação com Licenciatura Plena e Bacharelado em Matemática, na Universidade Federal de Viçosa. Ao concluir o curso em 1981, tive a oportunidade de ingressar como professora contratada na rede pública de ensino, atuando na Escola Estadual Dr. Raimundo Alves Torres e, posteriormente, na Escola Estadual Effie Rolfs, em Viçosa, além de trabalhar também no Colégio Normal Pe. Adalberto, em São Miguel do Anta, minha cidade natal. Foi a partir desse panorama que pude vivenciar experiências marcantes no âmbito da minha prática pedagógica, em contato com estudantes oriundos de diferentes realidades sociais e que possuíam distintos objetivos em relação à escola.

Após aprovação em dois concursos públicos da rede estadual, estabeleci-me como professora efetiva na Escola Estadual Dr. Raimundo Alves Torres (1980 a 1988) e posteriormente na Escola Estadual Effie Rolfs (1988 a 1994). As experiências adquiridas nestas escolas foram de extrema importância para meu crescimento profissional, principalmente no que se refere às atividades desenvolvidas nas turmas do turno noturno, cujos alunos vinham direto do trabalho para a escola. Esse processo de ensino-aprendizagem, mediante as peculiaridades que apresentava - alunos cansados após o trabalho, que demonstravam déficit de conteúdo e desinteresse pela matéria - demandou a adoção de metodologias específicas que instigassem e viabilizassem um aprendizado efetivo. Assim, o trabalho que passou a ser desenvolvido nessas turmas, durante todo o ano letivo, foi produtivo, visto que a aprendizagem em matemática se tornou mais consistente e significativa.

Almejando o ingresso na rede federal de ensino, em 1993 prestei concurso público para professora de matemática do Colégio de Aplicação da

Universidade Federal de Viçosa – CAp/COLUNI. Sendo aprovada, solicitei a exoneração dos meus cargos na rede estadual de ensino. Em fevereiro de 1994 tomei posse no cargo de Professora de Ensino Médio do CAp/COLUNI, onde atuo até a presente data.

O Coluni é um colégio de aplicação de nível médio, localizado no campus da Universidade Federal de Viçosa. Atende alunos da 1ª, 2ª e 3ª séries, distribuídos em quatro turmas por série com quarenta estudantes cada, totalizando, portanto, quatrocentos e oitenta alunos. O ingresso nesta escola se dá na primeira série do Ensino Médio por meio de um concorrido exame de seleção, popularmente conhecido como “Vestibulinho”. Tal concorrência se justifica pelo fato do colégio se destacar no cenário nacional, dada a sua classificação como uma das melhores escolas públicas do país segundo a avaliação do MEC, além das aprovações em universidades públicas concorridas e conceituadas. Seus alunos gozam dos mesmos direitos que os universitários da UFV: serviço de saúde, de alimentação, biblioteca com área exclusiva para o Ensino Médio, quadras de esportes, etc.

A experiência que vivencio no Coluni difere em alguns aspectos daquela vivenciada na rede estadual, tanto no que se refere às práticas pedagógicas, quanto no que diz respeito ao regime de trabalho. Atualmente, trabalho no regime de dedicação exclusiva, e tenho a oportunidade de atuar nas três séries, uma vez que nós, professores, promovemos um rodízio a cada dois anos na distribuição das turmas. Assim, me foi possível vivenciar as particularidades de cada série e as várias etapas de ensino, o que auxilia a consolidar minhas vivências, experiências e aprendizados.

Com uma sistemática de trabalho diferenciada, o Coluni recebe estagiários dos cursos de licenciatura da Universidade Federal de Viçosa, que são orientados pelos professores do colégio, juntamente com a coordenação do respectivo curso durante toda a atuação na instituição. Durante a orientação dos estagiários do curso de Licenciatura em Matemática, estabelecem-se metas e objetivos a serem alcançados e traçam-se as diretrizes para as intervenções, que serão necessárias para a melhoria do ensino e aprendizagem, tanto do estagiário, quanto do aluno do CAp/COLUNI.

Meu primeiro contato com a pesquisa em Educação Matemática se deu em 1998, quando fui convidada pelo Prof. Rodolfo Chaves, mestre e doutor em

Educação Matemática pela UNESP de Rio Claro, a participar do Grupo de Pesquisa-Ação em Educação Matemática da UFV – GPAEM/UFV – vinculado ao Núcleo de Ensino Integrado de Ciências e Matemática – NEICIM.

Esse foi um período fértil de produção acadêmica, onde pude interagir com outros professores de matemática no processo de discussão, avaliação, elaboração, e produção de materiais didático-pedagógicos. Além da produção desses materiais, tive a oportunidade de quebrar o paradigma da introspecção na elaboração das minhas aulas e procedimentos de ensino, visto que, no GPAEM, compartilhávamos todos os materiais produzidos, os quais eram utilizados nas salas de aula do colégio em que eu atuava, com o auxílio de alunos estagiários do Curso de Licenciatura em Matemática da UFV. Esse processo de interação – aluno, licenciando, professores – foi providencial para que se pudesse mudar o caráter das próprias práticas, não apenas como docente do Colégio de Aplicação – CAp/COLUNI/UFV –, mas também para exercer de forma participativa e interativa a função de formadora de novos professores de matemática.

A experiência adquirida ao atuar nas três séries do Ensino Médio me instiga a refletir e questionar, em particular, sobre o ensino e a aprendizagem do conteúdo de Análise Combinatória. Percebe-se que muitos alunos apresentam dificuldades no aprendizado da matemática, principalmente no que se refere a esse conteúdo específico. Embora trabalhando em regime de dedicação exclusiva - o que oportuniza o atendimento ao aluno extraturno - não é possível, muitas vezes, sanar todas as dificuldades apresentadas pelos estudantes.

Questões como essas incentivam minhas reflexões e compõem um objetivo pessoal de realizar estudos e estabelecer práticas que possibilitem a melhoria da minha atuação docente. Sentindo-me inquietada com o problema de aprendizagem em sala de aula, comecei a procurar leituras que me proporcionassem a "construção" de uma postura reflexiva da minha própria prática pedagógica. Nesse processo, percebi que as leituras não esgotavam a minha busca, e, ao tomar conhecimento do Mestrado Profissional em Educação Matemática, da Universidade Federal de Juiz de Fora, passei a vislumbrar uma oportunidade para o aperfeiçoamento, tendo como propósito a busca de uma metodologia que contribuísse para a melhoria do ensino e da aprendizagem em matemática. Fiz, então, a inscrição e fui aprovada no processo seletivo para admissão no Mestrado Profissional em Educação Matemática da UFJF, em 2012. Mediante meu objetivo pessoal, solicitei a redução da minha carga horária de trabalho para que fosse possível a busca desse aperfeiçoamento que, a meu ver, é indispensável por garantir um aprofundamento na formação científica e profissional, ampliando e enriquecendo minha prática docente, e contribuindo assim para meu aprimoramento acadêmico.

A escolha por realizar este trabalho tem como ponto de partida minha experiência como professora de Matemática do Ensino Médio em uma escola de ensino propedêutico. O ingresso de alunos nessa escola se dá por meio de um exame de seleção cuja concorrência se compara com a de cursos de alta demanda nas universidades. Essa busca competitiva por vagas faz com que somente os alunos "mais bem preparados" tenham sucesso e ingressem na escola, objetivando um concorrido curso superior na posteridade. Nos últimos anos, porém, percebe-se uma mudança no perfil desses alunos, principalmente após a implantação das políticas públicas para a educação, nas quais se direcionou um percentual da nota no exame (correspondente a 15% do valor) para alunos oriundos de escolas públicas. Essa mudança de perfil dos alunos já tinha sido registrada por Mello, quando afirma que:

> Estatísticas e indicadores educacionais recentes mostram que, a cada ano, estão chegando ao nível médio, alunos pertencentes às camadas mais baixas da população. Para o jovem de origem popular, ingressar no ensino superior é apenas parte de um projeto de vida muito mais complexo e acidentado que o do jovem de classe média ou alta. Tais características colocam em questão o ensino médio propedêutico, voltado apenas para o vestibular (MELLO, 1998, p.1-2).

Reportando às diversas reformas pelas quais se passou e passa a educação brasileira, é possível considerar, portanto, que já houve um período de grande expansão do Ensino Fundamental (1985 a 1995), quando se estendeu para a maioria um ensino programado para uma minoria, o que acarretou grande fracasso no âmbito escolar.

Assim, para não recair nesse problema, se faz necessário adotar medidas que permitam à escola pública, gratuita e de qualidade, acolher e manter com sucesso o novo alunado que começa a chegar ao Ensino Médio, fornecendo-lhes condições de suprirem déficits e competirem em iguais condições com os demais alunos. Entendo que o desafio proporcionado com esse novo tipo de aluno nas escolas propedêuticas é um obstáculo a ser vencido, e, no que diz respeito aos conteúdos de Matemática, acredito que tais obstáculos só serão transpassados com mudanças de atitudes e de procedimentos metodológicos em sala de aula.

Esses pontos de vista corroboram a Lei 9394/96 (LDB), que fixa as *Diretrizes e Base da Educação Nacional*, ao estabelecer o Ensino Médio como etapa final da educação básica, atribuindo a esse nível de ensino, portanto, um sentido muito mais amplo do que o acadêmico-propedêutico, uma vez que, além de preparar para continuar os estudos em nível profissional ou superior, também deve dar conta das competências sociais e cognitivas necessárias para o aluno seguir aprendendo, convivendo, produzindo e definindo uma identidade própria. Sendo assim, é necessário refletir constantemente sobre a forma como os alunos estão aprendendo Matemática, e o que é possível fazer para melhorar o aprendizado.

Tal reflexão leva em consideração toda minha história de atuação como professora do Ensino Médio. Tendo atuado nas três séries desse nível de ensino durante vários anos, é fácil perceber, com base no cotidiano da sala de aula (e também observando o baixo “rendimento” dos alunos nas avaliações) que, de forma geral, o conteúdo no qual os alunos apresentam maior dificuldade de compreensão e entendimento é o de Análise Combinatória, que está inserido no programa analítico de Matemática, na segunda série do Ensino Médio no CAp/COLUNI.

Nos últimos anos, com a mudança no perfil dos alunos - que deixa de ser um “público” selecionado social e culturalmente -, percebe-se que a dificuldade no conteúdo em questão tem aumentado, o que se verifica por meio de conversas com os alunos, professores e análise dos resultados obtidos nas avaliações, comparados com os resultados de anos anteriores. Dessa forma, diante da percepção das dificuldades de aprendizagem e de resolução de problemas combinatórios, e constatando a mudança de perfil dos alunos dessa escola pública, despertei o interesse em desenvolver este trabalho.

Com o pensamento já voltado para ao objeto da pesquisa, no início do ano letivo de 2013, propus aos alunos da 3ª série que redigissem um memorial e nele descrevessem as principais dificuldades encontradas quando estudaram Análise Combinatória na segunda série. Alguns fragmentos desses relatos estão transcritos a seguir:

> [...] matéria que exigiu uma dedicação maior inclusive pela necessidade de interpretação das questões (A1).
> [...] não conseguia compreender quando é que tinha que usar arranjo ou permutação (A2).
> [...] não tive afinidade com a matéria e até hoje tenho dificuldade (A3).
> [...] dificuldade de aprender a matéria e ainda hoje quando me deparo com atividades que precisam dessa matéria tenho grandes problemas (A4).
> [...] tive dificuldade em encontrar ocupação prática para tal matéria. É difícil encontrar utilização dela em minha vida fora da escola e no futuro em minha profissão (A5).

Estes relatos, dentre muitos outros, consolidam a relevância deste trabalho na tentativa de proporcionar uma aprendizagem mais consistente, por entender que o ensino tradicional e propedêutico concentra-se na “transmissão” de conteúdos para o aluno de forma não sistemática, onde, na maioria das vezes, utiliza-se a memorização ou a “decoreba” como método de aprendizagem - fato que acarreta a dificuldade para que os conhecimentos adquiridos possam ser aplicados na vida real. Acredito que esta é, portanto, uma das causas das dificuldades dos alunos, que, consequentemente, leva ao baixo rendimento escolar e ao desinteresse pela disciplina.

No que se refere à Análise Combinatória, acredito que sua aprendizagem sempre se mostrou como um obstáculo aos alunos, devido ao modo como se aborda o conteúdo em sala - geralmente, de forma mecânica, não possibilitando a compreensão dos conceitos.

A escolha da Modelagem Matemática como uma metodologia de ensino, capaz de despertar o interesse e o espírito crítico do aluno pela matemática se justifica por ser constituída de um conjunto de procedimentos cujo objetivo está na construção de um modelo mais concreto que torna possível analisar matematicamente os fenômenos que ocorrem no cotidiano, ajudando a interpretar, fazer previsões e tomar decisões, sendo, portanto um recurso de grande potencial, uma vez que explora a intuição e a criatividade do aluno, levando à compreensão dos conceitos.

Dessa forma, o desenvolvimento desta pesquisa se baseia na necessidade da busca de metodologias que possibilitem uma relação mais estreita entre os alunos e a matemática, em especial, com o conteúdo de Análise Combinatória, de modo que essas possam minimizar as dificuldades encontradas pelos estudantes na aprendizagem e resolução de problemas combinatórios.

Acredita-se que o alto índice de reprovação nesse conteúdo pode estar ligado à utilização da forma de ensino tradicional, uma vez que, o ambiente de aprendizagem onde se desenvolve o Ensino Tradicional de Matemática (ETM) ou o paradigma do exercício (conforme Skovsmose (2000) e Chaves (2004)) pouco tem contribuído para a aprendizagem dos alunos ao se trabalhar, por exemplo, o conteúdo de Análise Combinatória.

Nesse sentido, a pesquisa que aqui se pretende realizar leva em conta o desenvolvimento de outras formas de ensino e de aprendizagem que utilizem a modelagem matemática no estudo da Análise Combinatória. Para tanto, assumiremos, a partir deste momento textual, o discurso plural com o intuito de elucidar as vozes que compõem o processo de pesquisa – o tom necessário e conveniente para a construção do pensamento acadêmico sobre Educação, que deve ser, de igual modo, múltiplo. Pretendemos, pois, que este estudo possa contribuir para os professores do Ensino Médio de maneira que possam buscar na modelagem matemática uma alternativa metodológica capaz de quebrar o paradigma do ensino tradicional vigente - onde o professor é o único responsável por ensinar (ou o único detentor do conhecimento), enquanto que cabe ao aluno somente aprender (receber, apenas) - fazendo com que o estudante seja sujeito de sua aprendizagem bem como melhorar a interação desses com a matemática, em especial com a Análise Combinatória, e com o professor.

O objetivo geral desta pesquisa consiste, portanto, em apresentar situações reais que possam ser compreendidas e/ou resolvidas utilizando-se a

Análise Combinatória de forma que os estudantes atribuam significações ao seu uso mediante a contextualização. A apresentação dessas situações reais, voltadas ao cotidiano dos alunos, tem por finalidade investigar temas da realidade discente com autonomia e criatividade.

Entendemos que a investigação é primordial para que situações sejam levantadas e resolvidas, despertando nos alunos o senso crítico e a percepção acerca de questões que vão além da sala de aula. Assim, a questão norteadora desta pesquisa centra-se em: como a modelagem matemática pode contribuir para a contextualização da matemática no cotidiano dos alunos, de modo que eles possam encontrar significações nos conceitos da Análise Combinatória?

Para isso, a Modelagem Matemática será utilizada como principal metodologia empregada na busca pela interação entre professores e alunos.

Na procura por um aprofundamento teórico a respeito das concepções de Modelagem Matemática, encontramos muitos estudiosos da Educação Matemática que continuam suas pesquisas também em busca da construção de um conceito para o assunto, cuja introdução no Brasil se deu por volta da década de 1970. Segundo Biembengut (2009), no país, um dos primeiros precursores da introdução de Modelagem Matemática em suas aulas de cálculo diferencial e integral foi o Professor Aristides Camargo Barreto, da PUC do Rio de Janeiro, na década de 1970 a 1980, seguido pelo Professor Rodney Bassanezi, da Unicamp de Campinas; a autora comenta:

> A modelagem matemática na educação brasileira tem como referência singulares pessoas, fundamentais no impulso e na consolidação da modelagem na Educação Matemática, tais como: Aristides C. Barreto, Ubiratan D' Ambrosio, Rodney C. Bassanezi, João Frederico Mayer, Marineuza Gazzetta e Eduardo Sebastiani, que iniciaram um movimento pela modelagem no final dos anos 1970 e início dos anos 1980, conquistando adeptos por todo o Brasil. Graças a esses precursores, discussões desde como se faz um modelo matemático e como se ensina matemática ao mesmo tempo permitiram emergir a linha de pesquisa de modelagem matemática no ensino brasileiro (BIEMBENGUT, 2009, p. 8).

Como observa Biembengut, Aristides Camargo Barreto, D'Ambrosio, Bassanezi, Mayer, Gazzetta e Sebastiani foram pensadores fundamentais no impulso e na consolidação da Modelagem na Educação Matemática.

Nesse sentido, procedemos, a seguir, à leitura e consideração de algumas concepções de modelo e modelagem matemática, enfatizando-se os pensamentos de alguns autores que trabalham com essa tendência, entre os quais se encontram, com colocações pertinentes, Bassanezi (2002) e Bean (2001, 2007, 2009), que apontam para o caráter exploratório pelos alunos. O primeiro autor, com uma percepção própria a cerca do modelo, explica-o como uma linguagem clara e sem ambiguidades; o segundo classifica modelos como criações humanas e, por isso, totalmente passíveis de situações cotidianas. Ambos ratificam, todavia, a propriedade interativa presente na concepção de Modelo e Modelagem Matemática, transmitindo assim, a contextualização de situações que remetam os alunos ao questionamento, à aprendizagem e à utilização dos ensinamentos em seu dia-a-dia.

Centrando-nos de igual modo na busca pelos conceitos de Análise Combinatória, este trabalho aponta os vários mecanismos para se alcançar a prática da modelagem, direcionando para os principais passos de sua realização. Nessa perspectiva, serão apresentadas e discutidas as teorias e trabalhos que guiam a aplicação e defendem a Modelagem Matemática. Serão destacadas as etapas sugeridas por Burak (2004) para o encaminhamento de atividades envolvendo a modelagem, etapas estas que embasarão a Pesquisa de Campo.

A pesquisa que pretendemos tem como foco a Modelagem Matemática aplicada ao ensino de Análise Combinatória. Apresentaremos, para discussão dessa metodologia proposta, as atividades a serem desenvolvidas com alunos voluntários da segunda série do Ensino Médio de uma escola pública da cidade de Viçosa-MG.

O tema será escolhido pelos alunos e, na sequência, estes farão uma pesquisa sobre o mesmo, na qual buscarão situações matemáticas para serem analisadas e exploradas na Pesquisa de Campo. Com isso, espera-se o surgimento de indagações e a busca de uma associação das mesmas com o programa de matemática oferecido pelos livros didáticos, especialmente com o conteúdo de Análise Combinatória. Além das questões levantadas pelos alunos, a pesquisa pretende despertar nesses sujeitos algumas curiosidades ligadas ao tema que, embora não estejam relacionadas com o objeto específico da pesquisa, são interessantes para a formação discente.

Para descrever o trabalho de campo, serão apresentadas as transcrições dos encontros da pesquisadora com os alunos, onde se procurará demonstrar as implicações que levam ao surgimento de variadas questões dentro da matemática. Em seguida, será demonstrada a realização das tarefas pelos próprios alunos, tendo como objetivo a construção de modelos que possam responder às suas inquietações e anseios.

A experiência de campo será de suma importância para a compreensão da necessidade de interação - requisito básico para o desenvolvimento de práticas que, como a modelagem matemática, poderão garantir ao professor aplicar as mais variadas questões ao invés de contentar-se com repetições - abrindo assim espaço para as inovações.

Considerando a Modelagem Matemática como uma alternativa pedagógica, esta pesquisa tem como objetivo proporcionar ao aluno uma aprendizagem consistente e conhecimento reflexivo acerca do conteúdo de Análise Combinatória, procurando estabelecer uma relação entre a matemática dos programas escolares e a realidade do estudante.

A abordagem qualitativa norteou esta pesquisa, que será fundamentada em algumas obras as quais tratam a Modelagem Matemática como uma alternativa pedagógica na condução do processo de ensino e aprendizagem em cursos regulares, tais como D'Ambrósio (2002), Bassanezi (2002), Skovsmose (1990) e Chaves; Lorenzoni (2010). A seguir, apresentaremos, em caráter descritivo, algumas das concepções norteadoras deste estudo, que, posteriormente, serão discutidas no andamento da pesquisa.

Segundo D'Ambrosio:

- o ciclo de aquisição do conhecimento da matemática pode ser mais eficiente se emergir de fenômenos que têm origem na realidade.
- Ao se referir a Matemática nas escolas, ele diz que o maior desafio dos matemáticos e educadores matemáticos é "fazer uma matemática integrada no pensamento e no mundo moderno" e aponta a Modelagem Matemática como um caminho para contribuir para o enfrentamento deste desafio (2002, p. 30).

Segundo Bassanezi:

- A Modelagem aplicada ao ensino pode ser um caminho para despertar maior interesse, ampliar o conhecimento do aluno e auxiliar na estruturação de sua maneira de pensar e agir.
- Ao sugerir a Modelagem Matemática em cursos regulares, fala sobre a necessidade de “procurar um equilíbrio harmonioso entre a teoria e a prática, mostrando o valor intrínseco da Matemática, assim como sua plasticidade e beleza, enquanto ferramenta para o entendimento de outras áreas do conhecimento” (2002)

Segundo Skovsmose:

- Chama de conhecimento Reflexivo a capacidade que o aluno deve ter de interpretar e agir numa situação social e política e estruturada pela matemática.
- Afirma que “em um processo de Modelagem Matemática, ocorre uma transição entre linguagens diferentes” (1990).

Para Chaves; Lorenzoni:

- é uma oportunidade de promover uma ação política em um processo educacional cuja sistematização de propostas possa interferir em um problema local e, a partir daí, é possível promover duas linhas de ação: uma voltada à identificação dos principais problemas, realizando projeções futuras, e outra à implementação de propostas que altere o quadro vigente via ambiente escolar. Dessa forma as estratégias vão além da vertente do ensino, tornando-se de intervenção em questões locais que passam pela pertinência da análise das práticas do aluno no ambiente de Modelagem (2010, p. 3)

- [...] não significa que a Matemática necessite da interação com o social ou o cotidiano para o desenvolvimento. [...] a Matemática pode ser tomada como uma ferramenta ao engajamento, à contextualização e à criticidade. A modelagem é um processo que usa a Matemática para quebra da inércia daquilo que Skovsmose (2000, Passim) classificou como paradigma do exercício – ambiente de aprendizagem onde o expositivismo professoral é o principal dispositivo de controle daquilo que conhecemos como Ensino Tradicional de Matemática (ETM), onde o conteúdo programático é o elemento central. Caracteriza-se por seguir uma programação curricular rígida que se põe à frente do processo (2010, p. 4)

- Adversidades surgem na tentativa de se implementar Práticas Educacionais Investigativas (PEI) que tomam a Modelagem como procedimento metodológico. Essas são consequências dos efeitos que as mesmas produzem por desestabilizarem a ordem escolar vigente (mantenedora da ETM). As interferências produzidas por PEI, que tomam a Modelagem como ferramenta, não se restringem às intervenções locais ou ao desenvolvimento de projetos ou do raciocínio lógico-dedutivo. Mais do que isso, levam os alunos e professores à reflexão, por exemplo, a respeito do papel do professor como agente multiplicador de ideias e verdades que não necessariamente são as suas (2010, p.5)

- Uma PEI, segundo meu constructo teórico, é uma estratégia política enquanto a Modelagem é uma tática. Isto é, a Modelagem é um instrumento que faculta a execução de PEI. Isso porque entendo estratégia como uma armadilha e uma tática como uma ação para atingir tal armadilha. (2010, p. 8)

- A Modelagem é uma ferramenta à implantação da uma PEI e esta é um dispositivo de desestabilização da inércia mantenedora do ETM que tem como dispositivo de controle o paradigma do exercício (2010, p. 8).

2 MÉTODOS E PROCEDIMENTOS DA PESQUISA

Neste capítulo faremos a descrição dos métodos e procedimentos a que recorreremos para desenvolver a pesquisa. Nesse sentido, caracterizaremos o estudo e descreveremos algumas medidas para a confecção do texto dissertativo. Os procedimentos metodológicos da atividade de campo seguirão, em capítulo à parte.

Para a realização desta pesquisa, valemo-nos de um percurso metodológico, que traçamos a seguir: foram selecionados alunos da segunda série de uma escola pública da cidade de Viçosa por meio de participação voluntária, a convite da professora orientadora da pesquisa exploratória e das atividades de campo.

Para atingirmos os objetivos propostos nesta pesquisa, em primeiro lugar, buscamos uma teorização através de fichamentos e pesquisas bibliográficas, para se explicitarem os conceitos e pressupostos das referidas vertentes teóricas citadas neste trabalho a respeito dos temas Modelo e Modelagem Matemática e Análise Combinatória.

Nossa fonte de coleta de dados foi a realização de encontros e entrevistas aos integrantes da pesquisa, bem como a prática de visitas ao local definido como ponto de experimentação ou observação para o estudo em questão.

Com objetivo de traçar o perfil dos alunos participantes da pesquisa, dentre outras coisas, em um primeiro momento aplicou-se um questionário composto de dez questões que nos auxiliarão em nossas análises e conclusões. Dando sequência a este trabalho, nos reunimos diversas vezes, num total de oito encontros, onde foram propostas ações a serem desenvolvidas, bem como realizada a discussão dos dados observados e levantados, os quais foram anotados pelos alunos.

Depois de todos os dados coletados e tabulados, prosseguimos com as análises e concomitante confecção do texto dissertativo, tendo como referência autores como Burack(2004 e 2010), Biembengut (1999 e 2004), Barbosa (2001 e 2003), Chaves (2001 e 2004), e Dean (2001 e 2007).

Dessa forma, realizamos uma análise predominantemente qualitativa dos dados levantados, tendo em vista os aspectos dinâmicos e subjetivos a partir dos quais os estudantes concebem A Modelagem Matemática e a Análise Combinatória. Para realizar o estudo acerca dessas práticas, explicitando os principais desafios e as diferentes concepções, estruturamos esta dissertação em sete partes.

Inicialmente, apresentamos no Capítulo 1 a trajetória profissional, relatando experiências e dificuldades encontradas, bem como as indagações e reflexões que nos conduziram à problemática e à questão da pesquisa. Abordamos a metodologia utilizada assim como o mecanismo de coleta de dados.

No segundo momento do texto, o Capítulo 2, apresentamos a descrição dos métodos e procedimentos a que recorremos para desenvolver a pesquisa. Caracterizamos o estudo e descrevemos algumas medidas para a confecção do texto dissertativo.

No Capítulo 3 abordaremos os conceitos de Modelo e de Modelagem Matemática, além de propormos algumas reflexões a respeito de Modelagem Matemática em relação à Educação Matemática Crítica, ao currículo e à construção de Modelos. Abordaremos também a Corrente Sociocrítica e seus desafios, discorreremos sobre a Modelagem como uma possibilidade de ruptura com o currículo linear, e sua aplicação como prática em sala de aula.

No Capítulo 4 apresentaremos o objeto matemático – Análise Combinatória –, e como este se encontra inserido na Educação Brasileira, na Educação Matemática Brasileira, no Ensino Tradicional Vigente, nos PCNs e nos livros didáticos.

No Capítulo 5 descreveremos como será desenvolvida a atividade de campo e quais fundamentações teóricas darão suporte a este desenvolvimento.

No Capítulo 6 descreveremos o trabalho de campo, perpassando pela metodologia, pelo cenário de investigação, pela descrição dos encontros, conclusões dos participantes e algumas interpretações. O Capítulo 6 apresentará também as considerações finais, onde procuramos responder à questão norteadora da pesquisa.

A pesquisa de campo será baseada e sustentada pelas cinco etapas mencionadas por Burak (2010): escolha do tema, pesquisa exploratória, levantamento dos problemas, resolução dos mesmos e o desenvolvimento da matemática relacionada ao tema e análise crítica das soluções.

Para a realização deste estudo, elegemos a pesquisa Exploratória como vertente orientadora do processo de confecção de toda a atividade. Dessa forma, de acordo com Burak (2010), a pesquisa exploratória deve acontecer de forma natural, orientada pelo simples desejo dos alunos em conhecer melhor o assunto. Para tanto, este estudo terá como “pano de fundo” um restaurante conhecido e frequentado pelos alunos envolvidos no processo.

> Conhecer mais sobre o tema, buscar informações no local onde se localiza o interesse do grupo de pessoas envolvidas, além de se constituir em uma das premissas para o trabalho nessa visão de Modelagem é uma etapa importante na formação de um estudante mais crítico (BURAK, 2010. p. 21).

Assim, antecedendo à visita ao restaurante, por meio de conversa informal e de debate com os alunos, serão definidos alguns pontos que nortearão os mesmos para a coleta de dados e informações. A proposta para esta conversa informal tem como objetivos o levantamento de questões sobre o tema, a realização de uma pesquisa para que se possa familiarizar com o tema escolhido e a elaboração de uma entrevista com pessoa especializada no assunto afim de que seja realizada a coleta de dados que possam propiciar novas questões. Tal planejamento de ações vai ao encontro do que pontua Biembengut:

> Assim o professor propõe que cada grupo:
> - levante questões sobre o tema;
> - faça uma pesquisa (levantamento de dados) a fim de se familiarizar com o tema escolhido;
> - entreviste um especialista no assunto, em momento adequado e se for conveniente. Os dados levantados propiciarão outras questões (BIEMBENGUT, 1999, p. 38).

Em um primeiro momento, a pesquisadora lança o assunto “restaurante *self service*” para verificar os questionamentos produzidos pelos estudantes, assumindo assim o papel de mediadora da dinâmica. Uma possível questão norteadora pode ser a proposta de discussão acerca do que seja um bom restaurante. Pode-se, por meio deste “mote”, observar em que momento a matemática aparece na fala dos alunos, e a pesquisadora pode citar algumas questões para orientá-los, pois o objetivo é trabalhar a Análise Combinatória e bem como outros conteúdos que possam surgir utilizando dados reais obtidos pelos estudantes nesse restaurante.

Algumas questões que podem ser sugeridas pelo pesquisador:

- O que é um bom restaurante *self service* para você?
- De acordo com seu gosto, como você montaria seu prato?
- Como é calculado o preço do quilo de comida?
- O que é uma boa refeição?
- Que opções você tem para servir seu prato?
- Quais as opções de sobremesa?
- Quais as opções de suco e de refrigerantes?
- Que destino é dado à sobra de comida dos pratos?
- Que destino é dado aos alimentos que não foram consumidos?
- Quantos funcionários existem no estabelecimento?
- Qual a despesa mensal com funcionários e aluguel?
- Qual a despesa média mensal com a compra de ingredientes?
- Que tipo de alimento é mais consumido no restaurante?
- Quantos quilos de alimento são vendidos em uma semana? (em média)
- De onde o restaurante adquire os produtos que são consumidos?

Os alunos, estando motivados e envolvidos na pesquisa, farão questionamentos pertinentes ao estudo proposto, pois conforme Burak afirma: “essa etapa possibilita a formação de um estudante mais atento, mais sensível às questões do seu objeto de estudo” (BURAK, 2010, p. 21). Após o levantamento das questões a serem investigadas no restaurante, a pesquisadora poderá fazer algumas perguntas direcionadas, para conhecer a maturidade matemática dos sujeitos de pesquisa. Como por exemplo: o que poderia ser feito, através da Matemática, para se estudar o problema da contagem? Em quais momentos no restaurante você percebeu a Matemática?

Qual a melhor maneira para registrar as diversas opções para se servir? Pode-se sugerir uma coleta de informações em forma de anotações ou completando uma tabela pré-elaborada para facilitar a observação das diferentes possibilidades ou diferentes opções para se servir.

Assim, o almoço, agendado em certo dia em um restaurante previamente selecionado (conforme opção dos alunos), poderá possibilitar o estudo de diferentes temas, como o valor nutricional dos alimentos, alimentação balanceada, preços do quilo de alimento, quantidade e qualidade de alimentos necessários para elaboração de um cardápio, obtenção de lucro ou prejuízo conforme o número de frequentadores do restaurante, diversas opções de se servir neste restaurante, opções de rodízios de funcionários que estão capacitados para assumir funções diferenciadas, dentre outros aspetos.

3 A MODELAGEM

Neste capítulo abordaremos os conceitos de Modelo e de Modelagem Matemática com o auxílio de definições dadas por teóricos e estudiosos da Educação Matemática global, focalizando, direcionadamente, o cenário nacional da Educação Matemática Brasileira. Proporemos, de igual modo, algumas reflexões a respeito de Modelagem Matemática em relação à Educação Matemática Crítica, ao currículo e à construção de Modelos. Para tanto, abordaremos a Corrente Sociocrítica e seus desafios, a Modelagem como uma possibilidade de ruptura com o currículo linear, e sua aplicação como prática em sala de aula.

3.1 **Modelo Matemático**

Para entendermos o conceito de modelo matemático podemos fazer uma análise de algumas definições dadas por estudiosos da Educação Matemática.

> modelo matemático é qualquer representação matemática de situação em estudo (BARBOSA, 2007, p. 161).
>
> um modelo pode ser formulado em termos familiares, utilizando-se expressões numéricas ou fórmulas, diagramas, gráficos ou representações geométricas, equações algébricas, tabelas, programas computacionais, etc (BIEMBENGUT e HEIN, 2005, apud ABREU, 2011, p. 19).
>
> um modelo matemático é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado (BASSANEZI, 2002, apud JUNIOR p. 24).
>
> um conjunto de símbolos e relações matemáticas que procura traduzir, de alguma forma, um fenômeno em questão ou problema de situação real (BIEMBENGUT, 1999, p. 19).

De acordo com o objeto de estudo desta pesquisa, podemos citar como exemplos de modelo matemático as fórmulas de arranjo simples, combinação e permutação:

$$A_{n,p} = \frac{n\,!}{(n-p)!} \quad ; \quad C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad ; \quad P_n = n!$$

Segundo Biembengut, a Modelagem Matemática é um processo cujo fim visa a obtenção de um modelo. Neste processo, a matemática e a realidade são vistas como dois conjuntos disjuntos e a Modelagem Matemática é um meio de fazê-las interagir.

A autora esclarece que o processo de modelagem requer uma sequência de procedimentos imprescindíveis para a elaboração de um modelo matemático e que tais procedimentos podem ser agrupados em três etapas:

> 1ª etapa: Inteiração
> - reconhecimento da situação-problema → delimitação do problema
> - familiarização com o assunto a ser modelado → referencial teórico
> 2ª etapa: Matematização
> - formulação do problema → hipótese;
> - formulação do modelo matemático → desenvolvimento
> - resolução do problema a partir do modelo → aplicação
> 3ª etapa: Modelo matemático
> - interpretação da solução;
> - validação do modelo → uso (BIEMBENGUT, 2004, p. 17).

Na primeira etapa, o aluno fará um estudo sobre o assunto de modo indireto (por meio de livros, revistas, etc) ou direto (por meio de experiência de campo, de dados obtidos junto a especialistas da área, etc). O reconhecimento da situação-problema, bem como a familiarização com o assunto a ser modelado, tem como objetivo a busca da clareza com o que se vai trabalhar.

A segunda etapa é mais complexa e desafiará o aluno, exigindo dele lógica para deduções, domínio algébrico ou geométrico, para que possa, com rigor matemático, elaborar o modelo identificando as constantes e variáveis envolvidas e selecionando os símbolos apropriados para essas variáveis. Tal procedimento tem como objetivo encontrar alguma equação algébrica ou algum tipo de representação geométrica que permita a resolução da situação-problema. Nessa etapa, a situação-problema é traduzida para a linguagem matemática.

Após a elaboração do modelo, passa-se para a terceira etapa que consiste na interpretação e validação do mesmo através de sua aplicação em diferentes contextos dentro do assunto estudado. Contudo, é importante não se perder de vista que “o processo de modelagem requer do modelador, além do talento para a pesquisa, conhecimento matemático e capacidade de fazer leitura do fenômeno sob ótica matemática” (Biembengut, 2004, p. 17), e também que o uso da modelagem como instrumento de um processo de aprendizagem permite ao aluno construir o significado do conceito que lhe é apresentado: cabe a ele reconhecer e selecionar as características do fenômeno que são pertinentes ao modelo. Com isto, o estudante estará apto a reconhecer essas características em outros fenômenos possíveis de serem representados por um mesmo modelo.

3.2 **A Modelagem Matemática nas concepções de alguns pesquisadores**

Na concepção de Bean (2007), o trabalho com Modelagem Matemática está baseado em premissas e pressupostos que configuram um processo norteado pelo objetivo da transformação da realidade. Por meio do processo de modelagem, os modelos são construídos e sofrem modificações para se adaptarem à realidade dos alunos, sendo a motivação e a compreensão de conteúdos matemáticos os alicerces desse processo. Bean concebe a Matemática Aplicada como um ponto de partida para descrever o processo de modelar e, quanto à fundamentação epistemológica vigente do processo afirma:

> Atualmente, a base filosófica que serve como pano de fundo para compreender o que é modelagem matemática é o realismo representacionista. Sob esta ótica, os modelos representam ou espelham a Realidade que, por sua vez, é concebida como única e exterior ao ser humano. É uma realidade da qual, em princípio, o ser

> humano pode se aproximar com seus modelos (BEAN, 2007, p. 36-37).

O estudioso complementa ainda: “a modelagem se caracteriza pela construção de novos modelos para situações onde os modelos vigentes não se adéquam aos fenômenos, sob a luz dos objetivos do modelador” (BEAN, 2007, p. 39).

Quanto à reprodução da realidade, o autor afirma que:

> Entendo, por reprodução da realidade, a continuidade das atividades de uma comunidade, de maneira que sua interação com o mundo seja norteada por conceituações e modelos que se fundamentam nas premissas e hipóteses tradicionais da comunidade. E, por transformação da realidade, entendo que as atividades da comunidade se transformam, de maneira que sua interação com o mundo seja norteada por conceituações e modelos que se fundamentam em premissas e hipóteses diferenciadas daquelas que fundamentam os modelos tradicionais (BEAN, 2007, p. 39).

A concepção de modelagem segundo Bean alerta que esse instrumento não está de acordo com as bases filosóficas vigentes, sendo que a utilização de modelos vigentes é a reprodução da realidade, cabendo à modelagem a transformação dessa realidade.

Já Chaves e Lorenzoni (2010) defendem:

> como uma possibilidade de se romper com a forma descontextualizada e acrítica que a Matemática vem sendo tratada no ETM. Trabalhar com análise e interpretações de dados, relevantes aos alunos e à comunidade da qual estão inseridos, no viés da modelagem matemática faculta, por exemplo, não apenas o envolvimento do aluno nos problemas locais, mas na busca responsável e comprometida pelas soluções dos mesmos (CHAVES; LORENZONI, 2010, p.10).

Para esses autores, quando os modelos são eficazes para nortear as interações com o mundo, eles se tornam parte da realidade. Nessa perspectiva, Bean auxilia mais uma vez na compreensão dessa linha de raciocínio ao diferenciar a aplicação de modelos e a modelagem.

> Desta perspectiva, a aplicação de modelos e a modelagem, embora, como processos, compartilhem competências e habilidades inter-relacionadas, possuem exigências, propósitos e efeitos diferenciados. Enquanto a aplicação reproduz a realidade por utilizar modelos vigentes nos quais os recortes, hipóteses e premissas tradicionais se adéquam ao que está estabelecido a respeito de fenômenos, a modelagem, por sua vez, reconceitualiza e muda a compreensão de fenômenos, ou transforma o enfoque desse entendimento, fundamentando-se em novas hipóteses, premissas ou recortes e transformando o modo como compreendemos e interagimos com o mundo, ou seja, transforma a realidade (BEAN, 2007, p. 42).

Segundo o estudioso, a matemática pertence à realidade e esta sempre vai envolver conceituações e modelos, sejam esses matemáticos ou não. Concebendo a matemática como parte da realidade, encontra-se uma inconsistência em fundamentar a modelagem numa base conceitual, que venha estabelecer uma disjunção entre a realidade e a matemática.

Ao conceber linguagem como meios de expressão e de comunicação, o pensador em destaque afirma que os modelos são construídos utilizando-se várias linguagens, dentre elas a Matemática, e explica:

> Entendo por modelos, estruturas conceituais cuja aceitação sociocultural numa comunidade ou numa sociedade é devida à sua capacidade de nortear atividades da comunidade, de forma que essas atividades atendam às necessidades, interesses e aspirações dos membros da comunidade ou da sociedade mais ampla (BEAN, 2007, p. 44).

O modelo entendido pelo pesquisador serve como um norteador do pensamento e das ações. A matemática aplicada é vista por ele como uma atividade de justapor e construir modelos, sendo esses fundamentados em premissas e pressupostos. Ainda de acordo com o autor,

> a realidade é a interação do ser humano com o mundo em que o ser humano cria modelos para nortear essa interação. Dessa maneira, os modelos e as atividades compõem uma unidade que faz parte da realidade (BEAN, 2007, p. 47).

Para atender aos interesses da comunidade, os modelos e as atividades se alteram conforme as transformações que ocorrem no mundo. Os modelos são, portanto, construções humanas que auxiliam as atividades no mundo. Bean explica que essas construções são pensamentos formados a partir de conceitos com o objetivo de auxiliar na organização de respostas para situações problemáticas e estão representadas por meio de uma variedade de linguagens.

> Utilizamos as linguagens como ferramenta para lidar com situações problemáticas. Em alguns casos, podemos remediar uma situação ao aplicar conceituações ou modelos vigentes para nortear a atividade. Em outros casos, criamos novos modelos (...) a modelagem matemática, no sentido abrangente, é uma atividade, entre uma variedade de possíveis atividades, utilizada para lidar com situações problemáticas empregando a linguagem matemática (BEAN, 2007, p. 48).

Partindo dessa base conceitual, a perspectiva do autor questiona as situações matemáticas juntamente com a linguagem matemática e distingue atividade de modelagem de outras que utilizam modelos e linguagem matemática:

> Reconheço que todos os nossos modelos fundamentam-se em premissas, hipóteses e recortes que acentuam e desprezam aspectos daquilo que entendemos por realidade. Entendo que a modelagem envolve a mudança em algumas das premissas, hipóteses e recortes ou, ao abordar um novo problema, a formulação de novas premissas e hipóteses, e efetua recortes de acordo tanto com os fenômenos quanto com os objetivos. (BEAN, 2007, p. 49).

O pesquisador entende, portanto, que os modelos são utilizados, analisados, ajustados e criados objetivando a orientação das atividades para que se promovam as transformações na realidade. A construção de modelos para Bean é, portanto, uma atividade que independe da origem do problema abordado, da área de conhecimento considerada e da relação entre realidade e Matemática. A proposição a seguir corrobora e reforça ainda mais o seu entendimento por modelagem:

> Esse processo de formular modelos a partir de premissas, hipóteses e recortes da realidade que sejam promissores no sentido de nortear atividades com o intuito de atender às necessidades, interesses e aspirações é o que entendo por modelagem (BEAN, 2007, p. 54).

Exemplificando as premissas e pressupostos aqui discutidos, Bean (2009), cita um problema retirado de Barbosa (2006), em que uma professora, para trabalhar questões socioeconômicas, utiliza uma reportagem de um jornal que relata o auxílio que o governo disponibilizaria aos agricultores de subsistência na forma de doação de sementes de feijão e de milho. Eis o recorte:

> As sementes de feijão e milho doados pelo Governo começaram a ser distribuídas ontem a tarde. São 37,5 toneladas de sementes- 25 de feijão e 12,5 de milho. Aproximadamente 8000 agricultores de subsistência serão beneficiados. De acordo com o prefeito, cada agricultor receberá 3 kg de feijão e 2 kg de milho (BEAN, 2009, p. 100, tradução do autor).

A professora indagou aos alunos a respeito dos critérios utilizados pelo governo para a distribuição das sementes. Em resposta, a argumentação dos estudantes partia da hipótese de que as famílias deviam receber quantidades diferentes de sementes pelo fato de possuírem necessidades diferentes. A partir dessa circunstância,

> A questão dos critérios remete aos pressupostos. Remete a valores. Os alunos rejeitaram o pressuposto (hipótese) do governo de que cada família deve receber a mesma quantidade de sementes; propõem um pressuposto alternativo, segundo o qual famílias com mais membros receberiam mais sementes. Ou seja, os alunos conceituaram a distribuição de sementes diferentemente da conceituação do modelo do governo, que se fundamenta na equidade entre as famílias. É a formulação do pressuposto de que famílias maiores devem receber mais sementes que constitui a modelagem nessa atividade. A matematização dessa conceituação foi por proporcionalidade, um conceito de repartição que, além da média aritmética, está presente nos conhecimentos matemáticos de alunos dessa faixa etária (BEAN, 2009, p. 101).

Tomando o caso como uma ilustração, se essa atividade for um trabalho de Modelagem, os alunos podem lançar mão de outros pressupostos, como não aceitar as hipóteses do governo de que todas as famílias deveriam receber a mesma quantidade de sementes. Podem, por exemplo, considerar a extensão de terras pertencentes às famílias e formular alternativas que repercutam diretamente na forma de distribuição vigente.

Bean finaliza o exemplo dizendo sobre a reportagem apresentada aos alunos: "nada diz a respeito da premissa de que o auxílio por distribuição de sementes era uma medida adequada no contexto das dificuldades que os agricultores de subsistência da região estavam passando" (2009, p. 102). Assim, fica a questão: quem sabe, se isso fosse mencionado, os alunos não tomariam outros rumos em seus pensamentos e concordariam com o pressuposto do governo na divisão igualitária?

Abreu (2011) comunga das ideias de Bean (2009) e faz uma apropriação acerca das premissas e pressupostos que surgem dos estudos de Modelagem Matemática do autor: as premissas são as teorias ou princípios que uma pessoa, conscientemente ou não, utiliza para fundamentar seu raciocínio; já os pressupostos são afirmações do que está compreendido como realidade, sem a pretensão de se comprovar isso.

Algumas abordagens são feitas a partir do estudo realizado em vários trabalhos e em obras de profissionais que utilizam a Modelagem Matemática como guia, e defendem que um trabalho com essa tendência seja válido ao professor, para que este possa auxiliar o aluno na crítica, na pesquisa e na vontade de buscar e aprender cada dia mais.

3.3 **A Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira – um recorte do nosso cenário nacional**

A Modelagem Matemática, em sua essência, sempre esteve presente na criação das teorias científicas e, em especial, na criação das teorias matemáticas. No século XX, foi muito utilizada na Resolução de Problemas de Biologia e da Economia, segundo Biembengout (1999).

De acordo com Barbosa (2001), a utilização da Modelagem Matemática enquanto estratégia pedagógica teve início nas primeiras décadas do século XX, no cenário internacional, quando matemáticos puros e aplicados estudavam meios para o ensino da disciplina.

No Brasil, de acordo com Borba e Villarreal (2005), citados por Hermínio (2009), a Modelagem Matemática teve origem nas ideias e nos trabalhos de Paulo Freire e de Ubiratan D'Ambrosio na década de 70; porém, a perspectiva da EM voltada para ensino de Matemática no Brasil teve início somente a partir de 1987, com a primeira dissertação de mestrado na Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, do Campus de Rio Claro – SP.

Segundo Andrade (2008) as primeiras pesquisas que versaram sobre a Modelagem no Ensino Médio foram realizadas por Biembengut (1990) e Burak (1992), sendo sua consolidação na Educação Matemática brasileira atribuída a vários grupos de pesquisadores, dentre os quais Biembengut (2003, 2008, 2009) destaca três precursores: Aristides Camargos Barreto, Ubiratan D'Ambrosio e Rodney Carlos Bassanezi.

No âmbito da Educação Matemática, diferentes abordagens, caracterizações ou concepções são dadas para Modelagem Matemática e por isso não é fácil descrevê-la, como já pontuado nesta pesquisa. Porém, essas diferentes concepções de Modelagem Matemática possuem pontos convergentes. Segundo Biembengut (2009),

> [...] é essencial não perder de foco estas definições nos aspectos que convergem no entendimento de que a modelagem pode contribuir não somente para aprimorar o ensino e a aprendizagem matemática, mas especialmente, para provocar uma reação e interação entre corpo docente e discente envolvidos na contínua e necessária produção do conhecimento que surtirá efeitos no contexto social (Biembengut, 2009, apud Abreu, 2011, p. 18).

Na visão da autora, a Modelagem Matemática aproxima professor e aluno que tenham como objetivos comuns a contínua e necessária produção do conhecimento.

A partir desse horizonte, dentre algumas diferentes concepções, destacam-se as de Bassanezi (2002), que definem a Modelagem como uma estratégia pedagógica ao passo em que as de Barbosa (2001) e Jacobini (1999) a definem como um ambiente de aprendizagem.

Dentro da perspectiva de ambiente de aprendizagem, Barbosa destaca o trabalho de Modelagem como uma oportunidade para que os alunos possam questionar situações por meio da Matemática, cujo resultado final irá depender do encaminhamento dado à medida que a atividade for sendo desenvolvida e que, dependendo desse encaminhamento, pode acontecer de até mesmo não ser construído o modelo matemático. Nesse sentido, a “modelagem é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade” (BARBOSA, 2001, p. 6).

Podemos pressupor, a partir da premissa indicada por Barbosa (2001), que a Modelagem é uma atividade onde os alunos discutem Matemática no contexto de situações do dia a dia e/ou realidade. Não se trata, portanto, de contextualizar o tema, mas de discuti-lo de forma a não reduzi-lo à área específica, ou seja, para além da disciplina programática, à luz da reflexibilidade.

Já Chaves e Lorenzoni (2010) diferenciam a Modelagem Matemática como metodologia de pesquisa e como procedimento metodológico referente à aprendizagem. A partir de suas pesquisas, os autores evidenciam que a necessidade de se obter resultados preciosos e o mais fidedignos possíveis é um fim na Modelagem assim como metodologia de pesquisa, aplicado a diversas áreas do conhecimento; no entanto, o confronto de metodologias – que optam por modelos distintos – e os graus de pertinências dos resultados encontrados, é apontado pelos autores como sendo salutar, quando se toma a Modelagem Matemática como procedimentos metodológico pertinente à aprendizagem.

> Como chegar a um resultado mais próximo possível da realidade? Para responder a tal pergunta, volta-se a discutir e a elaborar novas ações, nessa dinâmica de investigar um problema que interfira nas ações que devam ser desenvolvidas para, pelo menos, chegarmos próximos aos nossos objetivos.... Pode-se imaginar a

> riqueza de situações que emergem da questão (quando discutidas em ambiente escolar). Não pela beleza do conteúdo, mas pela pluralidade de caminhos a perseguir em busca de resoluções de um problema concreto (CHAVES; LORENZONI, 2004, p 126).

No que tange às similaridades e diferenças entre Modelagem Matemática, Etnomatemática, Resolução de Problemas, Pedagogia de Projetos e Práticas Educacionais Investigativas (PEI), como procedimentos metodológicos relativos à aprendizagem, Chaves e Lorenzoni chamam atenção para a tênue linha diferenciadora entre tais abordagens:

> Um fator comum é que em qualquer dessas abordagens há uma forte tendência de ruptura com os dispositivos de controle do ETM (o paradigma do exercício). O problema não reside no que se apropria de certo instrumental, mas sim em quem e como se apropria, pois como defendemos anteriormente, quem produz significado não é o emissor, mas o receptor da enunciação. (CHAVES; LORENZONI, 2010, p. 7).

Almeida e Ferruzi (2009) concordam com Barbosa (2001), quando afirmam que a Modelagem Matemática funciona como uma alternativa pedagógica, na qual fazemos uma abordagem, por meio da Matemática, de um problema não essencialmente matemático; ou seja, a modelagem busca uma resposta pra um problema cuja origem pode não estar na Matemática.

Para D'Ambrosio (1989), a modelagem matemática é uma forma de interação do conteúdo de sala de aula com questões reais, sendo que o trabalho com modelagem aproxima a matemática escolar da matemática vivenciada pelos alunos no dia-a-dia, tornando-os mais críticos e tornando os conteúdos mais significantes:

> Os modelos matemáticos são formas de estudar e formalizar fenômenos do dia a dia. Através da modelagem matemática o aluno se torna mais consciente da utilidade da matemática pra resolver e analisar problemas do dia-a-dia. Esse é um momento de utilização de conceitos já aprendidos. É uma fase de fundamental importância para que os conceitos trabalhados tenham um maior significado pra os alunos, inclusive com o poder de torná-los mais críticos na análise e compreensão de fenômenos diários (D'AMBROSIO, 1889, p. 3).

Bassanezi corrobora essas proposições quando caracteriza a modelagem como um processo dinâmico e afirma que “a modelagem consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los, interpretando suas soluções na linguagem do mundo real” (BASSANEZI, 1994. p. 61). Ainda, segundo esse mesmo autor, em outro estudo,

> Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual. [...] é um processo que alia teoria e prática, motiva seu usuário na procura do entendimento da realidade que o cerca e na busca de meios para agir sobre ela e transformá-la (Bassanezi, 2002, p. 24).

Entende-se assim, segundo as concepções de Bassanezi (2002), a modelagem como o estudo de problemas e situações reais, tendo a Matemática como linguagem para compreensão, simplificação e decisão. Para o autor, na Modelagem Matemática existe sempre algo estático (que é observável) e algo dinâmico (que se movimenta, varia).

Dentre os trabalhos realizados com a Modelagem Matemática, Bassanezi (2002) destaca o desenvolvido num curso de especialização, cujo tema “abelha” foi escolhido por um grupo de professores do Ensino Médio. O trabalho iniciou com uma coleta de dados que consistia na contagem das abelhas de uma colmeia e a determinação do número de abelhas por minuto que pousavam nessa colmeia. Após análises, os envolvidos puderam constatar que, quando os favos estavam cheios, o fluxo de abelhas diminuía. Essa observação foi interessante, pois assim o apicultor não precisaria mais retirar os favos para verificar se já estavam cheios. Várias observações relevantes e pertinentes à modelagem como, por exemplo, a geometria dos alvéolos, dinâmica da população de abelhas e outras, foram levantadas e trabalhadas pelo grupo. À medida que a pesquisa ia transcorrendo, novos modelos matemáticos foram surgindo, e com eles o estudo de cálculo e equações diferenciais.

Observa-se que, nessa atividade, o tema foi escolhido pelos alunos e o conteúdo matemático trabalhado foi surgindo conforme interesse e questionamento do grupo, bem como as necessidades de cálculos para a construção dos modelos.

Nessa perspectiva, para Burak (2004), a Modelagem Matemática é uma alternativa metodológica para o ensino de matemática, que depende fundamentalmente do interesse do grupo. Tal interesse resulta em maior motivação e consequentemente, na melhoria do processo ensino e de aprendizagem, tornando os alunos corresponsáveis por suas aprendizagens e oportunizando o estabelecimento de relações afetivas com o discente, que passa a ser um mediador entre o conhecimento matemático e o conhecimento do aluno.

Burak (2004, p. 3) delineia cinco etapas para se trabalhar a Modelagem Matemática: a) Escolha do tema; b) Pesquisa exploratória; c) Levantamento dos problemas; d) Resolução dos problemas; e e) Análise crítica das soluções. Ainda, concebe a Modelagem Matemática como uma metodologia de ensino que se constitui em um conjunto de procedimentos, cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer predições e a tomar decisões. Bassanezi ilustra esse posicionamento ao comentar que:

> A modelagem no ensino é apenas uma estratégia de aprendizagem, onde o mais importante não é chegar imediatamente a um modelo bem sucedido, mas, caminhar seguindo etapas onde o conteúdo matemático vai sendo sistematizado e aplicado. Com a modelagem o processo de ensino-aprendizagem não mais se dá no sentido único do professor para o aluno, mas como resultado da interação do aluno com seu ambiente natural (BASSANEZI, 2002, p. 38).

No universo de variadas concepções de Modelagem, destaca-se igualmente Biembengut, que aponta para diferenças entre a Modelagem Matemática na Matemática Aplicada e a Modelagem Matemática na Educação Matemática. No primeiro caso, a autora considera a Modelagem como uma estratégia usada para se chegar ao modelo matemático, enquanto que no segundo caso ela concebe a Modelagem com um método de ensino capaz de promover ou ensinar conhecimentos acadêmicos: ou seja, um processo que envolve a obtenção de um modelo matemático com intuito de ensinar; onde o modelador deve ser detentor de boa dose de criatividade, intuição e senso lúdico, uma vez que cabe a ele a escolha do conteúdo matemático, a interpretação do contexto e a manipulação das variáveis envolvidas. A autora ressalta ainda que:

> A modelagem é, assim, uma arte, como formular, resolver e elaborar expressões que valham não apenas para uma solução particular, mas que também sirvam, posteriormente, como suporte para outras aplicações e teorias. Grosso modo, pode-se dizer que matemática e realidade são dois conjunto disjuntos e a modelagem é um meio de fazê-las interagir (BIEMBENGUT, 1999, p. 20).

Na concepção de Bean, apontada por Bueno, a modelagem matemática entendida pela perspectiva da EM

> é uma atividade humana na qual uma parte da realidade está conceitualizada, de forma criativa, com algum objetivo em mente. Consiste na formulação de um isolado, ou seja, na conceitualização de uma situação com fundamento em premissas e pressupostos que remetem tanto à situação quanto aos objetivos do modelador (o aluno) (BEAN, 2009, apud BUENO, 2011, p. 9).

Bean, como podemos observar, não faz distinção entre a Modelagem na Matemática Aplicada e a Modelagem na Educação Matemática. Portanto, no âmbito educacional, a Modelagem possui diversas vertentes, já que na perspectiva da educação matemática alguns estudiosos concebem essa metodologia como estratégia pedagógica, enquanto outros como um ambiente de aprendizagem.

Ainda, diante das diversas concepções, Andrade afirma que

> essas concepções de Modelagem estão intimamente ligadas à ideia de trabalhar com "problemas da realidade"

> por meio da Matemática e de construir um modelo ou de aproveitar um modelo já pronto para investigar uma situação de interesse (ANDRADE, 2008, p. 43).

Assim, de acordo com esta pesquisadora, a Modelagem Matemática deve estar intimamente ligada ao trabalho com problemas da realidade, podendo a partir dela construir um modelo ou aproveitar um modelo para estudar uma situação de interesse.

Algumas perspectivas teóricas para a Modelagem Matemática a aproximam de outra vertente teórica da EM: a Educação Matemática Crítica. Nesta perspectiva, a área de estudo pode conduzir o aluno a questionar seus próprios modelos construídos, bem como os já existentes relacionados a diversas situações da vida em sociedade, discutidos por Chaves e Lorenzoni (2010).

Ao destacar a modelagem matemática na perspectiva da Educação Matemática Crítica, Araújo (2009) procura:

> [...] juntamente com os estudantes, problematizar o papel da Matemática na construção do progresso, gerando maravilhas e catástrofes, e questionar o uso que é feito dessa disciplina como instrumento de poder. Nesse sentido preocupo-me com uma Educação Matemática dos estudantes que não vise apenas instrumentá-los matematicamente, mas que também proporcione sua atuação crítica na sociedade, por meio desse conhecimento matemático e que pode trazer contribuições para sua emancipação como cidadãos (ARAÚJO, 2009, p. 66).

Por fim, destacamos Burak e Klüber que, ao defenderem que a modelagem matemática deve voltar-se para a formação dos alunos da Educação Básica, apresentam-na sob uma perspectiva de Educação Matemática, "que concebe a Matemática como um instrumento importante, mas sem desconsiderar as outras áreas que devem se fazer presentes no processo de ensino e de aprendizagem da Matemática" (BURAK e KLÜBER, 2010, p. 157).

Na impossibilidade de levar em consideração todas as concepções de modelagem, destacamos as concepções de Maria Salett Biembengut, Jonei Cerqueira Barbosa, Dionísio Burak, Dale William Bean e Rodolfo Chaves, por assumirem suas concepções perante a comunidade de educadores matemáticos pelos diferentes aspectos de suas concepções e por terem trabalhos voltados para o Ensino Fundamental e Médio. A seguir, propomos algumas reflexões sobre a Modelagem Matemática e suas relações com a educação Matemática Crítica, com a determinação do currículo e com a construção de Modelos.

3.4 **Reflexões a respeito de Modelagem Matemática em relação à Educação Matemática Crítica, ao currículo e à construção de Modelos.**

Esta revisão de literatura tem como objetivos: identificar diferentes concepções de Modelagem Matemática, bem como apresentar a concepção utilizada neste trabalho e também apresentar uma visão geral de alguns trabalhos na área em que se concentra o recorte teórico desta pesquisa.

Ao examinar sobre a história da Modelagem Matemática no Brasil, encontramos Burak (2004), que afirma que os primeiros estudos sobre o tema surgiram na década de 1980 na Universidade Estadual de Campinas-UNICAMP, em Biomatemática, com um grupo de professores coordenado pelo professor Dr. Rodney Carlos Bassanezi, do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC), o qual envolvia modelos de crescimento cancerígenos.

Entre as pesquisas realizadas na Educação Matemática encontram-se vários estudos desenvolvidos na área de Modelagem Matemática, a partir dos quais podemos observar também que existe uma diversidade de concepções ou definições sobre essa tendência. Algumas definições e experiências vivenciadas por pesquisadores de perspectivas e objetivos diferenciados serão aqui apresentadas, com o intuito de se construírem subsídios para o planejamento e encadeamento das atividades da pesquisa exploratória deste estudo.

Um breve relato será apresentado a respeito de algumas reflexões e trabalhos que envolvem a educação matemática crítica na perspectiva sociocrítica, assim como sob o ponto de vista do ambiente de aprendizagem e o envolvimento da modelagem no currículo, descrevendo possíveis caminhos para estudos direcionados pela modelagem matemática.

3.4.1 A Educação Matemática Crítica – A Corrente Sociocrítica

Ao pesquisar artigos e dissertações que têm suas raízes na Modelagem Matemática, é possível encontrar textos que fazem reflexões acerca da matemática crítica onde se acredita que os alunos devam ser orientados nas aulas da disciplina com uma direção crítica, para que possam se posicionar mediante o conteúdo e sua aplicação na sociedade e no cotidiano.

Jacobini e Wodewotzki (2006) desenvolvem uma reflexão acerca da Modelagem Matemática como um instrumento de ação política na sala de aula. Relatam que o professor, ao aplicar a modelagem, tem a intenção de ensinar o assunto, a exploração das aplicações matemáticas e a construção de modelos que oferecem ao aluno oportunidades de uma convivência com conteúdos úteis e condizentes com a realidade que vivem. Trabalhando por essa perspectiva, o professor poderá dedicar-se prioritariamente ao conteúdo, considerando a formação crítica dos estudantes enquanto indivíduos pertencentes a uma sociedade que está cerceada pela forte presença da matemática.

Os estudos dos autores supracitados ressaltam ainda que a educação crítica se insere por posturas democráticas nas salas de aula, com posicionamentos críticos, indagações e reflexões, por discussões relacionadas com referências democráticas, objetivando reações às contradições sociais, e transformando, assim, as estruturas da sociedade.

Em uma sala de aula pautada nos pilares da Educação Crítica, tanto o educador quanto os educandos devem assumir o papel de participantes na aprendizagem, sendo a preparação para o exercício da cidadania o foco principal. A matemática, por sua vez, deve ser trabalhada como um instrumento de análise das características críticas de relevância social (Jacobini; Wodewotzki, 2006). Tal perspectiva tem como objetivo, em um trabalho com a Modelagem, direcionar aulas para o crescimento político e social do estudante. A escolha da atuação política na sala de aula, segundo Jacobini e Wodewotzki (2006), não significa a desvalorização da matemática acadêmica, nem mesmo a construção de modelos. Os estudiosos afirmam que:

> Essa escolha tem a ver com a intenção de, primeiro, extrapolar a exclusividade do foco da aprendizagem na compreensão da matemática em si. E, segundo, formar um estudante (i) crítico, investigador e conhecedor de problemas que afligem a sociedade; (ii) sensível para refletir sobre situações sociais, econômicas, do meio ambiente etc., ou sobre políticas públicas de interesse da sociedade; (iii) consciente da importância da participação democrática dos cidadãos, quer em relação a decisões sobre assuntos que dizem respeito aos interesses e às aspirações da comunidade, quer em relação ao acesso democrático de toda a população aos serviços sociais, públicos e de qualidade, tais como saúde, educação, moradia e trabalho; (iv) envolvido na luta democrática pela conquista da igualdade de direitos, deveres e oportunidades entre os homens e pelo fim de qualquer forma de preconceito e de discriminação (...); (v) consciente da importância e da necessidade da sua participação na comunidade como um sujeito formador, questionador (...); (vi) interessado em compartilhar o conhecimento resultante do processo de aprendizagem em algum contexto (social, político, econômico, educacional, a escola, a própria sala de aula etc.) (JACOBINI; WODEWOTZKI, 2006. p. 85).

Segundo essa orientação, a matemática deve extrapolar os cálculos e aplicações que geralmente são trabalhados pelos educadores. Uma reflexão crítica acerca da comunidade onde os alunos se inserem auxilia-os enquanto indivíduos, tornando-os críticos, investigadores e conscientes de seus papéis no exercício de sua cidadania. Pinheiro corrobora Jacobini e Wodewotzki (2006) quando complementa essa perspectiva ao afirmar que “é imprescindível que as pessoas não apenas aceitem o conteúdo numérico, mas, sobretudo, que estejam sempre atentas para os impactos que ele tem para a sociedade” (2008, p. 31).

Os Parâmetros Curriculares destacam que a matemática deve ser trabalhada com o objetivo de promover o desenvolvimento e aquisição de competências, para que o aluno se integre à sociedade como cidadão e possa modificar e melhorar sua realidade. Acerca dessa visão, Pinheiro afirma:

> Uma educação matemática crítica e reflexiva, trabalhada em torno dos modelos e pressupostos utilizados para se obter certos resultados, poderá favorecer as pessoas uma cidadania mais participativa, como por exemplo, em situações comuns como as audiências de programas

> televisivos e outros estudos estatísticos que são apresentados em meios de comunicação social (Skovsmose 2007, apud PINHEIRO e BASSO, 2009, p. 105).

Para os pesquisadores citados acima, a relação entre professores e alunos deve ser dialógica, e o aluno deve ser convidado a ser um cidadão crítico. A prática do diálogo entre professor e aluno garante uma troca de saberes e, portanto, um aprendizado mútuo, isto é, os dois lados podem tanto ensinar como aprender, uma vez que o processo de interação garante que ambos se beneficiem, por serem sujeitos que possuem uma bagagem de conhecimento próprio. Dessa forma, por meio da aprendizagem, professor e aluno podem desenvolver diferentes posturas, que atuam diretamente no crescimento intelectual dos dois.

Entende-se assim que o papel do educador é possibilitar aos estudantes a crítica e o questionamento, e isso só será despertado se o aluno participar ativamente da consolidação de seu conhecimento. O professor deve assumir o papel de auxiliador e não de único transmissor de conteúdos, visto que, enquanto escuta e permite que o aluno contribua com suas colocações, também aprende com este. Tudo deve acontecer de forma recíproca, conforme Freire (1970) argumenta, onde deve haver o “professor-dos-estudantes” e os “estudantes-do-professor”, os quais, durante a troca de experiências, crescem cada vez mais.

Jacobini e Wodewotzki (2006) discorrem a respeito de um trabalho aprovado para o IV Congresso Nacional de Educação e Modelagem Matemática, que envolveu dois projetos em que se permitiu aos alunos envolvidos a possibilidade de críticas e reflexões, expandindo assim as atividades para além das salas de aula e possibilitando maior integração ao abrir espaço para diálogos entre jovens de diferentes classes sociais e financeiras.

Para complementar as indagações acerca da Educação Matemática Crítica, é necessário conhecer características importantes da corrente sociocrítica e sua atuação dentro de trabalhos com a Modelagem Matemática. Algumas obras estudadas recorrem à corrente sociocrítica como um apoio para trabalharem a Modelagem Matemática, como uma forma potencializadora de reflexões a respeito da disciplina.

Barbosa (2001) cita Kaiser-Messmer (1991), que discute as visões pragmática e científica acerca da Modelagem. Segundo a corrente pragmática, os conteúdos matemáticos que não são aplicáveis em outras áreas devem ser removidos do currículo e substituídos por conteúdos úteis à sociedade. A Modelagem nessa corrente é entendida, portanto, como uma forma para construção de modelos práticos e instrumentais.

Já a corrente científica é concebida como uma forma de introduzir conceitos através da busca do estabelecimento de relações da matemática com as outras áreas e a Modelagem. De acordo com Barbosa,

> A corrente pragmática volta-se para aspectos externos da matemática enquanto que a científica, para os internos. O foco permanece, portanto, na matemática e sua capacidade de resolver problemas de outras áreas (BARBOSA, 2001, p. 3).

O autor destaca, também, a grande importância dada por essas correntes ao conhecimento matemático em detrimento do conhecimento reflexivo, e sugere uma terceira corrente: a sociocrítica. Segundo esse estudioso, “nem matemática nem modelagem são ‘fins’, e sim ‘meios’ para questionar a realidade vivida” (BARBOSA, 2001, p.4). Assim, Barbosa concebe a Modelagem como direcionadora de críticas, em que os alunos transitam entre a dimensão de um conhecimento reflexivo, cabendo ao professor ajudá-los nesse processo.

Para exemplificar a corrente sociocrítica, o autor descreve um exemplo hipotético, onde os alunos precisavam planejar os gastos com publicidade de uma empresa. Para isso, eles realizam uma pesquisa de preços entre vários publicitários para produção de propagandas. Buscaram também os preços cobrados pelos canais de televisão e rádios, para que essas propagandas fossem efetuadas e encontraram uma solução, através de programação linear. Além do envolvimento com a modelagem matemática e com conhecimentos matemáticos, uma série de questões pôde ser levantada a respeito do que fizeram, como as descritas a seguir.

> “Este resultado é válido?”, “Por que?”, “Como podemos garantir?”, “Ao traduzirmos a situação em termos matemáticos, o que perdemos?”, “O que ganhamos?”, “O que garante os procedimentos matemáticos adotados?”, “Há pressupostos implícitos?”, “As manipulações matemáticas podem nos dizer algo sobre a situação?”. Mais ainda: “É seguro tomar a decisão baseada nesta abordagem matemática do problema?”, Por que é importante a propaganda para a empresa?”“, “Qual o impacto sobre as vendas?”, “Que papel a mídia desempenha nos hábitos das pessoas?”, “Qual a relação com o consumismo?”, “Somos autônomos perante a mídia?” (BARBOSA, 2001, p. 4).

Dessa maneira, “o que chamamos de corrente sociocrítica de Modelagem sublinha que as atividades devem potencializar a reflexão sobre a matemática, a própria Modelagem e seu significado social” (BARBOSA, 2001, p. 4). Jacobini (2007) auxilia esse ponto de vista com muita propriedade, ao afirmar que:

> A educação crítica insere-se e desenvolve-se num contexto caracterizado, de um lado por discussões relacionadas com formas de dominação (econômicas e culturais), com problemas sociais, com críticas e com relações democráticas que objetivam transformações nas estruturas sociais, políticas, econômicas e éticas da sociedade; de outro, por construções de ambientes democráticos nas salas de aula que garantam o diálogo entre os participantes do processo de ensino e de aprendizagem, igualdade entre eles, constantes questionamentos e indagações, reflexões e reações às contradições. (JACOBINI, 2007, p. 125 apud ANDRADE, 2008, p.53-54).

Desse modo, a perspectiva sociocrítica oportuniza ao aluno a reflexão e o diálogo, tendo a sala de aula como um ambiente democrático, onde a reflexão é fundamental para a busca da aprendizagem. Assim, essa postura evidencia o caráter cultural e social da Matemática, por suscitar indagações e questionamentos acerca das atividades desenvolvidas, bem como proporcionar o debate e a discussão das aplicações dessa ciência na sociedade. Portanto, essa perspectiva se constitui como um desafio ao ETV e ao currículo linear.

3.4.2 A Modelagem como uma possibilidade de ruptura com o currículo linear

Para Machado (1995 apud Klüber; Burak, 2007), o maior problema enfrentado em relação às disciplinas escolares é a linearidade do currículo, uma vez que essa forma de apresentação dos conteúdos dificulta o desenvolvimento de conceitos, por solicitar uma ordem onde os pré-requisitos se tornam essenciais e, por isso, engessam o ensino.

A Modelagem, a partir das concepções de Klüber e Burak (2007), é uma possibilidade de romper com essa linearidade curricular, já que ao se trabalhar com esse instrumento, não são os conteúdos os determinadores dos problemas, e sim os problemas que determinarão os conteúdos a serem trabalhados.

Os conteúdos trabalhados surgem da necessidade e mantêm ligação com o contexto dos alunos, professores, escola e mesmo a sociedade, conforme apontam os autores:

> O contexto, então, não é apenas aquele que o indivíduo ou grupo está inserido, mas também o mundo que ele vive e convive, influencia e é influenciado. Dito de outra maneira, o conteúdo matemático foi contextualizado, o que permitiu avaliar o contexto do mercado, as diferenças, as discrepâncias e outras variáveis do gênero. Permitiu extrapolar o simples contexto da matemática com característica mais internalista e encontrar relações em outras esferas de significado, como a econômica (KLÜBER; BURAK, 2007, p. 7- 8).

No transcorrer do trabalho com Modelagem a partir dessas perspectivas, algumas mudanças poderão ser propostas pelos alunos. Klüber e Burak (2007) citam um exemplo, através de Soistak (2006), que discorre sobre um trabalho com modelagem, cujo tema escolhido pelos alunos foi “Cultura da Soja”. Ao analisar esse trabalho, os autores destacam a contextualização e o rompimento com linearidade curricular, somando reforços ilustrativos de casos em que a perspectiva crítica é incitada. Para além disso, num trabalho focando a Modelagem, os conteúdos que surgem não seguem uma ordem rígida e linear, e conteúdos ditos de outras séries podem e devem aparecer nas situações-problema, cabendo ao professor auxiliar seus alunos e trabalhar esses conteúdos na medida em que forem necessários. Os autores ainda enfatizam que "(...) a Modelagem permite a intersecção com outras áreas do conhecimento e não precisa necessariamente ser desenvolvida em uma disciplina de matemática" (KLÜBER e BURAK, 2007; p. 13).

A proposta de um trabalho com a Modelagem Matemática, conforme apresentado, busca uma inversão do processo curricular que se encontra nas escolas, pois os conteúdos surgem devido às suas necessidades e dentro das situações-problema buscadas pelos alunos, derrubando-se assim, a "ordem" que o currículo tradicional impõe aos conteúdos matemáticos.

Os novos Parâmetros curriculares propõem essa ruptura com os currículos lineares e abrem-se para muitas discussões quando propõem trabalhos interdisciplinares e a valorização de tudo aquilo que os estudantes levam de suas experiências e vivências fora do ambiente escolar. Nesse viés, Chaves e Lorenzoni destacam:

> O trabalho com modelagem matemática também permite que se rompa com os dispositivos táticos e estratégicos do ETM (o paradigma do exercício), abrindo então espaço para novos cenários pautados na investigação e no trabalho colaborativo e participativo envolvendo alunos e professores. No viés da modelagem matemática, enquanto estratégia de ensino, o aluno se envolve, pesquisa, participa, inquire, toma as rédeas da situação, tonando-se assim um indivíduo ativo, participativo, responsável e ciente de seus atos (CHAVES; LORENZONI, 2010, p. 10).

Assim, baseando-nos nesta pequena revisão de literatura, acreditamos que a Modelagem Matemática propicia o estreitamento das relações entre alunos e professores, a contextualização, bem como o maior envolvimento dos alunos com atitudes participativas e responsáveis. Entendemos que esses fatores sejam capazes de romper com a linearidade curricular arraigada no ETV.

3.4.3 Por que inserir a Modelagem no currículo?

São inúmeras as razões para incluir a Modelagem Matemática no currículo das escolas. Ao usar a Modelagem Matemática, o professor tem a oportunidade de transformar sua prática através da motivação dos alunos, do interesse, da participação e da vontade de aprenderem e crescerem cada vez mais, juntamente com a possibilidade de refletirem e criticarem acerca das atividades.

Para Blum, citado por Barbosa (2003), são cinco os argumentos cientificamente elaborados e aceitáveis:

- Motivação: os alunos se sentiriam mais estimulados para o estudo de Matemática, já que vislumbrariam a aplicabilidade do que estudam na escola;
- Facilitação da aprendizagem: os alunos teriam mais facilidade em compreender as ideias matemáticas, já que poderiam conectá-las a outros assuntos;
- Preparação para utilizar a matemática em diferentes áreas: os alunos teriam a oportunidade de desenvolver a capacidade de aplicar o conhecimento em diversas situações, o que é desejável para moverem-se no dia-a-dia e no mundo do trabalho;
- Desenvolvimento de habilidades gerais de exploração: os alunos desenvolveriam habilidades gerais de investigação;
- Compreensão do papel sociocultural da matemática: os alunos analisariam como a disciplina é usada nas práticas sociais.

Podemos notar, portanto, que a modelagem é um processo capaz de despertar no aluno a vontade de aprender, pois ele começa a entender o sentido, ou seja, o porquê da matemática em seu cotidiano, desenvolvendo pensamentos e ações que o levam a agir ativamente nas questões sociais, as quais envolvam a aplicação da matemática.

3.5 **A Modelagem Matemática como prática em sala de aula**

3.5.1 Ambientes de Aprendizagem

Quanto aos Ambientes de Aprendizagem, Barbosa (2001) e Chaves (2004) apresentam a noção trazida por Skovsmose (2000), que se refere aos Ambientes de Aprendizagem como as condições propícias aos alunos para desenvolverem suas atividades. Assim, enquanto o termo “ambiente” diz respeito a um lugar ou espaço que cerca ou envolve, o Ambiente de

Aprendizagem pode se referir a uma metodologia, um conteúdo utilizado como recurso didático ou uma ação política de combate e ruptura aos dispositivos de controle do ETV.

Os Ambientes de Aprendizagem caracterizados por Skovsmose (2000) e discutidos por Barbosa (2001) e Chaves (2004) são: (1) Ambiente de Exercícios com referência à matemática pura; (2) Ambiente de Exercícios com referência à semi-realidade; (3) Ambiente de Exercícios com referência à realidade; (4) Cenário para Investigação com referência à matemática pura; (5) Cenário para Investigação com referência à semi-realidade; (6) Cenário pra Investigação com referência à realidade. Barbosa (2001) e Chaves (2004) convergem para um mesmo entendimento ao defenderem que o Ambiente (6) é o propício para o desenvolvimento da Modelagem Matemática enquanto procedimento de ensino, embora, tal como Chaves (2004) nós defendamos que uma situação ideal nos processos de ensino e de aprendizagem seria aquela que se perpasse por todos esses ambientes, evitando assim a hegemonia clássica do ETV, que Skovsmose (2000) classifica como Paradigma do Exercício, e que Chaves (2004) classifica como:

> um ambiente de aprendizagem, pautado no ensino tradicional, apresentado através de aulas expositivas, descontextualizadas (voltadas exclusivamente à Matemática, sem qualquer relação com referências à realidade do aluno), centradas somente no professor, onde uma programação curricular rígida se põe à frente do processo. No paradigma do exercício a aula expositiva ou expositivismo professoral é o principal dispositivo de controle daquilo que conhecemos como ensino tradicional de Matemática (ETM), onde o conteúdo programático é o elemento central, principal e irrefutavelmente é colocado além do bem e do mal (CHAVES, 2007, p. 76).

O aluno, a convite do professor, se insere nesse ambiente participando de seu próprio processo de aprendizagem, deixando de ser um mero expectador onde só o professor tem direito a voz. E esse ambiente, comentado por Barbosa (2001), é colocado como um convite aos alunos, por defender que o envolvimento dos mesmos ocorra à medida que seus interesses sejam atendidos mediante o convite feito pelo professor. O aluno é convidado a participar em seu processo de aprendizagem, e não a ser simplesmente um sujeito apático, em um ambiente onde só o professor possui o direito à voz, sendo passivo ou mero ouvinte face à homilia professoral, como aponta Chaves (2004).

Concluímos que, segundo Barbosa (2001), em trabalhos com a Modelagem o aluno deve ser convidado a se integrar e pesquisar, inserindo-se ao ambiente de aprendizagem que a Modelagem Matemática proporciona.

3.5.2 Etapas para um trabalho com Modelagem Matemática em sala de aula

Destacaremos aqui as etapas sugeridas por Burak (2004), uma vez que estas nortearão esta pesquisa. Burak compreende a Modelagem Matemática como uma metodologia alternativa para o Ensino de Matemática, que se inicia a partir do interesse dos envolvidos no processo, e destaca alguns aspectos que considera importantes para um trabalho acerca dessa tendência:

1°) Maior interesse do(s) grupo(s), onde lhes são oferecidas oportunidades de escolha de temas que julgarem interessantes e discussão dos mesmos, podendo compartilhar ideias com os colegas e o professor.

2°) Interação maior nos processos de ensino e de aprendizagem; aos grupos de alunos oportunizando um trabalho com temas de que gostam e que possuem significados para eles, tornando-os corresponsáveis pela aprendizagem.

3°) Demonstração de uma forma diferenciada de conceber a educação e, em consequência, a adoção de uma nova postura do professor, diferente da postura de transmissor de conteúdos.

Ao compartilhar o processo de ensino com os grupos, entendemos que se promove uma mudança de postura do professor, favorecendo, assim, o estabelecimento de relações mais afetivas entre ele e os alunos envolvidos no processo.

Em um trabalho que envolva a Modelagem Matemática na sala de aula, Burak (2004) desenvolve cinco etapas:

a) escolha do tema;

b) pesquisa exploratória;

c) levantamento dos problemas;

d) resolução do(s) problema(s) e o desenvolvimento da matemática relacionada ao tema;

e) análise crítica da(s) solução(ões).

A escolha do tema, na concepção de Burak (2004), deve vir dos interesses dos grupos envolvidos no processo, partindo dos conhecimentos que cada aluno tem sobre o assunto a ser abordado, tornando assim, o ensino da matemática dinâmico e mais significativo para os estudantes e os grupos. O professor pode apresentar aos discentes alguns temas e incentivá-los na busca de outros que sejam de seus interesses. Os conteúdos a serem trabalhados são determinados por problemas que são levantados por meio de uma pesquisa exploratória, ou pesquisa de campo. Ao contrário do currículo linear, os problemas levantados pelos grupos vão determinar os conteúdos a serem trabalhados. Isso gera, muitas vezes, insegurança e preocupação entre os professores, que recebem currículos ordenados com os conteúdos estabelecidos de acordo com as séries, transformando essa postura em um grande desafio a ser superado, como afirma o autor:

> A Modelagem enseja, ainda de forma natural e indissociável, o ensino e a pesquisa, pois ao trabalhar com temas diversos, de livre escolha do grupo ou dos grupos, favorece a ação investigativa como forma de conhecer, compreender e atuar naquela realidade. Não se pode intervir, de forma adequada, numa realidade que não se conhece. Assim, ao trabalhar um tema, procura-se conhecer as várias dimensões ou aspectos envolvidos que compõem essa realidade. Por exemplo, ao se trabalhar com o tema a "indústria cerâmica", procura-se conhecer as várias dimensões que constituem essa realidade, sejam elas políticas, sociais, econômicas, estruturais, dentre outras (BURAK, 2004, p. 5).

As dimensões acima mencionadas pelo autor são convenientes para este estudo e serão levantadas na pesquisa de campo. A experiência de campo vai nos auxiliar na terceira etapa - o levantamento dos problemas, ajudando a observar um comportamento mais atento, de maneira que torne

> os alunos capazes de realizar uma leitura mais atenta da realidade, atributos importantes na formação de um pesquisador. Na Modelagem Matemática os problemas

> apresentam características distintas dos problemas apresentados na maioria dos livros textos, pois são consequência da coleta dos dados, de natureza qualitativa ou quantitativa, provenientes da pesquisa exploratória:
> . São elaborados a partir dos dados coletados na pesquisa de campo;
> . Possuem geralmente caráter genérico;
> . Estimulam a busca e a organização dos dados;
> . Favorecem à compreensão de uma determinada situação (BURAK, 2004, p. 5).

Também nesse horizonte, na quarta etapa do processo, os problemas elaborados determinarão os conteúdos a serem trabalhados, pois, conforme assevera o pesquisador,

> Ainda, no contexto do tema escolhido, podem ser desenvolvidos vários conteúdos matemáticos provenientes dos dados coletados a partir das hipóteses levantadas pelo professor ou pelos grupos (BURAK, 2004, p.6).

Nessa etapa, será oportunizada a construção dos modelos matemáticos como uma representação e tal construção dependerá da situação-problema que os alunos estiverem investigando.

A quinta e última etapa, proposta por Burak, consiste na análise crítica das soluções, contribuindo para a formação de cidadãos participativos. Dessa forma,

> A análise crítica das soluções é a etapa marcada pela criticidade, não apenas em relação à matemática, mas em outros aspectos, como a viabilidade e a adequabilidade das soluções apresentadas, que muitas vezes são lógica e matematicamente coerentes, porém inviáveis para a situação em estudo. É uma etapa que favorece a reflexão acerca dos resultados obtidos no processo e como estes podem ensejar a melhoria das decisões e ações (KLÜBER; BURAK, 2007, p. 4).

Assim sendo, um trabalho de Modelagem Matemática que perpasse por essas cinco etapas, de acordo com Burak (2004), favorece a interação com o meio ambiente uma vez que o ponto de partida é o cotidiano do aluno, e vem contribuir para um melhor desenvolvimento e crescimento dos estudantes, que, ao percorrerem esse caminho, podem se tornar cidadãos mais críticos e capazes de questionar e buscar as soluções para a situação-problema em estudo.

3.5.3 O uso da Informática no trabalho com Modelagem Matemática

Segundo Oliveira (1997), a utilização do computador na Modelagem Matemática faz com que os conceitos matemáticos sejam interiorizados e formalizados de uma maneira mais fácil e natural. Assim, o tempo gasto na coleta de dados e formulação de questões é compensado com o uso do computador.

Tendo como objetivo superar práticas antigas e buscar a construção do conhecimento que privilegia o processo e não o resultado, a Modelagem enfatiza a pesquisa por parte dos alunos, pois se acredita que os computadores podem contribuir para modificar as práticas do ensino tradicional. Tal crença se baseia no fato de que o computador tornou-se um instrumento de comunicação, de pesquisa de informações, de produção de mensagens e está amplamente inserido no dia a dia das pessoas.

Dentre os diversos recursos (visuais, auditivos, animação, simulação e de cálculos) que o computador possui e que podem auxiliar no processo de aquisição do conhecimento, podemos citar também a facilidade para tratamento simbólico, numérico e a rapidez de respostas. Assim, no que se refere ao uso da informática na Modelagem Matemática acreditamos que muitas dificuldades do processo podem ser superadas pela facilidade de coleta e tratamento de dados e pela manipulação através da utilização de *softwares* e da Internet.

A inserção dos computadores no dia-a-dia das pessoas tornou o mundo informatizado, contexto em que se pode "dizer que a familiaridade com esse tipo de recurso adquire hoje importância comparada às habilidades de leitura, escrita e contagem" (FRANCHI, 2007, p. 182-183). E mais:

> Para a criação de ambientes que se beneficiem das características dessa nova mídia, o professor é levado a refletir sobre sua prática pedagógica. Não se trata de desenvolver sequencias de atividades no estilo da

> chamada instrução programada, em que o computador assume o papel do professor transmissor de conhecimento, continuando o aluno na posição de receptor. Se o que se busca é colocar o aluno interagindo com o conhecimento, o uso do computador adquire outra dimensão (FRANCHI, 2007, p. 183).

Assim sendo, o aluno que participa e interage com as atividades e com o *software* leva o professor a assumir um papel de intermediador - aquele que questiona e provoca reflexões. A informática é vista como auxiliadora em alguns trabalhos onde a modelagem matemática está presente, como pontua a autora:

> O trabalho conjunto da Informática com a Modelagem trouxe novas possibilidades para a Modelagem. Muitas das dificuldades do processo de Modelagem ficaram superadas pela facilidade de coleta e tratamento dos dados e pela manipulação das representações (matrizes, planilhas, gráficos ou equações) através da utilização de softwares e da Internet. O modelo pode ser construído com mais liberdade, sem o receio de que o tratamento matemático possa ser demasiadamente complicado, ou difícil de ser abordado naquela etapa de escolaridade. A utilização da informática pode também facilitar a comunicação entre as pessoas envolvidas no processo de construção do modelo, possibilitando um constante diálogo em momentos não presenciais (FRANCHI, 2007, apud ABREU, 2011, p. 68).

Com essa citação, Franchi procura apresentar a modelagem matemática e a informática como tendências para a Educação Matemática, entendendo que sua utilização pode facilitar e contribuir para o desenvolvimento de competências para a atuação crítica na sociedade. O computador já faz parte do cotidiano de milhares de pessoas e o mundo se encontra informatizado; portanto, a familiaridade com esse recurso é de grande importância tanto para educadores quanto para educandos, aumentando-se assim, as possibilidades de observação e experimentação.

Muitos problemas abordados pelos livros didáticos não são mais "problemas", uma vez que um site de busca mostra sua resolução. Assim, "temos que pensar que o que será problema de fato para os alunos pode depender da Internet. Esse é um novo elo entre Modelagem e Internet" (BORBA; MALHEIROS, 2007, p. 208).

Segundo estes mesmos autores, a Modelagem, juntamente com a internet, pode se tornar importante para o processo de aprendizagem.

4 A ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Ao se considerar os aspectos históricos da introdução da Análise Combinatória ou Cálculo Combinatório no ensino da matemática, podemos dizer que por muito tempo ela foi considerada completamente desligada do cálculo aritmético, conforme Rey Pastor (1929), citado por Vazques e Noguti em um artigo apresentado no VIII Encontro Nacional de Educação Matemática ocorrido em Recife – 2004.

Concordamos com esses autores quando afirmam que a Análise Combinatória é um conteúdo matemático que apresenta grande dificuldade em relação à formulação e, principalmente, interpretação dos seus enunciados. É um ramo da Matemática em que se permite que escolha, arrume e conte o número de elementos de determinado conjunto sem que haja necessidade de enumerá-los. Além disso, os problemas que envolvem a Análise Combinatória constituem um desafio para os alunos, pois exigem flexibilidade de pensamento: é necessário concentrar, discutir e pensar para poder resolvê-los. Considerando que as operações combinatórias são imprescindíveis para o desenvolvimento cognitivo (Yahata, 2012), é de extrema importância que o aluno tenha contato com esse tópico desde os primeiros anos da escola básica, de modo que possa familiarizar-se com problemas de contagem, descrevendo os casos possíveis e contando-os através de uma representação por ele escolhida. Para tanto, a formalização para a resolução dos problemas de contagem deverá acontecer de forma sistemática e gradativa no Ensino Médio.

Vazquez e Noguti consideram que

> esse tema parece não ser bem visto tanto por docentes como discentes de um modo geral, parece sim, uma quantidade enorme de fórmulas com muitas definições que os alunos utilizam mecanicamente, muitas vezes até, não resolvendo simples problemas de contagem. Faltam exemplos concretos, conhecimento e aplicações em sala de aula. A introdução destes conceitos, mesmo que de forma básica, utilizando o principio fundamental da contagem pode ser o inicio da desmistificação de um conteúdo interessante e que pode ser entendido através de raciocínios primeiramente simples para depois começar a se explorar

> problemas mais complexos (VAZQUEZ e NOGUTI, 2004, p.6).
>
> .

Assim, para Vazquez e Noguti, o assunto representa uma grande quantidade de fórmulas e definições, que são usadas mecanicamente e que podem ser substituídas pelo uso do princípio fundamental da contagem. De acordo com os autores, ao utilizar esse princípio, é possível determinar o número de elementos de conjuntos formados de acordo com certas regras, sem que seja necessário enumerar seus elementos.

A primeira técnica matemática aprendida por uma criança é “contar”, ou seja, enumerar elementos de um conjunto de forma a determinar quantos são os elementos componentes do mesmo. As operações aritméticas são aprendidas pelas crianças através da aplicação de problemas de contagem, sem que muitas vezes elas percebam isso.

Por exemplo, a operação de adição é em geral introduzida conjuntamente com um problema de contagem, como podemos ver na figura abaixo:

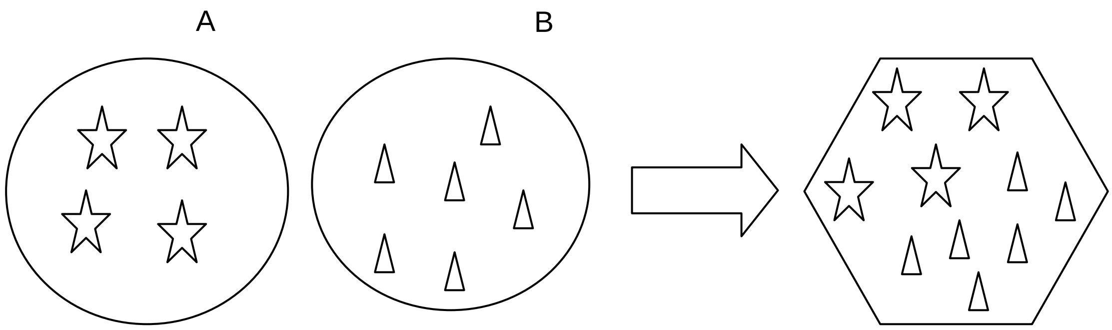


Figura 1: Operação de adição entre dois conjuntos utilizando o Princípio da Adição.
Fonte: VAZQUEZ e NOGUTI, 2004.

Por outro aspecto, acredita-se que o ensino da combinatória é válido quando utilizamos raciocínio e entendimento das fórmulas propostas pelos matemáticos. Porém, a aplicação direta de fórmulas sem o entendimento das mesmas faz com que os alunos apenas repitam passos e trabalhem mecanicamente, tornando o seu estudo e aprendizado um mero jogo de fórmulas.

Como uma primeira apresentação dos conceitos de Análise Combinatória, podemos salientar os princípios da adição e da multiplicação. A figura acima ilustra um desses princípios básicos da contagem, o Princípio da Adição, que pode ser assim enunciado: se existem **p** diferentes elementos no conjunto **A**, e **q** elementos diferentes no conjunto **B**, e se os conjuntos **A** e **B** são disjuntos, então o número total de elementos diferentes, que podem ser escolhidos no conjunto união de **A** e **B**, é **p + q**.

Outra ferramenta básica para resolver problemas de contagem é o Princípio da Multiplicação ou Princípio Multiplicativo: se um acontecimento **A** pode ocorrer de **m** maneiras diferentes e se, para cada uma das **m** maneiras possíveis de ocorrência de **A**, um segundo acontecimento **B** pode ocorrer de **n** maneiras diferentes, então o número de maneiras de ocorrer o acontecimento **A** seguido do acontecimento **B** é **m.n**.

Para melhor entender, consideremos o seguinte exemplo: Maria quer vestir sua boneca, e para isto ela dispõe de 4 blusas de cores diferentes e 3 saias, também de cores diferentes. De quantos modos ela pode vestir a boneca? Para resolver este problema, temos que considerar dois passos:

Passo 1 : escolher a blusa;

Passo 2 : escolher a saia;

Observa-se que a escolha da blusa pode ser feita de 4 maneiras diferentes, enquanto que a escolha da saia pode ser feita de 3 maneiras diferentes. Assim, o número de maneiras de vestir a boneca será 4 x 3 = 12.

Muitos problemas podem ser resolvidos pela simples enumeração de seus casos. Porém, este método pode se tornar impraticável quando for grande o número de casos a se considerar. Isto justifica a necessidade de algumas “regras” para a obtenção dos resultados, desde que sejam mostradas e compreendidas pelos alunos. Por exemplo; quantos números de 3 algarismos distintos é possível formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6?

Observa-se que o algarismo das centenas pode ser escolhido de 6 maneiras diferentes, enquanto que o das dezenas pode ser escolhido de 5 maneiras diferentes e, por último, o das unidades pode ser escolhido de 4 maneiras diferentes. Utilizando-se o princípio da multiplicação (método que permite resolver problema só com o uso da multiplicação), podemos concluir que existem 6.5.4 = 120 números de três algarismos distintos, formados com os seis algarismos dados; em outra palavras, pode-se dizer que existem 120 arranjos de 6 algarismo tomados 3 a 3 e que pode ser assim representado: A_6^3. A partir destes dados, podemos pensar no arranjo e, através de outros exemplos, mostrar suas características. Em seguida, podemos deduzir uma fórmula que sirva de auxílio na resolução de exercícios que possuam muitos casos a analisar.

O primeiro elemento de um arranjo de **n** objetos, tomados **r** a **r**, pode ser escolhido de **n** maneiras diferentes, enquanto que o segundo elemento do arranjo pode ser escolhido de **n-1** maneiras; depois, o terceiro elemento do arranjo pode ser escolhido de **n-2** maneira e, continuando essa sequência, tem-se que o último elemento do arranjo pode ser escolhido de **n – (r – 1) = n – r + 1** maneiras diferentes. Logo:

A_n^r= n.(n-1).(n-2). ... . (n-r+1)

Multiplicando-se, membro a membro, essa relação por:

(n – r)! = (n-r)(n-r-1). ... . 3.2.1 vem:

(n-r)! A_n^r= n.(n-1).(n-2). ... . (n-r+1)(n-r)(n-r-1). 3.2.1

ou:

(n-r)! A_n^r= n!

Onde tem-se: $A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$, que é a fórmula que nos permite calcular o número de Arranjos de n objetos tomados r a r.

De outro modo, é possível propor o seguinte problema: Quantos números de 6 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2,3,4,5,e 6? Neste caso em que n = r , teremos (n – r)! = 0!. Sabe-e que por definição 0! = 1, portanto, tem-se que:

A_n^n= n.(n-1).(n-2). ... . 3.2.1 = n!

Em outras palavras, existem n! permutações de n objetos tomados n a n. Com este pensamento é possível introduzir-se o termo permutação enquanto um caso particular de arranjo e o resultado do problema dado seria 6! = 720 números distintos.

Em um outro caso, tem-se o seguinte problema: Uma escola tem 9 professores de Matemática. Quatro deles deverão representar a escola em um congresso. Quantos grupos de 4 professores poderão ser formados?

Observa-se que o primeiro representante pode ser escolhido de 9 maneiras diferentes, o segundo de 8 maneiras diferentes, o terceiro de 7 maneiras diferentes e o quarto de 6 maneiras diferentes, ou seja, um arranjo de 9 professores tomados 4 a 4, isto é: 9.8.7.6 = 3024. Mas nesse caso, um agrupamento se distingue do outro somente quando apresenta, pelo menos, uma pessoa diferente, pois, a ordem dos elementos, não altera o grupo. A quantidade de agrupamentos formados por esses professores, mudando-se apenas a ordem, é dada por 4! = 24. Logo temos 3024 : 24 = 126 grupos formados. A esse tipo de agrupamentos dá-se o nome de combinação e sua fórmula poderia ser deduzida assim:

Ao se arranjar n objetos tomados r a r, na realidade agrupam-se estes objetos e permutam-se os mesmos, e com este pensamento pode-se concluir que:

$$A_n^r = r!.\, C_n^r$$

Assim, obtém-se:

$$C_n^r = \frac{A_n^r}{r!} = \frac{n.(n-1)\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots.r}$$

Multiplicando por (n – r)! os dois membros, vem:

$$(n-r)!.C_n^r = \frac{n.(n-1)\ldots.(n-r+1).(n-r)(n-r-1)\ldots.2.1}{1.2.3\ldots..r}$$

Logo, $C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ que é a fórmula que nos permite calcular o número de combinações distintas de n objetos tomados r a r.

4.1 **A Análise Combinatória na Educação Brasileira**

A Análise Combinatória é uma ferramenta essencial utilizada em diversas áreas do conhecimento científico, possuindo um vasto campo de aplicações. Ao pesquisar sobre o surgimento deste conteúdo nos livros didáticos, foi possível encontrar no artigo de Souza os seguintes dizeres sobre a gênese da Análise Combinatória no contexto histórico:

> nos livros de História da Matemática, a localização deste conteúdo foi detectada de forma esparsa, sendo que seu desenvolvimento deve-se em grande parte, à necessidade de se resolver problemas de contagem originados na teoria das probabilidades (SOUZA, 2010, p. 15).

E ainda, segundo a mesma autora, os livros pesquisados entre as décadas de 40 a 90 e anos 2000, apresentavam, em sua maioria, a Análise Combinatória nos moldes do ensino tradicional.

Dentre as várias definições do que vem a ser a Análise Combinatória, destaca-se a que está relacionada com o Princípio Fundamental de Contagem, também chamado de Princípio Multiplicativo, já enunciado anteriormente.

Ao compreender o Princípio Multiplicativo, espera-se que os alunos estejam preparados para aprender os tópicos que dão sequência à matéria - arranjo, combinação e permutação –, e que estejam aptos a usar corretamente os princípios apresentados, pois, de acordo com os Parâmetros Curriculares do Ensino Médio:

> A Contagem, ao mesmo tempo em que possibilita uma abordagem mais completa da probabilidade por si só, permite também o desenvolvimento de uma nova forma de pensar em Matemática denominada raciocínio combinatório. Ou seja, decidir sobre a forma mais adequada de organizar números ou informações para

> poder contar os casos possíveis não deve ser aprendido como uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação. As fórmulas devem ser consequência do raciocínio combinatório desenvolvido frente as resolução de problemas diversos e devem ter a função de simplificar cálculos quando a quantidade de dados é muito grande (BRASIL 2000, p. 126 e 127).

Segundo Pitombeira “a Análise Combinatória poderia ser chamada de arte de contar” (1986, p. 21), estando, dessa forma, envolvida diretamente com o processo de contagem. Concordamos com Souza quando afirma que a Análise Combinatória é um campo da matemática formado por um conjunto de conteúdos e princípios que possuem diversas compreensões e que apresenta grande dificuldade em relação à formulação e interpretação de seus enunciados, permitindo que se escolha, arrume e conte o número de elementos de determinado conjunto, sem a necessidade de enumerá-los.

A Análise Combinatória é um dos conteúdos que compõem o programa do Ensino Médio e que possui uma variedade de aplicações em problemas reais, como por exemplo, os problemas que envolvem cálculo do número de agrupamentos que podem ser feitos com os elementos de um ou mais conjuntos.

São vários os desafios encontrados por alunos e professores, pois as operações combinatórias exigem flexibilidade de pensamento, construção de conjecturas e discussão de ideias. Este pensamento encontra suporte nas pesquisas de Schliemann (2001, apud Pinheiro; Sá, 2007), segundo os quais as operações são, portanto, essenciais para o desenvolvimento cognitivo, justificando assim a importância de seu estudo desde os primeiros anos da instrução básica, onde o aluno inicia sua familiarização com problemas de contagem, livre de regras e princípios para, posteriormente, formalizar seu conhecimento no Ensino Médio. Porém, Sabo (2007) observou que muitos professores de Matemática, por diversas razões, evitam ou até não abordam de forma consistente o tema Análise Combinatória, conforme expõe:

> Algumas vezes, observo professores afirmando que eles próprios não têm esses conceitos construídos de forma sólida e significativa, e, por esse motivo, evitam abordar o tema ou, optam, apenas, a apresentar aos alunos um

> processo de aplicação de formulas prontas, sem justificativas ou explicações. Assim sendo, o aluno necessita utilizar-se da memorização para aplicar a fórmula certa na resolução de problemas específicos, ou seja, o ensino de Análise Combinatória torna-se tecnicista e operacional. Acredito que, neste contexto, a aluno sente a necessidade de adivinhar a fórmula pertinente para encontrar a resposta do problema. Essa atitude pode favorecer ou não o desenvolvimento do raciocínio combinatório como também, a não construção dos conceitos desse tema (SABO, 2007, p. 8).

Sabo pontua que os professores que não possuem conceitos construídos de forma sólida e significativa, têm dificuldades de abordar este tema, e, por isso, limitam o ensino deste conteúdo ao uso de fórmulas que os alunos decoram sem saber ao certo em quais situações poderão usar.

Assim, o estudo da Análise Combinatória, de forma geral, é carregado de uma grande quantidade de fórmulas e definições utilizadas pelos alunos, na maioria das vezes, mecanicamente, ou seja, muitas vezes sem reflexões ou aplicação em exemplos concretos em sala de aula, isto é, utilizam-se fórmulas sem significação para os alunos. A aplicação direta de fórmulas sem o entendimento das mesmas faz com que os alunos apenas repitam procedimentos e trabalhem de forma repetitiva, tornando o estudo e aprendizado apenas um jogo de fórmulas onde não se consegue estabelecer conexão entre os problemas trabalhados em sala de aula e a realidade em que vivem.

A introdução de conceitos com utilização do princípio fundamental da contagem - ferramenta que permite determinar o número de elementos de um conjunto formado de acordo com certas regras, sem que seja necessário enumerar seus elementos - pode ser uma forma de desmistificar o conteúdo, pois este pode ser entendido através de raciocínios primeiramente simples para, posteriormente, explorar problemas mais complexos.

Segundo Pinheiro e Rosa (2006), trabalhos realizados por Sturm (1999), Esteves (2001), Rocha (2002), Costa (2003), desenvolvidos no Brasil, apontam as dificuldades do ensino de Análise Combinatória nas escolas. Entre as dificuldades, especialmente aquelas relativas à aprendizagem, é possível destacar a falta de compreensão dos textos estruturais dos problemas, bem como a falta de compreensão da diferença entre problemas de arranjo e combinação. Por outro lado os trabalhos de Sturm, Esteves e Costa sinalizam propostas de ensino de Análise Combinatória que venham minimizar ou superar algumas das dificuldades apontadas anteriormente. Também nos trabalhos de Sturm, Costa e Pinheiro e Roza encontramos as dificuldades pontuadas pelos professores ao ministrarem aulas sobre o assunto.

Percebe-se, portanto, que o assunto vem sendo apresentado em algumas obras que evidenciam sua importância enquanto conteúdo escolar, no intuito de procurar identificar aspectos que influenciam nos processos de ensino e de aprendizagem deste conteúdo.

4.2 **Os Parâmetros Curriculares Nacionais e o estudo da Análise Combinatória**

Os Parâmetros Curriculares Nacionais são referenciais (diretrizes) do sistema de ensino brasileiro, cujo objetivo principal é o de articular as diferentes áreas do conhecimento; desempenham, assim, um importante papel como instrumento norteador. O processo de ensino via modelagem está em perfeita sintonia com as diretrizes propostas, como demonstrado pela seguinte passagem:

> No decorrer dos primeiros ciclos do Ensino Fundamental os alunos devem ser levados a desenvolver a familiarização com a contagem de agrupamentos, de maneira informal e direta, fazendo, por exemplo, uma lista de todos os agrupamentos possíveis para depois contá-los (PCN, 1998 p. 52).

O contato com problemas de contagem no Ensino Fundamental tem por objetivo levar o aluno a compreender o princípio multiplicativo. Tal princípio está quase sempre associado a situações do tipo: “se cada objeto de uma coleção A for combinado com todos os elementos de uma coleção B, quantos agrupamentos desse tipo dede-se formar?” (PCN, 1998 p. 137). Além disso, a exploração dos problemas de contagem pode direcionar o aluno desde cedo a fazer uso de representações (diagrama de árvore, tabelas, desenhos, esquemas) como procedimentos de resolução.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) destacam, dentre outras coisas, a importância do raciocínio combinatório na formação dos alunos do Ensino Médio e o cuidado que os professores devem ter ao procurar desenvolvê-lo. Segundo esse documento:

> As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornam bastante complexas. Técnicas de raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das ciências da Natureza quanto das ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidades no Ensino Médio (BRASIL, 1998, p. 257).

Assim sendo, os PCNs enfatizam que o fato de o aluno ser estimulado a questionar sua própria resposta, a questionar o problema, a transformar um dado problema numa fonte de novos problemas, a formular problemas a partir de determinadas informações e a analisar problemas abertos – que admitem diferentes respostas em função de certas condições – evidenciando, portanto, uma concepção de ensino e de aprendizagem que se dá não pela mera reprodução de conteúdos, onde o aluno recebe informações prontas e têm, como única tarefa, repeti-las na íntegra, mas pela via da ação refletida capaz de estimular a aprendizagem. Para que o aluno possa apreender uma informação e aprender algum conteúdo será necessário que, diante do enunciado do problema, ele conheça e compreenda cada expressão verbal utilizada.

A partir dessa premissa, a Análise Combinatória seria então descrita como o campo da matemática que se ocupa de estudar, examinar, descrever e determinar as diferentes e possíveis classificações que podemos obter e observar de um conjunto dado e de seus elementos constitutivos.

Percebe-se, a partir da análise dos pressupostos dos PCNs, que existe um número bastante amplo de situações que a Análise Combinatória engloba e que procura desvendar a partir das diferentes abordagens que o tema sugere.

Os PCNEM (BRASIL, 2000) estruturam a matemática do Ensino Médio em três temas, sendo que a Análise Combinatória faz parte do tema Análise de Dados, juntamente com a Probabilidade e a Estatística. Além de ser um instrumental para o estudo desses conteúdos, a Análise Combinatória é vista como uma forma de desenvolver uma nova maneira de pensar, denominada Raciocínio Combinatório - que é a capacidade de organizar informações através da construção de um modelo simplificado e explicativo para contar os casos possíveis para uma determinada situação, com o objetivo de uma posterior tomada de decisão.

4.3 **O Ensino Tradicional Vigente (ETV)**

São muitas as dificuldades que os educadores matemáticos enfrentam em suas práticas diárias, principalmente nas salas de aula. Os conteúdos a serem trabalhados são determinados, em grande parte, por currículos que, muitas vezes, seguem o que é cobrado em vestibulares ou provas externas, não levando em consideração a necessidade do aluno em compreender a matemática como uma disciplina presente e constante em seu cotidiano. Os professores são sujeitos ao cumprimento desse programa, assegurando, assim, a continuidade do ETV.

Ao caracterizar a metodologia da Assimilação Solidária como uma proposta interventora na sala de aula, Silva discorre sobre alguns pontos que o ETV aborda, pois nele o “foco principal está no conteúdo e no professor” (2000, p. 151). Baldino corrobora esta proposta ao argumentar que:

> Quando, p. ex., o professor volta-se para o quadro e começa a “dar a matéria”, ou no momento em que define o horário de provas, está evocando um contrato implícito, que assim o é porque não pressupõe negociação entre professor e alunos. O contrato implícito do ETV ocorre com perfeita naturalidade, e é justamente essa naturalidade que inibe as possibilidades de modificação:

> se é “natural” que assim seja, não pode ser de outro jeito. Dentro deste contexto, espera-se os alunos sentados em fileiras e o professor em pé defronte ao quadro, falando e escrevendo (BALDINO, 1985, apud SILVA, 2000, p. 152).

Nesse sentido, Baldino aponta para uma compreensão de que cabe ao aluno pronta e simplesmente obedecer para obter sucesso no processo de aprendizagem. Esse modelo de ensino ainda é frequente no ambiente da escola, sendo adotado por um grande número de professores enquanto processo em que “o professor transmite o conhecimento ‘mostrando’ e que o aluno aprende ‘vendo’” (SILVA, 2000, p. 152). Sendo assim, enquanto o professor assume uma postura tradicional, os alunos constituem-se em meros ouvintes, cabendo ao professor ser o transmissor de teorias matemáticas e apresentador de exemplos para ilustrarem o que foi previamente demonstrado.

O professor de matemática que trabalha de maneira tradicional, conforme apresentado por Chaves (2004), é um dos dispositivos de controle mantenedores do ETV, pois acaba por assumir uma postura de detentor do saber e do conhecimento necessário a ser transmitido aos alunos, ficando esses últimos com o dever de frequentarem no mínimo 70% das aulas e repetirem através de exercícios e de provas escritas o que foi repassado pelo docente. Sendo assim, “no ETV alardeia-se a preocupação com a injustiça de reprovar o aluno que sabe, exatamente para desviar a atenção da injustiça que mais se comete, ao aprovar o que não sabe” (BALDINO, 1995, p. 2).

A partir desse cenário, esta pesquisa busca romper com o tradicionalismo que permanece até os dias atuais, e está fundamentada no desejo de encontrar uma alternativa que auxilie o trabalho dos educadores. Para tanto, será formulada uma metodologia da Modelagem Matemática cuja finalidade é de nortear o trabalho com os conteúdos de Análise Combinatória.

4.4 **Livros didáticos, ETM e PCN: algumas considerações**

Ao analisar alguns livros didáticos utilizados para o trabalho de Análise Combinatória no Ensino Médio, Sabo (2010) observou que a maioria apresenta esse conteúdo nos moldes do Ensino Tradicional de Matemática - ETM, prevalecendo a preocupação com a transmissão de conteúdos e aplicações direta de fórmulas e leis. Foi observado que, além do excesso de regras e fórmulas, neles não é possível encontrar-se a associação da matemática com o cotidiano do educando, bem como também não se encontra nenhum aspecto que possa favorecer o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

A prática pedagógica favorece o contato com livros que são fornecidos pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLEM), o que leva a acordar com Chevallard, quando este afirma que:

> Os problemas escolares tendem a ser apresentados, efetivamente, como enunciados perfeitamente elaborados, cujos textos costumam esconder a problemática que lhe deu origem. Isto acontece a tal ponto que poderíamos falar de um autêntico “desaparecimento” das questões ou das tarefas reais que originaram as obras matemáticas na escola (CHEVALLARD, 2001, apud Almeida; Brito, 2005, p. 10).

A partir do que pontua Chevallard, e na tentativa de romper com o ETM para, consequentemente, quebrar a linearidade curricular imposta por esta forma de ensino, propomos o referencial teórico oriundo da modelagem matemática, tal como sugerida em diversos trechos da obra de Chaves (2004). Tal proposta se preocupa com a pesquisa e a busca, por meio do interesse do aluno, por questões que julguem pertinentes para a própria realidade e, através delas, a construção de modelos e a interpretação dos mesmos, que poderão auxiliar no aprendizado. O rompimento com a linearidade curricular acontece na medida em que os problemas levantados que determinarão os conteúdos a serem trabalhados - e esses conteúdos, interligados à situação pesquisada e proposta pelos alunos - serão compreendidos pelos mesmos, visto que eles pesquisaram e se interessam em saber o desfecho da situação que foi apresentada. O professor pode sugerir temas e direcionar para o estudo de determinados assuntos, mas várias situações surgirão em torno da questão pesquisada, sendo passíveis de serem trabalhadas enfocando a Modelagem Matemática.

Essa ruptura com a linearidade curricular encontra respaldo nos Parâmetros Curriculares Nacionais - Ensino Médio, no que diz respeito às suas finalidades. Assim, as finalidades do ensino de Matemática no nível médio têm como objetivos:

- aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;
- analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas de Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade (BRASIL, 1998, p. 42).

5 DESENVOLVIMENTO DA ATIVIDADE: A ANÁLISE COMBINATÓRIA E O RESTAURANTE *SELF SERVICE*

Conforme delineado anteriormente, usualmente, o estudo da Análise Combinatória inicia-se com a introdução dos princípios aditivo e multiplicativo e, em seguida, utilizando-se de exemplos, é feita a apresentação de formulários sem nenhuma relação com o dia-a-dia do aluno. Cabe ao professor, portanto, o desenvolvimento de atividades que levem os alunos a utilizarem a matemática de forma contextualizada, de modo que os conduza a uma melhor compreensão dos conteúdos e conceitos.

Ao buscar uma abordagem alternativa capaz de contribuir com a ruptura dessa forma tradicional de ensino de Análise Combinatória, deparamo-nos com metodologias que podem ser utilizadas pelo professor em sala de aula com objetivo de despertar nos alunos o prazer e a vontade, bem como estabelecer um elo entre a matemática e o cotidiano do aluno. Dentre várias metodologias, destacamos a Modelagem Matemática que, ao ser trabalhada, possibilita aos alunos a pesquisa e a busca de matemática em situações reais, tornando-os sujeitos participantes na construção de conceitos matemáticos. Concordamos assim com Bienbengut, ao afirmar que: “a modelagem matemática no ensino pode ser um caminho para despertar no aluno o interesse por tópicos matemáticos que ainda desconhece ao mesmo tempo em que aprende a arte de modelar, matematicamente” (BIENBENGUT,1999, p. 36).

O ensino de Análise Combinatória por meio da Modelagem Matemática, conforme proposto, busca a ruptura com o currículo linear ao proporcionar aos estudantes a participação na construção de seus conhecimentos. As situações-problema levantadas pelos alunos, ou sugeridas pelos professores, devem estar associadas à realidade desses alunos, para que eles possam investigar e buscar soluções para suas inquietações e anseios. Para isso, se torna necessária uma maior proximidade dos professores com seus alunos para que estejam inteirados da realidade em que vivem.

5.1 **Em busca de situações matemáticas: visita a restaurantes *self service***

Em nossa pesquisa bibliográfica por trabalhos e artigos que utilizem a Modelagem Matemática encontramos algumas dissertações e artigos cuja leitura nos auxiliaram para a elaboração de um trabalho experimental com alunos do Ensino Médio. Dentre esses trabalhos, destacamos a dissertação de Lorena Luquini de Barros Abreu com o título: *Estudando conteúdos matemáticos com direcionamento de modelagem matemática: o caso da função afim.* Nesta dissertação, o ambiente utilizado para a pesquisa de campo foi uma pizzaria. Foi a partir dessa leitura que surgiu a ideia de trabalhar questões encontradas em um restaurante *self service,* que possibilitassem o estudo de diversos conteúdos, dentre eles a Análise Combinatória. Esse tipo de restaurante elegido para a problematização é muito utilizado pelos alunos por oferecer uma alimentação com preço razoável e de forma rápida, pois cada um se serve da melhor forma que lhe convier. Acreditamos que a oportunidade de se buscar uma ligação dos restaurantes *self service* com a matemática pode despertar o interesse e a curiosidade, pois os alunos poderão pesquisar o que há de matemática por trás dos valores do quilo de alimento, das combinações de sabores ao montarem seu prato, das atribuições dadas aos funcionários, etc.

A ideia de trabalhar questões encontradas em um restaurante *self service* oportunizou algumas reflexões pertinentes, tais como: o que se deve considerar para escolher um determinado restaurante; o que deve ser observado no cardápio; quais opções para se servir tal restaurante oferece, levando-se em consideração o sabor e/ou valores nutricionais dos alimentos, etc. Assim, uma visita ao restaurante criaria a oportunidade de uma pesquisa onde os alunos vivenciariam as diversas opções de escolha de alimentos.

5.2. **Modelagem Matemática e o restaurante *self service***

Acreditamos que a utilização da Modelagem Matemática como uma metodologia de ensino exige esforço e dedicação dos professores assim como dos alunos para que se vença as diversas dificuldades na implementação desta metodologia. Tal pensamento vai ao encontro do que pensa Bassanezi (2002), citado por Souza (2006), quando afirma que são muitas as causas que contribuem para a dificuldade da implementação da Modelagem Matemática em sala de aula.

Dentre os diversos fatores o autor comenta que o uso da modelagem foge da rotina do ensino tradicional; sendo assim, os estudantes não acostumados ao processo podem se perder ou se tornarem desinteressados nas aulas. Além disso, a formação heterogênea de uma classe pode ser também um obstáculo para que alguns alunos relacionem os conhecimentos teóricos adquiridos à situação prática em estudo.

Vale ressaltar, também, que os resquícios de um ensino tradicional de matemática encontram-se muito presentes até os dias atuais, e, por isso, a maioria dos educandos entende que o estudo é uma mera memorização, e que o seu entendimento é excessivamente dependente do professor. Tal fato faz com que muitos professores se sintam desmotivados e despreparados para assumir uma nova metodologia de ensino. Nessa perspectiva, os alunos, acostumados a ver o professor como transmissor de conhecimento, têm uma postura passiva em relação à aula. Esperam receber explicações e participar apenas fazendo perguntas ou resolvendo exercícios.

A seguir, listamos algumas dificuldades para o aluno:

- Interpretação de um contexto: o ensino tradicional não capacita o aluno a fazer leitura do contexto. Raramente são desenvolvidas habilidades de realizar leitura de música, obra de arte, contexto histórico, situação política, entre outras. Nestes termos, quando o aluno é colocado diante de um contexto, apresenta dificuldade em ler, entender e interpretar.

- Disponibilidade para pesquisa: os temas exigem pesquisa para a qual, muitas vezes, a escola não dispõe de recursos. Neste caso, a pesquisa feita fora dos limites escolares pode não ser sempre possível.

- Escolha do tema: a escolha do tema não é simples. A ideia de cada aluno em escolher um assunto de interesse nem sempre proporciona os resultados esperados. Se o tema escolhido for muito simples, que não acrescente qualquer conhecimento matemático, pode gerar desmotivação e desinteresse pelo trabalho.

- Trabalho em grupo: o tema escolhido pelo grupo não assegura o interesse de todos; além disso, o tema pode exigir conhecimento matemático que não consta no programa. Isso requer maior empenho de cada um para aprender e realizar a proposta. A ausência de empenho e compromisso rompe a proposta de realizar o trabalho em grupo, ficando nas mãos de um ou dois alunos e desviando o sentido de grupo - que é a cooperação e socialização pela aprendizagem.

Tais problemas poderão ser vencidos pelo próprio professor com um trabalho contínuo, onde ele possa, além de ensinar, aprender a fazer Modelagem, e transformar o ambiente de sala de aula num ambiente de interação permanente, possibilitando assim a aprendizagem.

Por sua vez, os professores se sentem inseguros nas atividades de Modelagem ao perceberem que a implementação dessa metodologia poderá modificar suas posturas didáticas. Tal insegurança pode advir principalmente da sua formação acadêmica, nos cursos de Licenciatura.

Para intervir nesse horizonte, Biembengut propõe:

> Para se utilizar dessa estratégia, é necessário saber, a priori, o tempo disponível dos alunos para trabalho extraclasse, o número de horas-aula do curso em questão e o conhecimento matemático comum a todos os participantes. Definidas essas condições, o professor pode optar por apresentar e propor o estudo dos modelos matemáticos clássicos e, posteriormente, realizar a modelagem matemática, ou optar por iniciar com a modelagem, intercalando, adequadamente, a exposição de modelos (BIENBEMGUT,1999, apud Abreu 2011, p. 37).

Assim, para iniciar um trabalho com a Modelagem Matemática se faz necessário que o professor estimule seus alunos a participarem do processo. Ainda, Biembengut afirma que tal estímulo pode ser dado a partir do momento em que o professor torna o aluno ciente do processo, apresentando a ele uma definição de modelagem matemática e mostrando-o como esse método pode valer para o aprendizado de conteúdos matemáticos.

Em nossa pesquisa, ao observar um restaurante *self service*, objetivamos despertar o interesse e a curiosidade dos alunos, uma vez que este é um ambiente frequentado constantemente por eles. Com este propósito, a pesquisa exploratória consiste na visita a um restaurante *self service* em busca de situações matemáticas presentes nesse ambiente. A partir de observações e coleta de dados, alguns conteúdos matemáticos poderão ser trabalhados, dentre eles a Análise Combinatória, considerando que os alunos já tiveram contato com este conteúdo quando cursaram o Ensino Fundamental.

Para tanto, esta pesquisa adotou as etapas de Burak para elaboração e embasamento da pesquisa. Tais etapas consistem na escolha do tema, pesquisa exploratória; levantamento dos problemas; resolução dos problemas e o desenvolvimento da matemática relacionada ao tema; e análise crítica das soluções. No transcorrer das atividades, foram discutidas as premissas e os pressupostos, dentro da concepção de Bean (2009).

5.2.1 Escolha do tema

Como já sinalizado, para este estudo são seguidas as orientações de Burak (2010, p. 19) na escolha do tema a ser desenvolvido. Além disso, os pressupostos de Barbosa (2001) auxiliarão a classificar os casos de modelagem:

> Caso 1 – O professor apresenta a descrição de uma situação-problema, com as informações necessárias à sua resolução e o problema formulado, cabendo aos alunos o processo de resolução.
> Caso 2 – O professor traz para a sala um problema de outra área da realidade, cabendo aos alunos a coleta das informações necessárias à sua resolução.
> Caso 3 – A partir de temas não matemáticos, os alunos formulam e resolvem problemas. Eles também são responsáveis pela coleta de informações e simplificação das situações-problema (Barbosa, 2001, apud Abreu, 2011, p.8-9).

Ao propor o tema “Restaurante *Self Service*”, a pesquisadora está direcionando seu trabalho para o caso 2, em que o tema é sugerido por ela e os alunos, então, vão a campo em busca de dados qualitativos e quantitativos que respondam a algumas indagações acerca de variedades apresentadas nos cardápios, valores nutricionais dos alimentos, orientações sobre como se alimentar bem nestes restaurantes, preço do quilo de alimento, etc.

Ao alunos, ao propor o tema “Restaurante *Self Service*”, tendo a pesquisadora como mediadora de todo processo, faz com que este trabalho seja direcionado para o caso 3, em que o tema é sugerido pelos alunos e estes vão a campo em busca de dados qualitativos e quantitativos que respondam a algumas indagações acerca de variedades apresentadas nos cardápios, valores nutricionais dos alimentos, orientações sobre como se alimentar bem nestes restaurantes, preço do quilo de alimento, etc. Possíveis conclusões poderão ser tomadas a respeito dos princípios multiplicativo e aditivo, podendo chegar também aos conceitos de combinação, arranjo e permutação.

Para melhor compreender a participação de alunos e professores nos casos de modelagem, apresentamos abaixo a tabela elaborada por Barbosa.

	Caso 1	Caso 2	Caso 3
Elaboração da situação problema	professor	professor	professor/aluno
Simplificação	professor	professor/aluno	professor/aluno
Dados qualitativos e quantitativos	professor	Professor/aluno	Professor/aluno
Resolução	professor/aluno	professor/aluno	professor/aluno

Participação de alunos e professores em trabalhos com a modelagem.
Fonte: (BARBOSA, 2001, apud Abreu 2011, p. 9).

Ao apresentar as possibilidades de trabalhos com a Modelagem Matemática, Barbosa ressalta ainda que professores e alunos poderão se envolver de formas diferentes na implementação desses trabalhos.

Pensando também na forma linear de se trabalhar os conteúdos, na maioria das escolas, a utilização da modelagem se torna praticamente inviável, uma vez que os conteúdos surgirão conforme a necessidade apresentada pela situação-problema. A quebra desta linearidade curricular exige do professor grande domínio de conteúdo, segurança e criatividade no desenvolvimento do trabalho. Ao buscar esse novo caminho, encontramos suporte no pensamento de Burak (2010, p. 20) quando diz que “quando esse novo se manifesta é preciso ser capaz, ter coragem, e rever novas teorias e ideias de modo a possibilitar sua entrada”. Para isso, os professores, além de terem coragem, deverão estar dispostos a rever teorias, estar sempre com o pensamento aberto a novas ideias e em busca de novos acontecimentos.

5.2.2 Pesquisa exploratória

Segundo Burak (2010), a pesquisa exploratória acontece de forma natural pelo simples desejo dos alunos em conhecer melhor o assunto. Esta pesquisa acontecerá por meio de uma visita a um restaurante *self service* frequentado pelos alunos envolvidos no processo. Antecedendo a esta visita faz-se necessário a definição de algumas questões que nortearão a coleta de dados e informações.

Biembengut (1999) alerta que, muitas vezes, devido à abrangência do tema, faz-se necessário um planejamento, e para tal o professor deverá propor o levantamento de questões sobre o tema; a realização de uma pesquisa afim de se familiarizar com o tema escolhido e uma entrevista com especialista no assunto.

A pesquisadora inicialmente ao deixar livre o assunto restaurante *self service* assumirá o papel de mediadora da dinâmica e verificando o que os estudantes formalizam em seus comentários e levantamento de questões. Uma possível questão norteadora pode ser o questionamento acerca do que seja um bom restaurante. Pode-se notar em quais momentos a matemática aparece na fala dos alunos e neste momento, a pesquisadora pode mencionar algumas questões para orientar os alunos uma vez que o objetivo está no trabalho com os diversos conteúdos sendo primordial trabalhar a Análise Combinatória.

5.2.3 Levantamento dos problemas

Os dados coletados na pesquisa exploratória irão sustentar o levantamento dos problemas relativos ao tema. A pesquisadora, assumindo o papel de mediadora, poderá contribuir significativamente com o estudante, ajudando-o a desenvolver sua autonomia bem como a formação do espírito crítico, conforme afirma Burak (2010).

Após a coleta de dados no restaurante, um novo debate será estimulado com o objetivo de discutirmos o que pode ser feito com as informações coletadas. Nesta etapa, a pesquisadora, exercendo seu papel de mediadora, mais uma vez poderá auxiliar com sugestões visando à tomada de decisões e implementação de ações matemáticas que irão surgir.

Sabe-se que a partir das informações coletadas durante a pesquisa exploratória, vários conteúdos poderão despontar, cabendo à pesquisadora enfatizar o conteúdo de Análise Combinatória, onde se dará ênfase ao princípio aditivo e ao princípio multiplicativo.

Ao trabalharmos os princípios aditivo e multiplicativo, podemos levantar algumas questões com os dados coletados no restaurante. Dentre as muitas opções que podem surgir, é possível explorar, como exemplo, a seguinte situação: Thaís vai almoçar em um restaurante *self service,* cujo cardápio oferece todos os grupos de alimentos, com várias opções de frutas e hortaliças, carboidratos e proteínas de origem animal e vegetal. Para atender às preferências e às necessidades nutricionais de Thaís, ela deve escolher um alimento de cada grupo. Ao se servir, ela deverá dividir seu prato em quatro partes: uma parte reservada para os vegetais crus ou cozidos, outra para o acompanhamento (arroz, macarrão, batata), uma para leguminosas (feijão, ervilha, lentilha, grão de bico) e outra para o prato principal (carnes ou ovos). Sabendo que dentre os vegetais disponíveis ela gosta apenas de alface, tomate, cenoura e brócolis, de quantas formas diferentes pode se servir nesse restaurante, sabendo que deverá escolher três vegetais, um acompanhamento, uma leguminosa e uma carne?

Para incentivar os alunos a pensarem nas diferentes opções de se servirem, a pesquisadora, sempre assumindo o papel de mediadora, irá sugerir aos alunos a construção de uma “arvore de possibilidades”, a qual mostrará algumas opções para compor o prato de Thaís. Utilizando o exemplo proposto, temos:

Alface, tomate, cenoura
Carne — Arroz — feijão — Alface, tomate, brócolis
Tomate, cenoura, brócolis
Alface, cenoura, brócolis

Na árvore acima estão esquematizadas as possíveis composições de alimentos que satisfazem ao exemplo proposto. A utilização da árvore de possibilidades leva o aluno a perceber se fará a correta contagem das possibilidades de acordo com o problema. Além de perceber que todas as sequências possuem algum alimento distinto, o aluno poderá observar também que a ordem dos alimentos não altera a composição do prato. Já, um novo agrupamento, onde se modifica um dos componentes como, por exemplo: (carne, arroz, feijão, alface, tomate, cenoura) e (carne, arroz, feijão, alface, cenoura, brócolis) são agrupamentos diferentes. Ao calcular as diferentes possibilidades de se servir, observando a sequência fornecida pela árvore de possibilidades, tem-se 1x1x1x4 = 4 possibilidades diferentes.

É possível observar também que, no caso da escolha dos legumes por Thaís, encontram-se as sequências: (alface, tomate cenoura,), (alface, tomate, brócolis), (alface, cenoura, brócolis) e (tomate, cenoura, brócolis). Pode-se dizer aqui que foi realizada uma combinação de quatro alimentos tomados três a três, e o número dessas combinações é quatro. Indica-se assim: $C_4^3 = 4$. Mas, como é calculado o número de combinações de 4 elementos, tomados 3 a 3 sem a utilização da árvore de possibilidades? E de um modo geral, como calcular o número de combinações de n elementos tomados p a p, com $n \geq p$, ou seja, C_n^p ? Tal indagação tem por objetivo encontrar uma fórmula que permita calcular o número de combinações nesse caso geral.

É provável que os alunos apresentem dificuldades para progredir nesta etapa, porém, a pesquisadora poderá conduzir os alunos no desenvolvimento do modelo. Para tanto, deverá usar como base as orientações de Dante (2012).

Luiz Roberto Dante, autor do livro de matemática adotado no CAp/COLUNI, apresenta no volume 2 um capítulo específico sobre Análise Combinatória. As técnicas de contagem que constam nesse capítulo são as Permutações Simples, os Arranjos Simples, as Combinações Simples e as Permutações com Repetições. O Princípio Multiplicativo ou Princípio Fundamental da Contagem é apresentado no início do capítulo, em que o autor utiliza alguns problemas resolvidos por meio da enumeração direta das possibilidades ou pelo diagrama de árvore.

De acordo com Dante, se um evento é composto de duas etapas sucessivas e independentes, de modo que o número de possibilidades na 1ª etapa seja *m,* e para cada possibilidade da 1ª etapa o número de possibilidades na 2ª etapa seja *n*, então o número total de possibilidades de o evento ocorrer é dado pelo produto *m.n* (DANTE, 2012). A seguir, Dante apresenta exemplos resolvidos por meio do Princípio Multiplicativo para dedução das fórmulas de Combinação, Arranjo e Permutação. Assim, as questões apresentadas são resolvidas com utilização das fórmulas e sem a utilização das fórmulas.

Observamos ainda que o autor não apresenta um enunciado específico ou definitivo sobre o Princípio Aditivo. Ao final de cada explanação teórica, apresenta alguns exercícios e problemas para que o aluno trabalhe o desenvolvimento da técnica. No final do capítulo são apresentados problemas "misturados", em que o aluno deve usar o Princípio Multiplicativo ou identificar a(s) técnica(s) de contagem mais adequada(s) para resolvê-los.

Para finalizar, observamos que, na maioria dos problemas apresentados, o autor faz uso da simples aplicação de fórmulas para resolvê-los, que em geral, não estão relacionados a uma probabilidade, cujo conteúdo é abordado em capítulo específico seguinte ao capítulo de Análise Combinatória.

Entendemos, pois, que ao explorar o tema "Restaurante *Self Service*", cabe ao professor saber aproveitar todas as informações para trabalhar outros conteúdos que possam surgir, tais como funções, matemática financeira, grandezas diretamente proporcionais, etc, além da Análise Combinatória.

Trabalhando-se dessa forma, a etapa de levantamento dos problemas poderá desenvolver a autonomia no estudante, oportunizando-o a "liberdade de conjeturar, construir hipóteses, analisar as situações e tomar decisões" (BURAK, 2010, p. 22). Nessa etapa, os envolvidos na pesquisa – pesquisadora e alunos – poderão se guiar pelas concepções de Bean (2009), uma vez que várias hipóteses poderão surgir e as respostas irão depender do que os alunos adotam como verdade em cada situação.

5.2.4 Resolução dos problemas e o desenvolvimento do conteúdo matemático no contexto do tema

Esta etapa é o momento em que os conteúdos matemáticos ganham importância e significado, e onde se faz uso das ferramentas matemáticas disponíveis: tabelas, gráficos, etc. Devemos, no entanto, estarmos atentos ao que destaca Burak quanto ao conteúdo necessário à resolução de um problema:

> Pode acontecer que para a resolução de um problema, o conteúdo necessário à sua resolução, ainda não tenha sido trabalhado pelo aluno, então é um momento importante para que o professor, na condição de mediador favoreça ao estudante a construção desse conhecimento (BURAK, 2010. p. 22).

Conforme o exposto acima, os alunos serão então incentivados a construírem uma tabela contendo algumas informações coletadas no restaurante, as quais serão relevantes para o desenvolvimento desta pesquisa. Com base nessa tabela, os estudantes serão indagados sobre as diferentes opções para se servirem, conforme a preferência de alimentos de cada um dos participantes da pesquisa.

Apresentamos a seguir, uma das tabelas que foi selecionada aleatoriamente.

Opções	Possibilidades	Alimento escolhido
vegetais	Cenourinha, alface e tomate	cenourinha
saladas	nenhuma	
arroz	Arroz branco	Arroz branco
feijão	Feijão inteiro e feijoada	Feijão inteiro
massas	Purê e macarronada	macarronada
carnes	Filé de frango, bife de porco, frango assado	Filé de frango e frango assado
acompanhamentos	Batata frita e batata palha	Batata frita
suco	Suco de laranja e suco de limão	
refrigerante	Coca-cola	Coca-cola

Neste dia de visita ao restaurante, ao se servir, Zelão fez opção pelos seguintes alimentos: arroz branco, feijão inteiro, macarronada, batata frita, cenourinha, filé de franco e frango assado. Pretende-se neste momento, determinar de quantas maneiras diferentes Zelão poderá se servir. Para tanto, serão consideradas as diversas etapas (opções) que compõem o processo de servir um prato, acompanhadas de suas respectivas possibilidades, isto é, consideraremos cada opção escolhida como uma etapa onde cada etapa é composta de possibilidades. Assim, a escolha de Zelão por arroz branco, feijão inteiro, macarronada, batata frita, cenourinha, filé de franco e frango assado é uma das possibilidades para ele se servir, conforme as opões de sua preferência. Portanto, de acordo com as preferências de Zelão, ele dispõe de três possibilidades para escolha de vegetais, uma para arroz, duas para feijão, três para carnes e duas para massas, logo, podemos inferir que ele possui 3x1x2x2x3x2 = 72 possibilidades distintas para se servir - o que responde a nossa pretensão neste momento.

Ao considerarmos a tabela construída por cada aluno, poderemos também obter as diferentes possibilidades para uma refeição, utilizando, para isso, a árvore de possibilidades de modo que possamos, a exemplo do que foi citado acima, determinar o número total dessas possibilidades.

Entendemos que ao determinar esse número de possibilidades, os alunos estarão vivenciando um dos princípios básicos da Análise Combinatória, o princípio multiplicativo, que, a nosso ver, é um modelo capaz de resolver esta e muitas outras situações-problemas.

Ao generalizar a situação apresentada, os alunos serão conduzidos a concluir que se uma etapa de certo evento ocorre de *n* maneiras distintas e uma segunda etapa ocorre de *m* maneiras distintas; então, esse evento terá *n.m* maneiras distintas de ocorrer.

É importante também, estimular os alunos a encontrarem as diversas expressões (fórmulas) que compõem a Análise Combinatória: arranjo, permutação, combinação, alem do perfeito entendimento dos princípios aditivo e multiplicativo visto que podem surgir situações problemas que apresentam grandes quantidades de dados e, por isso, se tornar inviável a utilização da árvore de possibilidades ou o princípio multiplicativo.

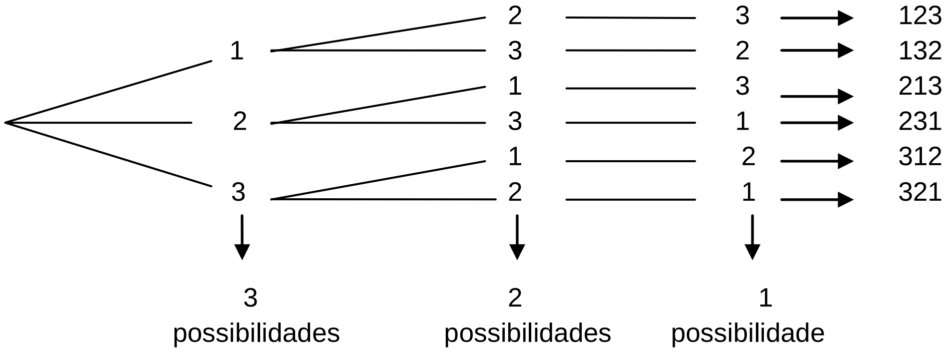
Assim, considerando que os alunos ainda não trabalharam esse conteúdo em sala de aula, a pesquisadora, na condição de mediadora do processo, seguindo as orientações de Burak (2010), fornecerá condições para que o aluno construa este conhecimento, utilizando para isso as informações e orientações contidas no livro Matemática Contexto e Aplicações de Luiz Roberto Dante.

Dante (2012) faz uso de definições e exemplos para determinação das fórmulas de permutação, arranjo e combinação. Segundo o autor,

> Permutar é sinônimo de trocar. Intuitivamente, nos problemas de contagem, devemos associar a permutação à noção de embaralhar, de trocar objetos de posição (DANTE, 2012, p. 278).

O autor exemplifica:

1º) Quantos números de 3 algarismos (sem repeti-los num mesmo números) podemos formar com algarismos 1, 2 e 3? Podemos resolver por tentativa. Assim temos: 123, 132, 213, 231, 312 e 321. Concluímos então que são seis os números procurados. Podemos, também, fazer uma árvore de possibilidades;



Pelo princípio fundamental da contagem temos 3 x 2 x1 = 6 possibilidades. É possível observar que a ordem dos algarismos é muito importante, pois cada número se difere dos demais conforme essa ordem.

Os alunos serão incentivados também a encontrar uma expressão para determinar o número de maneiras diferentes que o gerente do restaurante dispõe para organizar seus funcionários, sabendo que podem exercer funções diferentes: garçons, caixa, cuidados na bancada de servir ou trabalhar na balança pesando os alimentos a serem consumidos. Estarão, assim, vivenciando uma situação onde a ordem e a natureza dos elementos são igualmente importantes.

A partir da comparação entre as duas situações: opções de se servirem e opções para organizar os funcionários, os alunos terão condições de identificar, bem como diferenciar dois tipos de agrupamentos: um formado por elementos que diferem pela natureza (alimentos) e outro formado por elementos que diferem pela ordem e natureza (funcionários com suas atribuições).

Vale ainda ressaltar que, de forma geral, os livros didáticos apresentam de forma sequencial o estudo da Análise Combinatória, seguida do Binômio de Newton, e posteriormente do estudo da Probabilidade.

Assim, uma outra análise interessante também se dá a partir da probabilidade, um conteúdo de grande relevância que pode ser trabalhado também no tema “o restaurante *self service*”. A pesquisadora poderá sugerir que encontrem a probabilidade de que determinado funcionário esteja trabalhando como caixa deste estabelecimento no dia de visita ao mesmo.

5. 3 Análise crítica das soluções

Nesta etapa serão discutidas e analisadas as soluções encontradas, sendo, portanto, segundo Burak, uma etapa que “possibilita tanto o aprofundamento de aspectos matemáticos como dos aspectos não matemáticos envolvidos no tema” (BURAK, 2010, p. 24).

Alguns questionamentos poderão ser motivados, tanto pelos alunos quanto pela pesquisadora, como: o que pode ser dito com relação às diferentes possibilidades para se servir, conforme gosto ou preferência por certos alimentos? Nesta etapa, além do conteúdo matemático envolvido, pretende-se que os alunos tenham uma visão crítica quanto ao valor nutricional de sua alimentação.

Outros questionamentos poderão ser levantados quanto às posições ocupadas pelos funcionários do estabelecimento, ou seja: que outras opções o gerente pode ter para alocar seus funcionários? Qual o destino dado aos resíduos? Estaremos, assim, focando novamente em questão matemática e em outra questão que é ambiental.

Os alunos poderão, ainda, ser interrogados sobre outras situações-problemas vivenciadas no dia-a-dia, e que poderiam ser solucionadas com o auxílio da Análise Combinatória. Desta indagação poderão surgir diversas ideias, tais como os jogos de azar, as placas de automóveis, números de telefones, outros tipos de restaurantes, fluxo de veículos na cidade e no campus da UFV, etc.

Entende-se, portanto, que nesta etapa, a oportunidade do diálogo crie um momento especial de interação, de troca de ideia e reflexões. Por meio do diálogo, além do restaurante *self service*, os alunos podem buscar outros estabelecimentos e outras situações que possibilitem um trabalho que envolva diversos conteúdos surgidos a partir de situações ou questões levantadas por eles. Além disso, neste momento, o aluno terá oportunidade de justificar seus procedimentos, trocar ideias, comentar soluções e fazer reflexões (BURAK, 2010).

Nessa perspectiva, entendemos que, ao usar a modelagem nas situações cotidianas e vivenciadas pelos estudantes, quebra-se a rotina do ensino tradicional. Porém, esse viés ou essa nova forma de ensino pode acarretar certa insegurança para o professor, uma vez que os resquícios do ensino tradicional da matemática ainda estão muito presentes no dia-a-dia de uma sala de aula. Para vencer tal obstáculo, cabe ao professor, se revestir de coragem e determinação e estar aberto às indagações dos alunos, assim como ao surgimento de situações matemática diversas.

Ao manter o foco no aluno e não no conteúdo, o professor será capaz de trabalhar diversos conteúdos conforme forem surgindo, desapegando-se da linearidade dos mesmos, pois acreditamos que assim os alunos mostrarão maior interesse e agirão de forma a buscarem modelos que atendam às suas inquietações.

6 DESCRIÇÃO DO TRABALHO DE CAMPO: A MATEMÁTICA COMPREENDIDA POR MEIO DO TEMA “RESTAURANTE *SELF SERVICE*”

Conforme mencionado anteriormente, a visitas a um restaurante *self service* com os alunos oferecem várias possibilidades de se trabalharem conteúdos matemáticos, e tem por objetivo responder às diversas indagações dentro das inúmeras possibilidades de se trabalhar a matemática em um ambiente frequentado pelos alunos.

6.1 A pesquisa de campo: metodologia

Esta pesquisa tem como base as cinco etapas utilizadas por Burak (2010) na realização de trabalhos envolvendo a Modelagem Matemática, que, juntamente com suas concepções e os estudos acerca de Análise Combinatória, comporão o instrumental no planejamento da pesquisa exploratória, com o intuito de se atingir o objetivo do estudo, que é o de apontar mecanismos para se alcançar a prática de Modelagem, direcionando para seus principais passos de realização.

A pesquisa de campo é de caráter qualitativo e, conforme estudos de Bogdan e Biklen (2003), caracteriza-se por meio de um plano geral de estudo, representado como um “funil”. Os autores ressaltam que em um estudo qualitativo, o tipo adequado de perguntas nunca deve ser muito específico, de modo que o início do estudo é representado pela extremidade mais larga do “funil” – momento em que os investigadores procuram locais ou pessoas que possam representar o objeto do estudo ou a fonte de dados. Encontrado o dado de interesse, os pesquisadores devem organizar e avaliar de forma ampla o interesse do terreno ou as fontes de dados para os seus objetivos (BOGDAN; BIKLEN, 2003, p. 89).

Assim sendo, os alunos participantes se apresentaram de forma voluntária, isto é, não foram escolhidos pela pesquisadora, que se utilizou de um Caderno de Campo e de um gravador áudio/vídeo para registrar a presença e participação dos mesmos nas discussões gerais em todos os encontros.

O trabalho foi realizado com alunos da segunda série do Ensino Médio, de uma escola pública localizada na cidade de Viçosa, Minas Gerais. O trabalho investigativo aconteceu num período extraturno, ou seja, no período da tarde, uma vez que as aulas aconteciam no período da manhã.

A pesquisadora, que não é professora desta turma, fez o convite a todos os alunos da segunda série para participarem das atividades. Esta decisão foi tomada por conhecer o perfil dos alunos desta escola, que geralmente não demonstram interesse por atividades que não estejam diretamente relacionadas ao sistema de ensino da escola, ou seja, demonstram criatividade e disponibilidade em atividades que são valorizadas por notas o que não é o caso do envolvimento com esta pesquisa.

Os encontros destinados ao desenvolvimento da pesquisa serão realizados extraturnos, o que se justifica pela simples razão de não interferir ou prejudicar o andamento das atividades escolares (aulas).

Inicialmente, trinta e dois alunos se dispuseram a participar das atividades. Porém, esse grande número de participantes, se tornou inviável uma vez que não foi possível compatibilizar os horários dos encontros extraturnos devido ao fato que a grande maioria já estava comprometida com diversos trabalhos extraclasse além das aulas de educação física, que são oferecidas no período da tarde. Assim, o desenvolvimento da pesquisa realizou-se com a participação de 4 alunos do total de predispostos inicialmente.

No primeiro encontro, deu-se o esclarecimento sobre a pesquisa e observou-se grande entusiasmo com a proposta de pesquisa apresentada. No desenrolar das atividades, os alunos fizeram visita a um restaurante *self service*, localizado no centro da cidade (e por isso de fácil acesso) com objetivo de coletar dados que pudessem auxiliar no levantamento de modelos, de forma a possibilitar o estudo de Análise Combinatória, bem como de outros conteúdos que surgissem.

A escola escolhida para a realização deste trabalho está situada no Campus da universidade Federal de Viçosa, na cidade de Viçosa, em Minas Gerais, e é vinculada à Superintendência Regional de Ensino de Ponte Nova.
Oferece apenas o Ensino Médio e atende a alunos de diferentes classes sociais, oriundos de diversas cidades, e que fizeram a opção de estudar nesta

escola devido ao seu destaque por aprovação de seus alunos egressos nos mais concorridos vestibulares, além do destaque dado pela excelente classificação no Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM, o que se confirma pelas respostas dadas pelos alunos ao questionário aplicado e que se encontra no Anexo. Como já mencionarmos anteriormente, o ingresso nesta escola se dá por meio de um concorrido exame de seleção.

6.2 Desenvolvimento do trabalho de campo: algumas considerações

O trabalho de campo consiste em um levantamento de informações feito por 4 alunos em um restaurante da cidade, com a finalidade de colherem informações que serão pertinentes ao desenvolvimento das atividades. Os encontros aconteceram na escola, especificamente na sala de informática, mediante a presença da pesquisadora, que incentivava e mediava os debates.

A investigação tem caráter qualitativo e tem por objetivo o ensino e aprendizagem de Análise Combinatória por meio da Modelagem Matemática, não desconsiderando qualquer outro conteúdo que possa surgir conforme o interesse e as investigações dos alunos.

Assim, a questão norteadora é: como a Modelagem Matemática pode contribuir para a contextualização de Matemática no cotidiano dos alunos, para que eles sejam capazes de melhor entender e aprender os conceitos de Análise Combinatória?

Para organizar e dar o encaminhamento das atividades, utilizamos as orientações de Burak (2004): escolha do tema, pesquisa exploratória, levantamento dos problemas, resolução dos problemas e desenvolvimento da matemática relacionada ao tema e crítica das soluções. A pesquisa exploratória aconteceu em um restaurante da cidade e foi presidida pelos estudantes, que buscaram algumas respostas para os questionamentos levantados nos encontros anteriores. No levantamento dos problemas, os alunos foram incentivados a pesquisar sobre as diferentes maneiras ou possibilidades de se alimentar em um restaurante *self service.*

Na resolução dos problemas e no desenvolvimento da matemática relacionada ao tema, esperava-se que os alunos interpretassem a situação para chegarem ao uso da matemática como uma linguagem. Nesse momento, eles puderam caracterizar os problemas de contagem por meio dos princípios aditivo e multiplicativo.

Na análise crítica, os alunos teceram comentários para responder às questões iniciais, como variedades e disposição dos alimentos nesse tipo de restaurante, variação de preço conforme o dia da semana, valor nutricional dos alimentos para compor o prato, além de outras indagações e questionamentos.

6.3 Descrição dos encontros com os alunos

A transcrição completa dos encontros com os alunos encontra-se no apêndice. Destacamos aqui, os momentos e situações relevantes que foram primordiais ao desenvolvimento da pesquisa tanto para a pesquisadora quanto para os participantes da pesquisa.

Com a finalidade de resguardar a identidade dos alunos participantes da pesquisa, cada um dos quatro alunos, escolheu um pseudônimo pelo qual será nomeado em toda pesquisa.

6.3.1 Primeiro encontro

Nesse encontro esclarecemos a respeito dos objetivos da pesquisa, falamos sobre a Modelagem Matemática, a Análise Combinatória e reafirmamos o compromisso da discrição que será mantida durante todo processo.

Para melhor conhecer o perfil dos alunos participantes da pesquisa, foi aplicado um questionário (Figuras 1 a 4) a partir do qual serão apresentadas a seguir, algumas perguntas e respostas elucidativas, transcritas abaixo de modo literal.

1) Qual(ais) motivo(s) o(a) levaram a escolher esta escola para cursar o Ensino Médio?

Zelão: O *status* de melhor colégio do mundo e convívio com amigos ex-alunos.

Sara e Laura: Qualidade de ensino.

Stela: A oportunidade que o colégio oferece tanto com relação ao crescimento intelectual quanto pessoal e cultural.

2) Qual(ais) são o(s) conteúdo(s) de Matemática já estudado(s) que você mais gostou e por quê?

Zelão: Gostei mais da parte de produtos notáveis, porque foi muito legal fazer a demonstração por meio de figuras geométricas.

Sara: P.A. e P.G. e trigonometria. Porque foram conteúdos totalmente novos.

Laura: Geometria Espacial. Acho uma das áreas mais interessantes dentro da matéria.

Stela: Função do 2º grau, pois envolve uma problematização;

Conjuntos, pois envolvem coisas mais cotidianas;

Geometria, pois mexe com coisas reais também.

3) Qual(ais) são o(s) conteúdo(s) de Matemática já estudado(s) que você menos gostou e por quê?

Zelão: Eu não gostei muito de logaritmos e função logarítmica, pois é muito complicado trabalhar com potencias e raízes, números muito grandes.

Sara: Conjuntos. Porque eu tive dificuldade para aprender.

Laura: Funções trigonométricas, porque eu acho um assunto extremamente chato além de difícil.

Stela: Trigonometria, no sentido da matéria avançada. Não que eu não tenha gostado, mas a matéria envolve muitas relações.

4) Já foi reprovado em Matemática?

Zelão, Sara e Stela: Não

Laura: Sim

5) Quais as atividades matemáticas que lhes despertaram maior interesse?

Zelão: Produção de gráficos e tabelas e também trabalhos que precisam que você demonstre fórmulas no quadro, explicando passo-a-passo.

Sara: Fazer exercícios em grupo.

Laura: Fazer exercícios sozinha ou estudar em grupo.

Stela: Problemas dos quais eu consiga imaginar realmente sobre o que eu estou fazendo. Tanto exercícios no quadro quanto no caderno.

6) Como pensa que os alunos aprendem?

Zelão: Demonstrando teoremas e resolvendo exercícios e o melhor com trabalhos em grupo.
Sara: Fazendo exercícios, ou qualquer outra tarefa que coloque o conhecimento em matemática em prática.
Laura: Penso que a melhor forma de aprendizado dos alunos é através das aulas e fazendo exercícios.
Stela: Através da resolução de exercícios.

7) Como deveriam ser trabalhados os conteúdos de Matemática?

Zelão: De maneira mais palpável com exemplos físicos e mais demonstrações de teoremas.
Sara: De maneira mais dinâmica, exercícios são cansativos às vezes. Uma forma de estudo que fugisse um pouco disso seria interessante.
Laura: Através de exercícios da teoria aprendida com exemplos no cotidiano.
Stela: Apresentar o conteúdo e relacioná-lo, caso haja meio e existência, com exemplos reais, o que facilita o entendimento e permite uma maior rapidez ao realizar o exercício.

8) Qual sua opinião sobre trabalhos em grupo?

Zelão: Muito bons, para mim a melhor maneira de aprender.
Sara: Acho excelente. Além de estimular as relações sociais, passa mais segurança, pois se você não conseguir resolver o problema alguém pode te ajudar.
Laura: Gosto de fazer trabalhos em grupo desde que, todos os envolvidos tenham responsabilidade.
Stela: Nem sempre são vantajosos, uma vez que existem pessoas mais enroladas que as outras. Mas há o lado bom de, quando em grupo, um poder ajudar o outro.

9) O que é ser bom professor de Matemática?

Zelão: Não demonstrar dúvidas com relação à matéria a ser dada e explicar de maneira clara, e também saber tirar dúvidas dos alunos.

Sara: Um bom professor de matemática é aquele que consegue transmitir o conhecimento de forma clara, que deixa o aluno confortável para perguntar qualquer coisa, independente de quão simples seja.

Laura: É saber passar seu conhecimento para os alunos da melhor maneira possível garantindo o máximo de aprendizado e compreensão de todos eles.

Stela: Saber, não tudo, pois ninguém sabe a matéria (conteúdo) que será apresentado aos alunos. E, não só o professor de matemática, mas todos devem ter a humildade para diante do aluno dizer que, por exemplo, não consegui resolver o exercício, mas que tentará.

10) Você se submeteu a exame de vagas remanescentes para ingresso na segunda série?

Zelão, Sara, Laura, Stela: Não

A partir das respostas é possível verificar que os alunos participantes ingressaram por um processo seletivo onde a relação candidato vaga é altíssima, bem mais do que a maioria dos cursos de graduação da instituição onde a pesquisa se desenvolveu.

Em seguida, propusemos a seguinte tarefa para o próximo encontro: pensar em uma “situação do cotidiano” que possa relacionar-se com a Análise Combinatória.

6.3.2 Segundo encontro

Partindo do assunto a ser abordado, a escolha do tema foi feita pelos estudantes. Algumas “situações do cotidiano” foram sugeridas por eles e anotadas no quadro para que os mesmos elegessem a de maior interesse, o que possibilitaria um ensino de Matemática mais dinâmico e mais significante para os estudantes, conforme concepção de Burak (2004). Os temas sugeridos foram: loteria, vestuário, restaurante *self service*, turno de trabalho, canoa para atravessar um rio, escalação de time de futebol, lançamento de dados, agrupamento de pessoas.

Questionamos os participantes sobre qual(ais) destes temas levariam a problematizar e investigar, por meio da matemática, situações com referência na realidade e que pudessem também nos auxiliar na compreensão do papel sociocultural da matemática. Respondendo ao questionamento, os alunos fizeram a opção pelo “restaurante *self service*”.

Mediando o encontro e incentivando o diálogo, convidamos os alunos a pesquisar o ambiente “restaurante *self service*” e fizemos alguns questionamentos que propiciou a Zelão, Laura, Stela e Clara, dizer o que imaginavam que iam encontrar no restaurante.

Pesq.: O que é para você um bom restaurante *self service?*
Laura: O que tenha muita variedade e que o quilo não seja muito caro. Que você não coloca lá um tanto de comida e dê quinze reais e você fique assim oh!
Zelão: Nem tanto a variedade, a maioria cada dia tem uma coisa diferente, mas o preço e o ambiente, porque se for muito lotado, muito apertado...
Pesq.: Vocês acham que a matemática está presente nos restaurantes?
Laura: com certeza!
Zelão: sim.
Pesq.: dá para citar onde?
Zelão: no preço.
Laura: no preço, de fazer conta de quanto vai gastar, para dar troco, para calcular a quantidade de comida que você tem que comprar, pra tudo, pra qualquer coisa.
Zelão: tipo, na balança a quilo, você tem um preço e aí a balança mesmo faz a conta, o preço pelo quilo
Laura: ela faz uma regra de três. Um quilo são tantos reais, se eu colocar tantas gramas vai dar tanto.
Pesq.: ok. E a matemática aparece na hora que você está se servindo?
Laura: sim, você tem que pensar no tanto de coisa que você vai colocar, que, por exemplo, que você quer comer mais massa, aí seu prato..., e se você vai no restaurante mais caro, ai seu prato você coloca muita massa, você acaba colocando massa demais, ai seu prato vai sair muito caro, ai você tem que pensar em quantidade proporcionalmente ao preço, entendeu?
Zelão: e tem hora também que você olha um prato assim eu meio que olho a fração, tipo uma parte arroz, uma parte feijão, como se fosse um gráfico de pizza.

Foi o momento em que emergiram as diversas questões matemáticas envolvidas neste ambiente, contudo, é possível observar que a visão dos sujeitos da pesquisa é de uma Matemática reduzida ao calculismo. Percebemos que Laura e Zelão são os mais extrovertidos e, portanto, mais falantes. Laura fala de tipos de alimentos, em regra de três (referindo-se a algoritmo e não a princípio ou a relação de grandezas), em preço em função da quantidade, em quanto gastará se colocar muito “peso” no prato, enquanto Zelão fala de preço do quilo, do cálculo da quantidade de comida, da divisão do prato em frações e do gráfico de pizza.

É fundamental que se crie a oportunidade dos alunos se expressarem, pois é nesse momento que podem emergir as questões matemáticas, bem como seus respectivos olhares a respeito da mesma. Assim, de acordo com

Burak (2004), os alunos devem se familiarizar com o tema, cabendo ao pesquisador a criação de um diálogo para que possam externar suas percepções a respeito do “restaurante self service”.

Vale ressaltar a importancia do tema para os sujeitos da pesquisa. Grande parte dos alunos é oriunda de cidades circunvizinhas e necessita alimentar-se ou no restaurante universitário, que não atende a demanda em função do rápido crescimento da população estudantil, ou nos diversos restaurantes *self service* da cidade. Somando a isso a instituição, nos finais de semana oferece café da manhã e almoço, mas não oferece jantar, o que fatalmente leva grande parte dos alunos a optarem pelos serviços dos *self service.*

Como a oferta desse tipo de serviço é elevada, os preços ficam abaixo dos praticados em outras cidades, o que criou a cultura de famílias também optarem por esse tipo de serviço ao longo da semana.

Pesq.: Como vocês acham que é calculado o preço da comida a quilo?
Laura: eu acho que é, o tanto que eles gastam la no restaurante, eu acho que eles devem descontar a mão de obra também, não sei.
Zelão: acho que como brasileiro como mais arroz e feijão, vai uma média ponderada dos preços do arroz, do feijão, ai por exemplo, eles olham, por exemplo.
Laura: o quando eles estão gastando.
Stela: é
Laura: e faz uma média de preço do quilo.
Zelão: por exemplo, se 40% do prato é arroz, 30% feijão, ai 40% do preço é diretamente proporcional ao preço do arroz e 30% diretamente proporcional ao preço do feijão e assim por diante.
Laura: por exemplo, no restaurante S.C no final de semana, o preço do quilo é trinta e nove e noventa, ai eu acho que eles fazem um valor assim sabe, do que eles estão gastando com comida durante a semana toda e aumentam no final de semana por causa do movimento também.

Percebe-se nas falas que, para eles, o preço do quilo da comida é calculado de acordo com o consumo de certos alimentos e com os gastos com mão de obra.

6.3.3 Terceiro encontro

Ao se retomar o assunto “restaurante *self service”,* com objetivo de conhecer o ambiente onde se desenvolverá a pesquisa, os alunos foram convidados a realizar uma pesquisa na *internet*, utilizando os equipamentos da sala de informática onde estávamos reunidos, em busca de textos sobre a história dos restaurantes *self service* e de orientações sobre como se servir neste tipo de restaurante.

Após algumas pesquisas, os alunos selecionaram e leram alguns textos que se encontram nos seguintes endereços
http://www.minhavida.com.br/alimentacao/materias/1203-e-possivel-comer-bem-num-sef-service;
http://resitavivasaude.uol.com.br/saude-nutricao/81/artigo158804-1.asp/;
http://www.dietaesaude.com.br/temas/alimentacao/15965-6-dicas-para-comer-bem-no-self-service.

Durante a leitura dos textos, diversos comentários foram surgindo. Ficaram surpresos ao verificarem que a disposição dos alimentos nos restaurantes *self service* é iniciada com as saladas e comentaram que para se servir deveriam em primeiro lugar ver todas as opções, seguir a ordem em que os alimentos estão dispostos, cuidar da variedade e finalmente se servir dividindo o prato em quatro partes para dispor os alimentos.

Zelão: a metade é salada!!!
Zelão: ... mas igual ele falou aqui que os vegetais sempre ficam na frente, em primeira opção, é melhor você pegar de uma vez.
Laura: eu nunca tinha observado isso! Nunca tinha reparado!!
Stela: acho que faço tudo errado!!
Clara: eu também, passo direto pelos vegetais!

Nesse sentido, foi possível neste encontro implementar um diálogo a respeito do que é uma boa nutrição e, embora este não seja um objetivo desta pesquisa. Verificou-se que ao trabalhar com a Modelagem Matemática, podem surgir outros assuntos relevantes que auxiliam na formação do educando, conforme é apontado por Klüber e Burak (2010) no capítulo “A Modelagem”.

6.3.4 Quarto encontro

Os alunos reclamaram cansaço devido ao período de provas, ao excesso de atividades extraclasse, além da proximidade da festa junina da escola e dos ensaios da quadrilha. Ao retomar o assunto “Restaurante *Self Service*”, Stela, Laura, Zelão e Clara, mediados pela pesquisadora, responderam a alguns questionamentos. A partir desse encontro a pesquisadora procurou direcionar o debate com objetivo de encontrar situações onde poderia ser estudada a Análise Combinatória.

Pesq.: O que vocês esperam encontrar nos cardápios dos restaurantes?
Zelão: tem comida
Stela: tem bebida
Laura: Mas de comida, tem os ingredientes que tem como você combinar de formas diferentes, por exemplo, no Restaurante Vida Leve tem o tipo de massa, o tipo de molho e os ingredientes, ai você pode combinar do jeito que você quiser.

Ao responder a estes questionamentos, os alunos têm a oportunidade de se expressarem acerca do que é possível encontrar no cardápio de um restaurante *self service*. Nosso propósito com tais questionamentos foram embasados pelo referencial teórico dessa pesquisa, quanto reportando a Burak (2004), e ao capítulo "A Modelagem", os alunos devem se familiarizar com o tema e cabe ao professor oportunizá-los ao diálogo para que percebam o que mencionam a respeito do tema escolhido "restaurante *self service*".

Pesq.: E nas opções de escolha do alimento, envolve matemática?
Laura: não sei
Zelão: Nas opções se você for pensar na combinação de pratos sim, combinar quantas opções você tem.
Laura: É, porque você não pode ficar repetindo o mesmo prato todo dia, por exemplo, arroz, feijão, acho que batata frita, alguns tipos de salada, eles sempre tem todo dia, tipo alface, cenoura, beterraba... essas coisas tem todo dia, mas tem coisa que não vai ter todo dia, não sei o que não poderia ter todo dia.
Zelão: A mesma carne.
Stela: mesmo tipo de massa, mesmo tipo de vegetal às vezes, alguma torta diferente que eles colocaram lá.
Pesq.: Será que basta combinar do jeito que quisermos ou existe algum critério?
Laura: acho que tem que ter um critério, só não sei qual.
Stela: Não.... Eu nunca vi ninguém... Mas é a questão da análise combinatória?
Zelão: um de cada tipo de cada um, um tipo de massa, um tipo de salada, um tipo de carne....
Clara: você vai escolher um tipo de cada um, depende do gosto...
Zelão: você vai querer um tipo de cada um, um tipo de massa, um tipo de salada...
Pesq.: Mas você vai querer um tipo de cada um por quê?
Stela: para experimentar.
Clara: Porque com variedade fica melhor.
Stela: Mais variedade para você experimentar
Zelão: Mas... você pode tipo... se não quiser colocar uma massa, não coloca nenhuma.

Ao refletir que matemática está envolvida ao se servir neste tipo de restaurante, percebe-se que vem à tona a combinação e até a sugestão de que seria uma questão de Análise Combinatória.

Pesq.: E o que te levaria a querer colocar uma massa ou não querer colocar uma massa?
Stela: o gosto.
Pesq.: Então, o gosto ou sabor é um critério na escolha dos alimentos. Existe outro critério?
Stela: a saúde também, porque ninguém gosta muito de comer salada, mas tem que comer salada.
Pesq.: O que é uma boa refeição?
Zelão: A que tenha todos os tipos de nutrientes que você precisa.
Laura: é.

Este foi um momento especial, onde a pesquisadora percebeu que na fala de Stela e Zelão se aplicava o que foi pesquisado sobre valores nutritivos dos alimentos. Assim, aproveitando essas falas, a pesquisadora procurou despertar nos alunos a necessidade de maior atenção ao valor nutritivo dos alimentos e conhecer um pouco mais sobre os restaurantes *self service*.

6.3.5 Quinto encontro

Definiu-se que o próximo encontro aconteceria no restaurante selecionado pelos alunos. Para esse encontro, a pesquisadora propôs aos alunos a elaboração de questões que seriam levadas ao restaurante, para buscarem algumas respostas e posteriores questionamentos (Figura 5). Definiu-se também que nesse dia, após entrevista previamente agendada com o gerente do estabelecimento, os alunos iriam almoçar. Antes de se servir, anotariam o cardápio, anotariam os alimentos de preferência e posteriormente, já acomodados na mesa para o almoço, anotariam quais foram os alimentos que colocaram no prato. Estas anotações seriam trabalhadas no próximo encontro.

Os alunos receberam uma folha para anotarem as perguntas (que se encontram transcritas) a seguir:

1) Como é calculado o preço do quilo de alimento?
2) Que destino é dado aos alimentos que sobram nos pratos?
3) Que destino é dado aos alimentos que sobra nas travessas?

4) Quantos funcionários tem o estabelecimento?
5) Dentre esses funcionários, quantos são capacitados para trabalhar no caixa?
6) Qual a despesa mensal com funcionários e aluguel?
7) Quanto se gasta mensalmente com a compra de ingredientes?
8) Qual é o alimento mais consumido no restaurante?
9) Quantos quilos de alimento são consumidos em uma semana?
10) Onde o restaurante adquire os produtos a serem consumidos?
11) O restaurante tem acompanhamento de nutricionista?

6.3.6 Sexto encontro

Este encontro aconteceu no restaurante *self service* no qual a pesquisa está sendo desenvolvida. As questões elaboradas pelos alunos foram prontamente respondidas e devidamente esclarecidas pelo Sr. J, gerente do estabelecimento (Figura 6). Além das perguntas já elaboradas, outras curiosidades foram sanadas pelos alunos durante este encontro.

Zelão: Existe alguma variação no cardápio durante a semana?

Sr. J.: Sim, principalmente nas saladas que variam conforme a oferta de legumes e verduras frescas no mercado.
Laura: Por que o preço do quilo durante a semana é diferente do preço do quilo em finais de semana?
Sr. J.: Porque nos finais de semana melhoramos o cardápio e servimos o churrasco como acompanhamento. Ao oferecer a carne assada temos também o gasto com o churrasqueiro.
Stela: Quantos funcionários possui este estabelecimento?
Sr. J.: Turno dia: uma cozinheira, duas faxineiras, quatro auxiliares de cozinha, um churrasqueiro, um copeiro, um auxiliar administrativo, três garçons, uma repositora e um operador de caixa. Turno noite: um cozinheiro, quatro pizzaiolo, quatro auxiliares de cozinha, dois copeiros, sete garçons e dois operadores de caixa. Totalizando 35 colaboradores.
Clara: Os garçons ganham comissão?
Sr. J.: Não
Laura: O restaurante conta com acompanhamento de nutricionista?
Sr. J.: Temos o acompanhamento com Economista Doméstico.
Zelão: Quantos quilos de alimentos em média são vendidos durante uma semana?
Sr. J.: Uma média de 470 Kg de comida por semana.
Stela: Onde o Senhor adquire os alimentos consumidos aqui?
Sr. J.: Compramos de distribuidoras da região e fora também, como: Pif Paf, Friboi, Lebon, Cecoti, Seara, Mega Fort, Novo Suino, dentre outros.
Stela: Quanto se gasta mensalmente com a compra dos ingredientes?
Sr. J.: Uma média de setenta mil reais sendo estas em carnes, laticínios e hortifruti.
Laura: Como é calculado o preço do quilo de alimento?

Sr. J.: Anotamos o consumo diário de cada produto e seu valor ao elaborar o self service, mais a margem que a empresa quer, assim temos o custo do self.
Zelão: Qual o alimento mais consumido no restaurante?
Sr. J.: carne de boi e frango.
Clara: Que destino é dado aos alimentos que sobram nos pratos?
Sr. J.: A sobra de comida dos pratos é juntada em um balde e no fim do dia, levados ao sitio dos proprietários para cachorros e galinhas..
Zelão: Que destino é dado aos alimentos que sobram nas travessas?
Sr. J.: Os colaboradores do turno da noite a consomem na janta.
.

Ao término da entrevista, os alunos solicitaram autorização ao Sr. J, para anotarem o cardápio do dia (Figura 7). Depois de feita todas as anotações, conforme foi combinado no encontro anterior, os alunos se serviram, observaram e anotaram todas as opções disponíveis e, dentre elas, quais as que agradavam seu paladar. Dentre as que agradavam seu paladar, quais as que optaram em colocar no seu prato (Figuras 8 a 11).

Retornando à escola, os alunos relataram o quanto foi agradável a visita e o almoço no restaurante. Ficaram surpresos ao perceber a grande variedade de opções que tinham para se alimentarem, coisa que não haviam percebido até então, embora com frequência se alimentassem nesse local. Relataram até mesmo que devido a essas observações, tiveram certa dificuldade ou demora na escolha de alguns pratos.

6.3.7 Sétimo encontro

De posse dos dados coletados, os alunos, tendo a pesquisadora mediando o debate, falam da possibilidade de organizar os dados em uma tabela. Assim, cada participante construiu uma tabela contendo as informações que seriam trabalhadas posteriormente (Figuras 12 a 15).

6.3.8 Oitavo encontro

Este encontro iniciou com a retomada do diálogo sobre tudo que buscaram com a visita ao restaurante. A seguir, a pesquisadora, atuando como a mediadora do processo propôs o diálogo que procede a seguir:

Pesq.: A matemática que vocês encontraram no restaurante tem alguma relação com a matemática da sala de aula?

Laura: sim.
Pesq.: Qual?
Laura: Análise Combinatória.
Pesq.: Tem como descobrirmos o número de possibilidades de cada um para servir seu prato?
Zelão: Acho que sim, tipo.... temos que olhar novamente o cardápio daquele dia.
Stela: também acho.... temos que ver o cardápio e o que a gente gosta nesse cardápio.

Como Laura teve contato com tal conteúdo anteriormente, sua resposta pode estar justificada pelo próprio histórico, embora os demais envolvidos também pudessem ter concluído o mesmo pensamento.

Partiu de Zelão a iniciativa para o próximo passo, solicitando as anotações que ele fizera no restaurante. A pesquisadora propôs que a partir deste momento, que as questões que seriam levantadas, seriam respondidas tendo como referência as anotações feitas por Zelão.

Ao analisarem as opções de alimentos apresentadas na tabela de Zelão (Figura 12), perceberam que ele tinha três opções de vegetais, uma de arroz, duas de feijão, duas de massas, três de carnes, duas de acompanhamentos.

Pesq.: Se Zelão fosse se servir de vegetais e carnes, de quantas maneiras diferentes poderia compor seu prato?
Laura: ele tem três opções de vegetais e três opções de carne...
Zelão: se eu escolher a cenourinha, posso colocar no prato qualquer dos três tipos de carne né? E continua.... então para cada verdura, posso ter três pratos diferentes? Nossa!!! Então, terei no total nove pratos diferentes?
Stela: Como assim?
Zelão: Tipo....cenourinha, e filé de frango, cenourinha e carne de porco, cenourinha e frango assado. A mesma coisa com o alface, entendeu?
Laura: isso tem um nome... é um princípio! Princípio multiplicativo, é isso?
Pesq.: Sim, é o Princípio Multiplicativo!
Pesq.: Considerando então as preferências de Zelão, quantas opções diferentes ele tem para montar seu prato?
Stela: é só fazer a mesma coisa!
Zelão: eu comi arroz, feijão, macarronada, batata frita, cenourinha e filé de frango!
Laura: então você tinha uma opção de arroz, duas opções de feijão, duas opções de massas, duas opções de acompanhamentos, três opções de vegetais e três opções de carne....
Zelão: sim...
Laura: uai, é só multiplicar agora 1x2x2x2x3x3
Stela: 72 opções?
Zelão: Nossa!!! É muito!!

A seguir, cada estudante, com base em sua tabela, calculou o número de possibilidades diferentes de se servir (Figuras 16 a 19). Finalizando este encontro, propusemos que cada estudante fizesse por escrito alguns comentários sobre a pesquisa (Figuras 20 a 25) e apresentassem a resolução de três atividades com finalidade de percebermos como os estudantes aplicariam esta conclusão em outras atividades. (Figuras 26 a 29).

Ao término dos encontros, os alunos falam um pouco a respeito do trabalho desenvolvido; registrando seus comentários em uma folha que se encontra no Anexo.

Percebemos, por meio da fala dos alunos, que este trabalho oportunizou associar a matemática do dia-a-dia com a matemática da sala de aula. Os sujeitos envolvidos consideraram, de modo geral, o trabalho muito interessante, porém, ainda enfatizam ser mais prático, objetivo e interessante o uso e aplicação direta de fórmulas sem contextualização, demonstrando certa preferência pelo ensino tradicional.

Como já citado anteriormente, esta pesquisa teve como objetivo a busca de situações cotidianas dos alunos que possam ser resolvidas por meio da matemática, tendo como suporte a Modelagem Matemática para que possamos compreender melhor os conceitos da Análise Combinatória.

No trabalho de campo, os alunos conseguiram perceber diferentes formas de agrupar elementos, onde tais agrupamentos se diferem pela natureza e/ou pela ordem dos elementos, e também conseguiram aplicar os princípios multiplicativo e aditivo.

As atividades com os alunos foram desenvolvidas segundo as concepções de Burak (2004). O trabalho foi, portanto, desenvolvido e contextualizado no cotidiano dos alunos, e os resultados obtidos foram os mesmos mencionados nos livros, com a ressalva de que eles “descobriram o caminho” sem que fosse necessário que a pesquisadora mostrasse o mesmo.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente pesquisa iniciou-se com uma revisão de literatura detalhada, a fim de selecionarmos, assim, trabalhos na área de Educação Matemática desenvolvidos em relação ao tema Modelagem e Análise Combinatória. Diante dessa análise, foi possível constatar que o foco das pesquisas sobre o tema Análise Combinatória atenta a respeito do aprendizado do aluno, conforme afirma Sturn (1999), ao pontuar que “a maioria da bibliografia relativa ao tema tem o seu foco no aluno” (apud SABO 2010, p. 175).

Pesquisas acadêmicas, como as desenvolvidas por Batanero (1996) Sturn (1999), Esteves (2001) e Rocha (2002), que são citadas por Sabo (2012), mostram as dificuldades dos alunos em interpretar os enunciados dos problemas e as confusões com relação à relevância ou não da ordem dos elementos que compõem os argumentos, além da falta de organização para enumerar os elementos sistematicamente. Ou seja, essas pesquisas apontam algumas das dificuldades dos alunos em relação à aprendizagem dos conceitos de contagem.

Assim, diante desse cenário, e admitindo a hipótese de que a implementação de uma metodologia alternativa seja capaz de sanar tais dificuldades no ensino e na aprendizagem da Análise Combinatória, desenvolvemos este trabalho onde utilizamos a Modelagem Matemática em situações do dia-a-dia do aluno como uma metodologia capaz de facilitar e melhorar o entendimento do conteúdo.

Sabo (2010) cita que Costa (2003) e Santos (2005) constataram em suas pesquisas que professores mostram insegurança e falta de conhecimento matemático na resolução de problemas de Análise Combinatória, apresentando dificuldades para resolvê-los sem o auxílio da fórmula. Assim, o professor apropria-se do uso das mesmas quando não tem clareza com relação aos conceitos matemáticos que envolvem os estudos de Análise Combinatória.

Nesta pesquisa, entendemos que o emprego do Princípio Fundamental da Contagem na resolução de problemas de Análise Combinatória possa favorecer o entendimento dos conceitos de forma significativa, por ser um dispositivo capaz de abordar, resolver e estudar problemas de contagem.

Com a finalidade de sistematizar a compreensão do Princípio Fundamental da Contagem, Esteves (2001, apud Sabo 2010) auxilia-nos na compreensão deste conteúdo ao destacar como recursos valorosos o uso de diagramas, tabelas e enumeração ou a árvore de possibilidades.

Na busca de respostas à questão norteadora desta pesquisa - Como a Modelagem Matemática pode contribuir para a contextualização da matemática no cotidiano dos alunos, para que eles possam atribuir significações aos conceitos de Análise Combinatória? – realizamos este trabalho buscando, primeiramente na literatura, autores cujos trabalhos apresentassem atividades com direcionamentos da Modelagem Matemática. A leitura desses textos contribuiu para que fosse possível vislumbrarmos a realização de um trabalho de campo com objetivo de analisarmos a possibilidade de utilização da Modelagem Matemática em salas de aula do Ensino Médio.

Após pesquisar várias obras, tais como Bassanezi (2002), Bean (2001 e 2007), Burak (2004 e 2010), Biembengut (1999 e 2004), Barbosa (2001 e 2003) e Chaves (2001 e 2004), optamos por um trabalho de Análise Combinatória por meio da Modelagem Matemática.

Neste horizonte, a pesquisa de campo, realizada com alunos da segunda série do Ensino Médio demonstrou que a Modelagem Matemática pode contribuir positivamente para o trabalho do professor.

Desta forma, esta pesquisa está baseada nas cinco etapas mencionadas por Burak (2004, 2010), que orientam o trabalho com a Modelagem Matemática: escolha do tema, pesquisa exploratória, levantamento dos problemas, resolução dos problemas e o desenvolvimento da matemática relacionada ao tema e análise crítica das soluções. As concepções de Bean (2001 e 2007) acerca da construção de modelos, com base em premissas e pressupostos, foram úteis para complementar as análises e também para o trabalho de campo, possibilitando o levantamento de situações novas e interpretando as possíveis conclusões a que os alunos chegavam.

O tema sugerido pelos alunos foi “O restaurante *self service*”. Com base na obra de Barbosa,(2003) em que o autor afirma que “a modelagem é um ambiente de aprendizagem, e o aluno deve ser convidado a participar desse ambiente” após ser decidido o tema, os alunos buscaram questões que pudessem nortear uma visita a um restaurante com tais características e que fosse de fácil acesso e frequentado por eles. Feito o levantamento dos problemas, foi agendada uma visita ao restaurante onde as questões levantadas foram respondidas e esclarecidas pelo gerente do estabelecimento. Após a coleta dos dados e o direcionamento da pesquisadora, as questões matemáticas surgiram. Conforme apresentado no capítulo “Descrição do trabalho de campo: a matemática compreendida por meio do tema O restaurante *self service*” e no apêndice, os alunos encontraram um modelo para determinar o número de possibilidades diferentes de se servirem, de acordo com seu poder aquisitivo e paladar, em um restaurante com essas características.

Na Modelagem Matemática, os conteúdos surgem à medida que o trabalho vai se desenvolvendo; isso pode dificultar a ação dos educadores, pois não se pode prever o que vai acontecer e nem que conteúdos poderão emergir a partir de temas escolhidos a partir da realidade dos alunos envolvidos. Dessa forma, esta pesquisa além de proporcionar grande satisfação para a pesquisadora e para os alunos envolvidos, foi capaz de confirmar a presença da matemática em um restaurante bem como a possibilidade de relacioná-la a situações de sala de aula.

Os alunos ficaram surpresos com o aparecimento de diversas questões durante o trabalho - questões estas que envolviam proporcionalidade, matemática financeira, medidas de massa, geometria plana envolvendo área e perímetro dos pratos, frações, porcentagem, além da Análise Combinatória.

A corrente sociocrítica, mencionada no capítulo “A Modelagem”, que tem por objetivo educacional a abordagem de situações sociais por meio da matemática, pode auxiliar nas interpretações e nos diálogos com os estudantes, propiciando maior reflexão sobre a matemática, a Modelagem e seu significado social, conforme pontuado por Barbosa (2001).

Conforme Burak (2010, p. 12) “toda prática é fruto de uma forma particular de ver, de pensar e de compreender o mundo que nos cerca”. Assim, esta pesquisa mostrou, através dos resultados e das falas dos alunos, que a Modelagem Matemática pode contribuir para a contextualização da matemática no cotidiano dos mesmos.

Ao término do trabalho de campo, os alunos relatam o que acharam da atividade e da possibilidade de se estudar matemática com o suporte da Modelagem.

Acreditamos, portanto, que os resultados apresentados neste trabalho possam contribuir para que a Modelagem Matemática seja adotada como um novo recurso para o ensino da Análise Combinatória, bem como de outros conteúdos, por ser ela capaz de quebrar a linearidade curricular, a hegemonia do Ensino Tradicional Vigente, e ainda, além de propiciar maior e melhor integração e convívio entre professor e aluno, oportunizar o desenvolvimento dos conteúdos por meio da contextualização e do cotidiano dos alunos.

No entanto, observa-se que o Ensino Tradicional Vigente ainda se encontra muito arraigado e difundido entre as escolas de todo país, o que impede ou dificulta, por vezes, o avanço do trabalho do profissional que deseja inovar seus métodos. Essa é, portanto, uma realidade que precisa ser modificada.

8 REFERÊNCIAS

ABREU, Glaucos Ottone Cardoso de. **A prática de modelagem matemática como um cenário de investigação na formação continuada de professores de matemática.** 2011. 102 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2011.

ABREU, Lorena L. B. **Estudando conteúdos matemáticos com direcionamentos de modelagem matemática:** o caso da função afim. 2011. 242f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2011.

ALMEIDA, L. M. W.; Brito, D. S. Atividades de Modelagem Matemática: que sentido os alunos podem lhe atribuir? **Ciência & Educação**, v. 11, n. 3, p. 483-498, 2005.

ALMEIDA, L. M. W.; FERRUZZI, E. C. (2009). **Uma aproximação socioepistemológica para a modelagem matemática**. Alexandria, 2(2), p. 117-134.

ALVES, Renato de C. **O ensino de análise combinatória na educação básica e a formação de professores**. 161 f. Dissertação (mestrado) – UFRJ/IM. Programa de Pós- graduação em Matemática. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 2012.

ANDRADE, Mirian Maria. **Ensino e aprendizagem de Estatística por meio da Modelagem Matemática:** uma investigação com o ensino médio. 2008. 196 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2008.

ARAUJO, Jussara de Loiola. Uma abordagem sociocrítica da Modelagem Matemática: a perspectiva da educação matemática crítica. **Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v.2, n.2, p.55-68, jul 2009.

_______.**Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira:** pesquisas e práticas educacionais. Recife: SBEM, 2007. p. 195-211.

BALDINO, R. R. **Assimilação solidária onze anos depois.** Unesp: Rio Claro, 1995.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. **Modelagem na Educação Matemática:** contribuições para o debate teórico. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 2001, Caxambu.

_______. Modelagem Matemática na sala de aula. **Perspectiva**, Erechim (RS),v. 27, n. 98, p. 65-74, junho/2003a.

BARBOSA, J.C; CALDEIRA, A.D.; ARAÚJO, J.L. Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais. **Biblioteca do Educador Matemático** – Coleção SBEM, v.3. Recife: SBEM, 2007. 256 p. p. 33-47; 99-114.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática**. Editora Contexto, São Paulo, 2002.

_______. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática:** uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002. 389 p.

_______. Modelagem Matemática. Dynamis, Blumenau, v. 2, n. 7, p. 55-83, abril/jun.1994.

BEAN, Dale. O que é modelagem matemática? **Educação Matemática em Revista**. São Paulo, n.9/10, p. 49-57. Abr. 2001.

_______. Modelagem matemática: uma mudança de base conceitual. In: Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática, 5., 2007, Ouro Preto. **Anais...** Ouro Preto: CNMEM, 2007. p. 35-58.

_______ . Modelagem: uma conceitualização criativa da realidade. In: Encontro de Educação Matemática de Ouro Preto, 4., 2009, Ouro Preto. **Anais...** Ouro Preto: EEMOP, 2009, p. 90- 104.

BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem matemática & implicações no ensino e aprendizagem de matemática.** Blumenau: FURB, 1999. 134 p.

_______. **Modelagem Matemática:** Mapeamento das Ações Pedagógicas dos Educadores de Matemática. Tese de Pós - Doutorado, USP, São Paulo - SP, 2003.

BIEMBENGUT, M. S. Modelagem Matemática & Implicações no Ensino e na Aprendizagem de Matemática. 2ª ed. Blumenau. 2004. Ed. Edfurb.

________. 30 Anos de Modelagem Matemática na Educação Brasileira: das Propostas primeiras às propostas atuais. Alexandria - **Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 2, p. 7-32, 2009.

BOLEMA: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, SP, (2013). Disponível em:http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/index.
Acesso em: 23 de maio de 2014.

BORBA, Marcelo de Carvalho. MALHEIROS, Ana Paula dos S. Diferentes formas de interação entre internet e modelagem: desenvolvimento de projetos e o CVM. In: BARBOSA, Jonei Cerqueira; CALDEIRA, Ademir Donizeti.; BUENO, Vilma Candida. **Modelagem Matemática:** quatro maneiras de compreendê-la. Minas Gerais: Universidade Federal de Ouro Preto, 2011.

BURAK, D. Modelagem Matemática sob um olhar de Educação Matemática e suas implicações para a construção do conhecimento matemático em sala de aula. **Revista de Modelagem Na Educação Matemática**, Blumenal, v. 1, n. 1, p.10-27, 2010.

________. Modelagem matemática e a sala de aula. In: Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática, 1, 2004, Londrina, **Anais...** Londrina: [S.I], 2004.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Secretaria de Educação Fundamental – Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Ensino Médio: Matemática/ Secretaria da Educação Fundamental – Brasília: MEC/SEF, 2000.

CHAVES, Rodolfo. **Caminhos percorridos para a implantação do grupo de pesquisa-ação em educação matemática junto ao núcleo de ensino integrado de ciências e matemática da Universidade Federal de Viçosa.**

Rio Claro. 2000. 296 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Instituto de Geociências e Ciências Exatas de Rio Claro, Universidade Estadual Paulista.

CHAVES, Rodolfo. **Por que anarquizar com o ensino de matemática intervindo em questões socioambientais?** 2004, 233 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Instituto de Geociências e Ciências Exatas de Rio Claro, Universidade Estadual Paulista, 2004.

CHAVES, Rodolfo; LORENZONI, Luciano Lessa. Modelagem matemática: concepções e tutores do multicurso matemática. Salvador: **Anais do X ENEM**, 2010.

D'AMBROSIO, BEATRIZ S. Como ensinar matemática hoje? Brasília**. Temas e Debates**, ano 2, n. 2, p. 15-19, 1989.

D'AMBROSIO, Ubiratan. A matemática nas escolas. **Educação Matemática em Revista**, ano 9 n° 11ª, edição especial, abril de 2002, p. 29-33.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática:** Contexto e Aplicações. Volume 2. São Paulo: Ática, 2010. 384 p.

FIORENTINI, D. Parte I – A Educação Matemática como campo profissional e científico. In: FIORENTINI, D. & LORENZATO, S. **Investigação Matemática percursos teóricos e metodológicos.** Campinas, SP: Autores Associados, 2006 – (Coleção formação de professores).

FRANCHI, R. H. de O. L. **A Modelagem Matemática como estratégia de aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral nos cursos de Engenharia.** 148 p. (Dissertação, Mestrado), Rio Claro: IGCE/UNESP, 1993.

.

FREIRE P. **Pedagogia do oprimido.** São Paulo: Paz e Terra, 1970. 184 p.

HERMINIO, Maria Helena Garcia Barbosa. **O processo de escolha dos temas dos projetos de modelagem matemática.** 139 f. Dissertação de Mestrado. Rio Claro: [s.n.], 2009.

JACOBINI, O. R. A. **Modelação Matemática Aplicada no Ensino de Estatística em Cursos de Graduação.** Dissertação de Mestrado. Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP-Rio Claro, 1999.

JACOBINI, Otávio Roberto; WODEWOTZKI, Maria Lucia L. Uma reflexão sobre a Modelagem Matemática no Contexto da Educação Matemática Crítica. Rio Claro. **Bolema,** ano 19, n. 25, p. 71-88, maio 2006.

JÚNIOR, Arthur Gonçalves Machado. **Modelagem Matemática no Ensino-Aprendizagem:** ação e resultados. Dissertação de Mestrado. 133 f. Universidade Federal do Pará. Belém, 2005.

KLÜBER, T. E; BURAK, D. Modelagem Matemática: pontos que justificam sua utilização no ensino. In: IX ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática, 2007, Belo Horizonte, MG. **Anais...** Belo Horizonte: UNI-BH, 2007. p 1-19.

_______. Modelagem Matemática na Educação Básica numa perspectiva de Educação Matemática. In: BURAK, D.; PACHECO, R.P.; KLÜBER, T.E (Org). **Educação Matemática:** reflexões e ações. Curitiba: CRV, 2010, p.145-166.

MELLO, G. Namo de. **Ensino Médio:** Para que servem as Estatísticas Educacionais. Brasília: MEC/INEP (1998).

MATOS, José Manuel – Metodologia de investigação em Educação Matemática: a importância da diversidade. Quinto Simpósio de La Sociedad española e investigación em educación matemática. **Almeria,** 2001.

OLIVEIRA, R. Informática educativa: dos planos e discursos à sala de aula.

Campinas: Papirus, 1997.

PINHEIRO, Nilcéia Aparecida Maciel e BAZZO, Walter Antonio. Caso Simulado no Ensino-Aprendizagem de Matemática: ensinar sob uma abordagem crítica. Rio Claro. **Bolema**, ano 22, nº 32, 2009, p. 101 a 122,

PINHEIRO, C. A. M e ROZA, I. S. **Dá análise combinatória:** o que ficou em alunos e professores do Ensino Médio? Belém, 2006, 52 p. Monografia (Especialização em Educação Matemática)- Centro de Ciências Sociais e Educação- Universidade Estadual do Pará.

PINHEIRO, C.A.M.; e SÁ, P.F. O ensino de análise Combinatória: a prática pedagógica predominante segundo os docentes. **Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática**, Belo Horizonte, 2007.

PINHEIRO, C.A.M. **O Ensino de Análise Combinatória a partir de situações-problema**. 164f. Dissertação (Mestrado em Educação), 2008.

PINTO, Neuza Beroni. Marcas Históricas da Matemática Moderna no Brasil. **Saberes Docentes**, v.5. n.16 Set/Dez 2005. Disponível em: http://www2.pucpr.br/reol/index.php/DIALOGO?dd1=600&dd99=view. Acesso em: 15 de maio de 2014.

PITOMBEIRA, J.B. Princípio da casa dos pombos. **Revista do Professor de Matemática**, 8, p. 21-26, São Paulo: SBM, 1986.

SABO, Ricardo Dezso. **Análise de livros didáticos do ensino médio:** um estudo dos conteúdos referentes à combinatória. 54 p. Monografia (Especialização em Educação Matemática), Santo André, SP, 2007.

_______ . **Saberes Docentes:** a análise combinatória no Ensino Médio. 208 p. Dissertação (Mestrado em educação Matemática) PUC/SP, São Paulo, 2010.

SILVA, C.M.S.; WAGNER, V.L.P.S. - O que um iniciante precisa saber sobre pesquisa em Educação Matemática – In: **Cadernos de Pesquisa do Programa de Pós Graduação em Educação Matemática** da Universidade Federal do Espírito Santo, n. 10, p. 10 – 23, 1999.

SOUZA, A.C.P. **Análise Combinatória no Ensino Médio apoiada na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas**, 343 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) UNESP – Rio Claro, 2010.

SOUZA, Raquel Bagio de. **Modelagem Matemática:** algumas estratégias para o ensino-aprendizagem da matemática na educação básica. 64 p. Monografia. Especialização em Educação Matemática. UNESC. Criciúma (SC), 2006.

SKOVSMOSE, O. **Educação matemática crítica**. Campinas-SP: Ed. Papirus, 1990.

SKOVSMOSE, Ole. Cenários de investigação. In: **Bolema** – Boletim de Educação Matemática, Rio Claro (SP), nº 14, p. 66-91, 2000.

VAZQUEZ, Cristiane M. R. & NOGUTI, Fabiane C. H. **Análise Combinatória:** alguns aspectos históricos e uma abordagem pedagógica. Recife: VII Encontro Nacional de Educação Matemática. Julho de 2004.

YAHATA, Edson Akira. **Desenvolvimento das Habilidades Metacognitivas no Ensino de Análise Combinatória,** 129 f. Dissertação (Mestrado) – UFRJ / Instituto de Matemática / Programa de Pós- Graduação em Ensino de Matemática.

ANEXOS

Anexo 1: material produzido pelos alunos participantes da pesquisa durante os encontros.

Figura 1:

1º encontro; respostas dadas por Laura ao questionário aplicado.

1)Qual(ais) motivo(s) que o (a) levou a escolher o Coluni para cursar o Ensino Médio?

Devido a qualidade do ensino.

2) Qual (ais) conteúdo(s) de Matemática já estudados que você mais gostou e por quê?

Geometria Espacial. Acho uma das áreas mais interessantes dentro da matéria.

3)) Qual (ais) conteúdo(s) de Matemática já estudados que você menos gostou e por quê?

Funções trigonométricas, porque eu acho um assunto extremamente chato além de difícil.

4) Já foi reprovado em Matemática?

Sim.

5) Quais as atividades matemáticas que lhes despertaram maior interesse?

Fazer exercícios sozinho ou estudar em grupo.

6) Como pensa que os alunos aprendem?

Penso que a melhor forma de aprendizado dos alunos é através das aulas e fazendo exercícios.

7) Como deveriam ser trabalhados os conteúdos de Matemática?

Através de exercícios da teoria aprendida com exemplos no cotidiano.

8) Qual sua opinião sobre trabalhos em grupo?

Gosto de fazer trabalhos em grupos desde que, todos os envolvidos tenham responsabilidade.

9) O que é ser bom professor de Matemática?

É saber passar seu conhecimento para os alunos da melhor maneira possível garantindo o máximo de aprendizado e compreensão de todos eles.

10) Voce se submeteu a exame de vagas remanescentes para ingresso na segunda série?

Não.

Figura 2: 1º encontro; respostas dadas por Sara ao questionário aplicado.

1)Qual(ais) motivo(s) que o (a) levou a escolher o Coluni para cursar o Ensino Médio?

Qualidade do ensino

2) Qual (ais) conteúdo(s) de Matemática já estudados que você mais gostou e por quê?

P.A. e P.G. e trigonometria. Porque, foram conteúdo totalmente novos.

3)) Qual (ais) conteúdo(s) de Matemática já estudados que você menos gostou e por quê?

Conjuntos. Porque eu tive dificuldade para aprender.

4) Já foi reprovado em Matemática?

não

5) Quais as atividades matemáticas que lhes despertaram maior interesse?

Fazer exercícios em grupo

6) Como pensa que os alunos aprendem?

Fazendo exercícios, ou qualquer outra tarefa que coloque o conhecimento em matemática em prática.

7) Como deveriam ser trabalhados os conteúdos de Matemática?

De uma maneira mais dinâmico, exercícios são cansativos as vezes. Uma forma de estudo que fugisse um pouco disso seria interessante.

8) Qual sua opinião sobre trabalhos em grupo?

Acho excelente. Além de estimular as relações sociais, passa mais segurança, pois se você não conseguir resolver o problema alguém pode te ajudar.

9) O que é ser bom professor de Matemática?

Um bom professor de matemática é aquele que consegue transmitir o conhecimento de forma clara, que deixa o aluno confortável para perguntar qualquer coisa, independente de quão simples seja.

10) Voce se submeteu a exame de vagas remanescentes para ingresso na segunda série? não.

Figura 3: 1º encontro; respostas dadas por Zelão ao questionário aplicado.

1)Qual(ais) motivo(s) que o (a) levou a escolher o Coluni para cursar o Ensino Médio?

O status de melhor colégio do mundo e convívio com amigos ex-alunos.

2) Qual (ais) conteúdo(s) de Matemática já estudados que você mais gostou e por quê?

Gostei mais da parte de produtos notáveis, porque foi muito legal fazer a demonstração por meio de figuras geométricas

3)) Qual (ais) conteúdo(s) de Matemática já estudados que você menos gostou e por quê?

Eu não gostei muito de logaritmos e função logarítmica, pois é muito complicado trabalhar com potências e raízes, números muito grandes.

4) Já foi reprovado em Matemática?

Não, somente 1 nota vermelha no bimestre, no 1º Bimestre do 1º ano.

5) Quais as atividades matemáticas que lhes despertaram maior interesse?

Produção de gráficos e tabelas e também trabalhos que precisam que você demonstre fórmulas no quadro, explicando passo-a-passo.

6) Como pensa que os alunos aprendem?

Demonstrando teoremas e resolvendo exercícios e o melhor com trabalhos em grupo.

7) Como deveriam ser trabalhados os conteúdos de Matemática?

De maneira mais palpável com exemplos físicos e mais demonstrações de teoremas.

8) Qual sua opinião sobre trabalhos em grupo?

Muito bons, pra mim o melhor maneira de aprender.

9) O que é ser bom professor de Matemática?

Não demonstrar duvidas com relação à matéria a ser dada e explicar de maneira clara, e também saber tirar dúvidas dos alunos.

10) Voce se submeteu a exame de vagas remanescentes para ingresso na segunda série?

Não.

Figura 4: 1º encontro; respostas dadas por Stela ao questionário aplicado.

1)Qual(ais) motivo(s) que o (a) levou a escolher o Coluni para cursar o Ensino Médio?

→ A oportunidade que o colégio oferece tanto com relação ao crescimento intelectual quanto pessoal e cultural.

2) Qual (ais) conteúdo(s) de Matemática já estudados que você mais gostou e por quê?

→ Função do 2º grau, pois envolve uma problematização;
→ conjuntos, pois envolvem coisas mais cotidianas;
→ geometria, pois mexe com coisas reais, também;

3)) Qual (ais) conteúdo(s) de Matemática já estudados que você menos gostou e por quê?

→ Trigonometria, no sentido da matéria avançada. Não que eu não tenha gostado, mas a matéria envolve muitas relações.

4) Já foi reprovado em Matemática?

Não.

5) Quais as atividades matemáticas que lhes despertaram maior interesse?

Problemas dos quais eu consiga imaginar realmente sobre o que eu estou fazendo. Tanto exercícios no quadro quanto no caderno.

6) Como pensa que os alunos aprendem?

Através de resolução de exercícios.

7) Como deveriam ser trabalhados os conteúdos de Matemática?

Apresentar o conteúdo e relacioná-lo, caso haja meio e existência, com exemplos reais, o que facilita o intendimento e permite uma maior rapidez ao realizar o exercício.

8) Qual sua opinião sobre trabalhos em grupo?

Nem sempre são vantajosos, uma vez que existem pessoas mais enrolados que as outras. Mas há o lado bom de, quando em grupo, um poder ajudar o outro.

9) O que é ser bom professor de Matemática?

Saber, não tudo, pois ninguém sabe, a matéria (conteúdo) que será apresentado aos alunos. E, não só o professor de matemática, mas todos devem ter a humildade para ouvir do aluno dizer que, por exemplo, não conseguiu resolver o exercício, mas que tentará.

10) Voce se submeteu à exame de vagas remanescentes para ingresso na segunda série?

Não.

Figura 5: 5º encontro; questões levantadas por Zelão, Sara, Laura e Stela

1) Como é calculado o preço do quilo de alimento?

2) Que destino é dado aos alimentos que sobram nos pratos?

3) Que destino é dado aos alimentos que sobram nas travessas?

4) Quantos funcionários tem o estabelecimento?

5) Dentre esses funcionários, quantos são capacitados para trabalhar no caixa?

6) Qual a despesa mensal com funcionários e aluguel? (aproximado)

7) Quanto se gasta mensalmente com a compra de ingredientes? (aproximado)

8) Qual é o alimento mais consumido no restaurante?

9) Quantos quilos de alimento são consumidos em uma semana? (aproximado)

10) Onde o restaurante adquire os produtos a serem consumidos?

11) O restaurante tem acompanhamento de nutricionista?

Figura 6: 6º encontro; respostas do Sr. J às perguntas levantadas por Zelão, Sara, Laura e Stela.

R1) Anotamos o consumo diário de cada produto e seu valor ao elaborar o self service, mais a margem que a empresa quer, assim temos o custo do self.

R2) A sobra de comida dos pratos é juntada em um balde e no fim do dia, levados ao sítio dos proprietários para cachorros e galinhas.

R3) Os colaboradores do turno da noite a consomem no jantar.

R4) Turno dia: 1 cozinheira, 2 faxineiros, 4 aux. de cozinha, 1 churrasqueiro, 1 copeiro, 1 aux. administrativo, 3 garçons, 1 repositora e 1 operador de caixa.

Turno noite: 1 cozinheiro, 4 pizzaiolos, 4 aux. de cozinha, 2 copeiros, 7 garçons, 2 operadores de caixa.

Totalizando 35 colaboradores.

R5) São quatro colaboradores, sendo dois por turno.

R6) Uma média de 50 mil reais por mês.

R7) Uma média de 70 mil reais sendo estes em carnes, laticínios e hortifruti.

R8) Carne de boi e frango.

R9) Uma média de 470Kg de comida por semana.

R10) Compramos de distribuidoras da região e fora também, como: Pif paf, Friboi, Lebom, Coati, Seara, mega fort, novo suíno, dentre outras. As hortaliças são produzidas pela empresa.

R11) Temos acompanhamento de Economista Doméstica.

Figura 7: 6º encontro; cardápio anotado por Zelão no dia da visita ao restaurante.

Vegetais:
Cenourinha, Alface, Couve-Flor
Milho Verde, Ervilha, Rúcula
Agrião

Saladas:
Maionese, Vinagre
Cenoura com Batata Baroa

Alimentos Cozidos ou Fritos
Arroz branco, Arroz integral
Feijão Inteiro, Batatinha Frita
Purê de Batata

Massas
Espaguete ao molho, Torresmo
Farofa, Lasanha

Guarnições
Farinha de Milho Torrada, Linhaça
Alho Torrado, Farinha de Linhaça
Molho de Pimenta, Azeite

Carnes:
Carne de Porco
Carne de Frango

Sucos / Refrigerantes
Suco de Laranja, Suco de Limão
Guaraná, Coca-Cola

Figura 8: 6º encontro; anotações feitas por Stela, durante a visita ao restaurante.

CONFORME SUA PREFERENCIA (SABOR) FAÇA SUA ANOTAÇÃO.

- Opções de vegetais. Alface, cenourinha, milho verde, Couve-flor
- Opções de saladas. Maionese e vinagrete
- Opções de arroz. Arroz branco
- Opções de feijão. feijão inteiro
- Opções de massas. Toresmo e farofa
- Opções de carnes. Carne di porco
- Opções de acompanhamentos (outros). Batatinha frita e purê de batata e azeite
- Opções de frutas.
- Opções de sucos. ~~[illegible]~~ Suco de limão, suco de laranja
- Opções de refrigerantes. Coca-Cola

QUAIS FORAM OS ALIMENTSO QUE VOCE COLOCOU NO SEU PRATO?

Arroz branco, feijão inteiro, batatinha frita, carne de porco, Couve-flor, azeite e toresmo

Figura 9: 6º encontro; anotações feitas por Zelão, durante a visita ao restaurante.

CONFORME SUA PEFERENCIA (SABOR) RESPONDA:

- De quantas opções de vegetais você dispõe? 4: Cenourinha, Alface e Tomate.
- De quantas opções de saladas você dispõe? Nenhuma
- Opções de arroz Arroz Branco
- Opções de feijão Feijão Inteiro e Feijoada
- Opções de massas Purê, Macarronada
- Opções de carnes Filé de Frango, Bife de Porco, Frango Assado
- Opções de acompanhamentos (outros) Batata Frita e Batata Palha
- Opções de frutas Nenhuma
- Opções de suco Laranja e Limão
- Opções de refrigerante Coca-Cola

Quais foram os alimentos que você colocou no seu prato?

- Arroz Branco
- Feijão Inteiro
- Macarronada
- Batata Frita
- Cenourinha
- Filé de Frango
- Frango Assado

Figura 10: 6º encontro; anotações feitas por Sara, durante a visita ao restaurante.

CONFORME SUA PREFERENCIA (SABOR) FAÇA SUA ANOTAÇÃO.

- Opções de vegetais. cenourinha, milho verde, ervilha
- Opções de saladas. Maionese, vingrete, cenoura com batata baroa
- Opções de arroz. arroz branco, arroz integral
- Opções de feijão. Feijão inteiro
- Opções de massas. espaquete ao molho, lasanha
- Opções de carnes. carne de frango
- Opções de acompanhamentos (outros). Purê de batata, Batatinha frita, farofa
- Opções de frutas.
- Opções de sucos. Suco de laranja, suco de limão
- Opções de refrigerantes.
  Guaraná, coca-cola

QUAIS FORAM OS ALIMENTSO QUE VOCE COLOCOU NO SEU PRATO?

Milho verde, vinagrete, arroz branco, feijão inteiro, lasanha, carne de frango, batatinha frita, suco de laranja

Figura 11: 6º encontro; anotações feitas por Laura, durante a visita ao restaurante.

CONFORME SUA PEFERENCIA (SABOR) RESPONDA:

- De quantas opções de vegetais você dispõe? cenoura, couve flor, milho verde, ervilha
- De quantas opções de saladas você dispõe? nenhuma.
- Opções de arroz arroz branco
- Opções de feijão feijão [illegible]
- Opções de massas lasanha, macarrão, purê de batata.
- Opções de carnes filé de frango
- Opções de acompanhamentos (outros) batata frita
- Opções de frutas nenhuma
- Opções de suco laranja.
- Opções de refrigerante coca cola.

Quais foram os alimentos que você colocou no seu prato?

. Filé de frango

. macarrão ao molho quatro queijos

. purê de batata

. batata frita

. coca cola.

Figura 12: 7º encontro; tabela elaborada por Zelão.

OPÇÕES	POSSIBILIDADES	ALIMENTO ESCOLHIDO
VEGETAIS	CENOURINHA, ALFACE E TOMATE	CENOURINHA
SALADAS	NENHUMA	
ARROZ	ARROZ BRANCO	ARROZ BRANCO
FEIJÃO	FEIJÃO INTEIRO E FEIJOADA	FEIJÃO INTEIRO
MASSAS	PURÊ E MACARRONADA	MACARRONADA
CARNES	FILÉ DE FRANGO E DE PORCO, E FRANGO	FILÉ DE FRANGO
	ASSADO	E FRANGO ASSADO
ACOMPANHAMENTOS	BATATA FRITA E BATATA PALHA	BATATA FRITA
SUCO	LARANJA E LIMÃO	
REFRIGERANTE	COCA - COLA	COCA - COLA

Figura 13: 7º encontro; tabela elaborada por Sara.

OPÇÕES	POSSIBILIDADES	ALIMENTO ESCOLHIDO
Vegetais	cenourinha, milho verde, ervilha	milho verde
Saladas	maionese, vinagrete, cenoura com batata barsa	vinagrete
Alimentos cozidos ou fritos	Arroz branco, arroz integral, feijão inteiro, batatinha frita, purê de batata	arroz branco, feijão inteiro, batatinha frita
massas	Espaguete ao molho, farofa, lasanha	lasanha, ~~[illegible]~~ farofa
Guarnições	Azeite	—
carnes	carne de frango	carne de frango
sucos	suco de laranja, suco de limão	suco de laranja
refrigerantes	Guaraná, coca - cola	—

Figura 14: 7º encontro; tabela elaborada por Laura.

OPÇÕES	POSSIBILIDADES	ALIMENTO ESCOLHIDO
vegetais	ervilha cenoura, couve flor, milho verde	nenhum
salada	nenhuma	nenhum
arroz	branco	nenhum
feijão	feijão inteiro	nenhum
massas	lasanha, macarrão, purê de batata	macarrão e purê de batata
carnes	filé de frango	filé de frango
acompanhamentos	batata frita	batata frita
frutas	nenhuma	nenhuma
sucos	laranja	nenhuma
refrigerantes	coca-cola	coca-cola

Figura 15: 7º encontro; tabela elaborada por Stela

OPÇÕES	POSSIBILIDADES	ALIMENTO ESCOLHIDO
Vegetais	Milho verde / Cenoura / Alface / Couve-flor	Couve-flor
Saladas	-	-
Alimentos c ou f	Arroz branco / feijão i. / batata frita	Arroz b. / feijão i / batata f.
Massas	Torresmo / farofa	Torresmo
Guarnições	Azeite	Azeite
Carnes	Carne de porco	Carne de porco
Suco	Suco de laranja / suco de limão	Suco de laranja
Refrigerantes	Coca-cola	Coca-Cola

Figura 16: 8º encontro; cálculo feito por Laura, das diferentes possibilidades de ser servir conforme sua opção (sabor).

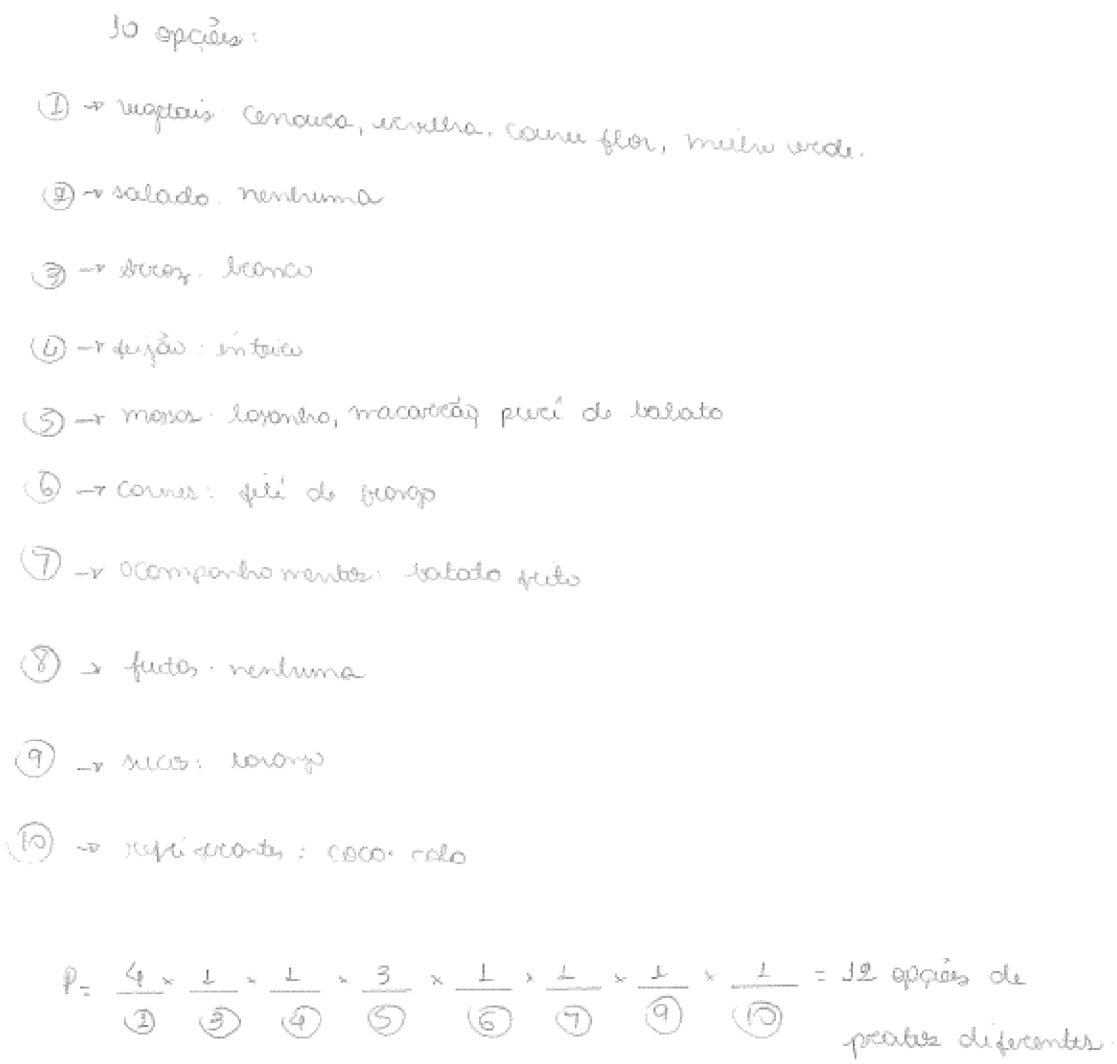


Figura 17: 8º encontro; cálculo feito por Stela, das diferentes possibilidades de ser servir conforme sua opção (sabor).

Arroz b.; feijão; torresmo; azeite; carne de porco; couve-flor; batata f.; suco de laranja; coca-cola. = 9 variedades
14 possibilidades;

14 possibilidades, tirarei 9

- Irei ter que combinar 9 coisas, as quais posso escolher dentre 14 possibilidades.

- Em um dia posso ter 14, no outro 13, no outro 12; até chegar no dia que eu terei só 1 opção;

Ex.: 1º A / 13 possibilidades
12 possibilidades, ... até chegar em 1 p/cada,

Entretanto, eu estou escolhendo 9 coisas de 14. Logo, seria 14 possibilidades, tomadas 9 a 9.

Como não me importo com a ordem, eu preciso tirar as vezes em que aparecem as opções em diferentes posições, o que me leva a dividir pela diferença de possibilidades todas quais escolhi.

14
13
42
14
182
11
182
182
2068

$$\rightarrow \frac{14 \times 13 \times \cancel{12} \times 11 \times \cancel{10} \times \cancel{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}}{\cancel{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} \times \cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1}$$

$$\rightarrow 14 \times 13 \times 11 = 2068$$

Figura 18: 8º encontro; cálculo feito por Sara, das diferentes possibilidades de ser servir conforme sua opção (sabor).

Vegetais = 3 opções
Saladas = 3 opções
Arroz = 2 opções
Feijão = 1 opção
massas = 2 opções
Carnes = 1 opção
Acompanhamentos (outros) = 3 opções
Sucos = 2 opções
Refrigerantes = 2 opções
Total de possibilidades = 432 possibilidades.

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times\ 3 \\ \hline 108 \\ \times\ 4 \\ \hline 432 \end{array}$$

Figura 19: 8º encontro; cálculo feito por Zelão, das diferentes possibilidades de ser servir conforme sua opção (sabor).

Calculando as diferentes possibilidades para se servir conforme sua opção (sabor).

Usando o princípio multiplicativo temos

VEGETAIS - ARROZ - FEIJÃO - MASSAS - CARNES, ACOMPANHAMENTO - SUCO - REFRIGERANTE

3 x 1 x 2 x 2 x 3 x 2 x 2 x 1 = 144 opções

Figura 20: 8º encontro; comentários de Sara

Na minha percepção, a atividade prática auxiliou um pouco no aprendizado sobre a análise combinatória, pois apesar de entendermos como as situações que envolvem análise combinatória acontecem de fato na vida real, ainda fica um pouco difícil de entender a lógica de alguns desses problemas e analisar todos os fatores que devem ser excluídos ou considerados em sua resolução.

Figura 21: 8º encontro; comentários de Sara (continuação).

Comentários:
Após o aprendizado das fórmulas, parece que fica muito mais difícil tornar a visualizar como se resolve esses problemas a partir das considerações da lógica da situação real. A resolução dos exercícios fica muito mais automática, ao invés de exigir um raciocínio mais elaborado. Daí, vem também a percepção de que as fórmulas nos permitem realizar os exercícios com maior rapidez e nos ajuda a entender melhor algumas exceções que devem ser consideradas na resolução dos exercícios.

Figura 22: 8º encontro; comentários de Stela

A pesquisa foi importante para um aprimoramento dos métodos lógicos que a análise combinatória requer. Através de um elemento, um cardápio de restaurante, foi possível associar melhor as diferentes maneiras de combinar/ou permutar os objetos que nos foram dados.

A pesquisa teve caráter tanto qualitativo quanto quantitativo, já que relaciona, respectivamente, a qualidade e o modo de pensamento sem uso direto de fórmullas, e relacionar a abrangência do universo dos números e a probabilidade de maior aprendizado com o uso da lógica. Sendo ambas as finalidades de boa utilidade pública.

Figura 23: 8º encontro; comentários de Stela (continuação).

Comentários - Stela

Durante o desenvolvimento da pesquisa foram desenvolvidos métodos para ajudar a chegar a uma "regra", ou melhor, fórmulas, com as quais não precisaríamos fazer uma análise descritiva dos exercícios, mas sim uma análise lógica, onde usaríamos as fórmulas para minimizar os cálculos e chegar no mesmo resultado.

Entretanto, já nos últimos encontros, foi possível notar que o uso de fórmulas leva a uma regressão da necessidade de pensamento complexo perante os problemas dados, o que, de certo modo, faz com que o estudo através da mesma se torne algo mecânico, e não algo que levaria a uma "descoberta" por parte do aluno, uma vez que o mesmo obtém as fórmulas, na maioria das vezes, pronta.

Por fim, a pesquisa foi de bom grado e ajudou no desenvolvimento de um pensamento crítico quanto ao uso das fórmulas, além de ajudar no modo como aprender a análise combinatória e os mecanismos como desenvolvê-la.

Figura 24: 8º encontro; comentários de Laura.

A pesquisa realizada sobre análise combinatória
tomando em base os restaurantes self-service, foram
de grande aprendizado dentro da matéria do 2º ano
do ensino médio pois, é uma forma didática de
se aprender a combina utilizando as disponibilida-
des de alimento que se tem em um restaurante
e interligando com a matéria tanto aprendida em
sala de aula como os conceitos estudados durante to-
do a pesquisa.

Figura 25: 8º encontro; comentários de Zelão.

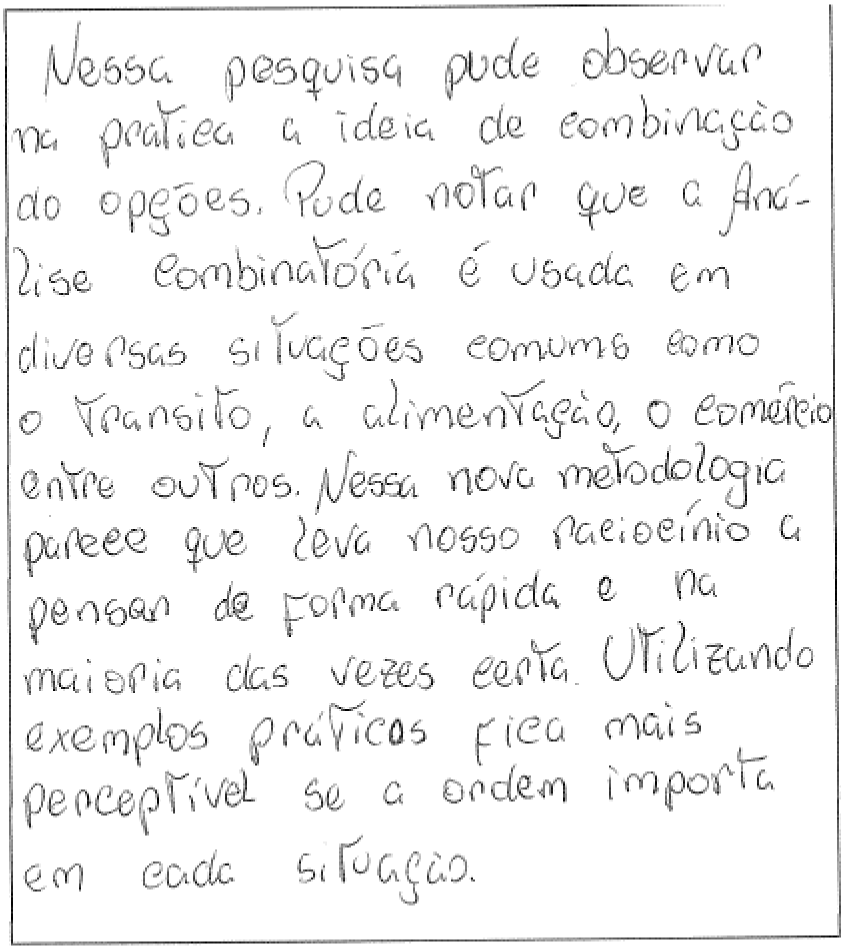

Nessa pesquisa pude observar na pratica a ideia de combinação do opções. Pude notar que a Análise combinatória é usada em diversas situações comums como o transito, a alimentação, o comércio entre outros. Nessa nova metodologia parece que leva nosso raciocínio a pensar de forma rápida e na maioria das vezes certa. Utilizando exemplos práticos fica mais perceptível se a ordem importa em cada situação.

Figura 26: 8º encontro; proposta de resolução de Laura, às atividades apresentadas.

1 - Quantos números de 3 algarismos distintos é possível formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6?

Espaço amostral: 1, 2, 3, 4, 5, 6

_6_ x _5_ x _4_ = 120 opções diferentes

2 - Uma escola tem 9 professores de Matemática. Quatro deles deverão representar a escola em um congresso. Quantos grupos de 4 professores poderão ser formados?

Espaço amostral: 9 professores de matemática.

_9_ x _8_ x _7_ x _6_ = 3024 maneiras diferentes.

3 - Thaís vai almoçar em um restaurante *self service,* cujo cardápio oferece todos os grupos de alimentos, com várias opções de frutas e hortaliças, carboidratos e proteínas de origem animal e vegetal. Para atender às preferências e às necessidades nutricionais de Thaís, ela deve escolher um alimento de cada grupo. Ao se servir, ela deverá dividir seu prato em quatro partes: uma parte reservada para os vegetais crus ou cozidos, outra para o acompanhamento (arroz, macarrão, batata), uma para leguminosas (feijão, ervilha, lentilha, grão de bico) e outra para o prato principal (carnes ou ovos). Sabendo-se que dentre os vegetais disponíveis ela gosta apenas de alface, tomate, cenoura e brócolis, de quantas maneiras diferentes poderá se servir nesse restaurante?

4 setores:

1 vegetais: alface, tomate, cenoura, brócolis

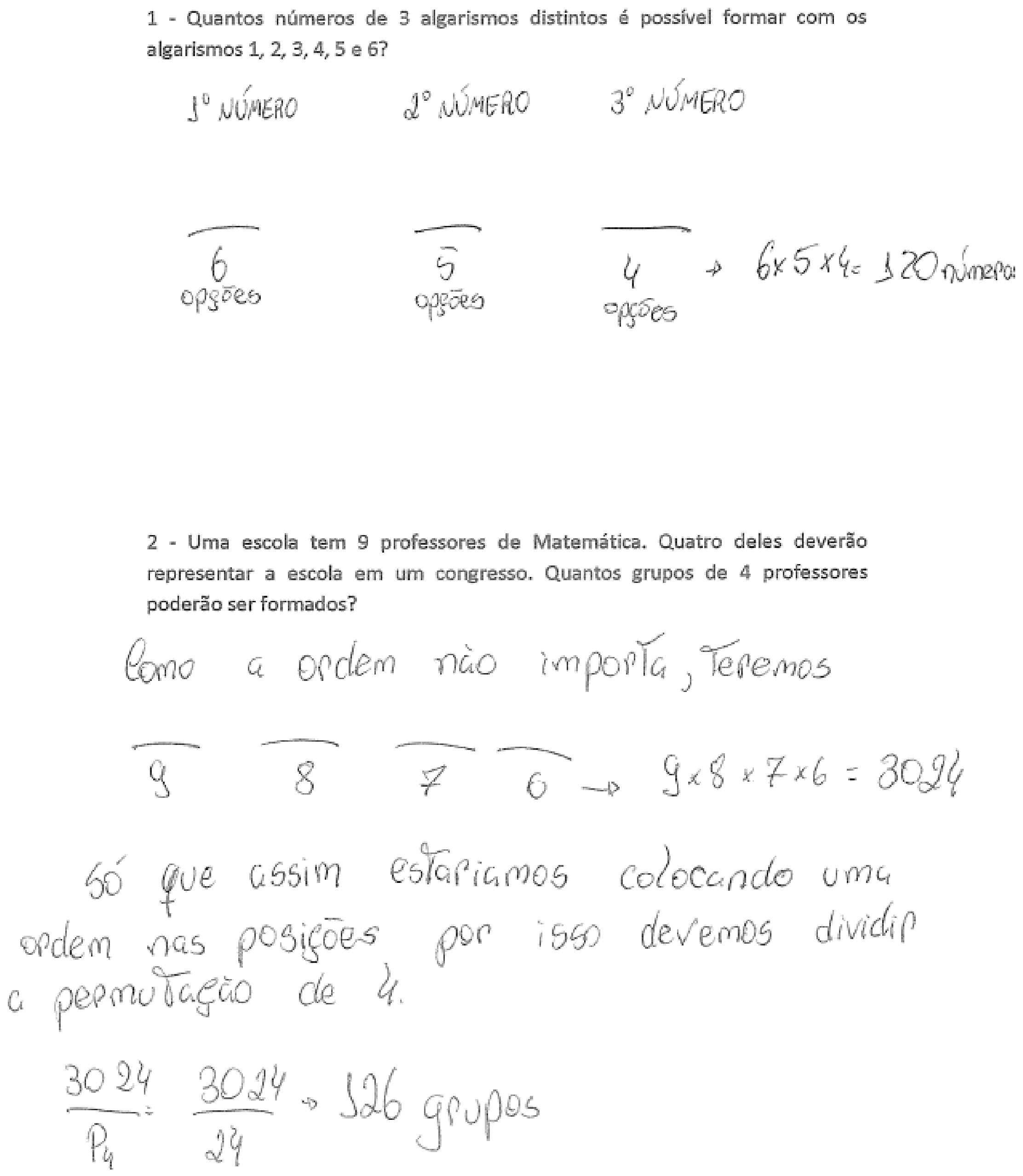
2 acompanhamento: arroz, macarrão, batata

3 leguminosas: feijão, ervilha, lentilha, grão de bico.

4 prato principal: carne, ovos

$$P = \underset{1}{\underline{4}} \times \underset{2}{\underline{3}} \times \underset{3}{\underline{4}} \times \underset{4}{\underline{2}} = 96$$ opções de pratos diferentes.

Figura 27: 8º encontro; proposta de resolução de Zelão, às atividades apresentadas.



1 - Quantos números de 3 algarismos distintos é possível formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6?

1º NÚMERO 2º NÚMERO 3º NÚMERO

6 opções 5 opções 4 opções → $6 \times 5 \times 4 = 120$ números

2 - Uma escola tem 9 professores de Matemática. Quatro deles deverão representar a escola em um congresso. Quantos grupos de 4 professores poderão ser formados?

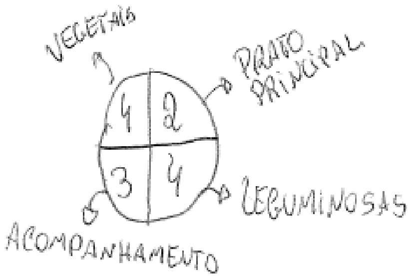
Como a ordem não importa, teremos

9 8 7 6 → $9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$

Só que assim estaríamos colocando uma ordem nas posições por isso devemos dividir a permutação de 4.

$\frac{3024}{P_4} = \frac{3024}{24} \rightarrow 126$ grupos

3 - Thaís vai almoçar em um restaurante *self service,* cujo cardápio oferece todos os grupos de alimentos, com várias opções de frutas e hortaliças, carboidratos e proteínas de origem animal e vegetal. Para atender às preferências e às necessidades nutricionais de Thaís, ela deve escolher um alimento de cada grupo. Ao se servir, ela deverá dividir seu prato em quatro partes: uma parte reservada para os vegetais crus ou cozidos, outra para o acompanhamento (arroz, macarrão, batata), uma para leguminosas (feijão, ervilha, lentilha, grão de bico) e outra para o prato principal (carnes ou ovos). Sabendo-se que dentre os vegetais disponíveis ela gosta apenas de alface, tomate, cenoura e brócolis, de quantas maneiras diferentes poderá se servir nesse restaurante?



Nesse caso a ordem importa pois são categorias diferentes:

$4 \times 2 \times 3 \times 4 = 96$ maneiras

Figura 28: 8º encontro; proposta de resolução de Stela, às atividades apresentadas.

1 - Quantos números de 3 algarismos distintos é possível formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6?

$\underline{\ \ }\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }$

6 5 4

$30 \times 4 = 120$

2 - Uma escola tem 9 professores de Matemática. Quatro deles deverão representar a escola em um congresso. Quantos grupos de 4 professores poderão ser formados?

$$C_{9,4} = \frac{9!}{5!\,4!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot \cancel{5!}}{4!\,\cancel{5!}} = \frac{9\cdot \cancel{8}^{2}\cdot 7\cdot \cancel{6}}{\cancel{24}} = 63 \times 2 = 126$$

3 - Thaís vai almoçar em um restaurante *self service,* cujo cardápio oferece todos os grupos de alimentos, com várias opções de frutas e hortaliças, carboidratos e proteínas de origem animal e vegetal. Para atender às preferências e às necessidades nutricionais de Thaís, ela deve escolher um alimento de cada grupo. Ao se servir, ela deverá dividir seu prato em quatro partes: uma parte reservada para os vegetais crus ou cozidos, outra para o acompanhamento (arroz, macarrão, batata), uma para leguminosas (feijão, ervilha, lentilha, grão de bico) e outra para o prato principal (carnes ou ovos). Sabendo-se que dentre os vegetais disponíveis ela gosta apenas de alface, tomate, cenoura e brócolis, de quantas maneiras diferentes poderá se servir nesse restaurante?

$P_3 \times P_2 \quad P_4 \times P_4$

$P_3 \times P_4 \times P_4 \times P_2$

$6 \times \underbrace{24 \times 24} \times 2$

3456×2

$\boxed{6912 \text{ maneiras}}$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times\ 24 \\ \hline 96 \\ 48 \\ \hline 576 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3456 \\ \times\ 2 \\ \hline 6912 \end{array}$$

Figura 29: 8º encontro; proposta de resolução de Sara, às atividades apresentadas.

1 - Quantos números de 3 algarismos distintos é possível formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6?

120 números

$\underline{6}\quad\underline{5}\quad\underline{4}$

Pelo princípio multiplicativo:

$6 \times 5 \times 4 = 120$

2 - Uma escola tem 9 professores de Matemática. Quatro deles deverão representar a escola em um congresso. Quantos grupos de 4 professores poderão ser formados?

$$C_{9,4} = \frac{9!}{4!5!} = \frac{9.\overset{2}{\cancel{8}}.7.\cancel{6}.\cancel{5!}}{\cancel{4}.\cancel{3}.\cancel{2}.1.\cancel{5!}} = \boxed{126 \text{ grupos}}$$

$$\begin{array}{r} 63 \\ \times\ 2 \\ \hline 126 \end{array}$$

3 - Thaís vai almoçar em um restaurante *self service*, cujo cardápio oferece todos os grupos de alimentos, com várias opções de frutas e hortaliças, carboidratos e proteínas de origem animal e vegetal. Para atender às preferências e às necessidades nutricionais de Thaís, ela deve escolher um alimento de cada grupo. Ao se servir, ela deverá dividir seu prato em quatro partes: uma parte reservada para os vegetais crus ou cozidos, outra para o acompanhamento (arroz, macarrão, batata), uma para leguminosas (feijão, ervilha, lentilha, grão de bico) e outra para o prato principal (carnes ou ovos). Sabendo-se que dentre os vegetais disponíveis ela gosta apenas de alface, tomate, cenoura e brócolis, de quantas maneiras diferentes poderá se servir nesse restaurante?

vegetais: $C_{4,1} = \frac{4!}{1!3!} = \frac{4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 4$

Acompanhamento: $C_{3,1} = \frac{3!}{1!2!} = \frac{3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}}$

Leguminosas: $C_{4,1} = \frac{4!}{1!3!} = \frac{4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}}$

Prato principal: $C_{2,1} = \frac{2!}{1!1!} = \frac{2 \cdot \cancel{1!}}{\cancel{1!}} = 2$

Total de possibilidades = Princípio multiplicativo = $4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 = 96$ possibilidades

$$\begin{array}{r} {}^{3}16 \\ \times \quad 6 \\ \hline 96 \end{array}$$

APÊNDICES

Apêndice 1

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA
COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA EM SERES HUMANOS - CEP/UFJF
36036-900 JUIZ DE FORA - MG – BRASIL

TERMO DE ASSENTIMENTO

Você está sendo convidado (a)como voluntário (a) a participar da pesquisa **“A MODELAGEM MATEMÁTICA COMO METODOLOGIA PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA”.** Nesta pesquisa pretendemos propiciar o estudo de alguns conceitos de Análise Combinatória, bem como abordagens sobre o ensino e aprendizagem dos mesmos. O motivo que nos leva a estudar este tema é a eminente dificuldade dos alunos do ensino médio no que diz respeito ao estudo de Análise Combinatória. Partimos da intuição de que um dos motivos é o ensino muitas vezes mecânico, que não considera os conhecimentos prévios do aluno.

Será realizada uma pesquisa de abordagem qualitativa, na qual serão colhidos dados e respostas dos pesquisados, atentando a detalhes relacionados ao entendimento, desenvolvimento e construção ou não de um modelo para determinados conceitos de Análise Combinatória. Serão promovidos ambientes colaborativos nos quais atividades exploratórias e investigativas serão trabalhadas, os riscos, vistos aqui como oportunidades, consiste na liberdade e autonomia dos alunos nestes ambientes e com estes tipos de atividades.

Tratamos estes “riscos” como oportunidades, pois a abertura para pensar, relacionar, conjecturar, inferir, propor, podem estimular habilidades e propiciar a concepção de diversos conhecimentos e não apenas os específicos do conteúdo ou disciplina em questão.

Para participar desta pesquisa, o responsável por você deverá autorizar e assinar um termo de consentimento. Você não terá nenhum custo, nem receberá qualquer vantagem financeira. Você será esclarecido (a) em qualquer aspecto que desejar e estará livre para participar ou recusar-se. O responsável por você poderá retirar o consentimento ou interromper a sua participação a qualquer momento. A sua participação é voluntária e a recusa em participar não acarretará qualquer penalidade ou modificação na forma em que é atendido (a) pelo pesquisador que irá tratar a sua identidade com padrões profissionais de sigilo. Você não será identificado em nenhuma publicação.

Os resultados estarão à sua disposição quando finalizada. Seu nome ou o material que indique sua participação não será liberado sem a permissão do responsável por você. Os dados e instrumentos utilizados na pesquisa ficarão arquivados com o pesquisador responsável por um período de 5 anos, e após esse tempo serão destruídos. Este termo de consentimento encontra-se impresso em duas vias: uma cópia será arquivada pelo pesquisador responsável, e a outra será fornecida a você. Os pesquisadores tratarão a sua identidade com padrões profissionais de sigilo, atendendo a legislação brasileira (Resolução Nº 466/12 do Conselho Nacional de Saúde), utilizando as informações somente para os fins acadêmicos e científicos.

Eu, ____

_____, portador (a) do documento de Identidade ____________________ **,** fui informado (a) dos objetivos da presente pesquisa, de maneira clara e detalhada e esclareci minhas dúvidas. Sei que a qualquer momento poderei solicitar novas informações, e o meu responsável poderá modificar a decisão de participar se assim o desejar.

Tendo o consentimento do meu responsável já assinado, declaro que concordo em participar dessa pesquisa. Recebi uma cópia deste termo de assentimento e me foi dada a oportunidade de ler e esclarecer as minhas *dúvidas.*

Viçosa, ____ de ______________ de 2014.

____

Assinatura do (a) menor

____

Assinatura do (a) pesquisador (a)

Em caso de dúvidas com respeito aos aspectos éticos desta pesquisa, você poderá consultar:

CEP - Comitê de Ética em Pesquisa/UFJF

Campus Universitário da UFJF

Pró-Reitoria de Pesquisa

CEP: 36036-900

Fone: (32) 2102- 3788 / E-mail: cep.propesq@ufjf.edu.br

Pesquisador Responsável: Cleuza Eunice Pereira Brumano

Endereço: Rua José Ubaldo Paiva, 12 - Bairro: Ramos

CEP: 36 570- 000 – Viçosa – MG

Fone: (31) 3891 3578

E-mail: cbrumano@ufv.br

Apêndice 2

AUTORIZAÇÃO PRÉVIA

Título: “A MODELAGEM MATEMÁTICA COMO METODOLOGIA PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA”

Professora Pesquisadora:

Cleuza Eunice Pereira Brumano

Informações ao Diretor da Escola Estadual

O Colégio de Aplicação – CAp/COLUNI da Universidade Federal de Viçosa foi selecionada para participar de uma pesquisa que tem como objetivo propiciar o estudo de alguns conceitos de Análise Combinatória, bem como abordagens sobre o ensino e aprendizagem dos mesmos . Será realizada uma pesquisa de abordagem qualitativa, na qual serão colhidos dados e respostas dos pesquisados, atentando a detalhes relacionados ao entendimento, desenvolvimento e construção ou não de um modelo para determinados conceitos de Análise Combinatória.

O participante da pesquisa poderá abandonar o procedimento em qualquer momento, sem nenhuma penalização ou prejuízo. A sua participação é voluntária e a recusa em participar não acarretará qualquer penalidade ou modificação na forma em que é atendido pelo pesquisador, que tratará a sua identidade com padrões profissionais de sigilo.

Em caso de dúvidas, com respeito aos aspectos éticos desta pesquisa, você poderá consultar:

CEP – Comitê de Ética em Pesquisa em Seres Humano-UFJF

Campus Universitário da UFJF
Pró-Reitoria de Pesquisa
CEP: 36036-900
Fone: (32) 2102- 3788 / E-mail: cep.propesq@ufjf.edu.br

Pesquisador Responsável: CLEUZA EUNICE PEREIRA BRUMANO
Endereço: RUA JOSÉ UBALDO PAIVA, 12 – Bairro: RAMOS
CEP: 36570-000 – Viçosa – MG
Fone: (31) 3891 3578 / e-mail: cbrumano@ufv.br

A Declaração de concordância com a realização da pesquisa será feita em duas vias, ficando uma com o senhor (a) e a outra arquivada com a Pesquisadora Responsável.

Eu, Hélio Paulo Pereira Filho, diretor do CAp/COLUNI - UFV, confirmo ter conhecimento do conteúdo desta pesquisa. A minha assinatura abaixo indica que concordo com a realização desta no estabelecimento de minha responsabilidade e, por isso, dou a minha autorização.

Viçosa, 17 de abril de 2014.

Assinatura do Diretor

Apêndice 3

DECLARAÇÃO DE INFRAESTRUTURA

Eu, Hélio Paulo Pereira Filho, diretor do Colégio de Aplicação – CAp/COLUNI da Universidade Federal de Viçosa, declaro ter sido suficientemente informado a respeito da pesquisa sobre “A MODELAGEM COMO METODOLOGIA PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMLBINATÓRIA” e discuti com o pesquisador responsável sobre a decisão de conceder o espaço de infraestrutura realização da pesquisa.

Declaro que a referida apresenta estrutura adequada para à realização da pesquisa, pois será disponibilizado todo apoio e incentivo dos estudantes a participarem deste estudo. Além disso, esse espaço físico possibilita que o (a) pesquisador (a) tenha privacidade para as avaliações que compõem as etapas do estudo.

Ficaram claros para mim quais são os propósitos do estudo, os procedimentos a serem realizados, as garantias de confidencialidade e de esclarecimentos permanentes. Ficou claro também, que a participação é isenta de despesas.

Viçosa, 17 de março de 2014.

____

Assinatura do diretor do CAp. COLUNI

Apêndice 4

DECLARAÇÃO

Eu, HÉLIO PAULO PEREIRA FILHO na qualidade de responsável pelo COLÉGIO DE APLICAÇÃO DA UNIVERSIDADE FEDERALDE VIÇOSA**,** autorizo a realização da pesquisa intitulada **"A MODELAGEM MATEMÁTICA COMO METODOLOGIA PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA"** a ser conduzida sob a responsabilidade da pesquisadora CLEUZA EUNICE PEREIRA BRUMANO; e DECLARO que está instituição apresenta infraestrutura necessária à realização da referida pesquisa.

Viçosa , _________ de __________________________ de 2014.

ASSINATURA______________________________

(carimbo da Instituição)

Apêndice 5

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA

COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA EM SERES HUMANOS - CEP/UFJF

36036-900 JUIZ DE FORA - MG – BRASIL

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

O(A) Sr.(a) está sendo convidado(a) como voluntário(a) a participar da pesquisa **"A MODELAGEM MATEMÁTICA COMO METODOLOGIA PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA"**. Nesta pesquisa pretendemos propiciar o estudo de alguns conceitos de Análise Combinatória, bem como abordagens sobre o ensino e aprendizagem dos mesmos. O motivo que nos leva a estudar este tema é a eminente dificuldade dos alunos do ensino médio no que diz respeito ao estudo de Análise Combinatória. Partimos da intuição de que um dos motivos é o ensino muitas vezes mecânico, que não considera os conhecimentos prévios do aluno.

Será realizada uma pesquisa de abordagem qualitativa, na qual serão colhidos dados e respostas dos pesquisados, atentando a detalhes relacionados ao entendimento, desenvolvimento e construção ou não de um modelo para determinados conceitos de Análise Combinatória. Serão promovidos ambientes colaborativos nos quais atividades exploratórias e investigativas serão trabalhadas, os riscos, vistos aqui como oportunidades, consiste na liberdade e autonomia dos alunos nestes ambientes e com estes tipos de atividades.

Tratamos estes "riscos" como oportunidades, pois a abertura para pensar, relacionar, conjecturar, inferir, propor, podem estimular habilidades e propiciar a concepção de diversos conhecimentos e não apenas os específicos do conteúdo ou disciplina em questão.

Para participar deste estudo o Sr (a) não terá nenhum custo, nem receberá qualquer vantagem financeira. Terá o esclarecimento sobre o estudo em qualquer aspecto que desejar e estará livre para participar ou recusar-se a participar. Poderá retirar seu consentimento ou interromper a participação a qualquer momento. A sua participação é voluntária e a recusa em participar não acarretará qualquer penalidade ou modificação na forma em que é atendido pelo pesquisador, que tratará a sua identidade com padrões profissionais de sigilo.

Os resultados da pesquisa estarão à sua disposição quando finalizada. Seu nome ou o material que indique sua participação não será liberado sem a sua permissão.

O (A) Sr (a) não será identificado em nenhuma publicação que possa resultar.

Este termo de consentimento encontra-se impresso em duas vias, sendo que uma cópia será arquivada pelo pesquisador responsável, na secretaria do Mestrado Profissional em Educação Matemática e a outra será fornecida ao senhor/senhora. Os dados e instrumentos utilizados na pesquisa ficarão arquivados com o pesquisador responsável por um período de 5 (cinco) anos, e após esse tempo serão destruídos. Os pesquisadores tratarão a sua identidade com padrões profissionais de sigilo, atendendo a legislação brasileira (Resolução Nº 466/12 do Conselho Nacional de Saúde), utilizando as informações somente para os fins acadêmicos e científicos.

Eu, ____, portador de documento de Identidade ____________________ fui informado (a) dos objetivos da pesquisa **“A Modelagem Matemática como metodologia para o ensino de Análise Combinatória”**, de maneira clara e detalhada e esclareci minhas dúvidas. Sei que a qualquer momento poderei solicitar novas informações e modificar minha decisão de participar se assim o desejar.

Declaro que concordo em participar. Recebi uma cópia deste termo de consentimento livre e esclarecido e me foi dada à oportunidade de ler e esclarecer as minhas dúvidas.

Viçosa, _________ de __________________________ de 2014.

____

Assinatura participante

Assinatura pesquisador

Assinatura testemunha

Em caso de dúvidas, com respeito aos aspectos éticos desta pesquisa, você poderá consultar:

CEP - Comitê de Ética em Pesquisa em Seres Humano-UFJF

Campus Universitário da UFJF

Pró-Reitoria de Pesquisa

CEP: 36036-900

Fone: (32) 2102- 3788 / E-mail: cep.propesq@ufjf.edu.br

Pesquisador Responsável: CLEUZA EUNICE PEREIRA BRUMANO

Endereço: RUA JOSÉ UBALDO PAIVA, 12 - Bairro: RAMOS

CEP: 36570-000 – Viçosa – MG

Fone: (31) 3891 3578

E-mail: cbrumano@ufv.br