

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA**  
**FACULDADE DE ENGENHARIA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

**Aristides Pereira Orlandi**

**Uma nova metodologia para avaliação da vulnerabilidade estrutural e robustez**

Juiz de Fora  
2020

**Aristides Pereira Orlandi**

**Uma nova metodologia para avaliação da vulnerabilidade estrutural e robustez**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil. Área de concentração: Estruturas e Materiais.

Orientador: Prof. D.Sc. Flávio de Souza Barbosa – UFJF

Coorientador: Prof. D.Sc. Alexandre Abrahão Cury – UFJF

Juiz de Fora

2020

Ficha catalográfica elaborada através do programa de geração automática da Biblioteca Universitária da UFJF, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Orlandi, Aristides Pereira.

Uma nova metodologia para avaliação da vulnerabilidade estrutural e robustez / Aristides Pereira Orlandi. -- 2020.  
68 f. : il.

Orientador: Flávio de Souza Barbosa

Coorientador: Alexandre Abrahão Cury

Dissertação (mestrado acadêmico) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Engenharia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 2020.

1. Confiabilidade estrutural. 2. Robustez estrutural. 3. Colapso progressivo. 4. Árvore de falhas. 5. Simulação de Monte Carlo. I. Barbosa, Flávio de Souza, orient. II. Cury, Alexandre Abrahão, coorient. III. Título.

**PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA (PROPP)**

Rua José Lourenço Kelmer, s/n – Campus Universitário  
Bairro São Pedro – CEP: 36036-900 – Juiz de Fora – MG  
(32) 2102-3773/ bancas.propp@ufjf.edu.br

Observações da Banca Examinadora (caso inexistentam, anular o campo):

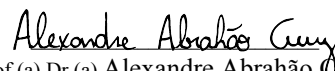
**CAMPO ANULADO**

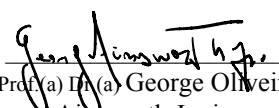
Nada mais havendo a tratar, o(a) senhor(a) Presidente declarou encerrada a sessão de Defesa, sendo a presente Ata lavrada e assinada pelos(as) senhores(as) membros da Banca Examinadora e pelo(a) discente, atestando ciência do que nela consta.


**INFORMAÇÕES:**

- Para fazer jus ao título de mestre(a)/doutor(a), a versão final da dissertação/tese, considerada Aprovada, devidamente conferida pela Secretaria do Programa de Pós-Graduação, deverá ser tramitada para a PROPP, em Processo de Homologação de Dissertação/Tese, dentro do prazo regulamentar de 90 dias a partir da data da defesa. Após a entrega dos dois exemplares definitivos, o processo deverá receber homologação e, então, ser encaminhado à CDARA.
- Esta Ata de Defesa é um documento padronizado pela Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa. Observações excepcionais feitas pela Banca Examinadora poderão ser registradas no campo disponível acima ou em documento anexo, desde que assinadas pelo(a) Presidente.
- Esta Ata de Defesa somente poderá ser utilizada como comprovante de titulação se apresentada junto à Certidão da Coordenadoria de Assuntos e Registros Acadêmicos da UFJF (CDARA) atestando que o processo de confecção e registro do diploma está em andamento.

  
Prof.(a) Dr.(a) Flávio de Souza Barbosa

  
Prof.(a) Dr.(a) Alexandre Abrahão Cury

  
Prof.(a) Dr.(a) George Oliveira  
Ainsworth Junior

  
Prof.(a) Dr.(a) Sophie Ortola

\_\_\_\_\_  
Prof.(a) Dr.(a) Marcelo Miranda  
Barros


\_\_\_\_\_  
Prof.(a) Dr.(a) Francisco de Assis das  
Neves

\_\_\_\_\_  
--

\_\_\_\_\_  
--

\_\_\_\_\_  
--

\_\_\_\_\_  
--

  
Aristides Pereira Orlandi  
Discente

## **AGRADECIMENTOS**

Eu devo agradecer primeiramente a minha mãe, Adriana Pereira da Cruz, por todo o apoio e carinho, a meu pai, José Murillo Orlandi e a minha namorada, Juviliana Pereira Correa, também pelo apoio e compreensão.

Agradeço também aos meus amigos de trabalho, faculdade e vida que são muitos para enumerar aqui, mas saibam que foram todos lembrados.

A meus mestres, que me ajudaram a construir as fundações necessárias para essa dissertação, professor Flávio de Souza Barbosa e professor Alexandre Abrahão Cury.

E, sem mais palavras, obrigado Deus.

“A certeza é fatal. O que me encanta é a incerteza. A neblina torna as coisas maravilhosas.” (WILDE, 2012)

## RESUMO

O dimensionamento de estruturas com a adoção de coeficientes de segurança normativos nem sempre é adequado para garantir a estabilidade das construções, principalmente nos casos em que ações imprevistas levam à ruptura localizada de elementos de sustentação. Como exemplos, podem-se citar os casos do World Trade Center, nos Estados Unidos, onde a colisão de aviões causou o colapso de ambas as torres, e do Edifício Ronan Point, na Inglaterra, onde uma explosão de um botijão de gás causou a ruptura de toda uma prumada do prédio. Assim, a consideração da natureza aleatória das cargas é importante para projetar uma estrutura segura.

Existem diversos métodos de projeto de estruturas que consideram incertezas nos processos de cálculo e execução de construções. O presente trabalho foca especificamente o uso de técnicas probabilísticas.

Os métodos probabilísticos sempre admitem uma pequena probabilidade de falha e geralmente exigem altos esforços computacionais. Nesse sentido, o desafio atual é desenvolver um método de análise estrutural puramente probabilístico com custos de processamento computacional aceitáveis.

Portanto, esta dissertação é baseada em uma metodologia probabilística que propõe uma nova estratégia para avaliar a probabilidade global de falha e seu respectivo índice de robustez, considerando diferentes tipos de incertezas. A metodologia proposta começa com a construção de uma árvore de eventos, gerando cenários aleatórios através de uma simulação de Monte Carlo. Dois estudos de caso de referência são considerados, produzindo resultados promissores com tempo de processamento computacional razoável.

Palavras-chaves: Confiabilidade estrutural. Robustez de estruturas. Colapso progressivo. Árvore de falhas. Simulação de Monte Carlo.

## ABSTRACT

The design of structures with the adoption of normative safety coefficients is not always adequate to guarantee the stability of constructions, especially in cases where unforeseen actions lead to localized failures in supporting elements. As examples, one can mention the cases of the World Trade Center, in the United States, where airplane collisions caused the collapse of both towers, and the Ronan Point Building, in England, where an explosion of a gas cylinder caused the failure of an entire section of the building. Thus, the consideration of the random nature of loads is important to design a safe structure.

There are several methods of structural design that consider uncertainties in the construction's calculation and execution processes. The present work specifically focuses on the use of probabilistic techniques.

Probabilistic methods always admit a tiny probability of failure and often demand high computational efforts. In this sense, the current challenge is to develop a purely probabilistic structural analysis method with acceptable computational processing costs.

Hence, this dissertation is based on a probabilistic methodology that proposes a new strategy to evaluate the global probability of failure and its respective robustness index, considering different types of uncertainties. The proposed methodology begins with the construction of an event tree, generating random scenarios through a Monte Carlo simulation. Two benchmark case studies are considered, yielding promising results with reasonable computational processing time.

**Keywords:** Structural reliability. Structural robustness. Progressive collapse. Event tree. Monte Carlo simulation.



## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Quadro 1	- Quadro com classificação de risco baseada na perda de vidas, econômica e danos ambientais.....	18
Fluxograma 1	- Quantificação da robustez considerando os domínios de aplicação e exigências.....	19
Figura 1	- Probabilidades de falha associadas aos estados limites.....	19
Organograma 1	- Bases de quantificação do índice de robustez.....	20
Quadro 2	- Hierarquização de métodos de confiabilidade.....	25
Figura 2	- Transformação de um conjunto de valores obtidos para uma variável aleatória em uma função de probabilidade.....	26
Gráfico 1	- Gráfico de esforço por resistência para uma análise determinística representando uma função de fronteira dividindo o gráfico em região segura e região de falha.....	28
Gráfico 2	- Função de densidade de probabilidade da sobrecarga, resistência e margem de segurança.....	29
Gráfico 3	- Domínio seguro e domínio de falha em um espaço de duas dimensões.....	29
Gráfico 4	- Índice de confiabilidade $\beta$ definido como a distância mais curta da origem até a função das variáveis reduzidas.....	30
Gráfico 5	- Exemplo de observações de Monte Carlo.....	31
Fluxograma 2	- Exemplo de uma árvore de falhas, com falhas sucessivas nas seções hipotéticas A, B e C.....	33
Figura 3	- Diagrama de interseção dos eventos onde $P$ representa a probabilidade de falha e os índices $i, j$ e $k$ , três elementos distintos. O símbolo ' representa a probabilidade de falha isolada de um elemento.....	35
Fluxograma 3	- Árvore de falha com eventos $i, j$ e $k$ em série, onde a probabilidade de ruína para os eventos $j$ e $k$ são computados mais de uma vez.....	35
Figura 4	- Modelo de viga biengastada, com $a$ sendo 1,0 m de comprimento, $b$ sendo 2,0 m de comprimento.....	38
Fluxograma 4	- Árvore de falhas completa com resultados obtidos por Seck (2018). .....	40
Fluxograma 5	- Resumo dos resultados de análise probabilística da viga biengastada, método FORM.....	41

Fluxograma 6 - Resumo dos resultados de análise probabilística da viga biengastada, simulação de Monte Carlo. ....	41
Fluxograma 7 - Diagrama do algoritmo de Monte Carlo. ....	43
Figura 5 - Diagrama de momentos fletores para carga unitária sem rótulas na estrutura. ....	44
Figura 6 - Diagrama de momentos fletores para carga unitária com rótula na seção A. ..	44
Fluxograma 8 - Diagrama com metodologia proposta considerando falha inicial na seção A. ....	46
Fluxograma 9 - Fluxograma do algoritmo proposto usando simulação de Monte Carlo. ....	46
Fluxograma 10 - Árvore de falhas resultante da abordagem proposta. ....	47
Figura 7 - Pórtico plano biengastado com forças nodais $F_1$ e $F_2$ e denominação dos nós. ....	50
Figura 8 - Seção transversal do perfil IPE240. ....	51
Fluxograma 11 - Árvore de falhas da etapa inicial. ....	56
Fluxograma 12 - Ramo da árvore de falhas partindo de falha inicial na seção C. ....	57
Fluxograma 13 - Ramo da árvore de falhas partindo de falha inicial na seção D. ....	58
Fluxograma 14 - Ramo da árvore de falhas partindo de falha inicial na seção E. ....	58
Fluxograma 15 - Ramo da árvore de falhas partindo de falha inicial na seção $C \cap D$ . ....	59
Fluxograma 16 - Ramo da árvore de falhas partindo de falha inicial na seção $C \cap E$ . ....	59
Fluxograma 17 - Ramo da árvore de falhas partindo de falha inicial na seção $D \cap E$ . ....	60

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	- Valores mínimos recomendados do índice de confiabilidade $\beta$ .	18
Tabela 2	- Variáveis aleatórias consideradas, apresentadas através de sua média e desvio padrão.	39
Tabela 3	- Comparação dos resultados apenas no caminho iniciado pela falha A.	47
Tabela 4	- Características da seção IPE240.	51
Tabela 5	- Variáveis aleatórias apresentadas através de suas médias e coeficiente de variação.	51
Tabela 6	- Coeficientes de influência estrutural.	52
Tabela 7	- Quantidade de cenários e probabilidades de falha para interseção de três seções.	52
Tabela 8	- Quantidade de cenários e probabilidades de falha para interseção de duas seções.	52
Tabela 9	- Quantidade de cenários e probabilidades de falha das seções isoladas.	53
Tabela 10	- Probabilidades de falha iniciais, comparação com bibliografia.	54
Tabela 11	- Resultados das probabilidades da primeira etapa de Seck (2018).	55
Tabela 12	- Comparação de resultados dos caminhos críticos obtidos com os resultados da literatura.	60
Tabela 13	- Tabela com resultados do número de observações com falha para dez testes realizados na primeira etapa da árvore de falhas do estudo de caso do Capítulo 4.	67

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO GERAL .....</b>	<b>11</b>
1.1	OBJETIVO .....	13
1.2	ESTRUTURA DO TEXTO .....	14
<b>2</b>	<b>ROBUSTEZ ESTRUTURAL .....</b>	<b>15</b>
2.1	INTRODUÇÃO .....	15
2.2	VULNERABILIDADE E ROBUSTEZ .....	15
2.3	PRINCÍPIOS NORMATIVOS PARA CONFIABILIDADE ESTRUTURAL .....	16
2.4	QUANTIFICAÇÃO DA ROBUSTEZ .....	19
2.4.1	Índices de robustez probabilísticos baseados no desempenho estrutural .....	20
2.4.2	Índices de robustez baseados nas características estruturais - rigidez .....	23
2.4.3	Índices de robustez baseados nas características estruturais - topologia .....	23
2.5	AVALIAÇÃO DA PROBABILIDADE DE FALHA DE UM ELEMENTO .....	24
2.5.1	Caracterização de confiabilidade estrutural .....	24
2.5.2	Variáveis Aleatórias .....	25
2.5.3	Método FORM .....	27
2.5.4	Simulação de Monte Carlo .....	31
2.6	PROBABILIDADE DE FALHA DE SISTEMAS ESTRUTURAIS .....	32
2.6.1	Sistemas em série .....	32
2.6.2	Sistemas em paralelo .....	32
2.6.3	Árvore de falhas .....	33
2.6.4	Probabilidade de falha dos eventos de interseção .....	34
2.6.5	Rótulas plásticas e caminhos de falha .....	37
2.7	ESCOLHAS E PREMISSAS DO PRESENTE TRABALHO .....	37
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA DO TRABALHO .....</b>	<b>38</b>
3.1	EXEMPLO PRELIMINAR UNIDIMENSIONAL .....	38
3.1.1	Reprodução dos resultados de Seck (2018) .....	39
3.2	ABORDAGEM PROPOSTA .....	42
<b>4</b>	<b>APLICAÇÕES .....</b>	<b>50</b>
4.1	PÓRTICO BIENGASTADO .....	50
4.1.1	Probabilidade de falha inicial .....	52
4.1.2	Árvore de falhas .....	55

<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO.....</b>	<b>62</b>
5.1	TRABALHOS FUTUROS .....	62
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>64</b>
	<b>APÊNDICE A .....</b>	<b>67</b>
	<b>APÊNDICE B.....</b>	<b>69</b>

## 1 INTRODUÇÃO GERAL

Dentro da prática de construção sempre existiram incertezas em todas as suas etapas, desde a concepção até a execução e o uso. Essas incertezas são originadas de diversos fatores, tais como: falta de conhecimento dos fenômenos físicos envolvidos, desempenho dos materiais empregados, sobrecargas às quais a estrutura estará submetida, ações da natureza como ventos e terremotos, além de fatores regionais e socioeconômicos.

Na antiguidade, as incertezas eram abordadas através de empirismo e as estruturas eram superdimensionadas. Grande parte desses problemas foram sanados com a evolução técnica científica, que fez com que as estruturas ficassem mais esbeltas, com projetos otimizados que potencializam o desempenho, diminuindo os custos. As consequências são estruturas calculadas para as solicitações previstas, com pouca margem de segurança. Nesses casos, ainda que as incertezas sejam relativamente pequenas, variações um pouco mais significativas nos dados considerados podem levar uma estrutura ao colapso. O caso da ponte de Tacoma Narrows exemplifica essa questão, onde houve o colapso total em 1940 devido a uma excitação dinâmica não prevista em projeto.

Uma abordagem utilizada nos dias atuais adota coeficientes de ponderação aplicados às ações na estrutura e às resistências dos materiais, conferindo uma margem de segurança mínima para absorver imprevistos. Essa abordagem é denominada como *semiprobabilística*, na qual, a partir de variáveis de projeto, adota-se um valor determinístico constante acoplado a um fator de segurança.

Entretanto, diversos eventos indesejáveis ocorreram ao longo do tempo, mostrando que a abordagem *semiprobabilística* nem sempre se mostra adequada. Como exemplo, o caso do edifício de Ronan Point em Londres, que teve o colapso de uma prumada devido à explosão de um botijão de gás em 1968, e o caso do World Trade Center em 2001, onde houve colapso total ocasionado pelo choque de dois aviões contra as estruturas.

Percebe-se que a premissa básica adotada é a de que, se uma estrutura foi projetada de acordo com as normas vigentes, ela então estará segura por toda a sua vida útil.

Fica claro, portanto, que, independentemente dos coeficientes de ponderação adotados, há sempre uma probabilidade de falha. Quanto menores os coeficientes de ponderação, maior a probabilidade de que ocorra uma falha; ao passo que coeficientes maiores elevam o custo das construções, sendo extremamente complexo avaliar o risco real que está se adotando no dimensionamento.

Assim, passa a ser pertinente entender não somente se uma estrutura está apta para atender às cargas previstas em projeto, como também qual o seu grau de segurança e de vulnerabilidade. Nesse contexto, surgem pesquisas recentes que procuram desenvolver metodologias para dimensionamento através da teoria de confiabilidade estrutural.

Na prática, uma estrutura é um sistema de componentes e, quando um componente atinge sua capacidade final, as cargas são redistribuídas para os demais. A falha de um elemento não significa necessariamente falha de todo o sistema. No entanto, quando a falha sucessiva de diferentes elementos leva ao colapso total da estrutura, dá-se o nome de *colapso progressivo*. De acordo com Nowak e Collins (2000), colapso progressivo pode ser definido como a relação da confiabilidade de um elemento com a confiabilidade do sistema. O mesmo conceito é definido também por Starossek e Haberland (2008) como sendo caracterizado pela desproporção entre a magnitude de um evento local desencadeador e o resultante colapso de grande parte ou de toda a estrutura. Relacionado ao colapso progressivo surge o termo *robustez*, definido por Starossek (2007) como a insensibilidade da estrutura a falhas locais. A robustez estrutural é normalmente avaliada através de um *índice de robustez*, devido à sua complexidade e importância, ela será estudada no capítulo seguinte.

No panorama nacional, a maioria dos trabalhos de confiabilidade estrutural foca no conceito de colapso progressivo. Por exemplo, o trabalho de Longo (2014) aplica o método MCA (método dos caminhos alternativos de cargas) a partir de um modelo determinístico. Neste método, simula-se um dano em um elemento pré-definido e, a partir daí, calcula-se a redistribuição de forças no modelo.

Destaca-se, também, o trabalho de Felipe (2017), que desenvolveu a metodologia (*risk analysis of the progressive collapse*) por meio de uma análise puramente probabilística, identificando os elementos mais vulneráveis de uma construção em alvenaria estrutural. Contudo, o modelo não foi inteiramente desenvolvido, uma vez que o autor analisou apenas um pavimento isolado.

Dentre as diferentes estratégias de abordagem das incertezas, destacam-se os métodos de confiabilidade estrutural puramente probabilísticos como sendo os mais completos. Neste tipo de abordagem, as incertezas são tratadas como variáveis aleatórias utilizando conceitos de estatística, resultando em um grau de confiabilidade da estrutura em relação às ações consideradas. Admitindo-se que sempre haja uma probabilidade de falha, tal abordagem pode representar de forma mais fiel a realidade e tem a vantagem de poder prever pontos de vulnerabilidade da construção.

Dentro dessa abordagem, a diferença entre a avaliação da probabilidade de falha de um elemento e da probabilidade de falha de um sistema está relacionada com a robustez do sistema e configura os mecanismos de colapso progressivo.

Dentre as principais evoluções do tema no mundo, destaca-se o trabalho de Kagho-Gouadjio (2013) que apresentou uma *árvore de falhas*, na qual todos os elementos de uma estrutura foram alinhados racionalmente formando um sistema ramificado, de forma que caminhos possíveis de ruína puderam ser definidos. Assim, a probabilidade de falha de cada caminho pode ser calculada a partir da probabilidade de falha de cada elemento componente do mesmo.

Recentemente, Seck (2018) refinou a metodologia apresentada por Kagho-Gouadjio (2013) através da consideração de interseções de eventos. Os resultados obtidos foram mais precisos quando considerado que mais de um elemento pode falhar simultaneamente. No entanto, o problema não foi completamente resolvido.

Pode-se assim, resumir o grande desafio atual acerca do tema aqui abordado como sendo o de desenvolver um método de análise estrutural puramente probabilístico e com custo de processamento aceitável. Projetar completamente uma estrutura considerando um grau de confiabilidade pré-determinado ainda é uma tarefa a ser alcançada pelos pesquisadores e projetistas.

## 1.1 OBJETIVO

O objetivo do presente trabalho é propor uma metodologia baseada em uma abordagem probabilística para análise de estruturas de menor complexidade que auxilie no desenvolvimento de projetos com um grau de confiabilidade pré-definido e com um custo computacional razoável.

Para atingir o objetivo proposto será apresentada uma nova abordagem para criação da árvore de falhas completa. Além disso, o conceito de robustez definido por Starossek (2007) será revisto com a proposta de outra metodologia a fim de se obter o índice de robustez além da probabilidade de falha para sistemas estruturais.



## 1.2 ESTRUTURA DO TEXTO

A apresentação do trabalho está dividida em quatro partes:

- A primeira parte contém a introdução e objetivos;
- A segunda parte consiste em uma revisão da bibliografia, na qual os métodos probabilísticos de confiabilidade estrutural serão apresentados para o entendimento do trabalho;
- A terceira parte consiste na apresentação da abordagem proposta, através de um estudo de caso didático de uma estrutura unidimensional desenvolvida por Seck (2018);
- A quarta parte apresenta a aplicação do método proposto em uma estrutura mais complexa de referência da literatura: um pórtico plano biengastado;
- O último capítulo discorre sobre análise dos resultados obtidos e conclusões acerca da aplicação da abordagem proposta.

## 2 ROBUSTEZ ESTRUTURAL

Uma importante etapa dentro do contexto do presente trabalho é a compreensão de conceitos associados à robustez de uma estrutura. Assim, faz-se nesse capítulo, uma apanhado sobre esses conceitos, essenciais à compreensão dessa dissertação.

### 2.1 INTRODUÇÃO

O conceito de robustez advém da característica de robusto. De acordo com o dicionário Michaelis, robusto é um adjetivo que significa: bem construído, que suporta peso, que é resistente; potente. Diversos autores como Haberland (2007), Starossek (2007), Kagho-Gouadjio (2013) e Seck (2018) tem definições parecidas sobre o conceito de robustez estrutural. Pode-se dizer que a robustez é definida pela proporcionalidade das consequências de um dano estrutural à sua causa.

Ainda, segundo a ISO 2394 – Princípios Gerais de Confiabilidade para Estruturas (2015, p. 5) a robustez estrutural pode ser definida como:

*“the ability of a structure to withstand adverse and unforeseen events (like fire, explosion, impact) or consequences of human errors without being damaged to an extent disproportionate to the original cause.”*

Ou, em português:

*“a capacidade de uma estrutura não ser danificada por eventos (como fogo, explosões, impacto) ou consequências de erros humanos, em uma extensão desproporcional à causa original.”* (ISO 2394, 20150, p. 5, tradução nossa).

### 2.2 VULNERABILIDADE E ROBUSTEZ

Antes de se definir uma formulação para o cálculo da robustez, é necessário distinguir *vulnerabilidade* de *robustez*, conceitos frequentemente confundidos no campo da confiabilidade estrutural.

Segundo Nowak e Collins (2000), a confiabilidade estrutural representa a probabilidade associada à capacidade de uma estrutura atender ao seu propósito de projeto por um tempo de vida especificado. Esse conceito foi expandido por outros autores e os termos de vulnerabilidade e robustez passaram a ser empregados. Conforme Kagho-Gouadjio (2013), uma estrutura é considerada vulnerável quando uma dada ação pode desencadear perda de seu desempenho local. Vulnerabilidade está, portanto, associada a uma disfunção local, ou seja, uma perda de

função pontual. Por outro lado, a robustez descreve implicitamente a capacidade da estrutura para operar de modo degradado, isto é, no caso da realização da falha em um elemento.

Assim, pode-se concluir que a vulnerabilidade está relacionada à falha de um elemento enquanto a robustez está ligada à falha de um sistema estrutural, formado por vários elementos (CREMONA, 2011).

Conforme alerta Kagho-Gouadjio (2013), a caracterização da robustez envolve a delimitação do sistema considerado e deve ser feita com cautela. Por exemplo, um sistema estrutural pode significar desde um elemento específico composto por diferentes materiais, como uma viga em concreto armado, até um conjunto de elementos distintos (delimitando parte ou toda uma construção). Em um cenário no qual todos os pilares de uma edificação venham a se romper, o colapso total da estrutura pode ser considerado uma consequência proporcional, visto que houve um dano inicial em toda a edificação. Nesse caso específico não se pode afirmar que a estrutura não tenha robustez, pois o conceito de robustez está relacionado ao dano inicial.

Uma das principais dificuldades do conceito de robustez é a impossibilidade de sua medição diferentemente da vulnerabilidade, que pode ser definida através da probabilidade de falha de um elemento.

### 2.3 PRINCÍPIOS NORMATIVOS PARA CONFIABILIDADE ESTRUTURAL

As normas técnicas estão em constante revisão, quer seja pela evolução dos métodos ou materiais de construção, quer seja pelo acontecimento de desastres que evidenciam incorreções normativas. A cada grande desastre na construção civil, uma ou mais normas são revisadas e passam a contemplar condições antes não previstas. Atualmente, as normas brasileiras e internacionais dimensionam estruturas através de métodos determinísticos ou semiprobabilísticos. Mas, gradualmente estão sendo incorporados conceitos de confiabilidade estrutural em seus textos, ainda que inicialmente apenas de forma qualitativa.

No Brasil, em 2003, foi lançada uma revisão da NBR 6118. Nessa revisão, passou-se a realizar o dimensionamento estrutural em duas etapas: primeiro, projetando para o estado limite último e, posteriormente, fazendo uma verificação para o estado limite de serviço. Essa consideração extra é fruto de uma revolução na construção civil, a partir da qual passou-se a projetar não mais pensando-se somente em atender às cargas de projeto, mas levando-se também em consideração outros fatores como o uso da edificação, acabamento, durabilidade,

segurança, entre outros. Essa abordagem culminou com o lançamento em 2013 da NBR 15575 - Desempenho de Edificações Habitacionais, que criou padrões de desempenho para as construções.

Também na NBR 6118 (2003) foi empregado pela primeira vez o termo colapso progressivo. Esse item da norma, também presente em sua versão atual, especifica armaduras extras que visam proteger a edificação garantindo que, mesmo ocorrendo uma falha local em um pavimento, isso não culmine na ruína total da estrutura. Ainda que não calcule ou especifique probabilidade de falha, esse item representa uma boa prática de segurança.

Internacionalmente, o panorama nesse campo está mais desenvolvido. Atualmente existe a ISO 2394 (2015) que foi publicada originalmente em 1998 e conta com uma revisão de 2015 com o título em português “Princípios gerais sobre confiabilidade de estruturas”. Essa norma define parâmetros gerais de segurança que devem ser atendidos, e discorre de forma qualitativa sobre os principais objetivos de análises probabilísticas de estruturas. Enfoca-se, no entanto, na obtenção dos coeficientes parciais de segurança para utilização nos métodos semiprobabilísticos.

De maneira geral, as normas internacionais abordam o conceito de colapso progressivo especificando boas práticas de projeto e execução, bem como medidas corretivas em caso de dano localizado, evitando, assim, que este evolua para a ruína da estrutura. A primeira nação a abordar o tema foi a Inglaterra, devido ao acidente do edifício de Ronan Point em 1968. Já a norma americana ASCE-7-02 (2005) também passou a considerar medidas para aumentar a robustez das estruturas após o atentado de 11 de setembro de 2001 ao World Trade Center. Destaca-se, também, a norma canadense NBCC (2015) que recomenda que projetos estruturais levem em consideração cargas usuais como neve e vento com uma probabilidade anual de ocorrência maior que 1 a cada 50 anos. Foi a primeira norma a especificar a probabilidade de ocorrência para consideração de ações.

Por fim, o Eurocode EN1990 (2002) é a norma que apresenta maiores evoluções em termos de confiabilidade estrutural. Ela diferencia as estruturas em três categorias divididas com relação à consequência em caso de falha, traduzidas em termos de perdas de vidas humanas e danos materiais e ambientais, conforme pode ser visto no Quadro 1.

**Quadro 1** – Quadro com classificação de risco baseada na perda de vidas, econômica e danos ambientais.

Classe de consequências	Descrição	Exemplos de construções
CC3	Consequência alta de perda de vida humana, ou econômica, social ou consequências ambientais muito altas.	Arquibancadas, prédios públicos onde consequência da falha são altas.
CC2	Consequência média para perda de vida humana, econômica, social ou consequências ambientais consideráveis.	Edifícios residenciais e comerciais, edifícios públicos onde as consequências de falha são médias.
CC1	Baixa consequência para perda de vida humana e econômica, social ou consequências ambientais pequenas ou insignificantes.	Edifícios agrícolas onde as pessoas normalmente não entram (por exemplo, armazenamento), estufas.

Fonte: Eurocode, 2002.

Baseado no Quadro 1, o Eurocode (2002) definiu valores mínimos considerando o tempo de vida útil de cada estrutura para um índice de confiabilidade  $\beta$ , índice que será explicado adiante no texto. Esses valores são apresentados na Tabela 1.

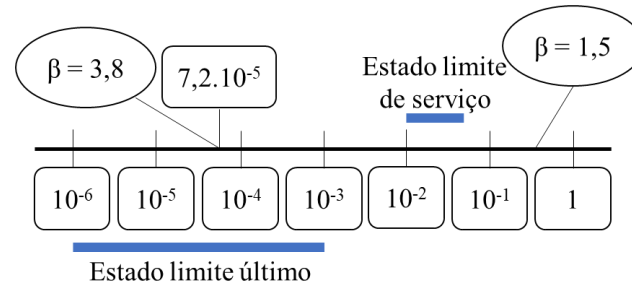
**Tabela 1** – Valores mínimos recomendados do índice de confiabilidade  $\beta$ .

Classe de confiabilidade	Valores mínimos para $\beta$	
	período de 1 ano	período de 50 anos
RC3	5,2	4,3
RC2	4,7	3,8
RC1	4,2	3,3

Fonte: Eurocode, 2002.

Pode-se, ainda, definir uma relação direta entre o índice de confiabilidade e a probabilidade de falha, conforme apresentado na Figura 1.

**Figura 1** – Probabilidades de falha associadas aos estados limites.



Fonte: Eurocode, 2002.

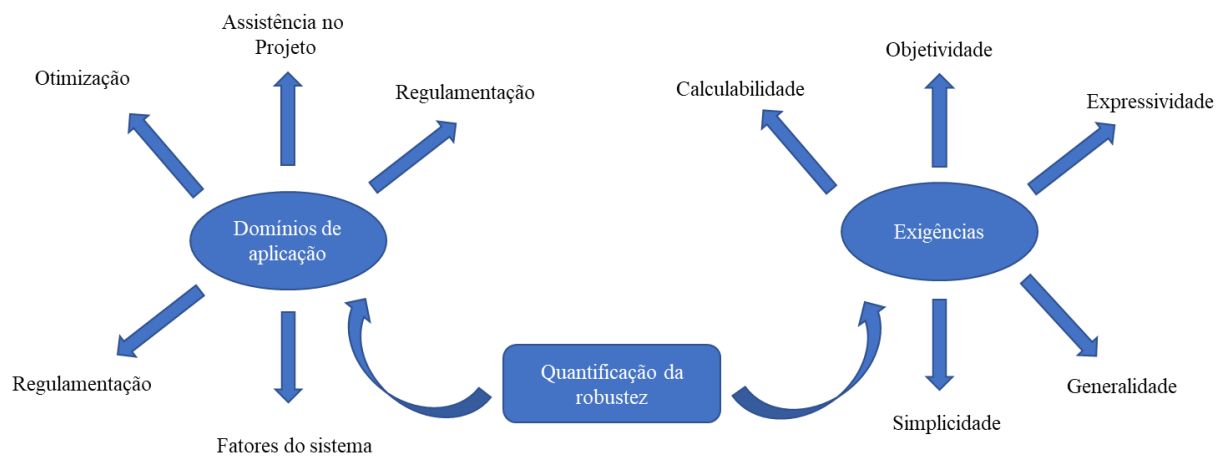
No entanto, nenhuma norma fornece orientação sobre como calcular os cenários de ruína para sistemas estruturais.

O restante deste capítulo discorre sucintamente sobre o cálculo de probabilidades de cenários de ruína, apresentando-se uma revisão dos conceitos probabilísticos envolvidos, iniciando-se pelos métodos de quantificação da robustez.

## 2.4 QUANTIFICAÇÃO DA ROBUSTEZ

Segundo Starossek e Haberland (2008), a metodologia adotada para cálculo do índice de robustez depende dos domínios de aplicação e exigências necessárias. O Fluxograma 1 ilustra esses fatores.

**Fluxograma 1** – Quantificação da robustez considerando os domínios de aplicação e exigências.



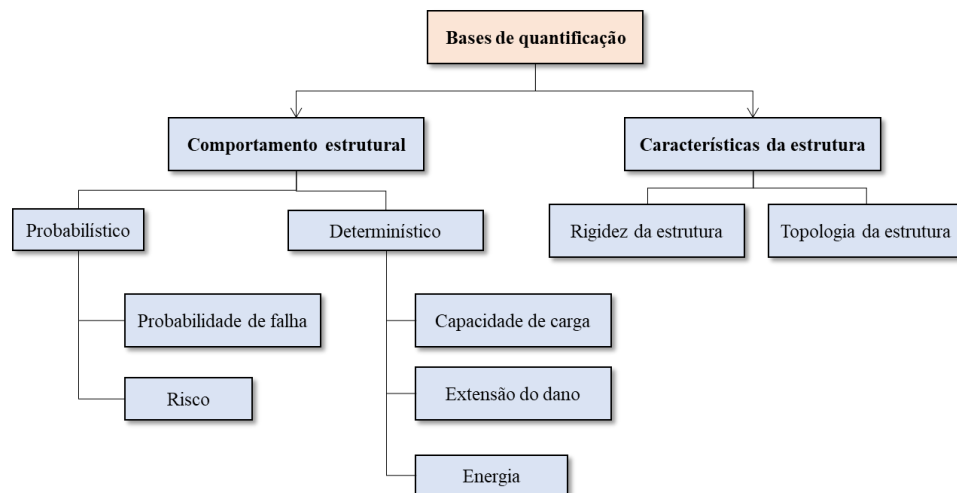
Fonte: Kagho-Gouadjio, 2013.

Autores como Frangopol e Curley (1987), Fu e Frangopol (1990), Mohammadkhani-shali (2007) e Kagho-Gouadjio (2013) desenvolveram métodos probabilísticos para obtenção do índice de robustez baseados no desempenho estrutural. Esses autores partiram da premissa que a redundância estrutural está vinculada à robustez estrutural, e, dessa maneira, propuseram índices para medir a redundância. Os métodos baseados no desempenho comparam a probabilidade de falha de um sistema integral ao de um sistema danificado.

Por outro lado Haberland (2007) e Biondini e Restelli (2008) propuseram métodos probabilísticos baseados nas características estruturais. Esses métodos abordam geralmente as diferenças da matriz de rigidez entre a estrutura intacta e a estrutura com dano. Agarwal et al. (2003) desenvolveram ainda outro índice de robustez que utiliza o fator de forma e os cenários de falha global, quantificando a robustez através da topologia da estrutura.

Starossek (2008) dividiu os índices de robustez em dois grupos: com base no comportamento estrutural e nas características estruturais, conforme mostra o Organograma 1.

**Organograma 1** – Bases de quantificação do índice de robustez.



Fonte: Starossek, 2007.

#### 2.4.1 Índices de robustez probabilísticos baseados no desempenho estrutural

O comportamento da estrutura pode ser estudado através de métodos probabilísticos ou determinísticos. Dentre os métodos probabilísticos, sua avaliação pode focar na probabilidade de falha ou no risco, conforme mostrado no Organograma 1.

Fu e Frangopol (1990) propuseram um índice probabilístico baseado na redundância estrutural que expressa a reserva de resistência de uma estrutura danificada, conforme descrito pela equação 1.

$$IR_1 = \frac{(P_{f(dano)} - P_{f(sistema)})}{P_{f(sistema)}}, \quad (1)$$

onde  $P_{f(dano)}$  é a probabilidade de ocorrência de um dano no sistema e  $P_{f(sistema)}$  é a probabilidade de falha do sistema.

Frangopol e Curley (1987) propuseram ainda uma versão alternativa ao índice precedente, utilizando o índice de confiabilidade no lugar das probabilidades de falha. A equação 2 mostra essa abordagem:

$$IR_2 = \frac{\beta_{intacto}}{(\beta_{intacto} - \beta_{danificado})}, \quad (2)$$

onde  $\beta_{intacto}$  representa o índice de confiabilidade na estrutura sem dano e  $\beta_{danificado}$  representa o índice de confiabilidade da estrutura danificada. Este índice varia entre 0 e infinito, onde o valor 0 indica uma estrutura falhando.

Mohammadkhani-shali (2007) fez um extenso estudo sobre os índices de robustez, propôs dois índices baseados no desempenho da estrutura com falha. A equação 3 representa o primeiro:

$$IR_3 = \frac{\beta_{s,d}}{\beta_{s,i}}, \quad (3)$$

onde  $\beta_{s,d}$  é o índice de confiabilidade do sistema, obtido de forma não linear, quando um elemento está com defeito e  $\beta_{s,i}$  é o índice de confiabilidade inicial do sistema intacto, também obtido por cálculos não lineares. Este índice varia entre  $-\infty$  e 1.  $IR_3 = -\infty$  corresponde a uma estrutura danificada com probabilidade de falha  $P_f = 1$ . O caso em que  $IR_3$  vale 0, corresponde a uma estrutura danificada com probabilidade de falha  $P_f = 0,5$ . E, por último, o  $IR_3 = \pm 1$  representa uma estrutura intacta. O estudo desenvolvido por Mohammadkhani-shali (2007) tem por objetivo obter a porcentagem da carga de tráfego que pode ser suportada em pontes quando um de seus elementos falha, podendo ser utilizado como um alerta para melhorar estratégias de monitoramento e manutenção.

Assim como o índice  $IR_3$ , o índice de redundância de desempenho proposto por Mohammadkhani-shali (2007) –  $IR_4$  – também mede o desempenho da estrutura quando um elemento falha, semelhantemente ao  $IR_2$ .

$$IR_4 = \frac{\beta_{s,i}}{(\beta_{s,i} - \beta_{s,d})}, \quad (4)$$

onde  $\beta_{s,d}$  e  $\beta_{s,i}$  são os mesmos já definidos na equação 2. Esse índice varia entre 0 e infinito, sendo que o valor 0 corresponde a uma estrutura totalmente danificada e o valor 1 se refere a uma estrutura danificada em 50%, ou seja, com perda de 50% de sua capacidade de carga. Por último,  $IR_4 = \infty$  representa uma estrutura intacta.



Mohammadkhani-shali (2007) também propôs dois outros índices baseados na reserva de redundância. A equação 5 a seguir mostra a diferença entre o índice de confiabilidade do sistema danificado e o índice de confiabilidade de seu elemento mais crítico.

$$IR_5 = \beta_{s,d,nl} - \beta_{e,c,l}, \quad (5)$$

onde  $\beta_{s,d,nl}$  representa o índice de confiabilidade do sistema quando há uma falha e  $\beta_{e,c,l}$  o índice de confiabilidade do elemento crítico. Esse índice de robustez, no entanto, não possui uma faixa de variação padrão e seu resultado não tem medida de comparação de uma estrutura para outra.

O segundo índice de reserva de redundância desenvolvido por Mohammadkhani-shali (2007) corresponde à reserva local nos principais elementos da estrutura quando um elemento falha. É expresso conforme a equação 6, a seguir:

$$IR_6 = \frac{\beta_{e,c,nl}}{\beta_{e,c,l}}, \quad (6)$$

onde  $\beta_{e,c,l}$  é o mesmo definido na equação 5 e,  $\beta_{e,c,nl}$  representa o índice de confiabilidade do elemento crítico em cálculos não lineares. Esse índice nunca ultrapassa o valor 1.

A segunda abordagem dos métodos probabilísticos de quantificação do índice de robustez é baseada no risco. Nesse sentido, Kagho-Gouadjio (2013) propôs um índice que permite comparar o risco local ao risco global, expresso pela equação 7:

$$IR_7 = 1 - \frac{P_{global}}{P_{local}}, \quad (7)$$

onde,  $I_{r,l}$  representa o índice de robustez,  $P_{global}$  representa a probabilidade global de falha de um caminho e  $P_{local}$  a probabilidade de falha do primeiro elemento desse caminho.

Tal abordagem tem como vantagem ser de fácil aplicação e seu resultado pode ser facilmente comparado entre diferentes modelos. O índice  $IR_7$  compara a probabilidade de falha local com a probabilidade de falha global, variando de 0 a 1, onde um resultado igual a 0 representa uma estrutura não robusta e um resultado igual a 1 representa uma estrutura infinitamente robusta.

Ainda no conceito de risco, Baker et al. (2008) propuseram um índice de robustez semelhante ao de Kagho-Gouadjio (2013), expresso pela diferença entre os riscos diretos e indiretos.

$$IR_8 = \frac{R_{direto}}{R_{indireto}}. \quad (8)$$

O risco, na equação 8, é o produto da probabilidade de falha e das consequências da ocorrência da falha, sendo as consequências divididas em diretas e indiretas.

As consequências diretas são proporcionais à falha inicial, enquanto as consequências indiretas estão associadas à falha da estrutura e não são proporcionais à falha inicial.

#### 2.4.2 Índices de robustez baseados nas características estruturais - rigidez

Haberland (2007) apresentou um índice de robustez baseado na rigidez de um sistema estático. Este índice é definido pela razão do menor determinante da matriz de rigidez do sistema que perdeu um elemento ou uma conexão, com o determinante da matriz de rigidez da estrutura intacta.

$$IR_9 = \min \left( \frac{|K_j|}{|K_{ini}|} \right), \quad (9)$$

onde  $K_j$  é o determinante da matriz de rigidez que perdeu um elemento e  $K_{ini}$  o determinante da estrutura intacta.

Biondini e Restelli (2008) contribuíram com diversos índices de robustez para estruturas com comportamento elástico linear. Alguns relacionados às propriedades do sistema estrutural e outros como uma função das condições de carregamento. Esses índices são apresentados a seguir:

$$IR_{10} = \frac{|K_d|}{|K_{ini}|}, \quad (10)$$

onde  $K_d$  é o determinante da matriz de rigidez da estrutura com dano e  $K_{ini}$  é definido conforme equação 10.

$$IR_{11} = \frac{t_d}{t_{ini}}. \quad (11)$$

Nessa equação,  $t_d = \sum(\lambda(K_d))$  é o traço de  $K$ , definido nas equações anteriores e  $\lambda(K_d)$  é o  $i$ -ésimo autovalor de  $K_d$ .

$$IR_{12} = \frac{T_{ini}}{T_d}. \quad (12)$$

onde  $T_d$  representa o primeiro período de vibração associado à matriz de massa da estrutura. Nessa expressão, os índices  $ini$  e  $d$  são representados conforme as equações anteriores.

#### 2.4.3 Índices de robustez baseados nas características estruturais - topologia

A análise da forma de uma estrutura (topologia) pode fornecer informações sobre sua robustez (KAGHO-GOUADJIO, 2013). Assim, Agarwal et al. (2003) desenvolveram um índice de robustez baseado na topologia. Esse método baseia-se em avaliar a qualidade das conexões

da estrutura através de seu fator de forma, agrupamento de seus elementos e cenários de falha global.

$$IR_{13} = \frac{C(f)}{D_d}, \quad (13)$$

onde  $C(f)$  é a consequência da falha e  $D_d$  é o esforço necessário para fazer com que todos os elementos falhem.

## 2.5 AVALIAÇÃO DA PROBABILIDADE DE FALHA DE UM ELEMENTO

Diversos estudos de confiabilidade para avaliar a robustez estrutural foram desenvolvidos nas últimas décadas. Autores como Land e Doig (1960), Hasofer e Lind (1974), Thoft-Christensen e Sorensen (1982), Thoft-Christensen e Murotsu (1986), Nowak e Collins (2000) e Montgomery e Runger (2009) contribuíram com ferramentas ou revisões detalhadas dos métodos de confiabilidade estrutural.

Conforme ressalta Seck (2018), um estudo de confiabilidade permite calcular as probabilidades de um modo de falha em um mecanismo de ruína após a ocorrência de um evento imprevisível. Esse processo passa pelas seguintes etapas:

- selecionar as variáveis aleatórias que integram as incertezas de projeto;
- definir disfunção global, ou modo de falha;
- calcular o índice de confiabilidade;
- calcular as probabilidades de falha.

### 2.5.1 Caracterização de confiabilidade estrutural

De acordo com a ISO 2394 (2015), *confiabilidade estrutural* representa a habilidade de uma estrutura ou elemento estrutural de atender aos requisitos especificados durante sua vida útil projetada. Geralmente, é expressa em termos de probabilidade e engloba os conceitos de segurança, funcionamento em serviço e durabilidade.

As construções podem ser avaliadas quanto às suas disfunções globais de forma quantitativa ou qualitativa. De maneira quantitativa, a principal resposta dos métodos é a probabilidade de falha, que pode também ser avaliada a partir do *índice de confiabilidade*. Dentro da abordagem de confiabilidade estrutural, existem diversos métodos que vêm sendo utilizados desde o início da década de 1970 (HASOFER e LIND, 1974). Os principais métodos estão resumidos no Quadro 2 e ordenados em três níveis.

**Quadro 2** – Hierarquização de métodos de confiabilidade.

Nível	Descrição	Métodos
Nível I	Métodos determinísticos ou semi-probabilísticos, esses métodos não calculam probabilidade de falha.	coeficientes parciais de segurança
Nível II	Métodos numéricos aproximados para obtenção da probabilidade de falha.	FORM e SORM
Nível III	Métodos observacionais que podem ser baseados em experimentos ou simulações. Obtém a probabilidade de falha a partir da contagem das observações que não atendem às premissas do experimento.	Monte Carlo

Fonte: Seck, 2018.

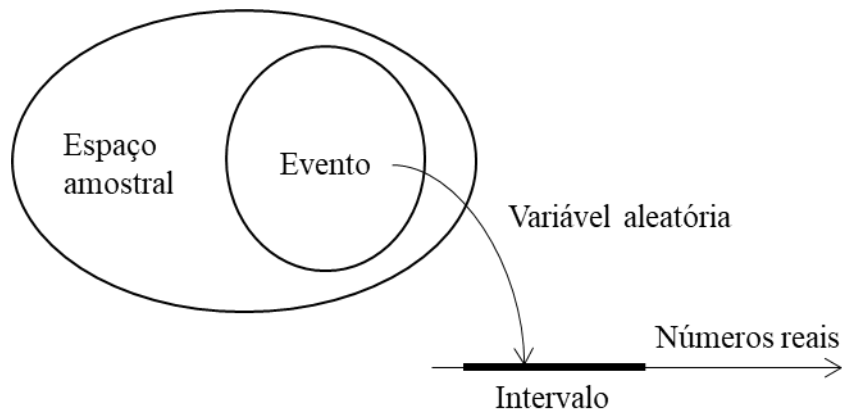
O nível I se baseia em métodos semiprobabilísticos, tais como o método dos coeficientes parciais de segurança adotados pelas normas atuais. O nível II representa métodos numéricos aproximados como FORM (*first order reliability method*) e SORM (*second order reliability method*). Ambos se baseiam em obter um índice de confiabilidade e, então, calcular a probabilidade de falha de um elemento através de derivadas de primeira e segunda ordem, respectivamente. O nível III é representado por métodos observacionais, como as simulações de Monte Carlo. Estas se baseiam na geração de cenários pseudoaleatórios, por sorteio das variáveis, testando cada cenário através de uma equação de estado limite. A probabilidade de falha é então obtida pela contagem das observações que não atendem ao equilíbrio. Os resultados dessas simulações são geralmente considerados como referência para os demais métodos, sendo mais precisos caso se tenha um número de observações suficientes (LEMAIRE, 2005).

### 2.5.2 Variáveis Aleatórias

Baseado em resultados de experimentos que consolidam teorias acerca do comportamento mecânico estrutural, é possível expressar as variáveis que carregam incertezas através de distribuições estatísticas, sendo chamadas de variáveis aleatórias. Dentre estas, a distribuição gaussiana ou normal, é a que ocorre com maior frequência (MONTGOMERY E RUNGER, 2009).

A Figura 2 representa uma função que correlaciona um dado evento em um intervalo no eixo dos números reais, chamada de *função de probabilidade* (NOWAK E COLLINS, 2000).

**Figura 2** – Transformação de um conjunto de valores obtidos para uma variável aleatória em uma função de probabilidade.



Fonte: Nowak e Collins, 2000.

A título ilustrativo, pode-se imaginar um pilar em concreto armado para o qual é preciso definir a resistência à compressão do concreto a fim de se calcular a área de seção necessária para suportar uma dada carga axial. Apesar de existir especificação de resistência característica à compressão que pode ser calculada através de métodos consagrados para obtenção do traço ideal não há garantias de que o concreto aplicado na peça atenderá a esse parâmetro. Diversos fatores podem afetar a resistência, como umidade e vento no dia da concretagem, incerteza no método de dosagem, cura, erro humano, etc. Dessa forma, a partir do controle tecnológico, moldam-se corpos de prova no dia da concretagem, oriundos do mesmo concreto que será lançado no pilar e, a partir destes, realizam-se ensaios de compressão em laboratório a fim de se obter uma estimativa da resistência à compressão. Entretanto, esse processo ainda apresenta incertezas provenientes da compactação do corpo de prova, da cura e da metodologia de ensaio, todos distintos da peça real. Assim, a partir dos resultados dos ensaios, tem-se não um valor de resistência para o concreto, mas um valor de resistência para os corpos de prova. Nesse âmbito, é discutível qual valor de resistência deveria ser utilizado para o dimensionamento do pilar, a depender do grau de risco adotado.

A NBR 6118 (2014), por exemplo, determina que deva ser utilizada a *resistência característica* obtida através do ensaio de compressão. Neste caso, define-se resistência característica como sendo o valor mínimo de resistência à compressão que tem 95% de probabilidade de ser alcançado em um lote de corpos de prova ensaiados. Esse valor característico é um número real que representa uma variável semiprobabilística.

Assim, passa-se a considerar todos os valores obtidos nos ensaios como provável resistência do concreto, podendo-se ainda aumentar a faixa de valores em função de incertezas do procedimento do ensaio. Muitos autores adotaram para os casos teóricos um *coeficiente de variação*<sup>1</sup> de 30% para a resistência a compressão do concreto, mas, na prática, a evolução dos meios de produção vem estreitando essa margem.

O coeficiente de variação é definido como a razão entre a média de uma distribuição e seu desvio-padrão e, em casos reais, deve ser obtido através de amostragem.

Do ponto de vista computacional, existem duas formas de se gerar observações pseudoaleatórias. A primeira usa recursos para criar uma distribuição estatística, gerando  $n$  valores pseudoaleatórios respeitando-se uma lei de distribuição especificada. Dessa forma, garante-se que não haverá valores repetidos, mas existe o inconveniente de esses valores serem gerados de forma vetorial, tendo a memória disponível do computador como limite no número de entradas do vetor. A segunda baseia-se em criar um *loop* em que em cada iteração é gerado um valor para cada variável. No entanto, essa segunda abordagem pode gerar observações repetidas, introduzindo erro nos resultados.

Uma vez definidas todas as variáveis aleatórias, pode-se partir para a comparação entre elas, escolhendo um modo de falha e comparando esforços atuantes e resistentes, chegando-se a uma função de estado limite.

### 2.5.3 Método FORM

O método FORM baseia-se no conceito de estados limites. As normas atuais consideram dois estados limites: de serviço ou de deformação, e último. Enquanto o estado limite último visa garantir a estabilidade da estrutura, o de serviço visa permitir que ela atenda às suas funções adequadamente. Por exemplo, uma viga de concreto pode apresentar alto grau de fissuração ainda que não atinja o colapso total. Nesse caso hipotético, a viga atenderia ao estado limite último, mas não ao estado limite de serviço.

Dessa forma, independente do estado limite considerado, ele será o valor alvo limite que os esforços na estrutura podem alcançar. A falha pode representar qualquer estrutura que não atenda a um determinado estado limite. Para representar um estado limite de forma determi-

---

<sup>1</sup> O coeficiente de variação é definido como a razão entre a média de uma distribuição e seu desvio-padrão e, em casos reais, deve ser obtido através de amostragem.

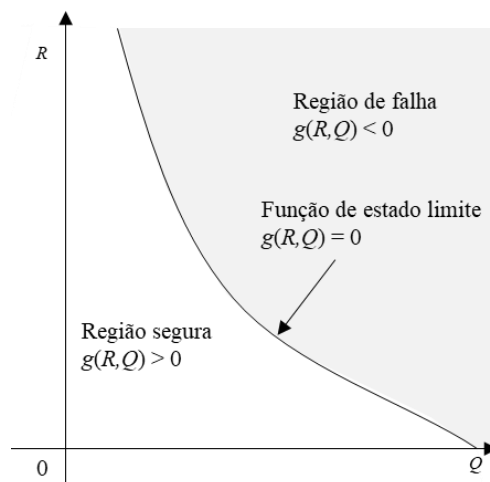
nística, relacionam-se duas variáveis - em geral esforço e resistência - que são representadas como uma função  $g(R, Q) = 0$  de fronteira em um plano cartesiano, conforme Gráfico 1, sendo  $R$  a resistência e  $Q$ , o esforço.

Em uma análise probabilística, tanto a resistência quanto o esforço são funções. Assim, o conceito de estado limite é então substituído pela noção de margem de segurança que pode ser explicada de forma resumida como o resultado da superposição das duas variáveis aleatórias. Então, a função de estado limite pode ser escrita como:

$$g(R, Q) = R - Q, \quad (14)$$

onde  $R$  e  $Q$  são variáveis aleatórias e  $g$  a função de estado limite. O limite de desempenho procurado será quando  $g = 0$ ; onde  $g < 0$  é a região de falha e;  $g > 0$  a região segura.

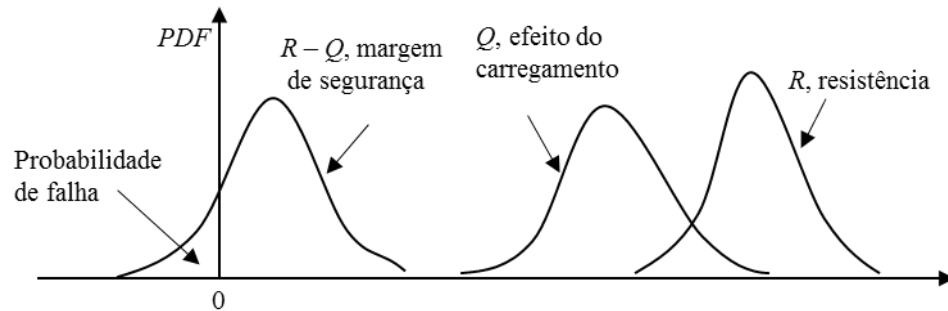
**Gráfico 1** – Gráfico de esforço por resistência para uma análise determinística representando uma função de fronteira dividindo o gráfico em região segura e região de falha.



Fonte: Montgomery e Runger, 2009.

Cada variável aleatória é um conjunto de valores possíveis que podem ser representados pela sua média, desvio-padrão e coeficiente de variação, no caso de respeitar a lei de distribuição normal. Para relacioná-las, primeiro deve-se normalizar cada uma, num processo que consiste em descrever a probabilidade relativa ao redor da origem. Esta probabilidade é obtida pela integral da densidade da variável ou a área abaixo da função densidade, igualada a 1, obtendo-se a função densidade de probabilidade (*PDF*), conforme mostra no Gráfico 2.

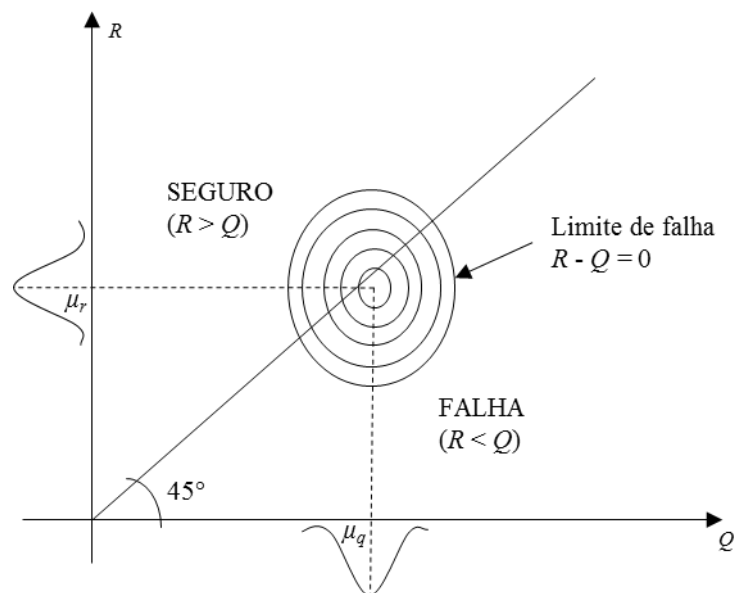
**Gráfico 2** – Função de densidade de probabilidade da sobrecarga, resistência e margem de segurança.



Fonte: Nowak e Collins, 2000.

A função de estado limite pode ter duas ou mais dimensões, não se limitando apenas ao caso simples de resistência x esforço apresentado. No Gráfico 3 apresenta-se a função de estado limite com o domínio de falha e domínio seguro em duas dimensões.

**Gráfico 3** – Domínio seguro e domínio de falha em um espaço de duas dimensões.



Fonte: Nowak e Collins, 2000.

Uma vez que se pretende comparar duas variáveis, deve-se primeiramente transformar ambas em sua forma padrão, que é uma forma adimensional, através das seguintes equações:

$$Z_R = \frac{R - \mu_R}{\sigma_R} \quad (15)$$

e,



$$Z_Q = \frac{Q - \mu_Q}{\sigma_Q}, \quad (16)$$

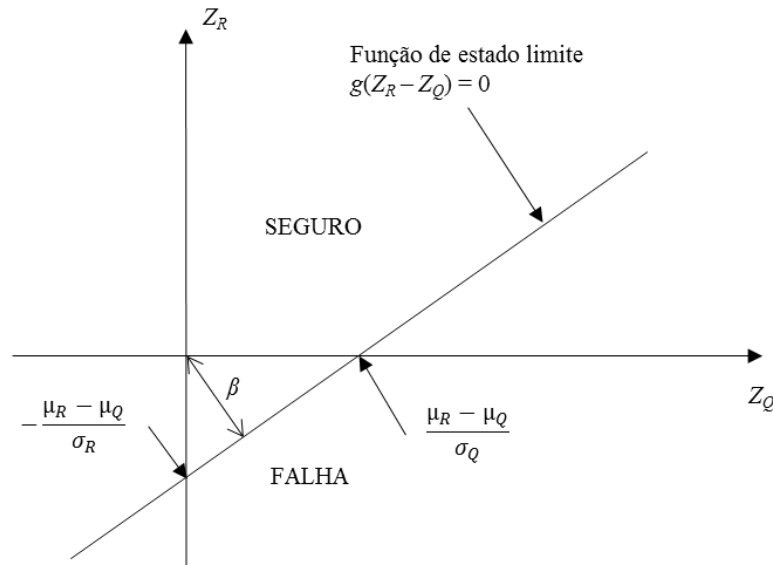
onde  $\mu_R$  e  $\mu_Q$  representam as médias das variáveis aleatórias de resistência e esforço, respectivamente e,  $\sigma_R$  e  $\sigma_Q$  os desvios-padrões da resistência e esforço, respectivamente. Então,  $Z_R$  e  $Z_Q$ , representam as variáveis reduzidas de resistência e esforço, respectivamente.

Finalmente, pode-se definir o índice de confiabilidade  $\beta$  como sendo a menor distância da origem das variáveis reduzidas até a linha  $g(Z_R, Z_Q) = 0$ . Essa definição, desenvolvida por Hasofer e Lind (1974), é obtida geometricamente a partir da equação:

$$\beta = \frac{\mu_R - \mu_Q}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_Q^2}}, \quad (17)$$

onde  $\beta$  é o inverso do coeficiente de variação da função  $g(R, Q) = R - Q$ , quando  $R$  e  $Q$  são variáveis sem correlação. O Gráfico 4 mostra  $\beta$  esquematicamente.

**Gráfico 4** – Índice de confiabilidade  $\beta$  definido como a distância mais curta da origem até a função das variáveis reduzidas.



Fonte: Nowak e Collins, 2000.

Para variáveis aleatórias com distribuição normal, o índice de confiabilidade relaciona-se à probabilidade de falha a partir das seguintes expressões:

$$\beta = \Phi^{-1}(P_f) \quad \text{ou} \quad P_f = \Phi(-\beta), \quad (18)$$

onde  $P_f$  é a probabilidade de falha e  $\Phi(-\beta)$  representa a função de distribuição acumulada (CDF) que pode ser obtida através da seguinte expressão:

$$\Phi(-\beta) = 0,5 \times \left(1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{\beta}{\sqrt{2}}\right)\right). \quad (19)$$

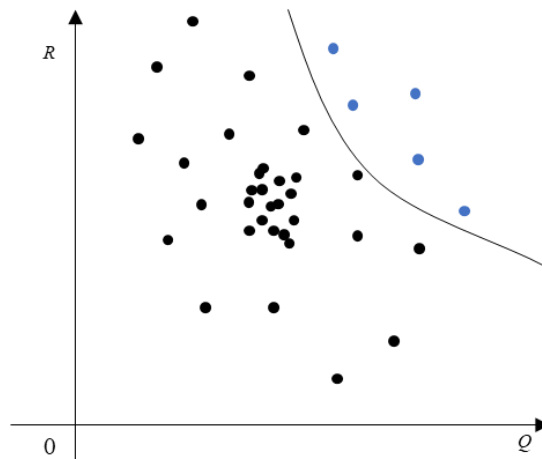
A função erf é definida pela equação 20:

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt. \quad (20)$$

#### 2.5.4 Simulação de Monte Carlo

Os métodos de simulação evoluíram junto com o avanço do poder de processamento dos computadores. O princípio da simulação de Monte Carlo baseia-se em realizar sorteios pseudoaleatórios das variáveis de projeto, testando-as na equação de estado limite. A partir de uma contagem simples, obtém-se a probabilidade de falha (SECK, 2018). O Gráfico 5 mostra duas variáveis representadas nos eixos X e Y. Cada ponto no gráfico representa uma combinação das duas variáveis geradas aleatoriamente e a linha contínua representa a equação de estado limite considerada.

**Gráfico 5** – Exemplo de observações de Monte Carlo.



Fonte: Beaucaire, 2012.

A simulação de Monte Carlo é um método genérico que tem a facilidade de poder ser implementado sem a necessidade de requisitos matemáticos específicos. É, no entanto, caro computacionalmente, pois necessita de muitas observações para atingir a convergência. Deve-se ter especial atenção à possibilidade de repetição nos sorteios das variáveis. Ao gerar cenários aleatórios de Monte Carlo, dependendo da linguagem computacional utilizada, podem ser gerados cenários repetidos. Isso deve ser evitado, pois pode trazer distorções nas probabilidades calculadas. Na prática, o método de Monte Carlo pode usar qualquer conjunto de valores como entradas de cenários possíveis, inclusive dados de ensaios de materiais ou modelos matemáticos que representem distribuições conhecidas para as variáveis em estudo.

## 2.6 PROBABILIDADE DE FALHA DE SISTEMAS ESTRUTURAIS

Em geral, a falha de um sistema não depende de um único evento, mas de várias falhas locais sucessivas, chamado de colapso progressivo.

A maioria das construções consiste em um sistema interconectado de componentes e seu funcionamento depende da interação entre eles (NOWAK E COLLINS, 2000). Existem dois casos idealizados de interação entre componentes para se montar sistemas: sistemas em série, nos quais a falha de um membro leva à falha de todo o sistema, e sistemas em paralelo, em que todos os membros devem falhar antes de ocorrer à falha do sistema. Na realidade, a maioria das estruturas não pode ser definida como em série ou em paralelo. A estrutura pode não vir ao colapso com a falha de um elemento, mas pode colapsar antes da falha de todos, sendo, portanto, uma mistura dos dois tipos.

### 2.6.1 Sistemas em série

O exemplo típico de um sistema em série são os elos de uma corrente. A corrente é tão resistente quanto a resistência de seu elo mais fraco.

A probabilidade de falha desse tipo de sistema pode ser calculada a partir da seguinte equação:

$$P_f = 1 - [1 - P(R_1 \leq F_1)][1 - P(R_2 \leq F_2)] \dots [1 - P(R_n \leq F_n)], \quad (21)$$

$$P_f = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - P_{fi}]. \quad (22)$$

Nas Equações 21 e 22,  $P_f$  significa a probabilidade de falha do sistema e  $P_{fi}$  a probabilidade de falha do  $i$ -ésimo elemento.

### 2.6.2 Sistemas em paralelo

Os sistemas em paralelo apresentam redundância, no qual é necessário que todos os elementos falhem para que ocorra uma falha do sistema. Um feixe de barras ou cabos exemplifica esse caso.

A probabilidade de falha neste caso é obtida pela multiplicação direta da probabilidade de falha de todos os elementos em paralelo, conforme mostram as equações 23 e 24.

$$P_f = P[(R_1 < F_1) \cap (R_2 < F_2) \cap \dots \cap (R_n < F_n)], \quad (23)$$

$$P_f = \prod_{i=1}^n [P_{fi}]. \quad (24)$$

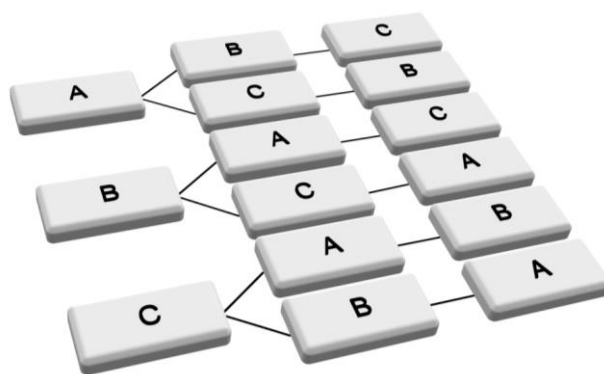
### 2.6.3 Árvore de falhas

Partindo da definição de robustez estrutural, é importante quantificar a diferença entre uma falha local e uma consequente falha global. Dessa forma, o procedimento para montagem de um sistema estrutural baseia-se em definir caminhos de falha, organizando os diferentes componentes do sistema em série ou paralelo. Uma mesma estrutura pode vir ao colapso por vários caminhos diferentes. Dá-se o nome de árvore de falhas ao processo de definir os caminhos de falha, ou ruína, e quantificar suas probabilidades de ocorrência.

Uma árvore de falhas completa analisa todos os caminhos possíveis pelos quais uma estrutura pode chegar ao colapso, testando um elemento por vez em ordem cronológica.

Um ramo da árvore representa um caminho de ruína, consistindo em eventos organizados cronologicamente a partir de um evento inicial de falha local. Os dados mais importantes a serem extraídos da árvore de falhas são os caminhos de ruína com maior probabilidade de ocorrerem e os caminhos com menor robustez. Desta forma, tem-se maior segurança quanto a fatores aleatórios, sendo possível identificar os componentes de maior vulnerabilidade da estrutura. Um exemplo de uma árvore de falhas é apresentado no Fluxograma 2.

**Fluxograma 2** – Exemplo de uma árvore de falhas, com falhas sucessivas nas seções hipotéticas A, B e C.



Fonte: elaborada pelo autor.

Uma alternativa a se construir uma árvore de falhas completa é focar em alguns caminhos críticos para reduzir o tempo de processamento. A decisão de avaliar toda a estrutura ou apenas caminhos críticos depende da capacidade de processamento computacional disponível, complexidade da estrutura, objetivos da análise, etc.

Dentre os métodos de construção de árvores de falhas que focam nos caminhos críticos, destacam-se: o método de ramos e terminais, o  $\beta$ -descompactado e o  $\beta$ -descompactado com limite, explicados a seguir:

- Ramos e terminais

O método de ramos e terminais foi proposto pela primeira vez por Land e Doig (1960) como um método de otimização e espalhou-se para outras áreas. Consiste em um algoritmo que tem por objetivo destacar os caminhos de falha dominantes enumerando todas as possíveis soluções e descartando soluções menos atraentes (MUROTSU et al, 1979). O método divide-se em duas etapas: a etapa dos ramos, em que se seleciona uma combinação de elementos defeituosos em série e a etapa dos terminais, onde se excluem aqueles com menor probabilidade de ocorrência.

- $\beta$ -descompactado

Desenvolvido por Thoft-Christensen e Sorensen (1982), o método discretiza a árvore de falhas em níveis, escolhendo os caminhos de falha dominantes através de sua probabilidade de ocorrência ou índice de confiabilidade  $\beta$  abaixo de um limite estabelecido. Kagho-Gouadjio (2013) destaca ainda, que o índice de confiabilidade considerado ao longo do caminho de falha é sempre aquele do elemento anterior no caminho e não um índice de confiabilidade associado à interseção de todos os subeventos da árvore.

- $\beta$ -descompactado com limite

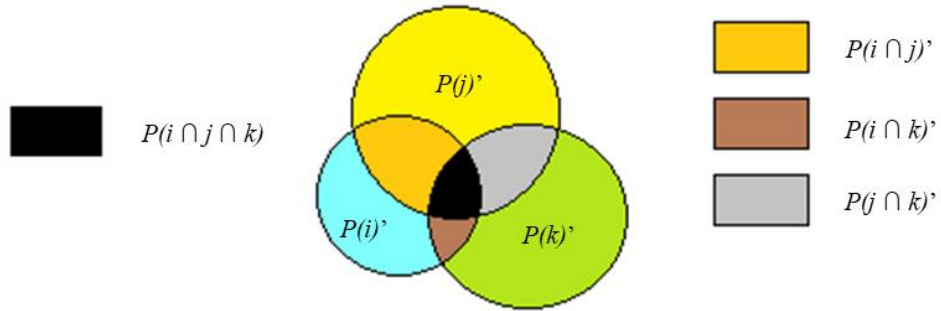
Procura aplicar as vantagens do método de ramos e terminais ao  $\beta$ -descompactado, adicionando a busca por caminhos mais prováveis. Isso é feito percorrendo a árvore de falhas do mais provável para os menos prováveis, podendo assim descartar por comparação os caminhos menos prováveis (KAGHO-GOUADJIO, 2013).

#### 2.6.4 Probabilidade de falha dos eventos de interseção

Seck (2018) ressaltou que ao se calcular a árvore de falhas, pode ocorrer a interseção de vários cenários levando-se às seguintes possibilidades: todos os elementos falham simultane-

amente; apenas alguns elementos falham simultaneamente; um único elemento falha; nenhum elemento falha. Essa ideia é ilustrada na Figura 3.

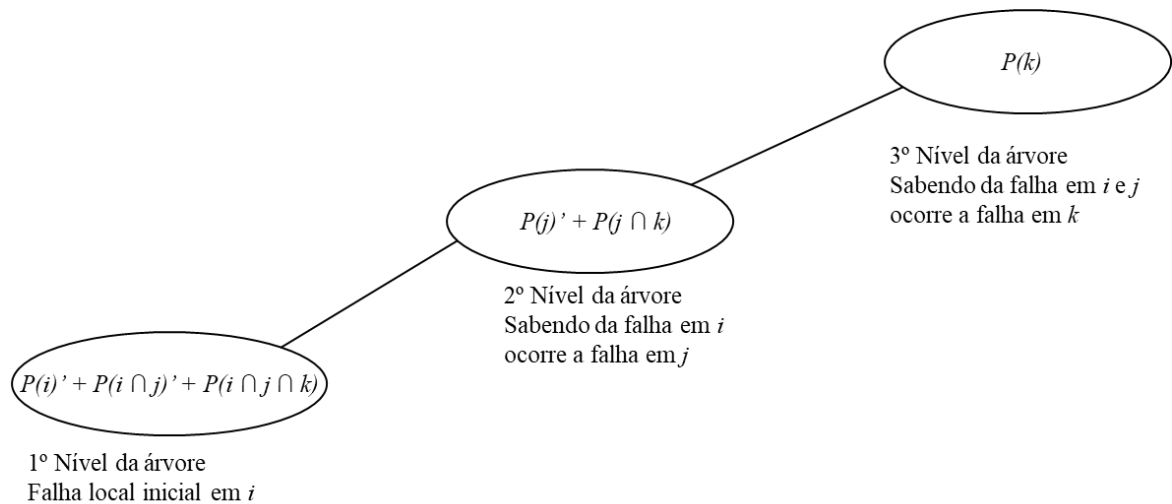
**Figura 3** – Diagrama de interseção dos eventos onde  $P$  representa a probabilidade de falha e os índices  $i, j$  e  $k$ , três elementos distintos. O símbolo  $'$  representa a probabilidade de falha isolada de um elemento.



Fonte: Seck, 2018.

Ao se construir uma árvore de falhas, acaba-se considerando a falha de um elemento várias vezes, o que leva a uma probabilidade de falha global maior, conforme mostrado no Fluxograma 3.

**Fluxograma 3** – Árvore de falha com eventos  $i, j$  e  $k$  em série, onde a probabilidade de ruína para os eventos  $j$  e  $k$  são computados mais de uma vez.



Fonte: elaborada pelo autor.

Para se avaliar a probabilidade de falha de vários eventos simultâneos através do método FORM, geralmente necessita-se de uma integração de distribuições normais multivariadas.

Segundo Greign (1992), esse cálculo torna-se inviável computacionalmente quanto maior o número de eventos em interseção. Um método numérico para obter essa integração foi desenvolvido por Terada e Takahashi (1988) que consiste em aproximar a probabilidade de falha de uma interseção pelo produto das integrais unidimensionais.

$$P(\cap_{k=1}^m e_k) = \Phi_m(-\{\beta\}, [\rho]) \approx \prod_{k=1}^m \Phi(-\beta_{k|(k-1)}). \quad (25)$$

O índice de confiabilidade  $\beta_{m|k}$  e os coeficientes de correlação  $\rho_{mk|(k-1)}$  são termos condicionais calculados por um processo recursivo, cujas equações são apresentadas a seguir:

$$\beta_{m|k} = \frac{\beta_{m|(k-1)} + \rho_{mk|(k-1)} \times A_{k|(k-1)}}{\sqrt{(1 - \rho_{mk|(k-1)}^2) \times B_{k|(k-1)}}} \quad (26)$$

e,

$$\rho_{mk|(l-1)} = \frac{\rho_{mk|(l-2)} + \rho_{k(k-1)|(l-2)} \times \rho_{m(k-1)|(l-2)} \times B_{(k-1)|(l-2)}}{\sqrt{(1 - \rho_{k(k-1)|(l-2)}^2) \times B_{(k-1)|(l-2)}} \times \sqrt{(1 - \rho_{m(k-1)|(l-2)}^2) \times B_{(k-1)|(l-2)}}} \quad (27)$$

onde  $l \in \{1, 2, \dots, k\}$ , com as seguintes notações:

$$A_{i|q} = \frac{\phi(-\beta_{i|q})}{\Phi(-\beta_{i|q})}, \quad (28)$$

$$B_{i|q} = A_{i|q}(A_{i|q} - \beta_{i|q}) e, \quad (29)$$

$\phi(-\beta)$  representa a função densidade de probabilidade (PDF), podendo ser obtida pela expressão:

$$\phi(-\beta_i) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \exp\left(-\frac{\beta_i^2}{2}\right). \quad (30)$$

Através do cálculo da interseção dos eventos é possível isolar as probabilidades de eles ocorrerem sozinhos, evitando a redundância ao se construir a árvore de falhas. No caso de uma estrutura com três eventos locais, a probabilidade de cada evento individual, excluindo-se as interseções, é calculada pelas seguintes expressões:

$$\begin{cases} P'_{i \cap j} = P(i \cap j)' = P(i \cap j) - P(i \cap j \cap k) & e, \\ P'_i = P(i)' = P(i) - (P(i \cap j)' + P(i \cap k)' + P(i \cap j \cap k)). \end{cases} \quad (31)$$

Seck (2018) afirma que a separação dos eventos é uma condição necessária para que a falha global possa ser calculada através da multiplicação das probabilidades ao longo da árvore de falhas. Isso, no entanto, resulta na probabilidade local e global da ruína para o panorama onde somente um elemento falha por vez, tratando as situações em que mais de um elemento falha simultaneamente (como outro ramo da árvore).

Ressalta-se que através da consideração dos eventos com a probabilidade das interseções é sempre necessário calcular todas as interseções antes de se poder passar ao próximo nível da árvore de falhas, o que aumenta significativamente o tempo de processamento.

### 2.6.5 Rótulas plásticas e caminhos de falha

Em estruturas hiperestáticas e redundantes, a falha de um elemento gera uma redistribuição das forças internas nos demais elementos (KAGHO-GOUADJIO, 2013). Pode ocorrer uma perda de desempenho local, mas o elemento pode, ainda, contribuir com alguma resistência residual. Por exemplo, uma viga de concreto armado pode ser considerada com falha quando houve um determinado grau de fissuração. Neste caso, a viga pode não estar completamente fissurada e existir ainda resistência. Diversos modelos tentam prever o comportamento de estruturas nessas condições. Por exemplo, para elementos de concreto a simulação de um dano local poderia significar a redução da área da seção para cálculo do momento de inércia, considerando-se apenas a porção não fissurada. Por outro lado, para elementos em aço, existe ainda um patamar de escoamento de plastificação, que pode ser considerado.

Nos modelos apresentados no capítulo seguinte, os estados limites considerados são a formação de rótulas plásticas devido ao momento fletor atuante em seções de aço. Uma forma de considerar a resistência residual, nesses casos, é aplicar forças nodais fictícias correspondentes à resistência da seção com falha (MUROTSU et al.; OKADA et al.; THOFT-CHRISTENSEN e MUROTSU; MUROTSU et al.; 1979, 1984, 1986, 1987).

Dessa forma, a cada passo da árvore de falhas pode ser considerada uma resistência residual devida à falha no passo anterior. Essa consideração tende a favorecer os resultados, uma vez que as forças nodais fictícias aliviam ligeiramente a estrutura, representando de forma mais precisa o comportamento real das peças.

## 2.7 ESCOLHAS E PREMISSAS DO PRESENTE TRABALHO

Nesta dissertação, o foco é obter uma metodologia precisa para cálculo da probabilidade de falha e índice de robustez para sistemas estruturais. Pode-se dizer que o presente estudo é uma continuação dos trabalhos de Kagho-Gouadjio (2013) e Seck (2018).

A teoria de confiabilidade estrutural aqui abordada será aplicada através de código desenvolvido em Matlab®. Para obtenção das probabilidades de falha, será utilizado o método de simulação de Monte Carlo. As árvores de falha desenvolvidas serão completas, permitindo avaliar inteiramente o método e as estruturas estudadas, utilizando-se inicialmente o índice de robustez  $IR_7$  desenvolvido por Kagho-Gouadjio (2013).



### 3 METODOLOGIA DO TRABALHO

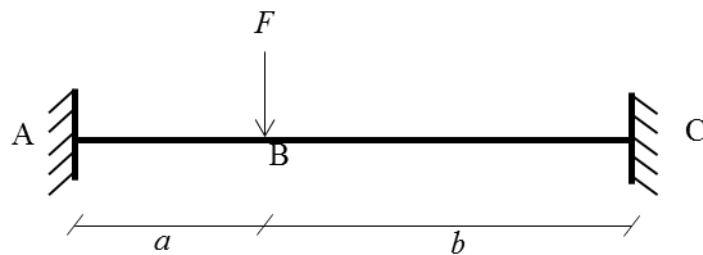
Optou-se nesse texto por apresentar a metodologia para análise probabilística de estruturas aplicada neste trabalho, bem como as inovações propostas, a partir de um exemplo preliminar unidimensional. Entende-se que essa abordagem facilita a compreensão das etapas da metodologia e a introdução dos novos conceitos associados a essa dissertação.

#### 3.1 EXEMPLO PRELIMINAR UNIDIMENSIONAL

Conforme já mencionado, o presente trabalho pode ser considerado uma continuação do trabalho de Seck (2018). Desta forma, e visando inicialmente validar os resultados obtidos no presente trabalho através da metodologia descrita por Seck (2018), tomou-se um estudo de caso unidimensional desenvolvido pelo autor supracitado.

O objetivo desse estudo de caso foi a criação de uma árvore de falhas para obter a probabilidade global e o índice de robustez dos diversos caminhos. O modelo baseia-se em uma viga biengastada com 3 metros de comprimento e uma força pontual concentrada  $F$  aplicada a  $1/3$  do vão. O modo de falha considerado é a formação de rótula plástica devido ao momento atuante nas seções A, B e C. O esquema estrutural pode ser visto na Figura 4.

**Figura 4** – Modelo de viga biengastada, com  $a$  sendo 1,0 m de comprimento,  $b$  sendo 2,0 m de comprimento.



Fonte: elaborada pelo autor.

A força aplicada  $F$  e o momento resistente de cada seção são variáveis aleatórias, com lei de distribuição normal, definidas por suas médias e desvios-padrões apresentados na Tabela 2.

**Tabela 2** – Variáveis aleatórias consideradas, apresentadas através de sua média e desvio padrão.

Variáveis aleatórias			
Variáveis	Lei de distribuição	Média ( $\mu$ )	Desvio padrão ( $\sigma$ )
<i>MrA</i>	normal	1.600 Nm	500 Nm
<i>MrB</i>	normal	1.600 Nm	500 Nm
<i>MrC</i>	normal	1.600 Nm	500 Nm
<i>F</i>	normal	2.800 N	1.000 N

Fonte: elaborada pelo autor.

Criando uma árvore de falhas, Seck (2018) traçou todos os caminhos possíveis de ruína da estrutura adicionando rótulas plásticas nos nós A, B e C. Esse modelo apresenta ao todo 6 caminhos possíveis e 7 caminhos de interseção, onde mais de uma seção falha simultaneamente.

Seck (2018) utilizou o método FORM para obter as probabilidades locais e validou seus resultados através de um modelo de Monte Carlo.

A árvore de falhas foi dividida em três níveis. No primeiro nível, foram calculadas as probabilidades de falha locais iniciais. No segundo, as probabilidades de falha locais considerando uma seção rompida. Finalmente, no terceiro, as probabilidades de falha locais com duas seções rompidas. Sendo a viga uma estrutura hiperestática a falha nos três nós leva a uma configuração instável, ou seja, hipostática.

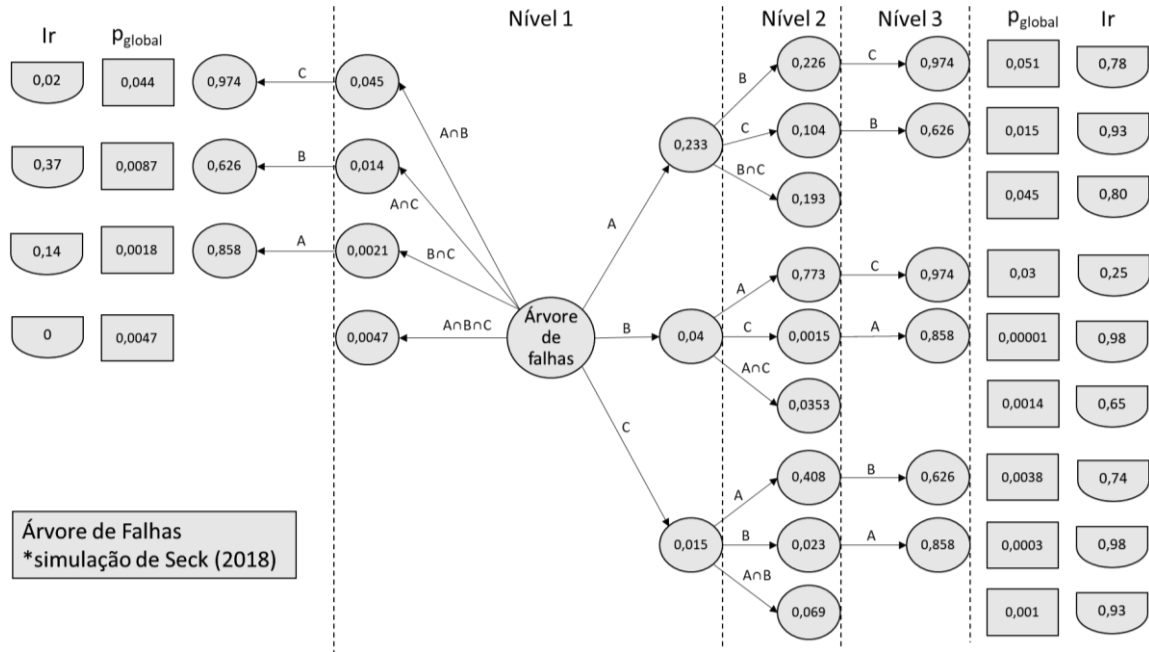
Os resultados de Seck (2018) são apresentados no Fluxograma 4. Cada seta com as letras A, B e C indica falha na respectiva seção. Dentro dos círculos estão as probabilidades de falha locais calculadas pelo método FORM. Nos quadrados são apresentadas as probabilidades de falha globais de cada caminho, calculadas multiplicando-se a falha local de cada nível no caminho considerado. Por último, apresenta-se o índice de robustez *Ir* para cada caminho.

### 3.1.1 Reprodução dos resultados de Seck (2018)

Ao se analisar o modelo de Seck (2018), percebe-se que para cada caminho possível uma probabilidade global e um índice de robustez são calculados. Esses valores são obtidos considerando-se várias falhas locais alinhadas em paralelo, no qual é necessário que todas as falhas locais de um caminho ocorram para se chegar à falha global. Os diferentes caminhos são or-

ganizados em série, no qual a falha de qualquer um leva a falha do sistema. No Fluxograma 4 são apresentados os resultados obtidos por Seck (2018).

**Fluxograma 4** – Árvore de falhas completa com resultados obtidos por Seck (2018).



Fonte: Seck, 2018.

Esse estudo de caso foi reproduzido utilizando o método FORM e o Monte Carlo convencional, de maneira a se validar o modelo. Os resultados obtidos foram praticamente idênticos, sendo as pequenas diferenças fruto de arredondamentos, salvo a probabilidade global do caminho  $B - A \cap C$ , onde houve um erro de grafia no trabalho de Seck (2018). Estes resultados são apresentados nos Fluxogramas 5 e 6, respectivamente.

O procedimento de cálculo para o FORM obtém o índice de confiabilidade  $\beta$  como sendo a menor distância da origem das variáveis reduzidas até a linha  $g(Z_R, Z_Q) = 0$ . Essa definição, desenvolvida por Hasofer e Lind (1974), é obtida geometricamente através da equação:

$$\beta = \frac{\mu_R - \mu_Q}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_Q^2}}, \quad (32)$$

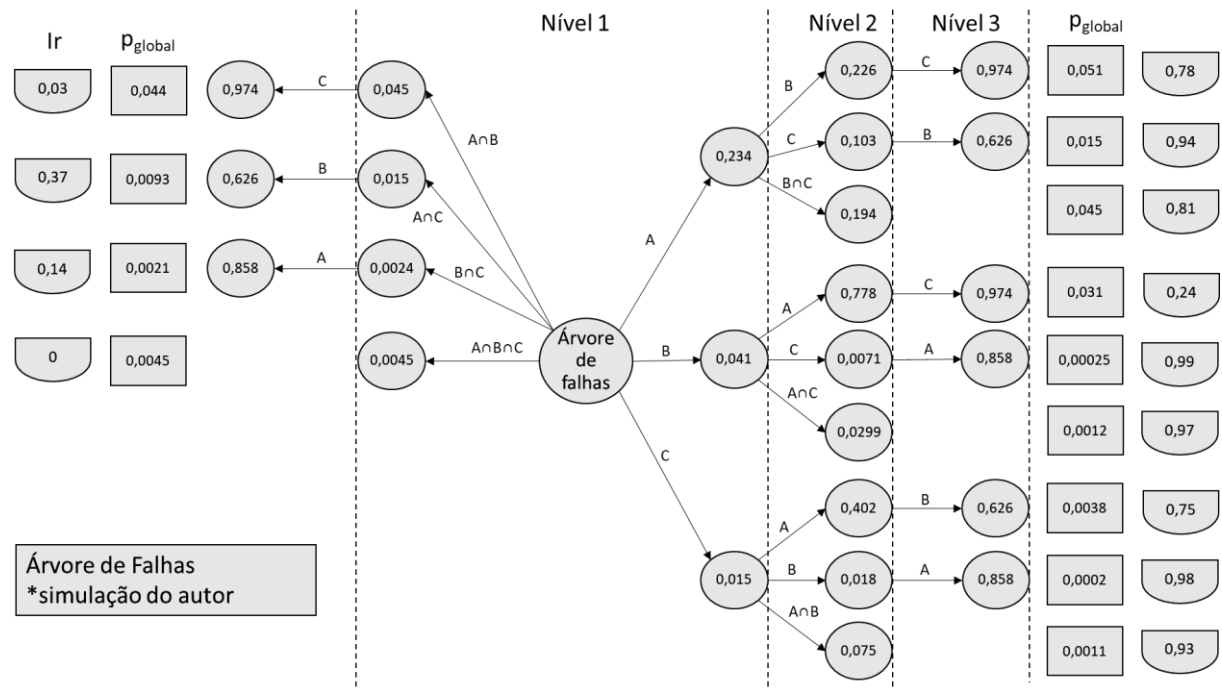
Para variáveis aleatórias com distribuição normal, o índice de confiabilidade relaciona-se à probabilidade de falha através das seguintes expressões:

$$\beta = \Phi^{-1}(P_f) \quad \text{ou} \quad P_f = \Phi(-\beta), \quad (33)$$

onde  $P_f$  é a probabilidade de falha e  $\Phi(-\beta)$  representa a função de distribuição acumulada (CDF) que pode ser obtida através da seguinte expressão:

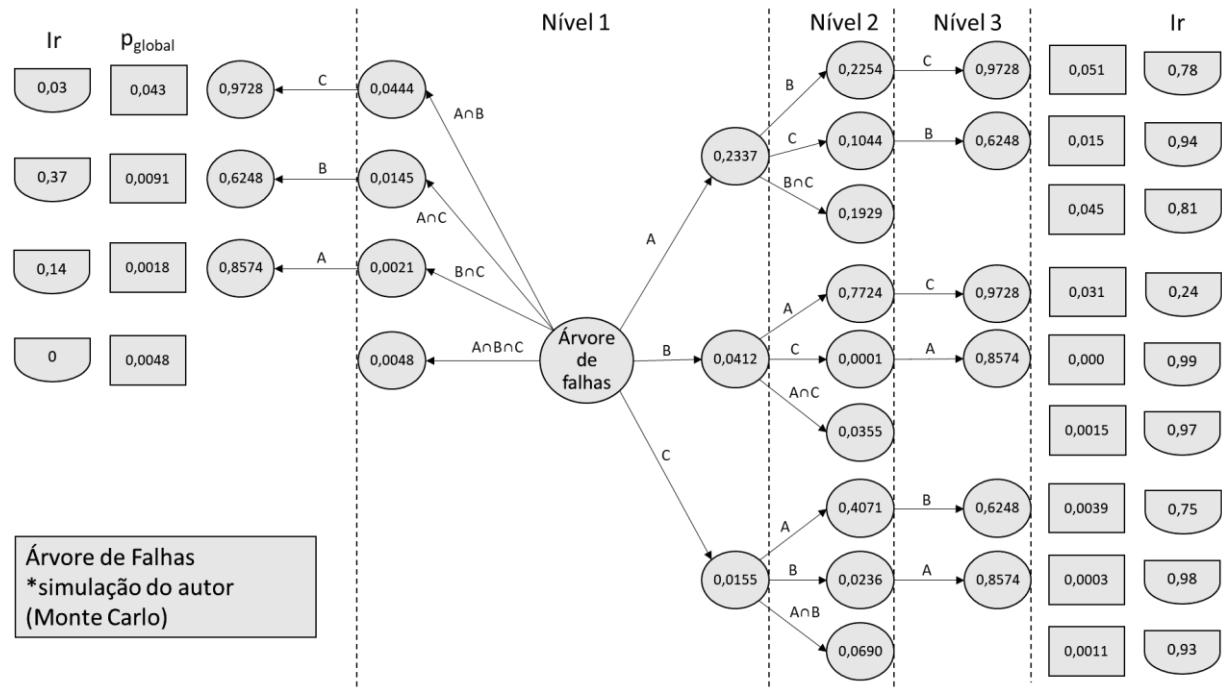
$$\Phi(-\beta) = 0,5 \times \left( 1 + \operatorname{erf}\left(-\frac{\beta}{\sqrt{2}}\right) \right). \quad (34)$$

**Fluxograma 5** – Resumo dos resultados de análise probabilística da viga biengastada, método FORM.



Fonte: elaborada pelo autor.

**Fluxograma 6** – Resumo dos resultados de análise probabilística da viga biengastada, simulação de Monte Carlo.



Fonte: elaborada pelo autor.

Utilizando a simulação de Monte Carlo foram geradas as variáveis aleatórias, com  $10^8$  cenários. Foi considerada uma variável aleatória de força, multiplicada pelos coeficientes estruturais obtidos com a aplicação de uma força unitária na estrutura, transpondo assim força em kN para momento atuante em kN.m. Foram geradas três variáveis aleatórias de momento resistente. O desenvolvimento desse modelo foi feito no programa Matlab® com a criação de um vetor aleatório respeitando a lei de distribuição normal utilizando a função *normrnd*, garantindo que não fossem gerados valores repetidos, o que poderia trazer erros à verificação.

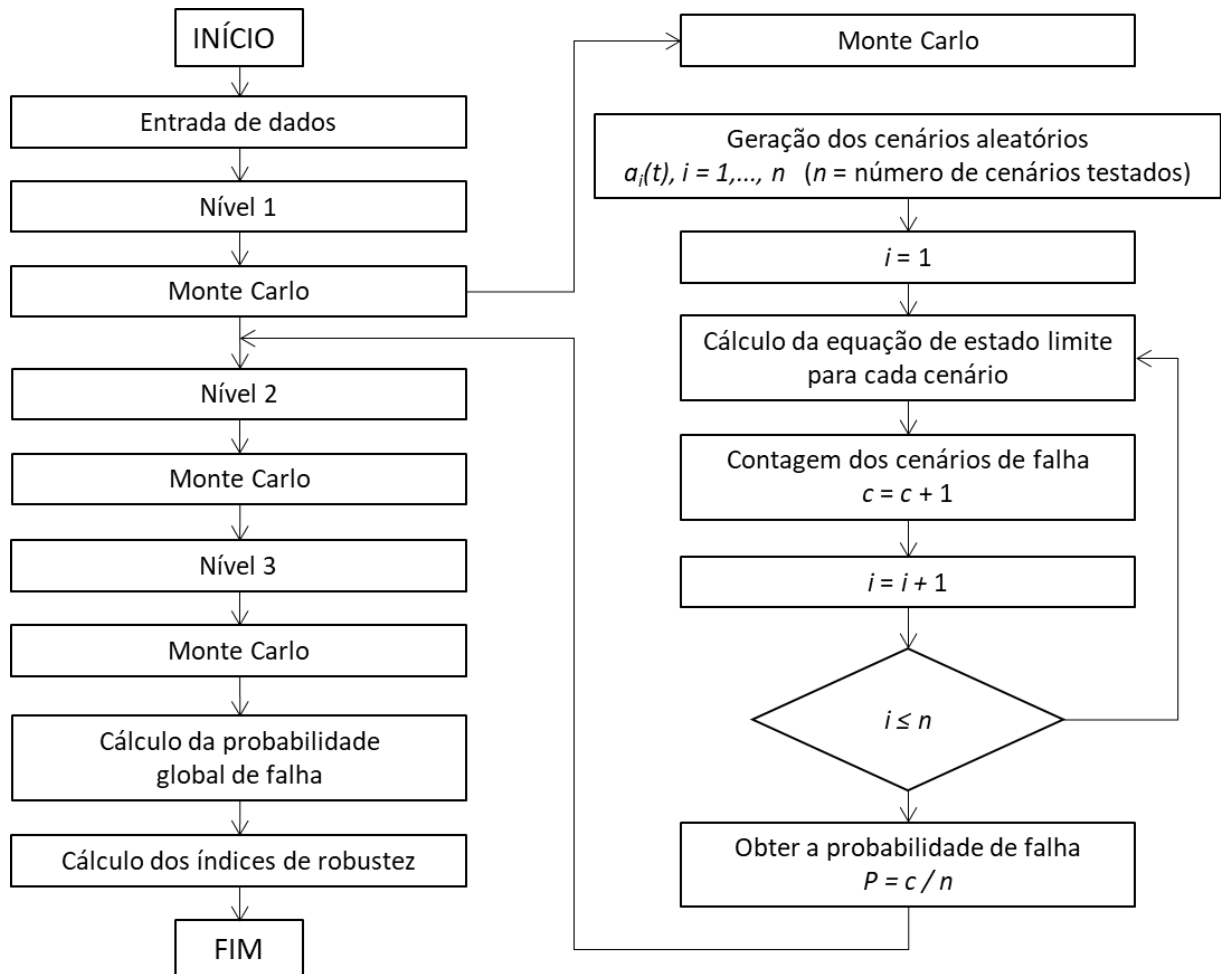
Destaca-se, no entanto, que as variáveis aleatórias escolhidas por Seck (2018) respeitaram o coeficiente de variação comum na bibliografia de 30%. Com isso, durante a reprodução do experimento foi encontrado, para uma simulação de  $10^8$  cenários, um total de 68.610 sorteios da variável de resistência com valores negativos. Do ponto de vista de engenharia esse resultado não é real e equivale a 0,07% de toda a amostragem, chegando a ser significativo se comparado com as probabilidades de falha global de alguns caminhos.

Caso, por exemplo, tivesse sido adotado coeficiente de variação de 20% (desvio-padrão igual a 20% da média), o número de sorteios negativos cairia para 28 em  $10^8$ , passando a ser desprezível na análise. Portanto, apesar do presente exemplo ser um modelo didático e teórico, reitera-se a importância do conhecimento das variáveis aleatórias e adoção de parâmetros calibrados para as mesmas.

### 3.2 ABORDAGEM PROPOSTA

No método de Monte Carlo, em cada etapa da árvore são gerados novos valores para as variáveis aleatórias e os valores da etapa anterior são descartados. Por essa razão, a análise através do método de Monte Carlo fica dispendiosa computacionalmente e buscam-se métodos alternativos, como o FORM, que aproximam algumas probabilidades com menos esforço computacional.

No Fluxograma 7, pode-se ver o algoritmo de Monte Carlo para solução do modelo unidimensional estudado. A análise de um único elemento seria equivalente a se desenvolver apenas o nível 1 do algoritmo. Os demais níveis configuram a busca pelo caminho de falha até o colapso da estrutura. Percebe-se que, entre um nível e outro da árvore, os cenários estudados são descartados e gerados novamente, repetindo-se o método de análise de um elemento individual em cada nível. Isso leva a um erro na análise que aparece em sistemas estruturais, conforme discutido a seguir.

**Fluxograma 7** – Diagrama do algoritmo de Monte Carlo.

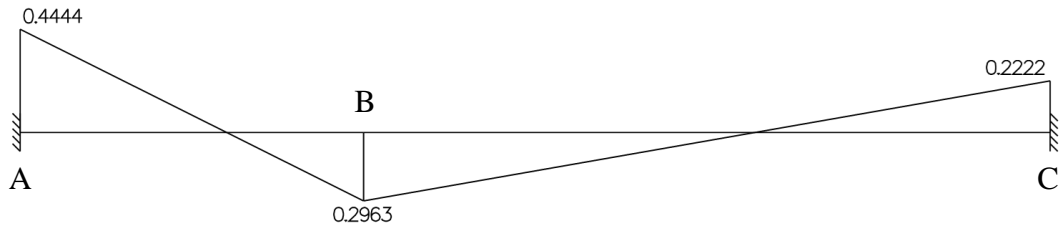
Fonte: elaborada pelo autor.

Quando se analisa o nível 1 da árvore, a estrutura está íntegra, sem rótulas plásticas. Obtem-se, então, as probabilidades de falha locais de cada elemento/seção. No nível 2, calculam-se as probabilidades de falha locais novamente. São sorteados novos cenários utilizando os dados das variáveis aleatórias, como média e desvio-padrão. Com esse procedimento, são gerados cenários para o nível 2 que não seriam cenários de ruína global reais. Considerando o nível 1 da árvore de falhas, sem falha inicial, suponha que o algoritmo tenha sorteado os seguintes valores:

$$F = 3000 \text{ N}; \quad MR_a = 1.600 \text{ kN.m}; \quad MR_b = 1.500 \text{ kN.m}; \quad MR_c = 1.820 \text{ kN.m}.$$

Considere-se, ainda, que os coeficientes estruturais sem falhas para uma carga unitária sejam os apresentados na Figura 5.

**Figura 5** – Diagrama de momentos fletores para carga unitária sem rótulas na estrutura.



$$k_a = 0,4444; k_b = 0,2963; k_c = 0,2222$$

Fonte: elaborada pelo autor.

Assim, os momentos fletores atuantes nas seções A, B e C devido à força F são:

$$F_a = 3.000 \times 0,4444 = 1333,2 \text{ kN.m} < MR_a ,$$

$$F_b = 3.000 \times 0,2963 = 888,9 \text{ kN.m} < MR_b ,$$

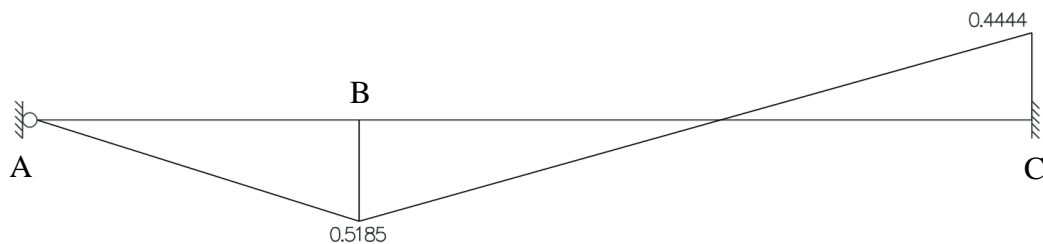
$$F_c = 3.000 \times 0,2222 = 666,6 \text{ kN.m} < MR_c .$$

Sabendo-se que o momento resistente de cada seção, nesse caso, é o mesmo independente do sinal, considera-se apenas o módulo de  $k_a$ ,  $k_b$  e  $k_c$ .

Nota-se, então, que o cenário proposto não gera momentos atuantes que causem falha em nenhuma das seções.

Agora, no nível 2 da árvore de falhas, introduz-se uma rótula plástica na seção A, que é a seção com maior probabilidade de falha. Supondo-se que o algoritmo tenha sorteado coincidentemente os mesmos valores propostos acima, os novos coeficientes estruturais para falha inicial em A seriam os apresentados na Figura 6.

**Figura 6** – Diagrama de momentos fletores para carga unitária com rótula na seção A.



$$k_b = 0,5185; k_c = 0,4444$$

Fonte: elaborada pelo autor.

Desta forma, têm-se os momentos fletores atuantes nas seções B e C devido à força F:

$$F_b = 3.000 \times 0,5185 = 1.555,5 \text{ kN.m} > MR_b ,$$

$$F_c = 3.000 \times 0,4444 = 1.333,2 \text{ kN.m} < MR_c .$$

Note-se que a seção B apresenta falha, mas a seção C não. O problema desse exemplo é que se considera um cenário impossível de ocorrer. Pois, nesse cenário a seção A não teria falhado no nível 1 e não se chegaria ao nível 2, não sendo, portanto, um cenário de falha global factível.

Outros cenários semelhantes, mesmo que não apresentem falha nas etapas posteriores, seriam igualmente desfavoráveis para a análise, uma vez que contariam na quantidade total de cenários analisados, o que alteraria a probabilidade de falha local de cada seção.

Dessa forma, propõe-se uma nova abordagem para a montagem da árvore de falhas. Essa abordagem irá sortear as variáveis aleatórias apenas no início do algoritmo e, conforme se avança nos níveis de falha, não serão realizados novos sorteios, ou seja, não serão gerados novos cenários.

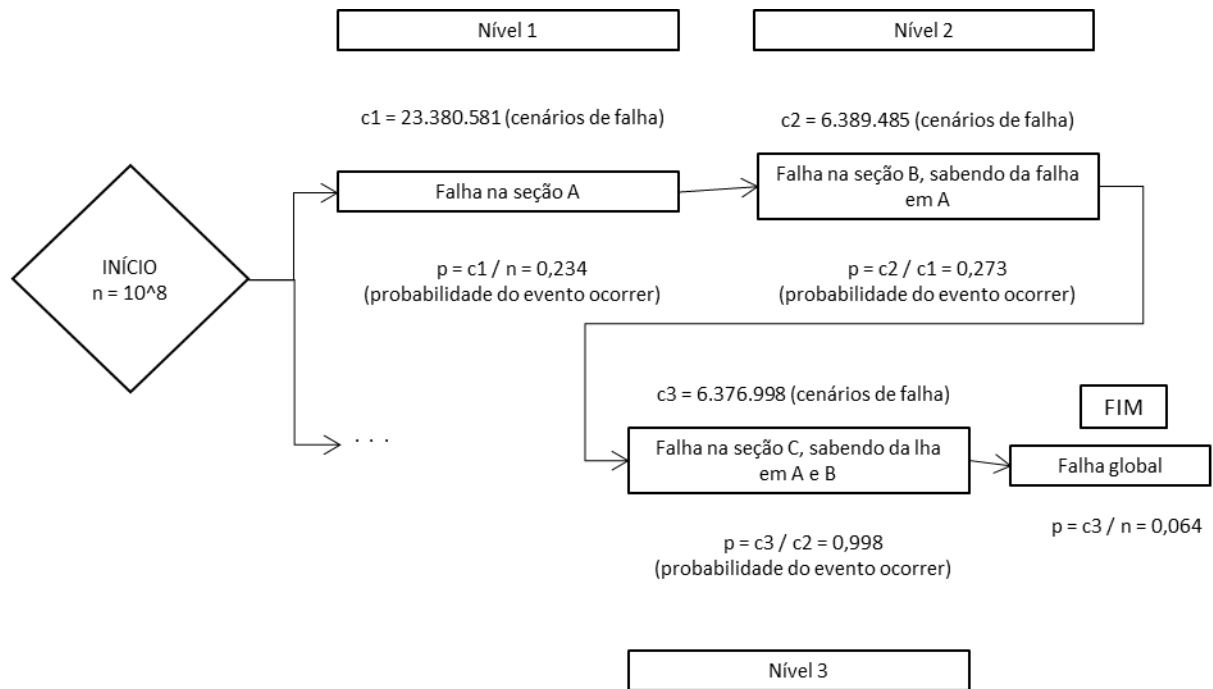
Essa proposta calcula as probabilidades de falha locais num dado nível, considerando-se somente os cenários que causaram ruína nas etapas anteriores. Essa estratégia tem a vantagem de executar o algoritmo de Monte Carlo apenas uma vez, o que favorece o custo de processamento, o que pode, em muitos casos, viabilizar a análise.

O método proposto altera a base do algoritmo gerando cenários aleatórios apenas no início. Na sequência, o programa armazena e aproveita esses mesmos cenários até o final da análise. Dessa forma, quando se avança na árvore, os próximos níveis testam somente os cenários possíveis até aquele momento. O esquema do Fluxograma 8 ilustra a metodologia, sendo  $c$  as observações de falha e  $p$  as probabilidades em cada nível calculadas a partir dos cenários do nível anterior. Enquanto o algoritmo pode ser visto no Fluxograma 9:

Da mesma maneira, o índice de robustez passa a ser calculado uma vez para cada falha local inicial, ao invés de uma vez para cada caminho procurando concordar com as definições de robustez da literatura. Os resultados da árvore completa são apresentados no Fluxograma 10.

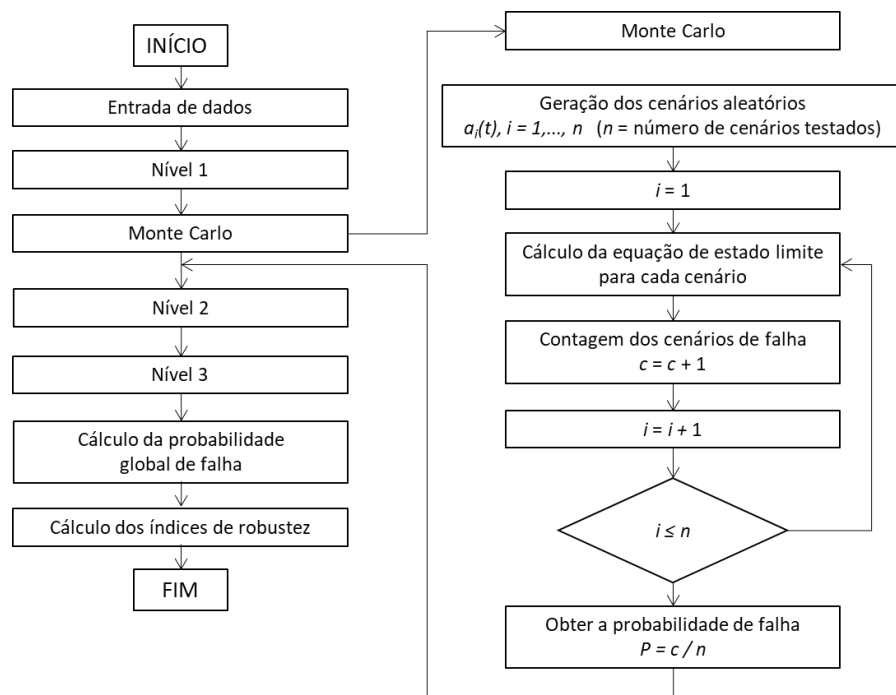


**Fluxograma 8** – Diagrama com metodologia proposta considerando falha inicial na seção A.



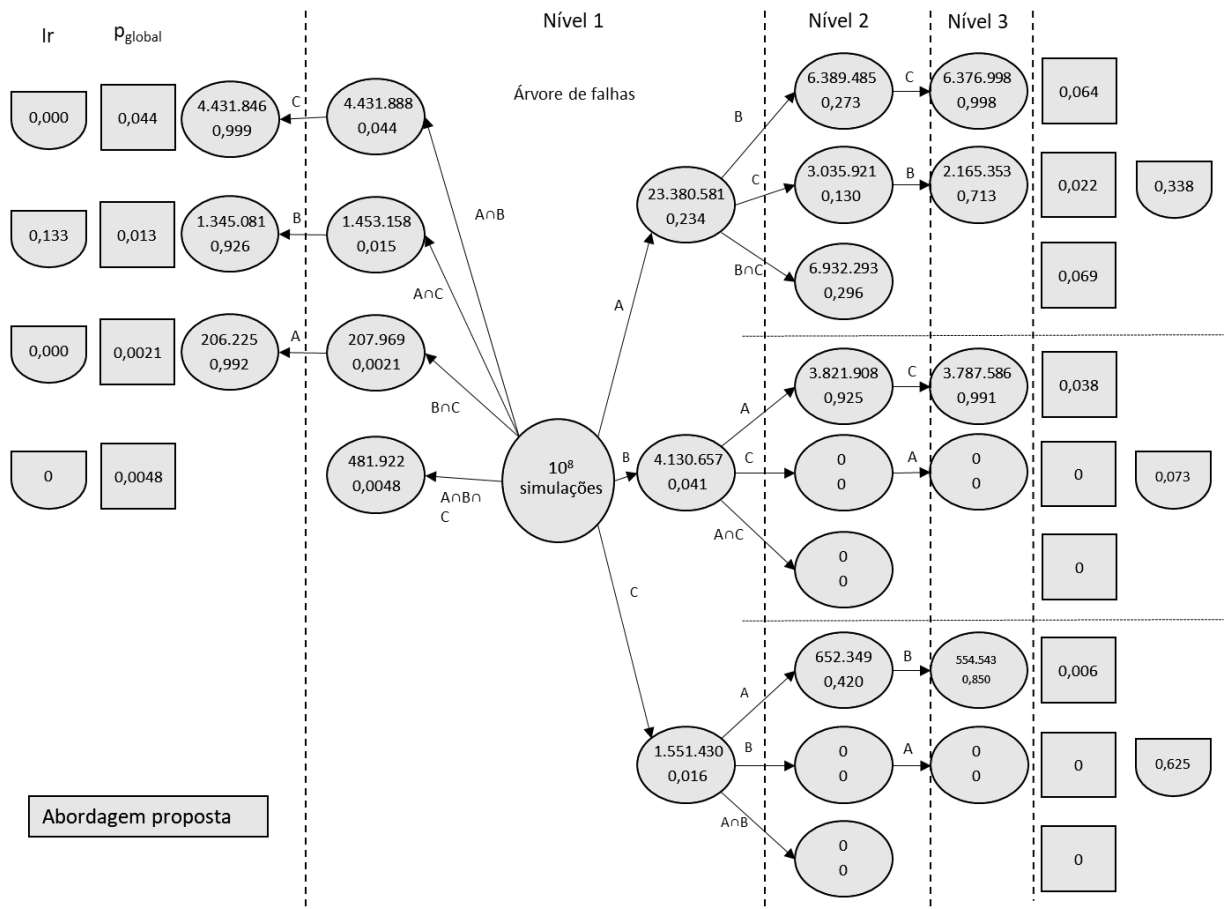
Fonte: elaborada pelo autor.

**Fluxograma 9** – Fluxograma do algoritmo proposto usando simulação de Monte Carlo.



Fonte: elaborada pelo autor.

**Fluxograma 10** – Árvore de falhas resultante da abordagem proposta.



Fonte: elaborada pelo autor.

Analisando os resultados do Fluxograma 10 e da Tabela 3, nota-se que as probabilidades iniciais de falha local no nível 1 são iguais às obtidas por Seck (2018). Esse resultado era esperado, uma vez que o método FORM aproxima com precisão a probabilidade de falha local. No entanto, para as probabilidades de falha dos níveis posteriores e global há uma diferença significativa nos resultados encontrados. Tal divergência advém da exclusão dos cenários não possíveis no método proposto.

**Tabela 3** – Comparação dos resultados apenas no caminho iniciado pela falha A.

Evento	Probabilidade	
	Seck (2018)	Presente trabalho
Falha A	0,233	0,234
Falha em A > B	0,224	0,273
Falha em A > B > C	0,973	0,998
Falha global	0,051	0,064

Fonte: elaborada pelo autor.

Caso sejam calculadas as probabilidades locais em cada nível da árvore dividindo o número de ocorrências  $c$  pelo número de cenários possíveis da última etapa, e multiplicando a probabilidade de cada nível, obtém-se a mesma probabilidade global de falha que tomar  $c_3$  dividido por  $n$  diretamente. Esse resultado confirma a hipótese de paralelismo entre os eventos de um mesmo caminho. Tal confirmação não era possível nos métodos anteriores.

Quanto à probabilidade de falha global em cada caminho, o valor obtido pela abordagem proposta é maior que o obtido por Seck (2018). Esse resultado é justificado, pois pela metodologia dos autores anteriores ao presente trabalho, a probabilidade de falha global era calculada pelo produto das probabilidades de falha de cada elemento no caminho, aceitando a relação de paralelismo ou redundância entre os elementos de um mesmo caminho. Além disso, a probabilidade de cada elemento depois do primeiro era calculada considerando-se todos os cenários como possíveis. Na presente metodologia, ao se calcular a probabilidade de cada elemento considerando apenas os cenários que causaram ruína nas etapas anteriores, ainda que sejam encontrados menos cenários de falha, o total de cenários excluídos nas etapas anteriores é muito maior, o que acaba trazendo probabilidades de falha maiores.

$$P_{elemento} = \frac{c_i}{n} \quad (35)$$

$$P_{global} = P_1 \times P_2 \times \dots \times P_i \quad (36)$$

$$P_{elemento} = \frac{c_i}{c_{i-1}} \quad (37)$$

$$P_{global} = \frac{c_3}{n} \quad (38)$$

As equações 35 e 36 demonstram a forma de cálculo da probabilidade global pelos autores anteriores, enquanto as equações 37 e 38 mostram a metodologia do presente trabalho, baseada em contagem, onde  $c_i$  representa os cenários de falha encontrados,  $n$  o total de cenários testados,  $c_{i-1}$  o total de cenários de falha da etapa anterior e  $P_i$  a probabilidade de falha de cada elemento. Fica mais clara a justificativa ao se comparar a equação 35 com a equação 37, apesar de  $c_i$  ser maior nos métodos de outros autores,  $n$  é ainda muito maior que  $c_{i-1}$ , o que resulta em uma probabilidade de falha de cada elemento depois do primeiro menor que na proposta do presente trabalho. Como os autores pregressos calculam a probabilidade de falha global pela multiplicação da probabilidade de cada elemento, a resultante probabilidade de falha global acaba sendo menor do que a esperada, justificando-se os valores maiores encontrados no presente trabalho.

Outra conclusão importante é que, a partir do método proposto, é possível contar todos os cenários em todos os caminhos que levaram à falha global. Dessa forma, obtém-se a probabi-

lidade de a estrutura vir a colapsar independentemente do caminho a que irá ocorrer. Nesse exemplo, a probabilidade de falha da estrutura como um todo é de 26,3% (26.281.847 cenários em uma amostragem de  $10^8$ ). O mesmo resultado pode ser obtido ao se considerar que os diferentes caminhos estão alinhados em série, utilizando a equação 24 do item 2.6.1. Assim, confirmando-se também a hipótese teórica de os diferentes caminhos serem alinhados em série.

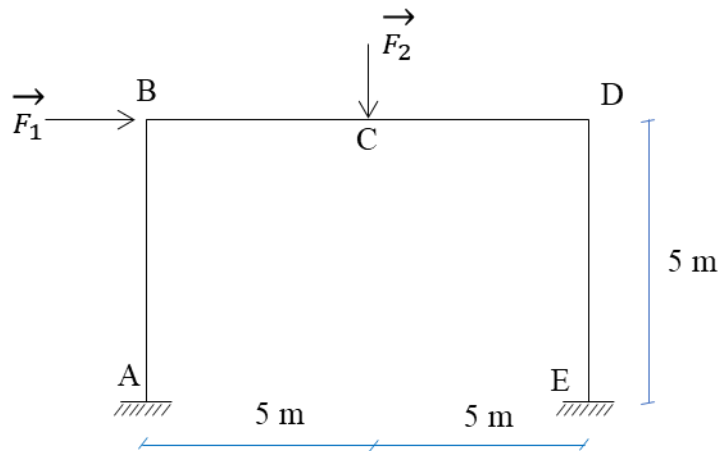
## 4 APLICAÇÕES

O objetivo deste capítulo é aplicar os conceitos apresentados nas seções anteriores a um estudo de caso de referência de maior complexidade.

### 4.1 PÓRTICO BIENGASTADO

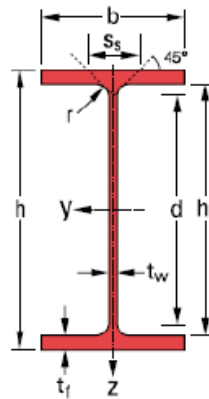
O modelo baseia-se em um pórtico plano biengastado simples com 10 m de vão e 5 m de altura sujeito a uma força horizontal  $F_1$  e a uma força vertical  $F_2$ , conforme mostrado na Figura 7. Seus elementos possuem comportamento elastoplástico perfeito e o modo de ruína considerado é a formação de rótulas plásticas nas seções de estudo. Este é um exemplo de referência que já foi tratado por Thoft-Christensen e Murotsu (1986), Nafday et al. (1987), Chen et al. (1995), Kemp (2002), Ziemian e MacGuire (2002), Kagho-Gouadjio (2013) e Seck (2018).

**Figura 7** – Pórtico plano biengastado com forças nodais  $F_1$  e  $F_2$  e denominação dos nós.



Fonte: elaborada pelo autor.

Para cada barra do pórtico foram adotadas as características de uma viga de aço: perfil IPE240 com módulo de Young  $E$  e limite elástico  $\sigma_e$  respectivamente iguais a 210 GPa e 276 MPa. As forças  $F_1$  e  $F_2$ , e o momento resistente  $M_{si}$  em cada nó são considerados variáveis aleatórias com lei de distribuição normal, enquanto a posição das cargas e dimensões das peças são determinísticas. A seção transversal é apresentada na Figura 8 e suas propriedades geométricas na Tabela 4. Seck (2018) destaca que a escolha da configuração de ações permite mobilizar toda a estrutura podendo aliviar ou penalizar de acordo com cada seção.

**Figura 8** – Seção transversal do perfil IPE240.

Fonte: Kagho-Gouadjio, 2013.

**Tabela 4** – Características da seção IPE240.

Dimensões (mm)					Seção (cm <sup>2</sup> )	Dimensões de construção (mm)		Propriedades da seção			
$h$	$b$	$t_w$	$t_f$	$r$	$A$	$h_i$	$d$	$I_y (cm^4)$	$W_{pl,y} (cm^3)$	$I_z (cm^4)$	$W_{pl,z} (cm^3)$
240	120,0	6,2	9,8	15	39,12	220,4	190,4	3892	366,6	283,6	73,92

Fonte: Kagho-Gouadjio, 2013.

Através do método dos deslocamentos, foi construído um algoritmo para obter o grau de confiabilidade da estrutura. A metodologia consiste em se criar uma rótula plástica nos nós, simulando uma falha na estrutura liberando a rotação. Para construir a árvore de falhas, foram adicionadas sucessivamente rótulas plásticas nos nós até a ruína da estrutura. Em cada etapa, a matriz de rigidez foi recalculada considerando as rótulas plásticas já adicionadas. Lembrando que tanto a resistência das peças quanto as cargas aplicadas são variáveis aleatórias do problema e são apresentadas na Tabela 5.

**Tabela 5** – Variáveis aleatórias apresentadas através de suas médias e coeficiente de variação.

Variáveis	Lei	Média ( $\mu$ )	Coeficiente de variação (CDV)
$M_A$	normal	101292 N.m	5%
$M_B$	normal	101292 N.m	5%
$M_C$	normal	101292 N.m	5%
$M_D$	normal	101292 N.m	5%
$M_E$	normal	101292 N.m	5%
$F_1$	normal	20000 N	30%
$F_2$	normal	40000 N	30%

Fonte: elaborada pelo autor.

#### 4.1.1 Probabilidade de falha inicial

Conforme demonstrado na metodologia proposta do capítulo anterior, o cálculo das probabilidades iniciais de falha com a estrutura intacta retorna o mesmo resultado se resolvido pelo FORM ou Monte Carlo. O primeiro passo para sua resolução é obter os coeficientes estruturais, tais que, cada um deles multiplicado pelo respectivo carregamento ( $F_1$  ou  $F_2$ ), resulte no momento fletor atuante nas seções A, B, C, D ou E. Esses coeficientes são mostrados na Tabela 6.

**Tabela 6** – Coeficientes de influência estrutural.

Seções	A	B	C	D	E
$F_1$	-1,5664	0,93841	0,0012	-0,93603	1,5592
$F_2$	0,49786	-0,99929	-1,5007	-0,99929	0,49786

Fonte: elaborada pelo autor.

Utilizando o método de Monte Carlo com  $10^8$  cenários sorteados, calcula-se a probabilidade de falha de cada seção. Nessa análise, foram considerados possíveis cenários de interseção de três seções simultaneamente, cenários com a interseção de duas seções simultaneamente e os cenários de falha isolada de cada seção, obtendo-se, ao todo, 25 probabilidades conforme mostrado na Tabela 7, Tabela 8 e Tabela 9.

**Tabela 7** – Quantidade de cenários e probabilidades de falha para interseção de três seções.

interseções	$P_{ABC}$	$P_{ABD}$	$P_{ABE}$	$P_{ACD}$	$P_{ACE}$	$P_{ADE}$	$P_{BCD}$	$P_{BCE}$	$P_{BDE}$	$P_{CDE}$
cenários	0	0	0	0	0	0	2	0	0	759
probabilidade	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	$2 \times 10^{-8}\%$	0,0	0,0	$7,59 \times 10^{-6}\%$

Fonte: elaborada pelo autor.

**Tabela 8** – Quantidade de cenários e probabilidades de falha para interseção de duas seções.

interseções	$P_{AB}$	$P_{AC}$	$P_{AD}$	$P_{AE}$	$P_{BC}$	$P_{BD}$	$P_{BE}$	$P_{CD}$	$P_{CE}$	$P_{DE}$
cenários	0	0	0	0	0	0	0	102.841	102	397
probabilidade	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	$1,03 \times 10^{-3}$	$1,02 \times 10^{-6}$	$3,97 \times 10^{-6}$

Fonte: elaborada pelo autor.

**Tabela 9** – Quantidade de cenários e probabilidades de falha das seções isoladas.

interseções	$p_A$	$p_B$	$p_C$	$p_D$	$p_E$
cenários	0	0	1.262.932	29.874	794
probabilidade	0,0	0,0	$1,26 \times 10^{-2}$	$2,99 \times 10^{-4}$	$7,94 \times 10^{-6}$

Fonte: elaborada pelo autor.

Foram encontradas diversas seções com probabilidade inicial de falha igual a 0. Esse resultado é fruto do grau de precisão adotado no método. Uma simulação de Monte Carlo com  $10^8$  observações registra, com precisão, ocorrências com a probabilidade de até  $10^{-6}$ , sendo que, eventualmente, pode-se obter probabilidades menores como aconteceu em  $p_{BCD}$ . Em geral, segundo Seck (2018) e conforme confirmado no estudo de convergência apresentado no Apêndice A, para se obter uma determinada probabilidade de falha são necessárias duas potências a mais que o módulo da potência da probabilidade de falha no número de simulações de Monte Carlo.

O interessante deste estudo de caso é que as probabilidades de falha são em geral pequenas, estando mais próximo de estruturas convencionais. Como o objetivo das análises de confiabilidade é definir o grau de segurança das construções, faz-se necessário adotar um valor limite a partir do qual uma estrutura é considerada segura. Nesse âmbito, o Eurocode (2002) traz um limite de segurança com probabilidade máxima de falha igual a  $7,2 \times 10^{-5}$  para o estado limite último. Dessa forma, pode-se limitar a verificação a probabilidades da ordem de  $10^{-6}$ , o que justifica a escolha de  $10^8$  simulações de Monte Carlo, já que todos os caminhos de ruína com probabilidade de falha de 0 representam probabilidade de falha inferior a  $10^{-6}$ . Ou seja, esses caminhos de falha podem ser descartados, considerando-se que a estrutura atende ao limite especificado pelo Eurocode (2002) e, portanto, podem ser considerados seguros, segundo essa norma.

Quanto ao índice de robustez dos caminhos com probabilidade de falha inicial de 0, caso essa informação seja necessária, o índice  $IR_7$  (equação 7) proposto por Kagho-Gouadjio (2013) não pode ser utilizado. Nesses casos, pode ser adotado um valor igual a 1 visto que a probabilidade de ocorrência é muito baixa, ou aplicar outro método de cálculo da robustez, como o  $IR_{16}$  (equação 16) apresentado por Agarwal et al. (2003) que não utiliza a análise da árvore de falhas completas, baseando-se na topologia da estrutura. Existe ainda uma terceira opção, que seria a de utilizar um número maior de simulações de Monte Carlo. No entanto,



devido à necessidade de armazenar todos os cenários sorteados, a demanda por memória RAM<sup>2</sup> do computador a ser utilizado seria relativamente alta no presente caso, o que poderia inviabilizar a análise com máquinas tradicionais. Neste trabalho, será adotada a primeira abordagem citada neste parágrafo, uma vez que o foco é a análise das árvores de falha.

Os resultados obtidos na análise da primeira etapa da árvore de falhas foram comparados com os trabalhos da literatura. Ressalta-se que Kagho-Gouadjio (2013) desenvolveu a primeira árvore de falhas completa com esse estudo de caso, calculando a probabilidade de falha para um elemento através do método FORM e repetindo o processo até o colapso global. Seck (2018), em contrapartida, fez um procedimento parecido, mas levando em conta, também, a interseção dos eventos conforme explicado no Capítulo 2.6 deste trabalho.

A comparação dos resultados pode ser vista na Tabela 10:

**Tabela 10** – Probabilidades de falha iniciais, comparação com bibliografia.

Seção	Kagho-Gouadjio (2013)	Seck (2018)	Presente trabalho
A	$1,08 \times 10^{-13}$	$9,60 \times 10^{-14}$	0
B	$8,50 \times 10^{-9}$	$4,98 \times 10^{-9}$	0
C	$1,39 \times 10^{-2}$	$1,27 \times 10^{-2}$	$1,26 \times 10^{-2}$
D	$1,36 \times 10^{-3}$	$2,99 \times 10^{-4}$	$2,99 \times 10^{-4}$
E	$2,02 \times 10^{-5}$	$1,49 \times 10^{-5}$	$7,94 \times 10^{-6}$

Fonte: elaborada pelo autor.

Pela Tabela 10, percebe-se uma diferença significativa entre os resultados de Kagho-Gouadjio (2013) e Seck (2018), onde a separação das probabilidades de interseção diminuiu a probabilidade de falha das seções isoladas. Ao se comparar os resultados do presente trabalho com os resultados de Seck (2018) encontra-se uma relação próxima. De fato Seck (2018) obteve a probabilidade de falha através do método FORM, enquanto o presente trabalho utilizou a simulação de Monte Carlo, com exceção da seção *E*.

Um estudo cuidadoso dos resultados da seção *E* pode revelar que a diferença se deu no método numérico recursivo aplicado por Seck (2018). No método desenvolvido pelo referido autor, primeiro calcula-se a probabilidade de falha do elemento; depois se obtém a probabilidade de falha de interseção de duas seções; então de três seções e, por último, de quatro se-

---

<sup>2</sup> Um vetor no ambiente Matlab® ocupa 4 bytes por elemento. Assim, um vetor com  $10^9$  elementos necessitaria de 4 gigabytes de memória de acesso aleatório (RAM).

ções. De maneira recursiva, portanto, subtrai-se a probabilidade de interseção de quatro seções da probabilidade de três seções e assim sucessivamente, até se obter a probabilidade da seção isolada como sendo a probabilidade da seção menos a probabilidade das interseções. Ao aplicar o método recursivo utilizado por Seck (2018) em alternativa ao resultado apresentado por ele próprio, com seus próprios resultados, chega-se a uma probabilidade de falha isolada para a seção  $E$  de  $p'_E = 7,57 \times 10^{-6}$ , próximo do resultado obtido no presente trabalho. Esses resultados podem ser vistos na Tabela 11, onde notação  $p'$  significa a falha isolada da seção, enquanto  $p$ , significa a falha da seção, contando as probabilidades de interseção.

**Tabela 11** – Resultados das probabilidades da primeira etapa de Seck (2018).

		Seção	Probabilidade			
		p <sub>E</sub>	1,94 x 10 <sup>-5</sup>			
		p' <sub>ABCE</sub>	p' <sub>ABDE</sub>	p' <sub>ACDE</sub>	p' <sub>BCDE</sub>	
Probabilidade		0	0	0	1,58 x 10 <sup>-12</sup>	
	p' <sub>ABE</sub>	p' <sub>ACE</sub>	p' <sub>ADE</sub>	p' <sub>BCE</sub>	p' <sub>BDE</sub>	p' <sub>CDE</sub>
Probabilidade	0	1,13 x 10 <sup>-26</sup>	2,42 x 10 <sup>-18</sup>	3,16 x 10 <sup>-13</sup>	3,16 x 10 <sup>-13</sup>	7,36 x 10 <sup>-6</sup>
		p' <sub>AE</sub>	p' <sub>BE</sub>	p' <sub>CE</sub>	p' <sub>DE</sub>	
	Probabilidade	5,61 x 10 <sup>-15</sup>	1,28 x 10 <sup>-12</sup>	9,53 x 10 <sup>-7</sup>	3,52 x 10 <sup>-6</sup>	
		Seção	Probabilidade			
		p' <sub>E</sub>	7,57 x 10 <sup>-6*</sup>			

\* valor originalmente de  $1,49 \times 10^{-5}$  corrigido conforme explicado anteriormente.

Fonte: Seck, 2018.

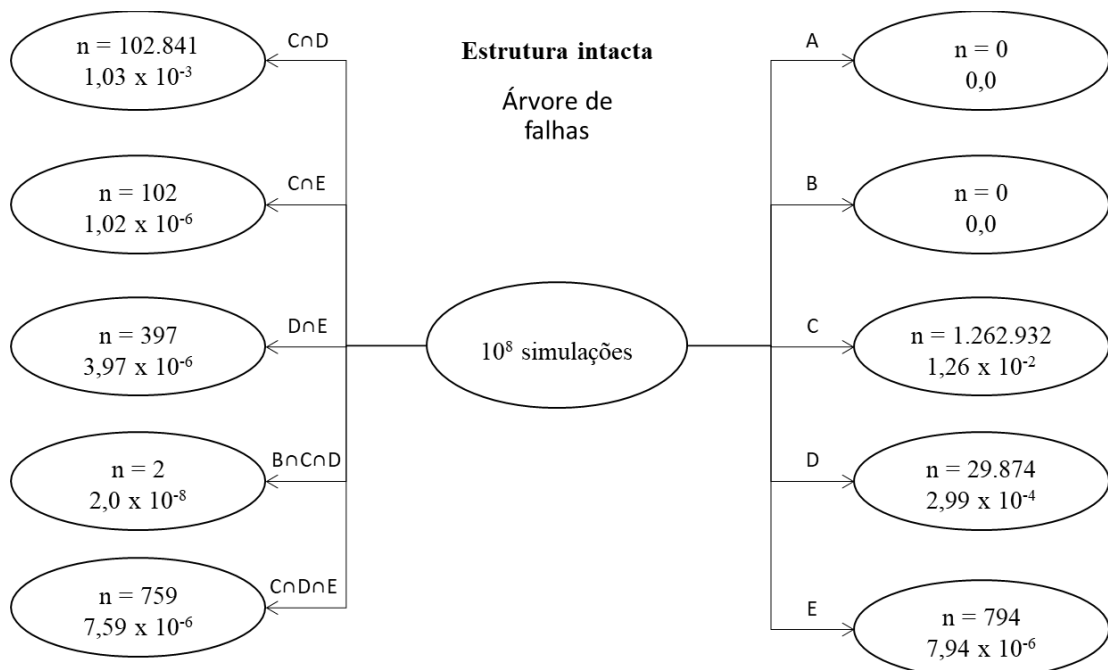
A Tabela 10, apresentada anteriormente, traz ainda probabilidades nulas para os eventos de falha nas seções  $A$  e  $B$ . Como pode ser constatado pelos resultados dos demais autores, isso era esperado, uma vez que suas probabilidades de falha são menores que  $10^{-6}$ .

#### 4.1.2 Árvore de falhas

Seguindo o procedimento descrito acima, pode-se traçar toda a árvore de falhas da estrutura a partir das falhas locais iniciais em cada seção. Na **Erro! Fonte de referência não encontrada.** são apresentados esquematicamente os resultados da análise do estado inicial da estrutura e, nas demais figuras, os ramos da árvore a partir do dano inicial em cada seção.

Ainda na **Erro! Fonte de referência não encontrada.**,  $n$  representa a quantidade de cenários de falha observados. As falhas das interseções que tiveram probabilidades de ocorrência nulas foram omitidas. Dentre as seções iniciais pode-se destacar a seção  $C$ , que apresenta um grande número de cenários de falha, bem como a seção  $D$ , que também se apresenta abaixo do limite de segurança do Eurocode (2002). No entanto, esses cenários ainda não representam falhas globais da estrutura. O Fluxograma 11 ao Fluxograma 17 apresentam os resultados da análise a partir de cada falha inicial com probabilidade diferente de zero.

**Fluxograma 11** – Árvore de falhas da etapa inicial.

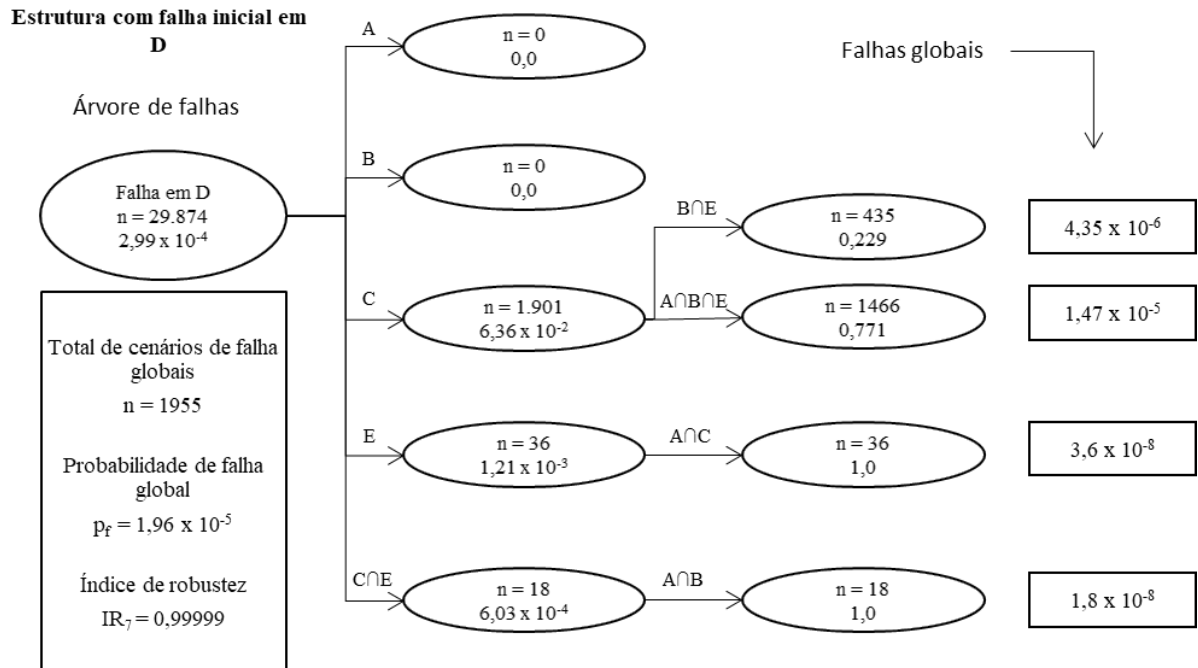


Fonte: elaborada pelo autor.

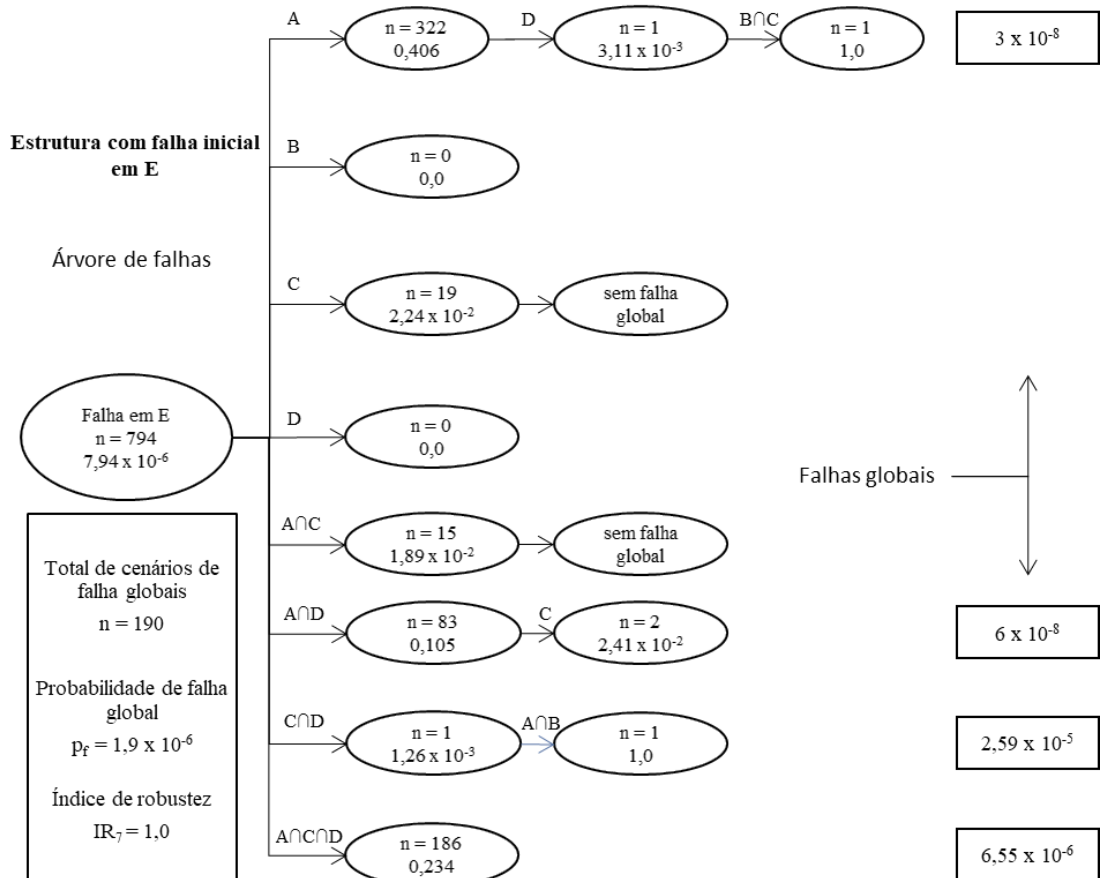
O total de cenários de falha global, independente do caminho, é de 159.956 e a probabilidade de falha global da estrutura  $p_f = 1,60 \times 10^{-3}$ . Essa estrutura, então, não atende ao limite de segurança estabelecido pelo Eurocode (2002) de  $p_f = 7,2 \times 10^{-5}$ .

Uma análise dos resultados pode afirmar que a maior probabilidade de falha global advém do caminho de falha iniciado pela falha na seção  $C$ , em especial o caminho  $C-D-B \cap E$  com  $p_f = 1,01 \times 10^{-3}$  e, posteriormente, os caminhos iniciados pela falha simultânea de  $C \cap D$ . Quanto aos índices de robustez, todos foram próximos de 1, o que caracteriza uma estrutura robusta. Do ponto de vista de projeto e otimização, a metodologia indica que uma melhoria na capacidade resistente das seções  $C$  e  $D$  poderia elevar a segurança da estrutura além dos limites normatizados propostos no Eurocode (2002).

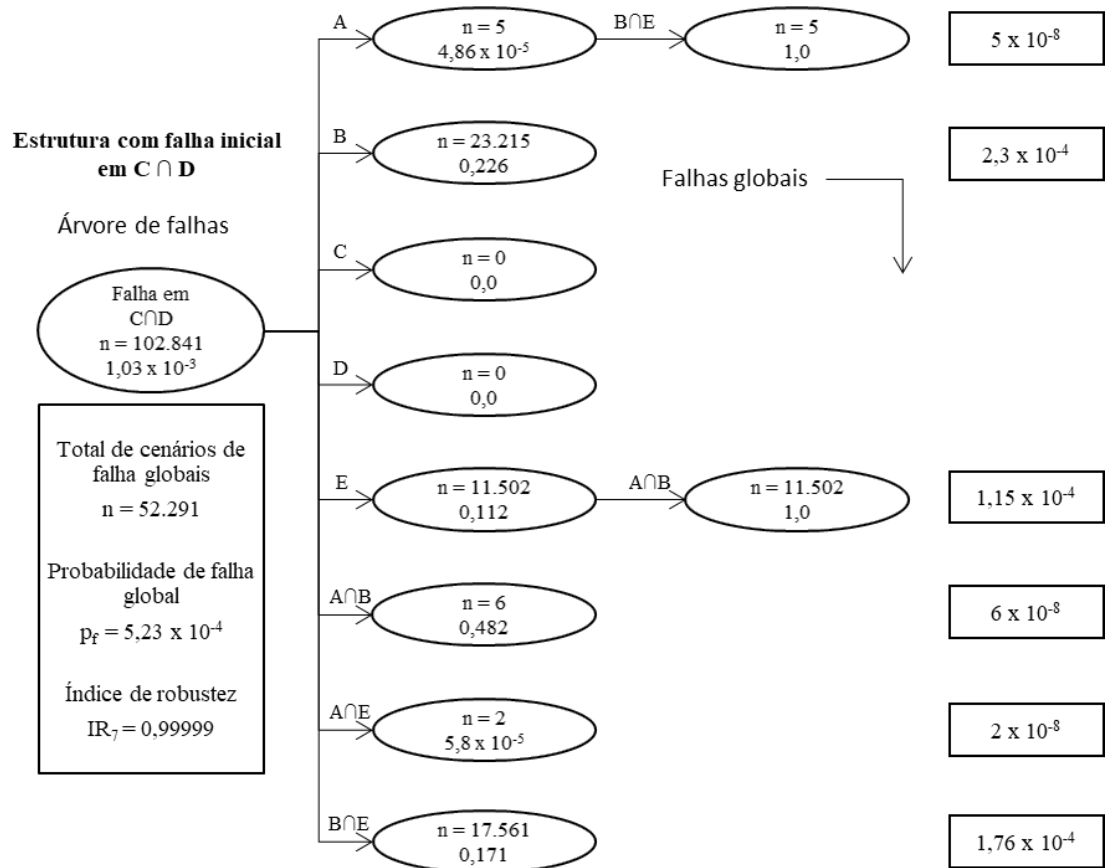


**Fluxograma 13** – Ramo da árvore de falhas partindo de falha inicial na seção *D*.

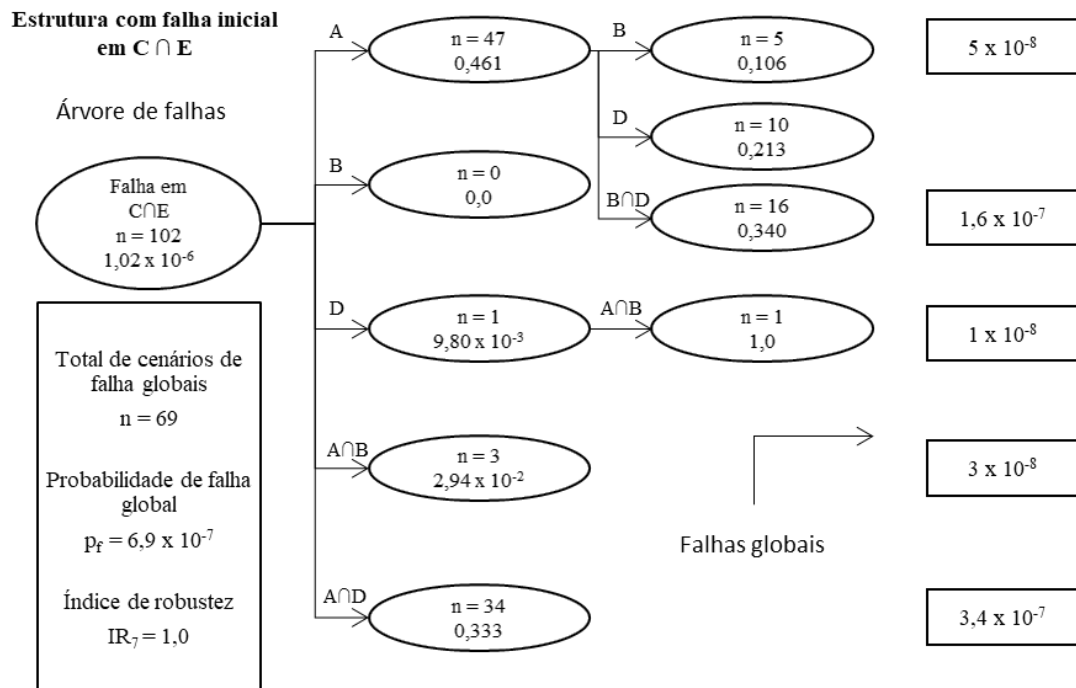
Fonte: elaborada pelo autor.

**Fluxograma 14** – Ramo da árvore de falhas partindo de falha inicial na seção *E*.

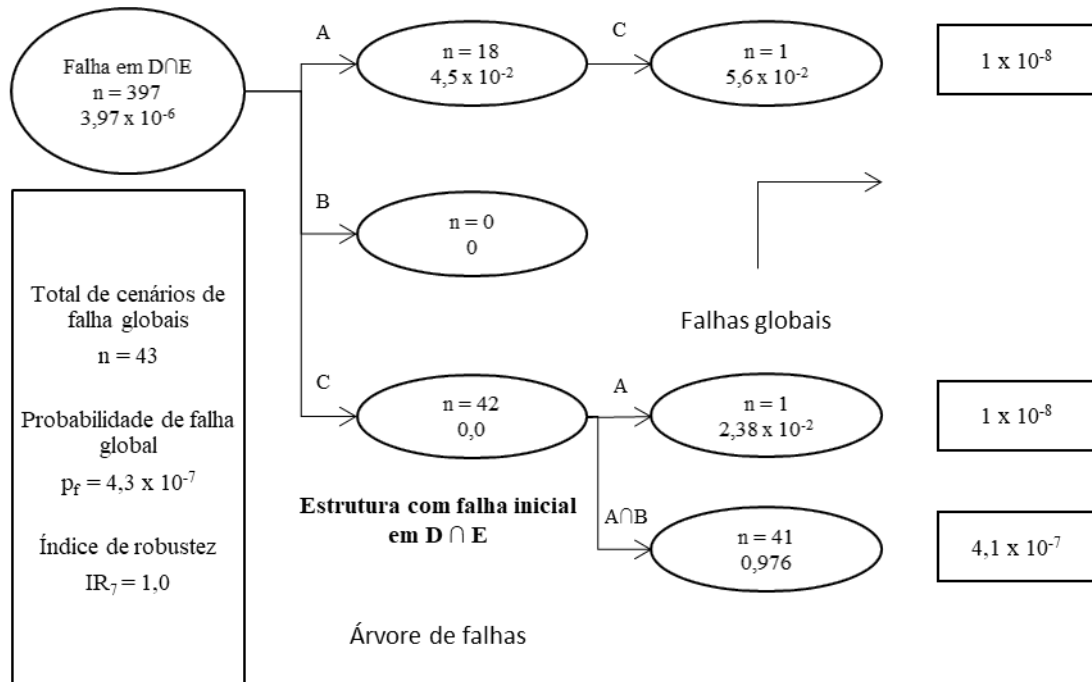
Fonte: elaborada pelo autor.

**Fluxograma 15** – Ramo da árvore de falhas partindo de falha inicial na seção  $C \cap D$ .

Fonte: elaborada pelo autor.

**Fluxograma 16** – Ramo da árvore de falhas partindo de falha inicial na seção  $C \cap E$ .

Fonte: elaborada pelo autor.

**Fluxograma 17** – Ramo da árvore de falhas partindo de falha inicial na seção  $D \cap E$ .

Fonte: elaborada pelo autor.

Kagho-Gouadjio (2013) desenvolveu o mesmo estudo de caso, sem consideração das probabilidades de interseção dos eventos de falha, utilizando os métodos de busca de caminhos críticos explicados no item 2.6.3. Por outro lado, Seck (2018) desenvolveu toda a árvore de falhas calculando os caminhos de interseção, mas focando nos resultados das seções isoladas. Dessa forma, o caminho crítico encontrado pelos dois autores citados e no presente trabalho é apresentado na Tabela 12.

**Tabela 12** – Comparação de resultados dos caminhos críticos obtidos com os resultados da literatura.

	<b>Kagho-Gouadjio (2013)</b>	<b>Seck (2018)</b>	<b>Presente trabalho</b>
<b>Caminho crítico</b>	C - D - B	C - B - D	C - D - B ∩ E
<b><math>P_{local}</math></b>	$1,39 \times 10^{-2}$	$1,27 \times 10^{-2}$	$1,26 \times 10^{-2}$
<b><math>P_{global}</math></b>	$6,16 \times 10^{-4}$	$1,74 \times 10^{-5}$	$1,01 \times 10^{-3}$
<b>IR</b>	0,96	0,9986	0,9999

Fonte: elaborada pelo autor.

De acordo com a Tabela 12, pode-se notar que as probabilidades de falha locais são próximas – o que era esperado. Quanto às probabilidades globais, os resultados de Seck (2018)

em comparação aos de Kagho-Gouadjio (2013) trouxeram uma estrutura mais segura, com probabilidade de falha menor. Esse resultado advém da separação das probabilidades de interseção adotadas por Seck (2018).

Os resultados da aplicação da abordagem proposta no Capítulo 3 compararam-se com os demais mostrando uma estrutura menos segura, com uma probabilidade de falha global muito maior que os demais. Isso se deve à justificativa demonstrada ao final do exemplo preliminar unidimensional, onde a probabilidade de falha de cada elemento é menor nos métodos dos outros autores devido à consideração de todos os cenários no denominador da equação 38 e, também, ao momento plástico adotado. Os autores pregressos consideraram o momento plástico como uma variável aleatória de distribuição normal com características iguais às do momento resistente da seção com falha na etapa anterior. O presente trabalho, no entanto, tem a vantagem de armazenar os momentos resistentes e forças aplicadas para todos os cenários sorteados, considerando o momento plástico de magnitude igual à resistência da seção, como um valor escalar. Em geral, há uma tendência de que se houver falha em uma determinada seção nas etapas anteriores, a resistência nessas seções seja menor que a média. Com isso, a contribuição do momento plástico fica consideravelmente menor, resultando em uma probabilidade de falha global maior e mais próxima de um caso real.

Por fim, quanto ao desempenho computacional, Kagho-Gouadjio (2013) aplicou métodos para concentrar a busca por um caminho crítico, chegando ao resultado final em 17 segundos. Entretanto, a análise de todos os caminhos não foi realizada devido ao longo tempo de processamento. Os avanços obtidos por Seck (2018) melhoraram a precisão, mas aumentaram o tempo de processamento. O algoritmo utilizado no desenvolvimento do presente trabalho levou aproximadamente 10 minutos, mas resolveu todos os caminhos da árvore de falhas.



## 5 CONCLUSÃO

No âmbito do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFJF, o presente trabalho é a primeira dissertação que aborda o tema, no qual foi apresentado um método probabilístico de confiabilidade estrutural aplicado a sistemas estruturais.

A abordagem proposta se diferencia dos autores pregressos no sentido de usar uma simulação de Monte Carlo para gerar cenários aleatórios, sorteando as variáveis do problema apenas no início do algoritmo. A metodologia foi apresentada a partir de um modelo simplificado de uma viga biengastada didática, e aplicada a um pórtico plano de referência da bibliografia. A probabilidade da falha global obtida em ambos os casos foi maior que os valores da bibliografia, trazendo resultados mais precisos e seguros.

Observou-se que o método proposto é vantajoso, no sentido em que foi possível confirmar a hipótese de paralelismo ou redundância entre os elementos de um mesmo caminho. De modo análogo, o método confirmou a hipótese de que os diferentes caminhos da árvore têm uma relação em série entre si, onde a ocorrência de qualquer um dos caminhos representa a falha da estrutura. O método também obteve um valor de probabilidade de falha global para toda a estrutura pela contagem de todos os cenários de falha, independente do caminho em que ela se dá. Todos os pontos positivos citados aqui não visíveis nos métodos de construção de árvores de falhas apresentados por outros autores. O tempo de processamento para resolução dos modelos propostos encontrou-se dentro de um limite viável, mas, infelizmente, não pode ser comparado com a bibliografia, devido às diferenças em cada abordagem.

Assim, este trabalho de dissertação constitui uma significativa contribuição na análise de robustez e vulnerabilidade estrutural em um ambiente probabilístico.

### 5.1 TRABALHOS FUTUROS

É claro que nem todos os problemas puderam ser resolvidos. Em especial, o próximo passo é a modelagem das ações acidentais e integração de tal abordagem nas normas vigentes. Como a abordagem proposta utiliza simulação de Monte Carlo, a adoção de qualquer lei ou modelo simulado para as ações se torna mais simples, sendo mais uma vantagem do método. Outro avanço poderia se dar no sentido de acoplar a consideração do aumento da probabilidade de falha global ao longo da vida útil das estruturas. E, além disso, os índices para quantificação de robustez existentes não consideram satisfatoriamente os casos em que a falha inicial

ocorre em mais de um elemento simultaneamente. Assim, resta propor ou adaptar um índice para consideração correta nesses casos.

## REFERÊNCIAS

- AGARWAL, J.; BLOCKLEY, D.; WOODMAN, N. Vulnerability of structural systems. **Structural Safety**, p. 263-286, 2003.
- ASCE 7-02. Minimum design loads for buildings and other structures. **American Society of Civil Engineers**, Reston, U.S.A, 2005.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 15575**: Desempenho de edificações habitacionais. Rio de Janeiro. ABNT, 2013.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto. Rio de Janeiro. ABNT, 2014.
- BAKER, J.; SCHUBERT, M.; FABER, M. On the assessment of robustness. **Structural Safety**, p. 253-267, 2008.
- BEAUCAIRE, P. Application des méthodes fiabilistes à l'analyse et à la synthèse des tolérances, PhD thesis. **Université Blaise Pascal et Institut Français de Mécanique Avancée**, Clermont-Ferrand, 2012.
- BIONDINI, F.; RESTELLI, S. Damage propagation and structural robustness. **Life-Cycle Civil Engineering**. **Taylor& Francis Group**, London, 2008.
- CHEN, M.; MATHUR, A.; REGO, V. Effect of testing techniques on software reliability estimates for a croatian sports hall. **Engineering Structures**, p. 3118-3124, 1995.
- CREMONA, C. **Structural performance**: Probability-based assessment. New Jersey: [s.n.], v. 1, 2011.
- FELIPE, T. R. C. Novo método para a avaliação do risco de colapso progressivo em edifícios de alvenaria estrutural. **Escola de Engenharia de São Carlos**, São Carlos, 2017.
- FRANGOPOL, D. M.; CURLEY, J. P. Effects of damage and redundancy on structural reliability. **ASCE Journal of Structural Engineering**, 1987.
- FU, G.; FRANGOPOL, D. M. Balancing weight, system reliability and redundancy in multiobjective optimization framework. **Structural Safety**, p. 165-175, 1990.
- GREIGN, G. L. An assessment of higher order bounds for structural reliability. **Structural safety**, 1992.
- HABERLAND, M. Progressive collapse and robustness. **Structural Analysis and Steel Structures Institute, PhD thesis**, 2007.
- HASOFER, A. M.; LIND, N. C. An exact and invariant first order reliability format. **ASCE, Journ. Eng. Mech. Div**, 1974.
- ISO 2394. General principles on reliability for structures. **International Standard**, 2015.

KAGHO-GOUADJIO, N. C. Étude de la vulnérabilité et de la robustesse des ouvrages. **Universidade de Paris**, Paris, 2013.

KEMP, A. A mixed flexibility approach for simplifying elastic and inelastic structural analysis of frames. **Constructional Steel Research, Elsevier**, p. 1297-1313, 2002.

LAND, A. H.; DOIG, A. G. An automatic method of solving discrete programming problems. **Econometrica**, Vol. 28, No 3, 1960.

LEMAIRE, M. Fiabilité des structures. **Lavoisier**, Paris, 2005.

LONGO, H. I. Análise da estrutura para avaliação do colapso progressivo. **Universidade Federal do Rio de Janeiro**, Rio de Janeiro, 2014.

MOHAMMADKHANI-SHALI, S. Contribution à l'étude de la redondance dans les ponts: analyses des mécanismes de défaillance par surfaces de réponse. **École Nationale des Ponts et Chaussées**, Paris, 2007.

MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. **Estatística aplicada e probabilidade para engenheiros, 3a edição**. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., v. 3, 2009.

MUROTOU, Y. et al. A new method for evaluating lower and upper bounds of failure probability in redundant truss structures. **Bulletin of University of Osaka Prefecture. Series A, Engineering and natural sciences**, Osaka, p. 79-91, 1979.

MUROTOU, Y; OKADA, H; NIWA, K; MIWA, S. A new method for evaluating lower and upper bonds of failure probability in redundant truss structures. **Bulletin of University of Osaka Prefecture. Séries A, Engineering and natural sciences**, 1979.

NAFDAY, A. M.; COROTIS, R.; COHORT, J. Failure mode identification for structural frames. **Structural Engineering, ASCE**, p. 1415-1432, 1987.

NBCC. **National Building Code of Canada**, 2015.

NOWAK, A. S.; COLLINS, K. R. **Reliability of Structures**. Michigan, U. S. A: Mcgraw-Hill Higher Education, v. 1, 2000.

OKADA, H.; MATSUZAKI, Y.; MUROTOU, Y. Safety margins for reliability analysis of frames structures. **Bulletin of University of Osaka Prefecture. Series A, Engineering and natural sciences**, Osaka, p. 155-163, 1984.

SECK, E. H. B. Contribution au développement d'outils analytiques et numériques pour quantifier et qualifier la robustesse des structures. **Universidade de Nanterre**, Paris, 2018.

SMITH, J. Structural robustness analysis and the fast fracture analogy. **IABSE, Structural Engineering International**, p. 118-123, 2007.

STAROSSEK, U. Progressiver kollap von bauwerken (Progressive collapse of structures). **Wiley-VCH**, Berlin, Germany, 2007.

STAROSSEK, U.; HABERLAND, M. Measures of structural robustness-requirements and applications. **ASCE SEI 2008 structures congress-crossing borders**, Vancouver. Canada, 2008.

TERADA, S.; TAKAHASHI, T. Failure-conditioned reliability index. **Journal of structural engineering**, p. 943-952, 1988.

THOFT-CHRISTENSEN, P.; MUROTSU, Y. **Application of structural systems reliability theory**, Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1986.

THOFT-CHRISTENSEN, P.; SORENSEN, J. D. Calculation of failure probabilities of ductile structures by the. **Institute of building technology and structural engineering B-unzipping method**, Aalborg University Centre, Aalborg, 1982.

WILDE, O. **O Retrato de Dorian Gray**. 1a Edição. ed. [S.l.]: Penguin, 2012.

ZIEMIAN, R.; MACGUIRE, W. Modified tangent modulus approach, a contribution to plastic hinge analysis. **Journal of Structural Engineering, ASCE**, p. 1301-1307, 2002.

## APÊNDICE A

Um estudo de convergência da simulação de Monte Carlo foi realizado de modo a se confirmar a afirmação de Seck (2018): para se obter uma determinada probabilidade de falha, são necessárias duas potências a mais que o módulo da potência da probabilidade de falha no número de simulações. Assim, este estudo teve por objetivo obter, por contagem, probabilidades de falha da ordem de  $10^{-6}$  para amostragem total de  $10^8$  cenários sorteados. Foi utilizado o modelo apresentado no Capítulo 4, no qual o algoritmo foi testado dez vezes apenas para a primeira iteração da árvore de falhas e os resultados comparados entre si, conforme mostra a Tabela 13.

**Tabela 13** – Tabela com resultados do número de observações com falha para dez testes realizados na primeira etapa da árvore de falhas do estudo de caso do Capítulo 4.

Seção	Número de observações										Média	Desvio-padrão	Coeficiente de variação
	Teste 1	Teste 2	Teste 3	Teste 4	Teste 5	Teste 6	Teste 7	Teste 8	Teste 9	Teste 10			
A	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-
B	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-
C	1259802	1263970	1261882	1262306	1261646	1259802	1263970	1259802	1262306	1261646	1261713,2	1559,37	0,12
D	29473	29783	29895	29545	29591	29473	29783	29473	29545	29591	29615,2	151,40	0,51
E	753	792	726	793	803	753	792	753	793	803	776,1	27,15	3,50
$A \cap B$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-
$A \cap C$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-
$A \cap D$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-
$A \cap E$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-
$B \cap C$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-
$B \cap D$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-
$B \cap E$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-
$C \cap D$	102342	102111	102210	101923	102768	102342	102111	102342	101923	102768	102284,0	298,99	0,29
$C \cap E$	96	136	116	99	101	96	136	96	99	101	107,6	16,06	14,93
$D \cap E$	366	380	390	356	342	366	380	366	356	342	364,4	15,97	4,38
$A \cap B \cap C$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-
$A \cap B \cap D$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-
$A \cap B \cap E$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-
$A \cap C \cap D$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-
$A \cap C \cap E$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-
$A \cap D \cap E$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-
$B \cap C \cap D$	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0,3	0,48	161,02
$B \cap C \cap E$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-
$B \cap D \cap E$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-
$C \cap D \cap E$	711	744	720	703	701	711	744	711	703	701	714,9	16,45	2,30

Fonte: elaborada pelo próprio autor.

O cenário que deve ser evitado é o de um determinado evento de falha ter grandes distorções de um teste para o outro. Por exemplo, para um determinado teste, encontra-se 700 observações de falha e, em outro teste, não se encontra nenhuma. Para a amostragem do exem-

plo estudado, 100 observações equivalem a uma probabilidade de ocorrência de  $10^{-6}$  - que é a probabilidade limite adotada nos estudos que deve sempre ser detectada com precisão.

Conforme demonstrado na Tabela 13, há a tendência de que para eventos com 100 observações em média ou mais, o desvio-padrão se encontra próximo a 16, ou seja, não há risco de o evento ser detectado em um teste e não ser detectado em outro, sendo as probabilidades de  $10^{-7}$  ou menores, as duvidosas. Isso ocorre na falha simultânea de  $B \cap C \cap D$ , na qual em alguns testes foi detectada uma observação de falha. No entanto, não é possível determinar seu valor, visto que seu coeficiente de variação está muito alto. No entanto, pode-se afirmar que é menor que  $10^{-6}$ . Logo, desprezível para o caso em estudo.

O estudo apresentado neste apêndice garante, portanto, para o caso estudado, a precisão na obtenção de probabilidades da ordem de  $10^{-6}$  com  $10^8$  observações nas simulações de Monte Carlo.

**APÊNDICE B**



Federal University of Juiz de Fora  
Faculty of Engineering  
Graduate Program in Civil Engineering

**A NEW METHODOLOGY FOR THE EVALUATION  
OF STRUCTURAL VULNERABILITY AND  
ROBUSTNESS**

**Aristides Pereira Orlandi**

Research Area: Structures and Materials

Research Line: Structural Mechanics

Advisor: Flávio de Souza Barbosa – Federal University of Juiz de Fora

Co-advisor: Alexandre Abrahão Cury – Federal University of Juiz de Fora

Juiz de Fora

2020

# **Abstract**

The design of structures with the adoption of normative safety coefficients is not always adequate to guarantee the stability of constructions, especially in cases where unforeseen actions lead to localized failures in supporting elements. As examples, one can mention the cases of the World Trade Center, in the United States, where airplane collisions caused the collapse of both towers, and the Ronan Point Building, in England, where an explosion of a gas cylinder caused the failure of an entire section of the building. Thus, the consideration of the random nature of loads is important to design a safe structure.

There are several methods of structural design that consider uncertainties in the construction's calculation and execution processes. The present work specifically focuses on the use of probabilistic techniques.

Probabilistic methods always admit a tiny probability of failure and often demand high computational efforts. In this sense, the current challenge is to develop a purely probabilistic structural analysis method with acceptable computational processing costs.

Hence, this dissertation is based on a probabilistic methodology that proposes a new strategy to evaluate the global probability of failure and its respective robustness index, considering different types of uncertainties. The proposed methodology begins with the construction of an event tree generating random scenarios through a Monte Carlo simulation. Two benchmark case studies are considered, yielding promising results with reasonable computational processing time.

**Keywords:** Structural reliability, structural robustness, progressive collapse, event tree, Monte Carlo simulation.

## List of Figures

<b>Figure 1</b> - $i$ and $j$ events, where the probability for event $j$ is computed twice.....	11
<b>Figure 2</b> - Fixed-fixed beam, considering $a = 1.0$ m and $b = 2.0$ m. ....	13
<b>Figure 3</b> - Diagram of bending moments for unit load without hinges in the structure...	15
<b>Figure 4</b> - Diagram of bending moments for unit load with a hinge in section A. ....	16
<b>Figure 5</b> - Event tree resulting from the proposed approach. ....	17
<b>Figure 6</b> – Fixed-fixed 2D frame with nodal forces $F_1$ and $F_2$ . ....	19
<b>Figure 7</b> - Cross-section of the IPE240 profile (Kagho-Gouadjio, 2013).....	19
<b>Figure 8</b> - Event tree of the initial stage. ....	23
<b>Figure 9</b> - Branch of the event tree starting from initial failure in section D. ....	23
<b>Figure 10</b> - Branch of the event tree starting from initial failure in section E.....	24
<b>Figure 11</b> - Branch of the event tree starting from initial failure in section $D \cap E$ . ....	25
<b>Figure 12</b> - Branch of the event tree starting from initial failure in section $C \cap D$ . ....	25
<b>Figure 13</b> - Branch of the event tree starting from initial failure in section $C \cap E$ . ....	24
<b>Figure 14</b> - Branch of the event tree starting from initial failure in section C. ....	26

## List of Tables

<b>Table 1</b> - Recommended minimum values of the $\beta$ reliability index. ....	12
<b>Table 2</b> - Random variables considered. ....	13
<b>Table 3</b> - Comparison of results with Seck (2018).....	14
<b>Table 4</b> - Random values drawn by a single scenario of the Monte Carlo technique.....	15
<b>Table 5</b> - Comparison of results only on the path started by failure in A. ....	17
<b>Table 6</b> – Geometrical characteristics of section IPE240 (Kagho-Gouadjio, 2013).....	20
<b>Table 7</b> - Random variables presented through their means and variation coefficient. ...	20
<b>Table 8</b> - Coefficients of structural influence. ....	20
<b>Table 9</b> - Number of scenarios and probabilities of failure for the intersection of three sections. ....	21
<b>Table 10</b> - Initial probabilities of failure, comparison with bibliography. ....	21
<b>Table 11</b> - Comparison between the critical paths obtained in this work with the ones in the literature.....	22

# Summary

1	Introduction .....	7
2	General concepts of structural reliability .....	8
2.1	Probability of failure of structural elements.....	8
2.1.1	Structural reliability characterization .....	8
2.1.2	Monte Carlo simulation .....	9
2.2	Probability of failure of structural systems .....	9
2.2.1	Serial systems .....	10
2.2.2	Parallel systems .....	10
2.2.3	Probability of failure of intersection events .....	10
2.3	Quantification of robustness.....	11
2.4	Normative principles for structural reliability.....	12
2.5	Progressive Collapse .....	12
3	Case study: fixed-fixed beam.....	12
3.1	Proposed approach.....	15
4	Case study: fixed-fixed frame .....	19
4.1.1	Probability of initial failure.....	20
4.1.2	Event tree .....	22
5	Final remarks and future works .....	27
	REFERENCES .....	28
	Appendix A .....	30

# 1 Introduction

Within the practice of construction engineering, from its conception to execution and use, there are uncertainties related to all its stages. In ancient times, uncertainties were addressed through empiricism, thus generally leading to oversized structures. However, most of these issues have been solved with scientific evolution, through optimized designs that enhanced performance. As a result, structures are now designed for the expected loads, yielding tighter safety margins. In such cases, even if the uncertainties are relatively small, slightly more significant variations in the considered design could cause structural collapse. The case of the Tacoma Narrows Bridge exemplifies this issue since it completely collapsed in 1940 due to an unforeseen dynamic excitation.

An approach often adopted relies on employing partial safety coefficients applied to the loads in the structure and to the strengths of the materials, yielding a minimum safety margin to tackle the uncertainties. This approach is often referred to as semi-probabilistic. Several undesirable events have occurred over time, showing that such a strategy is not always adequate. As an example, one can mention the case of the Ronan Point tower in London that collapsed due to the explosion of a gas cylinder in 1968, and the collapse of the World Trade Center in 2001, due to a series of airplane collisions.

Among the different strategies for addressing uncertainties, the probabilistic structural reliability methods stand out. In this type of approach, uncertainties are treated as random variables using concepts of Statistics. Thus, a structural reliability index can be calculated considering the acting loads, while assuming that there is always a probability of failure. Several works in the literature have addressed this topic over the last years. Kagho-Gouadjio (2013) proposed the evaluation of an event tree in which all the structure's elements were rationally aligned, forming a branched system, in order to assess the possible paths of collapse. Recently, Seck (2018) refined that methodology by considering the intersection of failure events.

The present work proposes to develop a new approach to construct a complete event tree, based on purely probabilistic analysis and with an acceptable computational cost. In addition, the concept of robustness defined by Starossek (2007) is revised with the proposal of a new methodology to evaluate the robustness index – and their respective probability of failure – for structural systems. This task is accomplished through Monte Carlo simulations using algorithms developed in Matlab®. To assess the proposed approach's efficiency and to

introduce it in a didactic way, a simple example of a fixed-fixed beam, also evaluated by Seck (2018), is initially presented. Then, further comparisons between the results achieved by the present work and those obtained by Seck (2018) and Kagho-Gouadjio (2013) are presented, using a reference case of a fixed-fixed frame.

## **2 General concepts of structural reliability**

### **2.1 Probability of failure of structural elements**

Several reliability studies have been developed in recent decades to assess structural safety. Authors such as Land and Doig (1960), Hasofer and Lind (1974), Thoft-Christensen and Sorensen (1982), Thoft-Christensen and Murotsu (1986), Nowak and Collins (2000), and Montgomery and Runger (2009) contributed with tools or detailed reviews of structural reliability methods.

As Seck (2018) points out, a reliability study allows calculating the probabilities of a failure mode in a collapse mechanism after the occurrence of an unpredictable event. This process goes through the following steps:

- 1) select the random variables that integrate the project's uncertainties;
- 2) define a global dysfunction or failure mode;
- 3) calculate the reliability index;
- 4) calculate the probabilities of failure.

#### **2.1.1 Structural reliability characterization**

According to ISO 2394 (2015), structural reliability represents the ability of a structure or structural element to fulfill specified requirements during its designed lifespan. It is usually expressed in terms of probability and encompasses the concepts of safety in-service operation and durability.

The assessment of an overall building dysfunction may be estimated by the probability of failure, which can be assessed from the reliability index. Within the structural reliability approach, many methods have been used since the early 1970s (HASOFER and LIND, 1974). These methods can be divided into three levels (SECK, 2018):

- Level I is based on semi-probabilistic methods, such as the partial safety coefficients method adopted by current standards;

- Level II represents numerical methods such as FORM (first-order reliability method) and SORM (second-order reliability method). Both methods are based on obtaining a reliability index and then calculating the probability of failure of an element using first and second-order derivatives, respectively;
- Level III is represented by observational methods, such as Monte Carlo simulations. These are based on the generation of pseudo-random scenarios and by the random generation of variables, testing each scenario using a limit-state equation. The probability of failure is then obtained by dividing the number of observations that do not achieve equilibrium over the total number of observations. The results of these simulations are generally considered as a reference for the other methods, being more accurate if one has a enough observations (LEMAIRE, 2005).

### **2.1.2 Monte Carlo simulation**

Simulation methods have evolved along with the improvement of computer's processing power. The Monte Carlo simulation principle is based on making pseudo-random draws of the design variables and testing them in the limit-state equation. From a simple count, the probability of failure is obtained (SECK, 2018).

Monte Carlo simulation is a generic method that can be easily implemented without needing specific mathematical requirements. However, it is computationally expensive, as it requires many observations to achieve convergence. Particular attention must be paid to the possibility of repetitions in the drawing of variables, as it could bias the calculated probabilities. In practice, the Monte Carlo method can use any set of values as inputs for possible scenarios, including data from real tests or mathematical models that represent known distributions for the variables under study.

## **2.2 Probability of failure of structural systems**

Most constructions consist of interconnected component systems and their functioning depends on the interaction between them (NOWAK AND COLLINS, 2000). There are two idealized cases of interaction between components to build systems: serial systems, in which the failure of one member leads to the failure of the entire system, and parallel systems, in which all members must fail before the failure of the system occurs. In fact, most structures are defined by a combination of these two cases.



### 2.2.1 Serial systems

A typical example of a serial system are the links of a chain. The chain is as strong as its weakest link. The probability of failure of this type of system can be calculated using the following equations:

$$P_f = 1 - [1 - P(R_1 \leq F_1)][1 - P(R_2 \leq F_2)] \dots [1 - P(R_n \leq F_n)], \quad (1)$$

$$P_f = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - P_{fi}]. \quad (2)$$

In Equations 1 and 2,  $P_f$  stands for the probability of failure of the system and  $P_{fi}$  refers to the probability of failure of the  $i^{\text{th}}$  element.  $R_i$  and  $F_i$  are, respectively, the resistance and the action applied to the  $i^{\text{th}}$  element.

### 2.2.2 Parallel systems

Parallel systems have redundancy. Thus, a system failure occurs only if all elements fail. A cable composed of several strands of wire exemplifies this case. The probability of failure is obtained by directly multiplying the probability of failure of all elements in parallel, as shown in Equations 3 and 4.

$$P_f = P[(R_1 < F_1) \cap (R_2 < F_2) \cap \dots \cap (R_n < F_n)], \quad (3)$$

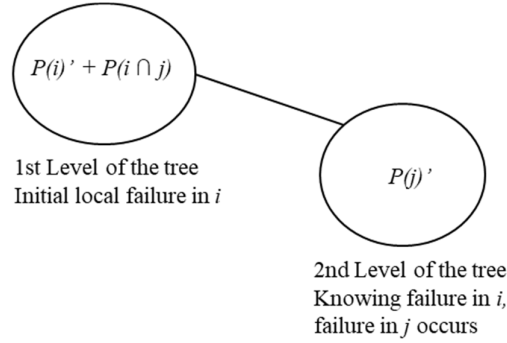
$$P_f = \prod_{i=1}^n [P_{fi}]. \quad (4)$$

### 2.2.3 Probability of failure of intersection events

Seck (2018) pointed out that when calculating the event tree, several scenarios may intersect, leading to the following possibilities: all elements fail simultaneously; only a few elements fail simultaneously; a single element fail; no element fails. By ignoring the intersections, one considers an element's failure several times, thus leading to a higher probability of global failure, as shown in Figure 1.

In order to evaluate the probability of failure of several simultaneous events using the FORM method, the integration of normal multivariate distributions is usually required. According to Greign (1992), this calculation becomes computationally unfeasible if there exists a large number of events in an intersection. A numerical method to estimate this integration was developed by Terada and Takahashi (1988), which consists in approximating the probability of failure of an intersection by the product of one-dimensional integrals.

**Figure 1** -  $i$  and  $j$  events, where the probability for event  $j$  is computed twice.



### 2.3 Quantification of robustness

The concept of robustness comes from the characteristic of “robust”. According to Michaelis dictionary, robust is an adjective that means “well built; that supports weight; that is resistant”. Several authors such as Haberland (2007), Starossek (2007), Kagho-Gouadjio (2013), and Seck (2018) have similar definitions about the concept of structural robustness. It can be said that robustness is defined by the proportionality of the consequences of structural damage to its cause. Also, according to ISO 2394 - General Principles of Reliability for Structures (2015, p. 5), structural robustness can be defined as:

“The ability of a structure to withstand adverse and unforeseen events (like fire, explosion, impact) or consequences of human errors without being damaged to an extent disproportionate to the original cause.”

Authors such as Frangopol and Curley (1987), Fu and Frangopol (1990), Agarwal et al. (2003), Mohammadkhani-shali (2007), Haberland (2007), Biondini and Restelli (2008) and Kagho-Gouadjio (2013) developed probabilistic methods to obtain an index to assess robustness. The present work uses the formulation presented by Kagho-Gouadjio (2013) that allows comparing the local risk to the global risk, expressed in Equation 5:

$$IR = 1 - \frac{P_{global}}{P_{local}}, \quad (5)$$

where,  $IR$  represents the robustness index,  $P_{global}$  represents the global probability of failure of a path and  $P_{local}$  is the probability of failure of the first element of that path. This approach has the advantage of being easily applied and its result can be simply compared between different models. The index  $IR$  compares the probability of local failure with the probability of global failure, ranging from 0 to 1, where a result equal to 0 represents a non-robust structure, and a result equal to 1 represents an infinitely robust structure.

## 2.4 Normative principles for structural reliability

Currently, Brazilian and international standards design structures using deterministic or semi-probabilistic methods. However, concepts of structural reliability are being gradually incorporated into their texts, albeit only qualitatively in some cases. Eurocode EN1990 (2002) is the standard that shows the highest evolution in terms of structural reliability. It differentiates structures into three categories, dividing them according to the consequences in an event of failure. These outcomes are translated in terms of loss of human life, material, and environmental damage. Minimum values are defined considering the lifespan of each structure. These values are presented in Table 1. It is also possible to define a relationship between the reliability index and the probability of failure, where  $\beta = 3,8$  represents a probability of failure of  $7,2 \times 10^{-5}$ .

**Table 1** - Recommended minimum values of the  $\beta$  reliability index (EUROCODE, 2002).

Reliability class	Minimum values for $\beta$	
	1 year life span	50 years life span
RC3	5,2	4,3
RC2	4,7	3,8
RC1	4,2	3,3

## 2.5 Progressive Collapse

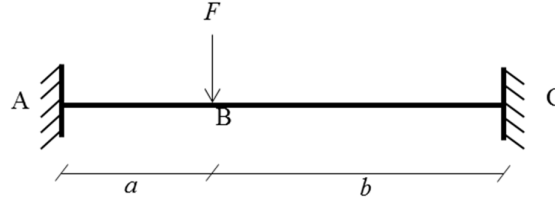
In structural system analysis, the different elements can be considered in parallel or in series, depending on the presence of structural redundancy or not, respectively. However, the temporal order in which the failure of a system element occurs is also significant. Thus, it is essential to study the concept of progressive collapse where different elements of a system may fail in chronological order or simultaneously. In the latter case, it is called intersection events, as pointed out by Seck (2018).

## 3 Case study: fixed-fixed beam

The present work can be considered as a continuation of Seck's (2018) work. Thus, a one-dimensional case study developed by that author was initially considered to present the central aspect of the proposed methodology. The objective of this study is to create an event tree to obtain the global probabilities of failure and the robustness indexes. The model is a 3 meters long fixed-fixed beam subjected to a concentrated force  $F$  applied at  $1/3$  of the span.

The considered failure mode is the formation of a plastic hinge due to the bending moments in sections A, B, and C. The structural scheme is depicted in Figure 2.

**Figure 2** - Fixed-fixed beam, considering  $a = 1.0$  m and  $b = 2.0$  m.



The applied force  $F$  and the resistant bending moment of each section are random variables with normal (Gaussian) distribution, defined by their means and standard deviations (see Table 2).

**Table 2** - Random variables considered.

Random variables			
Variables	Distribution	Mean ( $\mu$ )	Standard deviation ( $\sigma$ )
$MrA$	gaussian	1.600 Nm	500 Nm
$MrB$	gaussian	1.600 Nm	500 Nm
$MrC$	gaussian	1.600 Nm	500 Nm
$F$	gaussian	2.800 N	1.000 N

Seck (2018) traced all possible paths of structural failure by adding plastic hinges on nodes A, B, and C to create an event tree. Seck's results were determined by using FORM method to obtain probabilities of failure and validating only the initial local failures using a Monte Carlo model.

The event tree was divided into three levels. At the first level, the initial local probabilities of failure were calculated. In the second level, the local probabilities of failure considering one failed section were evaluated. Finally, in the third level, local probabilities of failure were calculated with two failed sections. The failure in the three nodes leads to an unstable configuration (collapse).

When analyzing Seck's (2018) model, for each possible path a global probability and a robustness index are calculated. These values are obtained considering several local failures aligned in parallel, demanding that all local failures in a path occur to achieve global failure. The different paths are organized in series, in which any local failure leads to the system's collapse. These initial case study results were reproduced entirely in the present work using

the FORM method and Monte Carlo simulations, as shown in Table 3. Small differences between the results can be attributed to rounding imprecisions.

**Table 3** - Comparison of results with Seck (2018).

Initial Event	Seck (2018)	FORM	Monte Carlo
$A \cap B \cap C$	0,004	0,0045	0,0048
$(A \cap B)'$	0,044	0,0450	0,0444
$(A \cap C)'$	0,014	0,0150	0,0145
$(B \cap C)'$	0,002	0,0024	0,0021
$A'$	0,233	0,2340	0,2337
$B'$	0,041	0,0410	0,0412
$C'$	0,015	0,0150	0,0155

Complete Paths	Seck (2018)	FORM	Monte Carlo
A - B - C	0,051	0,0510	0,0510
A - C - B	0,015	0,0150	0,0150
A - B $\cap$ C	0,045	0,0450	0,0450
B - A - C	0,031	0,0310	0,0310
B - C - A	$6,5 \times 10^{-5}$	$2,5 \times 10^{-4}$	$3,5 \times 10^{-6}$
B - A $\cap$ C	0,001	0,0010	0,0150
C - A - B	0,003	0,0030	0,0039
C - B - A	$3,1 \times 10^{-4}$	$2 \times 10^{-4}$	$3,0 \times 10^{-4}$
C - A $\cap$ B	0,001	0,0010	0,0011
A $\cap$ B $\cap$ C	0,004	0,0045	0,0430
A $\cap$ B - C	0,043	0,0440	0,0043
A $\cap$ C - B	0,009	0,0093	0,0091
B $\cap$ C - A	0,001	0,0021	0,0018

It is noteworthy that Seck (2018) has chosen the random variables respecting the typical coefficient of variation (CoV) of 30% (standard deviation equal to 30% of the mean value). Thus, for the simulation of  $10^8$  scenarios, the resistance variables were found with negative values for 68.610 cases. From an engineering's perspective, these results are equivalent to 0,07% of the entire sample, becoming significant when compared to the global probabilities of failure of some paths. If a CoV of 20% had been adopted, the number of negative resistance scenarios would drop to 28 in  $10^8$  scenarios, becoming negligible in the analysis. Therefore, although the present example is didactic, the importance of knowing the random variables and adopting calibrated parameters is crucial.

In order to reproduce Seck's results, Monte Carlo simulations were applied as follows:

- 1) A set of random data are generated for the first level of the tree;

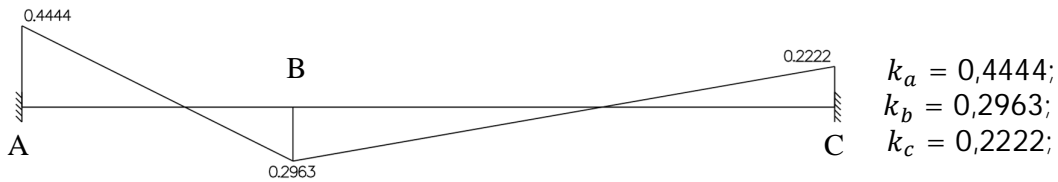
2) For the second to the last level, the same logic is applied: new values are generated for the random variables, and the ones from the previous levels are discarded. Then, the global probabilities of failure and robustness index are calculated for each path.

Practically identical results were achieved using the FORM method, which approximates the probabilities of failure with less computational cost than Monte Carlo. Both strategies, as applied by Seck's (2018), lead to structural analysis imprecisions that may be detected by using a slightly different Monte Carlo simulation as will be explained in the next section.

### 3.1 Proposed approach

Initially, the bending moments are calculated due to a unitary force and considering the event tree without any plastic hinge. The results obtained are considered as structural coefficients that will be later multiplied by the random variables, presented in Figure 3.

**Figure 3** - Diagram of bending moments for unit load without hinges in the structure.



Then, let us suppose, that Monte Carlo simulations draw the values presented in Table 4 for the involved random variables.

**Table 4** - Random values drawn by a single scenario of the Monte Carlo technique.

Variables	Values
$F$	3000 N
$MR_a$	1.600 kN.m
$MR_b$	1.500 kN.m
$MR_c$	1.820 kN.m

Thus, the bending moments acting in sections A, B, and C due to the force  $F$  are, respectively:

$$F_a = 3.000 \times 0,4444 = 1333,2 \text{ kN.m} < MR_a ,$$

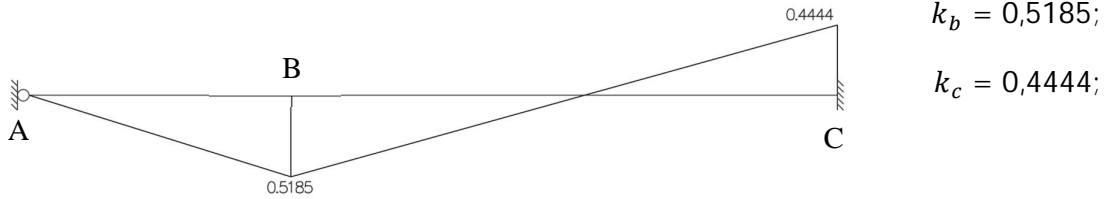
$$F_b = 3.000 \times 0,2963 = 888,9 \text{ kN.m} < MR_b ,$$

$$F_c = 3.000 \times 0,2222 = 666,6 \text{ kN.m} < MR_c .$$

It is noted that the proposed scenario does not cause failure in any of the sections.

At this point, let us consider that level 2 of the event tree is calculated with a plastic hinge inserted in section A. Assuming that the algorithm randomly selected the same values proposed for the first hypothetical level presented in Table 4, the new structural coefficients for initial failure in A would be those presented in Figure 4.

**Figure 4** - Diagram of bending moments for unit load with a hinge in section A.



This situation leads to the following bending moments acting in sections B and C due to the force  $F$ :

$$F_b = 3.000 \times 0,5185 = 1.555,5 \text{ kN.m} > MR_b ,$$

$$F_c = 3.000 \times 0,4444 = 1.333,2 \text{ kN.m} < MR_c .$$

In this case, section B fails, but section C does not. The problem with this example is that it considers an impossible scenario where section A would not have failed at level. Consequently, level 2 could not have been reached. In other words, it is not an achievable global failure scenario. Similar scenarios, even if they do not present failure in later stages, would be equally unfavorable to the analysis since they would count in the total number of analyzed scenarios, changing the probability of local failure of each section.

The proposed approach assembles the event tree by calculating local probabilities of failure at a given level, but only considering the scenarios that caused ruin in the previous steps. This strategy has the advantage of running the Monte Carlo algorithm only once, which significantly reduces the processing time. Likewise, the robustness index is now calculated only once for each initial local failure, instead of once for each path, seeking to agree with the robustness definitions in the literature. The results achieved for the complete tree with the proposed approach are presented in Figure 5.

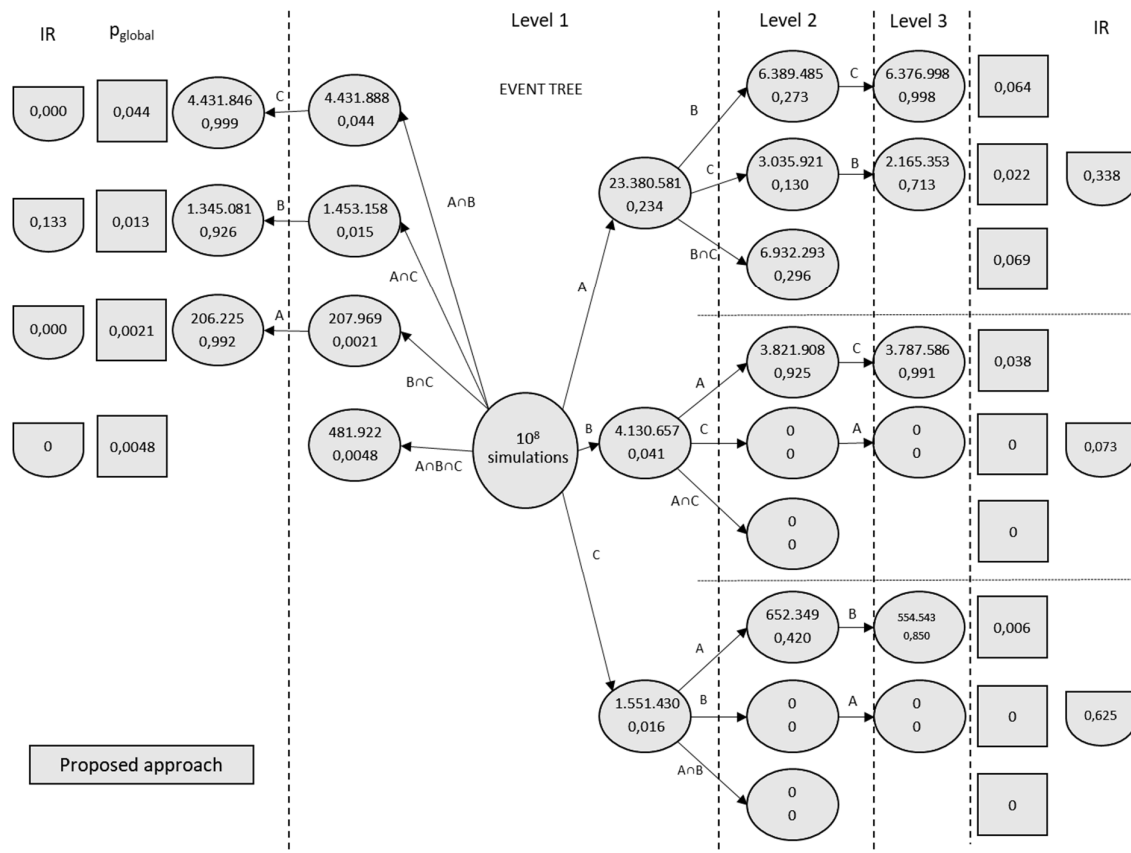
It is noted that the probabilities of local failure at level 1 are equal to those obtained by Seck (2018). These results are expected since the FORM method accurately approximates the probability of local failure. However, there is a significant difference in the results for the rest

of the tree, as shown in Table 5. Such divergences arise from the exclusion of the unfeasible scenarios by applying the proposed Monte Carlo approach.

**Table 5** - Comparison of results only on the path started by failure in A.

Event	Probability	
	Seck (2018)	Present work
Failure in A	0,233	0,234
Failure in A > B	0,224	0,273
Falha in A > B > C	0,973	0,998
Global failure	0,051	0,064

**Figure 5** - Event tree resulting from the proposed approach.



The achieved global probabilities of failure are higher than those obtained by Seck (2018). These results are justified and based on the following statements adopted by Seck (2018):

1) The probability of failure of each element after the first level of the event tree was calculated considering all scenarios as possible scenarios, including unachievable ones;



2) The global probabilities of failure were calculated by the product of each element's probability of failure in the path, accepting the relationship of parallelism or redundancy between the elements of the same path. In that way, the imprecision described in the previous item was propagated to the global failure.

The present methodology calculates the probability of failure of each element, considering only the scenarios that cause ruin in the previous steps. Consequently, fewer failure scenarios for each path are achieved, as well as the total of possible scenarios. Besides, the probability of failure is calculated by dividing the number of failure scenarios by the total number of analyzed scenarios. In this case, the number of excluded scenarios is much higher than the amount of eliminated failure scenarios, leading to a higher probability of failure.

Equations 6 show the global probability used by the previous authors. In contrast, Equations 7 present the proposed methodology, based on counting, where  $c_i$  represents the failure scenarios found,  $n$  the total of tested scenarios,  $c_{i-1}$  the total failure scenarios from the previous step, and  $P_{element}$  the probability of failure of each element.

$$P_{element} = \frac{c_i}{n} \quad P_{global} = P_1 \times P_2 \times \dots \times P_i \quad (6)$$

$$P_{element} = \frac{c_i}{c_{i-1}} \quad P_{global} = \frac{c_3}{n} \quad (7)$$

By analyzing these equations, one observes that even though  $c_i$  is higher in Equations 6,  $n$  is still much more significant than  $c_{i-1}$ , leading to a lower probability of element failure than those achieved in the present work. As the previous authors calculate the probability of global failure by multiplying the probability of each element, the result ends up being smaller than expected, justifying the larger values found in the present work.

As a result of the proposed approach, the global probability of failure can be obtained exactly as the previous authors, i.e., multiplying the probabilities of each element from a path. The same global probability of failure can also be obtained as taking the number of failure scenarios on the last level of the tree divided by the total number of scenarios from the first level. This result confirms the hypothesis of parallelism between events on the same path and, consequently, the global probability of failure obtained in the proposed methodology.

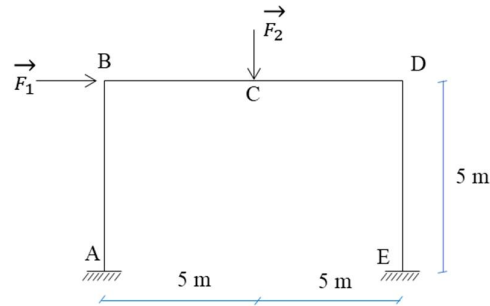
Another important conclusion is that based on the proposed method, it is possible to count all scenarios in all paths that lead to global failure. Thus, the probability that the structure will collapse is obtained regardless of the path that it will occur. In this example, the structure's probability of failure is 26.3% (26.281.847 scenarios in a sample of  $10^8$ ). The same

result can be obtained when considering that the different paths are aligned in series using Equation 2 of section 2.2.1. Thus, also confirming the theoretical hypothesis that the different paths are aligned in series.

## 4 Case study: fixed-fixed frame

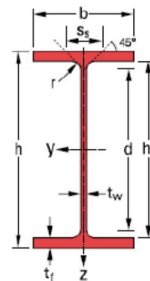
This model is based on a fixed-fixed 2D frame (10 meters long and 5 meters tall) subject to two forces:  $F_1$  and  $F_2$ , as shown in Figure 6. It is assumed that the frame's elements have perfect elastoplastic behavior and the failure mode considered is the formation of plastic hinges. This is a benchmark example that has already been addressed by Thoft-Christensen and Murotsu (1986), Nafday et al. (1987), Chen et al. (1995), Kemp (2002), Ziemian and MacGuire (2002), Kagho-Gouadjio (2013) and Seck (2018).

**Figure 6** – Fixed-fixed 2D frame with nodal forces  $F_1$  and  $F_2$ .



For each bar, the characteristics of a steel beam were adopted: IPE240 profile with Young's modulus ( $E$ ) and yielding stress ( $\sigma_e$ ) respectively equal to 210 GPa and 276 MPa. The forces  $F_1$  and  $F_2$ , and the resistant bending moments  $M_{si}$  at each node are considered random variables with normal distribution. The cross-section is shown in Figure 7 and its geometric properties in Table 6.

**Figure 7** - Cross-section of the IPE240 profile (Kagho-Gouadjio, 2013).



**Table 6** – Geometrical characteristics of section IPE240 (KAGHO-GOUADJIO, 2013).

Dimensions (mm)					Section (cm <sup>2</sup> )	Construction dimensions (mm)		Section properties			
$h$	$b$	$t_w$	$t_f$	$r$	$A$	$h_i$	$d$	$I_y$ (cm <sup>4</sup> )	$W_{pl,y}$ (cm <sup>3</sup> )	$I_z$ (cm <sup>4</sup> )	$W_{pl,z}$ (cm <sup>3</sup> )
240	120,0	6,2	9,8	15	39,12	220,4	190,4	3892	366,6	283,6	73,92

The analysis follows the same procedure explained in section 3. The only difference is the consideration of a virtual plastic moment in the last failed section. Resistance and applied loads are random variables in this study and are presented in Table 7.

**Table 7** - Random variables presented through their means and variation coefficient.

Variables	Distribution	Mean ( $\mu$ )	Coefficient of variation (CoV)
$M_A$	gaussian	101292 N.m	5%
$M_B$	gaussian	101292 N.m	5%
$M_C$	gaussian	101292 N.m	5%
$M_D$	gaussian	101292 N.m	5%
$M_E$	gaussian	101292 N.m	5%
$F_1$	gaussian	20000 N	30%
$F_2$	gaussian	40000 N	30%

#### 4.1.1 Probability of initial failure

The first step towards the problem's resolution is to obtain the structural coefficients where each of them multiplied by the respective load ( $F_1$  or  $F_2$ ) results in the bending moments acting in sections A, B, C, D or E, respectively. These coefficients are shown in Table 8.

**Table 8** - Coefficients of structural influence.

Sections	A	B	C	D	E
$F_1$	-1,5664	0,93841	0,0012	-0,93603	1,5592
$F_2$	0,49786	-0,99929	-1,5007	-0,99929	0,49786

The probability of failure of each section is calculated using the Monte Carlo method with  $10^8$  scenarios. In this analysis, possible intersection scenarios of up to three sections were simultaneously considered, obtaining a total of 25 probabilities, as shown in Table 9.

**Table 9** - Number of scenarios and probabilities of failure for the intersection of three sections.

intersections	$p_{ABC}$	$p_{ABD}$	$p_{ABE}$	$p_{ACD}$	$p_{ACE}$	$p_{ADE}$	$p_{BCD}$	$p_{BCE}$	$p_{BDE}$	$p_{CDE}$
scenarios	0	0	0	0	0	0	2	0	0	759
probability	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	$2 \times 10^{-8}\%$	0,0	0,0	$7,59 \times 10^{-6}\%$
intersections	$p_{AB}$	$p_{AC}$	$p_{AD}$	$p_{AE}$	$p_{BC}$	$p_{BD}$	$p_{BE}$	$p_{CD}$	$p_{CE}$	$p_{DE}$
scenarios	0	0	0	0	0	0	0	102.841	102	397
probability	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	$1,03 \times 10^{-3}$	$1,02 \times 10^{-6}$	$3,97 \times 10^{-6}$
intersections	$p_A$	$p_B$	$p_C$	$p_D$	$p_E$					
scenarios	0	0	1.262.932	29.874	794					
probability	0,0	0,0	$1,26 \times 10^{-2}$	$2,99 \times 10^{-4}$	$7,94 \times 10^{-6}$					

Several sections were found with initial probability of failure equal to zero. This result is due to the adopted precision in the method. A Monte Carlo simulation with  $10^8$  observations accurately records occurrences with a probability of up to  $10^{-6}$  and, eventually, smaller probabilities can be obtained as in  $p_{BCD}$ . In general, according to Seck (2018), in order to obtain a certain probability of failure using Monte Carlo, the total of required simulations is one hundred times the magnitude order of this probability (in absolute value).

As the objective of the reliability analysis is to define the structure's degree of safety, it is necessary to adopt a limit value from which a structure is considered safe. In this context, Eurocode (2002) brings a safety limit with maximum probability of failure equal to  $7,2 \times 10^{-5}$  for the ultimate limit state. Thus, the verification can be limited to probabilities of the order of  $10^{-6}$ , which justifies the choice of  $10^8$  Monte Carlo simulations since all paths with null probabilities of failure represent probabilities of failure smaller than  $10^{-6}$ . The results obtained in the analysis of the first stage of the event tree were compared with the works in the literature and are presented in Table 10:

**Table 10** - Initial probabilities of failure, comparison with bibliography.

Section	Kagho-Gouadjio (2013)	Seck (2018)	Present work
A	$1,08 \times 10^{-13}$	$9,60 \times 10^{-14}$	0
B	$8,50 \times 10^{-9}$	$4,98 \times 10^{-9}$	0
C	$1,39 \times 10^{-2}$	$1,27 \times 10^{-2}$	$1,26 \times 10^{-2}$
D	$1,36 \times 10^{-3}$	$2,99 \times 10^{-4}$	$2,99 \times 10^{-4}$
E	$2,02 \times 10^{-5}$	$7,57 \times 10^{-6*}$	$7,94 \times 10^{-6}$

\* original value presented by Seck (2018):  $1,49 \times 10^{-5}$ .

A significant difference is observed between the results of Kagho-Gouadjio (2013) and Seck (2018), where the separation of the intersection probabilities decreased the probability of

failure of isolated sections. When comparing the results of the present study with those of Seck (2018), a close relationship is found, except for section E. A careful study of section E results (presented in Appendix A) may reveal that the difference was due to an imprecision in the numerical recursive method applied by Seck (2018).

#### 4.1.2 Event tree

In Figure 8, the results of the analysis of the structure's initial state are presented schematically, where  $n$  is the number of observed failure scenarios. Failed sections that had null probabilities of occurrence were omitted. Among the initial sections, section  $C$  and section  $D$  are highlighted: both are below the safety limit of Eurocode (2002). However, these scenarios still do not represent structural global failures. Figure 9 to Figure 14 show the results of the analysis for each initial failure with a non-zero probability.

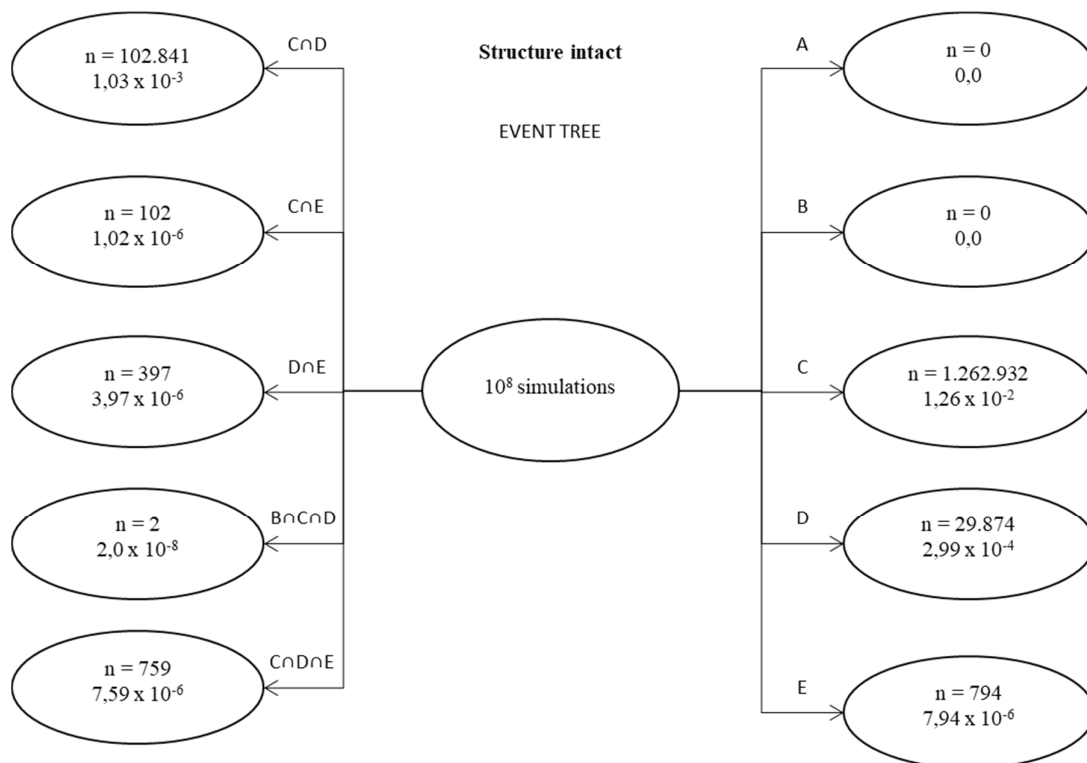
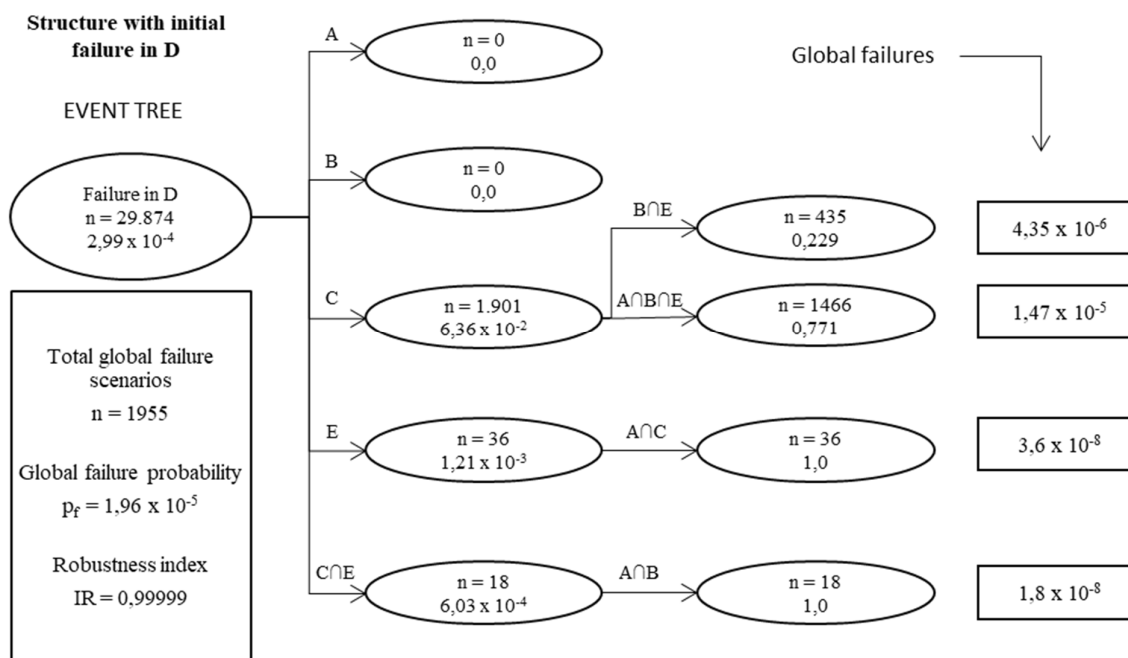
The total global failure scenarios are 159.956 and the structure's probability of global failure is  $p_f = 1,60 \times 10^{-3}$ , not meeting the safety limit established by Eurocode (2002). The largest probability of global failure comes from the path initiated by the failure in section  $C$ , in particular the path  $C - D - B \cap E$  with  $p_f = 1,01 \times 10^{-3}$  and, subsequently, the paths initiated by the simultaneous failure of  $C \cap D$ . As for the robustness indexes, all were close to 1, which characterizes a robust structure.

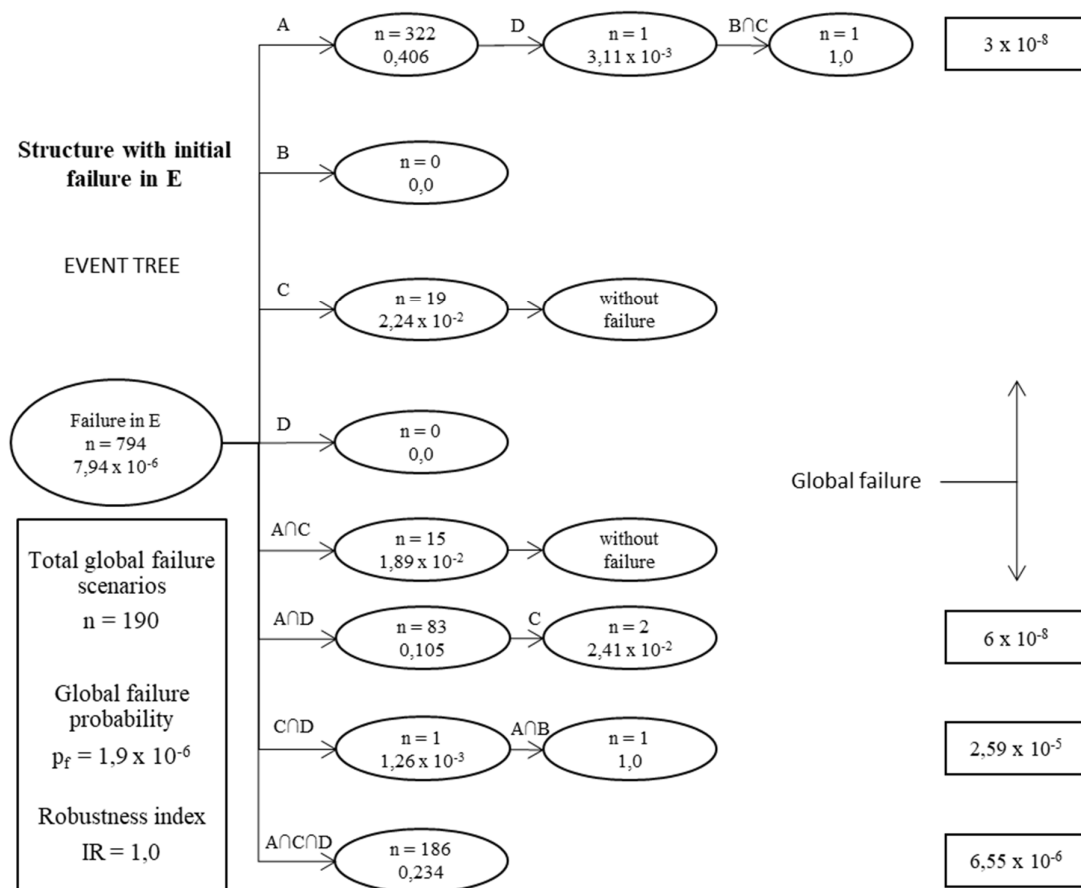
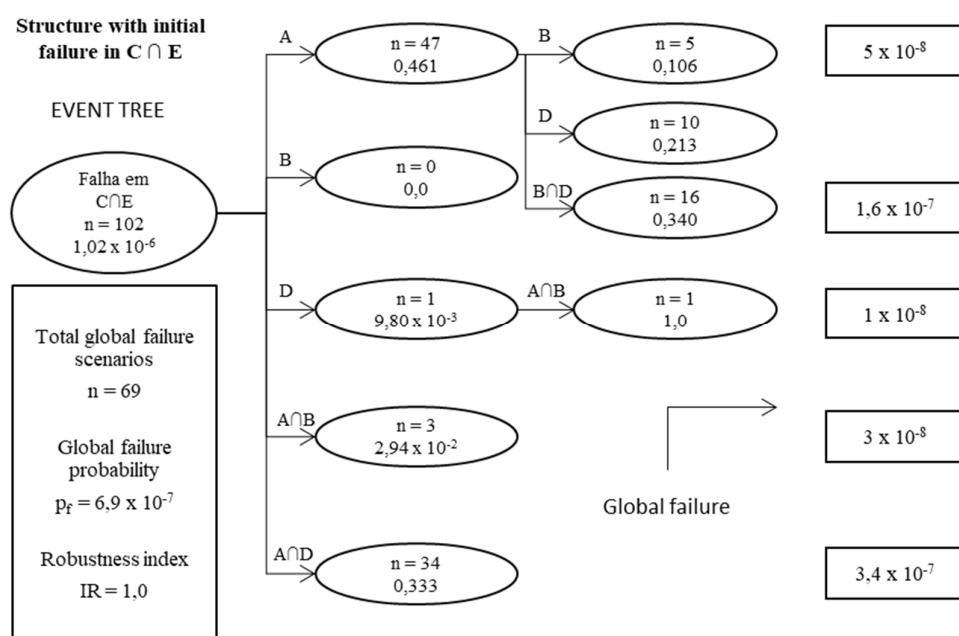
The critical path obtained is then compared with those extracted from the literature, as shown in Table 11:

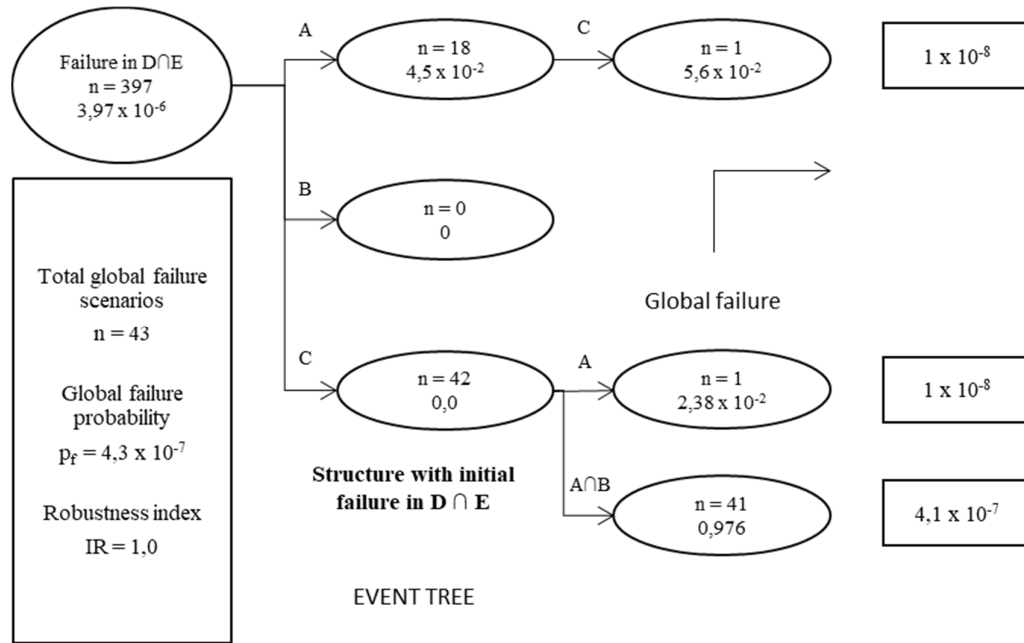
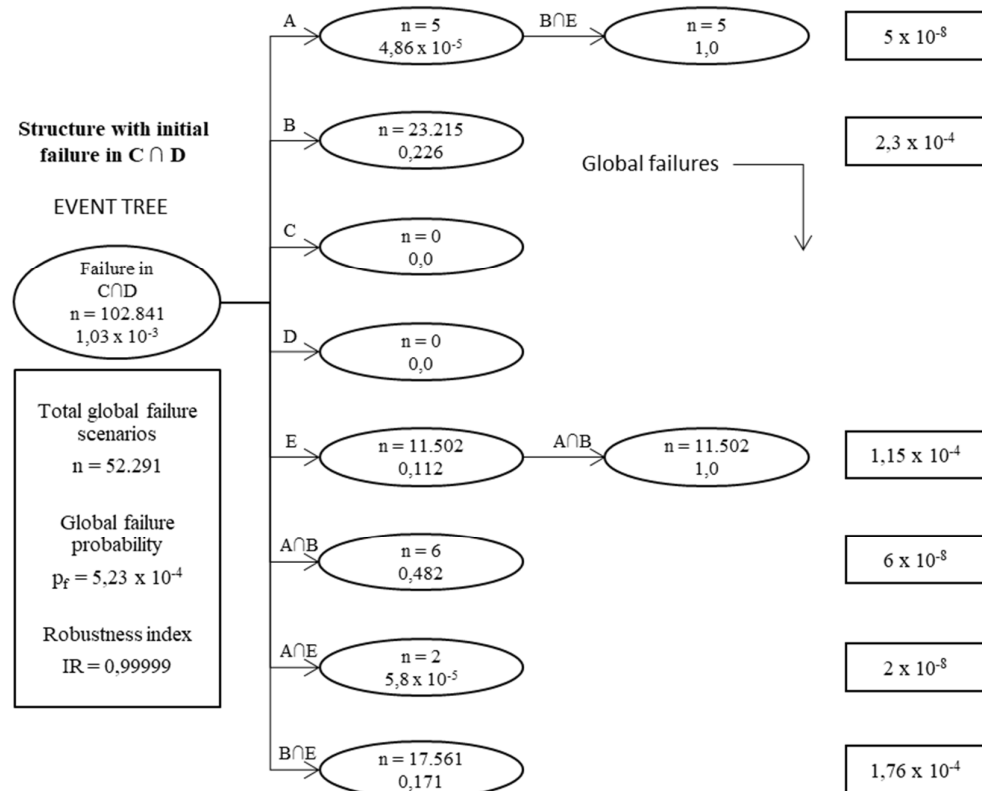
**Table 11** - Comparison between the critical paths obtained in this work with the ones in the literature.

	Kagho-Gouadjio (2013)	Seck (2018)	Present work
<b>Critical path</b>	C - D - B	C - B - D	C - D - B $\cap$ E
$P_{local}$	$1,39 \times 10^{-2}$	$1,27 \times 10^{-2}$	$1,26 \times 10^{-2}$
$P_{global}$	$6,16 \times 10^{-4}$	$1,74 \times 10^{-5}$	$1,01 \times 10^{-3}$
$IR$	0,96	0,9986	0,9999

The results obtained in the present work point to a structure with a much higher probability of global failure when compared with the literature's counterpart. This fact is justified by the same arguments presented at the end of section 3. Regarding computational performance, the algorithm used in the present work took approximately 10 minutes to run in an Intel Core i5-8400, 6-core 2.80 GHz and 16 GB of RAM.

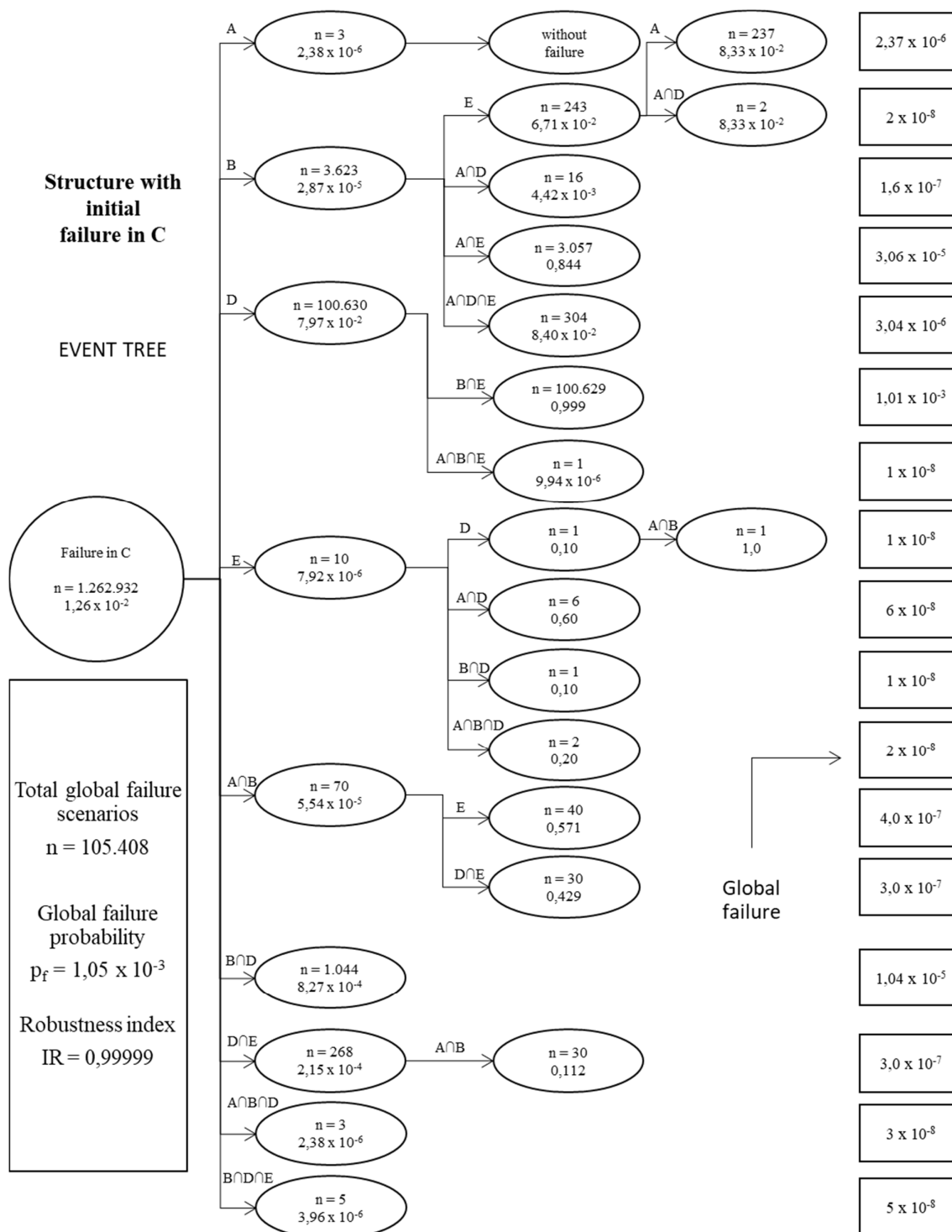
**Figure 8** - Event tree of the initial stage.**Figure 9** - Branch of the event tree starting from initial failure in section D.

**Figure 10** - Branch of the event tree starting from initial failure in section E.**Figure 11** - Branch of the event tree starting from initial failure in section C∩E.

**Figure 12** - Branch of the event tree starting from initial failure in section  $D \cap E$ .**Figure 13** - Branch of the event tree starting from initial failure in section  $C \cap D$ .



**Figure 14** - Branch of the event tree starting from initial failure in section C.



## 5 Final remarks and future works

The present work proposed the development of a new approach to construct a complete event tree based on a pure probabilistic analysis and with an acceptable computational cost.

The strategy proved itself advantageous in the sense that it allowed confirming the hypothesis of parallelism or redundancy between the elements of the same failure path and the serial relationship between different paths. The proposed method also obtained a global probability of failure value for the entire structure by counting all failure scenarios, regardless of the path taken. However, these aspects could not be observed in the event tree construction methods presented by other authors, due to the different background formulations. The processing time for solving the proposed models was also adequate. Unfortunately, it could not be compared with the bibliography's counterpart, again due to the differences in each approach. Thus, this dissertation provided a contribution to the analysis of structural strength and vulnerability in a probabilistic environment.

The next step is the modeling of accidental actions and the integration of such approach in the current standards. Another advance could be achieved by including the consideration of increasing the probability of global failure over the useful lifespan of the structures. Finally, the processing time can also be improved in order to deal with more complex structures.

## REFERENCES

- AGARWAL, J .; BLOCKLEY, D .; WOODMAN, N. Vulnerability of structural systems. *Structural Safety*, p. 263-286, 2003.
- BIONDINI, F .; RESTELLI, S. Damage propagation and structural robustness. *Life-Cycle Civil Engineering*. Taylor & Francis Group, London, 2008.
- CHEN, M .; MATHUR, A .; REGO, V. Effect of testing techniques on software reliability estimates for a croatian sports hall. *Engineering Structures*, p. 3118-3124, 1995.
- FRANGOPOL, DM; CURLEY, JP Effects of damage and redundancy on structural reliability. *ASCE Journal of Structural Engineering*, 1987.
- FU, G .; FRANGOPOL, DM Balancing weight, system reliability and redundancy in multiobjective optimization framework. *Structural Safety*, p. 165-175, 1990.
- GREIGN, GL An assessment of higher order bounds for structural reliability. *Structural safety*, 1992.
- HABERLAND, M. Progressive collapse and robustness. *Structural Analysis and Steel Structures Institute*, PhD thesis, 2007.
- HASOFER, AM; LIND, NC An exact and invariant first order reliability format. *ASCE, Journ. Eng. Mech. Div*, 1974.
- ISO 2394. General principles on reliability for structures. *International Standard*, 2015.
- KAGHO-GOUADJIO, NC Vulnerability and robustness of the hearing. *University of Paris, Paris*, 2013.
- KEMP, A. A mixed flexibility approach for simplifying elastic and inelastic structural analysis of frames. *Constructional Steel Research*, Elsevier, p. 1297-1313, 2002.
- LAND, AH; DOIG, AG An automatic method of solving discrete programming problems. *Econometrica*, Vol. 28, No 3, 1960.
- LEMAIRE, M. Fiabilité des structures. *Lavoisier, Paris*, 2005.
- MOHAMMADKHANI-SHALI, S. Contribution to the redundancy of redundancy on the ponts: analysis of the defense mechanisms for responding surfaces. *École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris*, 2007.

MONTGOMERY, DC; RUNGER, GC Applied statistics and probability for engineers, 3rd edition. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., v. 3, 2009.

NAFDAY, AM; COROTIS, R .; COHORT, J. Failure mode identification for structural frames. Structural Engineering, ASCE, p. 1415-1432, 1987.

NOWAK, AS; COLLINS, KR Reliability of Structures. Michigan, US A: Mcgraw-Hill Higher Education, Vol. 1, 2000.

SECK, EHB Contribution au développement d'outils analytiques et numériques pour quantifier et qualifier la robustesse des structures. Nanterre University, Paris, 2018.

STAROSSEK, U. Progressiver Kollap von Bauwerken (Progressive collapse of structures). Wiley-VCH, Berlin, Germany, 2007.

TERADA, S .; TAKAHASHI, T. Failure-conditioned reliability index. Journal of structural engineering, p. 943-952, 1988.

THOFT-CHRISTENSEN, P .; MUROTSU, Y. Application of structural systems reliability theory, Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1986.

THOFT-CHRISTENSEN, P .; SORENSEN, JD Calculation of probabilities of failure of ductile structures by the. Institute of building technology and structural engineering B-unzipping method, Aalborg University Center, Aalborg, 1982.

ZIEMIAN, R .; MACGUIRE, W. Modified tangent modulus approach, a contribution to plastic hinge analysis. Journal of Structural Engineering, ASCE, p. 1301-1307, 2002.

## Appendix A

In the development of the case study presented in Chapter 4, an unexpected divergence was detected between the results obtained by the present work and those by Seck (2018) for the calculation of the probabilities of failure of the first level of the event tree. Table A-1 shows these results.

**Table A-1** - Initial probabilities of failure, comparison with bibliography.

Section	Kagho-Gouadjio (2013)	Seck (2018)	Present work
A	$1,08 \times 10^{-13}$	$9,60 \times 10^{-14}$	0
B	$8,50 \times 10^{-9}$	$4,98 \times 10^{-9}$	0
C	$1,39 \times 10^{-2}$	$1,27 \times 10^{-2}$	$1,26 \times 10^{-2}$
D	$1,36 \times 10^{-3}$	$2,99 \times 10^{-4}$	$2,99 \times 10^{-4}$
E	$2,02 \times 10^{-5}$	$1,49 \times 10^{-5}$	$7,94 \times 10^{-6}$

A significant difference is noticed between the results of Kagho-Gouadjio (2013) and Seck (2018), where the separation of the intersection probabilities decreased the probability of failure of the isolated sections, which was expected. When comparing the results of the present study with the results of Seck (2018), a close relationship is found, except for section E.

A careful study of the results of section E may reveal that the difference was in the recursive numerical method applied by Seck (2018). In the method developed by that author, the probability of failure of each section is first calculated; then, the probability of failure of the intersection of two sections is obtained; then, three sections, and finally, four sections. Recursively, therefore, the probability of intersection for four sections is subtracted from the probability of three sections, and so on, until the probability of the isolated section is obtained as the probability of the section minus the probability of the intersections. When applying the recursive method used by Seck (2018) as an alternative to the result presented by himself, one can achieve an isolated probability of failure for section E of  $p'_E = 7,57 \times 10^{-6}$ , close to the results obtained in the present work. The probability of failure of section E and the intersections that contains E can be seen in Table A-2, where the notation  $p$  means the failure of the section counting the probabilities of intersection and  $p'$  represents the isolated failure of a section or intersection.

**Table A-2** - Initial probability of failure of section *E*.

Seção		Probabilidade			
p <sub>E</sub>		1,94 x 10 <sup>-5</sup>			

	p' <sub>ABCE</sub>	p' <sub>ABDE</sub>	p' <sub>ACDE</sub>	p' <sub>BCDE</sub>
Probabilidade	0	0	0	1,58 x 10 <sup>-12</sup>

	p' <sub>ABE</sub>	p' <sub>ACE</sub>	p' <sub>ADE</sub>	p' <sub>BCE</sub>	p' <sub>BDE</sub>	p' <sub>CDE</sub>
Probabilidade	0	1,13 x 10 <sup>-26</sup>	2,42 x 10 <sup>-18</sup>	3,16 x 10 <sup>-13</sup>	3,16 x 10 <sup>-13</sup>	7,36 x 10 <sup>-6</sup>

	p' <sub>AE</sub>	p' <sub>BE</sub>	p' <sub>CE</sub>	p' <sub>DE</sub>
Probabilidade	5,61 x 10 <sup>-15</sup>	1,28 x 10 <sup>-12</sup>	9,53 x 10 <sup>-7</sup>	3,52 x 10 <sup>-6</sup>

Section		Probability	
p <sub>E</sub>		1,49 x 10 <sup>-5</sup>	

Source: Seck, 2018.

In order to calculate the final probability of the isolated section *E*, one must subtract from the probability  $p_E$  all the probabilities of the intersection events that contain *E*. When performing this calculation, the result is  $p'_E = 7,57 \times 10^{-6}$ , different from the result presented by Seck (2018). The result found by Seck (2018) represents the subtraction of  $p_E$  only by the intersection events of two sections, ignoring all other intersections of three and four sections.