**UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA**

**INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS**

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

**Juan Carlos Jacho Hancco**

# Uma caracterização da $\mathcal{A}$-equivalência entre aplicações de Gauss de variedades orientáveis em termos de equivalência Lagrangiana e funções altura

Juiz de Fora

2022

**Juan Carlos Jacho Hancco**

# Uma caracterização da $\mathcal{A}$-equivalência entre aplicações de Gauss de variedades orientáveis em termos de equivalência Lagrangiana e funções altura

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática pura.

Orientador: Prof. Dr. Laércio José dos Santos

Juiz de Fora

2022

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Jacho Hancco, Juan Carlos.
Uma caracterização da $\mathcal{A}$-equivalência entre aplicações de Gauss de variedades orientáveis em termos de equivalência Lagrangiana e funções altura / Juan Carlos Jacho Hancco. – 2022.
65 f.

Orientador: Laércio José dos Santos
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2022.

1. aplicação Lagrangiana. 2. família geradora. 3. aplicação catástrofe. 3. $\mathcal{A}$-equivalência. 4. aplicação de Gauss. 5. função altura. I. José dos Santos, Laércio, orient. II. Título.

**Juan Carlos Jacho Hancco**

**Uma caracterização da A-equivalência entre aplicações de Gauss de variedades orientáveis em termos de equivalência Lagrangiana e funções altura**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria/Topologia

Aprovada em 12 de maio de 2022.

BANCA EXAMINADORA

**Prof. Dr. Laércio José dos Santos** - Orientador

Universidade Federal de Juiz de Fora

**Profª. Drª. Catarina Mendes de Jesus Sánche**z

Universidade Federal de Juiz de Fora

**Prof. Dr. Nelson Berrocal Huamaní**

Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga

Juiz de Fora, 12/05/2022.

---

12/05/2022, às 13:10, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **NELSON BERROCAL HUAMANI**, **Usuário Externo**, em 13/05/2022, às 12:39, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf (www2.ufjf.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **0780502** e o código CRC **D32F1641**.

Dedico este trabalho aos meus pais Emelda Lucila e Emilio que com seu amor e esforço me permitiram alcançar meus objetivos.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meus pais, Emelda Lucila e Emilio por sempre acreditarem em mim, por estarem do meu lado em todas as minhas decisões, por me ensinar pelo exemplo o que é esforço e coragem para não temer a adversidade. Aos meus irmãos, Hugo, pelo apoio em todo momento e pelas longas conversas das quais surgiram ideias para esclarecer conceitos inicialmente confusos e Julio para todas as palavras de incentivo. A todos os meus parentes, tios, primos, sobrinhos.

Ao Prof. Dr. Edgar Diógenes Vera Saravia, um excelente matemático, profissional e amigo que me incentivou em todos os momentos a continuar com meus estudos me ajudando em tudo o que eu precisava.

Ao meu orientador Prof. Dr. Laércio José dos Santos, pela paciência ao longo deste trabalho, por ser um incentivo para continuar no caminho da matemática e principalmente da geometria, por sua sempre boa disposição para esclarecer minhas dúvidas e me ajudar com ideias em momentos de incerteza, revelando-se não só como um excelente profissional mas também, e mais importante, uma excelente pessoa.

Ao programa de pós-graduação em matemática da UFJF, ao Prof. Dr. Eduard Toon, coordenador do programa de mestrado, e a todos os professores que fazem parte do programa, cada um deles contribuiu com seus conhecimentos para minha formação acadêmica.

Ao Abel por oferecer seu tempo para me receber aqui no Brasil, ao Julio e Eduardo por me receber em Juiz de Fora e me ajudar em toda a papelada necessária, sem a sua ajuda tudo teria sido mais difícil. Muito obrigado.

A meus amigos do programa de mestrado com quem passei momentos agradáveis de conversas.

Agradeço o apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, CAPES, que me permitiu concluir meus estudos satisfatoriamente.

“É pela lógica que demonstramos, mas pela intuição que descobrimos.” (Henri Poincaré).

**RESUMO**

Apresentaremos nesta dissertação um estudo da aplicação de Gauss para fornecer uma caracterização da $\mathcal{A}$-equivalência entre aplicações de Gauss de variedades orientáveis em termos da função altura. Para isso vamos desenvolver conceitos que serão necessários para ver a aplicação de Gauss como uma aplicação Lagrangiana, aqui precisaremos definir subvariedades Lagrangianas, aplicações Lagrangianas equivalentes, famílias geradoras e as equivalências entre elas. Também temos que mostrar que a aplicação de Gauss é uma aplicação catástrofe associada a funções altura, aqui precisaremos definir o que é uma variedade catástrofe e aplicação catástrofe para depois concluir que duas aplicações de Gauss são $\mathcal{A}$-equivalentes se, e somente se, os germes de suas famílias geradoras são $R^+$-equivalentes.

Palavras-chave: Aplicação Lagrangiana. Família geradora. Aplicação catástrofe. $\mathcal{A}$-equivalência. Aplicação de Gauss. Função altura.

**ABSTRACT**

We will present in this dissertation a Gauss map study to provide a characterization of the $\mathcal{A}$-equivalence between Gauss maps of oriented manifolds in terms of height function. For this we are going to develop concepts that will be necessary to see Gauss map as a Lagrangian map, here we will need to define Lagrangian submanifolds, equivalent Lagrangian maps, generating families and the equivalences between them. We also have to show that the Gauss map is a catastrophe map associated with height functions, here we will need to define what a catastrophe manifold and catastrophe map to later conclude that two Gauss map are $\mathcal{A}$-equivalent if and only if the germs of their generating families are $R^+$-equivalent.

Keywords: Lagrangian map. Generating family. Catastrophe map. Gauss map. Height function.

## SUMÁRIO

# 1 INTRODUÇÃO

A aplicação de Gauss tem sido objeto de estudo em diversos trabalhos recentes, veja por exemplo em (1, 2, 3, 4, 5, 6). O principal objetivo deste trabalho é, utilizando literatura diversa e atual, descrever uma caracterização para dizer quando duas aplicações de Gauss, de uma variedade orientada, são $\mathcal{A}$-equivalentes, para o qual daremos um abordagem do ponto de vista das aplicações Lagrangianas já que, como será provado, a aplicação de Gauss é uma aplicação Lagrangiana. Além disso, uma aplicação de Gauss pode ser vista como uma aplicação catástrofe associada a uma família de funções altura. Precisaremos desenvolver, de uma forma razoável, alguns conceitos e resultados de geometria simplética como, por exemplo, variedades simpléticas e subvariedades Lagrangianas. Introduziremos uma estrutura de variedade simplética no conjunto de todas as retas orientadas em espaços Euclidianos e vamos provar que o conjunto de retas normais orientadas a uma hipersuperfície orientada é uma subvariedade Lagrangiana do espaço simplético das retas orientadas. Definiremos aplicações Lagrangianas e família geradora, onde desenvolveremos os conceitos de $R^+$-equivalência e de $R^+$-equivalência estável de famílias geradoras e de germes de famílias geradoras, respectivamente. O principal resultado, neste sentido, é o Teorema 4.31 que assegura que os germes de aplicações Lagrangianas são Lagrangianos equivalentes se, e somente se, os germes de suas famílias geradoras são $R^+$-equivalentes estáveis. Finalmente, veremos os conceitos de conjunto catástrofe, aplicação catástrofe e de função altura. O objetivo aqui será provar que a aplicação de Gauss é, de fato, uma aplicação Lagrangiana e uma aplicação catástrofe e, além disso, que duas aplicações de Gauss são $\mathcal{A}$-equivalentes se, e somente se, os germes das funções altura são $R^+$-equivalentes. A seguir faremos uma breve descrição dos capítulos da presente dissertação.

No Capítulo 2, desenvolveremos os preliminares para esta dissertação, conceitos de variedades diferenciáveis serão apresentados e alguns teoremas clássicos como a regra da cadeia e o Teorema da Função Inversa. Teremos interesse especial em fibrados pois, em grande parte desta dissertação, trabalharemos com fibrados tangentes e cotangentes de variedades e, em particular, do espaço $\mathbb{R}^n$. Finalmente, será útil falar sobre formas diferenciáveis, de pullback e suas propiedades.

No Capítulo 3, desenvolveremos conceitos de Geometria Simplética, sendo um dos principais o conceito de aplicações Lagrangianas. Para tal, previamente, teremos que desenvolver os tópicos de espaços vetoriais simpléticos, variedades simpléticas, subvariedades Lagrangianas onde falaremos de função geradora e teremos como resultado importante o teorema 3.36, que nos diz que a variedade das retas orientadas normais a uma hpersuperfície orientável no espaço euclideano $\mathbb{R}^n$ é uma subvariedade Lagrangiana do espaço simplético de todas as retas orientadas em $\mathbb{R}^n$, e fibrados lagrangianos equivalentes, nesta seção vamos definir o que é uma aplicação Lagrangiana e a equivalência entre eles.

No Capítulo 4, vamos enunciar e demonstrar o Teorema 4.31, que é um dos resultados centrais para esta dissertação. Sua importância se baseia no fato de que nos dá uma caracterização da equivalência Lagrangiana em termos de famílias geradoras, que nos diz que, germes de aplicações Lagrangianas são Lagrangianos equivalentes se, e somente se, suas famílias geradoras associadas são $R^{+}$-equivalentes estáveis. Este teorema será usado na prova do resultado principal desta dissertação.

E por fim, no Capítulo 5, faremos um estudo da aplicação de Gauss, mostrando que ela pode ser vista como uma aplicação Lagrangiana e também como uma aplicação catástrofe associada a uma função altura. Depois, vamos definir o que é uma $\mathcal{A}$-equivalência entre aplicações de Gauss e, por último, vamos concluir com o resultado central desta dissertação que nos diz que duas aplicações de Gauss são $\mathcal{A}$-equivalentes se, e somente se, os germes de suas famílias geradoras (que, nesse caso, são funções altura) são $R^{+}$-equivalentes, o que nos permite caracterizar a $\mathcal{A}$-equivalência entre duas aplicações de Gauss.

# 2 VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS

Neste capítulo, apresentaremos alguns conceitos e resultados sobre variedades diferenciáveis que serão utilizados ao longo deste trabalho. As principais referências utilizadas são Lee (7), Lima ((8) e (9)), Hirsch (10), Do Carmo (11) e Lima (12). Além destes também podem ser consultados Guillemin (13) e Warner (14).

**Definição 2.1.** Seja $M$ um espaço topológico. Um ***sistema de coordenadas locais ou carta local*** em $M$ é um homeomorfismo $x : U \to x(U)$ de um subconjunto aberto $U \subset M$ sobre um aberto $x(U) \subset \mathbb{R}^m$. Dizemos que $m$ é a dimensão de $x : U \to x(U)$. Para cada $p \in U$, tem-se $x(p) = (x^1(p), \ldots, x^m(p))$. Os números $x^i = x^i(p)$, $i = 1, \ldots, m$ são chamados as ***coordenadas*** do ponto $p \in X$ no sistema $x$.

Se $x : U \to x(U)$ e $y : V \to x(V)$ são sistemas de coordenadas locais em $M$, com $U \cap V \neq \emptyset$, $x(p) = (x^1(p), \ldots, x^m(p))$ e $y(p) = (y^1(p), \ldots, y^m(p))$, então a correspondência

$$(x^1(p), \ldots, x^m(p)) \leftrightarrow (y^1(p), \ldots, y^m(p))$$

estabelece um homeomorfismo $\phi_{xy} = y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \to y(U \cap V)$.

**Definição 2.2.** O homeomorfismo $\phi_{xy} = y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \to y(U \cap V)$, acima, é chamado ***mudança de coordenadas***.

**Definição 2.3.** Um ***atlas*** de dimensão $m$ sobre um espaço topológico $M$ é uma coleção $\mathcal{A}$ de sistemas de coordenadas locais $x : U \to \mathbb{R}^m$ em $M$, cujos domínios $U$ cobrem $M$. Os domínios $U$ dos sistemas de coordenadas $x \in \mathcal{A}$ são chamados as ***vizinhanças coordenadas*** de $x \in \mathcal{A}$.

**Definição 2.4.** Um espaço topológico $M$ no qual existe um atlas de dimensão $m$ chama-se uma ***variedade topológica*** de dimensão $m$. Em outras palavras, $M$ é uma variedade topológica de dimensão $m$ se, e somente se, cada ponto de $M$ tem uma vizinhança homeomorfa a um aberto do $\mathbb{R}^m$.

**Definição 2.5.** Um atlas $\mathcal{A}$ sobre um espaço topológico $M$ diz-se ***diferenciável***, de classe $C^k (k \geq 1)$, se todas as mudanças de coordenadas $\phi_{xy},\ x, y \in \mathcal{A}$ são aplicações de classe $C^k$. Escreve-se então $\mathcal{A} \in C^k$.

**Definição 2.6.** Seja $\mathcal{A}$ um atlas de dimensão $m$ e classe $C^k$ num espaço topológico $M$. Um sistema de coordenadas locais $z : W \to \mathbb{R}^m$ em $M$ diz-se ***admissível*** relativamente ao atlas $\mathcal{A}$ se, para todo sistema de coordenadas locais $x : U \to \mathbb{R}^m$, pertencente a $\mathcal{A}$, com $U \cap W \neq \emptyset$, as mudanças de coordenadas $\phi_{xz}$ e $\phi_{zx}$ são de classe $C^k$. Em outras palavras, se $\mathcal{A} \cup z$ ainda é um atlas de classe $C^k$ em $M$.

**Definição 2.7.** Um atlas $\mathcal{A}$, de dimensão $m$ e classe $C^k$, sobre $M$, diz-se ***maximal*** quando contém todos os sistemas de coordenadas locais que são admissíveis em relação a $\mathcal{A}$.

Todo atlas de classe $C^k$ em $M$ pode ser ampliado, de modo único, até se tornar um atlas maximal de classe $C^k$: basta acrescentar-lhe todos os sistemas de coordenadas locais admissíveis.

**Definição 2.8.** Uma ***variedade diferenciável***, de dimensão $m$ e classe $C^k$ é um par ordenado $(M, \mathcal{A})$, onde $M$ é um espaço topológico de Hausdorff, com base enumerável, e $\mathcal{A}$ é um atlas maximal de dimensão $m$ e classe $C^k$ sobre $M$.

**Definição 2.9.** No caso $\partial M = \emptyset$, $M$ uma variedade diferenciável no sentido estrito, é chamada ***variedade sem bordo***.

Neste trabalho, nosso objeto de estudo serão as variedades fechadas, ou seja, aquelas que são compactas e sem bordo.

## 2.1 APLICAÇÕES DIFERENCIÁVEIS ENTRE VARIEDADES

**Definição 2.10.** Sejam $M$, $N$ variedades de classe $C^k(k \geq 1)$, com dimensões $m$ e $n$, respectivamente. Diz-se que uma aplicação $f : M \to N$ é ***diferenciável no ponto*** $p \in M$ se existem sistemas de coordenadas $x : U \to \mathbb{R}^m$ em $M$, $y : V \to \mathbb{R}^m$ em $N$, com $p \in U$ e $f(U) \subset V$ tais que $y \circ f \circ x^{-1} : x(U) \to y(V) \subset \mathbb{R}^n$ é diferenciável no ponto $x(p)$.

**Definição 2.11.** A aplicação $f_{xy} = y \circ f \circ x^{-1}$ é denominada a ***expressão*** de $f$ nas coordenadas locais $x, y$.

**Observação 2.12.** Como as mudanças de coordenadas em $M$ e $N$ são difeomorfismos de classe $C^k$, a definição de diferenciabilidade independe dos sistemas de coordenadas $x, y$.

**Definição 2.13.** Nas condições da Definição 2.10, dizemos que $f : M \to N$ é ***diferenciável*** se $f$ for diferenciável em todos os pontos de $M$.

Os ***caminhos diferenciáveis*** são aplicações diferenciáveis $\lambda : I \to M$, onde $I$ é um intervalo aberto da reta. A condição de diferenciabilidade de $\lambda$ exige que $\lambda$ seja contínua e que, dado um sistema de coordenadas $x : U \to \mathbb{R}^m$ em $M$, para todo subintervalo $J$ tal que $\lambda(J) \subset U$, a composta $x \circ \lambda : J \to x(U)$ seja um caminho diferenciável em $\mathbb{R}^m$.

Seja $M$ uma variedade de dimensão $m$ e classe $C^k$ e seja $p$ um ponto de $M$. Indicamos por $C_p$ o conjunto de todos os caminhos $\lambda : J \to M$, definidos num intervalo aberto $J$, contendo 0, tais que $\lambda(0) = p$ e $\lambda$ é diferenciável em 0. Se $\lambda \in C_p$ e $x : U \to \mathbb{R}^m$

é um sistema de coordenadas em $M$, com $p \in U$, pode acontecer que a imagem $\lambda(J)$ não esteja inteiramente contida em $U$. Em vista disso, toda vez que escrevemos $x \circ \lambda$, estamos admitindo que o domínio de $\lambda$ foi suficientemente reduzido a um intervalo aberto menor $J'$, contendo 0, tal que $\lambda(J') \in U$.

**Definição 2.14.** Diremos que dois caminhos $\lambda, \mu \in C_p$ são ***equivalentes***, e escreveremos $\lambda \sim \mu$, quando existir um sistema de coordenadas locais $x : U \to \mathbb{R}^m$ em $M$, com $p \in U$, tal que $x \circ \lambda : I \to \mathbb{R}^m$ e $x \circ \mu : I \to \mathbb{R}^m$ têm o mesmo vetor-velocidade em $t = 0$, isto é, $(x \circ \lambda)'(0) = (x \circ \mu)'(0)$.

**Observação 2.15.** A igualdade $(x \circ \lambda)'(0) = (x \circ \mu)'(0)$ é valida para todo sistema de coordenadas, portanto a relação $\lambda \sim \mu$ é uma relação de equivalência em $C_p$.

**Definição 2.16.** O ***vetor-velocidade*** $\dot{\lambda}$ de um caminho $\lambda \in C_p$ é a classe de equivalência de $\lambda$. Ou seja, $\dot{\lambda} = \{\mu \in C_p : \mu \sim \lambda\}$. Portanto, dado $\lambda, \mu \in C_p$, tem-se $\dot{\lambda} = \dot{\mu}$ se, e somente se, $(x \circ \lambda)'(0) = (x \circ \mu)'(0)$ para algum sistema de coordenadas locais $x : U \to \mathbb{R}^m$ com $p \in U$.

**Definição 2.17.** O conjunto quociente $C_p/\sim$ será indicado por $T_pM$ e será chamado o ***espaço tangente*** à variedade $M$ no ponto $p$.

Dado o sistema de coordenadas locais $x : U \to \mathbb{R}^m$ em $M$ e um ponto $p \in U$, o conjunto $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^i}(p), \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x^m}(p)\right\}$ é a base de $T_pM$ que é levada pelo isomorfismo $f : T_pM \to \mathbb{R}^m$ sobre a base canônica $\{e_1, \ldots, e_m\}$. Escreveremos $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ em vez de $\dfrac{\partial}{\partial x^i}(p)$ omitindo o ponto $p$. O vetor básico $\dfrac{\partial}{\partial x^i} \in T_pM$ é a classe de equivalência de qualquer caminho $\lambda \in C_p$ tal que $(x \circ \lambda)'(0) = e_i$.

**Definição 2.18.** O conjunto $TM = \bigcup\limits_{p \in M} T_pM$ (união disjunta) é chamado o ***espaço fibrado*** tangente a $M$. Podemos descrever tal conjunto como

$$TM = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_pM = \{(p, v) : p \in M, v \in T_pM\}$$

O conjunto $TM$ tem estrutura de variedade diferenciável e sua dimensão é igual a $2 \cdot dim M$.

**Definição 2.19.** Para cada $p \in M$, denotemos por $T_p^*M$ o espaço dual de $T_pM$, chamado ***espaço cotangente*** em $p$. Os elementos $\alpha \in T_p^*M$ são chamados ***covectores*** em $p$. Consideremos a base coordenada $B = \left\{\dfrac{\partial}{\partial x^i}(p), \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x^m}(p)\right\}$ em $T_pM$. A base de $T_p^*M$ dual a $B$ é $\{dx^1(p), \ldots, dx^m(p)\}$.

O fibrado cotangente de $M$ é $T^*M = \bigcup_{p\in M} T_p^*M$ (união disjunta). Fazendo uma analogia com a definição de espaço tangente, podemos escrever o espaço cotangente como

$$T^*M = \bigcup_{p\in M} \{p\} \times T_p^*M = \{(p,\alpha) : p \in M, \alpha \in T_p^*M\}$$

**Exemplo 2.20.** 1. $T\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

2. $T\mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.

3. Considerando a esfera $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, o fibrado tangente $T\mathbb{S}^n$ é descrito por

$$T\mathbb{S}^n = \{(p,v) : p \in \mathbb{S}^n, v \in T_p\mathbb{S}^n\}$$

e o fibrado cotangente é descrito por

$$T^*\mathbb{S}^n = \{(p,\alpha) : p \in \mathbb{S}^n, \alpha \in T_p^*\mathbb{S}^n\}.$$

**Definição 2.21.** Sejam $M$ e $N$ variedades diferenciáveis de dimensão $m$ e $n$, respectivamente,e $f : M \to N$ uma aplicação diferenciável no ponto $p \in M$. A ***derivada*** de $f$ no ponto $p$ é a transformação linear $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ tal que para cada $v \in T_pM$ temos $df_p(v) \in T_{f(p)}N$.

**Teorema 2.22** (Regra da Cadeia)**.** *Sejam $M, N, P$ variedades diferenciáveis, $f : M \to N$ e $g : N \to P$ aplicações diferenciáveis nos pontos $p \in M$ e $f(p) \in N$, respectivamente. Então, $g \circ f : M \to P$ é diferenciável no ponto $p \in M$ e*

$$d(g \circ f)_p = d_{g_{f(p)}} \circ df_p : T_pM \to T_{g(f(p))}P.$$

Como caso particular temos a regra da cadeia que conhecemos dos cursos de análise no $\mathbb{R}^n$. Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos abertos, $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável no ponto $x \in U$, com $f(U) \subset V$, e $g : V \to \mathbb{R}^p$ uma aplicação diferenciável no ponto $y = f(x) \in V$. Então a aplicação composta $g \circ f : U \to \mathbb{R}^p$ é diferenciável no ponto $M$ e $d(g \circ f)_x = dg_y \circ df_x : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$.

Considerando as matrizes jacobianas de $f, g$ e $g \circ f$ obtemos a seguinte regra da cadeia,

$$\frac{\partial(g_i \circ f)}{\partial x_j}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(x)) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x)$$

onde $1 \le i \le p$ e $1 \le j \le m$.

**Definição 2.23.** Sejam $M$ e $N$ variedades de classe $C^\infty$. Um ***difeomorfismo*** $f : M \to N$ é uma aplicação bijetora de classe $C^\infty$, cuja inversa $f^{-1} : N \to M$ é também de classe $C^\infty$.

**Definição 2.24.** Sejam $M$ e $N$ variedades de classe $C^\infty$. Uma aplicação $f : M \to N$ é um ***difeomorfismo local*** se todo ponto $p \in X$ tem uma vizinhança $U$ tal que $f(U)$ é aberto em $N$ e $f|_U : U \to f(U)$ é um difeomorfismo.

**Teorema 2.25** (Teorema da Função Inversa). *Sejam $M$ e $N$ variedades de classe $C^\infty$ e $f : M \to N$ uma aplicação de classe $C^\infty$. Seja $p \in M$ um ponto tal que $df_p$ é um isomorfismo. Então, existem vizinhanças conexas $U_0$ de $p$ e $V_0$ de $f(p)$, tais que $f|_{U_0} : U_0 \to V_0$ é um difeomorfismo.*

**Definição 2.26.** Um ***map-germe*** $f : M \to N$ em um ponto $x$ de $M$ é uma classe de equivalência de aplicações $\phi : U \to N$, cada uma das quais definida em alguma vizinhança $U$ de $x$ em $M$, não necessariamente a mesma para todo $\phi$. Diremos que duas aplicações são ***equivalentes*** se elas coincidem em alguma vizinhança do ponto $x$, esta vizinhança pode ser menor que a interseção da vizinhança na qual as duas aplicações são definidos. Diz-se que duas aplicações da mesma classe ***têm o mesmo germe*** no ponto $x$.

Um dos conceitos que serão utilizados será o de transversalidade, e daremos sua definição a seguir. Sejam $M$ e $N$ variedades de classe $C^\infty$, e $P$ uma subvariedade mergulhada, $f : M \to N$ uma aplicação $C^\infty$ e $p \in M$. Dizemos que $f$ é ***transversal*** a $P$ em $p$, se

$$f(p) \notin P \quad ou \quad f(p) \in P \quad e \quad T_{f(p)}P + df_p(T_pM) = T_{f(p)}N.$$

**Definição 2.27.** Sejam $M, N \subset R$ tal que para cada ponto $p \in M \cup N$ satisfaz

$$T_pM + T_pN = T_pR$$

Então $M$ e $N$ são chamadas ***subvariedades transversais*** e usamos a notação $M \pitchfork N$.

## 2.2 FIBRADOS

**Definição 2.28.** Um ***fibrado*** é uma tripla $(E, p, B)$, onde

1. $E$ é chamado ***espaço total***,

2. $B$ é e chamado ***espaço base***,

3. $p : E \to B$ é uma aplicação sobrejectora chamada ***projeção*** do fibrado,

Para cada $b \in B$, o espaço $p^{-1}(b)$ é chamado a ***fibra*** do fibrado em $b \in B$.

**Definição 2.29.** Um ***fibrado vetorial real de posto*** $d$ ***e classe*** $C^\infty$ é uma quádrupla $\xi = (E, B, \pi, F)$ onde

1. $E$ e $B$ são variedades $C^\infty$,

2. $\pi : E \to B$ é uma aplicação sobrejectora e de classe $C^\infty$,

3. $F$ é um espaço vetorial de dimensão $d$,

com as seguintes propiedades:

1. para cada $p \in M$, a ***fibra*** $E_p = \pi^{-1}(p)$ sobre $p$ tem uma estrutura de espaço vetorial real de dimensão $d$,
2. para cada $p \in M$, existe um aberto $U \subseteq M$, com $p \in U$, e um difeomorfismo $\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times F$ (chamado ***trivialização*** de $\xi$ sobre $U$ ou ***trivialização local de*** $\xi$), tal que
   a) $\pi_U = \pi_1 \circ \phi$, onde $\pi_U = \pi|_{\pi^{-1}(U)}$ e $\pi_1 : U \times F \to V$ é a projeção na primeira coordenada.
   b) para cada $q \in U$, a restrição $\phi|_{E_q} : E_q \to \{q\} \times F \simeq F$ é um isomorfismo linear.

Num fibrado vetorial $(E, B, \pi, F)$,

1. $E$ é chamado ***espaço total***.
2. $B$ é chamada ***base***.
3. $\pi$ é chamada ***projeção***.
4. $F$ é chamada ***fibra típica***.

Algumas vezes nos referimos a um fibrado vetorial $\xi = (E, B, \pi, F)$, simplesmente dizendo que $E$ é um fibrado sobre $B$ ou que $\pi : E \to B$ é um fibrado sobre $B$.

**Exemplo 2.30.** Seja $M$ é uma variedade de dimensão $n$, $TM$ o fibrado tangente e $\pi : TM \to M$ a projeção de $TM$ sobre $M$, então $\xi = (TM, M, \pi, \mathbb{R}^n)$ é um fibrado vetorial.

**Exemplo 2.31.** Seja $M$ é uma variedade de dimensão $n$, $T^*M$ o fibrado cotangente de $M$ e denotemos por $\pi^* : T^*M \to M$ a aplicação, sobrejetora, definida por $\pi^*(p, \omega) = p$, chamada ***projeção de*** $T^*M$ ***sobre*** $M$. Temos que $\xi = (T^*M, M, \pi^*, \mathbb{R}^n)$ é um fibrado vetorial.

A seção a seguir é baseada nas referências Do Carmo (11) e Lima (12).

## 2.3 FORMAS DIFERENCIAIS

### 2.3.1 FORMAS ALTERNADAS

**Definição 2.32.** Seja $E$ um espaço vetorial real. Uma ***forma alternada*** de grau $r$ em $E$ é uma aplicação

$$\omega : E \times \cdots \times E \to \mathbb{R}$$

tal que

1. $\omega$ é $r$-linear (linear em cada coordenada).

2. $\omega(v_1, \ldots, v_n) = 0$ sempre que $v_i = v_j$, $i \neq j$.

Da parte 2 na definição anterior temos que

$$\omega(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_r) = -\omega(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_r).$$

Denotemos por $\mathcal{A}^r(E)$ o conjunto de todas as formas $r$-lineares alternadas de grau $r$ em $E$. Convencionamos que $\mathcal{A}^0(E) = \mathbb{R}$.

O conjunto $\mathcal{A}^r(E)$ é um espaço vetorial com as seguintes operações

1. $(\omega_1 + \omega_2)(v_1, \ldots, v_r) = \omega_1(v_1, \ldots, v_r) + \omega_2(v_1, \ldots, v_r)$.

2. $(\lambda\omega)(v_1, \ldots, v_r) = \lambda\omega(v_1, \ldots, v_r)$.

Sejam $\omega_1, \ldots, \omega_r$ formas alternadas de grau 1, em $E$ definimos $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_r$ por

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_r(v_1, \ldots, v_r) = det[\omega_i(v_j)] = det \begin{pmatrix} \omega_1(v_1) & \cdots & \omega_1(v_r) \\ \omega_2(v_1) & \cdots & \omega_2(v_r) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_r(v_1) & \cdots & \omega_r(v_r) \end{pmatrix}.$$

Assim definida é uma forma $r$-linear alternada em $E$, chamada ***produto exterior*** de $\omega_1, \ldots, \omega_r$. Seja agora $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ uma base de $E^*$. Dado $I = \{i_1, \ldots, i_r\} \subset \{1, \ldots, n\}$, consideremos $\omega_I = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_{i_r}$ a forma $r$-linear alternada induzida pela base e por $I$ com as propriedades

1. $\omega_I = 0$, se algum dos elementos da lista de índices for repetido;

2. $\omega_I = \pm\omega_J$, se $I$ e $J$ diferem somente na ordem dos índices.

Vamos considerar $I = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_r\}$ uma $r$-lista, assim o número de $r$-listas de $n$ elementos é $\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$.

**Teorema 2.33.** *Se $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ é uma base de $E^*$ e $1 \leq r \leq n$, então o conjunto $\{\omega_I : I \text{ é } \ uma \ \ r - lista\}$ é uma base de $\mathcal{A}^r(E)$. Em particular,*

$$dim\mathcal{A}^r(E) = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad e \quad dim\mathcal{A}^n(E) = 1$$

### 2.3.2 FORMAS DIFERENCIAIS

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$, uma $r$-forma é uma aplicação $\omega$,

$$\omega : U \to \mathcal{A}^r(\mathbb{R}^n)$$

tal que para $p \in U$ temos $\omega_p = \omega(p) : \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é alternada. Fixemos a base canônica $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ e denotemos a base de $(\mathbb{R}^n)^*$, dual a $\mathcal{B}$, por $\mathcal{B}^* = \{dx_1, \ldots, dx_n\}$ onde para todo $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ temos $dx_j(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \alpha_j$. Se $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto e $f : U \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, então a diferencial de $f$, $df : U \to (\mathbb{R}^n)^*$ é uma forma diferencial de grau 1 dada por

$$df(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i,$$

para cada $a \in U$. Além disso, se $\omega$ é uma forma diferencial de grau 1 em $U$, então existem funções $a_1, \ldots, a_n : U \to \mathbb{R}$ tal que

$$\omega(a) = \sum_{i=1}^{n} a_i(a) dx_i$$

para todo $a \in U$. De um modo mais geral, se $\omega$ é uma forma diferencial de grau $r$ em $U$, então para cada $r$-lista $I = (i_1, \ldots, i_r)$ de elementos de $I$, existe uma função $a_I : U \to \mathbb{R}$ tal que

$$\omega(a) = \sum_{I} a_I(a) dx_I,$$

para todo $a \in U$, onde a soma esta sobre todas as $r$-listas $I$ de elementos em $I_k$ e $dx_I = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r}$. Dizemos que $\omega$ é continua, diferenciável ou $C^\infty$ se as coordenadas $a_I$ é continua, diferenciável ou $C^\infty$.

Denotemos o conjunto de todas as formas diferenciais de grau $r$ por $\Omega^r(M)$. Consideremos em $\Omega^r(M)$ as seguintes operações: $\omega, \omega_1, \omega_2 \in \Omega^r(M)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $f : M \to \mathbb{R}$ definimos

1. $(\omega_1 + \omega_2)(p) = \omega_1(p) + \omega_2(p)$, para todo $p \in M$.
2. $(\lambda\omega)(p) = \lambda\omega(p)$, para todo $p \in M$.
3. $(f\omega)(p) = f(p)\omega(p)$, para todo $p \in M$.

Assim, $\Omega^r(M)$ é um espaço vetorial. Dados $\omega_1 \in \Omega^r(M)$ e $\omega_2 \in \Omega^s(M)$, definimos $\omega_1 \wedge \omega_2$ por

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(p) = \omega_1(p) \wedge \omega_2(p).$$

Temos que $\omega_1 \wedge \omega_2 \in \Omega^{r+s}(M)$ e é chamado producto exterior de $\omega_1$ e $\omega_2$.

Sejam $M_1^k \subset \mathbb{R}^n$, $M_2^l \subset \mathbb{R}^m$ variedades e $f : M_1 \to M_2$ aplicação diferenciável. Dada uma forma diferencial de grau $r$, $\omega$ em $M_2$, $r \geq 1$, $f$ e $\omega$ induzem uma forma diferencial de grau $r$ em $M_1$, denotada por

$$(f^*\omega)(p)(u_1, \ldots, u_r) = \omega(f(p))(df_p(u_1), \ldots, df_p(u_r)).$$

No caso em que $g$ é uma 0-forma, isto é, $g : V \to \mathbb{R}$ é uma função, definimos

$$f^*g = g \circ f.$$

A forma $f^*\omega$ é chamada induzida por $\omega$ e $f$ ou ***pull-back*** de $\omega$ para $M_1$ por meio de $f$.

### 2.3.3 DIFERENCIAL EXTERIOR

Seja $U \subset \mathbb{R}^k$ um aberto. A ideia aqui é generalizar a diferencial de uma função $f : U \to \mathbb{R}$. Lembremos que $f$ é uma 0-forma e a sua diferencial é uma 1-forma. Comecemos com uma 1-forma em $U$. Existem funções $a_1, \ldots, a_k : U \to \mathbb{R}$ tal que

$$\omega(a) = \sum_{i=1}^{k} a_i(a)dx_i,$$

para todo $a \in U$. Definimos a diferencial exterior de $\omega$ por

$$d\omega(a) = \sum_{i=1}^{k} da_i \wedge dx_i.$$

De um modo geral, seja $\omega$ uma $r$-forma em $U$,

$$\omega(a) = \sum_{I} a_I(a)dx_I,$$

onde $a_I : U \to \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis. Definimos a diferencial exterior de $\omega$ por

$$d\omega(a) = \sum_{I} da_I \wedge dx_I.$$

**Definição 2.34.** A ***diferencial exterior*** de uma $r$-forma $\omega \in \Omega^r(M)$ é a $(r+1)$-forma em $M$, denotada por $d\omega$, tal que $d\omega(p) = d_\varphi\omega(p)$, $p \in M$, onde $\varphi$ é uma parametrização qualquer com imagem numa vizinhança de $p$.

**Proposição 2.35.** *Sejam $M$ e $N$ variedades, $\omega, \omega_1, \omega_2 \in \Omega^r(M)$ e $\omega_3 \in \Omega^s(N)$, então*

1. $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$.
2. $d(\omega_1 \wedge \omega_3) = d\omega_1 \wedge d\omega_3 + (-1)^r\omega_1 \wedge \omega_3$.
3. $d^2\omega = d(d\omega) = 0$.
4. $d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$, *onde $M_1$ é variedade e $f : M_1 \to M$ é diferenciável.*

# 3 GEOMETRIA SIMPLÉTICA

Neste capítulo, vamos fazer alguns conceitos e resultados de Geometria Simplética, que serão utilizados nos próximos capítulos. Um dos conceitos centrais é o de aplicações Lagrangianas. Para cumprir nosso objetivo definiremos espaços vetoriais simpléticos, variedades simpléticas, etc., levando em consideração que não nos aprofundaremos nestes tópicos. As referências principais são Arnold-Gusein-Zade-Varchenko (15), Da Silva (16) e (17) e McDuff-Salamon (18).

## 3.1 ESPAÇOS VETORIAIS SIMPLÉTICOS

Nesta seção estudaremos espaços vetoriais simpléticos mostrando definições e propriedades importantes para definir variedades simpléticas. Observe que consideraremos apenas espaços vetoriais de dimensão finita.

### 3.1.1 FORMAS BILINEARES ANTISSIMÉTRICAS

**Definição 3.1.** Seja $V$ um espaço vetorial $n$-dimensional sobre $\mathbb{R}$. Uma função $f : V \times V \to \mathbb{R}$ é uma ***forma bilinear*** sobre $V$ se e só se satisfaz

1. $f(\lambda u_1 + u_2, v) = \lambda f(u_1, v) + f(u_2, v)$, $\forall u_1, u_2, v \in V$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$;
2. $f(u, \lambda v_1 + v_2) = \lambda f(u, v_1) + f(u, v_2)$, $\forall u, v_1, v_2 \in V$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Por definição, uma forma bilinear é linear em cada umas das entradas quando a outra é deixada fixa.

**Exemplo 3.2.** Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ um produto interno sobre $V$. Então $\langle \cdot, \cdot \rangle$ define uma forma bilinear. Em particular, o produto interno usual sobre $\mathbb{R}^n$,

$$\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

é uma forma bilinear sobre o $\mathbb{R}^n$. $\square$

**Exemplo 3.3.** A função $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 + 2x_1 y_2 - 5x_2 y_2$$

é uma forma bilinear sobre o $\mathbb{R}^2$.

**Definição 3.4.** Seja $V$ um espaço vetorial $n$-dimensional sobre $\mathbb{R}$, e seja $f : V \times V \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear. A forma $f$ é ***antissimétrica*** se $f(u, v) = -f(v, u)$, para todo $u, v \in V$.

**Exemplo 3.5.** A função $h : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$h((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_2 - x_2y_1$$

é uma forma bilinear antissimétrica sobre o $\mathbb{R}^2$.

### 3.1.2 ESPAÇOS VETORIAIS SIMPLÉTICOS

**Definição 3.6.** Sejam $V$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear antissimétrica. Dizemos que

- $\omega$ é ***não degenerada*** se

$$\omega(u, v) = 0, \quad \forall v \in V \Rightarrow u = 0.$$

- $\omega$ é uma ***forma simplética*** se é antissimétrica e não degenerada.

**Definição 3.7.** Um ***espaço vetorial simplético*** é um par $(V, \omega)$ onde $V$ é um espaço vetorial com uma forma (ou estrutura) simplética $\omega$.

**Exemplo 3.8.** Seja $V = \mathbb{R}^2$ e considere a forma bilinear dada por

$$\omega_0((u_1, u_2), (v_1, v_2)) = u_1v_2 - u_2v_1$$

pelo Exemplo 3.5 temos que $\omega_0$ é uma forma bilinear antissimétrica. Além disso, $\omega_0$ é não degenerada. De fato, se

$$\omega_0((u_1, u_2), (v_1, v_2)) = 0, \forall (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$$

então $u_1v_2 - u_2v_1 = 0$, para todo $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$. Considerando $v_1 = -u_2$ e $v_2 = u_1$ temos $u_1^2 + u_2^2 = 0$. Logo, $u_1 = u_2 = 0$. Portanto, $\omega_0$ é uma forma simplética sobre $\mathbb{R}^2$.

**Definição 3.9.** Seja $(V, \omega)$ um espaço vetorial simplético e $W \subset V$ um subespaço vetorial. O ***ortogonal simplético*** de $W$ é o conjunto definido como

$$W^\perp = \{v \in V : \ \omega(v, u) = 0, \ \forall u \in W\}.$$

Temos que $W^\perp$ é um subespaço vetorial de $V$.

**Definição 3.10.** Um subespaço $W$ será chamado

1. ***Isotrópico*** se $W \subset W^\perp$.

2. ***Coisotrópico*** se $W^\perp \subset W$.

3. ***Lagrangiano*** se for isotrópico e coisotrópico, ou seja, $W = W^\perp$.

4. ***Simplético*** se $\omega$ é não degenerado em $W$, ou seja, $(W, \omega)$ é um espaço vetorial simplético.

## 3.2 VARIEDADES SIMPLÉTICAS

Seja $M$ uma variedade suave, e $\omega \in \Omega^2(M)$ uma 2-forma em $M$. Lembre-se de que, por definição, isso significa que para qualquer $p \in M$

$$\omega_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$$

é uma forma bilinear antissimétrica.

**Definição 3.11.** Uma 2-forma $\omega$ é chamada ***simplética*** em $M$ se

1. $\omega$ é fechada, ou seja, $d\omega = 0$, e
2. $\omega$ é não degenerada, ou seja, $\forall p \in M$ $\omega_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ é não degenerada.

**Observação 3.12.** A condição 2 diz que $(T_pM, \omega_p)$ é um espaço vetorial simplético para cada $p \in M$.

**Definição 3.13.** Uma ***variedade simplética*** é um par $(M, \omega)$, sendo $M$ uma variedade e $\omega$ é uma forma simplética em $M$.

**Observação 3.14.** Como $dimM = dimT_pM$, as variedades simpléticas são de dimensão par.

**Exemplo 3.15.** Sejam $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ a esfera e $p \in \mathbb{S}^2$. Definimos a 2-forma em $\mathbb{S}^2$ como

$$\omega_p(u, v) = \langle u \times v, p\rangle$$

onde $u, v \in T_p\mathbb{S}^2$. Assim $(\mathbb{S}^2, \omega)$ é uma variedade simplética.

**Exemplo 3.16.** Seja $M = \mathbb{R}^{2n}$ com coordenadas locais $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$. $M$ tem a estrutura simplética padrão $\omega = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i$. De fato, para ver que é fechada, repare que

$$d\omega = d\left(\sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i\right) = d^2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \wedge dy_i\right) = 0.$$

Portanto $\omega$ é fechada.

Agora vamos provar que $\omega$ é não degenerada. Seja $u = \sum_{i=1}^{n}\left(a_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p + b_i \left.\frac{\partial}{\partial y_i}\right|_p\right)$ um vetor em $T_pM$, o espaço tangente a $M$ em $p$. A forma $\omega$ é não degenerada em $p$ se $\omega_p(u, v) = 0$ para todo $v = \sum_{i=1}^{n}\left(f_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p + g_i \left.\frac{\partial}{\partial y_i}\right|_p\right)$ em $T_pM$, então $u = 0$. Assim, temos

$$\begin{aligned}
\omega_p(u, v) &= \sum_{i=1}^{n}\left(dx_i\left(a_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p + b_i \left.\frac{\partial}{\partial y_i}\right|_p\right) dy_i\left(f_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p + g_i \left.\frac{\partial}{\partial y_i}\right|_p\right)\right)\\
&\quad - \sum_{i=1}^{n}\left(dy_i\left(a_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p + b_i \left.\frac{\partial}{\partial y_i}\right|_p\right) dx_i\left(f_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p + g_i \left.\frac{\partial}{\partial y_i}\right|_p\right)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(a_i g_i - b_i f_i\right).
\end{aligned}$$

Assim, $\sum_{i=1}^{n}(a_ig_i - b_if_i) = 0$ para todos $f_i, g_i$. Se $g_i = a_i$ e $f_i = -b_i$, então $\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^2 + b_i^2\right) = 0$. Logo, $a_i = b_i = 0$ e, portanto, $u = 0$.

**Exemplo 3.17.** Seja $M$ uma variedade $n$-dimensional. Vamos definir uma estrutura simplética sobre o espaço $2n$-dimensional $T^*M$. Sejam $p = (x, \xi) \in T^*M$, $\xi \in T_x^*M$, $\pi : T^*M \to M$ o fibrado cotangente tal que $\pi(x, \xi) = x$,

$$d\pi_p : T_p(T^*M) \to T_xM$$

e

$$(d\pi_p)^* : T_x^*M \to T_p^*(T^*M)$$

a transposta de $d\pi_p$. Consideremos a 1-forma, em $T^*M$,

$$\alpha : T^*M \to T^*(T^*M), \quad p \mapsto (p, \alpha_p)$$

definida pontualmente por

$$\alpha_p = (d\pi_p)^*\xi : T_p(T^*M) \to \mathbb{R}.$$

Como $(d\pi_p)^*$ é a transposta de $d\pi_p$ temos

$$\alpha_p(v) = \xi\left((d\pi_p(v)\right),$$

para todo $v \in T_p(T^*M)$. A forma $\alpha$ será chamada 1***-forma tautológica*** ou também 1***-forma de Liouville*** em $T^*M$. A 2***-forma simplética tautológica*** sobre $T^*M$ é definida por

$$\omega = d\alpha.$$

**Observação 3.18.** Seja $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ as coordenadas locais em $T^*M$. Então a 1-forma tautológica em termos de coordenadas é dada por $\alpha = \sum_{i=1}^{n} p_i dq_i$. Daí se segue que a 2-forma $\omega = d\alpha$ é fechada e não degenerada.

**Teorema 3.19** (Darboux)**.** *Sejam $(M, \omega)$ uma variedade simplética $2n$-dimensional e $r \in M$. Então existe uma carta local $(U, q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ com centro em $r$ tal que em $U$ temos*

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i.$$

*A carta $(U, q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ é chamada a **Carta de Darboux**.*

**Observação 3.20.** O teorema anterior nos diz que numa vizinhança de cada ponto, toda estrutura simplética pode ser expressa, em coordenadas apropriadas, na forma

$$\omega = \sum dp_i \wedge dq_i.$$

**Definição 3.21.** Sejam $(M_1, \omega_1)$ e $(M_2, \omega_2)$ duas variedades simpléticas. Um ***simplectomorfismo*** entre $(M_1, \omega_1)$ e $(M_2, \omega_2)$ é um difeomorfismo $\varphi : M_1 \to M_2$ que envia a estrutura simplética $\omega_1$ em $\omega_2$, ou seja, $\varphi^*\omega_2 = \omega_1$, sendo $\varphi^*\omega_2$ o pull back de $\omega_2$ por meio de $\varphi$, definido no Capítulo 2.

**Teorema 3.22.** *Sejam $M$ um conjunto e $(N, \eta)$ uma variedade simplética. Se $f : M \to N$ é uma aplicação bijetora, então existe uma única estrutura de variedade diferenciável e uma única forma simplética $\omega$ em $M$ tal que $f$ é um simplectomorfismo.*

**Demonstração:** Seja $\mathcal{T} = \{V \subset M : f(V) \text{ é aberto}\}$. Usando propriedades de imagem de união de conjuntos e as igualdades $V = f^{-1}(f(V))$ e $U = f(f^{-1}(U))$, para todos $V \subset M$ e $U \subset N$, temos que

- $\mathcal{T}$ é uma topologia em $M$.
- $f : M \to N$ é homeomorfismo, considerando em $M$ a topologia $\mathcal{T}$.
- $\mathcal{T}$ é a única topologia em $M$ tal que $f : M \to N$ é homeomorfismo.

Seja $\mathcal{D} = \{(U_i, \phi_i) : i \in I\}$ uma estrutura diferenciável em $N$. Consideremos o conjunto

$$\mathcal{C} = \{(f^{-1}(U_i), \phi_i \circ f) : i \in I\}.$$

Notemos que

- Se $p \in M$, então existe $i \in I$ tal que $f(p) \in U_i$, isto é, $p \in f^{-1}(U_i)$. Logo, $(f^{-1}(U_i))_{i \in I}$ é uma cobertura aberta de $M$.
- Cada aplicação $\phi_i \circ f : f^{-1}(U_i) \to \phi_i(U_i)$ é um homeomorfismo, já que é composta de homeomorfismos.
- Se $i, j \in I$ são tais que $f^{-1}(U_i) \cap f^{-1}(U_j) \neq \emptyset$, então $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, já que

  $$f^{-1}(U_i) \cap f^{-1}(U_j) = f^{-1}(U_i \cap U_j).$$

  Além disso, a mudança de coordenadas de $\phi_i \circ f$ para $\phi_j \circ f$ é dada por

  $$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \to \phi_j(U_i \cap U_j),$$

  já que $(\phi_i \circ f)(f^{-1}(U_i \cap U_j)) = \phi_i(U_i \cap U_j)$, $(\phi_j \circ f)(f^{-1}(U_i \cap U_j)) = \phi_j(U_i \cap U_j)$ e $(\phi_j \circ f) \circ (\phi_i \circ f)^{-1} = \phi_j \circ \phi_i^{-1}$.

Logo, $\mathcal{C}$ é um atlas em $M$. Para cada $p \in M$, existe $i \in I$ com a seguinte propriedade:

- $p \in f^{-1}(U_i)$.

- $f(f^{-1}(U_i)) = U_i$.

- A representação local de $f$ nas cartas $(f^{-1}(U_i), \phi_i \circ f)$ e $(U_i, \phi_i)$ é dada por

$$\text{Id} = \phi_i \circ f \circ (\phi_i \circ f)^{-1} : \phi(U_i) \to \phi(U_i)$$

  e, assim, um difeomorfismo.

Logo, $f$ é diferenciável. Como a representação local de $f^{-1}$ é a inversa da representação local de $f$, segue que $f$ é um difeomorfismo.

Seja $\mathcal{E} = \{(V_j, \psi_j) : j \in J\}$ uma estrutura diferenciável em $M$ tal que $f$ é um difeomorfismo, em relação ao par $(\mathcal{E}, \mathcal{D})$. Sejam $i \in I$ e $j \in J$ tais que $f^{-1}(U_i) \cap V_j \neq \emptyset$. A mudança de coordenadas de $(V_j, \psi_j)$ para $(f^{-1}(U_i), \phi_i \circ f)$ é dada por

$$\phi_i \circ f \circ \psi_j^{-1} : \psi_j(f^{-1}(U_i) \cap V_j) \to (\phi_i \circ f)(f^{-1}(U_i) \cap V_j) = \phi_i(U_i \cap f(V_j)),$$

que é uma restrição da representação local de $f$ nas cartas locais $(V_j, \psi_j)$ e $(U_i, \phi_i)$. Como $f$ é um difeomorfismo, em relação ao par $(\mathcal{E}, \mathcal{D})$ segue que a mudança de coordenadas de $(V_j, \psi_j)$ para $(f^{-1}(U_i), \phi_i \circ f)$ é difeomorfismo. Portanto, $\mathcal{E}$ é a estrutura diferenciável determinada por $\mathcal{C}$, mostrando a unicidade da estrutura diferencial.

Seja $\omega = f^*\eta$. Lembremos que para todos $p \in M$ e $u, v \in T_pM$,

$$\omega_p(u, v) = (f^*\omega)_p(u, v) = \eta_{f(p)}(df_p(u), df_p(v)).$$

Daí,

- $\omega_p(v, u) = \eta_{f(p)}(df_p(v), df_p(u)) = -\eta_{f(p)}(df_p(u), df_p(v)) = -\omega_p(u, v)$, isto é, $\omega_p$ é antissimétrica.

- Se $u \in T_pM$ é tal que $\omega_p(u, v) = 0$, para todo $v \in T_pM$, então

$$\eta_{f(p)}(df_p(u), df_p(v)) = \omega_p(u, v) = 0,$$

  para todo $v \in T_pM$. Como $df_p$ é isomorfismo e $\eta$ é não degenerada segue que $u = 0$, mostrando que $\omega_p$ é não degenerada.

- $d\omega = d(f^*\eta) = f^*(d\eta) = 0$, já que $\eta$ é fechada.

Logo, $\omega$ é uma forma simplética em $M$ e, portanto, $f$ é um simplectomorfismo. □

Uma ***reta orientada*** em $\mathbb{R}^n$ é um par

$$(\{v + tu : t \in \mathbb{R}\}, u), \quad \text{onde} \quad u \in \mathbb{S}^{n-1} \quad \text{e} \quad v \in \mathbb{R}^n,$$

sendo que $\mathbb{S}^{n-1}$ denota a esfera em $\mathbb{R}^n$ de centro 0 e raio 1. Neste caso, $u$ é a ***orientação*** ou ***direção*** da reta. Denotemos por $\mathcal{R}$ o conjunto de todas as retas orientadas em $\mathbb{R}^n$, isto é,

$$\mathcal{R} = \left\{(\{v + tu : t \in \mathbb{R}\}, u) : u \in \mathbb{S}^{n-1} \text{ e } v \in \mathbb{R}^n\right\}.$$

A ideia é introduzir em $\mathcal{R}$ uma estrutura de variedade simplética de tal forma que $\mathcal{R}$ se identifique ao fibrado cotangente da esfera $T^*\mathbb{S}^{n-1}$. Para isso, consideremos as aplicações

$$h : T\mathbb{S}^{n-1} \to T^*\mathbb{S}^{n-1} \quad \text{e} \quad \widetilde{h} : T^*\mathbb{S}^{n-1} \to T\mathbb{S}^{n-1}, \tag{3.1}$$

definidas, respectivamente, por $h(u, v) = (u, v^\flat)$ e $\widetilde{h}(u, \phi) = (u, \phi^\sharp)$, onde $v^\flat : T_u\mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}$ é o funcional linear dado por

$$v^\flat(w) = \langle w, v\rangle,$$

sendo que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota o produto interno canônico de $\mathbb{R}^n$, e $\phi^\sharp \in T_u\mathbb{S}^{n-1}$ é o único vetor tal que

$$\phi(w) = \langle w, \phi^\sharp\rangle,$$

para todo $w \in T_u\mathbb{S}^{n-1}$. Notemos que para cada $u \in T\mathbb{S}^{n-1}$,

$$(v^\flat)^\sharp = v \;\; \text{e} \;\; (\phi^\sharp)^\flat = \phi,$$

para todos $v \in T_u\mathbb{S}^{n-1}$ e $\phi \in T_u^*\mathbb{S}^{n-1}$. Logo,

$$h \circ \widetilde{h} = \mathrm{Id} \;\; \text{e} \;\; \widetilde{h} \circ h = \mathrm{Id},$$

o que implica que a aplicação $h$ é bijetora. Notemos, ainda, que o fibrado tangente $T\mathbb{S}^{n-1}$ pode ser descrito como

$$T\mathbb{S}^{n-1} = \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : u \in \mathbb{S}^{n-1} \text{ e } \langle u, v\rangle = 0\right\}.$$

A partir disso, podemos enunciar e demonstrar o seguinte resultado que está baseado em (15) pag. 290.

**Teorema 3.23.** *Existe uma estrutura de variedade simplética em $\mathcal{R}$ tal que as variedades $\mathcal{R}$ e $T^*\mathbb{S}^{n-1}$ são difeomorfas e, além disso, esse difeomorfismo é um simplectomorfismo.*

**Demonstração:** Consideremos as aplicações

$$g : \mathcal{R} \to T\mathbb{S}^{n-1} \quad \text{e} \quad \widetilde{g} : T\mathbb{S}^{n-1} \to \mathcal{R} \tag{3.2}$$

definidas, respectivamente, por

$$g(\{v + tu : t \in \mathbb{R}\}, u) = (u, v - \langle v, u\rangle u) \;\; \text{e} \;\; \widetilde{g}(u, v) = (\{v + tu : t \in \mathbb{R}\}, u).$$

Notemos que

$$g \circ \widetilde{g}(u, v) = g(\widetilde{g}(u, v)) = g(\{v + tu : t \in \mathbb{R}\}, u) = (u, v - \langle v, u\rangle u) = (u, v),$$

para todo $(u, v) \in T\mathbb{S}^{n-1}$, e

$$\begin{aligned}\widetilde{g} \circ g(\{v + tu : t \in \mathbb{R}\}, u) &= \widetilde{g}(g(\{v + tu : t \in \mathbb{R}\}, u)) = \widetilde{g}(u, v - \langle v, u\rangle u) \\ &= (\{v - \langle v, u\rangle u + tu : t \in \mathbb{R}\}, u) = (\{v + ru : r \in \mathbb{R}\}, u),\end{aligned}$$

para todo $(\{v + tu : t \in \mathbb{R}\}, u) \in \mathcal{R}$, onde $r = t - \langle v, u\rangle$. Logo,

$$g \circ \widetilde{g} = \mathrm{Id} \ \text{ e } \ \widetilde{g} \circ g = \mathrm{Id}$$

e, assim, $g$ é bijetora. Consideremos a aplicação

$$f : \mathcal{R} \to T^*\mathbb{S}^{n-1}$$

dada por $f = h \circ g$, sendo $h$ a aplicação em (3.1). Temos que $f$ é bijetora, já que é a composta de duas aplicações bijetoras. Portanto, pelo Teorema 3.22, existe uma única estrutura de variedade simplética em $\mathcal{R}$ tal que $f$ é um simplectomorfismo. $\square$

As seguintes subseções 3.3 e 3.4 são baseadas nas referência (15), nosso objetivo aqui é deixar as demonstrações mais claras para o leitor, para isso tivemos como apoio as referencias (16), (17) e (18).

## 3.3 SUBVARIEDADES LAGRANGIANAS

**Definição 3.24.** Seja $(M, \omega)$ uma variedade simplética. Uma subvariedade $U$ é chamada ***isotrópica*** se $\forall p \in U$, $T_pU$ é um subespaço isotrópico de $(T_pM, \omega_p)$.

**Exemplo 3.25.** No espaço $\mathbb{R}^{2n}$ com a estrutura simplética padrão $\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i$ o plano $p = k$, onde $k$ é uma constante, é isotrópico.

**Exemplo 3.26.** Qualquer curva no espaço simplético 2-dimensional $\mathbb{R}^2$ é uma subvariedade isotrópica.

**Observação 3.27.** Se $U$ é uma subvariedade isotrópica então $dim\, U \leq \frac{1}{2} dim\, M$.

**Definição 3.28.** Seja $(M, \omega)$ uma variedade simplética. Uma subvariedade $L$ é chamada ***Lagrangiana*** se $\forall p \in M$, $T_pL$ é um subespaço Lagrangiano de $(T_pM, \omega_p)$, ou seja, $T_pL = T_pL^{\perp}$ e portanto $dim\, L = \frac{1}{2} dim\, M$.

**Exemplo 3.29.** Consideremos o espaço $\mathbb{R}^2$ com coordenadas $(p, q)$ e a estrutura simplética $\omega$ dada por

$$\omega = dp \wedge dq.$$

Nesse caso, os dois eixos coordenados $p$ e $q$ são subvariedades Lagrangianas. De fato, qualquer curva diferenciável em $\mathbb{R}^2$ é uma subvariedade Lagrangiana.

**Exemplo 3.30.** Consideremos o espaço $\mathbb{R}^4$ com coordenadas $(p_1, p_2, q_1, q_2)$ e a estrutura simplética $\omega$ dada por

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2.$$

Nesse caso, existem 6 planos coordenados de dimensão 2, a saber,

- $\mathcal{P}_1 = \{(p_1, p_2, 0, 0) : p_1, p_2 \in \mathbb{R}\}$,
- $\mathcal{P}_2 = \{(0, p_2, q_1, 0) : p_2, q_1 \in \mathbb{R}\}$,
- $\mathcal{P}_3 = \{(p_1, 0, 0, q_2) : p_1, q_2 \in \mathbb{R}\}$,
- $\mathcal{P}_4 = \{(0, 0, q_1, q_2) : q_1, q_2 \in \mathbb{R}\}$,
- $\mathcal{P}_5 = \{(p_1, 0, q_1, 0) : p_1, q_1 \in \mathbb{R}\}$, e
- $\mathcal{P}_6 = \{(0, p_2, 0, q_2) : p_2, q_2 \in \mathbb{R}\}$.

Notemos que a restrição de $\omega$ a $\mathcal{P}_i$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, é nula e assim para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ temos que $\mathcal{P}_i$ é uma subvariedade Lagrangiana. Por outro lado,

$$\omega((1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0)) = 1 \quad \text{e} \quad \omega((0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)) = 1,$$

o que mostra que $\mathcal{P}_5$ e $\mathcal{P}_6$ não são subvariedades Lagrangianas, isto é, em $\mathbb{R}^4$ existem exatamente 4 planos coordenados que são subvariedades Lagrangianas.

Consideremos as aplicações $R_1, R_2 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definidas por

$$R_1(p_1, p_2, q_1, q_2) = (q_1, p_2, -p_1, q_2) \quad \text{e} \quad R_2(p_1, p_2, q_1, q_2) = (p_1, q_2, q_1, -p_2).$$

Notemos que $R_1$ e $R_2$ são rotações de 90° nos planos $\mathcal{P}_5$ e $\mathcal{P}_6$, respectivamente. Assim, $R_1$ e $R_2$ preservam a forma simplética $\omega$, já que são rotações. Além disso, podemos obter os planos $\mathcal{P}_i$, $i \in \{2, 3, 4\}$, a partir de $\mathcal{P}_1$ e das rotações $R_1$ e $R_2$. De fato,

$$\mathcal{P}_2 = R_1(\mathcal{P}_1), \ \mathcal{P}_3 = R_2(\mathcal{P}_1) \quad \text{e} \quad \mathcal{P}_4 = R_2 \circ R_1(\mathcal{P}_1).$$

Uma maneira alternativa de obter os planos $\mathcal{P}_i$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, é a seguinte: sejam $I$ e $J$ subconjuntos de $\{1, 2\}$ tais que $I \cap J = \emptyset$ e $I \cup J = \{1, 2\}$. Os planos $\mathcal{P}_i$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, são gerados pelos 2 eixos coordenados $p_i$ e $q_j$, com $i \in I$ e $j \in J$. De fato, considerando

- $I = \{1, 2\}$ e $J = \emptyset$,
- $I = \{2\}$ e $J = \{1\}$,
- $I = \{1\}$ e $J = \{2\}$,
- $I = \emptyset$ e $J = \{1, 2\}$,

obtemos os planos $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$ e $\mathcal{P}_4$, respectivamente.

**Exemplo 3.31.** As subvariedades $\mathbb{R}^n \times 0$ e $0 \times \mathbb{R}^n$ são subvariedades Lagrangianas de $\mathbb{R}^{2n}$.

**Observação 3.32.** Entre os $\binom{2n}{n}$ planos coordenados $n$-dimensionais no espaço simplético padrão $\mathbb{R}^{2n}$ existem $2^n$ planos Lagrangianos. Esses planos são obtidos da seguinte forma: sejam $I$ e $J$ subconjuntos do conjunto $\{1, \ldots, n\}$ tais que $I \cap J = \emptyset$ e $I \cup J = \{1, \ldots, n\}$. Consideremos os $n$ eixos coordenados $p_i, i \in I$ e $q_j, j \in J$. O plano gerado por esses eixos é Lagrangiano.

Em outras palavras, todos os planos coordenados Lagrangianos podem ser obtidos pelo plano gerado por $(p_1, \ldots, p_n)$, por uma rotação de $90°$ em algum dos planos bidimensionais $(p_j, q_j)$ (tal rotação $(p_j, q_j) \mapsto (q_j, -p_j)$ preserva a estrutura simplética e, portanto, envia um plano Lagrangiano para outro plano de Lagrangiano). Para obter mais detalhes sobre esta afirmação ver a referencia (15).

**Proposição 3.33.** *Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável, então*

$$L = \{(f(q), q) : q \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^{2n},$$

*é uma subvariedade Lagrangiana de $(\mathbb{R}^{2n}, dp \wedge dq)$.*

**Demonstração:** Como $f$ é diferenciável temos que $L$ é uma variedade diferenciável de dimensão $n$. Além disso, em $L$ temos que $pdq = f(q)dq$. Daí, em $L$, $dp \wedge dq = 0$, mostrando que $L$ é Lagrangiana. $\square$

**Proposição 3.34.** *Um germe de uma subvariedade Lagrangiana do espaço simplético padrão é o gráfico de uma aplicação $p = f(q)$ se e só se é transversal a algum plano Lagrangiano $q = cte$.*

**Demonstração:** Seja $L$ um germe de uma subvariedade Lagrangiana. Se $L$ é o gráfico de uma aplicação $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, isto é,

$$L = \{(f(q), q) : q \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^{2n},$$

então para cada $x = (f(q_0), q_0) \in L$ temos que

$$T_xL = \{(df_{q_0}(v), v) : v \in \mathbb{R}^n\}.$$

Daí, $T_xL$ e $\{(u, 0) :\in \mathbb{R}^n\}$ são transversais em $\mathbb{R}^{2n}$ e, portanto, $L$ e o plano $q = q_0$ são transversais em $x = (f(q_0), q_0)$.

Reciprocamente, suponhamos que $L$ é transversal ao plano $q = q_0$ no ponto $x = (f(q_0), q_0) \in L$. Seja $\phi : U \to V$ uma carta local de $L$ tal que $x \in U$ e

$$\phi(x) = 0 \in V \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Denotemos por $\pi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ a projeção na segunda coordenada $\pi(p, q) = q$. Como $L$ é transversal a $q = q_0$ segue que $\pi|_{T_x L} : T_x L \to \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo linear. Consideremos a aplicação

$$h = \pi \circ \phi^{-1} : V \to \mathbb{R}^n.$$

Temos que $h$ é diferenciável e

$$dh_0 = d\pi_x \circ d\phi_0^{-1} = \pi \circ d\phi_0^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

é um isomorfismo. Pelo Teorema da Aplicação Inversa, existem abertos $V_0 \subset V$ e $W_0 \subset \mathbb{R}^n$ tais que $0 \in V_0$, $q_0 \in W_0$ e $h : V_0 \to W_0$ é difeomorfismo. Sejam $U_0 = \phi^{-1}(V_0) \subset U \subset L$ e

$$\psi = h \circ (\phi|_{U_0}) : U_0 \to W_0.$$

Temos que $(U_0, \psi)$ é uma carta local de $L$, com $x \in U_0$. Notemos que, para cada $q \in W_0$, temos

$$\psi^{-1}(q) = (f(q), g(q)) \in U_0 \subset L,$$

com $f, g : W_0 \to \mathbb{R}^n$. Além disso,

$$g(q) = \pi \circ \psi^{-1}(q) = \pi \circ (h \circ (\phi|_{U_0}))^{-1}(q) = (\pi \circ (\phi|_{U_0})) \circ \left((\pi \circ (\phi|_{U_0}))^{-1}\right)(q) = q,$$

para todo $q \in W_0$. Portanto, $U_0$ é o gráfico da aplicação $f$, concluindo a demonstração. $\square$

Uma maneira alternativa de descrever uma subvariedade Lagrangiana é a partir de uma função, com valores reais, conforme os resultados seguintes.

**Proposição 3.35.** *Seja $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Se $L \subset \mathbb{R}^{2n}$ é o subconjunto definido por*

$$L = \left\{ \left( \frac{\partial S}{\partial q}, q \right) : q \in \mathbb{R}^n \right\},$$

*então $L$ é uma subvariedade Lagrangiana de $(\mathbb{R}^{2n}, dp \wedge dq)$.*

**Demonstração:** Notemos que, em $L$,

$$pdq = \frac{\partial S}{\partial q} dq = dS.$$

Portanto, a restrição de $dp \wedge dq$ a $L$ é zero, mostrando que $L$ é Lagrangiana. $\square$

A função $S$, na Proposição 3.35, é chamada ***função geradora*** da subvariedade Lagrangiana $L$.

**Proposição 3.36.** *Toda subvariedade Lagrangiana do espaço simplético padrão $\mathbb{R}^{2n}$, que é o gráfico de uma aplicação $p = f(q)$, é definida localmente por uma função geradora.*

**Demonstração:** Veja a referência (15), pag 291. □

Nem todo germe Lagrangiano em $\mathbb{R}^{2n}$ é transversal a um plano Lagrangiano da forma $q = cte$. Entretanto, todo germe Lagrangiano em $\mathbb{R}^{2n}$ é transversal a um dos $2^n$ planos Lagrangianos mencionados na Observação 3.32, veja a referência (15).

Se um germe Lagrangiano $L$ é transversal ao plano $n$-dimensional gerado pelos eixos $p_i$, $i \in I$, e $q_j$, $j \in J$, então este germe é o gráfico de uma aplicação germe $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, dada por $f(q_I, p_J) = (p_I, q_J)$. Neste caso, o germe $L$ pode ser descrito por meio de uma função geradora $S(q_I, p_J)$ pelas fórmulas

$$p_I = \frac{\partial S}{\partial q_I}, \;\; q_J = -\frac{\partial S}{\partial p_J}.$$

Essas fórmulas são obtidas pelas fórmulas da Observação 3.32, por uma rotação de 90° nos planos coordenados $(p_j, q_j), j \in J$. Chamaremos as coordenadas $q_j$ e $p_j$ com índices em $J$ (aqueles para os quais há um sinal de menos na fórmula) de ***patológicas***. Se a interseção entre $L$ e o plano $q = cte$ tem dimensão $k$, então podemos escolher uma função geradora com $k$ argumentos patológicos.

Seja $\mathcal{H}$ uma hipersuperfície orientável no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$. Fixemos um campo de vetores normais e unitários $\mathfrak{n} : \mathcal{H} \to \mathbb{R}^n$, isto é, para cada $x \in \mathcal{H}$ temos que $\mathfrak{n}(x)$ é unitário e normal a $\mathcal{H}$. Seja $\mathcal{N}$ a variedade das retas orientadas normais a $\mathcal{H}$, cuja orientação é dada pelo campo $\mathfrak{n}$, isto é,

$$\mathcal{N} = \{(\{x + t\mathfrak{n}(x) : t \in \mathbb{R}\}, \mathfrak{n}(x)) : x \in \mathcal{H}\}.$$

Notemos que $\mathcal{N}$ é um subconjunto de $\mathcal{R}$, o espaço de todas as retas orientadas. Além disso, vale o seguinte resultado.

**Teorema 3.37.** *Com a notação acima, $\mathcal{H}$ e $\mathcal{N}$ são variedades difeomorfas. Além disso, $\mathcal{N}$ é uma subvariedade Lagrangiana do espaço simplético de todas as retas orientadas $\mathcal{R}$ em $\mathbb{R}^n$*

**Demonstração:** Um difeomorfismo entre $\mathcal{H}$ e $\mathcal{N}$ é dado por

$$f : \mathcal{H} \to \mathcal{N}, \;\;\; f(x) = (\{x + t\mathfrak{n}(x) : t \in \mathbb{R}\}, \mathfrak{n}(x)).$$

Em particular, $\dim \mathcal{N} = \dim \mathcal{H} = n - 1$. Assim, para mostrar que $\mathcal{N}$ é Lagrangiana basta mostrar que é isotrópica. Notemos, do Teorema 3.23, que o espaço das retas orientadas em $\mathbb{R}^n$ é simplectomorfo a $T^*\mathbb{S}^{n-1}$ com estrutura simplética $dp \wedge dq$ onde $q \in \mathbb{S}^{n-1}$ e $p \in T_q^*\mathbb{S}^{n-1}$. Utilizando a identificação entre $\mathcal{R}$ e o fibrado tangente $T\mathbb{S}^{n-1}$, definida em (3.2), podemos identificar cada elemento $(\{x+t\mathfrak{n}(x) : t \in \mathbb{R}\}, \mathfrak{n}(x))$ de $\mathcal{N}$ com $(x - \langle x, \mathfrak{n}(x)\rangle \mathfrak{n}(x), \mathfrak{n}(x))$, isto é, podemos descrever $\mathcal{N}$ por meio das equações

$$q = \mathfrak{n}(x) \;\text{ e }\; p = x - \langle x, \mathfrak{n}(x)\rangle \mathfrak{n}(x),\; x \in \mathcal{H}.$$

Daí,

$$pdq = xd\mathfrak{n}(x) - \langle x, \mathfrak{n}(x)\rangle \mathfrak{n}(x) d\mathfrak{n}(x) = xd\mathfrak{n}(x) = d\langle x, \mathfrak{n}(x)\rangle - \mathfrak{n}(x)dx = d\langle x, \mathfrak{n}(x)\rangle.$$

Logo, $dp \wedge dq = 0$ em $\mathcal{N}$ e, portanto, $\mathcal{N}$ é Lagrangiana. □

## 3.4 FIBRADOS LAGRANGIANOS EQUIVALENTES

**Definição 3.38.** Um fibrado $\pi : E^{2n} \to B^n$ é chamado ***Lagrangiano*** se o espaço $E$ é uma variedade simplética e as fibras são subvariedades Lagrangianas.

**Exemplo 3.39.** Seja $\mathbb{R}^{2n}$ o espaço simplético linear, e seja $\pi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ dada por $\pi(p, q) = q$. Então $\pi$ é um fibrado Lagrangiano, chamado ***fibrado Lagrangiano padrão***.

**Exemplo 3.40.** O fibrado cotangente $\rho : T^*B \to B$ de qualquer variedade $B$ é Lagrangiano. De fato, a 1-forma $\alpha = pdq$ é zero ao longo das fibras, portanto também seu diferencial $\omega = d\alpha$ é zero ao longo das fibras.

**Definição 3.41.** Dois fibrados Lagrangianos são ***Lagrangianos equivalentes*** se existe um simplectomorfismo dos espaços fibrados tal que leva as fibras do primeiro fibrado para as fibras do segundo fibrado.

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "f"'] & B_1 \arrow[d] \\ E_2 \arrow[r, "\pi_2"'] & B_2 \end{tikzcd}$$

Aqui $f$ é o simplectomorfismo que leva as fibras do primeiro fibrado para as fibras do segundo fibrado.

**Proposição 3.42.** *Sejam $\pi_1 : E_1 \to B_1$ e $\pi_2 : E_2 \to B_2$ dois fibrados Lagrangianos. Se $f : E_1 \to E_2$ é um simplectomorfismo que leva fibra em fibra, então existe um único difeomorfismo $g : B_1 \to B_2$ tal que $g \circ \pi_1 = \pi_2 \circ f$, isto é, que faz o diagrama*

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "f"'] & B_1 \arrow[d, "g"] \\ E_2 \arrow[r, "\pi_2"'] & B_2 \end{tikzcd}$$

*comutar.*

**Demonstração:** Seja $\xi : B_1 \to E_1$ uma seção do fibrado $\pi_1 : E_1 \to B_1$. Basta definir $g = \pi_2 \circ f \circ \xi$. $\square$

**Exemplo 3.43.** Vamos considerar o fibrado cotangente padrão $\pi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ com $\pi(p,q) = q$. Então para toda função $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, a aplicação $h : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ dado por $h(p,q) = (p + \dfrac{\partial S}{\partial q}, q)$ é uma equivalência Lagrangiana.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^{2n} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "h"'] & \mathbb{R}^n \arrow[d] \\ \mathbb{R}^{2n} \arrow[r, "\pi"'] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

Sejam $B$ uma variedade e $g : B \to B$ um difeomorfismo. A aplicação $g^* : T^*B \to T^*B$ definida por

$$g^*(x, \phi) = (g(x), \phi \circ (dg_x)^{-1})$$

é chamada ***induzida*** por $g$.

**Proposição 3.44.** *Se $B$ é uma variedade e $g : B \to B$ é um difeomorfismo, então a aplicação induzida $g^* : T^*B \to T^*B$ é uma equivalência Lagrangiana.*

**Demonstração:** Notemos que se $\pi : T^*B \to B$ é a projeção usual, então, por definição de $g^*$, temos

$$\pi \circ g^*(x, \xi) = \pi(g(x), \xi \circ (dg_x)^{-1}) = g(x) = g \circ \pi(x, \xi),$$

para todo $(x, \xi) \in T^*B$, isto é,

$$\pi \circ g^* = g \circ \pi. \tag{3.3}$$

Em particular, $g^*$ leva a fibra sobre $x$ na fibra sobre $g(x)$, isto é, $g^*$ é um difeomorfismo de fibrado.

Seja $p = (x, \xi) \in T^*B$. Assim, $g^*(p) = (g(x), \xi \circ (dg_x)^{-1})$. Usando a igualdade em (3.3) e a notação do Exemplo 3.17, temos que

$$\begin{aligned} ((g^*)^*\alpha)_p(u) &= \alpha_{g^*(p)}\left(dg^*_p(u)\right) \\ &= \xi \circ (dg_x)^{-1}\left(d\pi_{g^*(p)}\left(dg^*_p(u)\right)\right) \\ &= \xi\left(dg^{-1}_{g(x)} \circ d\pi_{g^*(p)} \circ dg^*_p(u)\right) \\ &= \xi\left(d\left(g^{-1} \circ \pi \circ g^*\right)_p(u)\right) \\ &= \xi\left(d\left(g^{-1} \circ g \circ \pi\right)_p(u)\right) \\ &= \xi\left(d\pi_p(u)\right) \\ &= \alpha_p(u), \end{aligned}$$

para todo $u \in T_p(T^*B)$, isto é,

$$(g^*)^*\alpha = \alpha.$$

Como a forma simplética $\omega$, em $T^*B$, é dada por $\omega = d\alpha$ temos, pela Proposição 2.35,

$$(g^*)^*\omega = (g^*)^*d\alpha = d(g^*)^*\alpha = d\alpha = \omega,$$

concluindo a demonstração. $\square$

**Proposição 3.45.** *Se $B$ é uma variedade e $S : B \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, então a aplicação $\Phi : T^*B \to T^*B$ dada por*

$$\Phi(x,\xi) = (x, \xi + dS_x)\,,$$

*é uma equivalência Lagrangiana do fibrado cotangente $\pi : T^*B \to B$ nele mesmo.*

**Demonstração:** Notemos que

$$\pi \circ \Phi(x,\xi) = \pi\,(x, \xi + dS_x) = x = \pi(x,\xi),$$

para todo $(x,\xi) \in T^*B$, isto é,

$$\pi \circ \Phi = \pi. \tag{3.4}$$

Em particular, $\Phi$ deixa cada fibra de $T^*B$ invariante e, assim, $\Phi$ é um difeomorfismo de fibrado.

Seja $p = (x,\xi) \in T^*B$. Assim, $\Phi(p) = (x, \xi + dS_x)$. Usando a igualdade em (3.4) e a notação do Exemplo 3.17, temos que

$$\begin{aligned}
(\Phi^*\alpha)_p\,(u) &= \alpha_{\Phi(p)}(d\Phi_p(u)) \\
&= (\xi + dS_x)\left(d\pi_{\Phi(p)}\,(d\Phi_p(u))\right) \\
&= (\xi + dS_x)\,(d(\pi \circ \Phi)_p(u)) \\
&= (\xi + dS_x)\,(d\pi_p(u)) \\
&= \xi\,(d\pi_p(u)) + dS_x\,(d\pi_p(u)) \\
&= \alpha_p(u) + d(S \circ \pi)_p(u) \\
&= (\alpha + d(S \circ \pi))_p(u),
\end{aligned}$$

para todo $u \in T_p(T^*B)$, isto é,

$$\Phi^*\alpha = \alpha + d(S \circ \pi).$$

Como a forma simplética $\omega$, em $T^*B$, é dada por $\omega = d\alpha$ temos, pela Proposição 2.35,

$$\Phi^*\omega = \Phi^*d\alpha = d(\Phi^*\alpha) = d(\alpha + d(S \circ \pi)) = d\alpha + d^2(S \circ \pi) = \omega,$$

concluindo a demonstração. $\square$

**Teorema 3.46.** *Seja $B$ uma variedade. Se $\Theta$ é uma equivalência Lagrangiana de um germe do fibrado $\pi : T^*B \to B$ em si mesmo, então existem um germe de um difeomorfismo $g : B \to B$ e um germe de uma função diferenciável $S : B \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\Theta(x,\xi) = \Big(g(x), \xi \circ (dg_x)^{-1} + dS_{g(x)}\Big).$$

**Demonstração:** Veja a referência (15), pag 294. □

Consideremos a ação de uma equivalência Lagrangiana $\Theta$, como Teorema 3.46, sobre o germe $L$ de uma variedade Lagrangiana definida por uma seção do fibrado cotangente. Então podemos escrever o germe $L$ em termos de uma função geradora $F$ pela fórmula

$$p = \frac{\partial F}{\partial q}.$$

O germe $\Theta(L)$ também é uma seção. Pelo Teorema 3.46, a equivalência $\Theta$ é escrita em termos de um difeomorfismo da base $g$ e de uma função na base $S$, pela fórmula

$$\Theta(x,\xi) = \Big(g(x), \xi \circ (dg_x)^{-1} + dS_{g(x)}\Big).$$

**Teorema 3.47.** *A função geradora $\widetilde{F}$ do germe $\Theta(L)$ é obtido a partir da função geradora do germe $L$ por um difeomorfismo da base e a adição de uma função na base:*

$$\widetilde{F} = F \circ g^{-1} + S.$$

**Demonstração:** Como $F$ é função geradora para $L$, se $r \in L \Rightarrow r = \left(q, \dfrac{\partial F}{\partial q}\right)$, logo temos que para $r \in L$, $\Theta(r)$ é expresso como

$$\begin{aligned}
\Theta\left(q, \frac{\partial F}{\partial q}\right) &= \left(g(q), \frac{\partial F}{\partial q} \circ (dg_q)^{-1} + dS_{g(q)}\right) \\
&= \left(g(q), \frac{\partial F}{\partial q} \circ d(g^{-1})_{g(q)} + dS_{g(q)}\right) \\
&= \left(g(q), \frac{\partial}{\partial q}\Big(F \circ g^{-1} + S\Big)\right)
\end{aligned}$$

Assim

$$\Theta(L) = \left\{ \left(g(q), \frac{\partial}{\partial q}\Big(F \circ g^{-1} + S\Big)\right) : q \in \mathbb{R}^n \right\},$$

portanto considerando $\widetilde{F} = F \circ g^{-1} + S$, temos que $\widetilde{F}$ é uma função geradora para $\Theta(L)$. □

**Definição 3.48.** Sejam $\pi : E \to B$ um fibrado Lagrangiano, $L$ uma subvariedade Lagrangiana de $E$ e $i : L \to E$ a inclusão de $L$ em $E$. A restrição da projeção $\pi$ a $L$, ou seja, $\pi \circ i : L \to B$, é chamada ***aplicação Lagraniana***.

**Definição 3.49.** Duas aplicações Lagrangianas $\mathcal{L}_1 : L_1 \to B_1$ e $\mathcal{L}_2 : L_2 \to B_2$ são chamados ***Lagrangianos equivalentes*** se existe uma equivalência Lagrangiana de seus fibrados $\Phi : E_1 \to E_2$ que envia o domínio da primeira aplicação para o domínio da segunda aplicação, ou seja, $\Phi(L_1) = L_2$.

$$\begin{tikzcd} L_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d] & E_1 \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\Phi"'] & B_1 \arrow[d] \\ L_2 \arrow[r, "i_2"'] & E_2 \arrow[r, "\pi_2"'] & B_2 \end{tikzcd}$$

# 4 EQUIVALÊNCIAS LAGRANGIANA E DE FAMÍLIAS GERADORAS

Neste capítulo, vamos caracterizar equivalência Lagrangiana (definida no Capítulo 3) em termos de famílias geradoras, o que será feito no Teorema 4.31, que é o principal resultado deste capítulo e um dos resultados centrais do presente trabalho. O Teorema 4.31 será usado no próximo capítulo para o estudo da aplicação de Gauss de uma variedade. Antes, porém, precisaremos definir e obter alguns resultados de famílias geradoras e de $R^+$-equivalência de famílias geradoras. Todos os resultados deste capítulo se encontra em Arnold-Gusein-Zade-Varchenko (15) que será nossa referência principal. Nosso objetivo é deixar os conceitos e demonstrações mais claras, para isso vamos usar como apoio as referencias Izumiya-Romero-Del Carmen (28), Petters-Levine-Wambsganss (29) e Craizer-Domitrz-Rios (30).

## 4.1 FAMÍLIAS GERADORAS

Queremos estudar subvariedades Lagrangianas num fibrado cotangente $T^*\mathbb{R}^l$. Nesse sentido, consideraremos um fibrado do tipo $\rho : \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}^l$ dado por

$$\rho(x, \lambda) = \lambda,$$

chamado ***fibrado auxiliar***. Notemos que dado $\lambda_0 \in \mathbb{R}^l$ temos que a fibra de $\rho$ sobre $\lambda_0$ é dada por

$$\mathbb{R}^k \times \{\lambda_0\}.$$

**Definição 4.1.** O ***espaço misto*** para $\rho$ é o conjunto de todos os vetores cotangentes a $\mathbb{R}^{k+l}$, isto é, de todos os vetores em $T^*\mathbb{R}^{k+l}$, que anulam vetores tangentes às fibras do fibrado $\rho$.

Denotemos o espaço misto para $\rho$ pela letra $\mathcal{A}$. Explicitamente, $\mathcal{A}$ é escrito como

$$\mathcal{A} = \{(x, \lambda, y, \kappa) \in T^*\mathbb{R}^{k+l} \ : \ y = 0\}$$

e, a partir daí, temos que $\mathcal{A}$ é uma subvariedade de $T^*\mathbb{R}^{k+l}$.

**Definição 4.2.** Uma subvariedade Lagrangiana $M$ de $T^*\mathbb{R}^{k+l}$ é chamada ***$\rho$-regular*** se $M$ é transversal ao espaço misto $\mathcal{A}$ para $\rho$.

Seja $(p, \xi) \in \mathcal{A}$. Notemos que, escrevendo $p = (x, \lambda)$, temos $(p, \xi) \in T^*\mathbb{R}^{k+l}$ e $\xi(T_x\mathbb{R}^k) = \{0\}$. Assim,

$$\xi_0 = \xi|_{T_\lambda\mathbb{R}^l} : T_\lambda\mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$$

é bem definida e identifica-se a $\xi$. Consideremos a projeção

$$\pi^*\rho : \mathcal{A} \to T^*\mathbb{R}^l, \quad (p, \xi) \mapsto (\lambda, \xi_0).$$

Alternativamente, denotando um elemento de $\mathcal{A}$ por $(x, \lambda, 0, \kappa)$, segue que

$$\pi^*\rho(x, \lambda, 0, \kappa) = (\lambda, \kappa).$$

Temos que $\pi^*\rho : \mathcal{A} \to T^*\mathbb{R}^l$ é um fibrado e as fibras de $\pi^*\rho$ são isomorfas às fibras do fibrado auxiliar $\rho : \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}^l$, já que para $(\lambda_0, \kappa_0) \in T^*\mathbb{R}^l$ temos que a fibra sobre $(\lambda_0, \kappa_0)$ é dada por

$$\mathbb{R}^k \times \{(\lambda_0, 0, \kappa_0)\}.$$

Dado um ponto $\xi = (x, \lambda, y, \kappa) \in T^*\mathbb{R}^{k+l}$ e $U$ um subespaço vetorial de $T^*_\xi\mathbb{R}^{k+l}$, denotemos por $U^\perp$ o ortogonal a $U$, em relação a forma simplética de $T^*_\xi\mathbb{R}^{k+l}$.

**Lema 4.3.** *Se $\xi = (x_0, \lambda_0, y_0, \kappa_0) \in \mathcal{A}$ e $U = T_\xi\mathcal{A} \subset T^*_\xi\mathbb{R}^{k+l}$, então*

$$U^\perp = \mathbb{R}^k \times \{(\lambda_0, 0, \kappa_0)\},$$

*isto é, $U^\perp$ é uma fibra do fibrado $\pi^*\rho$.*

**Demonstração:** A forma simplética em $T^*_\xi\mathbb{R}^{k+l}$ é dada por

$$\omega = \sum dy \wedge dx + \sum d\kappa \wedge d\lambda.$$

e o subespaço $U$ é definido pela equação

$$y = 0.$$

Logo, $U^\perp$ é o espaço $\mathbb{R}^k \times \{(\lambda_0, 0, \kappa_0)\}$ que é uma fibra do fibrado $\pi^*\rho$. $\square$

**Teorema 4.4.** *Se $M \subset T^*\mathbb{R}^{k+l}$ é uma subvariedade Lagrangiana $\rho$-regular, então a imagem $\pi^*\rho(M \cap \mathcal{A}) \subset T^*\mathbb{R}^l$ é uma subvariedade Lagrangiana imersa.*

**Demonstração:** Sejam $\xi = (x_0, \lambda_0, y_0, \kappa_0) \in M \cap \mathcal{A}$, $U = T_\xi\mathcal{A}$ e $V = T_\xi M$. Como $M$ é $\rho$-regular,

$$U + V = T^*_\xi\mathbb{R}^{k+l}.$$

Daí, e do fato que uma forma simplética é não degenerada, segue que

$$U^\perp \cap V^\perp = \{0\}.$$

Mas $V^\perp = V$, já que $V$ é um subespaço Lagrangiano e, assim, $U^\perp \cap V = \{0\}$. Logo, a interseção do núcleo de $d(\pi^*\rho)_\xi$ com $T_\xi(M \cap \mathcal{A})$ é trivial e, assim, a restrição da projeção $\pi^*\rho$ a $M \cap \mathcal{A}$ é uma imersão, o que implica que $\pi^*\rho(M \cap \mathcal{A})$ é uma subvariedade imersa de $T^*\mathbb{R}^l$, de dimensão $l$.

Para ver que $\pi^*\rho(M\cap\mathcal{A})$ é Lagrangiana, basta mostrar que $\pi^*\rho(M\cap\mathcal{A})$ é isotrópica, já que é de dimensão $l$. Como $\mathcal{A}$ é dada pela equação

$$y = 0,$$

segue que a forma simplética, em $\mathcal{A}$, é da forma

$$\omega = \sum dy \wedge dx + \sum d\kappa \wedge d\lambda = \sum d\kappa \wedge d\lambda.$$

Como $M$ é Lagrangiana, $\omega$ anula $V$ e, assim, $\omega = \sum d\kappa \wedge d\lambda$ é nula em $U \cap V$, mostrando que $\pi^*\rho(M \cap \mathcal{A})$ é isotrópica, o que conclui a demonstração. $\square$

Na verdade, toda subvariedade Lagrangiana em $T^*\mathbb{R}^l$, localmente, é imagem de alguma projeção $\pi^*\rho : \mathcal{A} \to T^*\mathbb{R}^l$, como é afirmado no seguinte resultado.

**Teorema 4.5.** *Se $L \subset T^*\mathbb{R}^l$ é o germe de uma subvariedade Lagrangiana, então existem $k \in \mathbb{N}$ e germe de uma subvariedade Lagrangiana $M \subset T^*\mathbb{R}^{k+l}$, $\rho$-regular, tal que*

$$L = \pi^*\rho(M \cap \mathcal{A}).$$

**Demonstração:** Seja $S$ uma função geradora para $L$, isto é, $L$ pode ser descrito por meio de uma função geradora $S(\lambda_I, \kappa_J)$ pela igualdade

$$L = \left\{(\lambda, \kappa) : \kappa_I = \frac{\partial S}{\partial \lambda_I} \ \text{ e } \ \lambda_J = -\frac{\partial S}{\partial \kappa_J}\right\}, \tag{4.1}$$

sendo que $(I, J)$ é uma partição do conjunto $\{1, \ldots, l\}$ (veja comentário na Página 31). Seja $k$ o número de elementos de $J$ (o número de argumentos patológicos da função $S$). Consideremos a família $F : \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}$, definida por

$$F(x, \lambda) = S(\lambda_I, x) + \langle \lambda_J, x \rangle, \tag{4.2}$$

sendo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno canônico em $\mathbb{R}^k$. A família $F$ define uma seção Lagrangiana $M$ do fibrado cotangente $T^*\mathbb{R}^{k+l}$ dada por

$$M = \left\{(x, \lambda, y, \kappa) : y = \frac{\partial F}{\partial x} \ \text{ e } \ \kappa = \frac{\partial F}{\partial \lambda}\right\}.$$

Mostremos que $M$ é $\rho$-regular, onde $\rho : \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}^l$ é o fibrado auxiliar usual. Da igualdade em (4.2) temos, em $M$,

$$y = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial x} + \lambda_J, \quad \kappa_I = \frac{\partial F}{\partial \lambda_I} = \frac{\partial S}{\partial \lambda_I} \quad \text{e} \quad \kappa_J = \frac{\partial F}{\partial \lambda_J} = x. \tag{4.3}$$

Assim, em $M$, $\det\left(\dfrac{\partial y}{\partial \lambda_J}\right) \neq 0$, o que mostra que o conjunto de formas $\{dy_1, \ldots, dy_k\}$ é linearmente independente em $M$. Consequentemente, $M$ é transversal a $\mathcal{A}$, já que $\mathcal{A}$ é dada pela equação

$$y = 0,$$

o que significa que $M$ é $\rho$-regular.

Em $M \cap \mathcal{A}$, com $y = 0$, temos, de (4.3),

$$\lambda_J = -\frac{\partial S}{\partial x}, \quad \kappa_I = \frac{\partial S}{\partial \lambda_I} \quad \text{e} \quad x = \kappa_J.$$

Como a projeção $\pi^*\rho$ é dada por

$$\pi^*\rho(x, \lambda, 0, \kappa) = (\lambda, \kappa),$$

segue que a imagem de $M \cap \mathcal{A}$ por $\pi^*\rho$ é o conjunto

$$\left\{(\lambda, \kappa) : \kappa_I = \frac{\partial S}{\partial \lambda_I} \ \text{ e } \ \lambda_J = -\frac{\partial S}{\partial \kappa_J}\right\}.$$

Portanto, de (4.1), $L = \pi^*\rho(M \cap \mathcal{A})$. □

**Observação 4.6.** Seja $F : \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Aqui e a partir de agora usaremos as notações

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, \lambda) \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x, \lambda),$$

sendo $(x, \lambda) = (x_1, \ldots, x_k, \lambda_1, \ldots, \lambda_l)$, para denotar, respectivamente, os vetores

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(x, \lambda), \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_k}(x, \lambda)\right) \quad \text{e} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial \lambda_1}(x, \lambda), \ldots, \frac{\partial F}{\partial \lambda_l}(x, \lambda)\right).$$

Em particular, podemos pensar nos símbolos $\frac{\partial F}{\partial x}$ e $\frac{\partial F}{\partial \lambda}$ como aplicações

$$\frac{\partial F}{\partial x} : \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}^k \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda} : \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}^l.$$

Uma função diferenciável $F : \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}$ é uma ***função geradora*** de uma seção Lagrangiana $M$ de $T^*\mathbb{R}^{k+l}$ quando $M$ pode ser descrita como segue

$$M = \left\{(x, \lambda; y, \kappa) \in T^*\mathbb{R}^{k+l} : \ y = \frac{\partial F}{\partial x}(x, \lambda), \ \ \kappa = \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x, \lambda)\right\}.$$

**Definição 4.7.** Seja $L$ um germe Lagrangiano em $T^*\mathbb{R}^l$. Uma ***família geradora*** para $L$ é uma função germe $F : \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}$, que é uma função geradora para um germe de uma subvariedade Lagrangiana $M \subset T^*\mathbb{R}^{k+l}$, $\rho$-regular, definida por

$$M = \left\{(x, \lambda; y, \kappa) : \ y = \frac{\partial F}{\partial x}(x, \lambda), \ \ \kappa = \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x, \lambda)\right\}$$

tal que $L = \pi^*\rho(M \cap \mathcal{A})$, sendo $\mathcal{A}$ o espaço misto do fibrado auxiliar $\rho(x, \lambda) = \lambda$.

Em outras palavras, $L$ pode-se expressar em termos de $F$ como

$$L = \left\{ (\lambda, \kappa) \in T^*\mathbb{R}^l : \ \exists x : \frac{\partial F}{\partial x}(x, \lambda) = 0, \ \ \kappa = \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x, \lambda) \right\},$$

isto é, $L$ é obtido intersectando $M$ com $\mathcal{A}$ e depois projetando em $T^*\mathbb{R}^l$.

**Exemplo 4.8.** Vamos encontrar a subvariedade Lagrangiana correspondente à família geradora $F : \mathbb{R}^{1+2} \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x, \lambda) = x^4 + \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x, \ \ \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Por definição, temos que

$$L = \left\{ (\lambda, \kappa) \in T^*\mathbb{R}^2 : \ \exists x : \frac{\partial F}{\partial x}(x, \lambda) = 0, \ \ \kappa = \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x, \lambda) \right\}.$$

Notemos que

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, \lambda) = 4x^3 + 2\lambda_1 x + \lambda_2 \Rightarrow 4x^3 + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0, \quad \text{e}$$
$$(\kappa_1, \kappa_2) = \kappa = \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x, \lambda) = \left( \frac{\partial F}{\partial \lambda_1}, \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} \right) = (x^2, x) \Rightarrow \kappa_1 = x^2 \ \ e \ \ \kappa_2 = x.$$

Portanto,

$$L = \left\{ (\lambda, \kappa) \in T^*\mathbb{R}^2 : \ \lambda_2 = -4x^3 - 2\lambda_1 x, \ \ k_1 = k_2^2 \right\}.$$

**Proposição 4.9.** *Sejam $M \subset T^*\mathbb{R}^{k+l}$ uma subvariedade Lagrangiana e $F : \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}$ uma função geradora para $M$, isto é,*

$$M = \left\{ (x, \lambda; y, \kappa) \in T^*\mathbb{R}^{k+l} : \ y = \frac{\partial F}{\partial x}(x, \lambda), \ \ \kappa = \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x, \lambda) \right\}.$$

*Temos que $M$ é $\rho$-regular se, e somente se,*

$$posto \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda \partial x} \right] = k \quad em \quad (x, \lambda) \quad onde \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x, \lambda) = 0.$$

*Aqui $\left[ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda \partial x} \right]$ denota a matriz Jacobiana da aplicação $\frac{\partial F}{\partial x} : \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}^k$.*

**Demonstração:** Se $(x, \lambda; y, \kappa)$ é um ponto em $M$, então para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$ temos

$$y_j = \frac{\partial F}{\partial x_j}(x, \lambda).$$

Daí, nos pontos de $M$,

$$dy_j = \sum_i \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \right) dx_i + \sum_m \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_m \partial x_j} \right) d\lambda_m,$$

isto é, a matriz de $dy$ é a transposta da matriz $\left[\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 F}{\partial \lambda \partial x}\right]$. Agora, a $\rho$-regularidade de $M$ significa a independência linear das restrições das formas $dy_j$ a $M$, nos pontos de $M \cap \mathcal{A}$, que é equivalente a matriz $\left[\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 F}{\partial \lambda \partial x}\right]$ ter posto máximo. $\square$

Sejam $L \subset T^*\mathbb{R}^l$ uma subvariedade Lagrangiana, $F : \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}$ uma família geradora para $L$ e $\mathcal{L} : L \to \mathbb{R}^l$ a aplicação Lagrangiana associada a $L$, isto é, $\mathcal{L} = \pi \circ i$, sendo $i : L \to T^*\mathbb{R}^l$ a inclusão e $\pi : T^*\mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^l$ a projeção canônica.

Dado $(\lambda_0, \kappa_0) \in L$, seja $x_0 \in \mathbb{R}^k$ tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, \lambda_0) = 0 \quad \text{e} \quad \kappa_0 = \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x_0, \lambda_0).$$

Denotemos por $\left[\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right]$ e $\left[\dfrac{\partial^2 F}{\partial \lambda \partial x}\right]$ as matrizes das derivadas parciais da aplicação

$$\frac{\partial F}{\partial x} : \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}^k,$$

em relação a $x$ e a $\lambda$, respectivamente, calculadas no ponto $(\lambda_0, \kappa_0)$, e por $\left[\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial \lambda}\right]$ a matriz da derivada parcial da aplicação

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} : \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}^l,$$

em relação a $x$, calculada no ponto $(\lambda_0, \kappa_0)$. Essas matrizes são de ordem $k \times k$, $k \times l$ e $l \times k$, respectivamente. Assim, induzem, de forma natural, aplicações

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda \partial x} : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^k \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \lambda} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l,$$

respectivamente. Como $F$ é uma família geradora de $L$ segue que

$$y = \frac{\partial F}{\partial x} \quad \text{e} \quad \kappa = \frac{\partial F}{\partial \lambda},$$

e, consequentemente,

$$dy = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right) dx + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \lambda \partial x}\right) d\lambda \quad \text{e} \quad d\kappa = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \lambda}\right) dx + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2}\right) d\lambda. \tag{4.4}$$

Seja $\eta$ um vetor no núcleo da derivada da aplicação Lagrangiana $\mathcal{L}$, no ponto $(\lambda_0, \kappa_0)$. Vamos denotar o vetor com componentes $du_i(\eta)$, dependendo de $\eta$, por $du(\eta)$ (aqui $u$ pode denotar $x$ ou $y$ ou $\kappa$). Com esta notação,

$$dy(\eta) = 0 \quad \text{e} \quad d\lambda(\eta) = 0.$$

Logo, pelas igualdades em (4.4), temos que

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right) dx(\eta) = 0 \quad \text{e} \quad d\kappa(\eta) = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \lambda}\right) dx(\eta).$$

Isso mostra que o núcleo da derivada da aplicação Lagrangiana $\mathcal{L}$, no ponto $(\lambda_0, \kappa_0)$, pode ser expresso em termos de uma família geradora, como é resumido na seguinte proposição.

**Proposição 4.10.** *Considerando a notação acima, temos*

1. *se $\eta$ está no núcleo da derivada da aplicação Lagrangiana $\mathcal{L}$, então*
$$dx(\eta) \in Ker\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right) \quad e \quad d\kappa(\eta) = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \lambda}\right) dx(\eta),$$
2. *a aplicação $\eta \mapsto d\kappa(\eta)$ é um isomorfismo entre o núcleo da derivada da aplicação Lagrangiana $\mathcal{L}$ e o espaço $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \lambda}\right) Ker\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)$,*

*sendo $F$ uma família geradora para a subvariedade Lagrangiana $L$.*

**Demonstração:** O item 1. é o argumento acima e o item 2. segue da $\rho$-regularidade da subvariedade Lagrangiana que define $L$, uma vez que $L$ está imerso em $T^*\mathbb{R}^l$. □

**Corolário 4.11.** *A dimensão do núcleo da derivada de $\mathcal{L}$ não excede* $\min(k, l)$, *sendo $k$ a dimensão da fibra e $l$ a dimensão da base do fibrado auxiliar.*

**Demonstração:** Como a aplicação linear $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial \lambda}$ é de $\mathbb{R}^k$ em $\mathbb{R}^l$ segue, da Proposição 4.10, que a dimensão do núcleo da derivada de $\mathcal{L}$ é menor ou igual do que $\min(k, l)$. □

**Corolário 4.12.** *Em um ponto onde a fibra do fibrado auxiliar para o germe da família geradora tem a menor dimensão possível,* $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0$.

**Demonstração:** Se a dimensão $k$ da fibra do fibrado auxiliar é a menor possível, então a dimensão do núcleo da derivada da aplicação Lagrangiana é $k$. Pela Proposição 4.10, devemos ter
$$\dim Ker\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right) = k,$$
o que significa que $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0$. □

## 4.2 EQUIVALÊNCIAS DE FAMÍLIAS GERADORAS

**Definição 4.13.** Sejam $\pi_1 : E_1 \to B_1$ e $\pi_2 : E_2 \to B_2$ dois fibrados diferenciáveis. Um ***difeomorfismo de fibrados***, entre $E_1$ e $E_2$, é um difeomorfismo $\Theta : E_1 \to E_2$ que leva fibras de $E_1$ em fibras de $E_2$.

**Proposição 4.14.** *Sejam $\pi_1 : E_1 \to B_1$ e $\pi_2 : E_2 \to B_2$ dois fibrados diferenciáveis e $\Theta : E_1 \to E_2$ um difeomorfismo. Temos que $\Theta$ é um difeomorfismo de fibrados se, e somente se, existe um difeomorfismo $f : B_1 \to B_2$ tal que $\pi_2 \circ \Theta = f \circ \pi_1$, isto é, que faz o seguinte diagrama*

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "\Theta"] \arrow[d, "\pi_1"'] & E_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\ B_1 \arrow[r, "f"'] & B_2 \end{tikzcd}$$

*comutar.*

**Demonstração:** Suponhamos que $\Theta$ é um difeomorfismo de fibrados. Seja $\xi : B_1 \to E_1$ uma seção do fibrado $\pi_1 : E_1 \to B_1$. Definindo $f = \pi_2 \circ \Theta \circ \xi$ temos que $f$ é um difeomorfismo e faz o diagrama comutar.

Reciprocamente, se $f : B_1 \to B_2$ é um difeomorfismo tal que $\pi_2 \circ \Theta = f \circ \pi_1$, então dados $x \in B_1$ e $\xi \in \pi_1^{-1}(x)$, temos

$$\pi_2(\Theta(\xi)) = \pi_2 \circ \Theta(\xi) = f \circ \pi_1(\xi) = f(\pi_1(x)) = f(x).$$

Logo, $\Theta(\xi) \in \pi_2^{-1}(f(x))$, mostrando que $\Theta$ leva a fibra $\pi_1^{-1}(x)$ na fibra $\pi_2^{-1}(f(x))$. $\square$

**Definição 4.15.** Sejam $F_1, F_2 : \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}$ duas famílias de funções, definidas sobre o espaço do fibrado auxiliar $\rho : \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}^l$. Dizemos que

1. $F_1$ é $R$***-equivalente*** a $F_2$ se existe um difeomorfismo de fibrados $\Theta : \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}^{k+l}$, na forma $\Theta(x, \lambda) = (h(x, \lambda), \varphi(\lambda))$ com $h : \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}^k$ e $\varphi : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^l$, tal que $F_1 = F_2 \circ \Theta$, isto é,

$$F_1(x, \lambda) = F_2(\Theta(x, \lambda)) = F_2(h(x, \lambda), \varphi(\lambda)).$$

2. $F_1$ é $R^+$***-equivalente*** a $F_2$ se existe um difeomorfismo de fibrados $\Theta : \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}^{k+l}$, como no item 1., e uma função diferenciável $\Phi : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$ tal que

$$F_1(x, \lambda) = F_2(\Theta(x, \lambda)) + \Phi(\lambda) = F_2(h(x, \lambda), \varphi(\lambda)) + \Phi(\lambda).$$

No caso que considerarmos germes, temos definições análogas.

**Definição 4.16.** Dois germes de famílias de funções $F_1 : \mathbb{R}^{k_1+l} \to \mathbb{R}$ e $F_2 : \mathbb{R}^{k_2+l} \to \mathbb{R}$ são chamados $R^+$-***equivalentes estáveis*** se existem

- $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ tais que $k = k_1 + m_1 = k_2 + m_2$,

- um difeomorfismo de fibrados $\Theta : \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}^{k+l}$, na forma

$$\Theta(x^1, z^1, \lambda) = (h(x^1, z^1, \lambda), g(x^1, z^1, \lambda), \varphi(\lambda))$$

  com $x^1 \in \mathbb{R}^{k_1}$, $z^1 \in \mathbb{R}^{m_1}$, $h : \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}^{k_2}$, $g : \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}^{m_2}$ e $\varphi : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^l$,

- formas quadráticas não degeneradas $Q_i : \mathbb{R}^{m_i} \to \mathbb{R}$, e

- uma função diferenciável $\Phi : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$

tais que

$$F_1(x^1, \lambda) + Q_1(z^1) = F_2(h(x^1, z^1, \lambda), \varphi(\lambda)) + Q_2(g(x^1, z^1, \lambda)) + \Phi(\lambda).$$

**Observação 4.17.** No caso em que as dimensões dos espaços das variáveis são iguais, podemos substituir $R^+$-equivalente estável por $R^+$-equivalente (ver a referência (28), pag. 103).

Lembremos, do Teorema 3.46, que se $\Theta$ é uma equivalência Lagrangiana de um germe do fibrado cotangente $\pi : T^*\mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}^{k+l}$ em si mesmo, então existem um germe de difeomorfismo $g : \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}^{k+l}$ e um germe de função diferenciável $S : \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}$ tais que

$$\Theta(x, \xi) = \left(g(x), \xi \circ (dg_x)^{-1} + dS_{g(x)}\right).$$

Com esta notação, temos a seguinte definição.

**Definição 4.18.** Uma equivalência Lagrangiana $\Theta$ do fibrado cotangente $T^*\mathbb{R}^{k+l}$ é chamada ***fibrada*** se o difeomorfismo correspondente $g : \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}^{k+l}$ é um difeomorfismo de fibrados, isto é, leva fibra em fibra do fibrado auxiliar $\rho : \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}^l$, enquanto que a função correspondente $S : \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}$ é constante ao longo das fibras do fibrado auxiliar.

$$\begin{tikzcd}
T^*\mathbb{R}^{k+l} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\Theta"'] & \mathbb{R}^{k+l} \arrow[d, "g"] \\
T^*\mathbb{R}^{k+l} \arrow[r, "\pi"'] & \mathbb{R}^{k+l}
\end{tikzcd}$$

**Proposição 4.19.** *Uma equivalência Lagrangiana de $T^*\mathbb{R}^{k+l}$ é fibrada se, e somente se mapea o espaço misto $\mathcal{A}$ nele mesmo.*

**Demonstração:** Veja a referência (15), pag. 305. □

**Proposição 4.20.** *Sejam $F_1, F_2 : \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}$ duas funções. Se $F_1$ é uma família geradora e é $R^+$-equivalente a $F_2$, então $F_2$ também é uma família geradora e, além disso, os germes das aplicações Lagrangianas determinadas por $F_1$ e $F_2$ são Lagrangianos equivalentes.*

**Demonstração:** Sejam $\Theta : \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}^{k+l}$ um difeomorfismo de fibrados, do fibrado auxiliar $\rho : \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}^l$, na forma $\Theta(x,\lambda) = (h(x,\lambda), \phi(\lambda))$, com $h : \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}^k$ e $\phi : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^l$, e $\Phi : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tais que

$$F_1(x,\lambda) = F_2(\Theta(x,\lambda)) + \Phi(\lambda) = F_2(h(x,\lambda), \phi(\lambda)) + \Phi(\lambda). \tag{4.5}$$

Pela Proposição 3.44, a aplicação induzida $\Theta^* : T^*\mathbb{R}^{k+l} \to T^*\mathbb{R}^{k+l}$ é uma equivalência Lagrangiana, isto é, $\Theta^*$ é um difeomorfismo que faz o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} T^*\mathbb{R}^{k+l} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\Theta^*"'] & \mathbb{R}^{k+l} \arrow[d, "\Theta"] \\ T^*\mathbb{R}^{k+l} \arrow[r, "\pi"'] & \mathbb{R}^{k+l} \end{tikzcd}$$

comutar. Consideremos a função $\widetilde{\Phi} : \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}$, definida por $\widetilde{\Phi}(x,\lambda) = \Phi(\lambda)$. Como as fibras do fibrado auxiliar $\rho : \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}^l$ são da forma $\mathbb{R}^k \times \{\lambda\}$, com $\lambda \in \mathbb{R}^l$, temos que $\widetilde{\Phi}$ é constante ao longo das fibras de $\rho$. Daí, a aplicação $\widetilde{\Theta} : T^*\mathbb{R}^{k+l} \to T^*\mathbb{R}^{k+l}$, definida por

$$\widetilde{\Theta}(x,\xi) = \Theta^*(x,\xi) - d\widetilde{\Phi}_{g(x)},$$

é uma equivalência Lagrangiana fibrada (veja as Proposições 3.44 e 3.45).

Sejam $M_1 \subset T^*\mathbb{R}^{k+l}$ uma seção Lagrangiana dada pela função geradora $F_1$ e $M_2 = \widetilde{\Theta}(M_1)$. Temos que $M_2$ é uma seção Lagrangiana e, pelo Teorema 3.47, $M_2$ é dada por uma função geradora $\widetilde{F}$, tal que $\widetilde{F} = F_1 \circ \Theta^{-1} - \widetilde{\Phi}$. Daí, e da igualdade em (4.5), temos

$$\widetilde{F}(x,\lambda) = F_1(\Theta^{-1}(x,\lambda)) - \widetilde{\Phi}(x,\lambda) = F_2(x,\lambda) + \Phi(\lambda) - \Phi(\lambda) = F_2(x,\lambda),$$

isto é, $M_2$ é dada pela função geradora $F_2$. A partir disso, segue-se que $M_2$ é transversal a $\mathcal{A}$ e isso significa que $F_2$ é uma família geradora.

Como $\Theta : \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}^{k+l}$, construído acima, é um difeomorfismo de fibrados, do fibrado auxiliar $\rho : \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}^l$ temos, da Proposição 4.14, que existe um difeomorfismo $g : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^l$ que faz o diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^{k+l} \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\Theta"'] & \mathbb{R}^l \arrow[d, "g"] \\ \mathbb{R}^{k+l} \arrow[r, "\rho"'] & \mathbb{R}^l \end{tikzcd} \tag{4.6}$$

comutar, ou seja, $g \circ \rho = \rho \circ \Theta$. Pela Proposição 3.44, $g$ induz uma equivalência Lagrangiana $g^* : T^*\mathbb{R}^l \to T^*\mathbb{R}^l$ tal que $g \circ \pi = \pi \circ g^*$, isto é, que faz o diagrama

$$\begin{tikzcd} T^*\mathbb{R}^l \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "g^*"'] & \mathbb{R}^l \arrow[d, "g"] \\ T^*\mathbb{R}^l \arrow[r, "\pi"'] & \mathbb{R}^l \end{tikzcd}$$

comutar. Notemos que se $(x, \lambda, 0, \kappa) \in \mathcal{A}$, então (veja as notações na Seção 4.1)

$$\begin{aligned}(\pi^*\rho) \circ \widetilde{\Theta}(x, \lambda, 0, \kappa) &= \pi^*\rho\left(h(x, y), \phi(\lambda), 0, \kappa \circ (d\phi_\lambda)^{-1}\right) \\ &= \left(\phi(\lambda), \kappa \circ (d\phi_\lambda)^{-1}\right),\end{aligned}$$

já que $\widetilde{\Phi}$ é constante ao longo das fibras de $\rho$. Por outro lado,

$$g^* \circ (\pi^*\rho)(x, \lambda, 0, \kappa) = g^*(\lambda, \kappa) = \left(g(\lambda), \kappa \circ (dg_\lambda)^{-1}\right).$$

Como o diagrama em (4.6) comuta segue que

$$(\pi^*\rho) \circ \widetilde{\Theta}(x, \lambda, 0, \kappa) = g^* \circ (\pi^*\rho)(x, \lambda, 0, \kappa),$$

para todo $(x, \lambda, 0, \kappa) \in \mathcal{A}$. Daí, denotando por $L_1, L_2 \subset T^*\mathbb{R}^l$ os germes das subvariedades Lagrangianas definidas por $F_1$ e $F_2$, respectivamente, temos, da Proposição 4.19,

$$\begin{aligned}L_2 &= \pi^*\rho(M_2 \cap \mathcal{A}) = \pi^*\rho(\widetilde{\Theta}(M_1) \cap \mathcal{A}) \\ &= \pi^*\rho(\widetilde{\Theta}(M_1 \cap \mathcal{A})) = g^*(\pi^*\rho(M_1 \cap \mathcal{A})) \\ &= g^*(L_1).\end{aligned}$$

Portanto, os germes das aplicações Lagrangianas

$$\begin{tikzcd} L_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "g^*"'] & T^*\mathbb{R}^l \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "g^*"'] & \mathbb{R}^l \arrow[d, "g"] \\ L_2 \arrow[r, "i_2"'] & T^*\mathbb{R}^l \arrow[r, "\pi"'] & \mathbb{R}^l \end{tikzcd}$$

são Lagrangianos equivalentes. □

**Proposição 4.21.** *Sejam $\Theta : T^*\mathbb{R}^l \to T^*\mathbb{R}^l$ uma equivalência Lagrangiana e $L_1 \subset T^*\mathbb{R}^l$ um germe de uma subvariedade Lagrangiana. Se $L_1$ é dado por uma família geradora $F_1$, então $L_2 = \Theta(L_1)$ é definido por uma família geradora $F_2$ que é $R^+$-equivalente a $F_1$.*

**Demonstração:** Consideremos o produto direto de $\Theta$ com a transformação identidade $I_d : T^*\mathbb{R}^k \to T^*\mathbb{R}^k$. Assim, obtemos uma equivalência Lagrangiana do fibrado cotangente de $\mathbb{R}^{k+l}$,

$$\begin{tikzcd} T^*\mathbb{R}^{k+l} \arrow[r] \arrow[d, "(I_d{,}\Theta)"'] & \mathbb{R}^{k+l} \arrow[d, "g"] \\ T^*\mathbb{R}^{k+l} \arrow[r] & \mathbb{R}^{k+l}. \end{tikzcd}$$

Pelo Teorema 3.46, existem um germe de difeomorfismo $g : \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}^{k+l}$ e um germe de função diferenciável $S : \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}$ tais que

$$(I_d, \Theta)(x, \xi) = \left(g(x), \xi \circ (dg_x)^{-1} + dS_{g(x)}\right).$$

Seja $M_1 \subset T^*\mathbb{R}^{k+l}$ o germe de uma seção Lagrangiana $M_1$ dada pela função geradora $F_1$. Pelo Teorema 3.47, o germe da seção Lagrangiana $M_2 = (I_d, \Theta)(M_1)$ é dado pela função geradora $F_2$, com

$$F_2 = F_1 \circ g^{-1} + S,$$

que é uma família geradora para $L_2$ e é $R^+$-equivalente a $F_1$. $\square$

**Proposição 4.22.** *Se $F : \mathbb{R}^{n+l} \to \mathbb{R}$ é uma família geradora de um germe Lagrangiano $L \subset T^*\mathbb{R}^l$, então existe uma função $F_1$ nas variáveis $(u, \lambda)$ com as seguintes propriedades:*

- *$F$ é $R^+$-equivalente estável a $F_1$.*
- *$F_1$ determina o germe Lagrangiano $L$.*
- $\dfrac{\partial^2 F_1}{\partial u^2} = 0.$

**Demonstração:** Pelo lema generalizado de Morse (ver a referência (35)), existe um difeomorfismo-germe $\Theta : \mathbb{R}^{n+l} \to \mathbb{R}^{n+l}$, na forma

$$\Theta(x, \lambda) = (u, v, \lambda),$$

com $u = h(x, \lambda)$ e $v = g(x, \lambda)$, sendo $h : \mathbb{R}^{n+l} \to \mathbb{R}^k$ e $g : \mathbb{R}^{n+l} \to \mathbb{R}^m$, $n = k + m$, tal que

$$F(x, \lambda) = F_1(u, \lambda) + Q(v), \tag{4.7}$$

sendo $Q : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma forma quadrática não degenerada, e

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial u^2}(u, \lambda) = 0.$$

Da igualdade em (4.7) temos que $F$ é $R^+$-equivalente estável a $F_1$. Assim, para concluir basta mostrar que $F$ e $F_1$ determinam o mesmo germe Lagrangiano. Para isso, notemos, da igualdade em (4.7), que

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial F_1}{\partial u}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial x} \\ &= \frac{\partial F_1}{\partial u}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial x}, \end{aligned}$$

já que $\dfrac{\partial \lambda}{\partial x} = 0$. Notemos que no ponto $v = 0$, temos $\dfrac{\partial Q}{\partial v} = 0$. Além disso, como para cada $\lambda \in \mathbb{R}^l$, a aplicação $x \mapsto h(x, \lambda)$ é um difeomorfismo segue que $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 0$ se, e somente se, $\dfrac{\partial F_1}{\partial u} = 0$. Logo,

$$L = \left\{(\lambda, \kappa) : \exists x : \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \kappa = \frac{\partial F}{\partial \lambda}\right\} = \left\{(\lambda, \kappa) : \exists u, v : \frac{\partial F_1}{\partial u} = 0, v = 0, \kappa = \frac{\partial F_1}{\partial \lambda}\right\},$$

concluindo a demonstração. $\square$

Pelo Corolário 4.12, a família geradora $F_1 : \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}$, na Proposição 4.29, é tal que a dimensão da fibra do fibrado auxiliar $\rho : \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}^l$ é a menor possível (igual à dimensão do núcleo da derivada da aplicação Lagrangiana). Uma família com essa propriedade é chamada ***família geradora minimal***.

Sabemos que todo germe Lagrangiano admite uma função geradora com um número minimal de argumentos patológicos $\kappa_j, j \in J$ (igual à dimensão $k$ do núcleo da aplicação Lagrangiana):

$$\kappa_I = \frac{\partial S}{\partial \lambda_I}(\lambda_I, \kappa_J), \quad \lambda_J = -\frac{\partial S}{\partial \kappa_J}(\lambda_I, \kappa_J)$$

(veja o comentário na Página 31). Aqui $(\lambda, \kappa) \to \lambda$ é o fibrado cotangente do espaço $\mathbb{R}^l$. Fixaremos este conjunto de $k$ argumentos patológicos.

**Proposição 4.23.** *Se $L \subset T^*\mathbb{R}^l$ é um germe de uma subvariedade Lagrangiana e $F : \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}$ é uma família geradora minimal de $L$, então*

$$det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \lambda_J}\right) \neq 0.$$

**Demonstração:** Seja $M \subset T^*\mathbb{R}^{k+l}$ uma subvariedade Lagrangiana, $\rho$-regular, tal que $F : \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}$ é uma função geradora para $M$. Pela Proposição 4.9, o posto da matriz

$$\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda \partial x}\right]$$

é $k$. Como $F$ é uma família geradora minimal temos que $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0$. Daí, que o posto da matriz

$$\left[\frac{\partial^2 F}{\partial \lambda \partial x}\right]$$

é $k$. Por outro lado,

$$\kappa_J = \frac{\partial F}{\partial \lambda_J}$$

(veja o comentário após a Proposição 4.9) e, assim,

$$d\kappa_J = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \lambda_J} dx + \frac{\partial^2 F}{\partial^2 \lambda_J} d\lambda_J.$$

Dado $\eta$ no núcleo da derivada da aplicação Lagrangiana, temos que $d\lambda_J(\eta) = 0$ e, assim,

$$d\kappa_J(\eta) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \lambda_J} dx(\eta).$$

Pela condição de transversalidade, segue que o conjunto de formas $\{d\kappa_j : j \in J\}$ é linearmente independente. Logo, a matriz

$$\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \lambda_J}\right]$$

é inversível e, portanto, $det\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial \lambda_J}\right) \neq 0$. $\square$

Nosso objetivo agora será mostrar que famílias geradoras minimais que determinam o mesmo germe Lagrangiano são $R^+$-equivalentes. Para isso, primeiro vamos definir o que é uma família geradora especial e fazer alguns resultados com respeito a este tipo de famílias, para posteriormente reduzir a este caso.

**Definição 4.24.** Uma família geradora minimal $F$ diz-se ***especial*** se para $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 0$ temos a condição $x = \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_J}$.

**Proposição 4.25.** *O germe de uma família geradora minimal é $R^+$-equivalente ao germe de uma família geradora especial determinando o mesmo germe Lagrangiano.*

**Demonstração:** Sejam $F : \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}$ uma família geradora minimal e $\kappa_J : \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}^k$ dado por

$$\kappa_J(x, \lambda) = \frac{\partial F}{\partial \lambda_J}.$$

A aplicação $\Theta : \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}^{k+l}$ definida por

$$\Theta(x, \lambda) = (\kappa_J(x, \lambda), \lambda)$$

é um difeomorfismo. De fato, como $F$ é minimal temos, da Proposição 4.23, que

$$det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \lambda_J}\right) \neq 0.$$

Pelo Teorema da Aplicação Inversa, $\Theta$ é um difeomorfismo local. Além disso, $\Theta$ é bijetora e, portanto, um difeomorfismo. Pela Proposição 3.44, $\Theta$ induz uma equivalência Lagrangiana $\Theta^* : T^*\mathbb{R}^{k+l} \to T^*\mathbb{R}^{k+l}$. Se $M$ é a seção Lagrangiana determinada por $F$, então $\Theta^*(M)$ é uma nova seção Lagrangiana que, pelo Teorema 3.47, é determinada pela família geradora $F_1 : \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}$, dada por

$$F_1 = F \circ \Theta^{-1}.$$

Denotando $\Theta^{-1} : \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}^{k+l}$ por

$$\Theta^{-1}(x, \lambda) = (u(x, \lambda), \lambda)$$

temos que para todo $(x, \lambda)$ vale a igualdade

$$(x, \lambda) = \Theta \circ \Theta^{-1}(x, \lambda) = \Theta(u(x, \lambda), \lambda) = (\kappa_J(u(x, \lambda)), \lambda)$$

e, daí,

$$x = \kappa_J(u(x, \lambda)).$$

Além disso, $F_1$ se escreve como

$$F_1(x,\lambda) = F \circ \Theta^{-1}(x,\lambda) = F(u(x,\lambda),\lambda).$$

Por definição, a família $F_1$ é $R^+$-equivalente a $F$ e como $F$ é minimal segue que $F_1$ também é minimal.

Notemos, pela Regra da Cadeia, que

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}$$

e

$$\frac{\partial F_1}{\partial \lambda} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial F}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial \lambda} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial F}{\partial \lambda}.$$

Como para cada $\lambda \in \mathbb{R}^l$, a aplicação $x \mapsto u(x,\lambda)$ é um difeomorfismo segue que

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = 0 \text{ se, e somente se, } \frac{\partial F}{\partial x} = 0.$$

Em particular, vale a igualdade

$$\left\{(\lambda,\kappa) : \exists x : \frac{\partial F_1}{\partial x} = 0, \kappa = \frac{\partial F_1}{\partial \lambda}\right\} = \left\{(\lambda,\kappa) : \exists x : \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \kappa = \frac{\partial F}{\partial \lambda}\right\},$$

isto é, $F_1$ e $F$ determinam o mesmo germe Lagrangiano em $T^*\mathbb{R}^l$. Além disso, se $\dfrac{\partial F_1}{\partial x} = 0$, então $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 0$ e, consequentemente,

$$\frac{\partial F_1}{\partial \lambda_J}(x,\lambda) = \frac{\partial F}{\partial \lambda_J}(u(x,\lambda),\lambda) = \kappa_J(u(x,\lambda),\lambda) = x,$$

mostrando que $F_1$ é especial e isto conclui a demonstração. $\square$

Seja $F : \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}$ uma família geradora de um germe Lagrangiano $L \subset T^*\mathbb{R}^l$. O conjunto de pontos críticos $N$ da família $F$ é dado por

$$N = \left\{(x,\lambda) \in \mathbb{R}^{k+l} : \frac{\partial F}{\partial x}(x,\lambda) = 0\right\}.$$

**Proposição 4.26.** *Se $L$ é um germe Lagrangiano e $F$ é uma família geradora especial para $L$, então o conjunto de pontos críticos $N$ da família $F$ é difeomorfo a $L$.*

**Demonstração:** Sejam $F : \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}$ uma família geradora especial para $L$,

$$\kappa_J : \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}^k \quad \text{e} \quad \phi : L \to \mathbb{R}^{k+l}$$

definidas por

$$\kappa_J(x,\lambda) = \frac{\partial F}{\partial \lambda_J} \quad \text{e} \quad \phi(\kappa,\lambda) = (\kappa_J,\lambda).$$

Como $F$ é especial segue que $\phi(L) = N$ e, de forma análoga ao que foi feito na demonstração da Proposição 4.25, temos que $\phi : L \to N$ é um difeomorfismo. $\square$

**Proposição 4.27.** *Se $F_0$ e $F_1$ são duas famílias geradoras especiais do mesmo germe Lagrangiano, então:*

1. *Seus conjuntos de pontos críticos coincidem: $N_0 = N_1 = N$.*

2. *A diferencial total de $F_0 - F_1$ é igual a 0, no conjunto $N$.*

3. *As restrições de $F_0$ e $F_1$ a $N$ coincidem, a menos de uma constante aditiva.*

**Demonstração:** Sejam $L$ o germe Lagrangiano determinado por $F_0$ e $F_1$ e $\phi : L \to \mathbb{R}^{k+l}$ a aplicação definida por

$$\phi(\kappa, \lambda) = (\kappa_J, \lambda).$$

Como $F_i$ é especial, segue, da Proposição 4.26, que

$$N_0 = \phi(L) = N_1,$$

mostrando o item *1.*

Os pontos de $L$ são parametrizados por $\lambda_I$ e $\kappa_J$. Em particular, $\kappa$ é definido por $\lambda_I$ e $x$. Isso significa que, nos pontos de $N$, $\dfrac{\partial F_i}{\partial \lambda}$ é determinado apenas por $L$ e não depende de $i$ e, assim, $\dfrac{\partial F_0}{\partial \lambda} = \dfrac{\partial F_1}{\partial \lambda}$. Logo se $(x, \lambda) \in N$, então

$$D(F_0(x,\lambda) - F_1(x,\lambda)) = \frac{\partial F_0}{\partial x}(x,\lambda)dx + \frac{\partial F_0}{\partial \lambda}(x,\lambda)d\lambda - \frac{\partial F_1}{\partial x}(x,\lambda)dx - \frac{\partial F_1}{\partial \lambda}(x,\lambda)d\lambda = 0,$$

o que mostra o item *2.* A afirmação em *3.* é consequência imediata de *2.* □

**Proposição 4.28.** *Os germes de famílias geradoras especiais, determinando o mesmo germe Lagrangiano, são $R^+$-equivalentes.*

**Demonstração:** Sejam $F_0$ e $F_1$ duas famílias geradoras especiais do mesmo germe Lagrangiano $L$ tal que os valores de $F_0$ e $F_1$ coincidem na origem. Pela Proposição 4.27, $F_0 - F_1$ tem um zero não menor do que segunda ordem em $N$.

Seja $F_t$ a homotopia entre $F_0$ e $F_1$ dada por

$$F_t = F_0 + t(F_1 - F_0).$$

Temos que $F_t$ é uma família geradora especial de $L$. Procuremos uma família de difeomorfismos $G_t$, na forma

$$G_t(x, \lambda) = (g(x, \lambda, t), \lambda),$$

dependendo suavemente de $t \in [0, 1]$ tal que

$$F_t \circ G_t = F_0.$$

Para isso, consideremos as aplicações

$$\tilde{F}: \mathbb{R}^{k+l} \times [0,1] \to \mathbb{R} \ \text{ e } \ \tilde{G}: \mathbb{R}^{k+l} \times [0,1] \to \mathbb{R}^{k+l} \times [0,1],$$

definidas por

$$\tilde{F}(x,\lambda,t) = F_t(x,\lambda) \ \text{ e } \ \tilde{G}(x,\lambda,t) = (G_t(x,\lambda),t) = (g(x,\lambda,t),\lambda,t).$$

Notemos que

$$\tilde{F} \circ \tilde{G}(x,\lambda,t) = \tilde{F}(\tilde{G}(x,\lambda,t)) = \tilde{F}((G_t(x,\lambda),t)) = F_t \circ G_t(x,\lambda)$$

e, por outro lado, escrevendo $g = (g_1, \ldots, g_k)$,

$$\begin{aligned} \tilde{F} \circ \tilde{G}(x,\lambda,t) &= \tilde{F}(\tilde{G}(x,\lambda,t)) = \tilde{F}(g(x,\lambda,t),\lambda,t) \\ &= F_t(g_1(x,\lambda,t), \ldots, g_k(x,\lambda,t), \lambda_1, \ldots, \lambda_l). \end{aligned}$$

Daí, diferenciando a igualdade

$$F_t \circ G_t = F_0,$$

em relação a $t$, e aplicando a regra da cadeia obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t}(F_t \circ G_t) = \frac{\partial}{\partial t}(\tilde{F} \circ \tilde{G}) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial F_t}{\partial x_i} \frac{\partial g_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{l} \frac{\partial F_t}{\partial \lambda_j} \frac{\partial \lambda_j}{\partial t} + \frac{\partial F_t}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t} \\ &= \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial F_t}{\partial x_i} \frac{\partial g_i}{\partial t} + F_1 - F_0, \end{aligned}$$

já que $\lambda$ não depende de $t$. Assim, temos a equação

$$(F_1 - F_0) + \sum_{i=1}^{k} \xi_i \left( \frac{\partial F_t}{\partial x_i} \right) = 0 \tag{4.8}$$

nas incógnitas $\xi_i$, que são as componentes do campo vetorial

$$\xi = \sum_{i=1}^{k} \xi_i(x,\lambda,t) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

dependendo de $t$, da família dos difeomorfismos $G_t$.

Consideremos a variedade $N' = N \times \{t\}$ no espaço com coordenadas $(x,\lambda,t)$. As equações $\dfrac{\partial F_t}{\partial x_i} = 0$, $(i = 1, \ldots, k)$ formam um sistema de equações independentes nesta variedade. Logo, pelo Lema de Hadamard (ver a referência (46)), cada função que assume o valor zero nesta variedade é representável como uma combinação linear de $\dfrac{\partial F_t}{\partial x_i}$ (com funções coeficiente). Portanto, toda função $\varPhi$, que tem um zero de segunda ordem em $N$ tem uma representação na forma

$$\varPhi(x,\lambda,t) = \sum_{i=1}^{k} \xi_i(x,\lambda,t) \frac{\partial F_t}{\partial x_i}, \quad \text{com} \ \ \xi_i|_{N'} = 0.$$

Em particular, colocando $\Phi = F_0 - F_1$, vemos que a equação em (4.8) tem solução e, além disso, $\xi_i|_{N'} = 0$.

O campo vetorial $\xi$, assim obtido, dependendo de $t$, é nulo em $N$ e, portanto, induz um difeomorfismo $G_t$ em uma vizinhança do ponto em discussão, para todo $t \in [0,1]$. O difeomorfismo $G_1$ é fibrado (tem a forma $G_1(x,\lambda) = (H(x,\lambda),\lambda)$) e $F_1 \circ G_1 = F_0$. Portanto $F_1$ é $R$-equivalente a $F_0$, concluindo a demonstração. □

Com o que foi desenvolvido, vamos demonstrar as proposições 4.29 e 4.30.

**Proposição 4.29.** *Duas famílias geradoras minimais do mesmo germe Lagrangiano são $R^+$-equivalentes.*

**Demonstração:** Sejam $F_1$ e $F_2$ duas famílias geradoras minimais de um mesmo germe Lagrangiano $L \subset T^*\mathbb{R}^l$. Pela Proposição 4.25, $F_1$ e $F_2$ são $R^+$-equivalentes às famílias especiais, que denotamos por $F_1^e$ e $F_2^e$, respectivamente, e, além disso, $F_1^e$ e $F_2^e$ geram o mesmo germe Lagrangiano $L$. Logo, pela Proposição 4.28, $F_1^e$ e $F_2^e$ são $R^+$-equivalentes. Portanto, $F_1$ é $R^+$-equivalente a $F_2$, concluindo a demonstração. □

**Proposição 4.30.** *Duas famílias geradoras quaisquer do mesmo germe Lagrangiano são $R^+$-equivalentes estáveis.*

**Demonstração:** Sejam $F_1$ e $F_2$ duas famílias geradoras de um mesmo germe Lagrangiano $L$. Pela Proposição 4.22, para cada $i \in \{1,2\}$, existe uma família geradora minimal $F_i^m$ tal que $F_i^m$ gera o germe Lagrangiano $L$ e $F_i$ é $R^+$-equivalente estável a $F_i^m$. Segue da Proposição 4.29 que $F_1^m$ é $R^+$-equivalente a $F_2^m$. Portanto, $F_1$ é $R^+$-equivalente a $F_2$. □

Com tudo desenvolvido até agora estamos prontos para apresentar uma demonstração do resultado principal deste capítulo que, como já foi dito antes, será de grande importância no próximo capítulo.

**Teorema 4.31.** *Sejam*

- $L_1, L_2 \subset T^*\mathbb{R}^l$ *dois germes de subvariedades Lagrangianas;*
- $\mathcal{L}_1 : L_1 \to \mathbb{R}^l$ *e* $\mathcal{L}_2 : L_2 \to \mathbb{R}^l$ *germes de aplicações Lagrangianas; e*
- $F_i : \mathbb{R}^{k_i+l} \to \mathbb{R}$ *família geradora de* $L_i$, $i \in \{1,2\}$.

*As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *Os germes* $\mathcal{L}_1$ *e* $\mathcal{L}_2$ *são Lagrangianos equivalentes.*

*2. Os germes $F_1$ e $F_2$ são $R^+$-equivalentes estáveis.*

**Demonstração:** Suponhamos que os germes $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ são Lagrangianos equivalentes e seja $\Theta : T^*\mathbb{R}^l \to T^*\mathbb{R}^l$ uma equivalência Lagrangiana tal que $L_2 = \Theta(L_1)$. Pela Proposição 4.22, existe uma família geradora minimal $F_1^m$ tal que $F_1^m$ gera o germe Lagrangiano $L_1$ e $F_1$ é $R^+$-equivalente estável a $F_1^m$. Segue da Proposição 4.25 que existe uma família geradora especial $F_1^e$ tal que $F_1^m$ é $R^+$-equivalente a $F_1^e$ e $F_1^e$ determina o germe Lagrangiano $L_1$. Pela Proposição 4.30, $F_1$ é $R^+$-equivalente estável a $F_1^e$. Pela Proposição 4.21, existe uma família geradora $\tilde{F}_2$ tal que $\tilde{F}_2$ determina $L_2$ e é $R^+$-equivalente a $F_1^e$ e utilizando, novamente, a Proposição 4.30 concluímos que $\tilde{F}_2$ é $R^+$-equivalente estável a $F_2$. Portanto, $F_1$ é $R^+$-equivalente estável a $F_2$.

Reciprocamente, suponhamos que $F_1$ é $R^+$-equivalente estável a $F_2$. Pela Proposição 4.22, para cada $i \in \{1, 2\}$, existe uma família geradora minimal $F_i^m$ tal que $F_i^m$ gera o germe Lagrangiano $L_i$ e $F_i$ é $R^+$-equivalente estável a $F_i^m$. Daí, $F_1^m$ é $R^+$-equivalente estável a $F_2^m$ e, assim, da Observação 4.17, $F_1^m$ é $R^+$-equivalente a $F_2^m$. Portanto, da Proposição 4.20, os germes $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ são Lagrangianos equivalentes, concluindo a demonstração. $\square$

# 5 EQUIVALÊNCIAS DE APLICAÇÕES DE GAUSS

O principal objetivo neste capítulo é fazer um estudo de aplicação de Gauss, no seguinte sentido: vamos definir aplicação de Gauss de uma variedade fechada e mostrar que uma aplicação de Gauss pode ser vista como aplicação Lagrangiana ou como aplicação catástrofe. Depois disso, definiremos $\mathcal{A}$-equivalência entre duas aplicações de Gauss de uma mesma variedade e como resultado central vamos caracterizar, no Teorema 5.5, $\mathcal{A}$-equivalência em termos de função altura. O conceito de $\mathcal{A}$-equivalência de aplicações de Gauss é tratado em diversos trabalhos, veja, por exemplo, (1, 2, 3, 4, 5, 6). As principais referências utilizadas são Banchoff-Gaffney-Mccrory (1) e Arnold-Gusein-Zade-Varchenko (15).

## 5.1 APLICAÇÃO DE GAUSS

Dizemos que uma variedade diferenciável $M$ é ***fechada*** quando é compacta e sem bordo. Sejam $M$ uma variedade fechada, orientada e conexa, de dimensão $n$ e $f : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ um mergulho de $M$ no espaço Euclidiano de dimensão $n+1$. Assim, a imagem $f(M)$ é uma hipersuperfície orientável em $\mathbb{R}^{n+1}$. Seja $\mathfrak{n}_f$ um campo diferenciável de vetores normais e unitários em $f(M)$. Por definição, a ***aplicação de Gauss de*** $M$, associada a $f$ e a $\mathfrak{n}_f$, é a aplicação

$$\mathcal{G}_f : M \to \mathbb{S}^n,$$

onde $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ denota a esfera unitária de centro na origem, definida da seguinte maneira: para cada $p \in M$, $\mathcal{G}_f(p)$ é o vetor em $\mathbb{S}^n$, normal a $f(M)$, em $f(p)$, apontando no sentido de $\mathfrak{n}_f(p)$. Notemos que $\mathcal{G}_f$ é a composta entre a aplicação de Gauss de $f(M)$ e $f$. Quando $n = 2$, obtemos a aplicação de Gauss usual de uma superfície imersa no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$.

Para obter o resultado principal deste capítulo, precisamos descrever uma aplicação de Gauss como aplicação Lagrangiana e como aplicação catástrofe. Nesse sentido, comecemos com a demonstração do seguinte resultado que está na referência (15) pag. 296.

**Teorema 5.1.** *A aplicação de Gauss de $M$ é uma aplicação Lagrangiana.*

**Demonstração:** Denotemos por $\mathcal{N}_f$ o conjunto das retas orientadas e normais a $f(M)$, definida por $\mathfrak{n}_f$. Pelo Teorema 3.37, $\mathcal{N}_f$ é uma subvariedade Lagrangiana da variedade simplética das retas orientadas $\mathcal{R}$, em $\mathbb{R}^{n+1}$, e, além disso, $\mathcal{N}_f$ é difeomorfo a $f(M)$. Pelo Teorema 3.23, o espaço $\mathcal{R}$ é difeomorfo ao fibrado cotangente da esfera $T^*\mathbb{S}^n$. Assim, denotando por $i : \mathcal{N}_f \to \mathcal{R}$ a aplicação inclusão e por $\pi : T^*\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ a projeção canônica, temos o seguinte diagrama

$$M \xrightarrow{f} f(M) \approx \mathcal{N}_f \xrightarrow{i} \mathcal{R} \approx T^*\mathbb{S}^n \xrightarrow{\pi} \mathbb{S}^n.$$

Portanto, $\mathcal{G}_f$ é uma aplicação Lagrangiana, já que $\mathcal{G}_f = \pi \circ i \circ f : M \to \mathbb{S}^n$. $\square$

Passemos, agora, a descrever a aplicação de Gauss como aplicação catástrofe, para isso nesta parte do trabalho será utilizada como referência (1) de onde são extraídos os resultados a seguir, parte do nosso objetivo foi esclarecer tais resultados.
Sejam $Q$ uma outra variedade diferenciável e $F : Q \times M \to Q \times \mathbb{R}$ uma família de funções diferenciáveis, parametrizadas por $Q$. O ***conjunto catástrofe*** $C$ de $F$ é, por definição, o conjunto de pontos críticos de $F$, isto é,

$$C = \left\{ (u, x) \in Q \times M : \frac{\partial F}{\partial x}(u, x) = 0 \right\}.$$

No caso em que $0 \in \mathbb{R}^n$ é valor regular de $\dfrac{\partial F}{\partial x}$, temos que $C$ é uma variedade diferenciável de dimensão $\dim Q$, já que $C$ é a imagem inversa de 0 por $\dfrac{\partial F}{\partial x}$. Nesse caso, o conjunto dos pontos críticos $C$ é chamado ***variedade catástrofe*** da família $F$.

Seja $\pi : Q \times M \to Q$ a projeção natural sobre $Q$. A restrição $\mathcal{X}$ de $\pi$ a $C$,

$$\mathcal{X} := \pi|_C : C \to Q,$$

é chamada ***aplicação catástrofe*** da família de funções $F$.

Para cada vetor unitário $v \in \mathbb{R}^{n+1}$, seja $\mathcal{H}_f^v : M \to \mathbb{R}$ a função altura na direção de $v$, definida por

$$\mathcal{H}_f^v(p) = \langle f(p), v \rangle,$$

sendo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno canônico de $\mathbb{R}^{n+1}$. Considerando essas funções como uma família parametrizada pela esfera unitária $\mathbb{S}^n$, temos a aplicação

$$\mathcal{H}_f : \mathbb{S}^n \times M \to \mathbb{S}^n \times \mathbb{R},$$

dada por

$$\mathcal{H}_f(v, p) = (v, \mathcal{H}_f^v(p)) = (v, \langle f(p), v \rangle).$$

Fixemos $v \in \mathbb{S}^n$. Notemos que,

$$\frac{\partial \mathcal{H}_f}{\partial p}(v, p) = \left( 0, \frac{\partial \mathcal{H}_f^v}{\partial p} \right) = \left( 0, d(\mathcal{H}_f^v)_p \right).$$

Além disso, para cada $u \in T_pM$,

$$d(\mathcal{H}_f^v)_p(u) = \langle df_p(u), v \rangle.$$

Daí, dado $(v, p) \in \mathbb{S}^n \times M$, as seguintes condições são equivalentes

1. $\dfrac{\partial \mathcal{H}_f}{\partial p}(v, p) = 0.$

2. $d(\mathcal{H}_f^v)_p(u) = 0$, para todo $u \in T_pM$.

3. $\langle df_p(u), v\rangle = 0$, para todo $u \in T_pM$.

4. $v$ é ortogonal a $f(M)$, em $f(p)$.

Denotando por $C_f$ o conjunto catástrofe da família $\mathcal{H}_f$, temos que a condição $(v,p) \in C_f$ é equivalente a qualquer uma das condições de 1. a 5., acima. Logo, 0 é valor regular de $\dfrac{\partial \mathcal{H}_f}{\partial p}$ e, além disso, vale o seguinte resultado.

**Proposição 5.2.** *A variedade catástrofe $C_f$ da família $\mathcal{H}_f$ se identifica ao fibrado normal e unitário de $f(M)$.*

A variedade catástrofe $C_f$ tem duas componentes conexas, que podem ser descritas pelo campo $\mathfrak{n}_f$ de vetores normais e unitários a $f(M)$. De fato, o conjunto $C_f^0$ formado pelos pontos $(v,p) \in C_f$ tais que $v$ tem o mesmo sentido do vetor $\mathfrak{n}_f(p)$ é uma componente conexa de $C_f$. A outra componente é dada pelos pontos $(v,p) \in C_f$ tais que $v$ tem sentido oposto ao vetor $\mathfrak{n}_f(p)$. Notemos que $C_f^0$ pode ser descrita como

$$C_f^0 = \{(\mathcal{G}_f(p), p) : p \in M\},$$

sendo $\mathcal{G}_f$ a aplicação de Gauss de $M$, associada a $f$ e $\mathfrak{n}_f$. Notemos, ainda, que a variedade das retas orientadas normais a $f(M)$, em $\mathbb{R}^{n+1}$, cuja orientação é dada pelo campo $\mathfrak{n}_f$ é descrita como

$$\mathcal{N}_f = \{(\{f(p) + t\mathcal{G}_f(p) : t \in \mathbb{R}\}, \mathcal{G}_f(p)) : p \in M\}.$$

Considerando essa notação, temos o seguinte resultado.

**Proposição 5.3.** *A componente conexa $C_f^0$ da variedade catástrofe $C_f$ se identifica a cada um dos espaços:*

1. *Variedade $M$.*

2. *Hipersuperfície $f(M)$.*

3. *$\mathcal{N}_f$, a variedade das retas orientadas normais a $f(M)$, cuja orientação é dada pelo campo $\mathfrak{n}_f$.*

*Em particular, $C_f^0$ pode ser vista como uma subvariedade Lagrangiana de $T^*\mathbb{S}^n$ e $\mathcal{H}_f$ é uma família geradora de $C_f^0$.*

**Demonstração:** As aplicações

$$\zeta_f : M \to C_f^0, \quad \eta_f : f(M) \to C_f^0 \quad \text{e} \quad \theta_f : C_f^0 \to \mathcal{N}_f,$$

definidas por

- $\zeta_f(p) = (\mathcal{G}_f(p), p)$,
- $\eta_f(f(p)) = (\mathcal{G}_f(p), p)$, e
- $\theta_f(\mathcal{G}_f(p), p) = (\{f(p) + t\mathcal{G}_f(p) : t \in \mathbb{R}\}, \mathcal{G}_f(p))$,

fornecem as identificações afirmadas. $\square$

Seja $\mathcal{X} : C_f \to \mathbb{S}^n$ a aplicação catástrofe da família de funções altura $\mathcal{H}_f$. Denotemos por $\mathcal{X}_f$ a restrição de $\mathcal{X}$ a $C_f^0$,

$$\mathcal{X}_f := \mathcal{X}|_{C_f^0} : C_f^0 \to \mathbb{S}^n.$$

Considerando a aplicação $\zeta_f : M \to C_f^0$ definida na demonstração da Proprosição 5.3, temos que

$$\mathcal{X}_f \circ \zeta_f = \mathcal{G}_f$$

e, assim, temos o seguinte resultado.

**Teorema 5.4.** *A aplicação $\mathcal{X}_f \circ \zeta_f$ é a aplicação de Gauss da variedade $M$.*

## 5.2 APLICAÇÃO DE GAUSS E FUNÇÃO ALTURA

Consideremos, agora, um outro mergulho $g : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ de $M$ em $\mathbb{R}^{n+1}$ e as notações correspondentes a $g$, da seção anterior. Dizemos que as aplicações de Gauss

$$\mathcal{G}_f, \mathcal{G}_g : M \to \mathbb{S}^n$$

são ***$\mathcal{A}$-equivalentes*** quando existem difeomorfismos $\psi : M \to M$ e $\varphi : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ tais que

$$\varphi \circ \mathcal{G}_f = \mathcal{G}_g \circ \psi,$$

isto é, que fazem o diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\mathcal{G}_f"] \arrow[d, "\psi"'] & \mathbb{S}^n \arrow[d, "\varphi"] \\ M \arrow[r, "\mathcal{G}_g"'] & \mathbb{S}^n \end{tikzcd}$$

comutar.

Usando como inspiração uma afirmação dada em (2) pag. 91, vamos caracterizar a $\mathcal{A}$-equivalência entre $\mathcal{G}_f$ e $\mathcal{G}_g$ utilizando as funções alturas (que são famílias geradoras) $\mathcal{H}_f$ e $\mathcal{H}_g$, é assim que vamos enunciar e demonstrar o seguinte resultado.

**Teorema 5.5.** *As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *$\mathcal{G}_f$ e $\mathcal{G}_g$ são $\mathcal{A}$-equivalentes.*

*2.* $\mathcal{G}_f$ *e* $\mathcal{G}_g$ *são Lagrangianos equivalentes.*

*3.* $\mathcal{H}_f$ *e* $\mathcal{H}_g$ *são* $R^+$*-equivalentes.*

**Demonstração:** As afirmações em 2. e em 3. são equivalentes, pelo Teorema 4.31 e pela Observação 4.17. Para concluir, mostremos que *1.* implica *2.* e *3.* implica *1.*

Suponhamos que $\mathcal{G}_f$ e $\mathcal{G}_g$ são $\mathcal{A}$-equivalentes. Assim, existem difeomorfismos $\psi : M \to M$ e $\varphi : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ tais que $\mathcal{G}_g \circ \psi = \varphi \circ \mathcal{G}_f$, isto é, que fazem o diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\mathcal{G}_f"] \arrow[d, "\psi"'] & \mathbb{S}^n \arrow[d, "\varphi"] \\ M \arrow[r, "\mathcal{G}_g"'] & \mathbb{S}^n \end{tikzcd}$$

comutar. Utilizando a notação da Proposição 5.3 e o comentário após a sua demonstração, obtemos o diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\zeta_f"] \arrow[d, "\psi"'] & C_f^0 \arrow[r, "\mathcal{X}_f"] \arrow[d, "\psi_0"'] & \mathbb{S}^n \arrow[d, "\varphi"] \\ M \arrow[r, "\zeta_g"'] & C_g^0 \arrow[r, "\mathcal{X}_g"'] & \mathbb{S}^n \end{tikzcd}$$

comutativo, sendo $\psi_0 : C_f^0 \to C_g^0$ definida por

$$\psi_0(\mathcal{G}_f(p), p) = (\mathcal{G}_g(\psi(p)), \psi(p)).$$

Consideremos a equivalência Lagrangiana $\varphi^* : T^*\mathbb{S}^n \to T^*\mathbb{S}^n$ induzida por $\varphi$ (veja a Proposição 3.44), definida por

$$\varphi^*(v, \varphi) = (\varphi(v), \varphi \circ (d\varphi_v)^{-1}),$$

que, pela identificação entre $T^*\mathbb{S}^n$ e o espaço de todas as retas orientadas $\mathcal{R}$, em $\mathbb{R}^{n+1}$ (veja o Teorema 3.23), pode ser reescrita na forma

$$\varphi^*(\{v + tu : t \in \mathbb{R}\}, u) = \left(\left\{\left((v - \langle v, u\rangle u)^\flat \circ (d\varphi_u)^{-1}\right)^\sharp + t\varphi(u) : t \in \mathbb{R}\right\}, \varphi(u)\right).$$

Daí,

$$\begin{aligned} \varphi^*\left(\{f(p) + t\mathcal{G}_f(p) : t \in \mathbb{R}\}, \mathcal{G}_f(p)\right) &= \left(\left\{\phi^\sharp + t\varphi(\mathcal{G}_f(p)) : t \in \mathbb{R}\right\}, \varphi(\mathcal{G}_f(p))\right) \\ &= \left(\{g(\psi(p)) + t\mathcal{G}_g(\psi(p)) : t \in \mathbb{R}\}, \mathcal{G}_g(\psi(p))\right), \end{aligned}$$

sendo $\phi = (f(p) - \langle f(p), \mathcal{G}_f(p)\rangle \mathcal{G}_f(p))^\flat \circ (d\varphi_{\mathcal{G}_f(p)})^{-1}$. Logo,

$$\varphi^*(C_f^0) = C_g^0$$

e, portanto, $\varphi^*$ é uma equivalência Lagrangiana entre $\mathcal{G}_f$ e $\mathcal{G}_g$.

Suponhamos, agora, que $\mathcal{H}_f$ e $\mathcal{H}_g$ são $R^+$-equivalentes. Assim, existe um difeomorfismo fibrado $\Theta : \mathbb{S}^n \times M \to \mathbb{S}^n \times M$, na forma $\Theta = (\varphi, h)$, e uma função diferenciável $\Phi : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ tais que

$$\mathcal{H}_g(v,p) = \mathcal{H}_f(\varphi(v), h(v,p)) + \Phi(v),$$

onde $h : \mathbb{S}^n \times M \to M$ e $\varphi : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$. Diferenciando em relação a $p$ temos

$$\frac{\partial \mathcal{H}_g}{\partial p}(v,p) = \frac{\partial \mathcal{H}_f}{\partial p}(\Theta(v,p))\frac{\partial h}{\partial p}(v,p).$$

Como, para cada $v \in \mathbb{S}^n$, a aplicação $p \mapsto h(v,p)$ é um difeomorfismo, temos que

$$\frac{\partial \mathcal{H}_g}{\partial p}(v,p) = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial \mathcal{H}_f}{\partial p}(\Theta(v,p)) = 0.$$

Logo, $(v,p) \in C_g^0$ se, e somente se, $\Theta(v,p) \in C_f^0$ e, portanto, $\Theta(C_g^0) = C_f^0$. Daí, para cada $p \in M$,

$$(\varphi(\mathcal{G}_g(p)), h(\mathcal{G}_g(p),p)) = \Theta(\mathcal{G}_g(p),p) \in C_f^0,$$

o que implica que

$$\varphi(\mathcal{G}_g(p)) = \mathcal{G}_f(h(\mathcal{G}_g(p),p)).$$

Assim, considerando $h_0 : M \to M$ definida por

$$h_0(p) = h(\mathcal{G}_g(p),p),$$

temos que $h_0$ é um difeomorfismo e

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_f \circ h_0(p) &= \mathcal{G}_f(h(\mathcal{G}_g(p),p)) \\ &= \varphi(\mathcal{G}_g(p)) \\ &= \varphi \circ \mathcal{G}_g(p), \end{aligned}$$

para todo $p \in M$, isto é,

$$\mathcal{G}_f \circ h_0 = \varphi \circ \mathcal{G}_g,$$

mostrando que $\mathcal{G}_f$ e $\mathcal{G}_g$ são $\mathcal{A}$-equivalentes e isto conclui a demonstração. $\square$

# 6 CONCLUSÃO

O objetivo deste trabalho foi caracterizar a $\mathcal{A}$-equivalência entre aplicações de Gauss com a proposta de identificar tais aplicações como aplicações Lagrangianas e aplicações catástrofe associados a funções altura. Foi assim que temos os seguintes resultados, no Capítulo 4 o Teorema 4.31 que nos diz que, germes de aplicações Lagrangianas são Lagrangianos equivalentes se, e somente se, suas famílias geradoras associadas são $R^+$-equivalentes estáveis e no Capítulo 5 primeiro o Teorema 5.1 que prova que a aplicação de Gauss de $M$, uma variedade orientável, é uma aplicação Lagrangiana e segundo o Teorema 5.4 que identifica a aplicação de Gauss da variedade $M$ como uma aplicação catástrofe. É assim que concluímos que tal caracterização é possível, tendo como resultado final o Teorema 5.5 que diz: Dadas as aplicações de Gauss $\mathcal{G}_f$ e $\mathcal{G}_g$ e sendo suas funções alturas (que são famílias geradoras) asociadas $\mathcal{H}_f$ e $\mathcal{H}_g$ respectivamente, então as seguintes afirmações são equivalentes:

1. $\mathcal{G}_f$ e $\mathcal{G}_g$ são $\mathcal{A}$-equivalentes.

2. $\mathcal{G}_f$ e $\mathcal{G}_g$ são Lagrangianos equivalentes.

3. $\mathcal{H}_f$ e $\mathcal{H}_g$ são $R^+$-equivalentes.

## REFERÊNCIAS


1 BANCHOFF, T.; GAFFNEY, T.; MCCRORY, C. *Cusps of Gauss Mappings*, Pitman Books Limited, London, (1982). Web version with D. Dreibelbis (www.math.brown.edu/ dan/cgm/index.html).

2 MENDES DE JESUS, C.; MORAES, S.M.; ROMERO FUSTER, M.C.*Stable Gauss maps from a global viewpoint*, Bull Braz Math Soc, New Series 42(1), 87-103, 2011.

3 MENDES DE JESUS, C.; SANABRIA-CODESAL, E. *Realization of graphs by fold Gauss maps*, Topology and its Applications, vol. 234, 248-258, 2018.

4 MENDES DE JESUS, C.; SANTOS, L.J.; ROMERO, P.D. *Stable plane-Gauss maps of closed orientable surfaces*, preprint 2022.

5 ROMERO FUSTER, M.C. *Sphere Stratification and the Gauss Map*. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 95A:115, 136, 1983.

6 WALL, C.T.C. *Geometric properties of generic differentiable manifolds*. Lect. in Maths., 597 (1976). Springer Verlag, Berlin.

7 LEE, J. M. *Introduction to Smooth Manifolds*. 2.ed. New York: Springer, 2003.

8 LIMA, E. L. *Introdução à Topologia Diferencial*. 2.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1961.

9 LIMA, E. L. *Variedades Diferenciáveis*. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

10 HIRSCH, M. W. *Differential Topology*. Springer-Verlag, 1976.

11 CARMO, M. P. *Differential Forms and Applications*. Berlim: Springer-Verlag, 1994.

12 LIMA, E. L. *Álgebra Exterior*. 1.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

13 GUILLEMIN, V.; POLLACK, A. *Differential Topology*. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1974.

14 WARNER, F. W. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. New York: Springer-Verlag, 1983.

15 ARNOLD, V.I.; GUSEIN-ZADE, S.M.; VARCHENKO, A.N. *Singularities of Differentiable Maps: The Classification of critical points, caustic and wave fronts*, vol.1, Boston: Birkhauser, 1985.

16 DA SILVA, A. *Lectures on Symplectic Geometry*. Springer, 2000.

17 DA SILVA, A. *Introduction to Sympletic and Hamiltonian Geometry*. Springer, 2002.

18 McDUFF, D.; SALAMON, D. *Introduction to Symplectic Topology*. Oxford University Press, 2017.

19 BLAIR, D. E. *Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds*. 2.ed. Birkhäuser, 2010.

20 ARNOLD, V.I.; NOVIKOV S. P. *Dynamical System IV Symplectic Geometry and its Applications*, 2.ed. Springer-Verlag, 2001.

21 GOSSON, M. *Symplectic Geometry and Quantum Mechanics*. Birkhauser, Verlag, 2000.

22 VAISMAN, I. *Symplectic Geometry and Secondary Characteristic Classes*. Birkhauser Verlag, 1987.

23 GORYUNOV, V. V.; ZAKALYUKIN, V. M. *Lagrangian and Legendrian Varieties and Stability of their Projections*. 2005.

24 IZUMIYA, S.; TAKAHASHI, M. *On Caustics of Submanifolds and Canal Hypersurfaces in Euclidean space*, vol. 159, 501-508, 2012.

25 ARNOLD, V. I.; GIVENTAL, A. B. *Symplectic Geometry*. 5–135, 1985.

26 TAKAYUKI, N. *The Gauss Map of a Hypersurface in Euclidean Sphere and the Spherical Legendrian Duality*, vol. 159, 545-554, 2012.

27 SALVAI, M. *Geodesics of the Space of Oriented Lines of Euclidean Space*, vol. 47, 2006.

28 IZUMIYA, S.; ROMERO, F.; DEL CARMEN, M. *Differential Geometry from Singularity Theory Viewpoint*. World Scientific Publishing Company, 2016.

29 PETTERS, A. O.; LEVINE, H.; WAMBSGANSS, J. *Singularity Theory and Gravitational Lensing*. 1.ed, Birkhäuser, 2001.

30 CRAIZER, M.; DOMITRZ, W.; RIOS, P. *Singular improper affine spheres from agiven Lagrangian submanifold*. Rio de Janeiro, 2020.

31 DILLEN, F.; VERSTRAELEN, L. *Handbook of Differential Geometry*, vol. 2, North Holland, 2006.

32 ARNOLD, V. I.; WEINSTEIN, A.; VOGTMANN, K. *Mathematical Methods Of Classical Mechanics*. Springer, 1989.

33 ARNOLD, V. I.; WEINSTEIN, A.; VOGTMANN, K. *Dynamical Systems IV: Symplectic Geometry and its Applications*. Springer, 2001.

34 ARNOLD, V. I. *Characteristic class entering in quantization conditions*. 1–13, 1967.

35 MILNOR, J. *Morse Theory*. New Jersey: Princenton University Press, 1963.

36 ARNOLD, V. I. *Normal Forms for Functions Near Degenerate Critical Points, The Weyl Groups of $A_k$, $D_k$, $E_k$ and Lagrangian Singularities*, 254–272, 1972.

37 VYACHESLAV, D. S. *On Lagrangian and Legendrian Singularities*. Arnold Math J. 7, 195–212, 2021.

38 BLEEKER, D.; WILSON, L. *Stablility of Gauss maps*. Illinois J. Math. 22, 279-289, 1978.

39 CALLAHAN, J. *Singularities and Plane Maps II: Sketching Catastrophes*, The American Mathematical Monthly, Vol. 84, No. 10, pp. 765-803, 1977.

40 GOLUBITSKY, M.; GUILLEMIN, V. *Stable Mappings and Their Singularities.* New York: Springer-Verlag, 1973.

41 MORSE, M. *The critical points of a function of* $n$ *variables* Trans. A.M.S., vol. 33, 72-91, 1931.

42 TERAMOTO, K. *Singularities of Gauss maps of wave fronts with nondegenerate singular points*, Bulletin Polish Acad. Sci. Math. 69, 149-169, 2021.

43 WHITNEY, H. *On singularities of Mappings of Euclidean Spaces I, Mappings of the Plane into the Plane*. Ann. of Math., vol. 62, 374-410, 1955.

44 YUNG, C. L. *Singularity Theory and an Introduction to Catastrophe Theory*. New York: Springer-Verlag, 1976.

45 ARNOLD, V.I. *Ordinary Differential Equations*. The MIT Press, 1978.

46 NESTRUEV, J. *Smooth Manifolds and Observables*. 2.ed. Springer, 2020.