UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Caio Rezende Marques dos Santos

Sistemas Lineares e Pontos de Ramificação em Curvas Nodais Redutíveis

Juiz de Fora

2021

Caio Rezende Marques dos Santos

Sistemas Lineares e Pontos de Ramificação em Curvas Nodais Redutíveis

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria Algébrica.

Orientador: Prof. Dr. Frederico Sercio Feitosa

Juiz de Fora

2021

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Santos, Caio Rezende Marques dos.
Sistemas Lineares e Pontos de Ramificação em Curvas Nodais Redutíveis / Caio Rezende Marques dos Santos. – 2021.
90 f.

Orientador: Frederico Sercio Feitosa
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2021.

1. Sistemas Lineares. 2. Curvas Nodais. 3. Pontos de Ramificação. I. Feitosa, Frederico Sercio, orient. II. Título.

Caio Rezende Marques dos Santos

Sistemas Lineares e Pontos de Ramificação em Curvas Nodais Redutíveis

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria Algébrica.

Aprovada em 12 de Março de 2021.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Frederico Sercio Feitosa - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof$^{\text{a}}$. Dr$^{\text{a}}$. Flaviana Andrea Ribeiro
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Nivaldo Nunes de Medeiros Júnior
Universidade Federal Fluminense

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus, por me auxiliar em mais uma jornada, sempre me guiando, iluminando cada passo e cada decisão tomada durante esta etapa e concedendo a força necessária para enfrentar todos os obstáculos sem desistir.

À minha mãe, Mary, por toda a dedicação e carinho, sempre me incentivando a dar o melhor em todos os aspectos da vida. É difícil colocar em palavras o tamanho orgulho e privilégio de ter você ao meu lado. Ao meu pai, Anderson, que infelizmente partiu antes que eu pudesse concluir esse caminho. Espero que esteja em paz e saiba que seu apoio foi fundamental para mais essa consquista!

À minha querida irmã, Nina, e à minha avó, Lessy, sempre prontas a me ajudar e por serem diariamente pilares na minha vida.

Ao meu orientador, Prof. Frederico, agradeço por toda a competência, a disponibilidade, profissionalismo e dedicação. Sua orientação e sua confiança, não somente neste trabalho, tornaram isso tudo possível. Acima de tudo, obrigado por me mostrar que, às vezes, somar zeros é a solução!

À minha irmã de alma, Franciele, com quem compartilhei inúmeros momentos de estudos e devaneios diversos, agradeço pela infinita ajuda em todos os momentos. Aprendo todo dia a ser uma pessoa melhor com você!

Aos meus amigos, por proporcionarem sempre palavras de incentivo e de conforto em momentos cruciais e por todas as conversas leves e contagiantes que ajudaram a superar todas as dificuldades.

À Universidade Federal de Juiz de Fora e, em especial, aos integrantes do seu Departamento de Matemática, pelas muitas oportunidades e contribuições à minha vida acadêmica.

À Prof. Flaviana e ao Prof. Nivaldo, pela participação na banca examinadora e por despenderem seu tempo à leitura e análise deste trabalho.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior-Brasil (CAPES) pelo fundamental apoio no Mestrado.

“Aquele que deseja estudar ou exercer a Magia deve cultivar a Matemática.” (Matila Ghyka em *Philosophie et Mystique des Nombres*: Col. Payot, Paris, p. 87, 1952.)

RESUMO

Limites de pontos de ramificação e de sistemas lineares foram estudados por D. Eisenbud e J. Harris na década de 1980, quando desenvolveram a teoria de limite de séries lineares para curvas de tipo compacto. Em um de seus artigos, Eisenbud e Harris (1987, p. 499) questionaram: *"Quais são os limites de pontos de Weierstrass em famílias de curvas degenerando em curvas estáveis que não são de tipo compacto?"*. Neste trabalho, damos uma respota satisfatória a essa questão, baseado nos resultados obtidos no artigo (5) de E. Esteves.

Palavras-chave: Sistemas Lineares. Curvas Nodais. Pontos de Ramificação.

ABSTRACT

Limits of ramification points and linear systems were studied by D. Eisenbud and J. Harris in the 1980's, when they developed the theory of limit linear series for curves of compact type. In one of their articles, Eisenbud and Harris (1987, p. 499) asked: *"What are the limits of Weierstrass points in families of curves degenerating to stable curves not of compact type?"*. In this dissertation, we give a satisfactory answer to this question, based on the results obtained in article (5) by E. Esteves.

Keywords: Linear Systems. Nodal Curves. Ramification Points.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Limites de pontos de ramificação e de sistemas lineares foram estudados por Eisenbud e Harris na década de 1980, quando desenvolveram a teoria de limite de séries lineares para curvas de tipo compacto; como pode ser visto em (3). Nesse trabalho, Eisenbud e Harris desenvolveram uma teoria para identificar limites de sistemas lineares e de pontos de ramificação quando curvas suaves degeneram-se a curvas de tipo compacto, isto é, curvas cujas componentes irredutíveis são suaves e, duas a duas, não se interceptam em mais de um ponto.

Um *sistema linear* em uma curva suave C é um par $(V, \mathcal{L})$, onde $\mathcal{L}$ é um fibrado em reta sobre C e $V \subseteq H^0(C, \mathcal{L})$ é um subespaço vetorial. Se o grau de $\mathcal{L}$ é d e a dimensão de V é $r+1$, então $(V, \mathcal{L})$ é dito ser um conjunto de d pontos movendo em uma família linear de dimensão projetiva r (denotado, usualmente na literatura, por $\mathfrak{g}^r_d$). Um método clássico na teoria de sistemas lineares em curvas suaves é degenerar a curva em curvas singulares e, estudando a geometria dos limites, derivar propriedades das curvas suaves originais. De forma resumida, podemos falar que Eisenbud e Harris definem um sistema linear limite em uma curva C de tipo compacto como uma coleção de $\mathfrak{g}^r_d$s, um para cada componente irredutível de C, satisfazendo certas condições de compatibilidade nas ordens de anulamento dos nós de C. Usando tal teoria, eles encontram condições necessárias para um sistema linear limite ser o limite de sistemas lineares definidos em curvas suaves em uma vizinhança de C.

Eisenbud e Harris, em (3), escrevem que a noção de sistemas lineares se estende para uma curva redutível, contudo não é útil para o estudo da sua geometria. De fato, tomando $\mathcal{C}$ uma curva nodal com componentes irredutíveis $C_1, ..., C_t$ e $f : C \longrightarrow S$ um morfismo projetivo plano, com S sendo o espectro de um anel de valorização discreta, onde s (resp. η) é o ponto especial (resp. genérico) de S, suponha que (V_η, L_η) seja um sistema linear na fibra genérica $C(\eta)$, isto é, um fibrado em reta L_η em $C(\eta)$ e um subespaço vetorial $V_\eta \subseteq H^0\Big(C(\eta), L_\eta\Big)$ de dimensão $r+1$. Queremos determinar um sistema linear limite em C e, estudando sua geometria, dizer algo a respeito da geometria da fibra genérica da família. Como Eisenbud e Harris observaram em (3), embora limites (V_s, L_s) existam, eles não são únicos e nenhum deles reflete completamente a geometria de (V_η, L_η). É possível estender L_η a um fibrado em reta $\mathcal{L}$ em C. Nesse caso, V_η terá como limite o subespaço vetorial $V_s \subseteq H^0\left(C, \mathcal{L}\big|_C\right)$ de dimensão $r+1$, onde $V_s = \left\{\sigma\big|_C : \sigma \in H^0(C, \mathcal{L}) \cap V_\eta\right\}$ e $H^0(C, \mathcal{L}) \cap V_\eta = \left\{\sigma \in H^0(C, \mathcal{L}) : \sigma\big|_{C(\eta)} \in V_\eta\right\}$. No entanto, se $\mathcal{L}$ é tal extensão e D é um divisor de Cartier não-trivial em C com suporte em $C(s)$, então $\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_X(D)$ é outra extensão de L_η cuja restrição a C pode ter, por exemplo, graus diferentes dos de $\mathcal{L}$ em cada componente.

Em (4), Eisenbud e Harris questionam: *"Quais são os limites de pontos de Wei-*

erstrass em famílias de curvas degenerando em curvas estáveis que não são de tipo compacto?".Os resultados em (5), base desta dissertação, nos possibilitam identificar limites de sistemas lineares e pontos de ramificação quando curvas suaves degeneram-se a curvas nodais redutíveis de qualquer tipo e, portanto, espera-se ser uma resposta satisfatória à questão (Ver *Teorema 5.19*). De fato, trabalhamos aqui com situações mais gerais de curvas nodais, não necessariamente estáveis, além de lidar com degenerações de quaisquer sistemas lineares, não somente o sistema canônico. Além disso, diferentemente da teoria desenvolvida por Eisenbud e Harris, não há a necessidade de trabalhar com os chamados blow-ups da família degenerada a fim de desviar os pontos de ramificação degenerados dos nós da curva. Na verdade, atribuimos o peso de ramificação apropriado a qualquer nó da curva (Ver *Teorema 5.19 (2.)*). Portanto, trabalhamos em cima de um estudo adicional à teoria de limites de sistemas lineares quando a curva é de tipo compacto.

No *Capítulo 2*, dispomos algumas definições básicas que serão mencionadas nos segmentos posteriores, com o intuito de ajudar e dinamizar a leitura do trabalho. O *Capítulo 3* possui como objetivo desenvolver o conceito de *esquema*, estrutura matemática que amplia a noção de variedade algébrica. Os esquemas foram introduzidos por Alexander Grothendieck em seu trabalho *Éléments de Géométrie Algébrique* (1960) (11), com a finalidade de desenvolver o formalismo necessário para a resolução de alguns problemas dentro da Geometria Algébrica. Formalmente, um esquema é um espaço topológico, juntamente com anéis comutativos para todos os seus conjuntos abertos, os quais surgem a partir da colagem de espectros (espaços de ideais primos) de anéis comutativos ao longo de seus subconjuntos abertos. Em outras palavras, veremos que um esquema é um espaço anelado, o qual é, localmente, um espectro de um anel comutativo.

No *Capítulo 4*, apresentamos um estudo sobre *divisores*, os quais são generalizações de subvariedades de codimensão 1 de variedades algébricas. Duas diferentes generalizações são mostradas: os divisores de Weil e os divisores de Cartier (nomeados, respectivamente, em homenagem aos matemáticos André Weil e Pierre Cartier). É interessante observar que subvariedades de codimensão 1 são de mais fácil acesso do que aquelas com codimensão maior. Globalmente, toda subvariedade de codimensão 1 no espaço projetivo é definida anulando-se um único polinômio homogêneo, enquanto que uma subvariedade de codimensão r não necessariamente é definida por somente r equações, quando $r \geq 1$. Localmente, toda subvariedade de codimensão 1 de uma variedade suave pode ser definida através de uma equação em uma vizinhança de cada ponto; novamente, o fato análogo não é válido para subvariedades de codimensão maior. Dessa forma, em Geometria Algébrica, estuda-se uma variedade arbitrária através da análise de suas subvariedades de codimensão 1 e os correspondentes fibrados em reta.

Por fim, no *Capítulo 5*, focamos nosso estudo no já mencionado problema envolvendo sistemas lineares e pontos de ramificação, concluindo com o resultado do *Teorema 5.19.*

2 CONCEITOS INICIAIS

Neste capítulo, antes de entrar nas definições e resultados relacionados ao tema central desta dissertação, começamos com algumas definições preliminares, as quais serão mencionadas ao longo do trabalho. Tomamos como base (2), (14), (18) e (19).

Definição 2.1 (Espaço n-Projetivo). *Fixe k um corpo algebricamente fechado. Definimos o **espaço n-projetivo** sobre k, denotado por $\mathbb{P}^n_k$, como sendo o conjunto das classes de equivalência das $(n+1)$-uplas $(a_0, ..., a_n)$ de elementos de k, não todos nulos, pela seguinte relação de equivalência: $(a_0, ..., a_n) \sim (\lambda a_0, ..., \lambda a_n)$, para todo $\lambda \in k$, $\lambda \neq 0$.*

Equivalentemente, $\mathbb{P}^n_k$, como conjunto, é o quociente de $\mathbb{A}^{n+1}_k - \big\{(0, ..., 0)\big\}$ pela relação de equivalência que identifica pontos pertencentes a uma mesma reta que passa pela origem.

Um elemento de $\mathbb{P}^n_k$ é denominado <u>ponto</u>. Se p é um ponto, então qualquer $(n+1)$-upla $(a_0, ..., a_n)$ na classe de equivalência de p é denominada <u>conjunto de coordenadas homogêneas para p</u>.

Definição 2.2 (Anel Graduado). *Um **anel graduado** é um anel S juntamente com uma decomposição $S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$ de S em soma direta de grupos abelianos S_d, de forma que, para quaisquer $d, e \geq 0$, $S_d \cdot S_e \subseteq S_{d+e}$.*

*Um elemento de S_d é um **elemento homogêneo de grau** d.*

*Um ideal $I \subseteq S$ é um **ideal homogêneo** se $I = \bigoplus_{d \geq 0} (I \cap S_d)$. Um ideal homogêneo é **primo** se, para quaisquer dois elementos homogêneos f, g, $fg \in I$, então $f \in I$ ou $g \in I$.*

Observação 1. *Pela definição de Anel Graduado (Definição 2.2), qualquer elemento de S pode ser escrito unicamente como uma soma (finita) de elementos homogêneos.*

Além disso, um ideal é homogêneo se, e somente se, pode ser gerado por elementos homogêneos. A soma, o produto, a interseção e o radical de ideais homogêneos são homogêneos. Para mais detalhes, veja (21, Capítulo VII, Parágrafo 2)

Definição 2.3 (Conjunto Algébrico). *Os **zeros** de um polinômio homogêneo f é o conjunto $Z(f) = \{p \in \mathbb{P}^n : f(p) = 0\}$. Se T é um conjunto qualquer de elementos homogêneos de $S = k[x_0, ..., x_n]$, definimos o **conjunto de zeros** de T como sendo*

$$Z(T) = \{p \in \mathbb{P}^n : f(p) = 0, \ \forall f \in T\}.$$

*Um subconjunto Y de $\mathbb{P}^n$ é um **conjunto algébrico** se existe um conjunto T de elementos homogêneos de S tal que $Y = Z(T)$.*

Definição 2.4 (Variedade). *Uma **variedade algébrica projetiva** (ou, simplesmente, **variedade projetiva**) é um conjunto algébrico irredutível em $\mathbb{P}^n$, com a topologia induzida. Um subconjunto aberto de uma variedade projetiva é uma **variedade quasi-projetiva**.*

*Considerando k um corpo algebricamente fechado, uma **variedade sobre** k (ou, simplesmente, **variedade**) é qualquer variedade projetiva ou quasi-projetiva como definidas acima.*

Definição 2.5 (Função Regular). *Seja $Y \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade projetiva. Uma função $f : Y \longrightarrow k$ é **regular em um ponto** $p \in Y$ se existe uma vizinhança aberta U com $p \in U \subseteq Y$ e polinômios homogêneos $g, h \in S = k[x_0, ..., x_n]$, de mesmo grau, tal que h é não-nulo em U e $f = \dfrac{g}{h}$ em U. Dizemos que f é **regular em** Y se é regular em todo ponto.*

Definição 2.6 (Anel Local de um Ponto em uma Variedade). *Seja Y uma variedade. Denotamos por $\mathcal{O}(Y)$ o anel de todas as funções regulares em Y. Se p é um ponto de Y, definimos o **anel local de** p **em** Y, $\mathcal{O}_{p,Y}$ (ou simplesmente $\mathcal{O}_p$) como sendo o anel de **germes** de funções regulares em Y em uma vizinhança de p. Em outras palavras, um elemento de $\mathcal{O}_p$ é um par $\langle U, f\rangle$, onde U é um subconjunto aberto de Y contendo p e f é uma função regular em U. Identificamos dois desses pares $\langle U, f\rangle$ e $\langle V, g\rangle$ se $f = g$ em $U \cap V$.*

Observação 2. *Na Definição 2.6, note que $\mathcal{O}_p$ é, de fato, um anel local: seu ideal maximal $\mathfrak{m}$ é o conjunto de **germes** de funções regulares que se anulam em p. Se $f(p) \neq 0$, então $\dfrac{1}{f}$ é regular em alguma vizinhança de p. O corpo residual $\mathcal{O}_p/\mathfrak{m}$ é isomorfo a k.*

Definição 2.7 (Corpo de Frações). *Se Y é uma variedade, definimos o **corpo de frações** $K(Y)$ de Y da seguinte maneira: um elemento de $K(Y)$ é uma classe de equivalência de pares $\langle U, f\rangle$, onde U é um subconjunto aberto não-vazio de Y e f é uma função regular em U, e onde identificamos dois pares $\langle U, f\rangle$ e $\langle V, g\rangle$ se $f = g$ em $U \cap V$. Os elementos de $K(Y)$ são as **funções racionais** em Y.*

Definição 2.8 (Anel Local Regular). *Seja A um anel local Noetheriano com ideal maximal $\mathfrak{m}$ e corpo residual $k = A/\mathfrak{m}$. Assim, A é um **anel local regular** se $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim A$.*

Definição 2.9 (Variedade Singular e Não-Singular). *Seja Y uma variedade. Y é <u>não-singular em um ponto $p \in Y$</u> se o anel local $\mathcal{O}_{p,Y}$ é um anel local regular. Y é **não-singular** se é não-singular em todo ponto. Y é **singular** se não for não-singular.*

Definição 2.10 (Valorização). *Sejam k um corpo e G um grupo abeliano totalmente ordenado. Uma **valorização** de k com valores em G é um mapa $\upsilon : k - \{0\} \longrightarrow G$ tal que, para todo $x, y \in k$, $x, y \neq 0$, temos:*

1. $\upsilon(xy) = \upsilon(x) + \upsilon(y)$;
2. $\upsilon(x + y) \geq \boldsymbol{min}\Big(\upsilon(x), \upsilon(y)\Big)$.

Se υ é uma valorização, então o conjunto $R = \Big\{x \in k : \upsilon(x) \geq 0\Big\} \cup \{0\}$ é um subanel de k, denominado o ***anel de valorização de*** *υ. O subconjunto*

$$\mathfrak{m} = \Big\{x \in k : \upsilon(x) > 0\Big\} \cup \{0\}$$

é um ideal em R.

Uma valorização υ é ***discreta*** *se seu grupo de valores G é o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros. O anel de valorização correspondente é denominado um* ***anel de valorização discreta****.*

Um ***parâmetro*** *em um anel de valorização discreta é qualquer elemento irredutível de R de forma que seja um gerador para o único ideal maximal de R e vice-versa.*

Observação 3. *Na Definição 2.10, fixe um parâmetro t em um anel de valorização discreta R. Então, $\mathfrak{m} = \langle t \rangle$ (o único ideal maximal). Qualquer outro ideal não-nulo é potência de $\mathfrak{m}$, isto é, assume a forma $\langle t^n \rangle$, para algum $n \geq 0$. Qualquer elemento não-nulo de R pode ser escrito na forma ut^n, com u sendo unidade de R e $n \geq 0$. Nesse caso, $\upsilon(ut^n) = n \cdot \upsilon(t)$.*

Teorema 2.11. *Seja A um domínio local Noetheriano de dimensão 1, com ideal maximal $\mathfrak{m}$. As seguintes condições são equivalentes:*

1. *A é um anel de valorização discreta;*
2. *A é um anel local regular;*
3. *$\mathfrak{m}$ é um ideal principal.*

Demonstração. (2, Proposição 9.2, p. 94-95) $\square$

Definição 2.12 (Módulo Graduado)**.** *Seja S um anel graduado. Um S-**módulo graduado** é um S-módulo M, juntamente com uma decomposição $M = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} M_d$, de forma que $S_d \cdot M_e \subseteq M_{d+e}$.*

Para qualquer S-módulo graduado M e qualquer $\ell \in \mathbb{Z}$, definimos o ***módulo torcido*** *$M(\ell)$ da seguinte forma: $M(\ell)_d := M_{d+\ell}$.*

Se M é um S-módulo graduado, definimos o <u>*anulador*</u> *de M como sendo*

$$\mathtt{Ann}\ M := \Big\{s \in S : s \cdot M = 0\Big\}.$$

Esse é um ideal homogêneo em S.

Definição 2.13 (Limite Direto)**.** *Um conjunto parcialmente ordenado Λ é dito um* <u>*conjunto dirigido*</u> *se, para cada par i, j em Λ, existe $k \in \Lambda$ tal que $i \leq k$ e $j \leq k$.*

Sejam A um anel, Λ um conjunto dirigido e $(M_i)_{i \in \Lambda}$ uma família de A-módulos indexada por Λ. Para cada par i, j em Λ tal que $i \leq j$, seja $\mu_{ij} : M_i \longrightarrow M_j$ um A-homomorfismo. Suponha que os seguintes axiomas sejam satisfeitos:

1. μ_{ii} *é o mapa identidade de* M_i, $\forall i \in \Lambda$;

2. $\mu_{ik} = \mu_{jk} \circ \mu_{ij}$, *sempre que* $i \leq j \leq k$.

Então os módulos M_i *e os homomorfismos* μ_{ij} *formam um chamado* <u>*sistema direto*</u> $\mathcal{M} = (M_i, \mu_{ij})$ *sobre o conjunto dirigido* Λ.

Agora, seja $\mathfrak{C}$ *uma soma direta de* M_i *e identifique cada módulo* M_i *com sua imagem canônica em* $\mathfrak{C}$. *Seja* $\mathfrak{D}$ *o submódulo de* $\mathfrak{C}$ *gerado por todos os elementos da forma* $x_i - \mu_{ij}(x_i)$, *onde* $i \leq j$ *e* $x_i \in M_i$. *Seja* $\mathfrak{M} = \mathfrak{C}/\mathfrak{D}$ *e sejam* $\mu : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{M}$ *a projeção e* μ_i *a restrição de* μ *a* M_i. *O* A*-módulo* $\mathfrak{M}$ *ou, mais corretamente, o par consistindo de* $\mathfrak{M}$ *e a família de homomorfismos* $\mu_i : M_i \longrightarrow \mathfrak{M}$, *é denominado* ***limite direto*** *do sistema direto* $\mathcal{M}$, *denotado por* $\varinjlim M_i$.

Definição 2.14 (Módulo Plano)**.** *Um* A*-módulo* M *é dito* ***plano*** *se* $- \otimes_A M$ *é exato. Ou seja, dado* N *um* A*-módulo e se* $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ *é uma sequência exata qualquer de* A*-módulos, então* $0 \longrightarrow M' \otimes N \longrightarrow M \otimes N \longrightarrow M'' \otimes N \longrightarrow 0$ *é também uma sequência exata.*

Um mapa de anéis $A \longrightarrow B$ *é dito* ***plano*** *se é um homomorfismo que faz de* B *um* A*-módulo plano.*

3 FEIXES E ESQUEMAS

Neste capítulo, desenvolveremos o conceito de *esquema.* Tomamos como base (11), (14), (15) (18) e (19).

Considere um anel A comutativo com unidade 1. A ideia é associar a A um objeto geométrico, o qual, no caso em que A é o anel de coordenadas de uma variedade afim X, deve nos levar de volta a X. Esse objeto, primeiramente, será definido como um conjunto para, depois, adicionar suas estruturas, por exemplo uma topologia, justificando seu ideal geométrico.

Considere variedades definidas sobre um corpo k algebricamente fechado. Se quisermos recuperar uma variedade afim X a partir de seu anel de coordenadas $k[X]$, o mais natural seria usar a relação existente entre subvariedades $Y \subset X$ e seus ideais $I_Y \subset k[X]$. Em particular, um ponto $x \in X$ corresponde a um ideal maximal $\mathfrak{m}_x$ e o mapa $x \longmapsto \mathfrak{m}_x \subset k[X]$ estabelece um correspondência biunívoca entre pontos $x \in X$ e ideais maximais de $k[X]$. Portanto, soa natural que o objeto geométrico associado a qualquer anel A seja seu conjunto de ideais maximais. Esse conjunto é denominado o <u>espectro maximal</u> de A, denotado por $\texttt{Specm}\ A$. Entretanto, no sentido de generalização, o mapa $A \longmapsto \texttt{Specm}\ A$ possui certas desvantagens:

É natural esperar que o mapa relacionando A a seu conjunto geométrico tenha as propriedades principais que relacionam o anel de coordenadas de um variedade algébrica afim com a variedade em si. Dessas propriedades, a mais importante é que homomorfismos de anéis correspondem a mapas regulares de variedades. Há uma maneira natural de associar com um homomorfismo de anéis $f : A \longrightarrow B$ um mapa de $\texttt{Specm}\ B$ para $\texttt{Specm}\ A$? Como fazer a relação entre um ideal $J \subset B$ e algum ideal $I \subset A$? Tomar a imagem inversa $f^{-1}(I)$ soa como a resposta óbvia. Porém, a imagem inversa de um ideal maximal nem sempre é um maximal.

Esse problema é evitado se, ao invés de tomarmos ideais maximais, trabalharmos com ideais primos: a imagem inversa de um ideal primo dado um homomorfismo de anéis qualquer ainda é um primo (Ver (20, Capítulo III, Parágrafo 8)). No caso em que $A = k[X]$ é o anel de coordenadas de uma variedade afim X, o conjunto dos ideais primos de A possui um claro significado geométrico: é o conjunto das subvariedades fechadas irredutíveis de X (pontos, curvas irredutíveis, superfícies irredutíveis,...). Logo, temos a motivação para a seguinte definição:

3.1 O ESPECTRO DE UM ANEL

Definição 3.1. *Definimos* $\texttt{Spec}\ A$ *(**espectro primo** ou, simplesmente, **espectro**) como sendo o conjunto de todos os ideais primos de um anel* A*. Ideais primos são denominados* <u>*pontos*</u> *de* $\texttt{Spec}\ A$*.*

Se I é um ideal qualquer de A, definimos o subconjunto $V(I) \subseteq \texttt{Spec}\ A$ como sendo o conjunto de todos os ideais primos que contêm I.

Observação 4. *Considerando anéis com unidade 1, o anel em si não está incluído como um ideal primo. Isso porque o anel quociente A/P por um ideal primo deve ser sempre um domínio de integridade, isto é, um subanel de um corpo (com $0 \neq 1$). Do Lema de Zorn (Ver [6], Seção 16, p. 62), segue que todo anel A não-nulo possui, ao menos, um ideal maximal. Portanto, $\texttt{Spec}\ A$ é sempre não-vazio para $A \neq 0$.*

Exemplo 1. *Seja $\mathcal{O}_x$ o anel local de um ponto x de uma curva algébrica irredutível. Então $\texttt{Spec}\ \mathcal{O}_x$ consiste de dois pontos: o ideal maximal e o ideal nulo.*

Definição 3.2. *A cada ponto $x \in \texttt{Spec}\ A$, podemos associar o corpo de frações do anel quociente pelo ideal primo correspondente. Esse corpo é denominado o **corpo residual** em x e notado por $k(x)$.*

A partir da *Definição 3.2*, temos um homomorfismo $A \longrightarrow k(x)$, cujo núcleo é o ideal primo denotado por x. Se $A = k[X]$, o anel de coordenadas de uma variedade afim X definido sobre um corpo algebricamente fechado k, então $k(x) = k$ e, para $f \in A$, o elemento $f(x) \in k(x)$ é o valor de f em x, onde $f(x)$ é a imagem de $f \in A$ pelo homomorfismo dado.

Exemplo 2. *Para cada ponto $x \in \texttt{Spec}\ A$, há um anel local $\mathcal{O}_x$, o anel local de A no ideal primo x. Por exemplo, se $A = \mathbb{Z}$ e $x = \langle p \rangle$, onde p é um número primo, então $\mathcal{O}_x$ é o anel de números racionais $\dfrac{a}{b}$, com denominador b coprimo a p. Se $x = \langle 0 \rangle$, então $\mathcal{O}_x = \mathbb{Q}$.*

Lema 3.3.
1. *Se I e J são ideais de A, então $V(IJ) = V(I) \cup V(J)$.*
2. *Se $\{I_\alpha\}$ é um conjunto qualquer de ideais de A, então $V\left(\sum I_\alpha\right) = \bigcap V(I_\alpha)$.*
3. *Se I e J são ideais de A, $V(I) \subseteq V(J)$ se, e somente se, $\sqrt{J} \subseteq \sqrt{I}$.*

Demonstração. (14, Lema 2.1, p. 70) □

Tomando os subconjuntos da forma $V(I)$ como sendo subconjuntos fechados, podemos definir uma topologia em $\texttt{Spec}\ A$. Note que $V(A) = \emptyset$ e $V(\langle 0 \rangle) = \texttt{Spec}\ A$. Além disso, o *Lema 3.3* mostra que a união finita e a interseção arbitrária de conjuntos da forma $V(I)$ também são da mesma forma. Portanto, de fato, formam o conjunto de fechados para uma topologia em $\texttt{Spec}\ A$. Assim, está construído o espaço $\texttt{Spec}\ A$ associado a um anel A.

3.2 FEIXES

Em nosso caminho em direção ao conceito de *esquema*, além do espaço topológico $\texttt{Spec}\ A$, um segundo pilar fundamental é a noção de *feixe*. Na *Seção 3.1*, utilizamos o fato de que uma variedade afim X é determinada por seu anel de funções regulares $k[X]$ e, então, a partir de um anel arbitrário A, chegamos a uma noção geométrica correspondente, seu espectro primo $\texttt{Spec}\ A$. Para definir a noção geral de esquema também tomamos as funções regulares em uma variedade como o ponto de partida. Nesse sentido, para qualquer conjunto aberto $U \subset X$, vamos considerar o anel de funções regulares em U.

Definição 3.4. *Seja X um espaço topológico. Um **pré-feixe** $\mathcal{F}$ de grupos abelianos em X consiste nos seguintes dados:*

1. *Para todo subconjunto aberto $U \subseteq X$, um grupo abeliano $\mathcal{F}(U)$; e*

2. *Para toda inclusão $V \subseteq U$ de subconjuntos abertos de X, um morfismo de grupos abelianos $\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$,*

   satisfazendo as seguintes condições

   a) $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$*;*

   b) ρ_{UU} *é o mapa identidade $\mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(U)$; e*

   c) *Se $W \subseteq V \subseteq U$ são subconjuntos abertos, então $\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV}$.*

   *Os mapas ρ_{UV} são chamados de **mapas de restrição** e, se $s \in \mathcal{F}(U)$, então $\rho_{UV}(s) =: s\big|_V$.*

   *Um pré-feixe $\mathcal{F}$ em um espaço topológico X é um **feixe** se satisfaz, ainda, as seguintes condições:*

3. *Se U é um conjunto aberto, $\{V_i\}$ é uma cobertura aberta de U e $s \in \mathcal{F}(U)$ é um elemento tal que $s\big|_{V_i} = 0\ \forall i$, então $s = 0$;*

4. *Se U é um conjunto aberto, $\{V_i\}$ é uma cobertura aberta de U e se temos elementos $s_i \in \mathcal{F}(V_i)$, para cada i, com a propriedade que, para cada i, j, $s_i\big|_{V_i \cap V_j} = s_j\big|_{V_i \cap V_j}$, então existe um elemento $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $s\big|_{V_i} = s_i$, para cada i. (Pela condição 3., temos que s é única).*

Observação 5. *Em questões de terminologia e notação, se $\mathcal{F}$ é um pré-feixe em X, nos referimos a $\mathcal{F}(U)$ como as **seções** do pré-feixe $\mathcal{F}$ sobre o conjunto aberto U e, usualmente, utilizaremos a notação $\Gamma(U, \mathcal{F})$ para denotar o grupo $\mathcal{F}(U)$. Se $U = X$, então $\mathcal{F}(X) = \Gamma(X, \mathcal{F})$ são as chamadas **seções globais** de X.*

Observação 6. *De acordo com a nossa definição (Definição 3.4), um feixe é um pré-feixe satisfazendo certas condições extras. A grosso modo, um feixe é um pré-feixe cujas seções são determinadas localmente.*

Exemplo 3. *Suponha que o anel A não possua divisores de zero e denote por K seu corpo de frações. Nesse caso, A é um subanel de K. Para um conjunto aberto $U \subset \mathtt{Spec}\ A$, denote por $\mathcal{O}(U)$ o conjunto dos elementos $u \in K$ tais que, para qualquer ponto $P \in U$, tenhamos uma expressão $u = \dfrac{a}{b}$, com $a, b \in A$ e $b(P) \neq 0$, isto é, b não é um elemento do ideal primo P. $\mathcal{O}(U)$ é um anel. Como todos os anéis $\mathcal{O}(U)$ estão contidos em K, podemos os comparar como subconjuntos de um mesmo conjunto. Se $V \subset U$, então $\mathcal{O}(U) \subset \mathcal{O}(V)$. ρ_{UV} é a inclusão $\mathcal{O}(U) \hookrightarrow \mathcal{O}(V)$. Temos, assim, um pré-feixe de anéis.*

Exemplo 4. *Seja X uma variedade sobre o corpo k. Para cada conjunto aberto $U \subseteq X$, seja $\mathcal{O}(U)$ o anel de funções regulares de U para k e, para cada $V \subseteq U$, seja ρ_{UV} : $\mathcal{O}(U) \longrightarrow \mathcal{O}(V)$ o mapa de restrição. Então, $\mathcal{O}$ é um feixe de anéis em X, denominado o **feixe de funções regulares** em X. Ou seja, o feixe de funções é simplesmente os dados do anel de funções regulares $\mathcal{O}_X(U)$ para cada subconjunto aberto U de X. O anel $\mathcal{O}_X(U)$ é uma k-álgebra, onde cada elemento de k é visto como uma função constante.*

Como dito, se U, V são subconjuntos abertos de X com $V \subseteq U$, a restrição de funções fornece um homomorfismo de anéis ρ_{UV}. E, finalmente, para qualquer coleção de subconjuntos abertos U_λ de X, uma função regular f na união $\bigcup U_\lambda$ fornece uma função f_λ em cada U_λ de forma que as restrições $f_\lambda\big|_{U_\lambda \cap U_\nu}$ e $f_\nu\big|_{U_\lambda \cap U_\nu}$ coincidam.

É possível definir algumas operações em feixes, associadas a mapas contínuos de um espaço topológico para outro:

Definição 3.5. *Seja $f : X \longrightarrow Y$ um mapa contínuo de espaços topológicos. Para qualquer feixe $\mathcal{F}$ em X, definimos o feixe **imagem direta** $f_*\mathcal{F}$ em Y por*

$$(f_*\mathcal{F})(V) = \mathcal{F}\Big(f^{-1}(V)\Big),$$

para qualquer conjunto aberto $V \subseteq Y$.

Agora, é possível definir um feixe de anéis $\mathcal{O}$ em $\mathtt{Spec}\ A$. Para cada ideal primo $P \subseteq A$, seja A_P a localização de A em P.

Definição 3.6. *Para um conjunto aberto $U \subseteq \mathtt{Spec}\ A$, definimos $\mathcal{O}(U)$ como sendo o conjunto das funções $s : U \longrightarrow \coprod_{P \in U} A_P$ tal que $s(P) \in A_P$, para cada P, e tal que s seja localmente um quociente de elementos de A.*

Para ser preciso, pedimos que, para cada $P \in U$, existam uma vizinhança V de P, contida em U, e elementos $a, f \in A$ tais que, para cada $Q \in V$, $f \notin Q$ e $s(Q) = \dfrac{a}{f}$ em A_Q.

Observação 7. *Somas e produtos das funções apresentadas na Definição 3.6 são desse mesmo tipo e o elemento* 1 *o qual dá* 1 *em cada* A_P *é uma identidade. Portanto,* $\mathcal{O}(U)$ *é um anel comutativo com identidade.*

Se $V \subseteq U$ *são conjuntos abertos, a restrição natural*

$$\begin{array}{rccc} \rho_{UV}: & \mathcal{O}(U) & \longrightarrow & \mathcal{O}(V) \\ & s & \longmapsto & s\big|_V \end{array}$$

é um homomorfismo de anéis.

$\mathcal{O}$ *é um pré-feixe. Da natureza local de sua definição, temos que* $\mathcal{O}$ *é um feixe.*

Definição 3.7. *Seja* A *um anel. O* ***espectro*** *de* A *é o par consistindo do espaço topológico* $\texttt{Spec}\ A$ *junto ao feixe de anéis* $\mathcal{O}$.

Para qualquer elemento $f \in A$, denote por $D(f)$ o complementar aberto de $V(\langle f \rangle)$. Note que conjuntos abertos da forma $D(f)$ formam uma base para a topologia de $\texttt{Spec}\ A$. De fato, se $V(I)$ é um conjunto fechado e $P \notin V(I)$, então $I \not\subseteq P$; logo, existe $f \in I$ com $f \notin P$. Dessa forma, $P \in D(f)$ e $D(f) \cap V(I) = \emptyset$.

Agora, considere um feixe $\mathcal{F}$ para o qual todos os conjuntos $\mathcal{F}(U)$ são subconjuntos de um conjunto comum e os mapas de restrição são inclusões $\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}(V)$. Isso vale, por exemplo, para o feixe $\mathcal{O}$ em $\texttt{Spec}\ A$, onde A é um domínio de integridade, uma vez que todos $\mathcal{O}(U) \subset K$ são subanéis do corpo de frações K de A. Então, podemos considerar a união $\mathcal{F}_x = \bigcup \mathcal{F}(U)$ dos conjuntos $\mathcal{F}(U)$ tomados sobre todos os abertos U contendo um dado ponto x.

Definição 3.8. *Sejam* X *espaço topológico e* $\mathcal{F}$ *pré-feixe em* X*. Dado um ponto* $p \in X$*, o* ***talo*** $\mathcal{F}_p$ *de* $\mathcal{F}$ *em* p *é o conjunto de pares* $\left\langle U, s \right\rangle$*, onde* $U \subseteq X$ *é aberto contendo* p *e* $s \in \mathcal{F}(U)$*, módulo a seguinte relação de equivalência:* $\left\langle U, s \right\rangle = \left\langle V, t \right\rangle$ *em* $\mathcal{F}_p$ *se existe* $W \subseteq U \cap V$ *aberto tal que* $s\big|_W = t\big|_W$.

Observação 8. *A partir da nossa definição (Definição 3.8), podemos falar dos elementos do talo* $\mathcal{F}_p$ *como* <u>*germes*</u> *das seções de* $\mathcal{F}$ *em um ponto* p.

Proposição 3.9. *Sejam* A *um anel e* $(\texttt{Spec}\ A, \mathcal{O})$ *seu espectro.*

1. *Para qualquer* $P \in \texttt{Spec}\ A$*, o talo* $\mathcal{O}_P$ *do feixe* $\mathcal{O}$ *é isomorfo ao anel local* A_P.
2. *Para qualquer elemento* $f \in A$*, o anel* $\mathcal{O}\Big(D(f)\Big)$ *é isomorfo ao anel localizado* A_f.
3. *Em particular,* $\Gamma(\texttt{Spec}\ A, \mathcal{O}) \cong A$.

Demonstração. 1. Primeiramente, definimos um homomorfismo de $\mathcal{O}_P$ a A_P, enviando qualquer seção local s em uma vizinhança de P a seu valor $s(P) \in A_P$. Isso nos dá um homomorfismo bem-definido $\varphi : \mathcal{O}_P \longrightarrow A_P$. Esse mapa é sobrejetor, uma vez que qualquer elemento de A_P pode ser representado como um quociente $\frac{a}{f}$, com $a, f \in A$ e $f \notin P$. Então, $D(f)$ será uma vizinhança aberta de P e $\frac{a}{f}$ define uma seção de $\mathcal{O}$ sobre $D(f)$ cujo valor em P é o elemento dado. Para mostrar que φ também é um mapa injetor, seja U uma vizinhança de P e sejam $s, t \in \mathcal{O}(U)$ elementos possuindo o mesmo valor $s(P) = t(P)$ em P. Diminuindo U se necessário, podemos assumir que $s = \frac{a}{f}$ e $t = \frac{b}{g}$ em U, onde $a, b, f, g \in U$ e $f, g \notin P$. Como $\frac{a}{f}$ e $\frac{b}{g}$ possuem a mesma imagem em A_P, segue da definição de localização que existe $h \notin P$ tal que $h(ga - fb) = 0$ em A. Portanto, $\frac{a}{f} = \frac{b}{g}$ em todo anel local A_Q tal que $f, g, h \notin Q$. No entanto, o conjunto de tal Q é o conjunto aberto $D(f) \cap D(g) \cap D(h)$, o qual contém P. Portanto, $s = t$ em uma vizinhança inteira de P; logo, possuem o mesmo talo em P. Dessa forma, φ é um isomorfismo.

2. Defina um homomorfismo $\psi : A_f \longrightarrow \mathcal{O}\Big(D(f)\Big)$, $\frac{a}{f^n} \longmapsto s$, onde a seção $s \in \mathcal{O}\Big(D(f)\Big)$ atribui a cada P a imagem de $\frac{a}{f^n}$ em A_P.

   ψ é um mapa injetor. De fato, se $\psi\left(\frac{a}{f^n}\right) = \psi\left(\frac{b}{f^m}\right)$, então, para todo $P \in D(f)$, $\frac{a}{f^n}$ e $\frac{b}{f^m}$ possuem a mesma imagem em A_P. Portanto, existe um elemento $h \notin P$ tal que $h\left(f^m a - f^n b\right) = 0$ em A. Seja I o anulador de $f^m a - f^n b$. Então, $h \in I$ e $h \notin P$; logo, $I \nsubseteq P$. Isso é válido para qualquer $P \in D(f)$, concluindo que $V(I) \cap D(f) = \emptyset$. Dessa forma, $f \in \sqrt{I}$ (ideal radical), para alguma potência $f^r \in I$. Assim, $f^r\left(f^m a - f^n b\right) = 0$, mostrando que $\frac{a}{f^n} = \frac{b}{f^m}$ em A_f.

   Para mostrar que ψ é um mapa sobrejetor é um tanto mais trabalhoso. Seja $s \in \mathcal{O}\Big(D(f)\Big)$. Pela definição de $\mathcal{O}$, podemos cobrir $D(f)$ com conjuntos abertos V_i, nos quais s é representada pelo quociente $\frac{a_i}{g_i}$, com $g_i \notin P$, para todo $P \in V_i$. Em outras palavras, $V_i \subseteq D(g_i)$. Agora, os conjuntos abertos da forma $D(h)$ formam uma base para a topologia, então podemos assumir que $V_i = D(h_i)$, para algum h_i. Como $D(h_i) \subseteq D(g_i)$, temos $V\left(\langle h_i \rangle\right) \supseteq V\left(\langle g_i \rangle\right)$; pelo *Lema 3.3 (3.)*, $\sqrt{\langle h_i \rangle} \subseteq \sqrt{\langle g_i \rangle}$ e, em particular, $h_i^n \in \langle g_i \rangle$, para algum n. Assim, $h_i^n = c g_i$ e, logo, $\frac{a_i}{g_i} = \frac{c a_i}{h_i^n}$. Como $D(h_i) = D(h_i^n)$, podemos substituir h_i por h_i^n e a_i por $c a_i$, donde podemos assumir que $D(f)$ é coberto pelos subconjuntos abertos $D(h_i)$ e que s é representado por $\frac{a_i}{h_i}$ em $D(h_i)$.

   Agora, observe que $D(f)$ pode ser coberto por um número finito de abertos $D(h_i)$. De fato,

$$D(f) \subseteq \bigcup D(h_i) \iff V\left(\langle f \rangle\right) \supseteq \bigcap V\left(\langle h_i \rangle\right) = V\left(\sum \langle h_i \rangle\right).$$

Novamente, pelo *Lema 3.3 (3.)*, isso é equivalente a dizer que $f \in \sqrt{\sum \langle h_i \rangle}$ ou $f^n \in \sum \langle h_i \rangle$, para algum n. Isso significa que f^n pode ser expresso como uma soma finita $f^n = \sum b_i h_i$, com $b_i \in A$. Portanto, um subconjunto finito dos h_i é suficiente. Dessa forma, a partir de agora, fixemos um conjunto finito $h_1, ..., h_t$ tal que $D(f) \subseteq D(h_1) \cup \cdots \cup D(h_t)$.

Para o próximo passo, note que, em $D(h_i) \cap D(h_j) = D(h_i h_j)$, temos dois elementos de $A_{h_i h_j}$, $\dfrac{a_i}{h_i}$ e $\dfrac{a_j}{h_j}$, ambos representando s. Portanto, de acordo com a injetividade de ψ, aplicando a $D(h_i h_j)$, devemos ter $\dfrac{a_i}{h_i} = \dfrac{a_j}{h_j}$ em $A_{h_i h_j}$. Logo, para algum n,

$$(h_i h_j)^n (h_j a_i - h_i a_j) = 0.$$

Como há um somente um número finito de índices envolvidos, podemos tomar n grande suficiente para funcionar para todos i, j de uma vez. Reescreva a equação da seguinte forma:

$$h_j^{n+1}(h_i^n a_i) - h_i^{n+1}(h_j^n a_j) = 0.$$

Substitua cada h_i por h_i^{n+1} e a_i por $h_i^n a_i$. Então, ainda temos s representada em $D(h_i)$ por $\dfrac{a_i}{h_i}$ e, além disso, temos $h_j a_i = h_i a_j$, para todo i, j.

Escreva $f^n = \sum b_i h_i$ como anteriormente, o que é possível, para algum n, pois $D(h_i)$ cobrem $D(f)$. Seja $a = \sum b_i a_i$. Então, para cada j, temos

$$h_j a = \sum_i b_i a_i h_j = \sum_i b_i h_i a_j = f^n a_j.$$

Ou seja, $\dfrac{a}{f^n} = \dfrac{a_j}{h_j}$ em $D(h_j)$. Logo, $\psi\left(\dfrac{a}{f^n}\right) = s$ em todo lugar, mostrando que ψ é um mapa sobrejetor e, portanto, é um isomorfismo.

3. Note que *3.* é o caso especial de *2.*, onde $f = 1$ e $D(f)$ é todo o espaço.

$\square$

Exemplo 5. *Vamos calcular $\mathcal{O}(\texttt{Spec}\ A)$. A condição $u \in \mathcal{O}(\texttt{Spec}\ A)$ significa que,*

$$\textit{para qualquer ponto } x \in \texttt{Spec}\ A, \textit{ existem } a_x, b_x \in A \textit{ tais que } u = \frac{a_x}{b_x}, \textit{ com } b_x(x) \neq 0. \tag{3.1}$$

Considere o ideal I gerado pelos elementos b_x, para todo $x \in \texttt{Spec}\ A$. Por (3.1), I está contido em nenhum ideal primo de A; logo, $I = A$. Portanto, existem pontos $x_1, ..., x_r \in \texttt{Spec}\ A$ e elementos $c_1, ..., c_r \in A$ tais que $c_1 b_{x_1} + \cdots + c_r b_{x_r} = 1$. Tomando $x = x_i$ em (3.1), multiplicando por $c_i b_{x_i}$ e fazendo o somatório, temos $u = \sum a_{x_i} c_i \in A$. Portanto, $\mathcal{O}(\texttt{Spec}\ A) = A$.

Exemplo 6. *Retomando o Exemplo 4, no caso de uma variedade X e seu feixe de funções regulares $\mathcal{O}$, o talo $\mathcal{O}_p$ em um ponto p é o anel local de p em X.*

Definição 3.10. *Se Z é um subconjunto de X, considerado como um subespaço topológico com a topologia induzida, se $i : Z \longrightarrow X$ é o mapa de inclusão e se $\mathcal{F}$ é um feixe em X, então denominamos $i^{-1}\mathcal{F}$ a* ***restrição*** *de $\mathcal{F}$ a Z, geralmente denotado por $\mathcal{F}\Big|_Z$. Note que o talo de $\mathcal{F}\Big|_Z$ em qualquer ponto $p \in Z$ é apenas $\mathcal{F}_p$.*

Definição 3.11. *Se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são pré-feixes em X, um* ***morfismo*** *$\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ consiste de uma família de morfismos de grupos abelianos $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$, para cada conjunto aberto U, tal que, para toda inclusão $V \subseteq U$, o diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\varphi(U)"] \arrow[d, "\rho_{UV}"] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\rho'_{UV}"] \\
\mathcal{F}(V) \arrow[r, "\varphi(V)"] & \mathcal{G}(V)
\end{tikzcd}$$

seja comutativo, onde ρ e ρ' são os mapas de restrição em $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$, respectivamente.

Se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são feixes em X, usa-se a mesma definição para um morfismo de feixes.

Um ***isomorfismo*** *é um morfismo que possui inversa bilateral.*

Observação 9. *Note que um morfismo $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ de pré-feixes em X induz um morfismo $\varphi_p : \mathcal{F}_p \longrightarrow \mathcal{G}_p$ nos talos, para qualquer ponto $p \in X$.*

Definição 3.12. *Um* ***espaço anelado*** *é um par $(X, \mathcal{O}_X)$ consistindo de um espaço topológico X e um feixe de anéis $\mathcal{O}_X$ em X. O feixe $\mathcal{O}_X$ é denominado o* ***feixe estrutural*** *de X.*

Um ***morfismo de espaços anelados*** *de $(X, \mathcal{O}_X)$ para $(Y, \mathcal{O}_Y)$ é um par $(f, f^\sharp)$ consistindo de um mapa contínuo $f : X \longrightarrow Y$ e um mapa $f^\sharp : \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_*\mathcal{O}_X$ de feixes de anéis em Y. Em outras palavras, um morfismo entre $(X, \mathcal{O}_X)$ e $(Y, \mathcal{O}_Y)$ é um mapa contínuo $f : X \longrightarrow Y$ e uma coleção de homomorfismos $f_U^\sharp : \mathcal{O}_Y(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X\Big(f^{-1}(U)\Big)$, para quaisquer conjuntos abertos $U \subset Y$. Necessita-se que o diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X\Big(f^{-1}(U)\Big) \arrow[r, "\rho_{f^{-1}U, f^{-1}V}"'] & \mathcal{O}_X\Big(\varphi^{-1}(V)\Big) \\
\mathcal{O}_Y(U) \arrow[u, "f_U^\sharp"] \arrow[r, "\rho_{UV}"'] & \mathcal{O}_Y(V) \arrow[u, "f_V^\sharp"']
\end{tikzcd}$$

seja comutativo para quaisquer conjuntos $V \subset U$ de Y.

O espaço anelado $(X, \mathcal{O}_X)$ é um ***espaço localmente anelado*** *se, para cada ponto $p \in X$, o talo $\mathcal{O}_{X,p}$ é um anel local.*

Um ***morfismo de espaços localmente anelados*** *é um morfismo $(f, f^\sharp)$ de espaços anelados tal que, para cada ponto $p \in X$, o mapa induzido de anéis locais $f_p^\sharp : \mathcal{O}_{Y,f(p)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,p}$ é um homomorfismo local de anéis locais.*

Proposição 3.13. *1. Se A é um anel, então ($\mathtt{Spec}\ A, \mathcal{O}$) é um espaço localmente anelado.*

2. Se $\varphi : A \longrightarrow B$ é um homomorfismo de anéis, então φ induz um morfismo natural de espaços localmente anelados

$$(f, f^\sharp) : (\mathtt{Spec}\ B, \mathcal{O}_{\mathtt{Spec}\ B}) \longrightarrow (\mathtt{Spec}\ A, \mathcal{O}_{\mathtt{Spec}\ A}).$$

3. Se A e B são anéis, então qualquer morfismo de espaços localmente anelados de $\mathtt{Spec}\ B$ para $\mathtt{Spec}\ A$ é induzido por um homomorfismo de anéis $\varphi : A \longrightarrow B$ como no item anterior.

Ideia da Demonstração. 1. Segue do resultado exposto na *Proposição 3.9 (1.)*.

2. Dado um homomorfismo $\varphi : A \longrightarrow B$, definimos um mapa $f : \mathtt{Spec}\ B \longrightarrow \mathtt{Spec}\ A$, onde $f(P) = \varphi^{-1}(P)$, para qualquer $P \in \mathtt{Spec}\ B$. Se I é um ideal de A, então $f^{-1}\big(V(I)\big) = V\big(\varphi(I)\big)$; logo, f é um mapa contínuo.

   Para cada $P \in \mathtt{Spec}\ B$, podemos localizar φ a fim de obter um homomorfismo local de anéis locais $\varphi_P : A_{\varphi^{-1}(P)} \longrightarrow B_P$. Agora, para cada aberto $V \subseteq \mathtt{Spec}\ A$, obtemos um homomorfismo de anéis $f^\sharp : \mathcal{O}_{\mathtt{Spec}\ A}(V) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathtt{Spec}\ B}\big(f^{-1}(V)\big)$, pela definição de $\mathcal{O}$, compondo com os mapas f e φ_P. Isso nos fornece o morfismo de feixes $f^\sharp : \mathcal{O}_{\mathtt{Spec}\ A} \longrightarrow f_*\left(\mathcal{O}_{\mathtt{Spec}\ B}\right)$. Os mapas induzidos $f^\sharp$ nos talos são os homomorfismos locais φ_P; logo, $(f, f^\sharp)$ é um morfismo de espaços localmente anelados.

3. Reciprocamente, suponha dado um morfismo de espaços localmente anelados $(f, f^\sharp)$ de $\mathtt{Spec}\ B$ a $\mathtt{Spec}\ A$. Tomando seções globais, $f^\sharp$ induz um homomorfismo de anéis $\varphi : \Gamma\left(\mathtt{Spec}\ A, \mathcal{O}_{\mathtt{Spec}\ A}\right) \longrightarrow \Gamma\left(\mathtt{Spec}\ B, \mathcal{O}_{\mathtt{Spec}\ B}\right)$. Pela *Proposição 3.9 (3.)*, esses anéis são A e B respectivamente; logo, temos um homomorfismo $\varphi : A \longrightarrow B$.

   Para qualquer $P \in \mathtt{Spec}\ B$, temos um homomorfismo local induzido nos talos, $\mathcal{O}_{\mathtt{Spec}\ A, f(P)} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathtt{Spec}\ B, P}$ ou $A_{f(P)} \longrightarrow B_P$, o qual deve ser compatível com o mapa φ nas seções locais e nos homomorfismos localizados. Em outras palavras, temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A_{f(P)} \arrow[r, "f_P^\sharp"] & B_P \end{tikzcd}.$$

   Como $f^\sharp$ é um homomorfismo local, segue que $\varphi^{-1}(P) = f(P)$, mostrando que f coincide com o mapa $\mathtt{Spec}\ B \longrightarrow \mathtt{Spec}\ A$ induzido por φ. Agora, $f^\sharp$ também é induzido por φ; logo, o morfismo $(f, f^\sharp)$ de espaços localmente anelados de fato vem do homomorfismo de anéis φ.

$\square$

O próximo resultado (o qual pode ser falso para pré-feixes) ilustra a natureza local dos feixes.

Proposição 3.14. *Seja* $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ *um morfismo de feixes em um espaço topológico* X*. Então,* φ *é um isomorfismo se, e somente se, o mapa induzido no talo* $\varphi_p : \mathcal{F}_p \longrightarrow \mathcal{G}_p$ *é um isomorfismo para todo* $p \in X$*.*

Demonstração. (14, Proposição 1.1, p. 63) □

Proposição 3.15. *Dado um pré-feixe* $\mathcal{F}$*, existe um feixe* $\mathcal{F}^+$ *e um morfismo* $\theta : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^+$ *com a seguinte propriedade: para qualquer feixe* $\mathcal{G}$ *e qualquer morfismo* $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$*, existe um único morfismo* $\psi : \mathcal{F}^+ \longrightarrow \mathcal{G}$ *tal que* $\varphi = \psi \circ \theta$*.*

Além disso, o par $(\mathcal{F}^+, \theta)$ *é único a menos de um único isomorfismo.*

Ideia da Demonstração. A construção do feixe $\mathcal{F}^+$ é dada da seguinte maneira: Para qualquer conjunto aberto U, seja $\mathcal{F}^+(U)$ o conjunto das funções $s : U \longrightarrow \bigcup\limits_{p \in U} \mathcal{F}_p$ de forma que, para cada $p \in U$, (1) $s(p) \in \mathcal{F}_p$, e (2) exista uma vizinhança V de p, contida em U, e exista um elemento $t \in \mathcal{F}(V)$ tais que, para todo $q \in V$, o germe t_q de t em q seja igual a $s(q)$.

Verifica-se que $\mathcal{F}^+$, com os mapas naturais de restrição, é um feixe, que existe um morfismo natural $\theta : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^+$ e que tal morfismo possui a propriedade universal descrita. A unicidade de $\mathcal{F}^+$ é uma consequência da propriedade universal. Além disso, note que, para qualquer ponto p, $\mathcal{F}_p = \mathcal{F}^+_p$ e que, se $\mathcal{F}$ é um feixe, então $\mathcal{F}^+$ é isomorfo a $\mathcal{F}$ via θ. □

Definição 3.16. *O feixe* $\mathcal{F}^+$ *da Proposição 3.15 é denominado o* ***feixe associado*** *ao pré-feixe* $\mathcal{F}$*.*

Definição 3.17. *Um* ***subfeixe*** *de um feixe* $\mathcal{F}$ *é um feixe* $\mathcal{F}'$ *tal que, para todo conjunto aberto* $U \subseteq X$*,* $\mathcal{F}'(U)$ *é um subgrupo de* $\mathcal{F}(U)$ *e os mapas de restrição do feixe* $\mathcal{F}'$ *são induzidos pelos de* $\mathcal{F}$*. Para qualquer ponto* p*, o talo* $\mathcal{F}'_p$ *é um subgrupo de* $\mathcal{F}_p$*.*

Se $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ *é um morfismo de feixes, definimos o* ***núcleo*** *de* φ*, denotado por* $\ker \varphi$*, como sendo o pré-feixe núcleo de* φ *(o qual é um feixe). Portanto,* $\ker \varphi$ *é um subfeixe de* $\mathcal{F}$*.*

Dizemos que um morfismo de feixes $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ *é* ***injetivo*** *se* $\ker \varphi = 0$*. Portanto,* φ *é injetivo se, e somente se, o mapa induzido* $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ *for injetivo para todo aberto de* X*.*

Se $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ *é um morfismo de feixes, definimos a* ***imagem*** *de* φ*, denotada por* $\mathtt{im}\ \varphi$*, como sendo o feixe associado ao pré-feixe imagem de* φ*. Pela propriedade universal (Proposição 3.15) do feixe associado a um pré-feixe, existe um mapa natural* $\mathtt{im}\ \varphi \longrightarrow \mathcal{G}$*. De fato, esse mapa é injetivo e, portanto,* $\mathtt{im}\ \varphi$ *pode ser identificado com um subfeixe de* $\mathcal{G}$*.*

Dizemos que um morfismo $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ *de feixes é* ***sobrejetor*** *se* $\mathtt{im}\ \varphi = \mathcal{G}$*.*

Se $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ é um morfismo de feixes, definimos o ***conúcleo*** *de φ, denotado por* `coker` *φ, como sendo o feixe associado ao pré-feixe conúcleo de φ.*

Definição 3.18. *Dizemos que uma sequência de feixes e morfismos*

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{F}^{i-1} \xrightarrow{\varphi^{i-1}} \mathcal{F}^{i} \xrightarrow{\varphi^{i}} \mathcal{F}^{i+1} \longrightarrow \cdots$$

é ***exata*** *se, em cada estágio, $\ker \varphi^i =$* `im` *φ^{i-1}.*

Observação 10. *A partir da definição de sequência exata de feixes (Definição 3.18), uma sequência $0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G}$ é exata se, e somente se, φ é injetivo; e $\mathcal{F} \xrightarrow{\psi} \mathcal{G} \longrightarrow 0$ é exata se, e somente se, ψ é sobrejetor.*

Observação 11. *Como visto, um morfismo $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ de feixes é injetivo se, e somente se, o mapa nas seções $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ é injetivo, para cada U. A afirmação análoga para morfismos sobrejetores não é verdadeira, isto é, se $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ é sobrejetor, os mapas $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ nas seções não precisam ser sobrejetores. No entanto, podemos dizer que φ é sobrejetor se, e somente se, os mapas $\varphi_p : \mathcal{F}_p \longrightarrow \mathcal{G}_p$ nos talos são sobrejetores, para cada p. De forma mais geral, uma sequência de feixes e morfismos é exata se, e somente se, é exata nos talos. Com isso, é ilustrado, mais uma vez, a natureza local dos feixes.*

Definição 3.19. *Seja $f : X \longrightarrow Y$ um mapa contínuo de espaços topológicos. Para qualquer feixe $\mathcal{G}$ em Y, definimos o feixe* ***imagem inversa*** *$f^{-1}\mathcal{G}$ em X como sendo o feixe associado ao pré-feixe $U \longmapsto \lim\limits_{V \supseteq f(U)} \mathcal{G}(V)$, onde U é qualquer conjunto aberto em X e o limite é tomado sobre todos os conjuntos abertos V de Y contendo $f(U)$.*

3.3 ESQUEMAS: PARTE 1

Definição 3.20. *Um* ***esquema afim*** *é um espaço localmente anelado $(X, \mathcal{O}_X)$, o qual é isomorfo (como espaço localmente anelado) ao espectro de algum anel.*

Um ***esquema*** *é um espaço localmente anelado $(X, \mathcal{O}_X)$ onde todo ponto possui uma vizinhança aberta U tal que o espaço topológico U, juntamente com a restrição de feixe $\mathcal{O}_X\big|_U$, é um esquema afim, isto é, isomorfo a* `Spec` *A, para algum anel A.*

Denominamos X o ***espaço topológico subjacente*** *do esquema $(X, \mathcal{O}_X)$ e $\mathcal{O}_X$ seu* ***feixe estrutural****.*

Um ***morfismo*** *de esquemas é um morfismo como espaços localmente anelados. Um* ***isomorfismo*** *é um morfismo com inversa bilateral.*

Proposição 3.21. *Seja X um esquema. Para qualquer $x \in X$, sejam $\mathcal{O}_x$ o anel local em x e $\mathfrak{m}_x$ seu ideal maximal. Define-se o corpo residual de x em X como sendo o corpo $k(x) = \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x$. Agora, seja K um corpo qualquer. Então, fornecer um morfismo de* `Spec` *K para X é equivalente a dar um ponto $x \in X$ e um mapa inclusão $k(x) \longrightarrow K$.*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Se tivermos um morfismo $\texttt{Spec}\ K \longrightarrow X$, o único ponto de $\texttt{Spec}\ K$ mapeia a um ponto $x \in X$. E temos um morfismo $\mathcal{O}_x \longrightarrow K$. Como K é um corpo, o ideal maximal $\mathfrak{m}_x$ de $\mathcal{O}_x$ mapeia a zero em K, isto é, induz um morfismo $k(x) = \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x \longrightarrow K$.

($\Longleftarrow$) Reciprocamente, se fixarmos um ponto $x \in X$ e um morfismo $k(x) \longrightarrow K$, podemos definir um morfismo de feixes $f : \texttt{Spec}\ K \longrightarrow X$ como o ponto de $\texttt{Spec}\ K \longmapsto x$ e $\mathcal{O}_X \longrightarrow f_*\mathcal{O}_{\texttt{Spec}\ K}$ como

$$\begin{cases} \mathcal{O}_X(U) \longrightarrow 0 & \text{se } x \notin U \\ \mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_x \longrightarrow k(x) \longrightarrow K & \text{se } x \in U \end{cases}.$$

□

Observação 12. *Uma vizinhança U de x para a qual $\left(U, \mathcal{O}_X\big|_U\right)$ é isomorfo a $\texttt{Spec}\ A$ é denominada uma vizinhança afim de x. O corpo residual $k(x)$ é independente da escolha da vizinhança afim. Da mesma forma, o talo $\mathcal{O}_x$ do feixe estrutural $\mathcal{O}$ não depende se consideramos x um ponto de X ou um ponto de sua vizinhança U. Portanto, $\mathcal{O}_x$ é um anel local e, se $\mathfrak{m}_x$ é seu ideal maximal, então $\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x \cong k(x)$.*

Definição 3.22. *Sejam $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo de esquemas e $y \in Y$ um ponto. Sejam $k(y)$ o corpo residual de y e $\texttt{Spec}\ k(y) \longrightarrow Y$ o morfismo natural. Então, definimos a **fibra** do morfismo f sobre o ponto y como sendo o esquema*

$$X_y = X \times_Y \texttt{Spec}\ k(y),$$

utilizando a definição de produto fibrado de (14, p. 87).

Observação 13. *A fibra X_y é um esquema sobre $k(y)$ e pode-se mostrar que, como espaço topológico, é homeomorfo ao subconjunto $f^{-1}(y)$ de X:*

De fato, o morfismo $X_y \longrightarrow f^{-1}(y)$ é induzido pela projeção $\pi : X \times_Y \texttt{Spec}\ k(y) \longrightarrow X$. Então, precisamos provar que π é um homeomorfismo no espaço topológico. Como o problema é local para Y, podemos assumir que $Y = \texttt{Spec}\ B$. Para qualquer subconjunto $U \subset X$, temos $\pi^{-1}(U) = U \times_Y \texttt{Spec}\ k(y) = U_y$; logo, precisamos apenas provar que $U_y \cong f^{-1}(y) \cap U$. Assim, podemos também assumir que $X = \texttt{Spec}\ A$ afim. Denotando por $\mathfrak{p}$ o ideal primo de B correspondente a y, $\varphi : B \longrightarrow A$ é o homomorfismo de anéis correspondendo ao homomorfismo de esquemas $f : X \longrightarrow Y$, temos $X \times_Y \texttt{Spec}\ k(y) = \texttt{Spec}\ A \otimes_B B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p} = \texttt{Spec}\ A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$. Como os ideais primos de $A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ são correspondentes ao ideais primos de $A_\mathfrak{p}$ contendo $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$, que é correspondente aos ideais primos $\mathfrak{q} \subset A$ tais que $\mathfrak{q} \cap \varphi(B - \mathfrak{p}) = \emptyset$ e $\varphi(\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{q}$, que corresponde aos ideais primos $\mathfrak{q} \subset A$ com $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$, temos $X \times_Y \texttt{Spec}\ k(y) \cong f^{-1}(y)$.

A noção de fibra de um morfismo nos permite considerar um morfismo como uma família de esquemas (ou seja, suas fibras) parametrizada pelos pontos do esquema imagem. Reciprocamente, essa noção de família é um bom modo de entender a ideia de uma família *de esquemas variando algebricamente. Por exemplo, dado um esquema X_0 sobre um corpo k, definimos uma família de deformações de X_0 como sendo um morfismo $f : X \longrightarrow Y$, com Y conexo, juntamente com um ponto $y_0 \in Y$ tal que $k(y_0) = k$ e $X_{y_0} \cong X_0$. As outras fibras X_y de f são denominadas deformações de X_0.*

Definição 3.23. *Um **morfismo plano** $f : X \longrightarrow Y$, onde X, Y são esquemas, é um morfismo tal que o mapa induzido em todo talo seja um mapa plano de anéis, isto é, $f_p : \mathcal{O}_{Y,f(p)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,p}$ é um mapa plano, para todo $p \in X$. (Ver Definição 2.14).*

Exemplo 7. *Se k é um corpo, $\texttt{Spec}\ k$ é um esquema afim cujo espaço topológico consiste de um ponto e cujo feixe estrutural consiste do próprio corpo k.*

Exemplo 8. *Se R é um anel de valorização discreta, então $\texttt{Spec}\ R$ é um esquema afim cujo espaço topológico consiste de dois pontos.*

Se P é um ideal primo não-nulo de R, então contém um elemento não-nulo, o qual pode ser escrito na forma ut^n, onde u é unidade (possuindo valorização 0) e t é um uniformizante (possuindo valorização 1). Logo, $t^n \in P$ (multiplicando por u^{-1}); portanto, $t \in P$ (por causa da primalidade). Dessa forma, o único ideal não-nulo de R é o ideal (maximal) de elementos de valorização ≥ 1 (Ver Definição 2.10 e Observação 3).

Em $\texttt{Spec}\ R$, um ponto t_0 é fechado, com anel local R; o outro ponto t_1 é aberto e denso, com anel local igual a K, o corpo quociente de R.

O mapa de inclusão $R \longrightarrow K$ corresponde ao morfismo $\texttt{Spec}\ K \longrightarrow \texttt{Spec}\ R$ que envia o único ponto de $\texttt{Spec}\ K$ para t_1.

Existe um outro morfismo de espaços anelados $\texttt{Spec}\ K \longrightarrow \texttt{Spec}\ R$ que envia o único ponto de $\texttt{Spec}\ K$ para t_0 e utiliza a inclusão $R \longrightarrow K$ para definir o mapa associado $f^\sharp$ nos feixes estruturais. Esse morfismo não é induzido por qualquer homomorfismo $R \longrightarrow K$ como na Proposição 3.13 (itens 2 e 3), uma vez que não é um morfismo de espaços localmente anelados.

Exemplo 9. *Se k é um corpo, definimos a reta afim sobre k, $\mathbb{A}^1_k$, como sendo $\texttt{Spec}\ k[x]$. O ponto ξ, correspondente ao ideal nulo, cujo fecho é todo o espaço e é denominado ponto genérico. Os outros pontos, os quais correspondem aos ideais maximais em $k[x]$, são pontos fechados. Esses estão em correspondência biunívoca a polinômios mônicos irredutíveis não-constantes de $k[x]$. Em particular, se k for algebricamente fechado, os pontos fechados de $\mathbb{A}^1_k$ estão em correspondência biunívoca com elementos de k.*

Exemplo 10. *Seja k um corpo algebricamente fechado e considere o plano afim sobre k, definido como $\mathbb{A}^2_k = \texttt{Spec}\ k[x, y]$. Os pontos fechados de $\mathbb{A}^2_k$ estão em correspondência biunívoca com pares ordenados de elementos de k. Além disso, o conjunto de todos os pontos fechados de $\mathbb{A}^2_k$, com a topologia induzida, é homeomorfo à variedade $\mathbb{A}^2$.*

Em adição aos pontos fechados, há um ponto genérico ξ, correspondente ao ideal nulo de $k[x, y]$, cujo fecho é todo o espaço. Ainda, para cada polinômio irredutível $f(x, y)$, há um ponto η cujo fecho consiste de η juntamente com todos os pontos fechados (a, b) tal que $f(a, b) = 0$. Dizemos que η é um ponto genérico da curva $f(x, y) = 0$.

Exemplo 11. *Sejam X_1 e X_2 esquemas, $U_1 \subseteq X_1$ e $U_2 \subseteq X_2$ subconjuntos abertos e seja $\varphi : \left(U_1, \mathcal{O}_{X_1}\big|_{U_1}\right) \longrightarrow \left(U_2, \mathcal{O}_{X_2}\big|_{U_2}\right)$ um isomorfismo de espaços localmente anelados.*

*Podemos definir um esquema X obtido pela **colagem** de X_1 e X_2 sobre U_1 e U_2 via o isomorfismo φ.*

O espaço topológico de X é o quociente da união disjunta $X_1 \cup X_2$ pela relação de equivalência $x_1 \sim \varphi(x_1)$, para cada $x_1 \in U_1$, com a topologia quociente. Portanto, existem mapas $i_1 : X_1 \longrightarrow X$ e $i_2 : X_2 \longrightarrow X$, e um subconjunto $V \subseteq X$ é aberto se, e somente se, $i_1^{-1}(V)$ é aberto em X_1 e $i_2^{-1}(V)$ é aberto em X_2.

O feixe estrutural $\mathcal{O}_X$ é definido da seguinte forma: para qualquer conjunto aberto $V \subseteq X$,

$$\mathcal{O}_X(V) = \Big\{ \langle s_1, s_2 \rangle \ : \ s_1 \in \mathcal{O}_{X_1}\left(i_1^{-1}(V)\right),\ s_2 \in \mathcal{O}_{X_2}\left(i_2^{-1}(V)\right) \\ \text{e } \varphi\left(s_1\big|_{i_1^{-1}(V) \cap U_1}\right) = s_2\big|_{i_2^{-1}(V) \cap U_2} \Big\}.$$

$\mathcal{O}_X$ é um feixe e $(X, \mathcal{O}_X)$ é um espaço localmente anelado. Além disso, como X_1 e X_2 são esquemas, todo ponto de X possui uma vizinhança afim; logo, X é um esquema.

3.4 ESQUEMAS: PARTE 2

Seja S um anel graduado (Ver *Definição 2.2*). Denote por S_+ o ideal $\bigoplus_{d>0} S_d$.

Definição 3.24. *Definimos o conjunto $\texttt{Proj}\ S$ como sendo o conjunto de todos os ideais primos homogêneos P de S que não contêm todo o S_+.*

Se I é um ideal homogêneo de S, definimos o subconjunto

$$V(I) := \{P \in \texttt{Proj}\ S : I \subseteq P\}.$$

Lema 3.25. *1. Se I e J são ideais homogêneos em S, então $V(IJ) = V(I) \cup V(J)$.*

2. Se $\{I_\alpha\}$ é uma família qualquer de ideais homogêneos de S, então $V\left(\sum I_\alpha\right) = \bigcap V(I_\alpha)$.

Demonstração. (14, Lema 2.4, p. 76) □

Observação 14. *A partir do Lema 3.25, pode-se definir uma topologia em $\texttt{Proj}\ S$ tomando os subconjuntos fechados como sendo os subconjuntos da forma $V(I)$.*

Agora, podemos definir um feixe de anéis $\mathcal{O}$ em $\texttt{Proj}\ S$ da seguinte forma:

Sendo $S = \bigoplus_{i=0}^{\infty} S_i$ o anel graduado, considere T um subconjunto multiplicativo de S constituído por elementos homogêneos. O localizado $T^{-1}S$ possui uma graduação natural, $T^{-1}S = \bigoplus_{r\in\mathbb{Z}}(T^{-1}S)_r$, onde

$$(T^{-1}S)_r = \left\{ \frac{a_i}{f_j} : a_i \in S_i, f_j \in S_j \cap T, i - j = r \right\}.$$

Um caso importante é quando fixa-se $P \in \texttt{Proj}\ S$ e toma-se T como sendo o subconjunto multiplicativo dos elementos homogêneos de S que não estão em P, denotado por $S_P := T^{-1}S$. Note que S_P é o localizado de S com denominadores no subconjunto multiplicativo dos elementos *homogêneos* de $S - P$. Outro caso particular importante é quando fixa-se um elemento homogêneo $f \in S$ e tomamos $T = \{1, f, f^2, ...\}$. Nesse caso, denotamos $S_f := T^{-1}S$.

Se T é um subconjunto multiplicativo de S constituído por elementos homogêneos, $(T^{-1}S)_0$ denota o subanel dos elementos de grau nulo de $T^{-1}S$. Nos casos citados, dados $P \in \texttt{Proj}\ S$ e $f \in S$ homogêneo, denotamos $S_{(P)} := (S_P)_0$ e $S_{(f)} := (S_f)_0$.

Agora, para qualquer subconjunto aberto $U \subseteq \texttt{Proj}\ S$, definimos $\mathcal{O}(U)$ como sendo o conjunto das funções $s : U \longrightarrow \coprod S_{(P)}$ tais que, para cada $U \subseteq \texttt{Proj}\ S$, $s(P) \in S_{(P)}$ e tais que s seja localmente um quociente de elementos de S, isto é, para cada $P \in U$, existem uma vizinhança V de P em U e elementos homogêneos de mesmo grau a, f em S tais que, para todo $Q \in V$, $f \notin Q$ e $s(Q) = \dfrac{a}{f}$ em $S_{(Q)}$.

$\mathcal{O}$ é um pré-feixe de anéis, com as restrições naturais, e, da natureza local da definição, temos que $\mathcal{O}$ é um feixe.

Definição 3.26. *Se S é um anel graduado, definimos $(\texttt{Proj}\ S, \mathcal{O})$ como sendo o espaço topológico com o feixe de anéis construído acima.*

Proposição 3.27. *Seja S um anel graduado.*

1. *Para qualquer $P \in \texttt{Proj}\ S$, o talo $\mathcal{O}_P$ é isomorfo ao anel local $S_{(P)}$.*

   Em particular, $(\texttt{Proj}\ S, \mathcal{O})$ é um espaço localmente anelado.

2. *Para qualquer elemento $f \in S_+$ homogêneo, seja $D_+(f) := \{P \in \texttt{Proj}\ S : f \notin P\}$. Então, $D_+(f)$ é aberto em $\texttt{Proj}\ S$.*

   Além disso, esses conjuntos abertos cobrem $\texttt{Proj}\ S$ e, para cada tal aberto, temos um isomorfismo de espaços localmente anelados

   $$\left(D_+(f), \mathcal{O}\big|_{D_+(f)}\right) \cong \texttt{Spec}\ S_{(f)},$$

   onde $S_{(f)}$ é o subanel de elementos de grau zero no anel localizado S_f.

3. $\texttt{Proj}\ S$ *é um esquema.*

Demonstração. Note que *1.* diz que $\texttt{Proj}\ S$ é um espaço localmente anelado e *2.* diz que é coberto por esquemas abertos afins. Portanto, *3.* é uma consequência das duas primeiras afirmações.

1. Tome a aplicação
$$\begin{array}{rccc} \psi: & \mathcal{O}_P & \longrightarrow & S_{(P)} \\ & \langle U, s\rangle & \longmapsto & s(P) \end{array},$$
a qual é um homomorfismo de anéis. Para mostrar a sobrejetividade de ψ, fixemos $\dfrac{a}{f} \in S_{(P)}$, com $a, f \in S$ e $f \notin P$. Então, $D_+(f)$ é uma vizinhança de P. Além disso, a função
$$\begin{array}{rccc} s: & D_+(f) & \longrightarrow & \coprod\limits_{Q \in D_+(f)} S_{(Q)} \\ & Q & \longmapsto & \dfrac{a}{f} \in S_{(Q)} \end{array}$$
é um elemento de $\mathcal{O}\Big(D_+(f)\Big)$ e $\psi\left(\langle D_+(f), s\rangle\right) = \dfrac{a}{f}$. Quanto à injetividade de ψ, sejam $\langle U, s\rangle, \langle V, t\rangle \in \mathcal{O}_P$ tais que $s(P) = \psi\Big(\langle U, s\rangle\Big) = \psi\Big(\langle V, t\rangle\Big) = t(P) = \dfrac{a}{f}$, com $a, f \in S$ e $f \notin P$. Da definição do feixe $\mathcal{O}$, temos a existência de vizinhanças U', V' de P, com $U' \subseteq U$ e $V' \subseteq V$, tais que $s(Q) = \dfrac{a}{f}$, $\forall Q \in U'$, e $t(Q) = \dfrac{a}{f}$, $\forall Q \in V'$. Então, tomando $W = U' \cap V'$, temos $s\Big|_W = t\Big|_W$. Portanto, $\langle U, s\rangle = \Big\langle W, s\Big|_W\Big\rangle = \Big\langle W, t\Big|_W\Big\rangle = \langle V, t\rangle$.

2. Note que $D_+(f) = \texttt{Proj}\ S - V\left(\langle f\rangle\right)$, onde $V\left(\langle f\rangle\right) = \{Q \in \texttt{Proj}\ S : Q \supseteq \langle f\rangle\}$; logo, é aberto.

   Agora, como os elementos de $\texttt{Proj}\ S$ são os ideais primos homogêneos P de S que não contêm S_+, segue que os conjuntos abertos $D_+(f)$, para $f \in S_+$ homogêneos, cobrem $\texttt{Proj}\ S$.

   Fixe $f \in S_+$ homogêneo. A ideia é definir um isomorfismo $\left(\varphi, \varphi^\sharp\right)$ de espaços localmente anelados $D_+(f) \longrightarrow \texttt{Spec}\ S_{(f)}$.

   Existe um homomorfismo natural de anéis $S \longrightarrow S_f$ e $S_{(f)}$ é um subanel de S_f. Utilizando a ideia de extensão de ideais, para qualquer ideal homogêneo $I \subseteq S$, seja $\varphi(I) = (IS_f) \cap S_{(f)}$. Em particular, se $P \in D_+(f)$, então $\varphi(P) \in \texttt{Spec}\ S_{(f)}$ (ou seja, φ é sobrejetora). Logo, dá-se, assim, o mapa φ. As propriedades de localização mostram que φ é uma bijeção como um mapa de $D_+(f)$ para $\texttt{Spec}\ S_{(f)}$. Além disso, se I é um ideal homogêneo de S, então $P \supseteq I$ se, e somente se, $\varphi(P) \supseteq \varphi(I)$. Portanto, φ é um homeomorfismo.

Falta, então, definir um isomorfismo

$$\varphi^\sharp : \mathcal{O}_{\texttt{Spec }S_{(f)}} \longrightarrow \varphi_*\left(\mathcal{O}_{\texttt{Proj }S}\Big|_{D_+(f)}\right)$$

de feixes em $\texttt{Spec }S_{(f)}$ tal que, para cada $P \in D_+(f)$, o homomorfismo induzido nos talos

$$\varphi^\sharp_P : \left(\mathcal{O}_{\texttt{Spec }S_{(f)}}\right)_{\varphi(P)} \longrightarrow \left(\mathcal{O}_{\texttt{Proj }S}\Big|_{D_+(f)}\right)_P$$

seja um homomorfismo local.

Primeiro, observe que, se $P \in D_+(f)$, então os anéis $S_{(P)}$ e $\left(S_{(f)}\right)_{\varphi(P)}$ são naturalmente isomorfos. De fato, $S_{(P)}$ é constuído das frações $\dfrac{a}{b}$, com a, b elementos homogêneos de mesmo grau de S e $b \notin P$, e $\left(S_{(f)}\right)_{\varphi(P)}$ é constituído por frações do tipo $\dfrac{\left(\dfrac{a}{f^n}\right)}{\left(\dfrac{b}{f^m}\right)}$, com a, b elementos homogêneos de S tais que $\deg a = n \cdot \deg f$, $\deg b = m \cdot \deg f$ e $\dfrac{b}{f^m} \notin \varphi(P)$, ou seja, $b \notin P$.

Como P não contém f, note que a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \sigma_P : & \left(S_{(f)}\right)_{\varphi(P)} & \longrightarrow & S_{(P)} \\ & \dfrac{a/f^n}{b/f^m} & \longmapsto & \dfrac{af^m}{bf^n} \end{array}$$

está bem-definida e é um homomorfismo. Além disso, $\dfrac{af^m}{bf^n} = 0$ em $S_{(P)}$ significa que existe um elemento homogêneo c em S, $c \notin P$, tal que $caf^m = 0$. Portanto, se $\deg c = k$ e $\deg f = r \geq 1$, temos

$$\frac{c^r f^m}{f^{k+m}} \in S_{(f)},$$

$$\frac{c^r f^m}{f^{k+m}} \notin PS_f \cap S_{(f)} = \varphi(P)$$

e

$$\frac{c^r f^m}{f^{k+m}} \cdot \frac{a}{f^n} = 0 \text{ em } S_{(f)},$$

donde $\dfrac{a/f^n}{b/f^m} = 0$ em $\left(S_{(f)}\right)_{\varphi(P)}$. Portanto, σ_P é injetiva. Quando à sobrejetividade, dado $\dfrac{a}{b} \in S_{(P)}$, com a, b elementos homogêneos de mesmo grau t, $b \notin P$, temos

$$\sigma_P\left(\frac{ab^{r-1}/f^t}{b^r/f^t}\right) = \frac{a}{b},$$

onde $r = \deg f \geq 1$.

Agora, observe que, por φ ser um homeomorfismo, um subconjunto U de $\texttt{Spec}\ \ S_{(f)}$ é aberto se, e somente se, $\varphi^{-1}(U)$ é um aberto de $D_+(f)$. Além disso, se U é aberto de $\texttt{Spec}\ \ S_{(f)}$, então, por definição,

$$\varphi_*\left(\mathcal{O}_{\texttt{Proj}\ S}\Big|_{D_+(f)}\right)(U) := \mathcal{O}_{\texttt{Proj}\ S}\Big|_{D_+(f)}\Big(\varphi^{-1}(U)\Big).$$

Por isso, $\varphi_*\left(\mathcal{O}_{\texttt{Proj}\ S}\Big|_{D_+(f)}\right)(U)$ é constituído pelas seções

$$s : \varphi^{-1}(U) \longrightarrow \coprod_{P \in \varphi^{-1}(U)} S_{(P)},$$

as quais são, localmente, um quociente do tipo $s(P) = \dfrac{a}{b}$, com $a, b \in S$ homogêneos de mesmo grau e $b \notin P$.

Analogamente, $\mathcal{O}_{\texttt{Spec}\ S_{(f)}}(U)$ é constituído pelas seções

$$s : U \longrightarrow \coprod_{B \in \varphi^{-1}(U)} \Big(S_{(f)}\Big)_{\varphi(P)},$$

as quais são, localmente, um quociente do tipo $s\Big(\varphi(P)\Big) = \dfrac{a/f^n}{b/f^m}$, com $a, b \in S$ homogêneos, $\deg a = n \cdot \deg f$, $\deg b = m \cdot \deg f$ e $b \notin P$.

Assim, os homomorfismos σ_P induzem, para cada aberto U de $\texttt{Spec}\ \ S_{(f)}$, um homomorfismo

$$\varphi_U^\sharp : \mathcal{O}_{\texttt{Spec}\ S_{(f)}}(U) \longrightarrow \varphi_*\left(\mathcal{O}_{\texttt{Proj}\ S}\Big|_{D_+(f)}\right)(U).$$

Uma vez que σ_P é um isomorfismo para todo $P \in D_+(f)$, cada $\varphi_U^\sharp$ também é um isomorfismo. Além disso, para cada inclusão $V \subseteq U$ de abertos de $\texttt{Spec}\ \ S_{(f)}$, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{\texttt{Spec}\ S_{(f)}}(U) \arrow[r, "\varphi_U^\sharp"] \arrow[d] & \varphi_*\left(\mathcal{O}_{\texttt{Proj}\ S}\Big|_{D_+(f)}\right)(U) \arrow[d] \\
\mathcal{O}_{\texttt{Spec}\ S_{(f)}}(V) \arrow[r, "\varphi_V^\sharp"'] & \varphi_*\left(\mathcal{O}_{\texttt{Proj}\ S}\Big|_{D_+(f)}\right)(V)
\end{tikzcd}$$

é comutativo. Logo, $\varphi^\sharp$ é um isomorfismo de feixes em $\texttt{Spec}\ \ S_{(f)}$. Portanto, $\Big(\varphi, \varphi^\sharp\Big)$ é um isomorfismo de espaços localmente anelados, como desejado.

□

Exemplo 12. *Se A é um anel, definimos o espaço n-projetivo sobre A como sendo o esquema $\mathbb{P}^n_A = \texttt{Proj}\ A[x_0, ..., x_n]$. Em particular, se A é um corpo algebricamente fechado, então $\mathbb{P}^n_k$ é um esquema cujo subespaço de pontos fechados é homeomorfo ao já apresentado na Definição 2.1.*

3.5 ESQUEMAS: PARTE 3

Definição 3.28. *Um esquema $(X, \mathcal{O}_X)$ é **reduzido** se, para todo conjunto aberto $U \subseteq X$, o anel $\mathcal{O}_X(U)$ não possui elementos nilpotentes. Equivalentemente, X é reduzido se, e somente se, os anéis locais $\mathcal{O}_p$, para todo $p \in X$, não possuem elementos nilpotentes.*

Seja $(X, \mathcal{O}_X)$ um esquema. Seja $(\mathcal{O}_X)_{red}$ o feixe associado ao pré-feixe $U \longmapsto \mathcal{O}_X(U)_{red}$, onde, para qualquer anel A, denota-se por A_{red} o quociente de A pelo seu ideal de elementos nilpotentes. Denominamos $\Big(X, (\mathcal{O}_X)_{red}\Big)$ o esquema reduzido associado a X, denotado por X_{red}.

Definição 3.29. *Um esquema é **irredutível** se seu espaço topológico é irredutível.*

*Um esquema X é **integral** se, para todo conjunto aberto $U \subseteq X$, o anel $\mathcal{O}_X(U)$ é um domínio de integridade.*

Observação 15. *Se $X = \texttt{Spec}\ A$ é um esquema afim, então X é integral se, e somente se, A é um domínio de integridade.*

Além disso, um esquema é integral se, e somente se, é reduzido e irredutível. Para mais detalhes, ver (14, Proposição 3.1, p. 82).

Definição 3.30. *Um esquema X é **Noetheriano** se possui uma cobertura finita por conjuntos afins $X = \bigcup U_i$, com $U_i = \texttt{Spec}\ A_i$, de forma que A_i são anéis Noetherianos.*

*Um esquema X sobre um anel B é **de tipo finito** sobre B se X possui uma cobertura finita de forma que A_i são álgebras de tipo finito sobre B.*

Definição 3.31. *Um morfismo $f : X \longrightarrow Y$ de esquemas é **localmente de tipo finito** se existe uma cobertura de Y por subconjuntos abertos afins $V_i = \texttt{Spec}\ B_i$ tais que, para cada i, $f^{-1}(V_i)$ pode ser coberto por subconjuntos abertos afins $U_{ij} = \texttt{Spec}\ A_{ij}$, onde cada A_{ij} é uma B_i-álgebra finitamente gerada.*

*O morfismo f é **de tipo finito** se, além disso, cada $f^{-1}(V_i)$ pode ser coberto por um número finito de abertos U_{ij}.*

Definição 3.32. *Um morfismo $f : X \longrightarrow Y$ é um morfismo **finito** se existe uma cobertura de Y por subconjuntos abertos afins $V_i = \texttt{Spec}\ B_i$ tais que, para cada i, $f^{-1}(V_i)$ é afim, igual a $\texttt{Spec}\ A_i$, onde A_i é uma B_i-álgebra a qual é um B_i-módulo finitamente gerado.*

Definição 3.33. *Seja X um esquema de tipo finito sobre um corpo k (não necessariamente algebricamente fechado). Dizemos que X é **geometricamente integral** se $X \otimes_k \overline{k}$ é integral, onde $\overline{k}$ denota o fecho algébrico de k e $X \otimes_k \overline{k}$, por abuso de notação, denota $X \otimes_{\texttt{Spec}\ k} \texttt{Spec}\ \overline{k}$.*

Definição 3.34. *Um **subesquema aberto** de um esquema X é um esquema U cujo espaço topológico é um subconjunto aberto de X e cujo feixe estrutural $\mathcal{O}_U$ é isomorfo à restrição $\mathcal{O}_X\big|_U$ do feixe estrutural de X.*

*Uma **imersão aberta** é um morfismo $f : X \longrightarrow Y$ que induz um isomorfismo entre X e um subesquema aberto de Y.*

Definição 3.35. *Uma **imersão fechada** é um morfismo $f : Y \longrightarrow X$ de esquemas tal que f induz um homeomorfismo sobrejetor do espaço Y em um subconjunto fechado do espaço X e, além disso, o mapa induzido $f^\sharp : \mathcal{O}_X \longrightarrow f_*\mathcal{O}_Y$ de feixes em X é sobrejetor.*

*Um **subesquema fechado** de um esquema X é uma classe de equivalência das imersões fechadas, onde dizemos que $f : Y \longrightarrow X$ e $f' : Y' \longrightarrow X$ são equivalentes se existe um isomorfismo $i : Y' \longrightarrow Y$ tal que $f' = f \circ i$.*

Definição 3.36. *Seja $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo de esquemas.*

*O **morfismo diagonal** é o único morfismo $\Delta : X \longrightarrow X \times_Y X$ cuja composição com ambos os mapas projeções $p_1, p_2 : X \otimes_Y X \longrightarrow X$ é o mapa identidade $X \longrightarrow X$.*

*Dizemos que o morfismo f é **separado** se o morfismo diagonal Δ é uma imersão fechada. Nesse caso, também dizemos que X é **separado sobre** Y.*

*Um esquema X é **separado** se é separado sobre $\texttt{Spec}\ \mathbb{Z}$.*

Exemplo 13. *Se $\lambda : A \longrightarrow B$ é um homomorfismo sobrejetor de anéis, então o mapa associado $\overline{\lambda} : \texttt{Spec}\ B \longrightarrow \texttt{Spec}\ A$ define um homeomorfismo de $\texttt{Spec}\ B$ e um subconjunto fechado $V(I) \subset \texttt{Spec}\ A$, onde $I = \ker \lambda$. Nesse caso, dizemos que $\texttt{Spec}\ B$ é um subesquema fechado de $\texttt{Spec}\ A$ e $\overline{\lambda}$ é uma imersão fechada.*

Exemplo 14. *Sejam A um anel e I um ideal de A. O homomorfismo de anéis $A \longrightarrow A/I$ induz um morfismo de esquemas $f : \texttt{Spec}\ A/I \longrightarrow \texttt{Spec}\ A$, o qual é uma imersão fechada.*

O mapa f é um homeomorfismo de Y sobre o subconjunto fehcado $V(I)$ de X e o mapa de feixes estruturais $\mathcal{O}_{\texttt{Spec}\ A} \longrightarrow f_*\mathcal{O}_{\texttt{Spec}\ A/I}$ é sobrejetor, pois é sobrejetor nos talos, os quais são localizações de A e A/I, respectivamente.

Portanto, para qualquer anel $I \subseteq A$, obtemos uma estrutura de subesquema fechado no conjunto fechado $V(I) \subseteq \texttt{Spec}\ A$. Em particular, todo subconjunto fechado Y de $\texttt{Spec}\ A$ possui muitas estruturas de subesquemas fechados correspondentes a todos os ideais I tais que $V(I) = Y$. De fato, toda estrutura de subesquema fechado em um subconjunto fechado Y de um esquema afim X surge a partir de um ideal dessa forma.

Definição 3.37. *A **dimensão** de um esquema X, denotada por* $\texttt{dim}\ X$*, é sua dimensão como espaço topológico, como definida em (14, p. 5).*

*Se Z é um subconjunto fechado irredutível de X, então a **codimensão** de Z em X, denotada por* $\texttt{codim}(Z, X)$ *é o supremo dos inteiros n tais que existe uma cadeia $Z = Z_0 \subset Z_1 \subset \cdots \subset Z_n$ de distintos subconjuntos irredutíveis fechados de X, começando com Z.*

Se Y é qualquer subconjunto fechado de X, definimos $\texttt{codim}(Y, X) := \inf_{Z \subseteq Y} \texttt{codim}(Z, X)$*, onde o ínfimo é tomado sobre todos os subconjuntos irredutíveis fechados de Y.*

Exemplo 15. *Se $X = \texttt{Spec}\ A$ é um esquema afim, então a dimensão de X é a mesma da dimensão de Krull de A (Ver [6], p. 90).*

Observação 16 (Relação entre Variedades Projetivas e Esquemas)**.** *Considerando um corpo algebricamente fechado k, relaciona-se o conjunto de variedades projetivas ao conjunto de esquemas integrais. Em particular, qualquer variedade pode ser considerada um esquema integral, separado de tipo finito sobre k. Para mais detalhes, veja (14, p. 104-105).*

Definição 3.38. *Uma **variedade** sobre um corpo algebricamente fechado k é um esquema integral separado de tipo finito sobre k.*

*Um **morfismo** de variedades é um morfismo de esquemas sobre k.*

*Uma variedade X que é um esquema afim é denominada uma **variedade afim**.*

3.6 FEIXE DE MÓDULOS: PARTE 1

Definição 3.39. *Seja $(X, \mathcal{O}_X)$ um espaço anelado.*

*Um **feixe de $\mathcal{O}_X$-módulos** (ou um **$\mathcal{O}_X$-módulo**) é um feixe $\mathcal{F}$ em X tal que, para cada conjunto aberto $U \subseteq X$, o grupo $\mathcal{F}(U)$ é um $\mathcal{O}_X(U)$-módulo e, para cada inclusão de abertos $V \subseteq U$, o homomorfismo de restrição $\mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$ é compatível com as estruturas de módulo via o homomorfismo de anéis $\mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X(V)$.*

*Um **morfismo** $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ de feixes de $\mathcal{O}_X$-módulos é um morfismo de feixes tal que, para cada conjunto aberto $U \subseteq X$, o mapa $\mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ é um homomorfismo de $\mathcal{O}_X(U)$-módulos.*

*O **produto tensorial** $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ de dois $\mathcal{O}_X$-módulos é o feixe associado ao pré-feixe $U \longmapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$.*

*Um $\mathcal{O}_X$-módulo é **livre** se é isomorfo a uma soma direta de cópias de $\mathcal{O}_X$. É **localmente livre** se X pode ser coberto por conjuntos abertos U de forma que cada $\mathcal{F}\big|_U$ seja um $\mathcal{O}_X\big|_U$-módulo livre. Nesse caso, o **posto** de $\mathcal{F}$ em tal conjunto aberto é o número de cópias necessárias do feixe estrutural (finito ou infinito).*

*Um feixe localmente livre de posto 1 é denominado um **feixe invertível**.*

*Um **feixe de ideais** em X é um feixe de módulos $\mathcal{I}$ o qual é um subfeixe de $\mathcal{O}_X$. Em outras palavras, para todo aberto U, $\mathcal{I}(U)$ é um ideal em $\mathcal{O}_X(U)$.*

Exemplo 16. *Na definição de feixe de ideais (Definição 3.39), a atribuição de $\mathcal{I}(U)$ como um ideal de $\mathcal{O}(U)$, para todo aberto U de X, é feita da seguinte forma: a restrição ρ_{UV} fornece a relação $\mathcal{I}(U) \longmapsto \mathcal{I}(V)$ e é tal que uma função regular f em uma união $U := \bigcup U_\lambda$ de subconjuntos abertos U_λ está em $\mathcal{I}(U)$ se, e somente se, sua restrição a U_λ está em $\mathcal{I}(U_\lambda)$, para todo λ.*

Por exemplo, se Y é um subconjunto fechado de X, então $\mathcal{I}_Y$ é o feixe de ideais tal que, para todo subconjunto aberto U de X,

$$\mathcal{I}_Y(U) := \Big\{ f \in \mathcal{O}(U) : f(p) = 0, \forall p \in Y \cap U \Big\}.$$

Definição 3.40. *Seja $f : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ um morfismo de espaços anelados. Se $\mathcal{F}$ é um $\mathcal{O}_X$-módulo, então $f_*\mathcal{F}$ é um $f_*\mathcal{O}_X$-módulo. Como temos o morfismo $f^\sharp : \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_*\mathcal{O}_X$ de feixes de anéis em Y, isso dá a $f_*\mathcal{F}$ uma estrutura natural de $\mathcal{O}_Y$-módulo. Denominamos a esse $\mathcal{O}_Y$-módulo a **imagem direta** de $\mathcal{F}$ pelo morfismo f.*

Seja $\mathcal{G}$ um feixe de $\mathcal{O}_Y$-módulos. Então, $f^{-1}\mathcal{G}$ é um $f^{-1}\mathcal{O}_Y$-módulo. Tem-se um morfismo $f^{-1}\mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_X$ de feixes de anéis em X. Definimos $f^*\mathcal{G}$ como sendo o produto tensorial

$$f^{-1}\mathcal{G} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X.$$

*Portanto, $f^*\mathcal{G}$ é um $\mathcal{O}_X$-módulo, denominado **imagem inversa** de $\mathcal{G}$ pelo morfismo f.*

Observação 17. *É importante que não haja confusão entre $f^{-1}\mathcal{G}$ (Definição 3.19) com o feixe $f^*\mathcal{G}$ definido para um morfismo de espaços anelados (Definição 3.40).*

Definição 3.41. *Sejam A anel e M um A-módulo. Definimos o **feixe associado** a M em **Spec** A, denotado por $\tilde{M}$, da seguinte forma:*

*Para cada ideal primo $P \subseteq A$, seja M_P a localização de M em P. Para qualquer conjunto aberto $U \subseteq$ **Spec** A, definimos o grupo $\tilde{M}(U)$ como sendo o conjunto de funções $s : U \longrightarrow \coprod_{P \in U} M_P$ tais que, para cada $P \in U$, $s(P) \in M_P$ e tais que s é, localmente, uma fração $\dfrac{m}{f}$, com $m \in M$ e $f \in A$.*

Para ser preciso, precisa-se que, para cada $P \in U$, exista uma vizinhança V de P em U e existam elementos $m \in M$ e $f \in A$ tais que, para cada $Q \in V$, $f \notin Q$ e $s(Q) = \dfrac{m}{f}$ em M_Q.

$\tilde{M}$ é um feixe a partir do uso de mapas de restrição.

Definição 3.42. *Seja $(X, \mathcal{O}_X)$ um esquema. Um feixe de $\mathcal{O}_X$-módulos $\mathcal{F}$ é **quasi-coerente** se X pode ser coberto por subconjuntos abertos afins $U_i =$ **Spec** A_i tais que,* *para cada i, existe um A_i-módulo M_i com* $\mathcal{F}\Big|_{U_i} \cong \tilde{M}_i$. *Ou seja, um feixe quasi-coerente em um esquema X é um $\mathcal{O}_X$-módulo que, localmente, é da forma $\tilde{M}$.*

$\mathcal{F}$ é ***coerente*** *se, além disso, cada M_i pode ser tomado como um A_i-módulo finitamente gerado.*

Exemplo 17. *Em qualquer esquema X, o feixe estrutural $\mathcal{O}_X$ é quasi-coerente (e, de fato, coerente). Isto é, para cada subconjunto aberto U e toda função $f \in \mathcal{O}_X(U)$, o conjunto $U_f := \{p \in U : f(p) \neq 0\}$ é aberto em U e o homomorfismo de restrição $\mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U_f)$ induz um isomorfismo*

$$\xi_{U,f} : \mathcal{O}_X(U)_f \longrightarrow \mathcal{O}_X(U_f),$$

onde $\dfrac{h}{f^n} \longmapsto \dfrac{h\big|_{U_f}}{f^n\big|_{U_f}}$. *De fato, $\xi_{U,f}$ é injetivo: Se* $\xi_{U,f}\left(\dfrac{h}{f^n}\right) = 0$, *então* $h\Big|_{U_f} = 0$ *e, logo, $fh = 0$ em $\mathcal{O}(U)$. Também é injetivo: Cubra U por subconjuntos abertos afins U^i e tome* $f_i := f\Big|_{U^i}$. *Dada $g \in \mathcal{O}(U_f)$, há $n \in \mathbb{Z}$ e $h_i \in \mathcal{O}(U^i)$ tal que*

$$\xi_{U^i,f_i}\left(\frac{h_i}{f_i^n}\right) = g\Big|_{U^i_{f_i}}$$

para todo i. Agora, tome $h_{i,j} := h_i\Big|_{U^i \cap U^j}$, $\forall i, j$. *Como*

$$\frac{h_{i,j}\Big|_{U^i\cap U^j\cap U_f}}{f^n\Big|_{U^i\cap U^j\cap U_f}} = g\Big|_{U^i\cap U^j\cap U_f} = \frac{h_{j,i}\Big|_{U^i\cap U^j\cap U_f}}{f^n\Big|_{U^i\cap U^j\cap U_f}},$$

segue que

$$(fh_i)\Big|_{U^i\cap U^j} = (fh_j)\Big|_{U^i\cap U^j}$$

e, portanto, existe uma função regular $h \in \mathcal{O}(U)$ tal que $h\Big|_{U^i} = f\Big|_{U^i} h_i$, *para todo i. Dessa forma,* $\xi_{U,f}\left(\dfrac{h}{f^{n+1}}\right)\Big|_{U^i_{f^i}} = g\Big|_{U^i_{f^i}}$, *para todo i, e, logo,* $\xi_{U,f}\left(\dfrac{h}{f^{n+1}}\right) = g$, *para todo i.*

Exemplo 18. *Se $X = \texttt{Spec}\ A$ é um esquema afim, $Y \subseteq X$ é o subesquema fechado definido por um ideal $I \subseteq A$ e $i : Y \longrightarrow X$ é um morfismo inclusão, então $i_*\mathcal{O}_Y$ é um $\mathcal{O}_X$-módulo quasi-coerente (e, de fato, coerente). Note que é isomorfo a $(\widetilde{A/I})$.*

Exemplo 19. *Retomando o Exemplo 16, seja $U \subseteq X$ um subconjunto aberto e seja f uma função regular em U. Afirmo que*

$$\xi_{U,f} : \mathcal{O}(U)_f \longrightarrow \mathcal{O}(U_f),$$

onde $U_f := \{p \in U : f(p) \neq 0\}$, fornece a relação sobrejetora $\mathcal{I}_Y(U)_f \longmapsto \mathcal{I}_Y(U_f)$. De fato, se $h \in \mathcal{I}_Y(U_f)$, então $h = \xi_{U,f}\left(\dfrac{g}{f^n}\right)$, *para algum $g \in \mathcal{O}(U)$ e algum inteiro $n \geq 0$. Como h se anula em $Y \cap U_f$, então g também o faz. Além disso, gf se anula em $Y \cap U$, portanto sendo um elemento de $\mathcal{I}_Y(U)$. Note que* $h = \xi_{U,f}\left(\dfrac{gf}{f^{n+1}}\right)$, *provando nossa afirmação. Portanto, $\mathcal{I}_Y$ é quasi-coerente.*

Lema 3.43. *Sejam $X = \mathtt{Spec}\ A$ um esquema afim, $f \in A$, $D(f) \subseteq X$ o conjunto aberto correspondente e $\mathcal{F}$ um feixe quasi-coerente em X.*

1. *Se $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ é uma seção global de $\mathcal{F}$ cuja restrição a $D(f)$ é 0, então, para algum $n > 0$, $f^n s = 0$.*
2. *Dada uma seção $t \in \mathcal{F}\Big(D(f)\Big)$ de $\mathcal{F}$ sobre o aberto $D(f)$, então, para algum $n > 0$, $f^n t$ estende-se a uma seção global de $\mathcal{F}$ sobre X.*

Demonstração. (14, Lema 5.3, p. 112) □

Proposição 3.44. *Seja X um esquema.*

Então, um $\mathcal{O}_X$-módulo $\mathcal{F}$ é quasi-coerente se, e somente se, para todo subconjunto afim aberto $U = \mathtt{Spec}\ A$ de X, existe um A-módulo M tal que $\mathcal{F}\Big|_U \cong \tilde{M}$.

Se X é Noetheriano, então $\mathcal{F}$ é coerente se, e somente se, o mesmo é válido com a condição extra que M seja um A-módulo finitamente gerado.

Demonstração. (14, Proposição 5.4, p. 113) □

Proposição 3.45. *Seja X um esquema afim e seja $0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$ uma sequência exata de $\mathcal{O}_X$-módulos. Assuma que $\mathcal{F}'$ seja quasi-coerente. Então, a sequência*

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}') \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}'') \longrightarrow 0$$

é exata.

Demonstração. (14, Proposição 5.6, p. 113-114) □

Proposição 3.46. *Se $X = \mathtt{Spec}\ A$ é um esquema afim, existe uma correspondência biunívoca entre ideais I em A e subesquemas fechados Y de X, dada por $I \longmapsto$ IMAGEM DE $\mathtt{Spec}\ A/I$ em X. Em particular, todo subesquema fechado de um esquema afim é afim.*

Demonstração. (14, Corolário 5.5, p. 113) (14, Corolário 5.10, p. 116) □

3.7 FEIXE DE MÓDULOS: PARTE 2

Definição 3.47. *Sejam S um anel graduado e M um S-módulo graduado. Definimos o* ***feixe associado*** *a M em $\mathtt{Proj}\ S$, denotado por $\tilde{M}$, da seguinte forma:*

Para cada $P \in \mathtt{Proj}\ S$, seja $M_{(P)}$ o grupo de elementos de grau zero na localização $T^{-1}M$, onde T é o sistema multiplicativo de elementos homogêneos de S que não estão em P. Para qualquer subconjunto aberto $U \subseteq \mathtt{Proj}\ S$, definimos $\tilde{M}(U)$ como sendo o conjunto das funções $s : U \longrightarrow \coprod_{P \in U} M_{(P)}$ que, localmente, são frações. Em outras palavras, *para todo $P \in U$, existe uma vizinhança V de P em U e existem elementos $m \in M$ e $f \in S$ de mesmo grau tais que, para todo $Q \in V$, temos $f \notin Q$ e $s(Q) = \dfrac{m}{f}$ em $M_{(Q)}$. $\tilde{M}$ é feixe com os mapas naturais de restrição.*

Proposição 3.48. *Sejam S um anel graduado e M um S-módulo graduado. Seja $X = \texttt{Proj}\ S$.*

1. *Para qualquer $P \in X$, o talo $(\tilde{M})_P = M_{(P)}$.*

2. *Para qualquer elemento homogêneo $f \in S_+$, temos $\tilde{M}\Big|_{D_+(f)} \cong (M_{(f)})^{\sim}$ via o isomorfismo de $D_+(f)$ com $\texttt{Spec}\ S_{(f)}$, onde $M_{(f)}$ denota o grupo de elementos de grau 0 no módulo localizado M_f.*

3. *$\tilde{M}$ é um $\mathcal{O}_X$-módulo quasi-coerente.*

   Se S for Noetheriano e M for finitamente gerado, então $\tilde{M}$ é coerente.

Demonstração. Prova análoga à dada na *Proposição 3.27*, bastando substituir M por S. □

Definição 3.49. *Sejam S um anel graduado e $X = \texttt{Proj}\ S$. Para qualquer $n \in \mathbb{Z}$, definimos o feixe $\mathcal{O}_X(n)$ como sendo $\widetilde{S(n)}$.*

*Denominamos $\mathcal{O}_X(1)$ o **feixe torcido de Serre**.*

*Para qualquer feixe de $\mathcal{O}_X$-módulos $\mathcal{F}$, denotamos por $\mathcal{F}(n)$ o **feixe torcido** $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n)$.*

Proposição 3.50. *Seja S um anel graduado e seja $X = \texttt{Proj}\ S$. Assuma que S seja gerado por S_1 como uma S_0-álgebra.*

1. *O feixe $\mathcal{O}_X(n)$ é um feixe invertível em X.*

2. *Para qualquer S-módulo graduado M, $\tilde{M}(n) \cong \widetilde{M(n)}$.*

   Em particular, $\mathcal{O}_X(n) \otimes \mathcal{O}_X(m) \cong \mathcal{O}_X(n+m)$.

3. *Seja T um outro anel graduado, gerado por T_1 como um T_0-álgebra, e seja $\varphi : S \longrightarrow T$ um homomorfismo que preserva graus. Sejam, ainda, $U \subseteq Y = \texttt{Proj}\ T$ e $f : U \longrightarrow X$ o morfismo determinado por φ. Então: $f^*\Big(\mathcal{O}_X(n)\Big) \cong \mathcal{O}_Y(n)\Big|_U$ e $f_*\left(\mathcal{O}_Y(n)\Big|_U\right) \cong (f_*\mathcal{O}_U)(n)$.*

Demonstração. 1. Primeiramente, lembremos que *invertível* significa *localmente livre de posto* 1. Seja $f \in S_1$ e considere a restrição $\mathcal{O}_X(n)\Big|_{D_+(f)}$. Pelo resultado expresso na *Proposição 3.48*, tal restrição é isomorfa a $\widetilde{S(n)}_{(f)}$ em $\texttt{Spec}\ S_{(f)}$. Afirmo que essa restrição é livre de posto 1. De fato, $S(n)_{(f)}$ é um $S_{(f)}$-módulo livre de posto 1. $S_{(f)}$ é o grupo dos elementos de grau 0 em S_f e $S(n)_{(f)}$ é o grupo de elementos de grau n

em S_f. Obtemos um isomorfismo entre esses grupos colocando $s \longmapsto f^n s$. Isso faz sentido para qualquer $n \in \mathbb{Z}$, pois f é invertível em S_f. Agora, como S é gerado por S_1 como uma S_0-álgebra, X é coberto por conjuntos abertos $D_+(f)$, para $f \in S_1$. Portanto, $\mathcal{O}(n)$ é invertível.

2. Esta afirmação segue do fato de $(M \tilde{\otimes}_S N) \cong \tilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \tilde{N}$, para quaisquer dois S-módulos graduados M, N, quando S é gerado por S_1. De fato, para qualquer $f \in S_1$, temos $(M \otimes_S N)_{(f)} = M_{(f)} \otimes_{S(f)} N_{(f)}$.

3. De forma geral, para qualquer S-módulo graduado M, temos $f^*(\tilde{M}) \cong (M \tilde{\otimes}_S T)\Big|_U$; e para qualquer T-módulo graduado N, $f_*\left(\tilde{N}\Big|_U\right) \cong (\tilde{_S N})$, onde $_S N$ significa N considerado como um S-módulo. Além disso, o feixe $\tilde{T}$ em X é apenas $f_*(\mathcal{O}_U)$.

$\square$

A operação de torcer nos permite definir um S-módulo graduado associado a qualquer feixe de módulos em $X = \texttt{Proj}\ S$.

Definição 3.51. *Sejam S um anel graduado, $X = \texttt{Proj}\ S$ e $\mathcal{F}$ um feixe de $\mathcal{O}_X$-módulos. Definimos o S-**módulo graduado associado** a $\mathcal{F}$ como um grupo, sendo $\Gamma_*(\mathcal{F}) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \Gamma\Big(X, \mathcal{F}(n)\Big)$.*

Dá-se uma estrutura de S-módulo graduado da seguinte forma: Se $s \in S_d$, então s determina, de forma natural, uma seção global $s \in \Gamma\Big(X, \mathcal{O}_X(d)\Big)$. Então, para qualquer $t \in \Gamma\Big(X, \mathcal{F}(n)\Big)$, define-se o produto $s \cdot t$ em $\Gamma\Big(X, \mathcal{F}(n+d)\Big)$ tomando o produto tensorial $s \otimes t$ e usando o mapa natural $\mathcal{F}(n) \otimes \mathcal{O}_X(d) \cong \mathcal{F}(n+d)$.

Proposição 3.52. *Sejam A um anel, $S = A[x_0, ..., x_r]$, com $r \geq 1$ e $X = \texttt{Proj}\ S$. (Isso é apenas o espaço r-projetivo sobre A). Então, $\Gamma_*(\mathcal{O}_X) \cong S$.*

Demonstração. (14, Proposição 5.13, p. 118) $\square$

Lema 3.53. *Sejam X um esquema, $\mathcal{L}$ um feixe invertível em X, $f \in \Gamma(X, \mathcal{L})$, X_f o conjunto aberto dos pontos $x \in X$ onde $f_x \notin \mathfrak{m}_x \mathcal{L}_x$ e seja $\mathcal{F}$ um feixe quasi-coerente em X.*

1. *Suponha que X seja quasi-compacto e seja $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ uma seção global de $\mathcal{F}$ cuja restrição a X_f é 0. Então, para algum $n > 0$, temos $f^n s = 0$, onde $f^n s$ é considerada uma seção global de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}$.*

2. *Suponha, além disso, que X possua uma cobertura finita por subconjuntos abertos afins U_i, tal que $\mathcal{L}\Big|_{U_i}$ seja livre, para cada i, e tal que $U_i \cap U_j$ seja quasi-compacto, para cada i, j. Dada uma seção $t \in \Gamma(X_f, \mathcal{F})$, então, para algum $n > 0$, a seção $f^n t \in \Gamma\Big(X_f, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}\Big)$ estende-se a uma seção global de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}$.*

Demonstração. (14, Lema 5.14, p. 118-119) $\square$

Definição 3.54. *Sejam X um esquema e $\mathcal{F}$ um feixe de $\mathcal{O}_X$-módulos. Dizemos que $\mathcal{F}$ é* ***gerado por seções globais*** *se existe uma família de seções globais $\{s_i\}_{i\in I}$, $s_i \in \Gamma(X, \mathcal{F})$, tal que, para cada $x \in X$, as imagens de s_i no talo $\mathcal{F}_x$ geram o talo como um $\mathcal{O}_x$-módulo.*

Exemplo 20. *Seja $X = \texttt{Proj}\ S$, onde S é um anel graduado gerado por S_1 como uma S_0-álgebra. Então, os elementos de S_1 fornecem seções globais de $\mathcal{O}_X(1)$ que o geram.*

Teorema 3.55. *Sejam k um corpo, A uma k-álgebra finitamente gerada, X um esquema projetivo sobre A e $\mathcal{F}$ um $\mathcal{O}_X$-módulo coerente. Então $\Gamma(X, \mathcal{F})$ é um A-módulo finitamente gerado.*

Em particular, se $A = k$, $\Gamma(X, \mathcal{F})$ é um k-espaço vetorial de dimensão finita.

Demonstração. (14, Teorema 5.19, p. 122-123) □

3.8 DIFERENCIAIS

Nesta seção, definimos o feixe de formas diferenciais relativas de um esquema sobre outro através de um método puramente algébrico, iniciando com alguns conceitos e resultados sobre o módulo de diferenciais de um anel sobre outro. Utilizaremos o feixe de diferenciais em uma variedade não-singular para definir seu feixe tangente e seu feixe canônico.

Sejam A um anel (comutativo com unidade), B uma A-álgebra e M um B-módulo.

Definição 3.56. *Uma A-**derivação** de B em M é um mapa $d : B \longrightarrow M$ tal que*

1. *d é aditivo;*
2. *$d(bb') = bdb' + b'db$; e*
3. *$da = 0$, para todo $a \in A$.*

Definição 3.57. *Definimos o* ***módulo de formas diferenciais relativas*** *de B sobre A como sendo um B-módulo $\Omega_{B/A}$, juntamente com uma A-derivação $d : B \longrightarrow \Omega_{B/A}$, a qual satisfaz a seguinte propriedade universal: para qualquer B-módulo M e qualquer A-derivação $d' : B \longrightarrow M$, existe um único homomorfismo de B-módulos $f : \Omega_{B/A} \longrightarrow M$ tal que $d' = f \circ d$, isto é, o seguinte diagrama*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "d"] \arrow[d, "d'"'] & \Omega_{B/A} \arrow[dl, "f"] \\ M & \end{tikzcd}$$

é comutativo.

Proposição 3.58. *Seja B uma A-álgebra. Sejam $f : B \otimes_A B \longrightarrow B$ o homomorfismo diagonal definido por $f(b \otimes b') = bb'$ e $I = \ker f$. Considere $B \otimes_A B$ como um B-módulo pela multiplicação à esquerda. Então I/I^2 herda uma estrutura de B-módulo.*

Defina um mapa $d : B \longrightarrow I/I^2$ por $db = 1 \otimes b - b \otimes 1$ (módulo I^2). Então $\langle I/I^2, d\rangle$ é um módulo de diferenciais relativo para B/A.

Ideia da Demonstração. Temos que f é um homomorfismo de A-álgebras e que a sequência

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow B \otimes_A B \xrightarrow{f} B \longrightarrow 0$$

é exata. Sejam $C = B \otimes_A B/I^2$ e $\overline{f} : C \longrightarrow B$. Então, $\ker \overline{f} = I/I^2$ é um B-módulo. Consequentemente, a sequência

$$0 \longrightarrow I/I^2 \longrightarrow C \xrightarrow{\overline{f}} B \longrightarrow 0$$

também é exata.

Seja $d : B \longrightarrow I/I^2$, $db := 1 \otimes b - b \otimes 1(\mod I^2)$, uma A-derivação. O par $\langle I/I^2, d\rangle$ é um módulo de diferenciais relativo.

Sejam M um B-módulo, $d' : B \longrightarrow M$ uma A-derivação e $\varphi : B \otimes_A B \longrightarrow B \times M$, $\varphi(x \otimes y) := (xy, xd'y)$, um homomorfismo de A-álgebras. Se

$$\begin{aligned} f\left(\sum x_i \otimes y_i\right) &= \sum \Big(f(x_i \otimes y_i)\Big) \\ &= \sum x_i y_i \\ &= 0, \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} \varphi\left(\sum x_i \otimes y_i\right) &= \sum \varphi(x_i \otimes y_i) \\ &= \sum (x_i y_i, x_i d' y_i) \\ &= \Big(\sum x_i y_i, \sum x_i d' y_i\Big) \\ &= \Big(0, \sum x_i d' y_i\Big). \end{aligned}$$

Logo, considerando $\varphi : \varphi\Big|_I \circ p_M$, onde p_M é a projeção sobre M, podemos considerar $\varphi(I) \subset M$.

Definindo $g : I/I^2 \longrightarrow M$ de forma que

$$g(db) = g\Big(1 \otimes b - b \otimes 1 \mod I^2\Big) = \varphi(1 \otimes b) - \varphi(b \otimes 1) = d'b - bd'1 = d'b,$$

temos que $d' = g \circ d$. Portanto, temos o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "d"] \arrow[d, "d'"'] & I/I^2 \arrow[dl, "g"] \\ M & \end{tikzcd} .$$

Além disso, I/I^2 possui uma estrutura de B-módulo induzida pela multiplicação por $b \otimes 1$, considerando $B \otimes_A B$ também como um B-módulo via homomorfismo f. Assim, se $\xi = \sum x_i \otimes y_i \mod I^2 \in I/I^2$, então $b\xi = \sum bx_i \otimes y_i \mod I^2$ e $g(b\xi) = \sum bx_i y_i = bg(\xi)$, ou seja, g é B-linear. Ainda, temos que

$$x_i \otimes y_i = (x_i \otimes 1)(1 \otimes y_i - y_i \otimes 1) + \underbrace{x_i y_i \otimes 1}_{\in I^2}.$$

Portanto, se $w = \sum x_i \otimes y_i \in I$, então $w \mod I^2 = \sum x_i dy_i$. Conclusão: I/I^2 é gerado, como um B-módulo, por $\{db : b \in B\}$. $\square$

Exemplo 21. *Se $B = A[x_1, ..., x_n]$ é um anel de polinômios sobre A, então $\Omega_{B|A}$ é o B-módulo livre de posto n gerado por $dx_1, ..., dx_n$. (15, p. 186)*

Proposição 3.59 (Primeira Sequência Exata)**.** *Sejam $A \longrightarrow B \longrightarrow C$ anéis e homomorfismos. Então existe uma sequência exata natural de C-módulos*

$$\Omega_{B|A} \otimes_B C \longrightarrow \Omega_{C|A} \longrightarrow \Omega_{C|B} \longrightarrow 0.$$

Demonstração. (15, Teorema 57, p. 186-187) $\square$

Proposição 3.60 (Segunda Sequência Exata)**.** *Sejam B uma A-álgebra e I um ideal de B. Então existe uma sequência exata natural de B/I-módulos*

$$I/I^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{B|A} \otimes_B B/I \longrightarrow \Omega_{B/I|A} \longrightarrow 0,$$

onde, para qualquer $b \in I$, se $\overline{b}$ é sua iamgem em I/I^2, então $\delta\overline{b} = db \otimes 1$.

Note que, em particular, I/I^2 possui uma estrutura natural de B/I-módulo e que δ é um mapa B/I-linear, mesmo sendo definido via a derivação d.

Demonstração. (15, Teorema 58, p. 187-189) $\square$

Corolário 3.61. *Se B é um A-álgebra finitamente gerada ou se B é uma localização de um A-álgebra finitamente gerada, então $\Omega_{B|A}$ é um B-módulo finitamente gerado.*

Demonstração. (14, Corolário 8.5, p. 173) $\square$

3.9 FEIXES DE DIFERENCIAIS

Nesta seção, a ideia é incorporar a definição de módulo de diferenciais ao estudo sobre esquemas.

Seja $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo de esquemas. Considere o morfismo diagonal $\Delta : X \longrightarrow X \times_Y X$. Δ fornece um isomorfismo de X sobre sua imagem $\Delta(X)$, a qual é um subesquema *localmente fechado* de $X \times_Y X$, isto é, um subesquema fechado de um subconjunto aberto W de $X \times_Y X$.

Definição 3.62. *Seja $\mathcal{I}$ o feixe de ideais de $\Delta(X)$ em W. Definimos o* ***feixe de diferenciais relativos*** *de X sobre Y como sendo o feixe $\Omega_{X/Y} = \Delta^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)$ em X.*

Observação 18. *Note que $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ possui uma estrutura natural de $\mathcal{O}_{\Delta(X)}$-módulo. Então, como Δ induz um isomorfismo de X em $\Delta(X)$, $\Omega_{X|Y}$ possui uma estutura natural de $\mathcal{O}_X$-módulo. Além disso, $\Omega_{X|Y}$ é coerente.*

Observação 19. *Se $U = \mathtt{Spec}\ A$ é um subconjunto aberto afim de Y e $V = \mathtt{Spec}\ B$ é um subconjunto aberto afim de X tais que $f(V) \subseteq U$, então $V \times_U V$ é um subconjunto aberto afim de $X \times_Y X$ isomorfo a $\mathtt{Spec}\ (B \otimes_A B)$, e $\Delta(X) \cap (V \times_U V)$ é o subesquema fechado definido pelo núcleo do homomorfismo diagonal $B \otimes_A B \longrightarrow B$. Portanto, $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ é o feixe associado ao módulo I/I^2 trabalhado na Proposição 3.58. Segue que $\Omega_{V|U} \cong (\widetilde{\Omega_{B|A}})$. Isso significa que a definição de feixe de diferenciais de $X|Y$ (Definição 3.62) é compatível, no caso afim, com a definição de módulo de diferenciais (Definição 3.57), via $\sim$.*

Além disso, $\Omega_{X|Y}$ poderia ter sido definido cobrindo X e Y por abertos afins V e U como descritos acima e colando os feixes correspondentes $(\widetilde{\Omega_{B|A}})$. As derivações $d : B \longrightarrow \Omega_{B|A}$ se colam gerando um mapa $d : \mathcal{O}_X \longrightarrow \Omega_{X|Y}$ de feixes de grupos abelianos em X, o qual é uma derivação dos anéis locais em cada ponto.

Proposição 3.63. *Sejam $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow Z$ morfismos de esquemas. Então existe uma sequência exata de feixes em X*

$$f^*\Omega_{Y|Z} \longrightarrow \Omega_{X|Z} \longrightarrow \Omega_{X|Y} \longrightarrow 0.$$

Demonstração. Segue da *Proposição 3.59.* □

Proposição 3.64. *Seja $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo finito separável de curvas. Então existe uma sequência exata de feixes em X*

$$0 \longrightarrow f^*\Omega_Y \longrightarrow \Omega_X \longrightarrow \Omega_{X|Y} \longrightarrow 0.$$

Demonstração. (14, Proposição 2.1, p. 300) □

Proposição 3.65. *Sejam $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo e Z um subesquema fechado de X com feixe de ideais $\mathcal{I}$. Então existe uma sequência exata de feixes em Z*

$$\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{X|Y} \otimes \mathcal{O}_Z \longrightarrow \Omega_{Z|Y} \longrightarrow 0.$$

Demonstração. Segue da *Proposição 3.60.* □

Exemplo 22. *Se $X = \mathbb{A}^n_Y$, então $\Omega_{X|Y}$ é um $\mathcal{O}_X$-módulo livre de posto n gerado pelas seções globais $dx_1, ..., dx_n$, onde $x_1, ..., x_n$ são coordenadas afins para $\mathbb{A}^n$.*

Agora, temos um resultado fundamental, o qual, através de uma sequência exata, relaciona o feixe de diferenciais em um espaço projetivo a feixes já conhecidos.

Teorema 3.66. *Sejam A um anel, $Y = \mathbf{Spec}\ A$ e $X = \mathbb{P}^n_A$. Então, há uma sequência exata de feixes em X*

$$0 \longrightarrow \Omega_{X/Y} \longrightarrow \mathcal{O}_X(-1)^{n+1} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow 0\ ,$$

onde o expoente $n+1$ denota uma soma direta de $n+1$ cópias de $\mathcal{O}_X(-1)$.

Demonstração. Seja $S = A[x_0, ..., x_n]$ o anel de coordenadas homogêneas de X. Seja E o S-módulo graduado $S(-1)^{n+1}$, com base $e_0, ..., e_n$ em grau 1. Defina um homomorfismo (de grau 0) de S-módulos graduados $E \longrightarrow S$, $e_i \longmapsto x_i$, e seja M seu núcleo. Então, a sequência exata de S-módulos graduados

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E \longrightarrow S$$

dá origem a uma sequência exata de feixes em X,

$$0 \longrightarrow \tilde{M} \longrightarrow \mathcal{O}_X(-1)^{n+1} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow 0.$$

Note que $E \longrightarrow S$ não é sobrejetor, porém é sobrejetor em todos os graus ≥ 1; logo, o mapa correspondente de feixes é sobrejetor.

Agora, queremos mostrar que $\tilde{M} \cong \Omega_{X|Y}$. Primeiro, note que, se localizarmos em x_i, então $E_{x_i} \longrightarrow S_{x_i}$ é um homomorfismo sobrejetor de S_{x_i}-módulos livres; então, M_{x_i} é livre de posto n, gerado por $\left\{e_j - \left(\frac{x_j}{x_i}\right) e_i : j \neq i\right\}$. Segue que, se U_i é o conjunto aberto de X definido por x_i, então $\tilde{M}\Big|_{U_i}$ é um $\mathcal{O}_{U_i}$-módulo livre gerado pelas seções $\left(\frac{1}{x_i}\right) e_j - \left(\frac{x_j}{x_i^2}\right) e_i$, para $j \neq i$. Aqui, precisamos do fator adicional $\frac{1}{x_i}$ para termos os elementos de grau 0 no módulo M_{x_i}.

Definimos um mapa $\varphi_i : \Omega_{X|Y}\Big|_{U_i} \longrightarrow \tilde{M}\Big|_{U_i}$ da seguinte forma: Lembre que $U_i \cong \mathtt{Spec}\ A\left[\frac{x_0}{x_i}, ..., \frac{x_n}{x_i}\right]$ (Ver *Teorema 4.21*). Logo, $\Omega_{X|Y}\Big|_{U_i}$ é um $\mathcal{O}_{U_i}$-módulo livre gerado por $d\left(\frac{x_0}{x_i}\right), ..., d\left(\frac{x_n}{x_i}\right)$. Então, definimos φ:

$$\varphi_i\left(d\left(\frac{x_j}{x_i}\right)\right) = \left(\frac{1}{x_i^2}\right)(x_i e_j - x)j e_i).$$

Portanto, φ_i é um isomorfismo. Além disso, os isomorfismos φ_i se colam dando origem ao isomorfismo $\varphi : \Omega_{X|Y} \longrightarrow \tilde{M}$, em todo X. Em $U_i \cap U_j$, temos, para qualquer k, $\left(\frac{x_k}{x_i}\right) = \left(\frac{x_k}{x_j}\right)\left(\frac{x_j}{x_i}\right)$. Portanto, em $\Omega\Big|_{U_i \cap U_j}$, temos

$$d\left(\frac{x_k}{x_i}\right) - \frac{x_k}{x_j} d\left(\frac{x_j}{x_i}\right) = \frac{x_j}{x_i} d\left(\frac{x_k}{x_j}\right).$$

Aplicando φ no lado esquerdo da igualdade e φ_j no lado direito, temos o mesmo resultado: $\left(\frac{1}{x_i x_j}\right)(x_j e_k - x_k e_j)$. Logo, os isomorfismos φ_i, de fato, se colam, completando a prova do resultado. $\square$

Nossa principal aplicação para os feixes de diferenciais está relacionada a variedades não-singulares. Uma *variedade quasi-projetiva não-singular* é aquela onde os anéis locais são todos regulares. Agora, expandimos essa definição a variedades abstratas.

Definição 3.67. *Uma variedade (abstrata) X sobre um corpo algebricamente fechado k é **não-singular** se todos seus anéis locais são anéis locais regulares (Ver Definições 2.8 e 2.9).*

A relação entre não-singularidade e diferenciais é dada pelo seguinte resultado:

Teorema 3.68. *Seja X um esquema irredutível separado de tipo finito sobre um corpo algebricamente fechado k. Então, $\Omega_{X/k}$ é um feixe localmente livre de posto $n = \dim X$ se, e somente se, X é uma variedade não-singular sobre k.*

Demonstração. (14, Teorema 8.15, p. 177-178) □

Corolário 3.69. *Se X é uma variedade sobre k, então há um subconjunto aberto denso U de X que é não-singular.*

Demonstração. (14, Corolário 8.16, p. 178) □

Teorema 3.70. *Seja X uma variedade não-singular sobre k. Seja $Y \subseteq X$ um subesquema fechado irredutível definido por um feixe de ideais $\mathcal{I}$. Então, Y é não-singular se, e somente se*

1. *$\Omega_{Y/k}$ é localmente livre; e*
2. *A sequência*
$$0 \longrightarrow \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \longrightarrow \Omega_{X/k} \otimes \mathcal{O}_Y \longrightarrow \Omega_{Y/k} \longrightarrow 0$$
é exata.

Além disso, nesse caso, $\mathcal{I}$ é localmente gerado por $r = \texttt{codim}\ (Y, X)$ elementos e $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ é um feixe localmente livre de posto r em Y.

Demonstração. (14, Teorema 8.17, p. 178-179) □

3.9.1 Operações Tensoriais em Feixes

Antes de prosseguir, recapitulamos neste momento as definições de algumas operações tensoriais em um módulo. Para isso, sejam A um anel e M um A-módulo.

Seja $T^n(M)$ o produto tensorial $M \otimes \cdots \otimes M$ de M com ele mesmo n vezes, para $n \geq 1$. Para $n = 0$, colocamos $T^0(M) = A$. Dessa forma, $T(M) = \bigoplus_{n \geq 0} T^n(M)$ é um A-álgebra não-comutativa, denominada *álgebra tensorial* de M.

Definição 3.71. *Define-se a **álgebra exterior*** $\bigwedge(M) = \bigoplus_{n\geq 0} \bigwedge^n(M)$ *de* M *como sendo o quociente de* $T(M)$ *pelo ideal bilateral gerado por todas as expressões* $x \otimes x$*, para* $x \in M$.

Note que o ideal citado na *Definição 3.71* contém todas as expressões da forma $x \otimes y + y \otimes x$. Logo, se $u \in \bigwedge^r(M)$ e $v \in \bigwedge^s(M)$, então $u \wedge v = (-1)^{rs} v \wedge u$ (onde $\wedge$ denota a multiplicação nessa álgebra; dessa forma, a imagem de $x \otimes y$ em $\bigwedge^2(M)$ é denotada por $x \wedge y$).

Definição 3.72. *A* n*-ésima componente de* $\bigwedge^n(M)$ *é denominada a* n*-ésima **potência exterior** de* M.

Agora, sejam $(X, \mathcal{O}_X)$ um espaço anelado e $\mathcal{F}$ um feixe de $\mathcal{O}_X$-módulos. Definimos a *álgebra tensorial* e a *álgebra exterior* de $\mathcal{F}$ tomando os feixes associados aos pré-feixes, os quais, para cada conjunto aberto U, atribuem a operação tensorial correspondente aplicada a $\mathcal{F}(U)$ como um $\mathcal{O}_X(U)$-módulo. Os resultados são $\mathcal{O}_X$-álgebras e suas componentes, em cada grau, são $\mathcal{O}_X$-módulos.

Lema 3.73. *Nas condições apresentadas,*

1. *Suponha que* $\mathcal{F}$ *seja localmente livre de posto* n*. Então* $T^r(\mathcal{F})$ *e* $\bigwedge^r(\mathcal{F})$ *também são localmente livres de posto* n^r *e* $\binom{n}{r}$*, respectivamente.*

2. *Seja* $0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$ *uma sequência exata de feixes localmente livres. Se* $\mathcal{F}$*,* $\mathcal{F}'$ *e* $\mathcal{F}''$ *possuem postos* n*,* n' *e* n'' *respectivamente, então existe um isomorfismo*

$$\bigwedge^n \mathcal{F} \cong \bigwedge^{n'} \mathcal{F}' \otimes \bigwedge^{n''} \mathcal{F}''.$$

Demonstração. 1. Como $\mathcal{F}$ é localmente livre de posto n, então, para qualquer ponto $x \in X$, existe uma vizinhança U de x tal que $\mathcal{F}\Big|_U = \mathcal{O}_X\Big|_U^n$ com base $e_1, ..., e_n$. Assim, $T^r(\mathcal{F})\Big|_U$ é livre com base $\{e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} : 1 \leq i_1, ..., i_r \leq n\}$ e $\bigwedge^r(\mathcal{F})\Big|_U$ é livre de base $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} : 0 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n\}$. Portanto, $T^r(\mathcal{F})$ e $\bigwedge^r(\mathcal{F})$ são localmente livres de posto n^r e $\binom{n}{r}$, respectivamente.

2. $\mathcal{F}\Big|_U = \mathcal{F}'\Big|_U \oplus \mathcal{F}''\Big|_U$ são todos livres e $n = n' + n''$. Então,

$$\bigwedge^r \mathcal{F}\Big|_U = \bigoplus_{p=0}^{r} \left(\bigwedge^p \mathcal{F}'\Big|_U \otimes \bigwedge^{r-p} \mathcal{F}''\Big|_U \right).$$

Porém, se $r > n$, temos $\bigwedge^r \mathcal{F}\Big|_U = 0$ e o mesmo vale para $\mathcal{F}'$ e $\mathcal{F}''$; logo, $\bigwedge^n \mathcal{F}\Big|_U = \bigwedge^{n'} \mathcal{F}'\Big|_U \otimes \bigwedge^{n''} \mathcal{F}''\Big|_U$, pois os termos restantes são todos nulos.

□

3.9.2 Aplicações sobre Diferenciais

Definição 3.74. *Seja $(X, \mathcal{O}_X)$ um espaço anelado e seja $\mathcal{E}$ um $\mathcal{O}_X$-módulo localmente livre de posto finito. Define-se o **dual** de $\mathcal{E}$, denotado por $\mathcal{E}^\vee$, como sendo o feixe $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X)$.*

Definição 3.75. *Seja X uma variedade não-singular sobre k. O **feixe tangente** de X sobre k sendo $\mathcal{T}_{X|k} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}\left(\Omega_{X|k}, \mathcal{O}_X\right)$.*

Definição 3.76. *Seja X uma variedade não-singular sobre k. O **feixe canônico** de X, denotado por ω_X, é a n-ésima potência exterior do feixe de diferenciais, onde $n = \dim X$; isto é, $\omega_X := \bigwedge^n \Omega_{X/k}$.*

Proposição 3.77. *Sejam $(X, \mathcal{O}_X)$ espaço anelado não-trivial e $\mathcal{L}$ feixe localmente livre de posto finito $n \geq 0$. Então, $\mathcal{L}^\vee$ é um feixe localmente livre de mesmo posto. Em particular, para qualquer espaço anelado, se $\mathcal{L}$ é invertível, então $\mathcal{L}^\vee$ também será.*

Demonstração. Se $n = 0$, o resultado é trivial; logo, assuma $n \geq 1$. Se $x \in X$, seja U uma vizinhança aberta com $\mathcal{L}\big|_U$ livre de posto n. Então, temos um isomorfismo de feixes de módulos

$$\mathtt{Hom}(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)\Big|_U = \mathtt{Hom}\left(\mathcal{L}\Big|_U, \mathcal{O}_X\Big|_U\right) \cong \bigoplus_{i=1}^n \mathtt{Hom}\left(\mathcal{O}_X\Big|_U, \mathcal{O}_X\Big|_U\right) = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_X\Big|_U.$$

□

Observação 20. *Pelo exposto na Proposição 3.77, o feixe tangente (Definição 3.75) é um feixe localmente livre de posto $n = \dim X$ e o feixe canônico (Definição 3.76) é um feixe invertível em X.*

Definição 3.78. *Seja Y uma subvariedade não-singular de uma variedade não-singular X sobre k. O feixe localmente livre $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ é denominado o **feixe conormal** de Y em X. Seu dual, $N_{Y|X} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2, \mathcal{O}_Y)$, é denominado o **feixe normal** de Y em X.*

Observação 21. *O feixe normal (Definição 3.78) é localmente livre de posto $r = \mathtt{codim}\ (Y, X)$.*

Note que, se tomarmos o dual em Y da sequência exata de feixes localmente livres em Y dada no *Teorema 3.70*, então obtemos uma nova sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_Y \longrightarrow \mathcal{T}_X \otimes \mathcal{O}_Y \longrightarrow N_{Y|X} \longrightarrow 0.$$

Isso mostra que o feixe normal que definimos (*Definição 3.78*) corresponde à noção geométrica usual de vetores normais sendo vetores tangentes do espaço ambiente módulo vetores tangentes do subespaço.

Proposição 3.79. *Seja Y um subvariedade não-singular de codimensão r em uma variedade não-singular X sobre k. Então, $\omega_Y \cong \omega_X \otimes \bigwedge^r \mathcal{N}_{Y/X}$.*

No caso de $r = 1$, considere Y como um divisor e seja $\mathcal{L}$ o feixe invertível associado em X. Então, $\omega_Y \cong \omega_X \otimes \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_Y$.

Demonstração. Do *Teorema 3.70*, temos a seguinte sequência exata:

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \longrightarrow \Omega_{X|k} \otimes \mathcal{O}_Y \longrightarrow \Omega_{Y|k} \longrightarrow 0.$$

Tome $n = \dim X$ e $q = \dim Y$, para que $r = n - q$. Tomando as maiores potências exteriores (*Lema 3.73, 2.*), temos um isomorfismo canônico de feixes de módulos:

$$\omega_X \otimes \mathcal{O}_Y \cong \bigwedge^n \left(\Omega_{X|k} \otimes \mathcal{O}_Y\right) \cong \bigwedge^r \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \otimes \bigwedge^q \Omega_{Y|k} = \bigwedge^r \left(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2\right) \otimes \omega_Y.$$

$$\omega_X \otimes \mathcal{O}_Y \cong \omega_Y \otimes \bigwedge^r \mathcal{I}/\mathcal{I}^2.$$

Tensorizando ambos os lados pelo dual de $\bigwedge^r \mathcal{I}/\mathcal{I}^2$, sabendo que a comutatividade $\bigwedge^r \left(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2\right)^\vee \cong \left(\bigwedge^r \left(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2\right)\right)^\vee$, temos o isomorfismo desejado:

$$\omega_X \otimes \bigwedge^r \mathcal{N}_{Y|X} \cong \omega_Y.$$

□

Exemplo 23. *Seja $X = \mathbb{P}^n_k$. Tomando o dual da sequência exata apresentada no Teorema 3.66, temos uma sequência envolvendo o feixe tangente de $\mathbb{P}^n$:*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X(1)^{n+1} \longrightarrow \mathcal{T}_X \longrightarrow 0.$$

Para obter o feixe canônico de $\mathbb{P}^n$, tomamos as maiores potências exteriores da sequência exata do Teorema 3.66, encontrando

$$\omega_X \cong \mathcal{O}_X(-n-1).$$

De fato, temos uma sequência exata canônica de feixes de módulos (nos termos do Teorema 3.66):

$$0 \longrightarrow \Omega_{X|Y} \longrightarrow \mathcal{O}_X(-1)^{n+1} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow 0.$$

O feixe $\Omega_{X|Y}$ é localmente livre de posto n; logo, essa é uma sequência exata curta de feixes localmente livres de posto finito. Temos, assim, o seguinte isomorfismo canônico:

$$\begin{aligned} \omega_{X|Y} &= \bigwedge^n \Omega_{X|Y} \\ &\cong \bigwedge^n \Omega_{X|Y} \otimes \mathcal{O}_X \\ &\cong \bigwedge^{n+1} \mathcal{O}_X(-1)^{n+1} \\ &\cong \mathcal{O}_X(-1)^{\otimes(n+1)} \\ &\cong \mathcal{O}_X(-n-1), \end{aligned}$$

como desejado.

4 DIVISORES

A noção de *divisor* forma uma importante ferramenta para o estudo da geometria intrínseca em uma variedade ou em um esquema.

Há diversas maneiras de se definir o que é um divisor, dependendo do contexto. Aqui, começaremos discutindo os chamados *divisores de Weil*, que são mais fáceis de entender geometricamente, porém apenas são definidos em certos esquemas integrais Noetherianos. Depois, para esquemas mais gerais, trabalharemos com os *divisores de Cartier* e veremos a relação entre os divisores de Weil, os divisores de Cartier e feixes invertíveis. Tomamos como referência (14), (15), (18) e (19).

Exemplo 24 (Um Exemplo Informal)**.** *Seja C uma curva projetiva não-singular em $\mathbb{P}^2_k$, o plano projetivo sobre um corpo algebricamente fechado k. Para cada reta L em $\mathbb{P}^2$, considere $L \cap C$, que consiste de um conjunto com um número finito de pontos em C. Se C é uma curva de grau d e contarmos os pontos com suas respectivas multiplicidades, então $L \cap C$ consistirá de exatamente d pontos. Escrevemos $L \cap C = \sum n_i p_i$, onde $p_i \in C$ são os pontos e n_i, suas multiplicidades; denominamos essa soma formal de um divisor em C (Ver Definição 4.2).*

Variando L, obtemos uma família de divisores em C parametrizada pelo conjunto de todas as retas em $\mathbb{P}^2$, o qual é o espaço projetivo dual $(\mathbb{P}^2)^*$. Denominamos esse conjunto de divisores um sistema linear de divisores em C.

Note que a imersão de C em $\mathbb{P}^2$ pode ser recuperada apenas conhecendo esse sistema linear: Se p é um ponto de C, considere o conjunto de divisores no sistema linear que contêm p. Eles correspondem às retas $L \in (\mathbb{P}^2)^*$ passando por p e esse conjunto de retas determina p unicamente como um ponto de $\mathbb{P}^2$.

O *Exemplo 24* ilustra a importância dos divisores. Para enxergar a relação existente entre os diferentes divisores em um sistema linear, sejam L e L' duas retas em $\mathbb{P}^2$ e sejam $D = L \cap C$ e $D' = L' \cap C$ seus correspondentes divisores. Se L e L' são definidas por equações homogêneas lineares $f = 0$ e $f' = 0$, respectivamente, em $\mathbb{P}^2$, então $\dfrac{f}{f'}$ resulta em uma função racional em $\mathbb{P}^2$, que restringe-se a uma função racional g em C. Por construção, g possui zeros nos pontos de D e polos nos pontos de D', contando suas multiplicidades (ver *Definição 4.3*). Dizemos que D e D' são linearmente equivalentes e a existência de tal função racional pode ser tomada como uma definição intrínseca da equivalência linear.

4.1 DIVISORES DE WEIL

Definição 4.1. *Um esquema é dito ser **regular** se todos os seus anéis locais são anéis locais regulares.*

*Um esquema X é **regular em codimensão** 1 (ou, às vezes, **não-singular em codimensão** 1) se todo anel local $\mathcal{O}_x$ de X de dimensão 1 é regular.*

Definição 4.2. *Seja X um esquema Noetheriano integral separado o qual é regular em codimensão 1.*

*Um **divisor primo** em X é um subesquema integral fechado Y de codimensão 1.*

*Um **divisor de Weil** é um elemento do grupo livre abeliano $\mathtt{Div}\ X$ gerado pelos divisores primos. Escrevemos um divisor como $D = \sum n_i Y_i$, onde Y_i são divisores primos, $n_i \in \mathbb{Z}$ e somente finitos desses inteiros n_i são não-nulos. Se todos os $n_i \geq 0$, dizemos que D é **efetivo**. O **suporte** de D, denotado por $\mathtt{Supp}\ D$, é a variedade $\bigcup_{n_i \neq 0} Y_i$.*

Se Y é um divisor primo em X, seja $\eta \in Y$ seu ponto genérico. Então, o anel local $\mathcal{O}_{\eta,X}$ é um anel de valorização discreta com corpo quociente K, o corpo de funções de X. A valorização discreta υ_Y é denominada a *valorização de Y*. Note que, como X é separado, Y é unicamente determinado pela sua valorização.

Definição 4.3. *Agora, seja $f \in K^*$ uma função racional não-nula em X. Então, $\upsilon_Y(f)$ é um inteiro. Se positivo, dizemos que f possui um **zero** ao longo de Y de tal ordem; se negativo, dizemos que f possui um **polo** ao longo de Y, de ordem $-\upsilon_Y(f)$.*

Lema 4.4. *Seja X um esquema Noetheriano integral separado o qual é regular em codimensão 1. Seja $f \in K^*$ uma função não-nula em X. Então, $\upsilon_Y(f) = 0$ exceto para um número finito de divisores primos Y.*

Demonstração. (14, Lema 6.1, p. 131) □

Definição 4.5. *Seja X um esquema Noetheriano integral separado o qual é regular em codimensão 1. Seja $f \in K^*$. Definimos o **divisor** de f, denotado por (f), da seguinte forma:*

$$(f) = \sum \upsilon_Y(f) \cdot Y,$$

onde a soma é tomada sobre todos os divisores primos de X.

Definição 4.6. *Qualquer divisor igual ao divisor de uma função é denominado **divisor principal**.*

Observação 22. *Pelo Lema 4.4, a soma na Definição 4.5 é finita, portanto (f) é, de fato, um divisor.*

Note que, se $f, g \in K^*$, então $\left(\frac{f}{g}\right) = (f) - (g)$, por causa das propriedades das valorizações. Portanto, o mapa que envia uma função f ao seu divisor (f) é um homomorfismo do grupo multiplicativo K^* ao grupo aditivo $\mathtt{Div}\ X$ e sua imagem, que consiste dos divisores principais, é um subgrupo de $\mathtt{Div}\ X$.

Definição 4.7. *Seja X um esquema Noetheriano integral separado o qual é regular em codimensão* 1*. Dois divisores D e D' são **linearmente equivalentes** ($D \sim D'$) se $D - D'$ é um divisor principal.*

O grupo $\texttt{Div}\ X$ *de todos os divisores quocientado pelo subgrupo de divisores principais é denominado o **grupo das classes de divisores** de X, denotado por* $\texttt{Cl}\ X$*.*

4.2 DIVISORES EM CURVAS

Definição 4.8. *Seja k um corpo algebricamente fechado. Uma **curva** sobre k é um esquema integral separado X de tipo finito sobre k de dimensão 1.*

*Se todos os anéis locais de X são anéis locais regulares, dizemos que X é **não-singular**.*

Se X é uma curva não-singular, então X satisfaz a condição de ser um esquema Noetheriano, integral, separado e regular em codimensão 1, então podemos falar sobre divisores em X.

Um divisor primo é apenas um ponto fechado, então um divisor arbitrário pode ser escrito como $D = \sum n_i p_i$, onde p_i são pontos fechados e $n_i \in \mathbb{Z}$. Definimos o **grau do divisor** D como sendo $\deg D := \sum n_i$.

Definição 4.9. *Se $f : X \longrightarrow Y$ é um morfismo finito de curvas não-singulares, podemos definir um homomorfismo* $f^* : \texttt{Div}\ Y \longrightarrow \texttt{Div}\ X$ *da seguinte forma:*

*Para qualquer ponto $q \in Y$, seja $t \in \mathcal{O}_q$ um **parâmetro local** em q, isto é, t é um elemento de $K(Y)$, com $v_q(t) = 1$, onde v_q é a valorização correspondente ao anel de valorização discreta $\mathcal{O}_q$. Definimos*

$$f^*q := \sum_{f(p)=q} v_p(t) \cdot p.$$

Observação 23. *Na Definição 4.9, como f é um morfismo finito, a soma apresentada é finita; logo, temos um divisor em X.*

Além disso, note que f^*q é independente da escolha do parâmetro local t. De fato, se t' é um outro parâmetro local em q, então $t' = ut$, onde u é uma unidade em $\mathcal{O}_q$. Para qualquer ponto $p \in X$ com $f(p) = q$, u é uma unidade em $\mathcal{O}_p$; logo, $v_p(t) = v_p(t')$.

É possível, ainda, estender a definição por linearidade a todos os divisores de Y, pois f^* preserva equivalência linear. Assim, induz-se um homomorfismo $f^* : \texttt{Cl}\ Y \longrightarrow \texttt{Cl}\ X$*.*

4.3 DIVISORES DE CARTIER

Neste momento, a ideia é estender a noção de divisor a um esquema arbitrário. Para isso, tomamos como ponto de partida a ideia de que um divisor deveria, localmente, ser semelhante ao divisor de uma função racional. Essa, porém, não é exatamente uma generalização dos divisores de Weil, mas fornece uma boa noção para ser usada em esquemas quaisquer.

Definição 4.10. *Seja X um esquema.*

*Para cada subconjunto aberto afim $U = \texttt{Spec}\ A$, sejam S o conjunto dos elementos de A que não são divisores de zero e $K(U)$ a localização de A pelo sistema multiplicativo S. Denominamos $K(U)$ o **anel quociente total** de A.*

Para cada aberto U, seja $S(U)$ o conjunto dos elementos de $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ que não são divisores de zero em cada anel local $\mathcal{O}_x$, para $x \in U$.

*Os anéis $S(U)^{-1}\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ formam um pré-feixe cujo feixe de anéis associado $\mathcal{K}$ denominamos **feixe dos anéis quocientes totais** de $\mathcal{O}$. Por fim, denotamos por $\mathcal{K}^*$ o feixe (de grupos multiplicativos) dos elementos invertíveis no feixe de anéis $\mathcal{K}$. Analogamente, $\mathcal{O}^*$ é o feixe de elementos invertíveis em $\mathcal{O}$.*

Observação 24. *Em um esquema arbitrário, o feixe $\mathcal{K}$ substitui o conceito de corpo de função de um esquema integral.*

Definição 4.11. *Um **divisor de Cartier** em um esquema X é uma seção global do feixe $\mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*$.*

*Um divisor de Cartier é **principal** se está na imagem do mapa natural $\Gamma(X, \mathcal{K}^*) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*)$. E dois divisores de Cartier são **linearmente equivalentes** se sua diferença é principal.*

Observação 25.

1. *Tendo em mente as propriedades de feixes quocientes, um divisor de Cartier em X pode ser descrito através de uma cobertura aberta $\{U_i\}$ de X e, para cada i, de um elemento $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{K}^*)$ tais que, para cada i, j, $\dfrac{f_i}{f_j} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}^*)$.*
2. *Apesar da operação de grupo em $\mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*$ ser a multiplicação, utiliza-se a linguagem de grupos aditivos para se referir aos divisores de Cartier a fim de presevar a analogia com os divisores de Weil.*

Proposição 4.12. *Seja X um esquema Noetheriano, integral e separado, cujos anéis locais são domínios de fatoração única. Então, o grupo $\texttt{Div}\ X$ dos divisores de Weil em X é isomorfo ao grupo de divisores de Cartier $\Gamma(X, \mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*)$. Além disso, os divisores de Weil principais correspondem aos divisores de Cartier principais sob esse isomorfismo.*

Ideia da Demonstração. Como X é integral, o feixe $\mathcal{K}$ é o feixe constante correspondente ao corpo de funções K de X. Agora, seja um divisor de Cartier dado por $\Big\{(U_i, f_i)\Big\}$, onde $\{U_i\}$ é uma cobertura aberta de X e $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{K}^*) = K^*$. Definimos o divisor de Weil associado da seguinte forma: Para cada divisor primo Y, tome o coeficiente de Y como sendo $\upsilon_Y(f_i)$, onde i é qualquer índice tal que $Y \cap U_i \neq \emptyset$. Se j é um outro índice tal, então $\dfrac{f_i}{f_j}$ é invertível em $U_i \cap U_j$; logo, $\upsilon_Y\left(\dfrac{f_i}{f_j}\right) = 0$ e $\upsilon_Y(f_i) = \upsilon_Y(f_j)$. Portanto, obtemos um divisor de Weil $D = \sum \upsilon_Y(f_i)Y$ em X. Note que a soma é finita, uma vez que X é Noetheriano. Reciprocamente, se D é um divisor de Weil em X, seja $x \in X$ um ponto qualquer. Então, D induz um divisor de Weil D_x no esquema local $\mathtt{Spec}\ \mathcal{O}_x$. Como $\mathcal{O}_x$ é um domínio de fatoração única, D_x é um divisor principal. Assim, seja $D_x = (f_x)$, para algum $f_x \in K$. O divisor principal (f_x) em X possui a mesma restrição a $\mathtt{Spec}\ \mathcal{O}_x$ de D; logo, diferem apenas em divisores primos que não passam por x. Há somente um número finito desses que possuem coeficiente não-nulo em D ou (f_x). Dessa forma, há uma vizinhança aberta U_x de x tal que D e (f_x) possuem a mesma restrição a U_x. Cobrindo X com tais abertos U_x, as funções f_x nos dão um divisor de Cartier em X. Note que, se f, f' dão o mesmo divisor de Weil em um conjunto aberto U, então $\dfrac{f}{f'} \in \Gamma(U, \mathcal{O}^*)$. Para mais detalhes, ver (14, Proposição 6.11, p. 141-142). $\square$

Observação 26. *Um divisor de Weil D é **localmente principal** se X pode ser coberto por conjuntos abertos U de forma que $D\big|_U$ seja principal, para cada U. Então, a Proposição 4.12 mostra que os divisores de Cartier são os mesmos que os divisores de Weil localmente principais.*

4.4 FEIXES INVERTÍVEIS

Retomando à *Definição 3.39*, um *feixe invertível* em um espaço anelado X é definido como sendo um $\mathcal{O}_X$-módulo livre de posto 1. Nesta seção, nosso objetivo é observar a relação entre feixes invertíveis em um esquema e as classes de divisores módulo equivalência linear.

Proposição 4.13. *Se $\mathcal{L}$ e $\mathcal{M}$ são feixes invertíveis em um espaço anelado X, então $\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}$ também é um feixe invertível.*

Se $\mathcal{L}$ é um feixe invertível qualquer em X, então existe um feixe invertível $\mathcal{L}^{-1}$ em X de forma que $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{-1} \cong \mathcal{O}_X$.

Demonstração. A primeira afirmação segue do fato de $\mathcal{L}$ e $\mathcal{M}$ serem ambos localmente livres de posto 1 e $\mathcal{O}_X \otimes \mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_X$. Para a segunda afirmação, seja $\mathcal{L}$ um feixe invertível qualquer e tome $\mathcal{L}^{-1}$ como sendo o feixe dual $\mathcal{L}^\vee = \mathtt{Hom}(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$. Assim, $\mathcal{L}^\vee \otimes \mathcal{L} \cong \mathtt{Hom}(\mathcal{L}, \mathcal{L}) = \mathcal{O}_X$. $\square$

Definição 4.14. *Para qualquer espaço anelado X, definimos o **grupo de Picard** de X, $\mathtt{Pic}\ X$, como sendo o grupo de classes de isomorfismo de feixes invertíveis em X, sob a operação $\otimes$.*

Definição 4.15. *Seja D um divisor de Cartier em um esquema X, representado por $\{(U_i, f_i)\}$. Definimos um subfeixe $\mathcal{L}(D)$ do feixe de anéis quocientes totais $\mathcal{K}$ tomando $\mathcal{L}(D)$ como sendo o sub-$\mathcal{O}_X$-módulo de $\mathcal{K}$ gerado por f_i^{-1} em U_i. $\mathcal{L}(D)$ é denominado o **feixe associado** a D.*

Observação 27. *Na Definição 4.15, como $\dfrac{f_i}{f_j}$ é invertível em $U_i \cap U_j$, então f_i^{-1} e f_j^{-1} geram o mesmo $\mathcal{O}_X$-módulo. Portanto, $\mathcal{L}(D)$ está bem-definido.*

Proposição 4.16. *Seja X um esquema. Então:*

1. *Para qualquer divisor de Cartier D, $\mathcal{L}(D)$ é um feixe invertível em X.*

   O mapa $D \longmapsto \mathcal{L}(D)$ resulta em uma correspondência biunívoca entre os divisores de Cartier em X e os subfeixes invertíveis de $\mathcal{K}$.

2. *$\mathcal{L}(D_1 - D_2) \cong \mathcal{L}(D_1) \otimes \mathcal{L}(D_2)^{-1}$.*

3. *$D_1 \sim D_2$ se, e somente se, $\mathcal{L}(D_1) \cong \mathcal{L}(D_2)$.*

Ideia da Demonstração.

1. Como cada $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{K}^*)$, o mapa $\mathcal{O}_{U_i} \longrightarrow \mathcal{L}(D)\Big|_{U_i}$, com $1 \longmapsto f_i^{-1}$, é um isomorfismo. Portanto, $\mathcal{L}(D)$ é um feixe invertível.

   O divisor de Cartier D pode ser recuperado de $\mathcal{L}(D)$ juntamente com sua imersão em $\mathcal{K}$ tomando f_i em U_i como sendo o inverso de um gerador local de $\mathcal{L}(D)$. Para qualquer subfeixe invertível de $\mathcal{K}$, essa construção fornece um divisor de Cartier, estabelecendo uma correspondência um-a-um. (Ver *Teorema 4.38*).

2. Se D_1 é localmente definido por f_i e D_2 é localmente definido por g_i, então $\mathcal{L}(D_1 - D_2)$ é localmente gerado por $f_i^{-1} g_i$. Logo, $\mathcal{L}(D_1 - D_2) = \mathcal{L}(D_1) \cdot \mathcal{L}(D_2)^{-1}$ como subfeixes de $\mathcal{K}$. Esse produto é isomorfo ao produto tensorial $\mathcal{L}(D_1) \otimes \mathcal{L}(D_2)^{-1}$.

3. Utilizando o item anterior, é suficiente mostrar que $D = D_1 - D_2$ é principal se, e somente se, $\mathcal{L}(D) \cong \mathcal{O}_X$.

   Se D é principal, definido por $f \in \Gamma(X, \mathcal{K}^*)$, então $\mathcal{L}(D)$ é globalmente gerado por f^{-1}. Logo, $1 \longmapsto f^{-1}$ fornece um isomorfismo $\mathcal{O}_X \cong \mathcal{L}(D)$. Reciprocamente, dado tal isomorfismo, a imagem de 1 fornece um elemento de $\Gamma(X, \mathcal{K}^*)$ cujo inverso definirá D como um divisor principal.

□

Proposição 4.17. *Se $X = \mathbb{P}_k^n$, para algum corpo k, então todo feixe invertível em X é isomorfo a $\mathcal{O}(\ell)$, para algum $\ell \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração. (14, Proposição 6.4, p. 132-133) (14, Corolários 6.16 e 6.17, p. 145) □

Definição 4.18. *Um divisor de Cartier em um esquema X é **efetivo** se pode ser representado por $\{(U_i, f_i)\}$, onde todos $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$. Nesse caso, definimos o **subesquema associado de codimensão** 1**,** Y, como sendo o subesquema fechado definido pelo feixe de ideais $\mathcal{I}$, o qual é localmente gerado por f_i.*

Definição 4.19. *Seja Y um subesquema fechado de um esquema X e seja $i : Y \longrightarrow X$ o morfismo de inclusão. Define-se o **feixe ideal de** Y, denotado por $\mathcal{I}_Y$, como sendo o núcleo do morfismo $i^\sharp : \mathcal{O}_X \longrightarrow i_*\mathcal{O}_Y$.*

Proposição 4.20. *Seja D um divisor de Cartier efetivo em um esquema X e seja Y o subesquema fechado localmente principal associado. Então, $\mathcal{I}_Y \cong \mathcal{L}(-D)$.*

Demonstração. $\mathcal{L}(-D)$ é o subfeixe de $\mathcal{K}$ localmente gerado por f_i. Como D é efetivo, esse, de fato, é um subfeixe de $\mathcal{O}_X$, que não é outro senão o feixe ideal $\mathcal{I}_Y$ de Y. □

4.5 MORFISMOS PARA O ESPAÇO PROJETIVO

Fixe um anel A e considere o espaço projetivo $\mathbb{P}^n_A = \texttt{Proj}\ A[x_0, ..., x_n]$ sobre A. Em $\mathbb{P}^n_A$, temos o feixe invertível $\mathcal{O}(1)$ e as coordenadas homogêneas $x_0, ..., x_n$ dão origem a seções globais $x_0, ..., x_n \in \Gamma\Big(\mathbb{P}^n_A, \mathcal{O}(1)\Big)$. O feixe $\mathcal{O}(1)$ é gerado pelas seções globais $x_0, ..., x_n$, isto é, as imagens dessas seções geram o talo $\mathcal{O}(1)_p$ do feixe $\mathcal{O}(1)$ como um módulo sobre o anel local $\mathcal{O}_p$, para cada $p \in \mathbb{P}^n_A$.

Agora, seja X um esquema qualquer sobre A e seja $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{P}^n_A$ um A-morfismo de X para $\mathbb{P}^n_A$. Então $\mathcal{L} = \varphi^*\Big(\mathcal{O}(1)\Big)$ é um feixe invertível em X e as seções globais $s_0, ..., s_n$, onde $s_i = \varphi^*(x_i)$, $s_i \in \Gamma(X, \mathcal{L})$, geram o feixe $\mathcal{L}$. De fato, tomando $x \in X$, temos:

$$\begin{aligned}
(\varphi^*\mathcal{O}(1))_x &\overset{\text{def}}{=} \Big(\varphi^{-1}\mathcal{O}(1) \otimes_{\varphi^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_A}} \mathcal{O}_X\Big)_x \\
&= \Big(\varphi^{-1}\mathcal{O}(1)\Big)_x \otimes_{\Big(\varphi^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_A}\Big)_x} \mathcal{O}_{X,x} \\
&= \Big(\varphi^{-1}\mathcal{O}(1)\Big)_x \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_A,\varphi(x)}} \mathcal{O}_{X,x} \\
&= \mathcal{O}(1)_{\varphi(x)} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_A,\varphi(x)}} \mathcal{O}_{X,x},
\end{aligned}$$

implicando na existência do seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(1)_{\varphi(x)} \arrow[r, "(i)"] \arrow[dr, "m \longmapsto m\otimes 1"'] & (\varphi^*\mathcal{O}(1))_x \arrow[d, "(ii)"] \\
& \mathcal{O}(1)_{\varphi(x)} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_A,\varphi(x)}} \mathcal{O}_{X,x}
\end{tikzcd},$$

onde o morfismo *(i)* é compatível com o morfismo de anéis $\varphi_x : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_A,\varphi(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ e mapas $(x_i)_{\varphi(x)} \longmapsto (s_i)_x$; e *(ii)* é um isomorfismo de $\mathcal{O}_{X,x}$-módulos.

Como $(x_i)_{\varphi(x)} \otimes 1$ geram $\mathcal{O}(1)_{\varphi(x)} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_A,\varphi(x)}} \mathcal{O}_{X,x}$ como $\mathcal{O}_{X,x}$-módulo, então segue que $\varphi^*\mathcal{O}(1)$ é gerado pelos s_i.

Reciprocamente, $\mathcal{L}$ e as seções s_i determinam φ:

Teorema 4.21. *Sejam A um anel e X um esquema sobre A.*

1. *Se $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{P}^n_A$ é um A-morfismo, então $\varphi^*\Big(\mathcal{O}(1)\Big)$ é um feixe invertível em X, gerado pelas seções globais $s_i = \varphi^*(x_i)$, com $i = 0, 1, ..., n$.*

2. *Reciprocamente, se $\mathcal{L}$ é um feixe invertível em X e $s_0, ..., s_n \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ são seções globais que geram $\mathcal{L}$, então exite um único A-morfismo $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{P}^n_A$ tal que $\mathcal{L} \cong \varphi^*\Big(\mathcal{O}(1)\Big)$ e $s_i = \varphi^*(x_i)$ sob tal isomorfismo.*

Ideia da Demonstração.

1. Segue da discussão apresentada anteriormente ao enunciado do teorema.

2. Suponha dados $\mathcal{L}$ e as seções locais $s_0, ..., s_n$ as quais o geram. Como o caso $X = \emptyset$ é trivial, podemos assumir $X \neq \emptyset$. Para cada i, considere o subconjunto aberto $X_i = \{x \in X : (s_i)_x \notin \mathfrak{m}_x\mathcal{L}_x\} \subset X$. Como s_i gera $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}_x \cong \mathcal{O}_{X,x} \neq 0$, $\forall x \in X$, os conjuntos abertos X_i devem cobrir X.

   Defina um morfismo de X_i para o conjunto aberto $U_i = D_+(x_i)$ de $\mathbb{P}^n_A$ da seguinte forma: Note que $U_i \cong \texttt{Spec } A[y_0, ..., y_n]$, onde $y_j = \dfrac{x_j}{x_i}$, com $y_i = 1$ omitido, ou seja, $U_i \cong \texttt{Spec } A\left[\dfrac{x_0}{x_i}, ..., \dfrac{x_n}{x_i}\right]$, com $\dfrac{x_i}{x_i}$ otimido. De fato, $D_+(x_i) \cong \texttt{Spec } A[x_0, ..., x_n]_{(x_i)} \cong \texttt{Spec } A[x_1, ..., x_n]$. Agora, podemos definir um homomorfismo de anéis $A\left[\dfrac{x_0}{x_i}, ..., \dfrac{x_n}{x_i}\right] \longrightarrow \Gamma\left(X_i, \mathcal{O}_X\Big|_{X_i}\right)$, tomando $\dfrac{x_j}{x_i} \longmapsto \dfrac{s_j}{s_i}$, e fazê-lo A-linear. Isso faz sentido, pois, para cada $p \in X_i$, $(s_i)_p \notin \mathfrak{m}_p\mathcal{L}_p$ e $\mathcal{L}$ é localmente livre de posto 1; então, o quociente $\dfrac{s_j}{s_i}$ é um elemento bem-definido de $\Gamma(X_i, \mathcal{O}_{X_i})$. Agora, como existe uma bijeção entre $\texttt{Hom}(X, \texttt{Spec } A)$ e $\texttt{Hom}\Big(A, \Gamma(X, \mathcal{O}_X)\Big)$, esse homomorfismo de anéis determina um morfismo de esquemas (sobre A) $\varphi_i : X_i \longrightarrow \texttt{Spec } A\left[\dfrac{x_0}{x_i}, ..., \dfrac{x_n}{x_i}\right] \cong U_i$. Podemos utilizar a colagem de morfismos a fim de obter um morfismo $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{P}^n_A$.

   Da construção, temos que φ é um A-morfismo, $\mathcal{L} \cong \varphi^*\mathcal{O}(1)$ e que as seções s_i correspondem a $\varphi^*(x_i)$ sobre tal isomorfismo. Ainda, qualquer outro morfismo com tais propriedades deve ser o mesmo dado pela construção; logo, φ é único.

□

Exemplo 25. *Se X é um esquema sobre A, $\mathcal{L}$ um feixe invertível e $s_0, ..., s_n$ conjunto qualquer de seções globais (não necessariamente gerando $\mathcal{L}$), podemos sempre considerar o conjunto aberto $U \subseteq X$ (possivelmente vazio) sobre o qual s_i gere $\mathcal{L}$. Então, $\mathcal{L}\Big|_U$ e $s_i\Big|_U$ fornecem um morfismo $U \longrightarrow \mathbb{P}^n_A$.*

Por exemplo, se $X = \mathbb{P}_k^{n+1}$, $\mathcal{L} = \mathcal{O}(1)$ *e* $s_i = x_i$, *com* $i = 0, 1, ..., n$, *então tais seções geram o todo, exceto no ponto* $(0 : 0 : ... : 0 : 1) = p_0$. *Portanto,* $U = \mathbb{P}^{n+1} - \{p_0\}$ *e o morfismo correspondente* $U \longrightarrow \mathbb{P}^n$ *é a projeção do ponto* p_0 *para* $\mathbb{P}^n$.

4.6 SISTEMAS LINEARES

Nessa seção, veremos como seções globais de um feixe invertível correspondem a divisores efetivos em uma variedade. Portanto, fornecer um feixe invertível e um conjunto de suas seções globais é o mesmo que fornecer um certo conjunto de divisores efetivos, todos linearmente equivalentes entre si. Isso nos guia à noção de *sistema linear*.

Seja X uma variedade projetiva não-singular sobre um corpo algebricamente fechado k. Nesse caso, as noções de divisor de Weil e divisor de Cartier são equivalentes. Além disso, temos uma correspondência biunívoca entre classes de equivalência linear de divisores e classes de isomorfismo de feixes invertíveis. Um outro fato importante é que, nessa situação, para qualquer feixe invertível $\mathcal{L}$ em X, as seções globais $\Gamma(X, \mathcal{L})$ foram um k-espaço vetorial de dimensão finita.

Sejam $\mathcal{L}$ um feixe invertível em X e $s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ uma seção não-nula de $\mathcal{L}$.

Definição 4.22. *Definimos um divisor efetivo* $D = (s)_0$, *o* ***divisor de zeros*** *de* s, *da seguinte forma: Sobre um conjunto aberto qualquer* $U \subseteq X$ *onde* $\mathcal{L}$ *seja trivial, seja* $\varphi : \mathcal{L}\big|_U \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_U$ *um isomorfismo. Então,* $\varphi(s) \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$. *Como* U *varia sobre uma cobertura de* X, *a coleção* $\big\{U, \varphi(s)\big\}$ *determina um divisor efetivo de Cartier* D *em* X. *De fato,* φ *é determinado a menos de uma multiplicação por um elemento de* $\Gamma(U, \mathcal{O}_U^*)$; *logo, temos um divisor de Cartier bem-definido.*

Proposição 4.23. *Seja* X *uma variedade projetiva não-singular sobre um corpo algebricamente fechado* k. *Sejam* D_0 *um divisor em* X *e* $\mathcal{L} \cong \mathcal{L}(D_0)$ *o feixe invertível correspondente. Então:*

1. *Para cada* $s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ *não-nulo, o divisor de zeros* $(s)_0$ *é um divisor efetivo linearmente equivalente a* D_0.

2. *Todo divisor efetivo linearmente equivalente a* D_0 *é* $(s)_0$, *para algum* $s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$.

3. *Duas seções* $s, s' \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ *possuem o mesmo divisor de zeros se, e somente se, existe* $\lambda \in k^*$ *tal que* $s' = \lambda s$.

Demonstração. (14, Proposição 7.7, p. 157) □

Definição 4.24. *Um* ***sistema linear completo*** *em uma variedade projetiva não-singular é definido como o conjunto (podendo ser vazio) de todos os divisores efetivos linearmente equivalentes a algum divisor* D_0 *dado. É denotado por* $|D_0|$.

Observação 28. *A partir da Proposição 4.23, temos que o conjunto $|D_0|$ está em correspondência biunívoca com o conjunto $\Big(\Gamma(X,\mathcal{L}) - \{0\}\Big)/k^*$, dando a $|D_0|$ uma estrutura do conjunto dos pontos fechados de um espaço projetivo sobre k.*

Definição 4.25. *Um* ***sistema linear*** *ϱ em X é um subconjunto de um sistema linear completo $|D_0|$, o qual é um subespaço linear para a estrtutura de espaço projetivo de $|D_0|$. Portanto, ϱ corresponde a um subespaço vetorial $V \subseteq \Gamma(X,\mathcal{L})$, onde $V = \{s \in \Gamma(X,\mathcal{L}) : (s)_0 \in \varrho\} \cup \{0\}$. A* ***dimensão*** *do sistema linear ϱ é definida por $\mathtt{dim}\ \varrho := \mathtt{dim}\ V - 1$.*

Observação 29. *Note que as dimensões na Definição 4.25 são finitas, uma vez que $\Gamma(X,\mathcal{L})$ é um espaço vetorial de dimensão finita.*

Definição 4.26. *Um ponto $p \in X$ é um* ***ponto de base*** *de um sistema linear ϱ se $p \in \mathtt{Supp}\ D$, para todo $D \in \varrho$. Aqui, $\mathtt{Supp}\ D$ é a união dos divisores primos de D (Ver Definição 4.2).*

Lema 4.27. *Seja ϱ um sistema linear em X correspondente ao subespaço $V \subseteq \Gamma(X,\mathcal{L})$.*

Então, um ponto $p \in X$ é ponto de base de ϱ se, e somente se, $s_p \in \mathfrak{m}_p\mathcal{L}_p$, para todo $s \in V$. Em particular, ϱ é livre de pontos de base se, e somente se, $\mathcal{L}$ é gerado pelas seções globais em V.

Demonstração. Segue do fato de que, para qualquer $s \in \Gamma(X,\mathcal{L})$, o suporte do divisor de zeros $(s)_0$ é o complementar do conjunto aberto $X_s = \{q \in X : s_q \notin \mathfrak{m}_q\mathcal{L}_q\}$. $\square$

Observação 30. *Seguindo o abordado na Definição 4.26 e no Lema 4.27, dizemos que o* ***suporte de um feixe*** *$\mathcal{F}$ em X é o conjunto dos pontos $x \in X$ tais que $\mathcal{F}_x \neq 0$, isto é, $s_x \in \mathcal{F}_x$.*

Observação 31. *Podemos reescrever o Teorema 4.21 em termos de sistemas lineares:*

Fornecer um morfismo de X para $\mathbb{P}^n_k$ é equivalente a termos um sistema linear ϱ sem pontos de base em X e um conjunto de elementos $s_0, ..., s_n \in V$, os quais geram o espaço vetorial V.

Geralmente, nos referimos ao morfismo para o espaço projetivo determinado por um sistema linear sem pontos de base ϱ. Nesse caso, entende-se que $s_0, ..., s_n$ é escolhido como uma base de V. Note que, se escolhermos uma base diferente, o morfismo correspondente $X \longrightarrow \mathbb{P}^n$ difere-se apenas por um automorfismo de $\mathbb{P}^n$.

Exemplo 26. *Se $X = \mathbb{P}^n$, então o conjunto de todos os divisores efetivos de grau $d > 0$ é um sistema linear completo de dimensão $\binom{n+d}{n} - 1$. De fato, tal conjunto corresponde ao feixe invertível $\mathcal{O}(d)$, cujas seções globais consistem exatamente do espaço de todos os polinômios homogêneos em $x_0, ..., x_n$ de grau d. Isso é um espaço vetorial de dimensão $\binom{n+d}{n}$; logo, a dimensão do sistema linear completo é um a menos.*

4.7 FIBRADOS VETORIAIS

Por definição, qualquer variedade X possui uma cobertura finita $X = \bigcup U_i$, onde U_i são variedades afins. Segue disso que X possui dimensão finita.

Se X é irredutível, então todos os U_i são densos em X, com $\dim X = \dim U_i$. Além disso, são todos birracionais, uma vez que $U_i \cap U_j$ é aberto e denso tanto em U_i quanto em U_j. Portanto, os corpos de funções $k(U_i)$ são isomorfos. O corpo resultante é denominado o *corpo de funções (racionais)* de X, denotado por $k(X)$.

Um ponto fechado de uma variedade X que está contido em um conjunto aberto afim U é também um ponto fechado de U e é um ponto da variedade afim correspondente com coordenadas em k.

Proposição 4.28. *Pontos fechados são densos em todo subconjunto fechado de X.*

Demonstração. (19, p. 49-50) □

Como uma variedade é um esquema reduzido, um elemento $f \in \mathcal{O}_X(U)$ é unicamente determinado por seus valores $f(x) \in k(x)$, em todo $x \in U$. Pela *Proposição 4.28*, tal elemento é determinado por seus valores nos pontos fechados. Além disso, $k = k(x)$, então um elemento $f \in \mathcal{O}_X(U)$ pode ser interpretado como uma função de valores em k no conjunto dos pontos fechados de U.

Se $\varphi : X \longrightarrow Y$ é um morfismo de variedades, $x \in X$ e $y = \varphi(x)$, então o homomorfismo de anéis locais $\varphi^* : \mathcal{O}_y \longrightarrow \mathcal{O}_x$ induz uma inclusão de corpos residuais $k(y) \hookrightarrow k(x)$. Se x é um ponto fechado, então $k(x) = k$ e, portanto, $k(y) = k$ também, isto é, y também é um ponto fechado. Dessa forma, a imagem de um ponto fechado também é, mais uma vez, um ponto fechado. Nesse contexto, interpretando elementos $f \in \mathcal{O}_Y(U)$ como funções em pontos fechados, o homomorfismo $\psi_U : \mathcal{O}_Y(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X\big(\varphi^{-1}(U)\big)$ é determinado por $\psi_U(f)(x) = f\big(\varphi(x)\big)$. Em outras palavras, especificando o mapa $\varphi : X \longrightarrow Y$ ou mesmo sua restrição ao conjunto de pontos fechados, determinamos o morfismo em si.

A ideia de um *fibrado vetorial* é uma das mais importantes construções de variedades algébricas. A noção geral de *fibração* é, simplesmente, um morfismo de variedades $p : X \longrightarrow S$, isto é, uma variedade sobre S. Estamos interessados em fibrações cujas fibras são espaços vetoriais. É importante ter em mente que um espaço vetorial n-dimensional sobre um corpo k possui uma estrutura natural de variedade algébrica isomorfa a $\mathbb{A}^n$.

Definição 4.29. *Uma **família de espaços vetoriais** sobre X é uma fibração $p : E \longrightarrow X$ tal que cada fibra $E_x = p^{-1}(x)$, para $x \in X$, seja um espaço vetorial sobre $k(x)$ e tal que a estrutura de variedade algébrica de E_x como um espaço vetorial coincida com aquele de $E_x \subset E$ como a imagem inversa de x quanto a p.*

*Um **morfismo** de uma família de espaços vetoriais $p : E \longrightarrow X$ em uma outra família $q : F \longrightarrow X$ é um morfismo $f : E \longrightarrow F$ de forma que o diagrama*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & F \arrow[dl, "q"] \\ X & \end{tikzcd}$$

comuta (logo, em particular, f mapeia E_x para F_x, $\forall x \in X$) e o mapa $f_x : E_x \longrightarrow F_x$ é linear sobre $k(x)$.

*Se $p : E \longrightarrow X$ é uma família de espaços vetoriais e $U \subset X$ é qualquer conjunto aberto, a fibração $p^{-1}(U) \longrightarrow U$ é um família de espaços vetoriais sobre U. É denominada a **restrição** de E a U e denotada por $E_{|U}$.*

Exemplo 27. *O exemplo mais simples de uma família é o produto direto $E = X \times V$, onde V é um espaço vetorial sobre k e p é a primeira projeção de $X \times V \longrightarrow X$. Uma família desse tipo, ou isomorfo a ela, é dita **trivial**.*

Exemplo 28. *Sejam V e W dois espaços vetoriais de dimensão m e n, respectivamente. Determina-se a forma geral de um morfismo $f : X \times V \longrightarrow X \times W$ entre duas famílias triviais. Sejam $e_1, ..., e_m$ e $u_1, ..., u_n$ bases de V e W, respectivamente, e denote por $\xi_1, ..., \xi_m$ e $\eta_1, ..., \eta_n$ as coordenadas coorespondentes.*

As projeções $p : X \times V \longrightarrow V$ e $q : X \times W \longrightarrow W$ definem elementos $x_i = p^*(\xi_i) \in \mathcal{O}_{X\times V}(X \times V)$ e $y_j = q^*(\eta_i) \in \mathcal{O}_{X\times W}(X \times W)$. Pontos fechados $\alpha \in X \times V$ e $\beta \in X \times W$ são unicamente determinados pelos valores de $x_i(\alpha)$ e $y_j(\beta) \in k$. Portanto, o morfismo f é unicamente determinado especificando os elementos $f^*(y_j) \in \mathcal{O}_{X\times V}(X \times V)$.

A composição do isomorfismo $X \longrightarrow X \times e_i$ e da imersão $X \times e_i \longrightarrow X \times V$ define um morfismo $\varphi_i : X \longrightarrow X \times V$. Denote $a_{ij} := \varphi_i^*\big(f^*(y_j)\big) \in \mathcal{O}_X(X)$. Então,

$$f^*(y_j) = \sum a_{ij} x_i. \tag{4.1}$$

De fato, é suficiente observar a validade da igualdade para todos os pontos fechados $\alpha \in X \times V$ e isso segue da definição de morfismo de família de espaços vetoriais, pois $f_x : E_x \longrightarrow F_x$ é linear.

Reciprocamente, qualquer matriz (a_{ij}), com $a_{ij} \in \mathcal{O}_X(X)$ define um morfismo $f : X \times V \longrightarrow X \times W$ por meio da fórmula (4.1). Assim, temos um isomorfismo se, e somente se, $m = n$ e se o determinante $\det |a_{ij}|$ é um elemento invertível de $\mathcal{O}_X(X)$.

Definição 4.30. *Se $p : E \longrightarrow X$ é uma família de espaços vetoriais e $U \subset X$ é um conjunto aberto qualquer, a fibração $p^{-1}(U) \longrightarrow U$ é uma família de espaços vetoriais sobre U. Tal família é denominada a **restrição** de E e é denotada por $E\Big|_U$.*

Definição 4.31. *Uma família de espaços vetoriais $p : E \longrightarrow X$ é um **fibrado vetorial** se todo ponto $x \in X$ possui uma vizinhança U tal que a restrição $E\Big|_U$ seja trivial.*

Definição 4.32. *A dimensão de uma fibra E_x de um fibrado vetorial é uma função localmente constante em X. Nesse caso, o número* $\dim E_x$ *é denominado* ***posto*** *de E.*

Exemplo 29. *Seja V um espaço vetorial $(n+1)$-dimensional e seja $\mathbb{P}^n$ o espaço vetorial de retas $\ell \subset V$ passando pela origem* 0*. Denote por ℓ_x a reta correspondente ao ponto $x \in \mathbb{P}^n$. Considere o subconjunto $E \subset \mathbb{P}^n \times V$ de pares (x, v) tais que $x \in \mathbb{P}^n$ e $v \in V$ são pontos fechados, com $v \in \ell_x$. A projeção $\mathbb{P}^n \times V \longrightarrow \mathbb{P}^n$ define um morfismo $p : E \longrightarrow \mathbb{P}^n$. Provemos que $p : E \longrightarrow \mathbb{P}^n$ é um fibrado vetorial.*

Em V, introduzimos um sistema de coordenadas $(x_0, ..., x_n)$. A restrição de E a um conjunto aberto U_α dado por $x_\alpha \neq 0$ consiste dos pontos

$$\xi = (t_1, ..., t_n; y_0, ..., y_n) \text{ tal que } y_i = t_i y_\alpha,$$

onde $t_i = \dfrac{x_i}{x_\alpha}$ e o mapa $\xi \longmapsto \big((t_1, ..., t_n), y_\alpha\big)$ define um isomorfismo de $E\big|_{U_\alpha}$ com $U_\alpha \times k$.

Portanto, E é um fibrado vetorial de posto 1*.*

Considere um fibrado vetorial $p : E \longrightarrow X$ e um morfismo $f : X' \longrightarrow X$. O produto fibrado $E' = E \times_X X'$ sobre X possui um morfismo $p' : E' \longrightarrow X'$. Esse morfismo define um fibrado vetorial. De fato, se $E\big|_U \cong U \times V$, com $U \subset X$, então, escrevendo $U' = f^{-1}(U)$, temos $E'\big|_{U'} = E \times_U U' \cong U' \times V$. Esse fibrado vetorial é denotado por $f^*(E)$ e o posto de $f^*(E)$ e de E são iguais.

Definição 4.33. *O fibrado vetorial $f^*(E)$ descrito é denominado o* ***pullback*** *de E.*

Exemplo 30. *Sejam X uma variedade projetiva e $f : X \hookrightarrow \mathbb{P}^1$ uma imersão fechada para o espaço projetivo. Seja $p : E \longrightarrow \mathbb{P}^n$ o fibrado vetorial descrito no Exemplo 29. Então, $f^*(E)$ é um fibrado vetorial sobre X de posto* 1*. Tal fibrado depende, em geral, da imersão f e é um importante invariante de f.*

Exemplo 31 (Construção de Fibrados Vetoriais)**.** *Como um fibrado vetorial é localmente trivial, então pode ser obtido a partir da colagem de fibrados triviais sobre um número de conjuntos abertos. Isso resulta em um método eficiente de construir fibrados vetoriais:*

Seja $X = \bigcup U_\alpha$ uma cobertura tal que o fibrado $p : E \longrightarrow X$ seja trivial em cada U_α. Para cada U_α, fixe um isomorfismo

$$\varphi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times V.$$

Sobre a interseção $U_\alpha \cap U_\beta$, temos dois isomorfismos de $p^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ com $(U_\alpha \cap U_\beta) \times V$: $\varphi_\alpha\big|_{p^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)}$ e $\varphi_\beta\big|_{p^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)}$. Portanto, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ define um automorfismo do fibrado vetorial trivial $(U_\alpha \cap U_\beta) \times V$ sobre $U_\alpha \cap U_\beta$.

Agora, utilizando o Exemplo 28, escolhemos uma base de V e escrevemos o automorfismo $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ como uma matriz $n \times n$ $C_{\alpha\beta} = (a_{ij})_{\alpha\beta}$ com entradas no anel $\mathcal{O}_X(U_\alpha \cap U_\beta)$.

Essas matrizes satisfazem as condições de colagem:

$$\begin{aligned} C_{\alpha\alpha} &= \boldsymbol{id}, && e \\ C_{\alpha\gamma} &= C_{\alpha\beta}C_{\beta\gamma}, && em\ U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Reciprocamente, especificando matrizes $C_{\alpha\beta}$ com entadas em $\mathcal{O}_X(U_\alpha \cap U_\beta)$, define-se um fibrado vetorial, dado que $C_{\alpha\beta}$ satisfaça (4.2).

*As matrizes $C_{\alpha\beta}$ são denominadas **matrizes de transição** do fibrado vetorial.*

Exemplo 32. *Se $\mathcal{L}$ é o fibrado vetorial de posto 1 sobre $\mathbb{P}^n$ introduzido no Exemplo 29, os mapas φ_α são da forma $\varphi_\alpha(x, y) = (x, y_\alpha)$; então, a matriz de transição $C_{\alpha\beta}$ é uma matriz 1×1 $x_\beta x_\alpha^{-1}$.*

4.8 FIBRADOS VETORIAIS E FEIXES

Um fibrado vetorial é uma generalização de um espaço vetorial. Agora, introduzimos a ideia análoga a um ponto de um espaço vetorial:

Definição 4.34. *Uma **seção** de um fibrado vetorial $p : E \longrightarrow X$ é um morfismo $s : X \longrightarrow E$ tal que $p \circ s = 1$ em X.*

*Em particular, $s(x) = 0_x$ (o vetor nulo em E_x) é uma seção, denominada a **seção nula** de E.*

A notação para o conjunto das seções de um fibrado vetorial E é $\mathcal{L}(E)$.

Exemplo 33. *Uma seção f do fibrado trivial de posto 1 $X \times k$ é simplesmente um morfismo de X para $\mathbb{A}^1$, isto é, um elemento $f \in \mathcal{O}_X(X)$. Portanto, $\mathcal{L}(X \times k) = \mathcal{O}_X(X)$. Em particular, $\mathcal{L}(\mathbb{P}^n \times k) = k$; analogamente, $\mathcal{L}(\mathbb{P}^n \times V) = V$.*

Exemplo 34. *Considere o fibrado vetorial E do Exemplo 29. Toda seção $s : \mathbb{P}^n \longrightarrow E$ determina, em particular, uma seção $s : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n \times V$ e, portanto, é da forma $s(x) = (x, v)$, para algum $v \in V$ fixado. No entanto, como $s(x) \in E$, segue que $v \in \ell_x$, para todo $x \in \mathbb{P}^n$; logo, $v = 0$. Dessa forma, $\mathcal{L}(E) = 0$. Isso prova, em particular, que E não é um fibrado trivial.*

A partir da definição de fibrado vetorial (*Definição 4.31*), tem-se que, se s_1 e s_2 são seções em E, então existe uma seção $s_1 + s_2$ de forma que $(s_1 + s_2)(x) = s_1(x) + s_2(x)$, para qualquer ponto $x \in X$. A soma apresentada ao lado direito dessa igualdade é significativa, uma vez que $s_1(x)$ e $s_2(x)$ pertencem a E_x e, por sua vez, E_x é um espaço vetorial. Analogamente, a igualdade $(fs)(x) = f(x)s(x)$ determina uma multiplicação de uma seção s por um elemento $f \in \mathcal{O}_X(X)$.

Portanto, o conjunto $\mathcal{L}(E)$ é um módulo sobre o anel $\mathcal{O}_X(X)$. A qualquer conjunto aberto $U \subset X$, associamos o conjunto $\mathcal{L}(E, U)$ de seções do fibrado E restrito a U, obtendo, assim, um feixe. Denotamos esse feixe por $\mathcal{L}_E$. O feixe $\mathcal{L}_E$ correspondente a um fibrado vetorial é um feixe de módulos sobre o feixe estrutural $\mathcal{O}_X$.

Resgatando a *Definição 3.39*:

Definição 4.35. *O feixe de um fibrado trivial de posto n é determinado por $\mathcal{L}_E(U) = \mathcal{O}_X(U)^n$; isto é, $\mathcal{L}_E$ é a soma direta de n cópias de $\mathcal{O}_X$. Esse feixe é denominado* ***feixe livre*** *de posto n.*

Seja $\mathcal{F}$ um feixe de $\mathcal{O}_X$-módulos. Se todo ponto possui uma vizinhança U tal que $\mathcal{F}_{|U}$ é livre e de posto finito, então dizemos que $\mathcal{F}$ é um ***feixe localmente livre*** *de posto finito.*

Se $\mathcal{F}$ é um feixe localmente livre, então todo talo $\mathcal{F}_x$ é um $\mathcal{O}_x$-módulo livre. O feixe $\mathcal{L}_E$ correspondente a qualquer fibrado vetorial E é localmente livre de posto finito, uma vez que E é localmente isomorfo a um fibrado trivial.

Teorema 4.36. *A correspondência $E \longmapsto \mathcal{L}_E$ estabelece uma correspondência biunívoca entre fibrados vetoriais e feixes localmente livres de posto finito.*

Demonstração. Recapitulando, se X é uma variedade, um fibrado vetorial sobre X é uma variedade E, juntamente com um mapa $p : E \longrightarrow X$, tal que:

(i) Para cada $x \in X$, temos $p^{-1}(x) \cong \mathbb{A}^n$, para algum n;

(ii) Há uma cobertura U_i de X de forma que $p^{-1}(U_i) \cong U_i \times \mathbb{A}^n$.

Note que, se X for conexa, podemos utilizar o mesmo n em cada ponto e dizer que o fibrado vetorial possui posto n.

Se tomarmos um fibrado vetorial $p : E \longrightarrow X$, atribua a U uma coleção de morfismos $s : U \longrightarrow E$ tal que $p \circ s$ seja a identidade em U. Esse feixe será localmente trivial e os conjuntos abertos que usamos podem ser aqueles tais que $p^{-1}(U_i) \cong U_i \times \mathbb{A}^n$. Isso porque, nesses conjuntos, estamos trabalhando com funções $U_i \longrightarrow U_i \times \mathbb{A}^n$ as quais, compostas com a projeção, nos fornece a identidade. Isso é o mesmo que observar morfismos $U_i \longrightarrow \mathbb{A}^n = \mathbb{A}^1 \times \cdots \times \mathbb{A}^1$, uma lista de n funções regulares em U_i. Portanto, um fibrado vetorial define um feixe localmente livre.

Agora, considere um feixe localmente livre $\mathcal{F}$ de posto n. Tome uma cobertura por abertos de X de forma que $\mathcal{F}\Big|_{U_i}$ seja livre, para cada U_i. Podemos tomar tal cobertura sendo finita, uma vez que variedades são quasi-compactas. Considere a união disjunta de $U_i \times \mathbb{A}^n$, para todo i. Dessa forma, temos isomorfismos $\mathcal{F}\Big|_{U_i} \longrightarrow \mathcal{O}^n_{U_i}$ e $\mathcal{F}\Big|_{U_j} \longrightarrow \mathcal{O}^n_{U_j}$. Restringindo cada um desses isomorfismos a $U_i \cap U_j$, temos dois isomorfismos distintos $\mathcal{F}\Big|_{U_i \cap U_j} \longrightarrow \mathcal{O}^n_{U_i \cap U_j}$, denotados por g_i e g_j, respectivamente. Assim, $g_j g_i^{-1}$ é um automorfismo de $\mathcal{F}_{U_i\cap U_j}$. Pelos isomorfismos com $\mathcal{O}^n_{U_i\cap U_j}$, podemos identificar com uma matriz $n\times n$ de funções regulares em $U_i\cap U_j$.

Tomando $U_i\times\mathbb{A}^n$ e $U_j\times\mathbb{A}^n$ e identificando-os ao longo de $U_i\cap U_j$ através do mapa $(x,v)\in U_i\cap U_j\times\mathbb{A}^n\longmapsto\left(x,g_jg_i^{-1}(v)\right)$, podemos executar essa ideia para todos i,j e denotar este objeto por E, o qual possui um mapa $E\longrightarrow X$, eliminando a coordenada vetorial em qualquer ponto. Dessa forma, as fibras serão cópias de $\mathbb{A}^n$ e, por construção, para cada ponto há uma vizinhança onde o espaço é $U\times\mathbb{A}^n$. Agora, basta verificar que estamos tratando de uma variedade. Certamente, possui uma cobertura aberta por variedades afins, por construção, e, de fato, tal cobertura é finita. Por fim, note que $g_jg_i^{-1}\circ g_kg_j^{-1}\circ g_ig_k^{-1}$ é o mapa identidade. Logo, estabelecemos uma correspondência entre feixes localmente livres e fibrados vetoriais. $\square$

4.9 DIVISORES E FIBRADOS EM RETA

No que segue, não assume-se X não-singular e considere divisores localmente principais D. Correspondendo a cada divisor D em uma variedade irredutível X, temos um espaço vetorial $\mathcal{L}(D)$. Essa correspondência dá origem a um feixe em X: Note que o divisor D em X também define um divisor em qualquer aberto $U\subset X$, a partir da restrição a U das equações locais de D. Denotamos por D_U o divisor assim obtido e definimos $\mathcal{L}_D(U)=:\mathcal{L}(U,D_U)$, onde $\mathcal{L}(U,D_U)$ é o espaço vetorial correspondente ao divisor D_U em U. $\mathcal{L}_D(U)\subset k(X)$ e $\mathcal{L}_D(V)\subset\mathcal{L}_D(U)$ sempre que $U\subset V$; escreva $\rho_U^V:\mathcal{L}_D(V)\hookrightarrow\mathcal{L}_D(U)$para o mapa de inclusão. O sistema $\left\{\mathcal{L}_D(V),\rho_U^V\right\}$ é um feixe, denotado por $\mathcal{L}_D$.

Multiplicando elementos $f\in\mathcal{L}_D(U)$ por $h\in\mathcal{O}_X(U)$, temos que $\mathcal{L}_D$ é um feixe de $\mathcal{O}_X$-módulos. Tal feixe é localmente livre. De fato, se D é definido em um conjunto aberto U_α por uma equação local f_α, então os elementos $g\in\mathcal{L}_D(U_\alpha)$ são caracterizados pela condição $gf_\alpha\in\mathcal{O}_X(U_\alpha)$. Isso mostra que o mapa $g\longmapsto gf_\alpha$ define um isomorfismo

$$\varphi_\alpha:\mathcal{L}_D\Big|_{U_\alpha}\longrightarrow\mathcal{O}_X\Big|_{U_\alpha}. \tag{4.3}$$

Vimos que um feixe dessa forma determina um fibrado vetorial E_D; logo, de (4.3), segue que o posto de E_D é 1.

Definição 4.37. *Fibrados vetoriais de posto* 1 *são denominados* ***fibrados em reta****, uma vez que suas fibras são retas.*

Podemos escrever as funções de transição para E_D:

Como o isomorfismo sobre U_α em (4.3) é dado pela multiplicação por f_α, o automorfismo $\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}$ sobre $U_\alpha\cap U_\beta$ é dado pela multiplicação por $\dfrac{f_\beta}{f_\alpha}$. Note que $\dfrac{f_\beta}{f_\alpha}\in\mathcal{O}_X(U_\alpha\cap U_\beta)$. Analogamente, $\left(\dfrac{f_\beta}{f_\alpha}\right)^{-1}=\dfrac{f_\alpha}{f_\beta}\in\mathcal{O}_X(U_\alpha\cap U_\beta)$. Portanto, nesse caso, a matriz de transição é uma matriz 1×1 dada por

$$\varphi_{\alpha\beta} = \frac{f_\beta}{f_\alpha}.$$

Teorema 4.38. *O mapa $D \longmapsto \mathcal{L}_D \longrightarrow E_D$ define uma correspondência biunívoca entre*

1. *classes de equivalência linear de divisores;*

2. *classes de isomorfismo de feixes de $\mathcal{O}_X$-módulos localmente isomorfos a $\mathcal{O}_X$; e*

3. *classes de isomorfismo de fibrados vetoriais de posto* 1.

Demonstração. A correspondência entre os conjuntos *2.* e *3.* já foi estabelecida no *Teorema 4.36*. Portanto, resta provar que $D \longmapsto E_D$ define, de fato, uma correspondência um-a-um entre os conjuntos *1.* e *3.*. Para isso, construimos o mapa inverso:

Suponha que E seja um fibrado em reta definido em uma cobertura $X = \bigcup U_\alpha$ por matrizes de transição 1×1 $\varphi_{\alpha\beta}$, com $\varphi_{\alpha\beta}, \varphi_{\alpha\beta}^{-1} \in \mathcal{O}_X(U_\alpha \cap U_\beta)$. Sabemos que tais matrizes satisfazem as propriedades de colagem (4.2). Logo, $\varphi_{\beta\alpha} = \varphi_{\alpha\beta}^{-1}$ e

$$\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_{\gamma\alpha}^{-1}\varphi_{\gamma\beta}, \text{ sobre } U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma. \tag{4.4}$$

A inclusão $\mathcal{O}_X(U_\alpha \cap U_\beta) \hookrightarrow k(X)$ nos permite considerar $\varphi_{\alpha\beta}$ como elementos de $k(X)$ e (4.4) mantém-se válido da mesma maneira.

Fixe algum índice γ, por exemplo, $\gamma = 0$. Substituindo $\gamma = 0$ em (4.4), defina $f_\alpha := \varphi_{0\alpha}$. Então, o sistema de elementos f_α em U_α é compatível[1], pois

$$\frac{f_\beta}{f_\alpha} = \varphi_{\alpha\beta}. \tag{4.5}$$

Portanto, definem um certo divisor D. Comparando (4.9) e (4.5), temos que $E = E_D$. Portanto, construi-se, assim, um mapa bem-definido do conjunto *3.* para o conjunto *1.*, cujo inverso é dado por $D \longmapsto E_D$. $\square$

Exemplo 35. *Sejam $X = \mathbb{P}^n$ e D um hiperplano de $\mathbb{P}^n$. O fibrado em reta E_D correspondente a D, sob o Teorema 4.38, é denotado por $\mathcal{O}(1)$. Se D é dado por $x_0 = 0$, então, em um aberto U_α onde $x_\alpha \neq 0$, possui a equação local $\dfrac{x_0}{x_\alpha}$. Portanto, a matriz de transição para E_D é da forma $c_{\alpha\beta} = \dfrac{x_\alpha}{x_\beta}$.*

Encontremos as seções de $\mathcal{O}(1)$:

[1] Um sistema $\{f_i\}$ de funções correspondentes a conjuntos abertos U_i de uma cobertura $X = \bigcup U_i$ é **compatível** se f_i satisfaz: $\dfrac{f_i}{f_j}$ é regular em $U_i \cap U_j$ e é não-nula.

Em U_α, estas são da forma $s_\alpha = \dfrac{P_\alpha}{x_\alpha^t}$, onde P_α é uma forma de grau t; e elas se relacionam da seguinte forma: $s_\beta = c_{\alpha\beta} s_\alpha$. Segue que $t = 1$ e que $P_\alpha = P_\beta$ é uma forma de grau 1 em $\mathbb{P}^n$.

Analogamente, o divisor mD corresponde ao fibrado em reta denotado por $\mathcal{O}(m)$, com matriz de transição $c_{\alpha\beta} = \left(\dfrac{x_\alpha}{x_\beta}\right)^m$. As seções de $\mathcal{O}(m)$ são polinômios homogêneos de grau m. $\mathcal{O}(m) = \mathcal{O}(1)^{\otimes m}$ é a m-ésima potência tensorial de $\mathcal{O}(1)$. Para uma subvariedade $X \subset \mathbb{P}^n$, escrevemos $\mathcal{O}_X(m)$ para a restrição a X do fibrado em reta (ou feixe) $\mathcal{O}(m)$ em $\mathbb{P}^n$.

5 SISTEMAS LINEARES E PONTOS DE RAMIFICAÇÃO EM CURVAS NODAIS REDUTÍVEIS

Observação 32. *Sejam X um espaço topológico, $\mathcal{U}$ uma cobertura de X e $\mathcal{F}$ qualquer feixe de grupos abelianos em X. A partir deste ponto, teremos a notação $H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \Gamma(X, \mathcal{F})$. Portanto, define-se $H^0(X, \mathcal{F})$ como sendo o conjunto das seções globais de $\mathcal{F}$ sobre X, o que faz referência a $\mathcal{F}(X)$. Se X é uma variedade e $\mathcal{F}$ é um $\mathcal{O}_X$-módulo, então $H^0(X, \mathcal{F})$ possui a estrutura de um $\overline{k}$-espaço vetorial.*

Neste capítulo, utilizaremos, geralmente, o termo *curva* para se referir a um esquema integral de dimensão 1, próprio sobre k, cujos anéis locais são todos regulares. Tal curva é necessariamente projetiva. Caso queiramos considerar um tipo de curva mais geral, utilizaremos o termo *esquema*, apropriadamente qualificado, por exemplo, um esquema integral de dimensão 1 de tipo finito sobre k. O termo *ponto* refere-se a um ponto fechado, a menos que seja especificado o *ponto genérico.*

Iniciamos recapitulando brevemente alguns conceitos discutidos nos capítulos anteriores, para facilitar a leitura.

Um *divisor (de Weil)* em uma curva X é um elemento do grupo abeliano livre gerado pelo conjunto de pontos de X. Escrevemos um divisor da forma $D = \sum n_i p_i$, com $n_i \in \mathbb{Z}$. Seu *grau* é $\sum n_i$. Dois divisores são *linearmente equivalentes* se sua diferença é o divisor de uma função racional. Como X é não-singular, para todo divisor D temos um feixe invertível associado $\mathcal{L}(D)$ e a correspondência $D \longrightarrow \mathcal{L}(D)$ fornece um isomorfismo do grupo $\mathtt{Cl}(X)$ de divisores módulo equivalência linear com o grupo $\mathtt{Pic}\ X$ de feixes invertíveis módulo isomorfismo.

Um divisor $D = \sum n_i p_i$ em X é *efetivo* se todo $n_i \geq 0$. O conjunto de todos os divisores efetivos linearmente equivalentes a um dado divisor D é denominado um *sistema linear completo* e é denotado por $|D|$. Os elementos de $|D|$ estão em correspondência biunívoca com o espaço

$$\Big(H^0\Big(X, \mathcal{L}(D)\Big) - \{0\}\Big)/k^*,$$

então $|D|$ possui a estrutura do conjunto de pontos fechados de um espaço projetivo.

Lema 5.1. *Seja D um divisor em uma curva X. Então, se $\dim_k H^0\Big(X, \mathcal{L}(D)\Big) \neq 0$, deve-se ter $\deg D \geq 0$. Além disso, se $\dim_k H^0\Big(X, \mathcal{L}(D)\Big) \neq 0$ e $\deg D = 0$, deve-se ter $\mathcal{L}(D) \cong \mathcal{O}_X$.*

Demonstração. Se $\dim_k H^0\Big(X, \mathcal{L}(D)\Big) \neq 0$, então o sistema linear completo $|D|$ é não-vazio. Portanto, D é linearmente equivalente a algum divisor efetivo. Como o grau depende somente da classe de equivalência linear e o grau de um divisor efetivo é não-negativo, temos que $\deg D \geq 0$. Se $\deg D = 0$, então D é linearmente equivalente a um divisor efetivo de grau 0. No entanto, há somente um único divisor nesse caso, o divisor nulo. $\square$

Definição 5.2. *Seja X uma curva projetiva sobre um corpo k. Se $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_X(D)$ para algum divisor de Cartier D, então definimos* $\deg \mathcal{L} := \deg D$.

Denotamos por $\Omega_{X|k}$, ou simplesmente Ω_X, o feixe de diferenciais relativos de X sobre k. Como X tem dimensão 1, tal feixe é invertível em X e, logo, é igual ao feixe canônico ω_X em X. Qualquer divisor na classe de equivalência linear correspondente é denominado um *divisor canônico.*

Por fim, em Geometria Algébrica, uma **degeneração** (ou **especialização**) é o ato de tomar um limite de uma família de variedades. Isto é, dado um morfismo $f : X \longrightarrow C$ de uma variedade (ou um esquema) para uma curva (por exemplo, retas afins ou projetivas), as fibras $f^{-1}(x)$ formam uma família de variedades sobre C. Dessa forma, a fibra $f^{-1}(0)$ pode ser entendida como o limite de $f^{-1}(x)$ quando $x \longrightarrow 0$. Pode-se dizer, nesse caso, que a família $f^{-1}(x)$, $x \neq 0$, *degenera-se* à *fibra especial* $f^{-1}(0)$.

5.1 PONTOS DE RAMIFICAÇÃO DE SISTEMAS LINEARES: PARTE 1

Seja C uma curva projetiva complexa, conexa e não-singular. Sejam L um fibrado em reta em C e $V \subseteq \Gamma(C, L)$ um subespaço vetorial não-nulo. Sejam $d := \deg L$ e $r := \dim V - 1$.

Definição 5.3. *Seja $p \in C$. Dizemos que um inteiro ϵ é uma **ordem de anulamento** do sistema linear (V, L) em p se existe uma seção não-nula de L em V anulando-se em p com ordem ϵ.*

Seja $p \in C$ e considere o conjunto $\{\mathtt{ord}_p\sigma\}_{\sigma\neq 0\in V}$ das ordens de anulamento em p de todas as seções não-nulas $\sigma \in V$. Podemos encontrar uma base para V consistindo de seções que se anulam para ordens distintas em p: Comece com uma base qualquer. Se duas seções se anulam para uma mesma ordem, troque uma delas por uma combinação linear de duas que se anulem para uma ordem maior, e repita. Segue que a cardinalidade desse conjunto é exatamente $r + 1$, isto é, há exatamente $r + 1$ ordens de (V, L) em p.

Pondo-as em ordem de crescimento, temos a seguinte sequência:

$$\Big(\epsilon_0(p), ..., \epsilon_r(p)\Big), \text{ com } \epsilon_0(p) < \epsilon_1(p) < \cdots < \epsilon_r(p).$$

Definição 5.4. *Denominamos a sequência $\Big(\epsilon_0(p), ..., \epsilon_r(p)\Big)$ como **sequência de anulamento** de V em p.*

*A sequência associada $\Big(\alpha_0(p), ..., \alpha_r(p)\Big)$, com $\alpha_i(p) = \epsilon_i(p) - i$, é denominada a **sequência de ramificação** de V em p.*

*O sistema linear (V, L) é dito ser **não-ramificado** em p se $\alpha_i(p) = 0$, para todo i. Caso contrário, é dito ser **ramificado** em p.*

Definição 5.5. *Seja*

$$\omega_p := \sum_{i=0}^{r} \Big(\epsilon_i(p) - i\Big).$$

*Denominamos ω_p como sendo o **peso** (de ramificação) de (V, L) em p.*

*Se $\omega_p > 0$, dizemos que p é um **ponto de ramificação** de (V, L).*

Como C é suave, Ω_C é um fibrado em reta (Ver *Teorema 3.68*). Seja $U \subseteq C$ um subesquema aberto tal que Ω_U e $L\Big|_U$ sejam triviais. Sejam $\mu \in \Gamma(U, \Omega_C)$ e $\sigma \in \Gamma(U, L)$ seções gerando Ω_U e $L\Big|_U$.

Fixe uma base $\beta = (s_0, ..., s_r)$ de V. Então existem funções regulares $f_0, ..., f_r$ em U tais que $s_i\Big|_U = f_i\sigma$, para cada i. Seja ∂ a derivação $\mathbb{C}$-linear de $\Gamma(U, \mathcal{O}_C)$ tal que $dh = \partial(h)\mu$, para cada $h \in \Gamma(U, \mathcal{O}_C)$. Forme o determinante Wronskiano:

$$w(\beta, \sigma, \mu) := \begin{vmatrix} f_0 & \cdots & f_r \\ \partial f_0 & \cdots & \partial f_r \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial^r f_0 & \cdots & \partial^r f_r \end{vmatrix}.$$

Se σ' e μ' são outras bases de $L\Big|_U$ e Ω_U, então $\sigma' = a\sigma$ e $\mu' = b\mu$, para certas funções regulares não-nulas a e b em U. Então

$$w(\beta, \sigma', \mu') = \begin{vmatrix} af_0 & \cdots & af_r \\ b\partial(af_0) & \cdots & b\partial(af_r) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (b\partial)^r(af_0) & \cdots & (b\partial)^r(af_r) \end{vmatrix} = a^{r+1}b^{\binom{r+1}{2}}w(\beta, \sigma, \mu),$$

onde a primeira igualdade segue da definição e a segunda igualdade é consequência da multilinearidade do determinante e da regra do produto de derivadas.

Portanto, $w(\beta, \sigma, \mu)$ está associada a uma seção de

$$L^{\otimes r+1} \otimes (\Omega_C)^{\otimes \binom{r+1}{2}}.$$

Definição 5.6. *O esquema de zeros dessa seção de $L^{\otimes r+1} \otimes (\Omega_C)^{\otimes \binom{r+1}{2}}$ é denominado **divisor de ramificação** de (V, L).*

5.2 LIMITES DE SÉRIES LINEARES: MOTIVAÇÃO

Retomando o discutido na *Seção 4.6*, ao falar de **sistema linear** (ou **série linear**) em um esquema X, estamos falando sobre um par $(V, \mathcal{L})$, onde $\mathcal{L}$ é um fibrado em reta em X e $V \subset H^0(X, \mathcal{L})$ um espaço vetorial de seções.

Considere uma família projetiva plana $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow B$ sobre uma curva suave B. Fixe um parâmetro local t em um ponto $0 \in B$ e assuma que a fibra $X_t := \pi^{-1}(t)$ seja suave, para $t \neq 0$, e que a fibra especial X_0, podendo ser singular e/ou redutível, seja sempre redutível. Além disso, trabalharemos com famílias cujos espaços totais $\mathcal{X}$ sejam suaves.

Queremos desenvolver métodos para obter informações sobre o comportamento de séries lineares na fibra genérica X_t de tal família observando seus "limites" na fibra central X_0. É interessante escolher tal fibra central X_0 de forma que a informação sobre os limites seja fácil de obter e de trabalhar.

Algumas dificuldades podem ser contornadas se os fibrados em reta L_t em cada fibra X_t, para $t \neq 0$, forem restrições de um único fibrado em reta $\mathcal{L}$ em $\mathcal{X} \backslash X_0$. Nesse caso, como estamos assuminddo que o espaço total $\mathcal{X}$ é suave, $\mathcal{L}$ se estenderá a um fibrado em reta em todo o $\mathcal{X}$ e, logo, o limite quando $t \longrightarrow 0$ de L_t será um fibrado em reta. Para mais detalhes, ver (13, Capítulo 5, p. 240-253). O caminho mais natural a ser tomado pode ser tentar descrever os limites dos fibrados em reta e/ou das séries lineares em famílias nas quais o espaço total seja suave e a fibra central seja irredutível.

Dessa forma, queremos considerar aqui limites de séries lineares em uma família de curvas $\{X_t\}$ degenerando a uma curva redutível X_0, com a restrição que X_0 é de tipo compacto[1].

Iniciemos a reflexão com o caso mais simples: Fixe uma família parametrizada com um único parâmetro $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow B$ de curvas, com espaço total suave $\mathcal{X}$, fibras suaves X_t, para $t \neq 0$, e fibra central $X_0 = Y \cup Z$, união de duas curvas suaves que se encontram em um ponto singular p. B é tomado o menor suficiente para que se tenha um grupo de Picard trivial, por exemplo, o espectro de um anel de valorização discreta.

Em geral, uma família de fibrados em reta nas fibras suaves de tal família degenerada não precisa se estender a um fibrado em reta na fibra singular. Porém, o que parece ser a dificuldade nesse caso não é a ausência de uma extensão de um dado fibrado em reta $\tilde{\mathcal{L}}$ em $\tilde{\mathcal{X}} := \mathcal{X} \backslash X_0$ para $\mathcal{X}$, mas sim a presença de muitas, nenhuma capturando toda a geometria da série linear em X_t. Precisamente, se $\tilde{\mathcal{L}}$ é um fibrado em reta em $\tilde{\mathcal{X}}$, sempre existirá um fibrado em reta $\mathcal{L}$ em $\mathcal{X}$ estendendo $\tilde{\mathcal{L}}$; porém, se $\mathcal{L}$ é qualquer um desses fibrados, então $\mathcal{L}(Y) = \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(Y)$ também o é.

A fim de comparar $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}(Y)$, note que o fibrado em reta $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(Y)$ se restringe ao fibrado em reta $\mathcal{O}_Z(p)$ em Z. Por outro lado, $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(X_0)$ é trivial; logo, $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(Y) = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(-Z)$ e, consequentemente, $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(Y)$ deve se restringir a $\mathcal{O}_Y(-p)$ em Y. Portanto, se $\mathcal{L}$ possui grau α em Y e $d - \alpha$ em Z, o fibrado em reta $\mathcal{L}(Y)$ terá grau $\alpha - 1$ em Y e $d - \alpha + 1$ em Z. Em outras palavras, vemos que, para dado $\tilde{\mathcal{L}}$ em $\tilde{\mathcal{X}}$ de grau relativo d, existe, para todo $\alpha \in \mathbb{Z}$, uma única extensão $\mathcal{L}_\alpha$ de $\mathcal{L}$ a $\mathcal{X}$ com grau α em Y e $d - \alpha$ em Z.

[1] **Curvas do tipo compacto** são curvas nodais conexas cujas componentes irredutíveis são suaves e, duas a duas, não se intersectam em mais de um ponto.

Agora, generalizando um pouco, assuma somente que X_0 seja uma curva nodal[2] de tipo compacto e que Y e Z sejam componentes de X_0 encontrando-se em um ponto p. Por hipótese, $X_0 - \{p\}$ possui duas componentes conexas; seja E a união das componentes de X_0 que se encontram na componente conexa de $X_0 \backslash \{p\}$ contendo Y. Então, o fibrado em reta $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(E)$ terá restrições

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(E) \otimes \mathcal{O}_Z &= \mathcal{O}_Z(p), \\
\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(E) \otimes \mathcal{O}_Y &= \mathcal{O}_Y(-p), \\
\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(E) \otimes \mathcal{O}_W &= \mathcal{O}_W
\end{aligned}$$

para qualquer componente W de X_0 distinta de Y e Z.

Seja A_d o conjunto de funções de valor inteiro no conjunto de componentes irredutíveis de X_0 cujos valores somam d. Segue que: *Se $\tilde{\mathcal{L}}$ é qualquer fibrado em reta de grau relativo d em $\tilde{\mathcal{X}}$ e se α é qualquer elemento do conjunto A_d, então existe uma única extensão $\mathcal{L}_\alpha$ de $\tilde{\mathcal{L}}$ a X tal que*

$$\deg\left(\mathcal{L}_\alpha \otimes \mathcal{O}_Y\right) = \alpha(Y), \tag{5.1}$$

para toda componente Y de X_0. Além disso, se Y e Z são duas componentes de X_0 encontrando-se no ponto p e β é obtido a partir de α ao adicionar 1 *a $\alpha(Y)$ e subtraindo* 1 *de $\alpha(Z)$, então*

$$\mathcal{L}_\beta \otimes \mathcal{O}_Y = \mathcal{L}_\alpha \otimes \mathcal{O}_Y(p), \tag{5.2}$$

$$\mathcal{L}_\beta \otimes \mathcal{O}_Z = \mathcal{L}_\alpha \otimes \mathcal{O}_Z(-p). \tag{5.3}$$

Isso responde completamente à questão de quais dados obtemos no limite a partir de uma família de fibrados em reta de grau d na família de curvas X_t. Conseguimos uma coleção de fibrados em reta, indexada por A_d, satisfazendo as relações (5.1), (5.2) e (5.3).

Note que tal coleção de dados depende somente da curva X_0 e não da família X_t em particular degenerando-se a ela. Esse fenômeno é especial para fibras limitantes de tipo compacto; para uma família degenerando-se a uma curva nodal geral, o que constitui um limite de fibrados em reta dependerá da família.

Agora, chegamos à questão principal: Suponha que tenhamos não somente um fibrado em reta L_t em uma fibra genérica X_t da família, mas uma série linear $V_t \subset H^0(X_t, L_t)$; em outras palavras, temos dados um fibrado em reta $\tilde{\mathcal{L}}$ em $\tilde{\mathcal{X}}$ juntamente com um subfeixe localmente livre $\tilde{\mathcal{V}} \subset \pi_*(\tilde{\mathcal{L}})$ de posto $r+1$. A qual dado de X_0 podemos associar a tal família que providenciará informação sobre a geometria limitante da série linear V_t quando $t \to 0$?

[2] **Curvas nodais** são curvas projetivas, complexas e conexas cujas singularidades são *nós*, isto é, pontos duplos ordinários.

Uma resposta natural a essa pergunta seria observar todos os possíveis limites da família $\tilde{\mathcal{L}}$ de fibrados em reta e o sistema linear correspondente em cada caso. Para cada $\alpha \in A_d$, temos uma extensão $\mathcal{L}_\alpha$; o subfibrado $\tilde{\mathcal{V}} \subset \pi_*(\tilde{\mathcal{L}})$ irá se estender a um subfibrado $\mathcal{V}_\alpha \subset \pi_*(\mathcal{L}_\alpha)$; logo, a série linear V_t possui um limite $V_\alpha \subset H^0\big(X_0, \mathcal{L}_\alpha \otimes \mathcal{O}_{X_0}\big)$, isto é, a fibra do feixe $\mathcal{V}_\alpha$ sobre 0. Como conclusão, temos, mais uma vez, uma coleção de séries lineares limitantes V_α indexada por A_d.

O problema com essa abordagem é que tais dados são redundantes e difíceis de lidar. Felizmente, não é necessário observar todas essas séries lineares. Para a maior parte, é suficiente focar em um subconjunto menor do conjunto das séries lineares V_α. Para cada componente Y de X_0, denote por $\mathcal{L}_Y$ a única extensão de $\mathcal{L}$ a $\mathcal{X}$ com grau d em Y e grau 0 em todas as outras componentes de X_0; ainda, seja $V_Y := \lim\limits_{t\to 0}(V_t) \subset H^0\big(X_0, \mathcal{L}_Y \otimes \mathcal{O}_{X_0}\big)$. Tais extensões possuem a vantagem imediata (sobre aquelas dadas por α geral) que uma seção de $\mathcal{L}_Y$ que se anula em Y, anula-se em todo o X_0. Logo, temos a inclusão

$$V_Y \subset H^0\big(X_0, \mathcal{L}_Y \otimes \mathcal{O}_{X_0}\big) \subset H^0\big(Y, \mathcal{L}_Y \otimes \mathcal{O}_Y\big).$$

Portanto, podemos olhar V_Y como uma série linear na curva suave Y, ao invés de em todo X_0. (É comum se referir a V_Y como sendo o *aspecto limite* de $\tilde{\mathcal{V}}$ em Y). Em resumo: *Associada à série linear na fibra genérica X_t há uma coleção de aspectos limites V_Y que são séries lineares nas várias componentes Y de X_0.*

Nesse contexto, a noção de ramificação é central na teoria de limite de séries lineares. Dados um ponto suave p em uma curva nodal X e uma série linear limite $\mathcal{D}$ em X, definimos uma *sequência de ramificação* (ver *Definição 5.4*) de $\mathcal{D}$ em p como sendo a sequência de ramificação em p do aspecto de $\mathcal{D}$ na componente de X contendo p.

Em uma família de parâmetro único $\{X_t\}$ de curvas de tipo compacto com espaço total suave, uma série linear $\mathcal{D}_t$ na fibra genérica degenera-se a uma série linear limite $\mathcal{D}$ na fibra especial. Observamos, ainda, que um ponto suave da fibra especial X_0 será um ponto de ramificação para $\mathcal{D}$ se, e somente se, for o limite de pontos de ramificação de $\mathcal{D}_t$; além disso, o peso de ramificação (ver *Definição 5.5*) de $\mathcal{D}$ em p será a soma dos pesos de ramificação de $\mathcal{D}_t$ em pontos de X_t tendendo a p. Para mais detalhes, ver (13, Capítulo 5, p. 263-273).

5.3 DEGENERANDO SISTEMAS LINEARES

Seja S o espectro de um anel de valorização discreta R. Seja π um parâmetro de R. Denote por s (resp. η) o ponto especial (resp. genérico) de S. Seja $f : C \longrightarrow S$ um morfismo projetivo plano. Denote por $C(s)$ (resp. $C(\eta)$) a fibra especial (resp. genérica), isto é, a imagem inversa do ponto especial (resp. genérico) pelo morfismo f (Ver *Definição 3.22* e *Observação 13*).

Suponha que a fibra genérica $C(\eta)$ seja uma curva geometricamente integral e que a fibra especial $C(s)$ seja uma curva nodal reduzida[3]. Assuma que C seja um esquema regular. Denote por $C_1, ..., C_t$ as componentes irredutíveis de $C(s)$. Para cada C_i, tome $C_i^* := C \setminus \bigcup_{j \neq i} C_j$.

Como C é regular, então $C_1, ..., C_t$ são divisores de Cartier. Além disso, qualquer divisor de Cartier em C com suporte em $C(s)$ é uma combinação linear de $C_1, ..., C_t$. Note que $C_1 + \cdots + C_t$ é um divisor principal (ver *Definição 4.6*), isto é,

$$\mathcal{O}_C \cong \mathcal{O}_C(C_1 + \cdots + C_t).$$

Definição 5.7. *Para cada $i = 1, ..., t$, dizemos que um divisor de Cartier efetivo em C com suporte em $C(s)$ é C_i-**livre** se seu suporte não contém C_i.*

Como C é regular, para todo feixe invertível L_η em $C(\eta)$ existe um feixe invertível $\mathcal{L}$ em C tal que $\mathcal{L}(\eta) \simeq L_\eta$, onde $\mathcal{L}(\eta)$ denota a restrição de $\mathcal{L}$ a $C(\eta)$.

Definição 5.8. *Denominamos tal $\mathcal{L}$ descrito como uma **extensão de** L_η **a** C.*

Exemplo 36. *Por exemplo, se $L_\eta = \mathcal{O}_{C(\eta)}(D)$, onde D é um divisor de Cartier em $C(\eta)$, então $\overline{D}$ é um divisor de Cartier em C e $\mathcal{L} := \mathcal{O}_C(\overline{D})$ é uma extensão de L_η. Dada outra extensão $\mathcal{M}$ de L_η a C, temos que $(\mathcal{M} \otimes \mathcal{L}^{-1})(\eta) \cong \mathcal{O}_{C(\eta)}$. Segue que existem inteiros $n_1, ..., n_t$ tais que $\mathcal{M} \cong \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_C(n_1C_1 + \cdots + n_tC_t)$.*

Os feixes $\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_C(n_1C_1 + \cdots + n_tC_t)$ são todas as extensões de L_η a C.

Agora, fixe um feixe invertível L_η em $C(\eta)$ de grau d e um subespaço vetorial não-nulo $V_\eta \subseteq H^0\Big(C(\eta), L_\eta\Big)$ de seções de L_η de dimensão $r+1$.

Se $\mathcal{L}$ é uma extensão de L_η a C, temos o mapa de restrição

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L} & \longrightarrow & L_\eta \\ \sigma & \longmapsto & \sigma\Big|_{C(\eta)} \end{array}$$

que induz o mapa injetivo $H^0(C, \mathcal{L}) \longrightarrow H^0\Big(C(\eta), L_\eta\Big)$. Então tomamos

$$V_{\mathcal{L}} := V_\eta \cap H^0(C, \mathcal{L}),$$

onde a interseção é tomada dentro de $H^0\Big(C(\eta), L_\eta\Big)$. Como R é um anel de valorização discreta, $V_{\mathcal{L}}$ é um R-módulo livre de posto $r+1$, com

$$V_{\mathcal{L}}(\eta) = \Big(V_\eta \cap H^0(C, \mathcal{L})\Big) \otimes k(\eta) = V_\eta \cap H^0\Big(C(\eta), \mathcal{L}(\eta)\Big) = V_\eta.$$

[3] Uma **curva reduzida** é aquela cujas componentes irredutíveis possuem multiplicidade 1 (Ver *Definição 3.28*).

Além disso, o homomorfismo induzido

$$V_{\mathcal{L}} \otimes k \longrightarrow H^0(C, \mathcal{L}) \otimes k \longrightarrow H^0\Big(C(s), \mathcal{L}(s)\Big)$$

é injetivo, de fato:

Considere a inclusão $V_{\mathcal{L}} \subseteq H^0(C, \mathcal{L})$. Se $\sigma \in H^0(C, \mathcal{L})$ e $f \in R - \{0\}$ são tais que $f\sigma \in V_{\mathcal{L}}$, então $f\sigma \in V_\eta$. Como V_η é espaço vetorial sobre $k(\eta)$, temos que f é uma unidade e concluímos que $\sigma \in V_\eta$. Portanto, $\sigma \in V_{\mathcal{L}}$. Disso, obtemos a inclusão $V_{\mathcal{L}} \otimes k(s) \subset H^0(C, \mathcal{L}) \otimes k(s)$. Por outro lado, como s é o ponto especial de S e corresponde a um divisor principal, o mapa $H^0(C, \mathcal{L}) \longrightarrow H^0\Big(C(s), \mathcal{L}(s)\Big)$ tensorizado por $k(s)$ origina o mapa injetivo

$$H^0(C, \mathcal{L}) \otimes k(s) \longrightarrow H^0\Big(C(s), \mathcal{L}(s)\Big).$$

Obtemos o homomorfismo injetivo

$$V_{\mathcal{L}}(s) \longrightarrow H^0(C, \mathcal{L})(s) \longrightarrow H^0\Big(C(s), \mathcal{L}(s)\Big).$$

Em resumo, dada uma extensão $\mathcal{L}$ de L_η para C, o sistema linear (V_η, L_η) estende-se para o sistema linear $(V_{\mathcal{L}}, \mathcal{L})$ em C, cuja restrição $\Big(V_{\mathcal{L}}(s), \mathcal{L}(s)\Big)$ para $C(s)$ é um sistema linear, todos de mesmo posto.

Se $V_\eta = H^0\Big(C(\eta), L_\eta\Big)$, então $V_{\mathcal{L}} = H^0(C, \mathcal{L})$. Porém $V_{\mathcal{L}} \otimes k = H^0\Big(C(s), \mathcal{L}(s)\Big)$ somente se o mapa mudança de base $H^0(C, \mathcal{L}) \otimes k \longrightarrow H^0\Big(C(s), \mathcal{L}(s)\Big)$ for sobrejetor e, portanto, um isomorfismo.

Definição 5.9. *Dizemos que* $\Big(V_{\mathcal{L}}(s), \mathcal{L}(s)\Big)$ *é um* ***sistema linear limite****.*

Teorema 5.10. *Para toda componente irredutível* $C_i \subseteq C(s)$*, existe uma única extensão* $\mathcal{L}_i$ *de* L_η *para* C *com as seguintes propriedades:*

1. *O homomorfismo induzido canonicamente*

$$V_{\mathcal{L}_i}(s) \longrightarrow H^0\left(C_i, \mathcal{L}_i(s)\Big|_{C_i}\right)$$

   é injetivo;

2. *Se* $\mathcal{I}$ *é uma extensão de* L_η *para* C *tal que o homomorfismo induzido*

$$V_{\mathcal{I}}(s) \longrightarrow H^0\left(C_i, \mathcal{I}(s)\Big|_{C_i}\right)$$

   seja injetivo, então existe um divisor de Cartier efetivo e C_i*-livre* D *em* C *com suporte em* $C(s)$ *tal que* $\mathcal{I} \cong \mathcal{L}_i(D) \cong \mathcal{L}_i \otimes \mathcal{O}_C(D)$ *e tal que o homomorfismo induzido* $V_{\mathcal{L}_i} \hookrightarrow V_{\mathcal{I}}$ *seja um isomorfismo.*

Demonstração. (i) **Primeiro Passo:** *Provar a existência de uma extensão $\mathcal{I}$ de L_η a C de forma que o homomorfismo induzido*

$$V_{\mathcal{I}}(s) \longrightarrow H^0\left(C_i, \mathcal{I}(s)\Big|_{C_i}\right)$$

seja injetor.

Seja $\mathcal{J}$ uma extensão qualquer de L_η a C. Para qualquer sequência $n_1, ..., n_t \in \mathbb{Z}$, o feixe $\mathcal{I} := \mathcal{J} \otimes \mathcal{O}_C(n_1C_1 + \cdots + n_tC_t)$ também é uma extensão de L_η a C. É possível encontrar $n_1, ..., n_t$ tais que $\deg \mathcal{I}(s)\Big|_{C_j} < 0$, para todo $j \neq i$. Dessa forma,

$$V_{\mathcal{I}}(s) \subseteq H^0\Big(C(s), \mathcal{I}(s)\Big) \subseteq \bigoplus_{j=1}^{t} H^0\left(C_j, \mathcal{I}(s)\Big|_{C_j}\right) = H^0\left(C_i, \mathcal{I}(s)\Big|_{C_i}\right),$$

onde segunda inclusão é dada pelo mapa

$$\begin{array}{ccc} H^0\Big(C(s), \mathcal{I}(s)\Big) & \longrightarrow & H^0\left(C_1, \mathcal{I}(s)\Big|_{C_1}\right) \oplus \cdots \oplus H^0\left(C_t, \mathcal{I}(s)\Big|_{C_t}\right) \\ \sigma & \longmapsto & \left(\sigma\Big|_{C_1}, ..., \sigma\Big|_{C_t}\right) \end{array}$$

e a última igualdade segue do seguinte fato: como $\deg \mathcal{I}(s)\Big|_{C_j} < 0$ para todo $j \neq i$, então $H^0\left(C_j, \mathcal{I}(s)\Big|_{C_j}\right) = 0$, exceto no caso $i = j$.

(ii) **Segundo Passo:** *Suponha que $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ sejam extensões de L_η a C tais que os mapas*

$$V_{\mathcal{I}_m}(s) \longrightarrow H^0\left(C_i, \mathcal{I}_m(s)\Big|_{C_i}\right)$$

sejam injetivos para $m = 1, 2$. Queremos provar que existe uma extensão $\mathcal{N}$ de L_η a C tal que $\mathcal{I}_m \cong \mathcal{N}(D_m) = \mathcal{N} \otimes \mathcal{O}_C(D_m)$, onde D_m é um divisor de Cartier em C efetivo, com suporte em $C(s)$ e C_i-livre, tal que o homomorfismo induzido $V_{\mathcal{N}} \longrightarrow V_{\mathcal{I}_m}$ seja um isomorfismo para $m = 1, 2$.

De fato, como $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ são extensões de L_η a C, existe um divisor de Cartier $D = n_1C_1 + \cdots + n_tC_t$ em C, com suporte em $C(s)$, tal que $\mathcal{I}_1 \cong \mathcal{I}_2(D)$. Por outro lado, $\mathcal{O}_C \cong \mathcal{O}_C(C_1 + \cdots + C_t)$, isto é, $C_1 + \cdots + C_t$ é um divisor principal. Portanto, para todo $n \in \mathbb{Z}$, o divisor $D - n(C_1 + \cdots + C_t)$ é linearmente equivalente a D. Escolhendo um inteiro n conveniente, podemos supor que D é C_i-livre. Faça $D = D_1 - D_2$, onde D_1 e D_2 são divisores de Cartier em C disjuntos, efetivos, C_i-livres e com suporte em $C(s)$.

Agora, seja $\mathcal{M} := \mathcal{I}_2(D_1)$. Tal definição implica que $\mathcal{M} \cong \mathcal{I}_1(D_2)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &:= \mathcal{I}_2(D_1)\\
&= \mathcal{I}_2 \otimes \mathcal{O}_C(D_1)\\
&\cong \mathcal{I}_2 \otimes \mathcal{O}_C(D_1) \otimes \mathcal{O}_C(D_2) \otimes \mathcal{O}_C(-D_2)\\
&\cong \mathcal{I}_2 \otimes \mathcal{O}_C(D_1 - D_2) \otimes \mathcal{O}_C(D_2)\\
\text{(Utilizando o fato de } D = D_1 - D_2) &\cong \mathcal{I}_2 \otimes \mathcal{O}_C(D) \otimes \mathcal{O}_C(D_2)\\
&\cong \Big(\mathcal{I}_2(D)\Big)(D_2)\\
\text{(Utilizando o fato de } \mathcal{I}_1 \cong \mathcal{I}_2(D)) &\cong \mathcal{I}_1(D_2)
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_1(D_2)(s)\Big|_{C_i} &= \mathcal{I}_1(s)\Big|_{C_i}\left(D_2\Big|_{C_i}\right)\\
&\text{e}\\
\mathcal{I}_2(D_1)(s)\Big|_{C_i} &= \mathcal{I}_2(s)\Big|_{C_i}\left(D_1\Big|_{C_i}\right),
\end{aligned}$$

onde $D_m\Big|_{C_i}$, para $m = 1, 2$, é a restrição de D_m a C_i, o qual é um divisor de Cartier efetivo, pois D_m é C_i-livre.

As inclusões de feixes $\mathcal{I}_m(s)\Big|_{C_i} \hookrightarrow \mathcal{M}(s)\Big|_{C_i}$, para $m = 1, 2$, geram os mapas injetivos $H^0\left(C_i, \mathcal{I}_m(s)\Big|_{C_i}\right) \longrightarrow H^0\left(C_i, \mathcal{M}(s)\Big|_{C_i}\right)$, induzindo o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
V_{\mathcal{M}}(s) \arrow[r] & H^0\left(C_i, \mathcal{M}(s)\Big|_{C_i}\right) \\
V_{\mathcal{I}_m}(s) \arrow[r] \arrow[u] & H^0\left(C_i, \mathcal{I}_m(s)\Big|_{C_i}\right) \arrow[u]
\end{tikzcd},$$

onde o homomorfismo horizontal inferior é injetor por hipótese. Assim, temos que o homomorfismo vertical à esquerda também é injetivo.

Como $V_{\mathcal{M}}$ e $V_{\mathcal{I}_m}$ são R-módulos livres de mesmo posto (igual à dimensão de V_η), segue que $V_{\mathcal{M}} = V_{\mathcal{I}_m}$, para $m = 1, 2$.

Agora, tome $\mathcal{G} := \mathcal{I}_2(-D_2)$. Note que $\mathcal{G} \cong \mathcal{I}_1(-D_1)$. No diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G} \arrow[r, "+D_1"] \arrow[d, "+D_2"'] & \mathcal{I}_1 \arrow[d, "+D_2"] \\
\mathcal{I}_2 \arrow[r, "+D_1"'] & \mathcal{M}
\end{tikzcd}$$

todos os mapas são injetivos, o que também vale para o diagrama induzido

$$\begin{tikzcd}
H^0(C, \mathcal{G}) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(C, \mathcal{I}_1) \arrow[d] \\
H^0(C, \mathcal{I}_2) \arrow[r] & H^0(C, \mathcal{M})
\end{tikzcd}.$$

Como D_1 e D_2 são disjuntos, temos que

$$H^0(C,\mathcal{G}) = H^0(C,\mathcal{I}_1) \cap H^0(C,\mathcal{I}_2) \subset H^0(C,\mathcal{M}).$$

Portanto,

$$V_{\mathcal{I}_1} \cap V_{\mathcal{I}_2} = \Big(V_\eta \cap H^0(C,\mathcal{I}_1)\Big) \cap \Big(V_\eta \cap H^0(C,\mathcal{I}_2)\Big) = V_\eta \cap H^0(C,\mathcal{G}) = V_{\mathcal{G}} \subset V_{\mathcal{M}}$$

e $V_{\mathcal{G}} = V_{\mathcal{I}_m}$, para $m = 1, 2$. Faça $\mathcal{N} := \mathcal{G}$. Por fim, note que $\mathcal{N} \cong \mathcal{I}_m$ se, e somente se, $D_m = 0$.

(iii) **Terceiro Passo:** *Provar a existência de uma única extensão $\mathcal{L}_i$ de L_η a C de forma que, se $\mathcal{I}$ é outra extensão de L_η a C tal que o homomorfismo induzido*

$$V_{\mathcal{I}}(s) \longrightarrow H^0\left(C_i, \mathcal{I}(s)\Big|_{C_i}\right)$$

seja injetivo, então existe um divisor de Cartier efetivo D em C, com suporte em $C(s)$ e C_i-livre, tal que $\mathcal{I} \cong \mathcal{L}_i(D)$ e o mapa injetivo induzido $V_{\mathcal{L}_i} \longrightarrow V_{\mathcal{I}}$ é um isomorfismo.

Pelo *Primeiro Passo*, existe uma extensão $\mathcal{I}_1$ de L_η a C tal que o mapa $V_{\mathcal{I}_1} \longrightarrow H^0\left(C_i, \mathcal{I}_1(s)\Big|_{C_i}\right)$ é injetivo. Se $\mathcal{I}_1$ satisfaz o afirmado, então há nada mais a se fazer: basta tomar $\mathcal{L}_i := \mathcal{I}_1$. Caso contrário, existe uma extensão $\mathcal{I}$ de L_η a C de forma que o homomorfismo $V_{\mathcal{I}(s)} \longrightarrow H^0\left(C_i, \mathcal{I}(s)\Big|_{C_i}\right)$ é injetivo, porém não existe um divisor de Cartier efetivo D em C, com suporte em $C(s)$ e C_i-livre, tal que $\mathcal{I} \cong \mathcal{I}_1(D)$. Considerando os feixes $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}$, segue do *Segundo Passo* que existe uma extensão $\mathcal{I}_2$ de L_η a C e um divisor de Cartier efetivo D_1 em C, com suporte em $C(s)$ e C_i-livre, tal que $\mathcal{I}_2 \cong \mathcal{I}_1(-D_1)$ e $V_{\mathcal{I}_2} \longrightarrow V_{\mathcal{I}_1}$ é um isomorfismo. Note que o homomorfismo natural $V_{\mathcal{I}_2}(s) \longrightarrow H^0\left(C_i, \mathcal{I}_2(s)\Big|_{C_i}\right)$ é injetivo. Se $\mathcal{I}_2$ satisfaz o afirmado, basta tomar $\mathcal{L}_i := \mathcal{I}_2$. Caso contrário, podemos repetir o argumento acima, encontrando extensões $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, ..., \mathcal{I}_m$ de L_η e divisores de Cartier efetivos $D_1, D_2, ..., D_{m-1}$ em C, com suporte em $C(s)$ e C_i-livres, tais que $\mathcal{I}_j \cong \mathcal{I}_{j+1}(D_j)$ e $V_{\mathcal{I}_{j+1}} \longrightarrow V_{\mathcal{I}_j}$ é um isomorfismo, para todo $1 \leq j < m$.

Em particular, temos:

$$V_{\mathcal{I}_1} \cong V_{\mathcal{I}_m} \subseteq H^0\Big(C, \mathcal{I}_1(-D_1 - \cdots - D_{m-1})\Big).$$

Como $V_{\mathcal{I}_1}$ é não-nulo, tal processo não pode ocorrer indefinidamente, tendo que parar para algum valor de m. Portanto, existirá $m \geq 1$ tal que $\mathcal{L}_i := \mathcal{I}_m$ satisfazendo a afirmação.

□

Observação 33. *Se $\mathcal{I}$ é uma extensão de L_η a C de forma que $V_{\mathcal{I}}(s) \longrightarrow H^0\left(C_i, \mathcal{I}(s)\Big|_{C_i}\right)$ é injetivo, então, pelo Teorema 5.10, existe um divisor de Cartier efetivo D em C,* *com suporte em $C(s)$, tal que $\mathcal{I} \cong \mathcal{L}_i(D)$. Portanto, existe um mapa injetivo natural $\mathcal{L}_i \longrightarrow \mathcal{I}$. Dizemos que $\mathcal{L}_i$ é uma* ***extensão minimal*** *de L_η a C tal que o mapa $V_{\mathcal{L}_i}(s) \longrightarrow H^0\left(C_i, \mathcal{L}_i(s)\Big|_{C_i}\right)$ é injetivo.*

Definição 5.11. *Dizemos que $\mathcal{L}_i$ é a extensão de L_η* ***associada*** *a C_i (e ao subespaço-vetorial $V_\eta \subseteq H^0\big(C(\eta), L_\eta\big)$). Dizemos, ainda, que $\big(V_{\mathcal{L}_i}(s), \mathcal{L}_i(s)\big)$ é o* ***sistema linear limite associado*** *a C_i.*

Observação 34 (Feixe Canônico e Feixe Dualizante)**.** *Denote por ω_f o* ***feixe dualizante*** *relativo de $f : C \longrightarrow S$. ω_f é uma extensão invertível do feixe canônico da fibra genérica de f a C e sua restrição $\omega_f(s)$ à fibra especial é o feixe canônico desta fibra.*

Para cada $i \in \{1, ..., t\}$, ambos os feixes $\mathcal{L}_i$ e ω_f são extensões do feixe canônico da fibra genérica de f. Portanto, existem $n_1^i, ..., n_t^i \in \mathbb{Z}$ tais que $\mathcal{L}_i \cong \omega_f(n_1^i C_1 + \cdots + n_t^i C_t)$. Além disso, como $V_{\mathcal{L}_i}(s) \longrightarrow H^0(C_i, \mathcal{L}_i(s)|_{C_i})$ é injetivo, podemos supor $n_i^i = 0$. Desta forma, obtemos a unicidade dos inteiros $n_1^i, ..., n_t^i$.

Para mais detalhes, ver (14, III.7, p. 239-250).

Proposição 5.12. *Se $\mathcal{I}$ é uma extensão de L_η para C, então $\mathcal{I} \cong \mathcal{L}_i$ se, e somente se,*

1. *O homomorfismo induzido canonicamente*

$$V_{\mathcal{I}}(s) \longrightarrow H^0\left(C_i, \mathcal{I}(s)\Big|_{C_i}\right)$$

é injetivo;

2. *Para toda componente irredutível $C_j \subseteq C(s)$ com $j \neq i$, o homomorfismo induzido canonicamente*

$$V_{\mathcal{I}}(s) \longrightarrow H^0\left(C_j, \mathcal{I}(s)\Big|_{C_j}\right)$$

não é identicamente nulo.

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Suponha que $\mathcal{I} \cong \mathcal{L}_i$. Então, pelo *Teorema 5.10 (1.)*, o homomorfismo induzido

$$V_{\mathcal{L}_i}(s) \longrightarrow H^0\left(C_i, \mathcal{L}_i(s)\Big|_{C_i}\right)$$

é injetivo. Suponha, por contradição, que exista uma componente irredutível $C_j \subseteq C(s)$, com $j \neq i$, tal que o homomorfismo

$$V_{\mathcal{L}_i}(s) \longrightarrow H^0\left(C_j, \mathcal{L}_i(s)\Big|_{C_j}\right)$$

seja identicamente nulo. Segue que $V_{\mathcal{L}_i} = V_{\mathcal{L}_i(-C_j)}$, contradizendo a propriedade de minimalidade de $\mathcal{L}_i$. Portanto, $V_{\mathcal{L}_i}(s) \longrightarrow H^0(C_j, \mathcal{L}_i(s)|_{C_j})$ é não-nulo para cada j.

($\Longleftarrow$) Suponha que $\mathcal{I}$ seja um feixe tal que $V_{\mathcal{I}}(s) \longrightarrow H^0(C_i, \mathcal{I}(s)|_{C_i})$ é injetivo e, para cada componente irredutível $C_j \subseteq C(s)$ com $j \neq i$, o homomorfismo canônico induzido $V_{\mathcal{I}}(s) \longrightarrow H^0(C_j, \mathcal{I}(s)|_{C_j})$ não é identicamente nulo. A partir do *Teorema 5.10 (2.)*, temos a existência de um divisor de Cartier efetivo D em C, com suporte em $C(s)$ e C_i-livre, tal que $\mathcal{I} \cong \mathcal{L}_i(D)$ e tal que o homomorfismo induzido $V_{\mathcal{L}_i} \longrightarrow V_{\mathcal{I}}$ seja um isomorfismo. Segue que

$$V_{\mathcal{I}} \cong V_{\mathcal{L}_i} \subset H^0(C, \mathcal{L}_i) \cong H^0\Big(C, \mathcal{I}(-D)\Big).$$

Note, portanto, que cada seção de $V_{\mathcal{I}}(s)$ se anula em D. Como o homomorfismo

$$V_{\mathcal{I}}(s) \longrightarrow H^0\left(C_j, \mathcal{I}(s)\Big|_{C_j}\right)$$

não é identicamente nulo para todo $j \neq i$, e como D é C_i-livre, então $D = 0$. Logo, $\mathcal{I} \cong \mathcal{L}_i$. $\square$

Proposição 5.13. *Fixe i, j com $i \neq j$. Sejam l_{im}, para $m \in \{1, ..., t\} \backslash \{i\}$, os únicos inteiros tais que*

$$\mathcal{L}_i \cong \mathcal{L}_j \left(\sum_{m \neq i} l_{im} C_m \right).$$

Então, $0 \leq l_{im} \leq l_{ij}$, $\forall m$.

Demonstração. Sejam

$$\begin{aligned} E &:= \sum_{l_{im} \geq 0} l_{im} C_m \\ F &:= -\sum_{l_{im} < 0} l_{im} C_m. \end{aligned}$$

divisores de Cartier em C efetivos, com suporte em $C(s)$ e C_i-livres. Note que $\mathcal{L}_i \cong \mathcal{L}_j(E - F)$, onde E e F são disjuntos.

Sejam

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &:= \mathcal{L}_i(F) \\ \mathcal{G} &:= \mathcal{L}_i(-E). \end{aligned}$$

Note que $\mathcal{F} \cong \mathcal{L}_j(E)$ e $\mathcal{G} \cong \mathcal{L}_j(-F)$.

Como F é C_i-livre, da imersão $\mathcal{L}_i \hookrightarrow \mathcal{F}$, o mapa $V_{\mathcal{F}}(s) \longrightarrow H^0\left(C_i, \mathcal{F}(s)\Big|_{C_i}\right)$ é injetivo e, pelo *Teorema 5.10*, temos o isomorfismo $V_{\mathcal{L}_i} \cong V_{\mathcal{F}}$.

Como E e F são disjuntos, por procedimento análogo ao aplicado na demonstração do *Teorema 5.10 (Segundo Passo)*, temos que $V_{\mathcal{G}} = V_{\mathcal{L}_i} \cap V_{\mathcal{L}_j} \subset V_{\mathcal{F}}$. Portanto, $V_{\mathcal{G}} \cong V_{\mathcal{L}_j}$. Logo, o homomorfismo induzido

$$V_{\mathcal{L}_j}(s) \longrightarrow H^0\Big(C(s), \mathcal{L}_j(s)\Big)$$

fatora-se através do homomorfismo

$$H^0\Big(C(s), \mathcal{G}(s)\Big) \longrightarrow H^0\Big(C(s), \mathcal{L}_j(s)\Big)$$

induzido pela imersão $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{L}_j$, isto é,

$$\begin{tikzcd}
V_{\mathcal{L}_j}(s) \arrow[r] & H^0\Big(C(s), \mathcal{L}_j(s)\Big) \\
V_{\mathcal{G}}(s) = V_{\mathcal{L}_j(-F)}(s) \arrow[u, "\cong"] \arrow[r] & H^0\Big(C(s), \mathcal{L}_j(-F)(s)\Big) \arrow[u]
\end{tikzcd} .$$

Por hipótese, $V_{\mathcal{L}_j}(s) \longrightarrow H^0(C_j, \mathcal{L}_j(s)|_{C_j})$ é não-nulo para cada $j = 1, ..., t$ (*Proposição 5.12*). Concluímos que $F = 0$. Portanto, $l_{im} \geq 0$, para todo m.

Por outro lado, pela hipótese que $\mathcal{L}_i \cong \mathcal{L}_j \left(\sum_{m \neq i} l_{im} C_m\right)$, temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_j &\cong \mathcal{L}_i \left(-\sum_{m \neq i} l_{im} C_m\right) \\
&\cong \mathcal{L}_i \left(l_{ij} C_i - l_{ij}(C_1 + \cdots + C_t) + \sum_{m \neq i,j} (l_{ij} - l_{im}) C_m\right)
\end{aligned}$$

Como $\mathcal{O}_C \cong \mathcal{O}_C(C_1 + \cdots + C_t)$, note que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_j &\cong \mathcal{L}_i \left(l_{ij} C_i + \sum_{m \neq i,j} (l_{ij} - l_{im}) C_m\right) \otimes \mathcal{O}_C\Big(-l_{ij}(C_1 + \cdots + C_t)\Big) \\
&\cong \mathcal{L}_i \left(l_{ij} C_i + \sum_{m \neq i,j} (l_{ij} - l_{im}) C_m\right) \otimes \mathcal{O}_C\Big(-(C_1 + \cdots + C_t)\Big)^{\otimes l_{ij}} \\
&\cong \mathcal{L}_i \left(l_{ij} C_i + \sum_{m \neq i,j} (l_{ij} - l_{im}) C_m\right).
\end{aligned}$$

Aplicando o resultado obtido na primeira parte desta demonstração, temos que $l_{ij} - l_{im} \geq 0$, para todo $m \neq j$. Portanto, a prova está completa. □

Definição 5.14. *Dizemos que l_{ij} é o* ***número de conexão*** *de $\mathcal{L}_i$ e $\mathcal{L}_j$.*

Corolário 5.15. *Seja $\mathcal{I}$ uma extensão de L_η para C. Se o homomorfismo induzido canônicamente*

$$V_{\mathcal{I}}(s) \longrightarrow H^0\left(C_m, \mathcal{I}(s)\Big|_{C_m}\right)$$

é injetivo para $m = i, j$, então $\mathcal{L}_i \cong \mathcal{L}_j$.

Demonstração. Segue do *Teorema 5.10 (2.)* que existe um divisor de Cartier efetivo D_m em C, com suporte em $C(s)$ e C_m-livre, tal que $\mathcal{I} \cong \mathcal{L}_m(D_m)$, para cada $m = i, j$. Portanto, $\mathcal{I} \cong \mathcal{L}_i(D_i) \cong \mathcal{L}_j(D_j)$, ou seja

$$\mathcal{L}_i \cong \mathcal{L}_j(D_j - D_i).$$

Escreva

$$\begin{aligned} D_i &= \sum_{m\neq i} \alpha_m C_m, \\ D_j &= \sum_{m\neq j} \beta_m C_m. \end{aligned}$$

Dessa forma, temos

$$D_j - D_i = (\beta_1 - \alpha_1)C_1 + \cdots + \beta_i C_i + \cdots + (-\alpha_j)C_j + \cdots + (\beta_t - \alpha_t)C_t.$$

Como $\mathcal{O}_C \cong \mathcal{O}_C(C_1 + \cdots + C_t)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, $D_j - D_i - n(C_1 + \cdots + C_t)$ é linearmente equivalente a $D_j - D_i$. Tome $n = \beta_i$ de forma que $D_j - D_i$ seja C_i-livre:

$$D_j - D_i = \underbrace{(\beta_1 - \alpha_1 - \beta_i)}_{\gamma_1} C_1 + \cdots + \underbrace{(-\alpha_j - \beta_i)}_{\gamma_j} C_j + \cdots + \underbrace{(\beta_t - \alpha_t - \beta_i)}_{\gamma_t} C_t.$$

Como D_i e D_j são efetivos, $\alpha_j, \beta_i \geq 0$, donde $\gamma_j \leq 0$. Ainda, pela *Proposição 5.13*, $\gamma_j \geq \gamma_m \geq 0$, para $m \neq i$. Portanto, $\gamma_m = 0, \forall m \neq i$. Ou seja, $D_i = D_j$. $\square$

Proposição 5.16. *Sejam $C_i, C_j \subseteq C(s)$ duas componentes irredutíveis intersectando-se em $p \in C_i \cap C_j$. Para cada $m = i, j$, seja $\epsilon_0^m(p), ..., \epsilon_r^m(p)$ a sequência crescente de ordens de anulamento em p do sistema linear*

$$\left(V_{\mathcal{L}_m}(s), \mathcal{L}_m(s)\Big|_{C_m} \right).$$

Então,

$$\epsilon_h^i(p) + \epsilon_{r-h}^j(p) \geq l_{ij},$$

para todo $h = 0, ..., r$.

Demonstração. A prova é análoga à apresentada por Eisenbud e Harris em (3, Proposição 2.1, p. 348). $\square$

5.4 PONTOS DE RAMIFICAÇÃO DE SISTEMAS LINEARES: PARTE 2

Assuma, a partir de agora, que a característica do corpo residual $k(s)$ seja 0.

Seja ω o feixe canônico em C relativo a S. Se $\mathcal{L}$ é uma extensão de L_η a C, então podemos associar (ver *Seção 5.1*) à inclusão $V_{\mathcal{L}} \hookrightarrow H^0(C, \mathcal{L})$ uma seção

$$s_{\mathcal{L}} \in H^0 \left(C, \mathcal{L}^{\otimes r+1} \otimes \omega^{\otimes \binom{r+1}{2}} \right).$$

Definição 5.17. *$s_{\mathcal{L}}$ é denominada a **seção de ramificação do sistema linear** $(V_{\mathcal{L}}, \mathcal{L})$.*

Definição 5.18. *Seja $Z_{\mathcal{L}}$ o esquema de zeros de $s_{\mathcal{L}}$. O subesquema $Z_{\mathcal{L}} \subseteq C$ é denominado **subesquema de ramificação do sistema linear** $(V_{\mathcal{L}}, \mathcal{L})$ em C.*

A interseção $Z_\eta := Z_{\mathcal{L}} \cap C(\eta)$ é o subesquema de ramificação de (V_η, L_η). Portanto, $Z_{\mathcal{L}}$ não contém $C(\eta)$. Para todo $i = 1, ..., t$, seja $n_i^{\mathcal{L}}$ a multiplicidade de C_i em $Z_{\mathcal{L}}$. Note que $s_{\mathcal{L}}$ se fatora através de uma seção

$$s_{\mathcal{L}}^* \in H^0\left(C, \mathcal{L}^{\otimes r+1} \otimes \omega^{\otimes\binom{r+1}{2}} \otimes \mathcal{O}_C\Big(-n_1^{\mathcal{L}} C_1 - \cdots - n_t^{\mathcal{L}} C_t\Big)\right).$$

Além disso, o esquema de zeros Z de $s_{\mathcal{L}}^*$ é o único divisor de Cartier relativo em C sobre S tal que $Z_\eta = Z \cap C(\eta)$. Ainda,

$$Z_{\mathcal{L}} = Z + \sum_{i=1}^{t} n_i^{\mathcal{L}} C_i.$$

Em particular, se $V_{\mathcal{L}}(s) \subseteq H^0\left(C_i, \mathcal{L}(s)\Big|_{C_i}\right)$ para uma certa componente irredutível $C_i \subseteq C(s)$, então $Z \cap C_i^* = Z_{\mathcal{L}} \cap C_i^*$.

Agora, seja Z o divisor de Cartier relativo em C sobre S cuja fibra genérica $Z(\eta)$ é o subesquema de ramificação de (V_η, L_η). Denominamos $Z(s)$ o **divisor de ramificação limite**.

Para todo $q \in Z(s)$, seja ω_q o peso de q em $Z(s)$.

Teorema 5.19. *Para cada $i = 1, ..., t$, seja $Z_i \subseteq C_i$ o subesquema de ramificação de*

$$\left(V_{\mathcal{L}_i}(s), \mathcal{L}_i(s)\Big|_{C_i}\right).$$

Seja $q \in C(s)$. Para toda componente irredutível $C_i \subseteq C(s)$ contendo q, denotamos por ω_q^i o peso de q em Z_i. Então:

1. *Se $q \in C_i^*$, então $\omega_q = \omega_q^i$;*

2. *Se $q \in C_i \cap C_j$, para $i \neq j$, então*

$$\omega_q = \omega_q^i + \omega_q^j + (r - l_{ij})(r+1).$$

Demonstração. 1. Temos que $Z \cap C_i^* = Z_{\mathcal{L}_i} \cap C_i^*$. Por outro lado, $Z_{\mathcal{L}_i}(s) \cap C_i^* = Z_i \cap C_i^*$. Portanto, se $q \in C_i^*$, então $\omega_q = \omega_q^i$.

2. Agora, suponha que $q \in C_i \cap C_j$, para $i \neq j$. Para $m = i, j$, denote por ω_m o feixe dualizante em C_m (ver *Observação 34*). Temos uma imersão canônica $\omega_m \longrightarrow \omega(s)\Big|_{C_m}$ de feixes invertíveis cujo conúcleo possui comprimento 1 em q (ver *Observação 35*). Portanto,

$$\omega_q^m = a_m - \binom{r+1}{2}, \tag{5.4}$$

onde a_m é a ordem de anulamento em q da restrição de $s_{\mathcal{L}_m}$ a C_m, para $m = i, j$. Para cada $m = i, j$, seja b_m a ordem de anulamento em q da restrição $s_{\mathcal{L}_m}^*$ a C_m. Como Z é igual ao esquema zero de $s_{\mathcal{L}_m}^*$, para $m = i, j$, então $s_{\mathcal{L}_i}^* = s_{\mathcal{L}_j}^*$ e

$$\omega_q = b_i + b_j. \tag{5.5}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} b_i &= a_i - n_j^{\mathcal{L}_i}, \\ b_j &= a_j - n_i^{\mathcal{L}_j}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Ainda, como $s^*_{\mathcal{L}_i} = s^*_{\mathcal{L}_j}$, então

$$\mathcal{L}_i^{\otimes r+1} \cong \mathcal{L}_j^{\otimes r+1} \otimes \mathcal{O}_C \left(\sum_{h=1}^{t} \left(n_h^{\mathcal{L}_i} - n_h^{\mathcal{L}_j} \right) C_h \right), \tag{5.7}$$

donde

$$\mathcal{L}_i^{\otimes r+1} \cong \mathcal{L}_j^{\otimes r+1} \otimes \mathcal{O}_C \left(\sum_{h=1}^{t} \left(n_h^{\mathcal{L}_i} - n_h^{\mathcal{L}_j} \right) C_h \right) \otimes \underbrace{\mathcal{O}_C \left(\left(n_j^{\mathcal{L}_j} + n_i^{\mathcal{L}_j} \right) (C_1 + \cdots + C_t) \right)}_{\cong \mathcal{O}_C} \tag{5.8}$$

Por outro lado,

$$\mathcal{L}_i^{\otimes r+1} \cong \mathcal{L}_j^{\otimes r+1} \Big((r+1) l_{ij} C_j + (r+1) E_{ij} \Big), \tag{5.9}$$

onde E_{ij} é um divisor de Cartier efetivo C_i-livre e C_j-livre com suporte em $C(s)$. Combinando (5.8) e (5.9) e lembrando que $n_i^{\mathcal{L}_i} = n_j^{\mathcal{L}_j} = 0$, temos

$$n_j^{\mathcal{L}_i} + n_i^{\mathcal{L}_j} = (r+1) l_{ij}. \tag{5.10}$$

De (5.6), temos que

$$n_j^{\mathcal{L}_i} + n_i^{\mathcal{L}_j} = a_i + a_j - b_i - b_j,$$

e combinando com (5.10), segue que

$$a_i + a_j - b_i b_j = (r+1) l_{ij}.$$

Retomando (5.5), encontramos

$$a_i + a_j - \omega_q = (r+1) l_{ij}$$

e, por fim, utilizando o resultado (5.4), concluímos que

$$\omega_q^i + \omega_q^j + 2\binom{r+1}{2} - \omega_q = (r+1) l_{ij}$$

$$\omega_q = \omega_q^i + \omega_q^j + (r - l_{ij})(r+1).$$

□

Observação 35. *Seja $Y \subseteq X$, com codimensão de Y sendo 1. Considere $-Y$ como um divisor de Cartier de X. Pela Proposição 4.20, existe a seguinte sequência exata:*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(Y) \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_{-Y} \longrightarrow 0\,, \tag{5.11}$$

onde $\mathcal{O}_X(Y) \cong \mathcal{L}(Y)$, o feixe de ideais de $-Y$ em X.

Pela Proposição 3.79, no caso $r = 1$, temos que $\omega_Y \cong \omega_X \otimes \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_Y$, onde $\mathcal{L}^{-1}$ é o feixe de ideais de Y, ou seja, $\mathcal{L}$ é o feixe de ideais de $-Y$. Tensorizando (5.11) por $\omega_X \otimes \mathcal{O}_Y$, temos:

$$0 \longrightarrow \underbrace{\omega_X \otimes \mathcal{O}_Y \otimes \mathcal{L}}_{\omega_Y} \longrightarrow \omega_X \otimes \mathcal{O}_Y \ .$$

Logo,

$$0 \longrightarrow \omega_Y \longrightarrow \underbrace{\omega_X \otimes \mathcal{O}_Y}_{\omega_X\big|_Y} .$$

Agora, basta tomar $X = C$ e $Y = C_m$, como no Teorema 5.19.

Corolário 5.20. *Sejam $C_i, C_j \subseteq C(s)$ componentes irredutíveis que se intersectam em um certo $q \in C_i \cap C_j$. Para $m = i, j$, seja $\epsilon_0^m(q), ..., \epsilon_r^m(q)$ a sequência crescente de ordens de anulamento em q do sistema linear*

$$\left(V_{\mathcal{L}_m}(s), \mathcal{L}_m(s)\Big|_{C_m}\right).$$

Então, $q \notin Z$ se, e somente se,

$$\epsilon_h^i(q) + \epsilon_{r-h}^j(q) = l_{ij},$$

$\forall\ h = 0, ..., r$.

Demonstração. Segue do *Teorema 5.19 (2.)* que: $q \notin Z$ se, e somente se, $\omega_q = 0$, isto é,

$$\begin{aligned} 0 &= \omega_q \\ 0 &= \omega_q^i + \omega_q^j + (r - l_{ij})(r+1) \\ \omega_q^i + \omega_q^j &= (l_{ij} - r)(r+1). \end{aligned}$$

Por outro lado, como

$$\omega_q^m = \sum_{h=0}^{r} \left(\epsilon_h^m(q) - h\right)$$

para $m = i, j$, então

$$\begin{aligned} \omega_q^i + \omega_q^j &= \sum_{h=0}^{r} \left(\epsilon_h^i(q) - h\right) + \sum_{h=0}^{r} \left(\epsilon_h^j(q) - h\right) \\ &= \sum_{h=0}^{r} \epsilon_h^i(q) + \sum_{h=0}^{r} \epsilon_h^j(q) - 2\sum_{h=0}^{r} h \\ &= \sum_{h=0}^{r} \left(\epsilon_h^i(q) + \epsilon_{r-h}^j(q)\right) - r(r+1). \end{aligned}$$

Pelas contas feitas até aqui, temos que

$$\omega_q^i + \omega_q^j = (l_{ij} - r)(r+1) = \sum_{h=0}^{r} \left(\epsilon_h^i(q) + \epsilon_{r-h}^j(q)\right) - r(r+1).$$

Portanto, segue que

$$\omega_q^i + \omega_q^j = (l_{ij} - r)(r+1)$$

se, e somente se,

$$\epsilon_h^i(q) + \epsilon_{r-h}^j(q) = l_{ij},$$

para todo $h = 0, ..., r$. $\square$

5.4.1 Exemplo: Curvas Planas

Seja $E \subset \mathbb{P}^2$ uma curva plana de grau d consistindo de uma curva nodal irredutível Q de grau $d-1$ e uma de suas secantes gerais M. Sejam $p_1, p_2, ..., p_{d-1}$ os pontos de Q intersectados por M.

Existem algumas maneiras de observarmos E como um limite de curvas planas suaves. Em geral, seja $G(t) \in \mathbb{C}[x, y, z, t]$ um polinômio nas variáveis x, y, z, t homogêneo de grau d em x, y, z. Seja $C \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{A}^1$ o esquema de zeros de G. Assuma que C seja regular e plana sobre $\mathbb{A}^1$ em uma vizinhança da fibra $C(0)$; assuma que a fibra $C(\lambda)$ seja suave para uma especialização geral $\lambda \in \mathbb{A}^1$; e, por fim, assuma que $G(0) = F$.

Estamos interessados em calcular o limite dos conjuntos de pontos de inflexão nas curvas $C(\lambda)$ quando $\lambda \longrightarrow 0$, uma vez que os pontos de inflexão de $C(\lambda)$ são os pontos de ramificação do sistema linear dos hiperplanos de $\mathbb{P}^2$ restritos a $C(\lambda)$. A restrição $\left|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)\big|_E\right|$ do sistema linear completo de hiperlanos em $\mathbb{P}^2$ é um sistema linear limite. Além disso, da caracterização dada na *Proposição 5.12*, segue que $\left|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)\big|_E\right|$ é o sistema linear limite associado à componente Q de E. Esse sistema linear tem grau $d-1$ em Q e grau 1 na secante M. Como Q possui grau $d-1$, então o divisor dos pontos de inflexão Z_Q associado a Q tem grau $3(d-1)(d-3)$.[4] Para termos o sistema linear limite associado a M, torcemos $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)\big|_E$ por $\mathcal{O}_C(-M)\big|_E$. Note que torcer ainda mais não é possível, já que obteríamos um feixe invertível com grau negativo em Q. Portanto, o sistema linear limite (V, L) em E associado a M possui graus $\deg_Q L = 0$ e $\deg_M L = d$. Restringindo (V, L) a M, obtemos um sistema linear de grau d e posto 2, produzindo um divisor de ramificação Z_M de grau $3(d-2)$. Como o número de conexão de Q e M[5] é 1, segue do *Teorema 5.19* (utilizando $r = 2$ e $l_{ij} = 1$) que temos uma contribuição extra de peso de 3 em cada um dos pontos $p_1, p_2, ..., p_{d-1}$. Como resultado temos que o limite dos divisores de ramificação nas curvas planas suaves degenerando a E é

$$Z = 3p_1 + 3p_2 + \cdots + 3p_{d-1} + Z_Q + Z_M.$$

---

[4] As *Fórmulas de Plücker* nos dizem que, para uma curva irredutível de grau $n \geq 2$ cujas únicas singularidades são δ nós e χ cúspides, temos a relação $3n(n-2) = i + 6\delta + 8\chi$, onde i é o número de retas inflexionais. Com isso, para calcularmos os graus dos divisores, basta observamos que, na fibra genérica, não há singularidades ($\delta = \chi = 0$). Para mais informações sobre o resultado de Plücker, veja (10, p. 89).

[5] Note que a diferença entre o feixe sobre Q, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)\big|_E$, e sobre M, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)\big|_E \otimes \mathcal{O}_C(-M)$, é o próprio grau de $\mathcal{O}_C(-M)$, isto é, -1.

Podemos notar, no entanto, que Z_M depende da degeneração particular a E. Aqui, utilizaremos as notações de (7, Exemplo 5.3, p. 1727-1728). Por exemplo, tome $G := y^2 + x^2 - z^2$. Para cada par $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{A}^2$, sejam $F_1 := c_1y^3 + c_2y^2z$ e

$$F = xG - F_1t = x(y^2 + x^2 - z^2) + t(c_1y^3 + c_2y^2z).$$

Portanto, nossa degeneração depende do parâmetro c. Calculando o divisor de ramificação limite Z_c em E, temos[6]

$$Z_c = 3p_1 + 3p_2 + (0 : y_1 : z_1) + (0 : y_2 : z_2) + (0 : y_3 : z_3),$$

onde $(y_i : z_i)$, para $i = 1, 2, 3$, são os zeros do polinômio[7]

$$H := c_1y^3 + 3c_2y^2z + 3c_1yz^2 + c_2z^3.$$

[6] Fazendo a analogia com o discutido anteriormente, temos $M = x$, $Q = y^2 + x^2 - z^2$ e p_1, p_2 sendo os pontos de interseção de Q com M.

[7] H é obtido a partir do cálculo do determinante "hessiano"h em (7, Exemplo 5.3), com $f' = F_1(0, y, z) = c_1y^3 + c_2y^2z$, $g' = gy$ e $g'' = gz$, onde $g = G(0, y, z) = y^2 - z^2$.

6 CONCLUSÃO

A fim de entender como o resultado obtido (*Teorema 5.19*) se encaixa na literatura, precisamos observar que, nas últimas três décadas, diversos artigos e trabalhos em limites de sistemas lineares e limites de pontos de Weierstrass surgiram. Como dito na *Introdução*, a técnica sobre séries lineares limite foi introduzida por Eisenbud e Harris na década de 1980, rendendo notáveis resultados.

Neste trabalho, seguimos os passos de E. Esteves em seus estudos no assunto. Abordando o problema levantado, *Quais são os limites dos pontos de Weierstrass em famílias de curvas degenerando para curvas estáveis não do tipo compacto?*, conseguimos apresentar uma resposta geral, satisfatória a essa questão. Para isso, construímos a argumentação teórica baseada em Feixes, Esquemas e Divisores, com interesse em debatermos um pouco sobre a teoria básica de pontos de ramificação de sistemas lineares em curvas suaves, culminando na apresentação da fórmula para calcular os limites dos pontos de ramificação de sistemas lineares ao longo de uma família de curvas degenerando à uma curva nodal.

REFERÊNCIAS

1 ABREU, Alex. **Wronskian Classes in the Moduli Space of Curves**. Orientador: Eduardo Esteves. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 2010.

2 ATIYAH, Michael F.; MACDONALD, Ian G. **Introduction to Commutative Algebra**.: Addison-Wesley Publishing Company, 1969.

3 EISENBUD, David; HARRIS, Joe. **Limit Linear Series: Basic Theory**. Inventiones Mathematicae, v. 85, p. 337-371, 1986.

4 EISENBUD, David; HARRIS, Joe. **Existence, Decomposition, and Limits of certain Weierstrass Points**. Inventiones Mathematicae, v. 87, p. 495-515, 1987.

5 ESTEVES, Eduardo. **Limit Linear Systems and Ramification Points on Reducible Nodal Curves**. Matemática Contemporânea, v. 16, p. 1-18, 1996.

6 ESTEVES, Eduardo. **Limit Linear Series: An Introduction**. Registro de palestras do Mathematical Analysis Research Institute, Universidade de Kyoto, v. 1490, p. 84-108, 2016.

7 ESTEVES, Eduardo. **Limits of Cartier Divisors**. Journal of Pure and Applied Algebra, n. 214, p. 1718-1728, 2010.

8 ESTEVES, Eduardo; MEDEIROS, Nivaldo. **Limit canonical systems on curves with two components**. Inventiones Mathematicae, v. 149, p. 267-338, 2002.

9 ESTEVES, Eduardo; MEDEIROS, Nivaldo. **Limits of Weierstrass points in regular smoothings of curves with two components**. C. R. Acad. Sci. Paris, t. 330, Série I, p. 873-878, 2000.

10 FISCHER, Gerd. **Plane Algebraic Curves**. Student Mathematical Library, v. 15.: American Mathematical Society (AMS), 2001.

11 GROTHENDIECK, Alexander. **Éléments de Géométrie Algébrique: I. Le Langage des Schémas**. Publications Mathématiques de l'I.H.É.S., v. 4, p. 5-228, 1960.

12 HALMOS, Paul R.. **Naive Set Theory**. Undergraduate Texts in Mathematics.: Springer, 1974.

13 HARRIS, Joe; MORRISON, Ian. **Moduli of Curves**: Graduate Texts in Mathematics: 187.: Springer-Verlag, 1998.

14 HARTSHORNE, Robin. **Algebraic Geometry**: Graduate Texts in Mathematics: 52. 8. ed. rev.: Springer-Verlag, 1997.

15 MATSUMURA, Hideyuki. **Commutative Algebra**. Mathematics Lecture Notes Series, v. 56. 2. ed.: The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., 1980.

16 PENNA, Fábio Xavier. **A Variedade de Sistemas Canônicos Limites para Curvas Nodais com Três Componentes Irredutíveis**. Orientador: Eduardo Esteves. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2012.

17 SALEHYAN, Parham. **Limit Weierstrass Points on Nodal Curves**. Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2003.

18 SHAFAREVICH, Igor R. **Basic Algebraic Geometry 1**: Varieties in Projective Space. 3. ed. rev.: Springer-Verlag, 2013.

19 SHAFAREVICH, Igor R. **Basic Algebraic Geometry 2**: Schemes and Complex Manifolds. 3. ed. rev.: Springer-Verlag, 2013.

20 ZARISKI, Oscar; SAMUEL, Pierre. **Commutative Algebra: Volume I**: Graduate Texts in Mathematics: 28.: Springer, 1958.

21 ZARISKI, Oscar; SAMUEL, Pierre. **Commutative Algebra: Volume II**: Graduate Texts in Mathematics: 29.: Springer, 1960.