

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Michel Yukiti Okuma

Curvas Algebróides Planas Irredutíveis com Semigrupo $\langle 6, 9, 19 \rangle$

Juiz de Fora

2022

Michel Yukiti Okuma

Curvas Algebróides Planas Irredutíveis com Semigrupo $\langle 6, 9, 19 \rangle$

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Álgebra

Orientadora: Profa. Dra. Flaviana Andréa Ribeiro

Coorientadora: Profa. Dra. Joana Darc Antonia Santos da Cruz

Juiz de Fora

2022

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Okuma, Michel Yukiti.

Curvas Algebróides Planas Irredutíveis com Semigrupo $\langle 6, 9, 19 \rangle$ / Michel Yukiti Okuma. – 2022.

98 f. : il.

Orientadora: Flaviana Andréa Ribeiro

Coorientadora: Joana Darc Antonia Santos da Cruz

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-graduação em Matemática, 2022.

1. Curvas Algebróides. 2. Parametrização de Puiseux. 3. Semigrupo de Valores. I. Ribeiro, Flaviana A., orient. II. Cruz, Joana, D. A. S., coorient. III. Título.

Michel Yukiti Okuma

Curvas Algebróides Planas Irredutíveis com Semigrupo $\langle 6, 9, 19 \rangle$

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Álgebra

Aprovada em 08 de março de 2022.

BANCA EXAMINADORA

Prof^a. Dr^a Flaviana Andréa Ribeiro - Orientadora

Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof^a. Dr^a Joana Darc Antonia Santos da Cruz - Coorientadora

Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Marcelo Escudeiro Hernandes

Universidade Estadual de Maringá

Prof. Dr. Frederico Sercio Feitosa

Universidade Federal de Juiz de Fora

Juiz de Fora, 08/03/2022.

Documento assinado eletronicamente por **Flaviana Andrea Ribeiro, Chefe de Departamento**, em



09/03/2022, às 10:56, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Joana Darc Antonia Santos da Cruz, Professor(a)**, em 09/03/2022, às 11:12, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Marcelo Escudeiro Hernandes, Usuário Externo**, em 09/03/2022, às 12:00, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Frederico Sercio Feitosa, Professor(a)**, em 09/03/2022, às 12:32, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf (www2.ufjf.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **0703204** e o código CRC **23019656**.

AGRADECIMENTOS

A Deus que me deu forças para concluir esta etapa.

À minha família que acreditou em mim e me deu suporte para esta jornada.

À minha orientadora Flaviana Andréa Ribeiro e à minha coorientadora Joana Darc Antonia Santos da Cruz pela paciência, dedicação e conselhos.

Aos professores Marcelo Escudeiro Hernandes e Frederico Sercio Feitosa por aceitarem o pedido de participar da banca examinadora.

Ao programa de mestrado juntamente com toda coordenação, aos professores e amigos que me incentivaram e apoiaram em todo o curso. Também agradeço ao Heitor Ribeiro de Assis que me ajudou implementando o Algoritmo 1.

À CAPES pelo apoio financeiro.

RESUMO

Neste trabalho, baseado no artigo Classification of algebroid curves with semigroup $\langle 6, 9, 19 \rangle$ de autoria de Hefez e Hernandez (ver [10]), classificamos, módulo classe de equivalência formal, as curvas algebróides planas irredutíveis que possuem semigrupo de valores $\Gamma = \langle 6, 9, 19 \rangle$.

Palavras-chave: Curvas Algebróides. Parametrização de Puiseux. Semigrupo de Valores.

ABSTRACT

In this work, based on the article Classification of algebroid curves with semigroup $\langle 6, 9, 19 \rangle$ by Hefez and Hernandez (see [10]), we classify, modulo formal equivalence, all irreducible algebroid plane curves with semigroup of values $\Gamma = \langle 6, 9, 19 \rangle$.

Keywords: Algebroid Curves. Puiseux Parametrization. Semigroup of Values.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	7
2	ANEL DE SÉRIES DE POTÊNCIAS	9
2.1	ANEL DAS SÉRIES DE POTÊNCIAS FORMAIS	9
2.2	HOMOMORFISMOS ENTRE ANÉIS DE SÉRIES DE POTÊNCIAS	14
2.3	CORPO DAS SÉRIES DE LAURENT	15
2.4	LEMA DE HENSEL	17
2.5	O TEOREMA DA PREPARAÇÃO DE WEIERSTRASS	19
2.6	FATORAÇÃO DE SÉRIES DE POTÊNCIAS	23
3	CURVAS PLANAS	27
3.1	CURVAS ALGEBRÓIDES PLANAS	27
3.2	TEOREMA DE NEWTON-PUISEUX	29
3.3	EXTENSÃO DO CORPO DAS SÉRIES DE LAURENT	34
3.4	PARAMETRIZAÇÃO DE PUISEUX	39
3.5	ANEL LOCAL DE UMA CURVA PLANA	43
3.6	SEMIGRUPO DE VALORES	48
4	BASE PADRÃO MINIMAL PARA ÁLGEBRAS	56
4.1	BASE PADRÃO PARA ÁLGEBRAS	56
4.2	ALGORITMO PARA DETERMINAR BASE PADRÃO PARA ÁLGEBRAS	60
5	BASE PADRÃO PARA $\mathcal{O}_d\mathcal{O}$	65
5.1	DIFERENCIAL DE KÄHLER SOBRE RAMOS	65
5.2	BASE PADRÃO PARA SUBMÓDULOS DE $K[[x_1, \dots, x_n]]$	67
6	CLASSIFICAÇÃO DE RAMOS COM SEMIGRUPO $\langle 6, 9, 19 \rangle$	87
6.1	CLASSIFICAÇÃO FORMAL DE CURVAS COM SEMIGRUPO $\langle 6, 9, 19 \rangle$	87
6.2	NÚMERO DE MILNOR E NÚMERO DE TJURINA	91
6.3	CONJECTURA DE AZEVEDO	93
	REFERÊNCIAS	95
	APÊNDICE A – Algoritmo para determinar as soluções mínimos de um tipo especial de equação diofantina	96

1 INTRODUÇÃO

Azevedo, em sua tese de doutorado (ver [1]), elaborou a seguinte conjectura: **Conjectura de Azevedo:** Seja $\Gamma = \langle v_0, v_1, \dots, v_g \rangle$ um semigrupo de valores, então a curva canônica

$$\begin{cases} x &= t^{\beta_0} \\ y &= \sum_{i=1}^g t^{\beta_i}, \end{cases}$$

onde os β_i 's são os expoentes característicos obtidos da parametrização de Puiseux, atinge número de Tjurina máximo entre todas as curvas algebróides planas irredutíveis com semigrupo de valores Γ .

Curvas de gênero $g = 1$, isto é, curvas com semigrupo $\Gamma = \langle v_0, v_1 \rangle$, são formalmente equivalentes à curva descrita no Teorema de Zariski (Teorema 6.3.1) e, neste caso, a Conjectura de Azevedo é trivialmente verificada.

Para curvas de gênero $g = 2$, o semigrupo de valores mais simples é $\Gamma = \langle 4, 6, 13 \rangle$ (ver [2], p. 73) e foi mostrado por Luengo and Pfister (ver [13], p. 259) que se Γ tem a forma $\Gamma = \langle 2p, 2q, 2pq + d \rangle$, onde p e q são primos entre si e $d \in \mathbb{N}$ é um número ímpar, então o número de Tjurina e o número de Milnor possuem a relação $\tau = \mu - (p-1)(q-1)$. Desta forma, para $\Gamma = \langle 4, 6, 13 \rangle$ a Conjectura de Azevedo é trivialmente verificada.

O próximo semigrupo para o qual se pode produzir um contra-exemplo para a conjectura de Azevedo é $\Gamma = \langle 6, 9, 19 \rangle$.

O primeiro contra-exemplo foi dado por Heinrich (ver [11]) que usou um método computacional para exibir uma curva particular com semigrupo de valores acima e que não satisfaz a conjectura.

Em [10], Hefez e Hernandez mostram como usar os métodos computacionais desenvolvidos em [9] para não só produzir um contra-exemplo para a conjectura de Azevedo mas principalmente para classificar, módulo equivalência formal, curvas com semigrupo $\langle 6, 9, 19 \rangle$.

Com objetivo de apresentar os conceitos necessários para classificar curvas com semigrupos $\langle 6, 9, 19 \rangle$, fizemos uma divisão do texto da seguinte maneira.

No Capítulo 2 são apresentados conceitos básicos acerca das séries de potências formais e também o importante Teorema de Weierstrass.

Ao longo do Capítulo 3 apresentamos as curvas algebróides planas que serão nosso principal objeto de estudo. Apresentamos também uma importante parametrização para tais curvas, conhecida como parametrização de Puiseux. Por fim, definimos semigrupo de valores de uma curva algebróide.

No Capítulo 4, introduzimos um algoritmo para determinar as soluções minimais de uma equação diofantina e também um algoritmo para encontrar uma base padrão

minimal para álgebras. Tais bases desempenham um papel central na classificação de curvas algebróides.

Já no Capítulo 5 estudamos o módulo das diferenciais de Kähler de uma curva algebróide plana e também um algoritmo para determinar uma base padrão para submódulos de $K[[x_1, \dots, x_n]]$.

Por fim, no Capítulo 6 apresentamos a classificação formal das curvas planas que possuem semigrupo de valores $\Gamma = \langle 6, 9, 19 \rangle$, definimos os números de Milnor e Tjurina de uma curva algebróide e apresentamos um contra-exemplo para a Conjectura de Azevedo na classe de equisigularidade das curvas com semigrupo $\Gamma = \langle 6, 9, 19 \rangle$.

2 ANEL DE SÉRIES DE POTÊNCIAS

O anel das séries de potências formais será uma importante ferramenta para nosso estudo e, neste capítulo, iremos introduzir os principais conceitos acerca deste anel.

2.1 ANEL DAS SÉRIES DE POTÊNCIAS FORMAIS

Sejam K um corpo e x_1, x_2, \dots, x_r elementos em alguma extensão de K transcendentess sobre K . O *anel das séries de potências formais*, denotado por $R = K[[x_1, x_2, \dots, x_r]]$, é definido como sendo o conjunto de todos os elementos da forma:

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} F_i = F_0 + F_1 + \dots ,$$

onde cada F_i é um polinômio homogêneo de grau i em x_1, x_2, \dots, x_r .

Observação 2.1.1. Dois elementos $f = \sum_{i=0}^{\infty} F_i$ e $g = \sum_{i=0}^{\infty} G_i \in R$ serão ditos iguais quando $F_i = G_i$, para todo i .

Dados $f = F_0 + F_1 + \dots$ e $g = G_0 + G_1 + \dots \in K[[x_1, x_2, \dots, x_r]]$, definimos

$$f + g = \sum_{i=0}^{\infty} (F_i + G_i) \quad \text{e} \quad f \cdot g = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i F_j \cdot G_{i-j}.$$

Não é difícil ver que $K[[x_1, x_2, \dots, x_r]]$, com as operações definidas acima, é um anel comutativo com unidade e que $f = \sum_{i=0}^{\infty} F_i$ é invertível se, e somente se, $F_0 \neq 0$.

Note que o anel de polinômios em x_1, \dots, x_r , isto é, $K[x_1, x_2, \dots, x_r]$, é um subanel de $K[[x_1, x_2, \dots, x_r]]$.

Definição 2.1.2. Seja $f = F_n + F_{n+1} + \dots \in K[[x_1, x_2, \dots, x_r]]$ tal que $F_n \neq 0$. O polinômio homogêneo F_n é chamado *forma inicial de f* . O inteiro n é chamado *multiplicidade de f* e é denotado por $\text{mult}(f)$. Se $f = 0$, dizemos que $\text{mult}(f) = \infty$.

Observação 2.1.3. Segue direto da Definição 2.1.2 que $f \in K[[x_1, x_2, \dots, x_r]] - \{0\}$ é invertível se, e somente se, $\text{mult}(f) = 0$.

Proposição 2.1.4. (*Propriedades da multiplicidade*) *Sejam $f, g \in K[[x_1, x_2, \dots, x_r]]$. Então valem:*

(i) $\text{mult}(f \cdot g) = \text{mult}(f) + \text{mult}(g)$;

(ii) $\text{mult}(f + g) \geq \min\{\text{mult}(f), \text{mult}(g)\}$, com a igualdade ocorrendo quando

$$\text{mult}(f) \neq \text{mult}(g).$$

Demonstração. Sejam $f, g \in K[[x_1, x_2, \dots, x_r]]$ tais que

$$f = F_n + F_{n+1} + \dots \quad \text{e} \quad g = G_m + G_{m+1} + \dots,$$

onde $F_n \neq 0$ e $G_m \neq 0$. Daí,

$$f \cdot g = F_n G_m + \text{termos de grau maior},$$

e, como $F_n G_m \neq 0$, segue que $\text{mult}(f \cdot g) = n + m = \text{mult}(f) + \text{mult}(g)$.

Agora suponhamos $\text{mult}(f) \neq \text{mult}(g)$ e $n \geq m$. Então

$$\begin{aligned} f + g &= (F_m + \dots) + (G_m + \dots) \\ &= (F_m + G_m) + (F_{m+1} + G_{m+1}) + \dots \end{aligned}$$

onde $F_i = 0$, para $i = m, \dots, n - 1$. Portanto,

$$\text{mult}(f + g) \geq m = \min\{\text{mult}(f), \text{mult}(g)\}.$$

Observe que se $n > m$ então $F_m + G_m \neq 0$ e

$$\text{mult}(f + g) = m = \min\{\text{mult}(f), \text{mult}(g)\}.$$

□

Proposição 2.1.5. $K[[x_1, x_2, \dots, x_r]]$ é domínio de integridade.

Demonstração. Sejam $f, g \in K[[x_1, x_2, \dots, x_r]] - \{0\}$. Então

$$\text{mult}(f) \cdot \text{mult}(g) = \text{mult}(f) + \text{mult}(g) < \infty.$$

Portanto $f \cdot g \neq 0$.

□

Proposição 2.1.6. $K[[x_1, \dots, x_r]]$ é um anel local e $M_R = \langle x_1, \dots, x_r \rangle$ é seu único ideal maximal.

Demonstração. Seja $f \in K[[x_1, \dots, x_r]]$ não invertível. Então, $f = F_n + F_{n+1} + \dots$, $F_n \neq 0$ e $n \geq 1$, ou seja, $f \in M_R$. Por outro lado, cada elemento de M_R possui multiplicidade maior ou igual a 1. Assim,

$$M_R = \{f \in K[[x_1, \dots, x_r]]; \text{mult}(f) \geq 1\} = \{f \in K[[x_1, \dots, x_r]]; f \text{ não invertível}\}.$$

□

Definição 2.1.7. Dados $f, g \in K[[x_1, x_2, \dots, x_r]]$ definimos a distância entre f e g por:

$$d(f, g) = \begin{cases} \rho^{-\text{mult}(f-g)}, & \text{se } f \neq g, \\ 0, & \text{se } f = g, \end{cases}$$

onde $\rho > 1$ é um número real fixado.

Observação 2.1.8. Mostra-se facilmente que d é uma métrica em $K[[x_1, \dots, x_r]]$.

Teorema 2.1.9. $(K[[x_1, x_2, \dots, x_r]], d)$ é um espaço métrico completo.

Demonstração. Seja $\{f_l\}_{l \in \mathbb{N}} \subset K[[x_1, x_2, \dots, x_r]]$ uma sequência de Cauchy. Então, para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $\gamma(k) \in \mathbb{Z}$ tal que

$$d(f_m, f_n) < \rho^{-k}, \forall m, n \geq \gamma(k), \text{ ou seja, } \rho^{-\text{mult}(f_m - f_n)} < \rho^{-k}, \forall m, n \geq \gamma(k).$$

Consequentemente, $\text{mult}(f_m - f_n) > k$, ou seja, $f_m - f_n \in M_R^k$, para todo $m, n \geq \gamma(k)$. Escolhendo $\gamma(k)$ de forma que eles formem uma sequência crescente, temos que:

$$f_{\gamma(k)} - f_{\gamma(k+1)} \in M_R^k, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Agora, para cada $i \in \mathbb{N}$, escreva

$$f_{\gamma(i)} = P_{i,0} + P_{i,1} + \dots,$$

onde cada $P_{i,j}$ é um polinômio de grau j e defina

$$f = P_{1,0} + P_{2,1} + \dots + P_{i+1,i} + \dots.$$

Então, $f - f_{\gamma(i)} \in M_R^i$, para todo $i \in \mathbb{N}$, ou seja, $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{\gamma(k)} = f$. Com isso, mostramos que toda sequência de Cauchy em $K[[x_1, x_2, \dots, x_r]]$ possui subsequência convergente e, portanto, $\{f_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ é convergente. Logo, $(K[[x_1, x_2, \dots, x_r]], d)$ é completo. \square

Embora, por definição, possamos somar apenas um número finito de séries de potências é possível, em algumas circunstâncias, somar famílias infinitas de séries de potências.

Definição 2.1.10. Seja $\mathcal{F} = \{f_\lambda; \lambda \in \Lambda\} \subset K[[x_1, x_2, \dots, x_r]]$ uma família de séries de potências. Dizemos que a família \mathcal{F} é *somável* se, dado $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\#(\{\lambda \in \Lambda; \text{mult}(f_\lambda) \leq n\} := \Lambda_n) < \infty.$$

Proposição 2.1.11. *Sejam $\{f_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ e $\{g_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ duas famílias somáveis em $K[[x_1, x_2, \dots, x_r]]$ e sejam $A, B \in R$. Então valem:*

(i) A soma $\sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda$ é um elemento bem definido de $K[[x_1, x_2, \dots, x_r]]$, onde

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \text{ e } S_n = \sum_{\lambda \in \Lambda_n} f_\lambda.$$

(ii) A família $\{Af_\lambda + Bg_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ é somável e

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} (Af_\lambda + Bg_\lambda) = A \sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda + B \sum_{\lambda \in \Lambda} g_\lambda.$$

(iii) A família $\{f_\lambda g_\lambda; (\lambda, \mu) \in \Lambda \times \Lambda\}$ é somável e vale

$$\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda \right) \cdot \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} g_\lambda \right) = \sum_{(\lambda, \mu) \in \Lambda \times \Lambda} f_\lambda \cdot g_\mu.$$

Demonstração. (i) Considere o conjunto $\Lambda_n = \{\lambda \in \Lambda; \text{mult}(f_\lambda) \leq n\}$. Como f_λ é somável, o conjunto Λ_n é finito. Para qualquer inteiro $m > n$, temos

$$\Lambda_m = \Lambda_n \cup \{\lambda \in \Lambda; n < \text{mult}(f_\lambda) \leq m\} \text{ e}$$

$$S_m - S_n = \sum_{\lambda \in \Lambda_m} f_\lambda - \sum_{\lambda \in \Lambda_n} f_\lambda = \left(\sum_{\lambda \in \Lambda_n} \cancel{f_\lambda} + \sum_{\lambda \in \Gamma} f_\lambda \right) - \sum_{\lambda \in \Lambda_n} \cancel{f_\lambda} = \sum_{\lambda \in \Gamma} f_\lambda,$$

onde $\Gamma = \{\lambda \in \Lambda; n < \text{mult}(f_\lambda) \leq m\}$.

Portanto, para $m > n$, $\text{mult}(S_m - S_n) > n$. Daí,

$$d(S_m, S_n) = \rho^{-\text{mult}(S_m - S_n)} < \rho^{-n}.$$

Como $\rho^{-n} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, temos que S_n é de Cauchy e, portanto, converge.

(ii) Primeiramente iremos mostrar que $\{Af_\lambda + Bg_\lambda\}$ é somável.

De fato, dado $n \in \mathbb{N}$, o conjunto

$$\Lambda''_n = \{\lambda \in \Lambda; \text{mult}(Af_\lambda + Bg_\lambda) \leq n\}$$

é finito, pois existe apenas um número finito de λ 's que satisfazem

$$\min\{\text{mult}(A) + \text{mult}(f_\lambda), \text{mult}(B) + \text{mult}(g_\lambda)\} \leq \text{mult}(Af_\lambda + Bg_\lambda) \leq n.$$

Defina Λ_n como em (i) e $\Lambda'_n = \{\lambda \in \Lambda; \text{mult}(g_\lambda) \leq n\}$. Observe que se $\lambda \in \Lambda''_n$, então $\lambda \in \Lambda_n$ ou $\lambda \in \Lambda'_n$. Definindo

$$\phi_n = \sum_{\lambda \in \Lambda''_n} (Af_\lambda + Bg_\lambda) \quad \text{e} \quad \psi_n = A \sum_{\lambda \in \Lambda_n} f_\lambda + B \sum_{\lambda \in \Lambda'_n} g_\lambda$$

temos que $\phi_n - \psi_n \in M_R^{n+1}$, pois podemos escrever ϕ_n e ψ_n da seguinte forma

$$\begin{aligned} \phi_n &= \sum_{\lambda \in \Lambda_n \cap \Lambda'_n \cap \Lambda''_n} (Af_\lambda + Bg_\lambda) + \sum_{\lambda \in \Lambda_n \cap \Lambda''_n - \Lambda'_n} (Af_\lambda + Bg_\lambda) + \sum_{\lambda \in \Lambda'_n \cap \Lambda''_n - \Lambda_n} (Af_\lambda + Bg_\lambda) \\ &= \underbrace{\sum_{\lambda \in \Lambda_n \cap \Lambda'_n \cap \Lambda''_n} (Af_\lambda + Bg_\lambda)}_{(1)} + \underbrace{\sum_{\lambda \in \Lambda_n \cap \Lambda''_n - \Lambda'_n} Af_\lambda}_{(2)} + \sum_{\lambda \in \Lambda_n \cap \Lambda''_n - \Lambda'_n} Bg_\lambda + \\ &+ \sum_{\lambda \in \Lambda'_n \cap \Lambda''_n - \Lambda_n} Af_\lambda + \underbrace{\sum_{\lambda \in \Lambda'_n \cap \Lambda''_n - \Lambda_n} Bg_\lambda}_{(3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_n &= A \sum_{\beta \in \Lambda_n \cap \Lambda'_n \cap \Lambda''_n} f_\beta + A \sum_{\beta \in \Lambda_n \cap \Lambda''_n - \Lambda'_n} f_\beta + A \sum_{\beta \in \Lambda_n \cap \Lambda'_n - \Lambda''_n} f_\beta + A \sum_{\beta \in \Lambda_n - (\Lambda'_n \cup \Lambda''_n)} f_\beta + \\
&+ B \sum_{\gamma \in \Lambda_n \cap \Lambda'_n \cap \Lambda''_n} g_\gamma + B \sum_{\gamma \in \Lambda'_n \cap \Lambda''_n - \Lambda_n} g_\gamma + B \sum_{\gamma \in \Lambda_n \cap \Lambda'_n - \Lambda''_n} g_\gamma + B \sum_{\gamma \in \Lambda'_n - (\Lambda_n \cup \Lambda''_n)} g_\gamma \\
&= \underbrace{\sum_{\lambda \in \Lambda_n \cap \Lambda'_n \cap \Lambda''_n} (Af_\lambda + Bg_\lambda)}_{(1)} + \underbrace{A \sum_{\beta \in \Lambda_n \cap \Lambda''_n - \Lambda'_n} f_\beta + \sum_{\beta \in \Lambda_n \cap \Lambda'_n - \Lambda''_n} (Af_\beta + Bg_\beta)}_{(2)} + \\
&+ A \sum_{\beta \in \Lambda_n - (\Lambda'_n \cup \Lambda''_n)} f_\beta + \underbrace{B \sum_{\gamma \in \Lambda'_n \cap \Lambda''_n - \Lambda_n} g_\gamma + B \sum_{\gamma \in \Lambda'_n - (\Lambda_n \cup \Lambda''_n)} g_\gamma}_{(3)}.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\phi_n - \psi_n &= \sum_{\lambda \in \Lambda_n \cap \Lambda''_n - \Lambda'_n} Bg_\lambda + \sum_{\lambda \in \Lambda'_n \cap \Lambda''_n - \Lambda_n} Af_\lambda - \sum_{\beta \in \Lambda_n \cap \Lambda'_n - \Lambda''_n} (Af_\beta + Bg_\beta) - \\
&- A \sum_{\beta \in \Lambda_n - (\Lambda'_n \cup \Lambda''_n)} f_\beta - B \sum_{\gamma \in \Lambda'_n - (\Lambda_n \cup \Lambda''_n)} g_\gamma.
\end{aligned}$$

Agora observe que

- $\lambda \in \Lambda_n \cap \Lambda''_n - \Lambda'_n \Rightarrow \lambda \notin \Lambda'_n \Rightarrow \text{mult}(Bg_\lambda) = \text{mult}(B) + \text{mult}(g_\lambda) > n$;
- $\lambda \in \Lambda'_n \cap \Lambda''_n - \Lambda_n \Rightarrow \lambda \notin \Lambda_n \Rightarrow \text{mult}(Af_\lambda) = \text{mult}(A) + \text{mult}(f_\lambda) > n$;
- $\beta \in \Lambda_n \cap \Lambda'_n - \Lambda''_n \Rightarrow \beta \notin \Lambda''_n \Rightarrow \text{mult}(Af_\beta + Bg_\beta) > n$;
- $\beta \in \Lambda_n - (\Lambda'_n \cup \Lambda''_n) \Rightarrow \beta \notin \Lambda'_n \cup \Lambda''_n \Rightarrow \text{mult}(Af_\beta) = \text{mult}(A) + \text{mult}(f_\beta) > n$;
- $\gamma \in \Lambda'_n - (\Lambda_n \cup \Lambda''_n) \Rightarrow \gamma \notin \Lambda_n \cup \Lambda''_n \Rightarrow \text{mult}(Bg_\gamma) = \text{mult}(B) + \text{mult}(g_\gamma) > n$.

Consequentemente, $\text{mult}(\phi_n - \psi_n) > n$, ou seja, $\phi_n - \psi_n \in M_r^{n+1}$ e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\phi_n - \psi_n) = 0.$$

Portanto,

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} (Af_\lambda + Bg_\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\phi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\psi_n) = A \sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda + B \sum_{\lambda \in \Lambda} g_\lambda.$$

(iii) De modo análogo ao feito na demonstração do item (ii) mostra-se (iii). \square

Proposição 2.1.12. *Sejam $\{P_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ uma família de polinômios homogêneos, com $P_i \in K[y_1, \dots, y_s]$ de grau i , e $g_1, \dots, g_s \in M_R$. A família $\mathcal{F} = \{P_i(g_1, \dots, g_s)\}_{i \in \mathbb{N}}$ é somável.*

Demonstração. Defina $g = (g_1, \dots, g_s)$ e $y = (y_1, \dots, y_s)$.

Afirmamos que $\text{mult}(P_i(g)) \geq i$. De fato, como $P_i(y)$ é homogêneo de grau i , segue que sua multiplicidade é igual a i . Além disso, se P_i é da forma

$$P_i(y) = \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_s = i} \gamma_{\alpha_1, \dots, \alpha_s} y_1^{\alpha_1} \dots y_s^{\alpha_s},$$

então

$$P_i(g) = \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_s = i} \gamma_{\alpha_1, \dots, \alpha_s} g_1^{\alpha_1} \dots g_s^{\alpha_s}.$$

Como cada $g_j \in M_R$, segue que $\text{mult}(g_j) \geq 1, \forall j = 1, \dots, s$. Logo,

$$\text{mult}(P_i(g)) \geq \text{mult}(g_1^{\alpha_1} \dots g_s^{\alpha_s}) = \alpha_1 \text{mult}(g_1) + \dots + \alpha_s \text{mult}(g_s) \geq \alpha_1 + \dots + \alpha_s = i.$$

Agora defina $\Lambda_n = \{i \in \mathbb{N}; \text{mult}(P_i(g)) \leq n\}$. Segue da nossa afirmação que este conjunto é finito. Consequentemente \mathcal{F} é somável. \square

Se $f = \sum_{i=0}^{\infty} P_i(y_1, \dots, y_s) \in K[[y_1, \dots, y_s]]$ e $g_1, \dots, g_s \in M_R$, então segue da Proposição 2.1.12 que $\{P_i(g_1, \dots, g_s)\}_{i \in \mathbb{N}}$ é uma família somável, cuja soma será denotada por $f(g_1, \dots, g_s)$ e será chamada *substituição* de y_1, \dots, y_s por g_1, \dots, g_s . Em particular, podemos substituir y_1, \dots, y_s por $0, \dots, 0$ em f obtendo P_0 .

Segue das Proposições 2.1.11 e 2.1.12 o seguinte resultado.

Corolário 2.1.13. *Sejam $g_1, \dots, g_s \in M_R$, $f, h \in K[[y_1, \dots, y_s]]$ e $a \in K$, então*

$$(i) (f + ah)(g_1, \dots, g_s) = f(g_1, \dots, g_s) + ah(g_1, \dots, g_s);$$

$$(ii) (f \cdot h)(g_1, \dots, g_s) = f(g_1, \dots, g_s) \cdot h(g_1, \dots, g_s);$$

(iii) *O mapa de substituição*

$$\begin{aligned} S_{g_1, \dots, g_s} : K[[y_1, \dots, y_s]] &\longrightarrow K[[x_1, \dots, x_r]] \\ f &\longmapsto S_{g_1, \dots, g_s}(f) = f(g_1, \dots, g_s) \end{aligned}$$

é um homomorfismo de K -álgebras.

Observação 2.1.14. A condição $g_1, \dots, g_s \in M_R$ é essencial para a boa definição do mapa de substituições. Por exemplo, se tomarmos $f(x) = 1 + x + x^2 + \dots$ e $g = 1$ não está definido $f(g)$, pois $f(1) = 1 + 1 + 1 + \dots \notin K$.

2.2 HOMOMORFISMOS ENTRE ANÉIS DE SÉRIES DE POTÊNCIAS

Sejam $R = K[[x_1, \dots, x_r]]$ e $S = K[[y_1, \dots, y_s]]$ e M_R e M_S os ideais maximais de R e S , respectivamente.

Proposição 2.2.1. *Seja $T : S \rightarrow R$ um homomorfismo de K -álgebras. Então*

$$(i) T(M_S) \subset M_R;$$

(ii) *T é contínua;*

(iii) *Existem $g_1, g_2, \dots, g_s \in M_R$ tais que $T = S_{g_1, \dots, g_s}$.*

Demonstração. (i) Seja $f \in M_S$ e suponha que $T(f) \notin M_R$. Então $T(f) = c + g$, onde $c \in K - \{0\}$ e $g \in M_R$. Como T é um K -homomorfismo, temos que

$$g = T(f) - c = T(f) - c \cdot T(1) = T(f) + T(-c) = T(f - c).$$

Absurdo, pois $(f - c)$ é invertível em R e um homomorfismo leva elemento invertível em elemento invertível.

(ii) Do item (i), temos que $T(M_S) \subset M_R$ o que implica que $T(M_S^n) \subset M_R^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí,

$$\begin{aligned} \text{mult}(f - g) &\leq \text{mult}(T(f) - T(g)), \forall f, g \in S \text{ e} \\ d(T(f), T(g)) &= \rho^{-\text{mult}(T(f) - T(g))} \leq \rho^{-\text{mult}(f - g)} = d(f, g). \end{aligned}$$

Logo, T é contínuo.

(iii) Do item (i) temos que $T(y_j) = g_j \in M_R$, $\forall j = 1, \dots, s$.

Seja $f = \sum_{i \in \mathbb{N}} P_i \in S$, onde cada $P_i \in K[y_1, \dots, y_s]$ é um polinômio homogêneo de grau i . Note que $f = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=0}^n P_i(y_1, \dots, y_s) \right)$. Da continuidade de T , temos

$$T(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} T \left(\sum_{i=0}^n P_i(y_1, \dots, y_s) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n P_i(T(y_1), \dots, T(y_s)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n P_i(g_1, \dots, g_s).$$

$$\text{Logo, } T(f) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i(g_1, \dots, g_s) = S_{g_1, \dots, g_s}(f). \quad \square$$

Observação 2.2.2. Sejam $f = \sum_i P_i$, onde P_i é homogêneo de grau i e $g_1, \dots, g_s \in M_r$. Da demonstração da Proposição 2.1.12, temos

$$\text{mult}(S_{g_1, \dots, g_s}(f)) = \text{mult}(f(g_1, \dots, g_s)) \geq \text{mult}(f) \cdot \min_i \{\text{mult}(g_i)\}.$$

Então, se $T : S \rightarrow R$ é um K -isomorfismo, temos que

$$\text{mult}(f) \leq \text{mult}(T(f)) \leq \text{mult}(T^{-1}(T(f))) = \text{mult}(f).$$

Ou seja, K -isomorfismos preservam multiplicidades.

2.3 CORPO DAS SÉRIES DE LAURENT

O corpo de frações do anel das séries de potências formais em uma variável $K[[x]]$, denotado por $K((x))$, é chamado corpo das séries de Laurent.

Dado $h = f/g \in K((x)) - \{0\}$ com $f, g \in K[[x]]$ e $g \neq 0$, podemos escrever $f = x^n \cdot u$ e $g = x^m \cdot v$, onde n e $m \in \mathbb{N}$ e u e v são invertíveis em $K[[x]]$. Daí segue que todo elemento não nulo de $K((x))$ tem a forma

$$h = \frac{f}{g} = \frac{x^n \cdot u}{x^m \cdot v} = x^{n-m} \cdot \frac{u}{v} = x^r \cdot w,$$

onde $r \in \mathbb{Z}$ e $w \in K[[x]]$ é um invertível. Ou seja, qualquer elemento de $K((x))$ é da forma

$$h = a_{-r}x^{-r} + a_{-r+1}x^{-r+1} + \cdots + a_{-1}x^{-1} + a_0 + a_1x + \cdots ,$$

onde $a_i \in K$ e $r \in \mathbb{N}$.

Os elementos de $K((x))$ são chamados *séries de potências formais de Laurent*.

Definição 2.3.1. Dado $h \in K((x)) - \{0\}$, se escrito na forma $h = x^r \cdot w$, onde $r \in \mathbb{Z}$ e $w \in K[[x]]$ é invertível, definimos a *multiplicidade de h* , denotada por $\text{mult}(h)$, como sendo o inteiro r . Para $h = 0$, definimos $\text{mult}(h) = \infty$.

Como no caso de $K[[x]]$, definimos a distância entre dois elementos $f, g \in K((x))$ por

$$d(f, g) = \begin{cases} \rho^{-\text{mult}(f-g)}, & \text{se } f \neq g, \\ 0, & \text{se } f = g, \end{cases}$$

onde $\rho > 1$ é um número real fixado e $f, g \in K((x))$.

Também é verdade que $(K((x)), d)$ é um espaço métrico completo.

Teorema 2.3.2. Dado um K -automorfismo T de $K((x))$, temos que $T(x) = w(x) \cdot x$, onde $w(x) \in K[[x]]$ é um invertível.

Demonstração. Seja $T(x) = x^r \cdot w(x)$, onde $r \in \mathbb{Z}$ e $w(x)$ é um invertível de $K[[x]]$. Afirmamos que se $r < 0$, então $T(x + x^2 + \cdots)$ não estaria definido, pois

$$\begin{aligned} T(x + x^2 + \cdots) &= T(x) + T(x)T(x + x^2 + \cdots) \\ &= T(x) + (T(x))^2 + (T(x))^3T(x + x^2 + \cdots) \\ &= T(x) + (T(x))^2 + \cdots + (T(x))^{k-1} + (T(x))^kT(x + x^2 + \cdots) \\ &= x^r \cdot w(x) + \cdots + (x^r \cdot w(x))^kT(x + \cdots). \end{aligned}$$

Se supormos $\text{mult}(T(x + x^2 + \cdots)) = k_0 \in \mathbb{N}$, teremos que existe $k \in \mathbb{Z}$ suficientemente grande tal que $\text{mult}(T^k(x)) = r \cdot k < k_0$, pois $r < 0$. Logo, tal caso não pode ocorrer. Suponho $r = 0$, teremos $T(x) = w(x)$, mas $0 = T(0) = w(0) \neq 0$. Portanto, $T(x) = x^r \cdot w(x)$, onde $r > 0$ e $w(x)$ é um invertível de $K[[x]]$.

Afirmação: Dados $a(x) \in K[[x]]$ invertível e $f = P_n(x) + P_{n+1}(x) + \cdots \in K[[x]]$, com $P_i(x) \in K[x]$ polinômio homogêneo de grau i , $P_n(x) \neq 0$ e $n > 0$, então $a(f)$ é um elemento invertível de $K[[x]]$.

De fato, como $a(x)$ é um elemento invertível de $K[[x]]$, então $a(x)$ é da forma

$$a(x) = a_0(x) + a_1(x) + a_2(x) + \cdots ,$$

onde cada $a_i \in K[x]$, para todo $i \geq 0$, é um polinômio homogêneo de grau i e $a_0(x) \neq 0$. Assim,

$$a(f) = a_0(f) + a_1(f) + a_2(f) + \cdots .$$

Já que $a_0(x)$ é um polinômio homogêneo de grau 0 não nulo segue que $a_0(x) = \lambda \in K - \{0\}$, e $a_0(f) = a_0(x) = \lambda \neq 0$. Logo, $a(f)$ é um elemento invertível de $K[[x]]$.

Como T é um automorfismo, segue que existe $T^{-1}(x) = x^s \cdot w'(x)$, onde $s \geq 0$ e $w'(x)$ é um invertível de $K[[x]]$. Daí,

$$x = T(T^{-1}(x)) = T(x^s \cdot w'(x)) = (T(x))^s \cdot w'(x^r \cdot w(x)) = x^{rs} \cdot w''(x),$$

onde $w''(x) = (w(x))^s \cdot w'(x^r \cdot w(x))$ e, como $r > 0$, é um invertível de $K[[x]]$.

Da equação acima concluímos que $rs = 1$ e $w'' = 1$. Como r e s são inteiros positivos, temos que $r = s = 1$.

Logo, segue o resultado. □

Observação 2.3.3. Analogamente ao demonstrado na Proposição 2.2.1, é possível mostrar a continuidade dos K -automorfismos de $K((x))$.

2.4 LEMA DE HENSEL

Assim como para os polinômios, dizer quando uma série é irredutível não é uma tarefa fácil, e para ajudar, usaremos como ferramenta o Lema de Hensel. Será possível utilizar esta ferramenta em séries de $K[[x]][y]$, onde K é um corpo e x e y são variáveis. Por conveniência, definimos o grau do polinômio nulo como sendo $-\infty$.

Lema 2.4.1. *Sejam $P = P(y)$ e $Q = Q(y) \in K[y] - K$ tais que $\text{mdc}(P, Q) = 1$ e $\deg P = r$ e $\deg Q = s$. Dado $F = F(y) \in K[y]$, de grau menor que $r + s$, então existem únicos $G = G(y)$, $H = H(y) \in K[y]$, com $\deg H < r$ e $\deg G < s$, tais que*

$$F = GP + HQ.$$

Demonstração. Como $\text{mdc}(P, Q) = 1$, existem $\varphi, \psi \in K[y]$ tais que

$$1 = \varphi P + \psi Q.$$

Seja $F = F(y) \in K[y]$ de grau menor que $r + s$. Da equação acima temos que

$$F = F\varphi P + F\psi Q. \tag{2.1}$$

e, do algoritmo da divisão para polinômios, temos

$$F\psi = P\rho + H, \tag{2.2}$$

onde $\rho, H \in K[y]$ e $\deg H < \deg P = r$. Substituindo (2.2) em (2.1)

$$\begin{aligned} F &= F\varphi P + (P\rho + H)Q = F\varphi P + P\rho Q + HQ \\ &= P(F\varphi + \rho Q) + HQ \\ &= PG + HQ, \end{aligned}$$

onde $G = F\varphi + \rho Q \in K[y]$. Como $\deg P = r$, temos

$$\deg G + \deg P = \deg GP = \deg(F - HQ) < r + s.$$

Logo, $\deg G < s$ e o resultado segue.

Para mostrarmos a unicidade de G e H , suponha que $GP + HQ = G'P + H'Q$, com H e H' de grau menor que r e G e G' de grau menor que s . Daí,

$$(G - G')P = (H - H')Q. \quad (2.3)$$

Como P e Q são primos entre si, segue que $P|(H - H')$. Mas,

$$\deg(H - H') \leq \deg H' < r = \deg P.$$

Logo, $H = H'$. Ou ainda, como $H = H'$ de (2.3) temos que $(G - G')P = 0$, como $P \neq 0$ e estamos em um domínio segue que $G = G'$. \square

Teorema 2.4.2. (Lema de Hensel) *Seja $f \in K[[x]][y]$ um polinômio em y mônico tal que $f(0, y) = P(y) \cdot Q(y)$, onde $P = P(y)$ e $Q = Q(y) \in K[y] - K$ são primos entre si, $\deg P = r$ e $\deg Q = s$. Então, existem únicos g e $h \in K[[x]][y]$ de grau r e s , respectivamente, tais que $f = g \cdot h$, com $g(0, y) = P(y)$ e $h(0, y) = Q(y)$.*

Demonstração. Supondo $n = \deg_y f$, como f é mônico, então $n = \deg_y f(0, y) = r + s$. Escrevendo

$$f = F_0(y) + xF_1(y) + x^2F_2(y) + \dots,$$

temos que $F_0(y) = f(0, y)$ tem grau n e cada $F_i(y)$ não nulo, para $i \geq 1$, é um polinômio em $K[y]$ de grau menor que n .

Queremos determinar

$$g = g(x, y) = P(y) + xG_1(y) + x^2G_2(y) + \dots \text{ e}$$

$$h = h(x, y) = Q(y) + xH_1(y) + x^2H_2(y) + \dots,$$

onde $G_i(y)$ é nulo ou tem grau menor que r , $H_i(y)$ é nulo ou tem grau menor que s e satisfazendo $f = g \cdot h$. Então, para $i \geq 1$, devemos ter

$$F_i(y) = P \cdot H_i + G_1 \cdot H_{i-1} + \dots + G_{i-1} \cdot H_1 + G_i \cdot Q. \quad (2.4)$$

Vamos encontrar G_i e H_i em (2.4) de forma recursiva. Suponha determinados $G_j(y)$ e $H_j(y)$, tais que $\deg G_j(y) < s$ e $\deg H_j(y) < r$, para todo $j \leq i - 1$. Para que (2.4) seja verdadeira, H_i e G_i devem satisfazer

$$P \cdot H_i + Q \cdot G_i = F_i - G_1 \cdot H_{i-1} - \dots - G_{i-1} \cdot H_1. \quad (2.5)$$

Como $\deg G_j(y) < s$ e $\deg H_j(y) < r$, para todo $j \leq i - 1$, temos que

$$\deg(F_i - G_1 \cdot H_{i-1} - \dots - G_{i-1} H_1) \leq \max\{\deg F_i, \deg(G_1 \cdot H_{i-1}), \dots, \deg(G_{i-1} \cdot H_1)\} < r + s.$$

Então, pelo Lema 2.4.1, existem únicos $H_i, G_i \in K[y]$, com $\deg H_i < r$ e $\deg G_i < s$ tais que a equação (2.5) é verificada. \square

Exemplo 2.4.3. O polinômio $f = x - 2y + x^3 + y^5 + x^2y^3$ é redutível em $\mathbb{C}[[x]][y]$.

Primeiramente observe que $f(0, y) = y^5 - 2y = y(y^4 - 2)$. Fazendo $P = y$ e $Q = y^4 - 2 \in \mathbb{C}[y]$, temos que P e Q são polinômios não constantes primos entre si de graus 1 e 4, respectivamente. Então, pelo *Lema de Hensel*, existem únicos $g, h, \in \mathbb{C}[[x]][y]$ polinômios de graus 1 e 4, respectivamente, tais que $f = g \cdot h$, com $g(0, y) = P$ e $h(0, y) = Q$. Logo, f é redutível em $\mathbb{C}[[x]][y]$.

2.5 O TEOREMA DA PREPARAÇÃO DE WEIERSTRASS

Nesta seção mostraremos o Teorema da Preparação de Weierstrass e algumas de suas consequências que serão de grande ajuda para lidar com as séries de potências.

Definição 2.5.1. Dizemos que $f \in K[[x_1, \dots, x_r]]$ é *regular de ordem m* , $m \in \mathbb{N}$ com respeito a variável x_j se $x_j^m | f(0, \dots, x_j, \dots, 0)$ e $x_j^{m+1} \nmid f(0, \dots, x_j, \dots, 0)$. E, dizemos que f é *regular em x_j* quando f é regular com respeito a x_j de ordem $n = \text{mult}(f)$. Neste caso,

$$\text{mult}(f) = \text{mult}(f(0, \dots, x_j, \dots, 0)).$$

Lema 2.5.2. Dados $f, g \in K[[x_1, \dots, x_r]]$ séries não constantes, então $f \cdot g$ é regular com respeito a x_j de uma certa ordem se, e somente se, f e g são regulares com respeito a x_j para alguma ordem.

Demonstração. Vamos supor que f e g são regulares com respeito a x_j , digamos de ordem m_1 e m_2 , respectivamente. Então

$$\begin{aligned} x_j^{m_1} | f(0, \dots, x_j, \dots, 0) \text{ e } x_j^{m_1+1} \nmid f(0, \dots, x_j, \dots, 0) \text{ e} \\ x_j^{m_2} | g(0, \dots, x_j, \dots, 0) \text{ e } x_j^{m_2+1} \nmid g(0, \dots, x_j, \dots, 0). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} x_j^{m_1+m_2} &= x_j^{m_1} \cdot x_j^{m_2} | f(0, \dots, x_j, \dots, 0) \cdot g(0, \dots, x_j, \dots, 0) \text{ e} \\ x_j^{m_1+m_2+1} &= x_j^{m_1} \cdot x_j^{m_2} \cdot x_j \nmid f(0, \dots, x_j, \dots, 0) \cdot g(0, \dots, x_j, \dots, 0). \end{aligned}$$

Logo, $f \cdot g$ é regular com respeito a x_j de ordem $m_1 + m_2$.

Por outro lado, se $f \cdot g$ é regular com respeito a x_j de ordem m , então

$$x_j^m | (f \cdot g)(0, \dots, x_j, \dots, 0) \text{ e } x_j^{m+1} \nmid (f \cdot g)(0, \dots, x_j, \dots, 0).$$

Dai,

$$x_j^m \mid f(0, \dots, x_j, \dots, 0) \cdot g(0, \dots, x_j, \dots, 0).$$

Portanto, $x_j^{m-n} \mid f(0, \dots, x_j, \dots, 0)$ e $x_j^n \mid g(0, \dots, x_j, \dots, 0)$, onde $n \leq m$. Logo, para uma certa ordem, f e g são regulares em x_j . \square

Teorema 2.5.3. (Teorema da Divisão) *Seja $f \in M_R$ regular de ordem m com respeito a x_r . Dado $g \in K[[x_1, \dots, x_r]]$, existem únicas séries $q \in K[[x_1, \dots, x_r]]$ e $s \in K[[x_1, \dots, x_{r-1}]]x_r$ com $\deg_{x_r} s < m$ tais que $g = f \cdot q + s$.*

Demonstração. A demonstração será feita por indução sobre r .

O caso $r = 1$ segue do algoritmo da divisão para séries de potências em uma variável. Suponhamos o resultado válido para $n - 1$ indeterminadas e vamos mostrar o resultado para n variáveis. Para $n > 1$, escrevamos

$$\begin{aligned} f &= f_0(x_1, \dots, x_{r-1}) + f_1(x_1, \dots, x_{r-1})x_r + f_2(x_1, \dots, x_{r-1})x_r^2 + \dots \\ g &= g_0(x_1, \dots, x_{r-1}) + g_1(x_1, \dots, x_{r-1})x_r + g_2(x_1, \dots, x_{r-1})x_r^2 + \dots \\ q &= q_0(x_1, \dots, x_{r-1}) + q_1(x_1, \dots, x_{r-1})x_r + q_2(x_1, \dots, x_{r-1})x_r^2 + \dots \\ s &= s_0(x_1, \dots, x_{r-1}) + s_1(x_1, \dots, x_{r-1})x_r + s_2(x_1, \dots, x_{r-1})x_r^2 + \dots, \end{aligned}$$

onde f_i, g_j, q_k e $s_l \in K[[x_1, \dots, x_{r-1}]]$.

Assim, $g = f \cdot q + s$ equivale a

$$\left\{ \begin{array}{l} g_0 = q_0 f_0 + s_0 \\ g_1 = q_0 f_1 + q_1 f_0 + s_1 \\ g_2 = q_0 f_2 + q_1 f_1 + q_2 f_0 + s_2 \\ \vdots \\ g_i = q_0 f_i + \dots + q_{i-1} f_1 + q_i f_0 + s_i \\ \vdots \end{array} \right.$$

Como f é regular de ordem m com respeito a x_r , isto é, $f(0, \dots, 0, x_r) \neq 0$ e $\text{mult}(f(0, \dots, 0, x_r)) = m$ segue que $\text{mult}(f_0(0, \dots, 0, x_r)) = m$. Além disso, para cada $s_i \in K[[x_2, \dots, x_r]]$ temos que $\deg_{x_r} s_i < m, \forall i = 1, 2, \dots$, logo $\deg_{x_r} s < m$.

Por indução, os q_i e s_i são encontrados sucessivamente e são únicos por construção. Portanto, temos o resultado para q e s . \square

A prova que fizemos para o Teorema da Divisão é construtiva, assim podemos construir as séries q e s até a ordem desejada.

Teorema 2.5.4. (Teorema da Preparação de Weierstrass) *Seja $f \in K[[x_1, \dots, x_r]]$ regular com respeito a x_r de ordem m . Então existem únicos $u \in K[[x_1, \dots, x_r]]$ invertível e $A_1, \dots, A_m \in M_{R'}$, onde $R' = K[[x_1, \dots, x_{r-1}]]$, tais que*

$$f \cdot u = x_r^m + A_1 x_r^{m-1} + A_2 x_r^{m-2} + \dots + A_m. \quad (2.6)$$

Além disso, se f é regular em x_r , isto é, $m = \text{mult}(f)$, então $\text{mult}(A_i) \geq i$, $\forall i = 1, \dots, m$.

Demonstração. Seja $g = x_r^m \in K[[x_1, \dots, x_r]]$. Do Teorema da Divisão, existem únicos $q \in K[[x_1, \dots, x_r]]$ e $s \in K[[x_1, \dots, x_{r-1}]][x_r]$ com $\deg_{x_r} s < m$ tais que

$$g = f \cdot q + s. \quad (2.7)$$

Tome $u = q$ e $A_1 x_r^{m-1} + A_2 x_r^{m-2} + \dots + A_m = -s$. Como f é regular com respeito a x_r de ordem m e $\deg_{x_r} s < m$, pela equação (2.7), temos que $q(0, \dots, 0, x_r) = \lambda \in K - \{0\}$. Portanto $q(0) \neq 0$ e, conseqüentemente, $u = q$ é invertível.

Como f satisfaz a equação (2.6) e $x_r^m | f(0, \dots, 0, x_r)$, temos

$$A_1(0) = \dots = A_m(0) = 0.$$

Logo, cada $A_i \in M_{R'}$.

Se f é regular em x_r e $\text{mult}(f) = m$, então

$$\begin{aligned} m = \text{mult}(f) &= \text{mult}(f \cdot u) = \text{mult}(x_r^m + A_1 x_r^{m-1} + A_2 x_r^{m-2} + \dots + A_m) \\ &\geq \min\{\text{mult}(x_r^m), \text{mult}(A_1 x_r^{m-1}), \dots, \text{mult}(A_m)\}. \end{aligned}$$

Daí segue que cada $\text{mult}(A_i x_r^{m-i}) = \text{mult}(A_i) + \text{mult}(x_r^{m-i}) = \text{mult}(A_i) + (m - i) \geq m$, ou seja, $\text{mult}(A_i) \geq i$, $\forall i = 1, \dots, m$.

A unicidade de u e de cada A_i segue diretamente do Teorema da Divisão. \square

A condição de f ser regular não é tão restritiva quanto parece. Assumindo K um corpo infinito podemos compor f com um automorfismo linear de $K[[x_1, \dots, x_r]]$ e transformá-lo em uma série regular em uma de suas variáveis, escolhidas arbitrariamente, o que é mostrado no teorema a seguir.

Teorema 2.5.5. *Seja K um corpo infinito. Dado uma família finita \mathcal{F} de polinômios homogêneos de $K[y_1, \dots, y_r] - \{0\}$, então existe um automorfismo linear*

$$T : K[x_1, \dots, x_r] \longrightarrow K[y_1, \dots, y_r]$$

tal que $\forall F \in \mathcal{F}$, de grau n , existe $\lambda_F \in K - \{0\}$ tal que

$$F(T(x_1, \dots, x_r)) = \lambda_F x_r^n + (\text{termos de grau menor que } n \text{ em } x_r).$$

Demonstração. Como \mathcal{F} é finita e K é infinito, existem $(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in K^r$ com $\alpha_r \neq 0$ tais que

$$F(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \neq 0, \forall F \in \mathcal{F}.$$

Defina T da seguinte forma:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix}}_Y = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_r \end{pmatrix}}_T \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}}_X.$$

Daí temos,

$$\begin{aligned} y_1^{m_1} \cdots y_r^{m_r} &= (x_1 + \alpha_1 x_r)^{m_1} \cdots (x_{r-1} + \alpha_{r-1} x_r)^{m_{r-1}} (\alpha_r x_r)^{m_r} \\ &= \alpha_1^{m_1} \cdots \alpha_r^{m_r} x_r^{m_1 + \cdots + m_r} + (\text{termos de grau menor que } \sum m_i \text{ em } x_r). \end{aligned}$$

Consequentemente, $\forall F \in \mathcal{F}$ de grau n , temos

$$F(T(x_1, \dots, x_r)) = F(y_1, \dots, y_r) = F(\alpha_1, \dots, \alpha_r) x_r^n + (\text{termos de grau menor que } n \text{ em } x_r).$$

Seja $\lambda_F = F(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \neq 0$. Assim,

$$F(T(x_1, \dots, x_r)) = \lambda_F x_r^n + (\text{termos de grau menor que } n \text{ em } x_r).$$

□

Corolário 2.5.6. *Seja K um corpo infinito. Dado uma família finita \mathcal{F} de séries não nulas de $K[[x_1, \dots, x_r]]$, existe um automorfismo linear T de $K[[x_1, \dots, x_r]]$ tal que todos os elementos de $\mathcal{F} \circ T$, são regulares na última variável.*

Demonstração. Suponha que $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_k\}$ é a família de elementos não nulos de $K[[x_1, \dots, x_r]]$. Para cada $i = 1, \dots, k$ escreva

$$F_i = F_{m_i}^i + F_{m_i+1}^i + \cdots,$$

onde $m_i = \text{mult}(F_i)$ e cada F_j^i é um polinômio homogêneo de grau j .

Sejam $f_i := F_{m_i}^i$ e $\mathcal{F}' = \{f_1, \dots, f_k\}$. Aplicando o teorema anterior a \mathcal{F}' , existe uma transformação linear $T : K[x_1, \dots, x_r] \rightarrow K[x_1, \dots, x_r]$ tal que $f_i(T(x_1, \dots, x_r))$ é regular em x_r , $\forall i$.

Defina $\bar{T} : K[[x_1, \dots, x_r]] \rightarrow K[[y_1, \dots, y_r]]$ por

$$\begin{aligned} \bar{T}(x_j) &= T(x_j) = x_j + \alpha_j x_r = y_j \quad \forall j = 1, \dots, r-1 \\ \bar{T}(x_r) &= \alpha_r x_r = y_r \end{aligned}$$

$\alpha_r \neq 0$. Observe que T é a substituição de x_i por y_i , onde $y_i = x_i + \alpha_i x_r$, quando $i = 1, \dots, r-1$, e $y_r = \alpha_r x_r$. Como a matriz da transformação de T é invertível ($\det(T) \neq 0$, pois $\alpha_r \neq 0$), segue que T é um automorfismo de $K[[x_1, \dots, x_r]]$. □

Do Corolário 2.5.6 e do Teorema da Preparação de Weierstrass, segue o corolário.

Corolário 2.5.7. *Seja $f \in K[[x_1, \dots, x_r]] - \{0\}$ um elemento de multiplicidade n . Então existem um K -automorfismo T de $K[[x_1, \dots, x_r]]$, um elemento invertível u de $K[[x_1, \dots, x_r]]$ e $A_1, \dots, A_n \in K[[x_1, \dots, x_{r-1}]]$ tais que $\text{mult}(A_i) \geq i$, $\forall i = 1, \dots, n$, e*

$$T(f) \cdot u = x_r^n + A_1 x_r^{n-1} + \dots + A_n.$$

2.6 FATORAÇÃO DE SÉRIES DE POTÊNCIAS

Nesta seção veremos que $K[[x_1, \dots, x_r]]$ é um domínio de fatoração única

Definição 2.6.1. Um *pseudo polinômio* (respectivamente, um *polinômio de Weierstrass*) em x_r é uma série de potências p em $K[[x_1, \dots, x_r]]$ da forma

$$p(x_1, \dots, x_r) = x_r^n + A_1 x_r^{n-1} + \dots + A_n \in K[[x_1, \dots, x_{r-1}]] [x_r],$$

onde $n \in \mathbb{N}$, cada $A_i \in K[[x_1, \dots, x_{r-1}]]$ e $\text{mult}(A_i) \geq 1$ (respectivamente, $\text{mult}(A_i) \geq i$), $\forall i = 1, \dots, n$.

Note que todo polinômio de Weierstrass é também um pseudo polinômio.

Observação 2.6.2. Seja $f \in K[[x_1, \dots, x_r]]$ de multiplicidade n , K um corpo infinito. Podemos supor que f é regular em x_r pois, pelo Corolário 2.5.6, existe um automorfismo linear T de $K[[x_1, \dots, x_r]]$ tal que $f \circ T$ é regular em x_r .

Lema 2.6.3. *Dados $f_1, \dots, f_n \in K[[x_1, \dots, x_{r-1}]] [x_r]$ mônicos, o produto $f_1 \cdot \dots \cdot f_n$ é um pseudo polinômio (respectivamente, um polinômio de Weierstrass) se, e somente se, cada f_i é um pseudo polinômio (respectivamente, um polinômio de Weierstrass).*

Demonstração. É suficiente provar o resultado para $n = 2$. Suponha

$$f_1 = x_r^m + A_1 x_r^{m-1} + \dots + A_m \in K[[x_1, \dots, x_{r-1}]] [x_r], \quad (2.8)$$

$$f_2 = x_r^n + B_1 x_r^{n-1} + \dots + B_n \in K[[x_1, \dots, x_{r-1}]] [x_r], \quad (2.9)$$

onde $m, n \geq 1$, $\text{mult}(A_i) \geq 1$ e $\text{mult}(B_j) \geq 1$, para todo i, j . Então,

$$\begin{aligned} f_1 \cdot f_2 &= (x_r^m + A_1 x_r^{m-1} + \dots + A_m) \cdot (x_r^n + B_1 x_r^{n-1} + \dots + B_n) \\ &= x_r^{m+n} + (A_1 + B_1) x_r^{m+n-1} + \dots + \\ &+ (A_i + A_{i-1} B_1 + \dots + A_1 B_{i-1} + B_i) x_r^{m+n-i} + \dots + A_m B_n. \end{aligned}$$

Como $\text{mult}(A_i) \geq 1$ e $\text{mult}(B_j) \geq 1$, segue que

$$\text{mult}(A_i + A_{i-1} B_1 + \dots + A_1 B_{i-1} + B_i) \geq 1.$$

Portanto $f_1 \cdot f_2$ é um pseudo polinômio.

Por outro lado, se $f_1 \cdot f_2$ é um pseudo polinômio, temos

$$\begin{aligned} f_1 \cdot f_2 &= (x_r^m + A_1 x_r^{m-1} + \cdots + A_m) \cdot (x_r^n + B_1 x_r^{n-1} + \cdots + B_n) \\ &= x_r^{m+n} + (A_1 + B_1) x_r^{m+n-1} + \cdots + \\ &\quad + (A_i + A_{i-1} B_1 + \cdots + A_1 B_{i-1} + B_i) x_r^{m+n-i} + \cdots + A_m B_n, \end{aligned}$$

onde cada $\text{mult}(A_i + A_{i-1} B_1 + \cdots + A_1 B_{i-1} + B_i) \geq 1, \forall i$.

Supondo $\text{mult}(A_i) = 0$, para algum i , temos $\text{mult}(f_1(0, \dots, 0, x_r)) < m$. Mas,

$$\text{mult}((f_1 \cdot f_2)(0, \dots, 0, x_r)) = \text{mult}(f_1(0, \dots, 0, x_r)) + \text{mult}(f_2(0, \dots, 0, x_r)) = m + n,$$

o que implicaria $\text{mult}(f_2(0, \dots, 0, x_r)) > n$. Absurdo, pois $f_2 = x_r^n + B_1 x_r^{n-1} + \cdots + B_n$.

Analogamente, mostra-se que $\text{mult}(B_j) \geq 1, \forall j$.

Se f_1, f_2 são como em (2.8) e (2.9) e $f_1 \cdot f_2$ é um polinômio de Weierstrass, então

$$\text{mult}(f_1) + \text{mult}(f_2) = \text{mult}(f_1 \cdot f_2) = \text{mult}((f_1 \cdot f_2)(0, \dots, 0, x_r)) = m + n.$$

Como $\text{mult}(f_1) \leq m$ e $\text{mult}(f_2) \leq n$, segue da equação acima que $\text{mult}(f_1) = m$ e $\text{mult}(f_2) = n$. Consequentemente,

$$\text{mult}(f_1) = \text{mult}(x_r^m + A_1 x_r^{m-1} + \cdots + A_m) = \min_i (\text{mult}(x_r^m), \text{mult}(A_i x_r^{m-i})) = m.$$

Logo,

$$\text{mult}(A_i x_r^{m-i}) = \text{mult}(A_i) + \text{mult}(x_r^{m-i}) = \text{mult}(A_i) + (m - i) \geq m,$$

isto é, $\text{mult}(A_i) \geq i$. Analogamente, podemos mostrar que $\text{mult}(B_j) \geq j$. Portanto, f_1 e f_2 são polinômios de Weierstrass.

Mostrar que se f_1 e f_2 são polinômios de Weierstrass então $f_1 \cdot f_2$ é um polinômio de Weierstrass é análogo a mostrar que se f_1 e f_2 são pseudos polinômios, então $f_1 \cdot f_2$ é um pseudo polinômio. \square

Lema 2.6.4. *Seja $f \in K[[x_1, \dots, x_{r-1}]] [x_r]$ um pseudo polinômio. Então f é irredutível em $K[[x_1, \dots, x_r]]$ se, e somente se, f é irredutível em $K[[x_1, \dots, x_{r-1}]] [x_r]$.*

Demonstração. Suponha que f seja redutível em $K[[x_1, \dots, x_r]]$, então existem séries $f_1, f_2 \in K[[x_1, \dots, x_r]]$ não invertíveis tais que

$$f = f_1 \cdot f_2.$$

Como f é um pseudo polinômio temos que f é regular de certa ordem com respeito a x_r , então pelo Lema 2.5.2 temos que f_1 e f_2 são regulares de certa ordem com respeito a x_r de ordem maior ou igual a 1.

Do Teorema da Preparação de Weierstrass, existem únicos $u_1, u_2 \in K[[x_1, \dots, x_r]]$ invertíveis tais que

$$h_1 = f_1 \cdot u_1 \text{ e } h_2 = f_2 \cdot u_2$$

são pseudo polinômios de grau maior ou igual a 1. Tomando $u = u_1 \cdot u_2$ temos que u é invertível em $K[[x_1, \dots, x_r]]$ e

$$f \cdot u = (f_1 \cdot u_1) \cdot (f_2 \cdot u_2) = h_1 \cdot h_2 \in K[[x_1, \dots, x_{r-1}]] [x_r].$$

Como h_1 e h_2 são pseudo polinômios segue do Lema 2.6.3 que $f \cdot u$ é um pseudo polinômio.

Além disso, como f é um pseudo polinômio e $f \cdot 1 = f$, da unicidade do Teorema da Preparação de Weierstrass segue que $f = h_1 \cdot h_2$, ou seja, f é redutível em $K[[x_1, \dots, x_{r-1}]] [x_r]$.

Reciprocamente, se $f \in K[[x_1, \dots, x_{r-1}]] [x_r]$ é um pseudo polinômio redutível de grau d , temos que existem h_1 e $h_2 \in K[[x_1, \dots, x_{r-1}]] [x_r]$, mônicos de grau m e n , respectivamente, tais que

$$f = h_1 \cdot h_2,$$

com $m, n \geq 1$ e $d = m + n$. Pelo Lema 2.6.3, h_1 e h_2 são pseudo polinômios de grau maior ou igual a 1 e, portanto, são não invertíveis em $K[[x_1, \dots, x_r]]$, ou seja, f é redutível em $K[[x_1, \dots, x_r]]$. \square

Proposição 2.6.5. *O anel $K[[x]]$ é um domínio de fatoração única.*

Demonstração. Vamos mostrar $K[[x]]$ é um domínio de ideais principais.

Sejam I um ideal não nulo de $K[[x]]$ e S o conjunto definido por

$$S = \{n \in \mathbb{N}; n = \text{mult}(f) \text{ para algum } f \in I - \{0\}\}.$$

Como $S \neq \emptyset$, pelo Princípio da Boa Ordenação, existe $\lambda \in S$ mínimo.

Seja $f \in I$ tal que $\text{mult}(f) = \lambda$. Então,

$$f = a_\lambda x^\lambda + a_{\lambda+1} x^{\lambda+1} + \dots = x^\lambda (a_\lambda + a_{\lambda+1} x + \dots); \quad a_\lambda \neq 0.$$

Do fato de $a_\lambda \neq 0$, temos que a série $a_\lambda + a_{\lambda+1} x + \dots$ é invertível em $K[[x]]$, ou seja, existe $h \in K[[x]]$ tal que $h \cdot (a_\lambda + a_{\lambda+1} x + \dots) = 1$. Consequentemente, $f \cdot h = x^\lambda$. Como $f \cdot h \in I$, segue que $\langle x^\lambda \rangle \subset I$.

Seja $g \in I$. Então, $\text{mult}(g) \geq \lambda$ e

$$\begin{aligned} g &= b_\alpha x^\alpha + b_{\alpha+1} x^{\alpha+1} + \dots; \quad b_\alpha \neq 0 \text{ e } \alpha \geq \lambda \\ &= x^\alpha (b_\alpha + b_{\alpha+1} x + \dots) = x^{\alpha-\lambda} (b_\alpha + b_{\alpha+1} x + \dots) x^\lambda, \end{aligned}$$

ou seja, $g \in \langle x^\lambda \rangle$. Logo, $I = \langle x^\lambda \rangle$.

Como todo domínio de ideais principais também é um domínio de fatoração única segue o resultado. \square

Teorema 2.6.6. $K[[x_1, \dots, x_r]]$ é um domínio de fatoração única.

Demonstração. Ver [8], p. 25. □

Corolário 2.6.7. *Suponha que $F \in K[[x_1, \dots, x_{r-1}]]x_r$ é um pseudo polinômio (respectivamente, um polinômio de Weierstrass) com respeito a variável x_r . Se $F = F_1 \cdot \dots \cdot F_s$ é a decomposição de F como produto de irredutíveis em $K[[x_1, \dots, x_r]]$, então podemos escolher a decomposição onde cada F_i é um pseudo polinômio (respectivamente, um polinômio de Weierstrass).*

Demonstração. Do Teorema 2.6.6 e do Lema de Gauss, temos que $K[[x_1, \dots, x_{r-1}]]x_r$ é um domínio de fatoração única.

Sejam $F_1, \dots, F_s \in K[[x_1, \dots, x_{r-1}]]x_r$ tais que $F = F_1 \cdot \dots \cdot F_s$ é a decomposição de F em fatores irredutíveis de $K[[x_1, \dots, x_{r-1}]]x_r$. Pelo Lema 2.6.4 essa decomposição é também a decomposição de F em fatores irredutíveis de $K[[x_1, \dots, x_r]]$. Como F é um pseudo polinômio (respectivamente, um polinômio de Weierstrass) segue que ele é mônico e desta forma podemos considerar cada F_i mônico. Do Lema 2.6.3 segue o resultado. □

3 CURVAS PLANAS

A partir de agora iremos relacionar o que vimos acerca de séries de potências com curvas algebróides planas. Embora muitos resultados vistos anteriormente sejam válidos para corpos arbitrários focaremos apenas em resultados para corpos com característica zero, pois esta é uma condição necessária para a parametrização de Puiseux.

3.1 CURVAS ALGEBRÓIDES PLANAS

O estudo de uma curva algébrica plana ou uma curva analítica em \mathbb{C}^2 pode ser feito através das propriedades algébricas desta curva vista como um elemento de $K[[x, y]]$.

Definição 3.1.1. Dois elementos $f, g \in K[[x, y]]$ são ditos equivalentes se existe $h \in K[[x, y]]$ invertível tal que $f = hg$. A classe de equivalência de um elemento não invertível $f \in K[[x, y]] - \{0\}$, denotada por (f) , C_f , ou simplesmente f , quando não houver confusão, é chamada uma curva algebróide plana.

Como a multiplicidade de uma série é invariante por multiplicação de invertível, faz sentido definir a *multiplicidade* de uma curva algebróide plana (f) como sendo a multiplicidade de f .

Definição 3.1.2. Uma curva algebróide plana será chamada de regular se sua multiplicidade for igual a 1. Caso contrário, dizemos que a curva é singular.

Uma curva algebróide plana (f) será dita *irredutível* se f for irredutível. Neste caso, chamamos (f) de ramo plano ou simplesmente ramo.

Definição 3.1.3. Seja (f) uma curva algebróide plana e considere a decomposição de f em fatores irredutíveis em $K[[x, y]]$, $f = f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_r$. As curvas algebróides planas (f_j) , para $j = 1, \dots, r$, serão chamadas de ramos da curva (f) . A curva (f) será chamada de reduzida se $(f_i) \neq (f_j)$, para $i \neq j$, isto é, se f_i e f_j não forem associados quando $i \neq j$.

Muitas propriedades de uma curva algebróide plana são preservadas por K -automorfismos de $K[[x, y]]$. Isto motiva a seguinte definição.

Definição 3.1.4. Duas curvas algebróides planas (f) e (g) são ditas formalmente equivalentes, ou simplesmente equivalentes, se existe um K -automorfismo ϕ de $K[[x, y]]$ e um elemento invertível $u \in K[[x, y]]$ tal que

$$\phi(f) = u \cdot g.$$

Escreveremos $(f) \sim (g)$ para denotar duas curvas algebróides planas que são formalmente equivalentes.

Proposição 3.1.5. *Se (f) e (g) são curvas regulares, então $(f) \sim (g)$.*

Demonstração. Como (f) é regular temos que $\text{mult}(f) = 1$, então $f = ax + by + \dots$, com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Se $a \neq 0$, podemos considerar o K -automorfismo ϕ definido por

$$\begin{aligned} \phi : K[[x, y]] &\longrightarrow K[[x, y]] \\ x &\longmapsto f \\ y &\longmapsto y \end{aligned}$$

que mostra que $(f) \sim (x)$. Se $b \neq 0$, teremos $(f) \sim (y)$. Analogamente, podemos mostrar que $(g) \sim (x)$ ou $(g) \sim (y)$. Como $(y) \sim (x)$, por transitividade, temos que $(f) \sim (g)$. \square

Definição 3.1.6. Seja (f) uma curva algebróide plana de multiplicidade n e considere f escrito na forma

$$f = F_n + F_{n+1} + \dots, \quad (3.1)$$

onde cada F_i é um polinômio homogêneo em $K[[x, y]]$ de grau i e $F_n \neq 0$. A curva (F_n) é dita cone tangente de (f) . Se $f = ax + by$, com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, então (f) é chamada de *reta*.

Como qualquer polinômio homogêneo em duas variáveis em um corpo algebricamente fechado se decompõe em fatores lineares (ver [6], p. 24), podemos escrever

$$F_n = \prod_{i=0}^s (a_i x + b_i y)^{r_i},$$

onde $\sum_{i=0}^s r_i = n$, $a_i, b_j \in K$, para $i, j = 1, \dots, s$ e $a_i b_j - a_j b_i \neq 0$, se $i \neq j$.

Note que o cone tangente de uma curva (f) consiste no produto de retas de $K[[x, y]]$, cada uma com multiplicidade r_i . Tais retas serão chamadas de *retas tangentes* de (f) . Se a curva (f) é regular, ou seja, se $\text{mult}(f) = 1$, então o cone tangente de (f) consiste de apenas uma reta tangente de multiplicidade igual a 1.

Exemplo 3.1.7. Considere a curva $(g) = (y^2 - x^2(x + 1))$. Escrevendo g como em (3.1), temos

$$g = (y^2 - x^2) - x^3.$$

Assim, $\text{mult}(g) = 2$, seu cone tangente é $(G_2) = (y^2 - x^2) = (y - x)(y + x)$ e suas retas tangentes são $(y - x)$ e $(y + x)$ cada uma com multiplicidade igual a 1.

Exemplo 3.1.8. Seja $(f) = (y^2 - x^3)$. Então $f = y^2 - x^3$. Daí, $\text{mult}(f) = 2$, seu cone tangente é $(F_2) = (y^2)$ e sua reta tangente é (y) que possui multiplicidade igual a 2.

Proposição 3.1.9. *Sejam f e $g \in K[[x, y]]$ com formas iniciais F_n e G_m , respectivamente. Se $(f) \sim (g)$, então $n = m$ e $(F_n) \sim (G_n)$.*

Demonstração. Se (f) e (g) são equivalentes então existem um K -automorfismo ϕ de $K[[x, y]]$ e um invertível $u \in K[[x, y]]$ tal que

$$\phi(f) = u \cdot g.$$

Como ϕ é um automorfismo ele preserva multiplicidade, então $n = m$ (Observação 2.2.2). Além disso,

$$\phi(f) = \phi(F_n) + \phi(F_{n+1} + \dots) = u \cdot G_n + u \cdot (G_{n+1} + \dots).$$

Como o único $\phi(F_i)$ que possui multiplicidade n é quando $i = n$ e o único G_i que possui multiplicidade igual a n é também quando $i = n$, segue que $\phi(F_n) = u \cdot G_n$, ou seja, $(F_n) \sim (G_n)$. \square

3.2 TEOREMA DE NEWTON-PUISEUX

Nesta seção retornaremos ao estudo do corpo das séries de Laurent, denotado por $K((x))$, que é o corpo de frações do anel $K[[x]]$.

De agora em diante assumiremos o corpo K será um corpo algebricamente fechado de característica a zero.

Lembremos que um elemento f de $K((x))$ é da forma

$$f(x) = b_{-m}x^{-m} + b_{-m+1}x^{-m+1} + b_{-1}x^{-1} + b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots,$$

onde $b_i \in K$, para $i \geq -m$, $m \in \mathbb{N}$.

É fato que $\overline{K((x))}$, o fecho algébrico de $K((x))$, contém as raízes da equação $y^n - x = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Consequentemente, contém elementos da forma $x^{\frac{1}{n}}$ e qualquer uma de suas potências.

Definição 3.2.1. Seja F/K uma extensão de corpos. Se o grupo

$$G(F/K) = \{\sigma : F \longrightarrow F; \sigma \text{ é um } K\text{-automorfismo}\}$$

é finito e K é seu corpo fixo, isto é, $\{a \in F; \sigma(a) = a, \forall \sigma \in G(F/K)\} = K$, então a extensão F/K é chamada galoisiana e o grupo $G(F/K)$ é chamado grupo de Galois da extensão F/K .

Denotaremos por U_n o grupo multiplicativo das n -ésimas raízes da unidade em K . Este grupo é cíclico, já que é um subgrupo multiplicativo finito de um corpo (ver [12], Teorema 1.9, p. 177) e tem n elementos distintos já que o polinômio $x^n - 1$ é separável sobre K , pois K possui característica zero e é algebricamente fechado.

Do Teorema 2.3.2, temos que qualquer K -automorfismo σ de $K((x^{\frac{1}{n}}))$ é da forma $\sigma(x^{\frac{1}{n}}) = a(x^{\frac{1}{n}}) \cdot x^{\frac{1}{n}}$, para algum $a(x^{\frac{1}{n}}) \in K[[x^{\frac{1}{n}}]]$ invertível.

Lema 3.2.2. *A extensão de corpos $K((x^{\frac{1}{n}}))/K((x))$ é finita e galoisiana com grupo de Galois isomorfo ao grupo U_n .*

Demonstração. Sejam o grupo de Galois da extensão $G(K((x^{\frac{1}{n}}))/K((x))) = G$ e $\sigma \in G$. Então, σ é um $K((x))$ -automorfismo de $K((x^{\frac{1}{n}}))$, e para algum $b_\sigma(x^{\frac{1}{n}}) \in K[[x^{\frac{1}{n}}]]$, temos

$$\sigma\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = b_\sigma\left(x^{\frac{1}{n}}\right) \cdot x^{\frac{1}{n}}.$$

Além disso,

$$\left[b_\sigma\left(x^{\frac{1}{n}}\right)\right]^n \cdot x = \left(\sigma\left(x^{\frac{1}{n}}\right)\right)^n = \sigma\left(\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n\right) = \sigma(x) = x.$$

Observe que $\sigma(x^{\frac{1}{n}}) = \sum_{i=i_0}^{\infty} b_i x^{\frac{i}{n}}$, com $b_{i_0} \neq 0$. Da equação acima, temos

$$x = \left(\sigma\left(x^{\frac{1}{n}}\right)\right)^n = \left(b_{i_0} x^{\frac{i_0}{n}} + b_{i_0+1} x^{\frac{i_0+1}{n}} + \dots\right)^n.$$

Por igualdade de séries, temos que $i_0 = 1$, $b_{i_0}^n = 1 = [b_\sigma(x^{\frac{1}{n}})]^n$ e $b_i = 0$, $\forall i > 1$. Então $b_\sigma(x^{\frac{1}{n}}) \in U_n \subset K$. Vamos denotar $b_\sigma(x^{\frac{1}{n}})$ apenas por b_σ .

Afirmamos que $h : G \rightarrow U_n$, definido por $h(\sigma) = b_\sigma$, é um isomorfismo de grupos.

De fato, se $\rho \in G$, então

$$\begin{aligned} \rho \circ \sigma\left(x^{\frac{1}{n}}\right) &= b_{\rho \circ \sigma}\left(x^{\frac{1}{n}}\right) x^{\frac{1}{n}} = \rho\left(\sigma\left(x^{\frac{1}{n}}\right)\right) = \rho\left(b_\sigma\left(x^{\frac{1}{n}}\right) x^{\frac{1}{n}}\right) = b_\sigma\left(x^{\frac{1}{n}}\right) \rho\left(x^{\frac{1}{n}}\right) \\ &= b_\sigma\left(x^{\frac{1}{n}}\right) b_\rho\left(x^{\frac{1}{n}}\right) x^{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Daí, $b_{\rho \circ \sigma} = b_\sigma b_\rho$ e h é um homomorfismo de grupos.

Suponha que $b_\sigma = b_\rho$. Então

$$\sigma\left(\sum b_i x^{\frac{i}{n}}\right) = \sum b_i b_\sigma^i x^{\frac{i}{n}} = \sum b_i b_\rho^i x^{\frac{i}{n}} = \rho\left(\sum b_i x^{\frac{i}{n}}\right),$$

e, conseqüentemente, $\rho = \sigma$ e h é injetivo. Pela construção de h segue a sobrejetividade. Logo, h é um isomorfismo de grupos.

Agora vamos provar que o corpo fixo de G é exatamente $K((x))$. Vimos que $\sigma(x) = x$, $\forall \sigma \in G$, conseqüentemente $K((x))$ está contido no corpo fixo de G .

Suponha que dados $\sum_{i \geq i_0} b_i x^{\frac{i}{n}} \in K((x^{\frac{1}{n}}))$ e $\zeta \in U_n$, temos

$$\sum_{i \geq i_0} b_i x^{\frac{i}{n}} = \sum_{i \geq i_0} b_i \zeta^i x^{\frac{i}{n}}.$$

Portanto $b_i = b_i \zeta^i$, $\forall i \geq i_0$. Se $n \mid i$ então $b_i \zeta^i x^{\frac{i}{n}} \in K((x))$. Caso contrário, $b_i = 0$, pois sendo $\zeta \in U_n$ uma n -ésima raiz primitiva da unidade e $b_i(1 - \zeta^i) = 0$, temos $b_i = 0$. Conseqüentemente, $\sum_{i \geq i_0} b_i x^{\frac{i}{n}} \in K((x))$. \square

O Lema 3.2.2 também mostra que $K((x)) \subset K((x^{\frac{1}{n}})) \subset \overline{K((x))}$, onde $\overline{K((x))}$ denota o fecho algébrico de $K((x))$. Com isso vamos definir

$$K((x))^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} K((x^{\frac{1}{n}})) \subset \overline{K((x))}.$$

De agora até o fim desta seção nosso principal objetivo será mostrar que a inclusão acima é uma igualdade, ou seja, que o fecho algébrico de $K((x))$ é $K((x))^*$.

Observe que um elemento f de $K((x))^*$ é da forma

$$f = b_1 x^{\frac{p_1}{q_1}} + b_2 x^{\frac{p_2}{q_2}} + \dots, \quad (3.2)$$

onde $b_\gamma \in K$, $p_i, q_j \in \mathbb{Z}$ e $q_j \neq 0, \forall \gamma, i, j$ e $\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2} < \dots$, onde a coleção de frações $p_i/q_i; i \in \mathbb{N} - \{0\}$, admite um denominador em comum.

Exemplo 3.2.3. A série $\sum_{i \in \mathbb{N}} x^{\frac{1}{i}} \notin K((x))^*$, pois seus expoentes não admitem um denominador comum.

Se a série f em (3.2) é tal que $b_1 \neq 0$, então diremos que a multiplicidade de f é $\text{mult}(f) = \frac{p_1}{q_1}$. Por conveniência definimos $\text{mult}(0) = \infty$. Além disso, também é válido o seguinte resultado.

Proposição 3.2.4. *Dados f e $g \in K((x))^*$. Então*

- (i) $\text{mult}(f \cdot g) = \text{mult}(f) + \text{mult}(g)$ e
- (ii) $\text{mult}(f + g) \geq \min\{\text{mult}(f), \text{mult}(g)\}$.

Demonstração. Análoga à demonstração da Proposição 2.1.4 □

Se $K[[x]]^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} K[[x^{\frac{1}{n}}]]$, temos que qualquer elemento f de $K[[x]]^*$ é da forma (3.2) com $\text{mult}(f) \geq 0$.

Lema 3.2.5. $K((x))^*$ é um subcorpo de $\overline{K((x))}$.

Demonstração. Se f e $g \in K((x))^*$, então existem $r, s \in \mathbb{N}$ tais que $f \in K((x^{\frac{1}{r}}))$ e $g \in K((x^{\frac{1}{s}}))$. Como

$$K((x^{\frac{1}{r}})) \subset K((x^{\frac{1}{rs}})) \quad \text{e} \quad K((x^{\frac{1}{s}})) \subset K((x^{\frac{1}{rs}}))$$

temos que $f + g, f \cdot g$, e $\frac{f}{g}$ (se $g \neq 0$) pertencem a $K((x^{\frac{1}{rs}})) \subset K((x))^*$. □

Lema 3.2.6. *Seja K um corpo algebricamente fechado de característica zero. Então, todo polinômio da forma*

$$p(y) = y^n + a_2 y^{n-2} + \dots + a_n \in K[y], \quad (3.3)$$

com algum dos $a_i \neq 0$ e $n \geq 2$, admite pelo menos duas raízes distintas em K .

Demonstração. Como K é algebricamente fechado segue que K contém todas as raízes de $p(y)$. Suponha que $p(y)$ admite somente uma raiz α . Então

$$p(y) = (y - \alpha)^n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{n!}{i!(n-i)!} y^{n-i} \alpha^i = y^n - \alpha n y^{n-1} + \dots$$

Como $p(y)$ é dado em (3.3) segue, por igualdade de polinômios, que $-\alpha n = 0$, então $\alpha = 0$ já que $n \neq 0$ e a característica de K é zero. E, se isto ocorre, temos que $a_i = 0$, $\forall i = 2, \dots, n$, o que contradiz a hipótese. □

Teorema 3.2.7. (Teorema de Newton-Puiseux) $\overline{K((x))} = K((x))^*$.

Demonstração. Se mostrarmos que $K((x))^*$ é algebricamente fechado o resultado será válido. Para isso vamos mostrar que todo polinômio em $K((x))^*[y]$ de grau maior ou igual a 2 é redutível.

Seja $p(x, y) = a_0(x)y^n + a_1(x)y^{n-1} + \dots + a_n(x) \in K((x))^*[y]$, onde $a_0(x) \neq 0$ e $n \geq 2$. Sem perda de generalidade vamos considerar $a_0(x) = 1$.

Usaremos uma mudança de variáveis para eliminar em $p(x, y)$ o termo de grau $n - 1$. Considere o $K((x))^*$ -isomorfismo dado por

$$\begin{aligned} \Phi : K((x))^*[y] &\longrightarrow K((x))^*[z] \\ y &\longmapsto z - \frac{a_1(x)}{n}. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} q(x, z) &= \Phi(p(x, y)) = \left(z - \frac{a_1(x)}{n}\right)^n + a_1(x) \left(z - \frac{a_1(x)}{n}\right)^{n-1} + \dots + a_n(x) = \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{n!}{i!(n-i)!} z^{n-i} \left(\frac{a_1(x)}{n}\right)^i + \\ &+ a_1(x) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!} z^{n-i-1} \left(\frac{a_1(x)}{n}\right)^i + \dots = \\ &= \left[z^n - \frac{\mathcal{N}z^{n-1}a_1(x)}{\mathcal{N}} + \dots \right] + \left[a_1(x)z^{n-1} + \dots \right] + \dots \\ &= z^n + b_2(x)z^{n-2} + \dots + b_n(x), \end{aligned}$$

onde $b_i(x) \in K((x))^*$, para todo $i = 2, \dots, n$. Se $b_i(x) = 0$, $\forall i$, segue que q é redutível em $K((x))^*[z]$ e com isso p será redutível em $K((x))^*[y]$. Do contrário, existe i tal que $b_i(x) \neq 0$. Denotaremos por u_i a multiplicidade de $b_i(x)$. Considere

$$u = \min \left\{ \frac{u_i}{i}; 2 \leq i \leq n \right\}.$$

Seja $2 \leq r \leq n$ tal que $u = \frac{u_r}{r}$ e considere a aplicação

$$\begin{aligned} \Psi : K((x))^*[z] &\longrightarrow K((w))^*[z] \\ x &\mapsto w^r \\ z &\mapsto zw^{u_r}. \end{aligned}$$

Vamos mostrar que Ψ é um isomorfismo de K -álgebras que preserva o grau de polinômios em z .

Dado $f(x, z) = \alpha_0(x)z^n + \alpha_1(x)z^{n-1} + \dots + \alpha_n(x) \in K((x))^*[z]$ de grau n , temos

$$\Psi(f) = \alpha_0(w^r)z^n w^{u_r n} + \dots + \alpha_n(w^r)$$

que ainda é um polinômio de grau n em z . Logo, Ψ preserva grau de polinômios em z .

O homomorfismo ψ definido por

$$\begin{aligned} \psi : K((w))^*[z] &\longrightarrow K((x))^*[z] \\ w &\mapsto x^{\frac{1}{r}} \\ z &\mapsto \frac{z}{x^u} \end{aligned}$$

é o inverso de Ψ .

De fato, observe que

- $\psi(\Psi(x)) = \psi(w^r) = (\psi(w))^r = (x^{\frac{1}{r}})^r = x$.
- $\psi(\Psi(z)) = \psi(zw^{u_r}) = \psi(z) \cdot (\psi(w))^{u_r} = \frac{z}{x^u} \cdot x^{\frac{u_r}{r}} = z \cdot \frac{x^u}{x^u} = z$.
- $\Psi(\psi(w)) = \Psi(x^{\frac{1}{r}}) = (w^r)^{\frac{1}{r}} = w$.
- $\Psi(\psi(z)) = \Psi\left(\frac{z}{x^u}\right) = \Psi(z) \cdot (\Psi(x))^{-u} = zw^{u_r} \cdot (w^r)^{-u} = z \cdot \frac{w^{u_r}}{w^{u_r}} = z$.

Logo, $\psi = \Psi^{-1}$ é homomorfismo inverso de Ψ .

Seja

$$h(w, z) = \frac{\Psi(q(x, z))}{w^{nu_r}} = \frac{q(w^r, zw^{u_r})}{w^{nu_r}} = z^n + \sum_{i=2}^n c_i(w)z^{n-i} \in K[[w]]^*[z], \quad (3.4)$$

onde $c_i(w) = \frac{b_i(w^r)}{w^{iu_r}}$. Note que $\text{mult}(c_i) = ru_i - iu_r \geq 0$, com igualdade ocorrendo quando $i = r$. Consequentemente, $c_r(0) \neq 0$ e $c_i(w) \in K[[w]]^*$, para $2 \leq i \leq n$. Então, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$h(w^k, z) = z^n + \sum_{i=2}^n c_i(w^k)z^{n-i} \in K[[w]][z].$$

Como $c_r(0) \neq 0$ e a característica de K é zero, pelo Lema 3.2.6 segue que $h(0, z)$ têm pelo menos duas raízes distintas. Então, pelo Lema de Hensel (Teorema 2.4.2), existem $h_1(w, z), h_2(w, z) \in K[[w]][z]$ de grau maior ou igual a um tais que

$$h(w^k, z) = h_1(w, z) \cdot h_2(w, z).$$

De (3.4), segue que $\Psi(q(x, z)) = w^{nu_r} h(w, z) = w^{nu_r} h_1(w^{\frac{1}{k}}, z) \cdot h_2(w^{\frac{1}{k}}, z)$. Além disso,

$$\begin{aligned} q(x, z) &= \Psi^{-1}(w^{nu_r} h(w, z)) = \Psi^{-1}(w^{nu_r} h_1(w^{\frac{1}{k}}, z) \cdot h_2(w^{\frac{1}{k}}, z)) \\ &= x^{\frac{nu_r}{r}} \Psi^{-1}(h_1(w^{\frac{1}{k}}, z)) \cdot \Psi^{-1}(h_2(w^{\frac{1}{k}}, z)). \end{aligned}$$

Conseqüentemente, $q(x, z)$ é redutível em $K((x))^*[z]$. □

3.3 EXTENSÃO DO CORPO DAS SÉRIES DE LAURENT

Como visto no Lema 3.2.2, o grupo de Galois da extensão $K((x^{\frac{1}{n}}))^*/K((x))$ é isomorfo a U_n . Assim, temos que um elemento $\rho \in U_n$ age sobre um elemento

$$\alpha = \sum_{i \geq i_0} b_i (x^{\frac{1}{n}})^i = \sum_{i \geq i_0} b_i x^{\frac{i}{n}} \in K((x^{\frac{1}{n}}))$$

da seguinte forma

$$\rho * \alpha = \sum_{i \geq i_0} b_i (\rho(x^{\frac{1}{n}}))^i = \sum_{i \geq i_0} b_i b_\rho^i x^{\frac{i}{n}}.$$

A função

$$\begin{aligned} \phi : U_n \times K((x^{\frac{1}{n}})) &\longrightarrow K((x^{\frac{1}{n}})) \\ (\rho, \alpha) &\longmapsto \rho * \alpha = \sum_{i \geq i_0} b_i b_\rho^i x^{\frac{i}{n}} \end{aligned}$$

é uma ação de grupos. De fato,

$$\phi(e, \alpha) = \sum_{i \geq i_0} b_i b_e^i x^{\frac{i}{n}} = \sum_{i \geq i_0} b_i (e)^i x^{\frac{i}{n}} = \alpha,$$

onde e é elemento neutro de U_n . Além disso, se $\rho, \gamma \in U_n$, então

$$\phi(\rho, \phi(\gamma, \alpha)) = \phi\left(\rho, \sum_{i \geq i_0} b_i b_\gamma^i x^{\frac{i}{n}}\right) = \sum_{i \geq i_0} b_i b_\rho^i b_\gamma^i x^{\frac{i}{n}} = \sum_{i \geq i_0} b_i (b_\rho b_\gamma)^i x^{\frac{i}{n}} = \phi(\rho\gamma, \alpha).$$

Logo, ϕ é uma ação de U_n em $K((x^{\frac{1}{n}}))$.

Lema 3.3.1. *Seja $\alpha \in K((x))^* - K((x))$ e $n = \min\{q; \alpha \in K((x^{\frac{1}{q}}))\}$. Então $\zeta * \alpha \neq \rho * \alpha$, $\forall \zeta, \rho \in U_n$, com $\zeta \neq \rho$.*

Demonstração. Como $\alpha \notin K((x))$, temos que $n \geq 2$. Suponha que $\zeta * \alpha = \rho * \alpha$, com $\zeta \neq \rho$. Então, escrevendo $\alpha = \sum_{i \geq i_0} b_i x^{\frac{i}{n}}$, temos

$$\zeta * \alpha = \sum_{i \geq i_0} b_i b_\zeta^i x^{\frac{i}{n}} = \sum_{i \geq i_0} b_i b_\rho^i x^{\frac{i}{n}} = \rho * \alpha.$$

Consequentemente, $b_\zeta^i = b_\rho^i$, $\forall i$ tal que $b_i \neq 0$, ou seja, $\zeta^i = \rho^i$, $\forall i$ tal que $b_i \neq 0$.

Seja $d = \text{mdc}\{n, i; \text{ onde } i \text{ é tal que } b_i \neq 0\}$. Então $d = 1$, pois caso contrário, teríamos $\alpha \in K((x^{\frac{1}{n'}}))$, com $n' = \frac{n}{d} < n$, o que é uma contradição. Logo existem inteiros λ_j e λ , tais que $n\lambda + i_0\lambda_0 + i_1\lambda_1 + \dots + i_k\lambda_k = 1$. Daí,

$$\zeta = (\zeta^n)^\lambda (\zeta^{i_0})^{\lambda_0} \dots (\zeta^{i_k})^{\lambda_k} = (\rho^n)^\lambda (\rho^{i_0})^{\lambda_0} \dots (\rho^{i_k})^{\lambda_k} = \rho.$$

Absurdo, pois contradiz nossa hipótese que $\zeta \neq \rho$. □

A seguir iremos descrever as principais extensões algébricas de $K((x))$, isto é, o corpo $K((x))(\alpha)$ obtido a partir da adjunção de um elemento algébrico α sobre $K((x))$.

Seja $\alpha \in K((x^{\frac{1}{n}}))$ algébrico sobre $K((x))$. Podemos escrever $K((x))(\alpha)$ da seguinte forma

$$K((x))(\alpha) = K((x))[\alpha] = \{P(\alpha); P \in K((x))[y]\}.$$

Teorema 3.3.2. *Seja $\alpha \in K((x))^* - K((x))$ que iremos denotar por $\alpha = \varphi(x^{\frac{1}{n}})$, onde $n = \min\{q \in \mathbb{N}; \alpha \in K((x^{\frac{1}{q}}))\}$. Então*

(i) $K((x))[\alpha] = K((x^{\frac{1}{n}}))$.

(ii) O polinômio minimal de α sobre $K((x))$ é dado por

$$g(x, y) = \prod_{i=1}^n (y - \alpha_i),$$

onde $\alpha_i = \varphi(\zeta^i x^{\frac{1}{n}})$, para algum gerador ζ de U_n .

(iii) Temos $g(x, y) = y^n + a_1(x)y^{n-1} + \dots + a_n(x) \in K((x))[y]$, onde

$$\text{mult}(a_i(x)) \geq i \cdot \text{mult}(\alpha) = i \cdot \frac{\text{mult}(a_n(x))}{n},$$

com igualdade ocorrendo quando $i = n$. Em particular, se $\text{mult}(\alpha) > 0$ (respectivamente, $\text{mult}(\alpha) \geq 1$), então $g(x, y) \in K[[x]][y]$ e é um pseudo polinômio (respectivamente, um polinômio de Weierstrass).

Demonstração. (i) Sejam $G = G(K((x^{\frac{1}{n}})/K((x)))$ e $G' = G(K((x^{\frac{1}{n}})/K((x))[\alpha])$. Note que $G' \subset G$, pois G' é o grupo dos isomorfismos de $K((x^{\frac{1}{n}}))$ que fixam $K((x))[\alpha]$, e em particular, fixam $K((x))$. Além disso, pelo Lema 3.3.1, $G' = \{\sigma \in G; b_\sigma * \alpha = \alpha\}$. Consequentemente, $G' = \langle e \rangle$, pois caso contrário, existiria $\sigma' \in G$, $\sigma' \neq e$, tal que $b_{\sigma'} * \alpha = b_e * \alpha$, com $\sigma' \neq e$, o que contradiz o Lema 3.3.1. Logo $K((x^{\frac{1}{n}})) = K((x))[\alpha]$, já que, pelo Lema 3.2.2, a extensão $K((x^{\frac{1}{n}})/K((x))$ é galoisiana.

(ii) Primeiramente observe que se α é raiz de g e ζ é gerador de U_n , então $\alpha_i = \varphi(\zeta^i x^{\frac{1}{n}}) = \zeta^i * \alpha$ também será uma raiz de g . Logo, $g(x, y) = \prod_{i=1}^n (y - \alpha_i)$. Do fato

de que g é um polinômio em y que possui α como raiz e $G \simeq U_n$ segue que

$$\left| G(K((x))[\alpha]/K((x))) \right| = \deg(g(x, y)) = n.$$

Consequentemente $g(x, y)$ é irreduzível em $K((x))[y]$.

(iii) Os coeficientes de $g(x, y)$ são dados por $a_i(x) = (-1)^i s_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, onde os s_i são polinômios simétricos elementares calculados em $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. De (ii), temos que $\text{mult}(\alpha_j) = \text{mult}(\alpha)$, $\forall j = 1, \dots, n$, daí segue que

$$\text{mult}(a_n(x)) = \text{mult}((-1)^n s_n) = \text{mult}(s_n) = n \cdot \text{mult}(\alpha). \quad (3.5)$$

Além disso,

$$\text{mult}(a_i(x)) = \text{mult}((-1)^i s_i) = \text{mult}(s_i) \geq i \cdot \text{mult}(\alpha). \quad (3.6)$$

De (3.5) e (3.6), temos

$$\text{mult}(a_i(x)) \geq i \cdot \text{mult}(\alpha) = i \cdot \frac{\text{mult}(a_n(x))}{n}.$$

Caso $\text{mult}(\alpha) > 0$ ou $\text{mult}(\alpha) \geq 1$ é imediato que $g(x, y) \in K[[x]][y]$ é um pseudo polinômio ou é um polinômio de Weierstrass, respectivamente. \square

Corolário 3.3.3. *Toda extensão finita de $K((x))$ é da forma $K((x^{\frac{1}{n}}))$, para algum $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Como a característica de K é zero, segue que toda extensão finita de $K((x))$ é simples (ver [14], Teorema 3.3.4(4), p. 81) e consequentemente é da forma $K((x))[\alpha]$, para algum $\alpha \in K((x))^*$. Então, pelo Teorema 3.3.2, segue o resultado. \square

Corolário 3.3.4. *Sejam $f \in K((x))[y]$ um polinômio mônico e irreduzível de grau $n \geq 1$ e $\alpha \in K((x))^*$ uma raiz de f . Então*

$$(i) \min\{q \in \mathbb{N}; \alpha \in K((x^{\frac{1}{q}}))\} = n.$$

(ii) *Se $\alpha_i = \varphi(\zeta^i x^{\frac{1}{n}})$, para algum ζ gerador de U_n , então*

$$f(x, y) = \prod_{i=1}^n (y - \alpha_i).$$

(iii) *Se $f \in K[[x]][y]$ é um pseudo polinômio (respectivamente um polinômio de Weierstrass), então $\text{mult}(\alpha) > 0$ (respectivamente $\text{mult}(\alpha) \geq 1$). Em particular, $\alpha \in K[[x]]^*$.*

Demonstração. Os itens (i) e (ii) seguem do Teorema 3.3.2. Vamos verificar (iii). Suponha que $f(x, y) = y^n + a_1(x)y^{n-1} + \dots + a_n(x) \in K[[x]][y]$ seja um pseudo polinômio. Como

$$-\alpha^n = a_n(x) + a_{n-1}(x)\alpha + \dots + a_1(x)\alpha^{n-1},$$

segue que,

$$\begin{aligned} n \cdot \text{mult}(\alpha) &= \text{mult}(-\alpha^n) = \text{mult}(a_n(x) + a_{n-1}(x)\alpha + \cdots + a_1(x)\alpha^{n-1}) \\ &\geq \min\{\text{mult}(a_1(x)\alpha^{n-1}), \dots, \text{mult}(a_n(x))\} = \min_i\{\text{mult}(a_i(x)) + \text{mult}(\alpha^{n-i})\}. \end{aligned}$$

Para algum $i_0 \in \{1, \dots, n\}$, temos

$$\min_i\{\text{mult}(a_i) + \text{mult}(\alpha^{n-i})\} = \text{mult}(a_{i_0}) + \text{mult}(\alpha^{n-i_0}) = \text{mult}(a_{i_0}) + (n - i_0) \cdot \text{mult}(\alpha).$$

Então,

$$\underline{n \cdot \text{mult}(\alpha)} \geq \text{mult}(a_{i_0}) + \underline{n \cdot \text{mult}(\alpha)} - i_0 \cdot \text{mult}(\alpha).$$

Logo, $i_0 \cdot \text{mult}(\alpha) \geq \text{mult}(a_{i_0}(x))$.

Se f é um pseudo polinômio, temos que $\text{mult}(a_{i_0}(x)) > 0$. Daí, $\text{mult}(\alpha) > 0$. Se f é um polinômio de Weierstrass, então $\text{mult}(a_{i_0}(x)) \geq i_0$. Portanto,

$$i_0 \cdot (1 - \text{mult}(\alpha)) = i_0 - i_0 \cdot \text{mult}(\alpha) \leq \text{mult}(a_{i_0}) - i_0 \cdot \text{mult}(\alpha) \leq 0.$$

Como $i_0 \geq 0$, temos que $\text{mult}(\alpha) \geq 1$. □

Observação 3.3.5. Como o anel $K[[x]]$ é um domínio de fatoração única, com corpo de frações $K((x))$, temos que, pelo Lema de Gauss, todo elemento mônico irredutível em $K[[x]][y]$ é também irredutível em $K((x))[y]$.

A seguir mostraremos um resultado que servirá como critério para verificar se uma série em $K[[x, y]]$ é irredutível.

Lema 3.3.6. (Lema da Unitangente) *Seja $f \in K[[x, y]]$ com $f(0, 0) = 0$ irredutível de multiplicidade n . Então a forma inicial de f é do tipo*

$$F_n = (ax + by)^n,$$

com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

Demonstração. Podemos supor que f é regular em y pois, caso contrário, podemos fazer uma mudança de coordenadas para que f seja regular em y .

Pelo Teorema 2.5.4, existem $p = p(x, y) \in K[[x]][y]$ polinômio de Weierstrass de grau n e $u \in K[[x, y]]$ invertível tal que $f = u \cdot p$. Como f é irredutível em $K[[x, y]]$, segue que p é irredutível em $K[[x, y]]$. Consequentemente, pelo Lema 2.6.4, temos que p é irredutível em $K[[x]][y]$. Além disso, pela Observação 3.3.5, p é irredutível em $K((x))[y]$. Do Corolário 3.3.4(ii)

$$p(x, y) = \prod_{k=1}^n \left(y - \varphi(\zeta^k x^{\frac{1}{n}}) \right),$$

onde ζ é uma n -ésima raiz primitiva da unidade e

$$\varphi(x^{\frac{1}{n}}) = b_r x^{\frac{r}{n}} + b_{r+1} x^{\frac{r+1}{n}} + \dots \in K((x^{\frac{1}{n}})),$$

com $b_r \neq 0$. Como p é um polinômio de Weierstrass, ainda do Corolário 3.3.4(iii), temos que $\text{mult}(\varphi(x^{\frac{1}{n}})) \geq 1$, o que implica que $\frac{r}{n} \geq 1$, ou seja, $r \geq n$.

A forma inicial de p é a forma inicial de

$$\begin{aligned} q(x, y) &= \prod_{k=1}^n \left(y - \zeta^{kr} b_r x^{\frac{r}{n}} \right) \\ &= y^n - \left(b_r \sum_{k=1}^n \zeta^{kr} x^{\frac{r}{n}} \right) y^{n-1} + \dots + \left((-1)^i b_r^i \sum_{k=1}^n \zeta^{ikr} x^{\frac{ir}{n}} \right) y^{n-i} + \dots + (-1)^n b_r^n x^r. \end{aligned}$$

Se $r = n$, temos

$$q(x, y) = \prod_{k=1}^n \left(y - \zeta^{kr} b_r x^{\frac{r}{n}} \right) = \prod_{k=1}^n (y - b_r x) = (y - b_r x)^n.$$

Se $r > n$, temos que $ir > in$, daí $n - i + \frac{ir}{n} > n$, $\forall i = 1, \dots, n$. Observe que

$$\begin{aligned} \text{mult}(p(x, y)) &= \text{mult}(q(x, y)) \\ &= \text{mult} \left(y^n - \left(b_r \sum_{k=1}^n \zeta^{kr} x^{\frac{r}{n}} \right) y^{n-1} + \dots + (-1)^n b_r^n x^r \right) \\ &= \min_i \left\{ n, n - i + \frac{ir}{n} \right\} = n. \end{aligned}$$

Neste caso, $q(x, y) = y^n$.

Como a forma inicial de f é o produto de $u(0, 0)$ ($\neq 0$) com a forma inicial de p , segue que F_n é da forma $(ax + by)^n$. \square

Observação 3.3.7. Seja $f = F_n + F_{n+1} + \dots \in K[[x, y]]$ uma série de potências irredutível com multiplicidade n . Pelo Lema da Unitangente 3.3.6, temos que $F_n = (ax + by)^n$, para algum $a, b \in K$. Assim, f é regular em x (quando $a \neq 0$) ou regular em y (quando $b \neq 0$).

Supondo que f seja regular em y , então podemos escrever f da seguinte forma:

$$f = a_0(x)y^n + a_1(x)y^{n-1} + \dots + a_n(x) + y^{n+1}h(x, y), \quad (3.7)$$

com $a_i(x) \in K[[x]]$, $\text{mult}(a_i(x)) \geq i$, para $i = 1, \dots, n$, $a_0(0) \neq 0$ e $h(x, y) \in K[[x, y]]$.

Exemplo 3.3.8. Seja $f(x, y) = 3xy - (x^3 - y^3)$. Primeiramente observe que a forma inicial de f é o polinômio $F_2(x, y) = 3xy \neq (ax + by)^2$, $\forall a, b \in K$. Logo, pelo Lema da unitangente, f não é irredutível.

A recíproca do Lema da Unitangente não é verdadeira, isto é, mesmo que exista uma série $g \in K[[x, y]]$ de multiplicidade n tal que sua forma inicial $G_n = (ax + by)^n$, onde $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, não temos a garantia de que esta série é irredutível, como mostra o seguinte exemplo.

Exemplo 3.3.9. Seja $g(x, y) = (x + y)^2 - x^4$. Temos que $g(0, 0) = 0$ e que a forma inicial de g é $G_2 = (x + y)^2$. Porém,

$$g = (x + y - x^2) \cdot (x + y + x^2).$$

e $g_1(x, y) = x + y - y^2$ e $g_2(x, y) = x + y + y^2$ são elementos não invertíveis em $K[[x, y]]$, pois $g_1(0, 0) = 0 = g_2(0, 0)$.

Exemplo 3.3.10. Seja $h(x, y) = x - y + xy + x^3 + y^5 \in K[[x, y]]$. Observe que $h(0, 0) = 0$ e que a forma inicial de h é o polinômio $H_1(x, y) = x - y$. Em princípio, não é possível dizer se h é redutível ou não. Mas podemos escrever h da seguinte forma

$$h(x, y) = x(1 + y + x^2) + y(-1 + y^4) = x \cdot h_1(x, y) + y \cdot h_2(x, y),$$

onde h_1 e $h_2 \in K[[x, y]]$ são invertíveis. Assim,

$$\frac{K[[x, y]]}{\langle h \rangle} = \frac{K[[x, y]]}{\langle x \cdot h_1(x, y) + y \cdot h_2(x, y) \rangle} \simeq K[[x]].$$

Como $K[[x]]$ é um domínio de integridade segue que h é irredutível.

3.4 PARAMETRIZAÇÃO DE PUISEUX

A parametrização de Puiseux será uma poderosa ferramenta para o entendimento das propriedades algébricas de ramos planos. Dado um ramo plano existe um algoritmo que ajuda a determinar a parametrização de Puiseux associada a este ramo, porém nosso objetivo de estudo não será encontrar estas parametrizações de Puiseux mas sim entender as propriedades algébricas do ramo plano através do estudo dessas parametrizações.

Lema 3.4.1. *Seja $f \in K[[x, y]]$ irredutível de multiplicidade igual a n e regular em y . Escrevendo f como em 3.7, temos*

$$\text{mult}(a_i(x)) \geq i \cdot \frac{\text{mult}(a_n(x))}{n}, \text{ para } i = 0, \dots, n.$$

Demonstração. Como f é regular em y , pelo Teorema da Preparação de Weierstrass, existem $u \in K[[x, y]]$ invertível, $A_1, \dots, A_n \in K[[x]]$, $A_i(0) = 0$, tais que

$$u \cdot f = P(x, y) = y^n + A_1 y^{n-1} + \dots + A_n \tag{3.8}$$

e $\text{mult}(A_i) \geq i$, $i = 1, \dots, n$. Como $u \cdot f$ é irredutível em $K[[x, y]]$, temos pelo Teorema 3.3.2(iii) que para $i = 0, \dots, n$ vale

$$\text{mult}(A_i) \geq i \cdot \frac{\text{mult}(A_n)}{n}.$$

Vamos escrever $u = u_0(x) + u_1(x)y + \cdots \in K[[x]][[y]]$. Como u é invertível em $K[[x, y]]$ segue que $u_0(0) \neq 0$. Daí,

$$\begin{aligned} u \cdot f &= (u_0 + u_1y + \cdots) \cdot (a_0y^n + a_1y^{n-1} + \cdots + a_n + y^{n+1}h) \\ &= (u_0a_0 + u_1a_1 + \cdots + u_na_n)y^n + (u_0a_1 + u_1a_2 + u_{n-1}a_n)y^{n-1} + \cdots + \\ &+ (u_0a_i + u_1a_{i+1} + \cdots + u_{n-i}a_n)y^{n-i} + \cdots + (u_0a_n) + (y^{n+1}h \cdot \dots) \\ &= y^n + A_1y^{n-1} + \cdots + A_n = P(x, y). \end{aligned}$$

Da igualdade de séries, temos

$$\begin{cases} u_0a_0 + u_1a_1 + \cdots + u_na_n = 1 \\ u_0a_i + u_1a_{i+1} + \cdots + u_{n-i}a_n = A_i, \text{ para } i = 1, \dots, n-1 \\ u_0a_n = A_n \\ y^{n+1}h \cdot \dots = 0. \end{cases}$$

Em particular, temos $\text{mult}(a_n) = \text{mult}(u_0a_n) = \text{mult}(A_n)$. Além disso, observe que para $i = n-1$, temos $u_0a_{n-1} + a_1a_n = A_{n-1}$. Daí,

$$\begin{aligned} \text{mult}(a_{n-1}) &= \text{mult}(u_0a_{n-1}) = \min \left\{ \underbrace{\text{mult}(A_{n-1})}_{\geq n-1}; \underbrace{\text{mult}(a_1)}_{\geq 0} + \underbrace{\text{mult}(a_n)}_{\geq n} \right\} \\ &\geq \text{mult}(A_{n-1}) \geq \frac{(n-1) \cdot \text{mult}(A_n)}{n} = \frac{(n-1) \cdot \text{mult}(a_n)}{n}. \end{aligned}$$

Continuando o processo recursivamente

$$\begin{aligned} \text{mult}(a_i) &= \text{mult}(u_0a_i) = \text{mult}(A_i - u_1a_{i+1} - \cdots - u_{n-i}a_n) \\ &\geq \min \left\{ \text{mult}(A_i); \text{mult}(u_1a_{i+1} + \cdots + u_{n-i}a_n) \right\} \\ &\geq \text{mult}(A_i) \geq \frac{i \cdot \text{mult}(A_n)}{n} = \frac{i \cdot \text{mult}(a_n)}{n}. \end{aligned}$$

□

Lema 3.4.2. Dado $f \in K[[x, y]] - \{0\}$ de multiplicidade n e regular em y , são equivalentes:

- (i) O cone tangente de (f) é (y^n) ;
- (ii) Para todo $i \geq 1$, $\text{mult}(a_i) > i$.

Demonstração. Vamos escrever f como em (3.7). Então

$$f = a_0(x)y^n + a_1(x)y^{n-1} + \cdots + a_n(x) + y^{n+1}h(x, y),$$

com $a_i(x) \in K[[x]]$, $\text{mult}(a_i(x)) \geq i$, para $i = 1, \dots, n$, $a_0(0) \neq 0$ e $h(x, y) \in K[[x, y]]$. Caso exista algum i tal que $\text{mult}(a_i) = i$, então o cone tangente de (f) não poderia ser (y^n) . Por outro lado, se para todo $i \geq 1$, $\text{mult}(a_i) > i$ o resultado é imediato. □

Seja $f \in K[[x, y]]$ irredutível de multiplicidade n e regular em y . Então, pelo Teorema da Preparação de Weierstrass, existem $u \in K[[x, y]]$ um elemento invertível, $A_1, \dots, A_n \in K[[x]]$, $A_i(0) = 0$, tais que

$$u \cdot f = P(x, y) = y^n + A_1 y^{n-1} + \dots + A_n.$$

Como $u \cdot f$ é irredutível segue, pelo Corolário 3.3.4, que se α é uma raiz de $P(x, y)$ em $K((x))^*$, então $\alpha = \varphi\left(x^{\frac{1}{n}}\right) \in K[[x^{\frac{1}{n}}]]$, onde $n = \min\left\{q \in \mathbb{N}; \alpha \in K((x^{\frac{1}{q}}))\right\}$ e $P(x, \alpha) = P\left(x, \varphi\left(x^{\frac{1}{n}}\right)\right) = 0$. Se escrevermos $t = x^{\frac{1}{n}}$, então teremos $\varphi(t) \in K[[t]]$ e

$$f(t^n, \varphi(t)) = 0.$$

Neste caso dizemos que

$$(f) : \begin{cases} x = t^n \\ y = \varphi(t) = \sum_{i \geq m} b_i t^i, \end{cases} \quad (3.9)$$

é uma parametrização de Puiseux do ramo (f) .

Observe que outra raiz de $P(x, y)$ nos dá outra parametrização de Puiseux $(t^n, \psi(t))$, onde $\varphi(t) = \psi(\zeta t)$ e ζ é uma n -ésima raiz da unidade. Além disso, n e os índices i , para os quais $b_i \neq 0$, não admitem fator comum, pois caso contrário existiria um $n' \in \mathbb{N}$ tal que $n' < n$ e $\alpha \in K((x^{\frac{1}{n'}}))$ (ver demonstração do Lema 3.3.1).

Do Teorema 3.3.2(iii) e do Lema 3.4.1, temos

$$\text{mult}_t(\varphi(t)) = n \cdot \text{mult}_x(\alpha) = \text{mult}_x(A_n) = \text{mult}_x(a_n) \geq n.$$

Assim, podemos reescrever (3.9) com algumas informações adicionais

$$(f) : \begin{cases} x = t^n \\ y = \varphi(t) = \sum_{i \geq m} b_i t^i, \quad b_m \neq 0, \quad m \geq n. \end{cases} \quad (3.10)$$

Se tivermos ainda que o cone tangente de (f) é (y^n) , pelo Lema 3.4.2,

$$\text{mult}_t(\varphi(t)) = \text{mult}_x(a_n) > n.$$

Se f for regular em x , então temos o mesmo resultado trocando x por y .

Definição 3.4.3. Seja (f) como em (3.10). Definimos duas sequências (ε_i) e (β_i) de números inteiros associados a (f) como a seguir:

$$\begin{cases} \varepsilon_0 = \beta_0 = n \\ \beta_j = \min\{i; i \not\equiv 0 \pmod{\varepsilon_{j-1}} \text{ e } b_i \neq 0\}, \text{ se } \varepsilon_{j-1} \neq 1 \\ \varepsilon_j = \text{mdc}(\varepsilon_{j-1}, \beta_j) = \text{mdc}(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_j). \end{cases}$$

Os inteiros (β_i) são chamados de expoentes característicos do ramo (f) .

Observe que se $\varepsilon_{j-1} \neq 1$, então $\{i; i \not\equiv 0 \pmod{\varepsilon_{j-1}} \text{ e } b_i \neq 0\} \neq \emptyset$. Além disso, β_1 é o primeiro expoente de $\varphi(t)$ que possui coeficiente não nulo e que não é múltiplo de $\beta_0 = \varepsilon_0$. Observe ainda que a sequência (ε_i) é uma sequência decrescente de inteiros, logo finita.

$$n = \varepsilon_0 > \varepsilon_1 > \dots > 1 = \varepsilon_g, \quad g \in \mathbb{N}.$$

Consequentemente, a sequência (β_i) também será finita. O inteiro g tal que $\varepsilon_{g-1} \neq 1$ e $\varepsilon_g = 1$ é chamado gênero do ramo (f) .

Exemplo 3.4.4. Considere a parametrização de Puiseux de um ramo plano (f) dado por

$$(f) : \begin{cases} x &= t^4 \\ y &= \varphi(t) = t^6 + t^8 + t^{10} + t^{11}. \end{cases}$$

Então,

$$\varepsilon_0 = \beta_0 = 4; \quad \beta_1 = \min\{6, 10, 11\} = 6; \quad \varepsilon_1 = \text{mdc}(\varepsilon_0, \beta_1) = \text{mdc}(4, 6) = 2;$$

$$\beta_2 = \min\{11\} = 11 \quad \text{e} \quad \varepsilon_2 = \text{mdc}(\varepsilon_1, \beta_2) = \text{mdc}(2, 11) = 1.$$

Portanto, o gênero de (f) é igual a 2 e $(\beta_0, \beta_1, \beta_2) = (4, 6, 11)$ são seus expoentes característicos.

Exemplo 3.4.5. Seja (f) um ramo plano que possui parametrização de Puiseux dada por

$$(f) : \begin{cases} x &= t^6, \\ y &= t^9 + t^{10} + a_{11}t^{11} + a_{13}t^{13} + a_{14}t^{14} + a_{17}t^{17} + a_{20}t^{20} + a_{23}t^{23} + \\ &+ a_{26}t^{26} + a_{29}t^{29} + a_{32}t^{32} + a_{35}t^{35}, \end{cases}$$

onde $a_i \in K$. Então,

- $\varepsilon_0 = \beta_0 = 6;$
- $\beta_1 = \min\{i; i \not\equiv 0 \pmod{\varepsilon_0} \text{ e } b_i \neq 0\} = 9;$
- $\varepsilon_1 = \text{mdc}(\varepsilon_0, \beta_1) = \text{mdc}(6, 9) = 3;$
- $\beta_2 = \min\{i; i \not\equiv 0 \pmod{\varepsilon_1} \text{ e } b_i \neq 0\} = 10;$
- $\varepsilon_2 = \text{mdc}(\varepsilon_1, \beta_2) = \text{mdc}(3, 10) = 1.$

Portanto, o gênero de (f) é igual a 2 e $(\beta_0, \beta_1, \beta_2) = (6, 9, 10)$ são seus expoentes característicos para quaisquer $a_i \in K$.

Definição 3.4.6. Dado um ramo plano (f) com sequências associadas (ε_i) e (β_i) , para $i = 1, \dots, g$, definimos os pares de Puiseux de (f) como (η_i, μ_i) , $i = 1, \dots, g$ em que

$$\eta_i = \frac{\varepsilon_{i-1}}{\varepsilon_i} \quad \text{e} \quad \mu_i = \frac{\beta_i}{\varepsilon_i}.$$

Note que como $\varepsilon_i = \text{mdc}(\varepsilon_{i-1}, \beta_i)$, temos $\text{mdc}(\eta_i, \mu_i) = 1$.

Proposição 3.4.7. *Dado um ramo plano (f) de gênero g . Então para todo $j = 1, \dots, g$, temos*

$$i) \quad \eta_j > 1;$$

$$ii) \quad n = \eta_1 \eta_2 \cdots \eta_j \varepsilon_j = \eta_1 \eta_2 \cdots \eta_g;$$

$$iii) \quad \varepsilon_j = \eta_{j+1} \cdots \eta_g.$$

Demonstração. (i) Como os ε'_j s formam uma sequência decrescente, segue que

$$\eta_j = \frac{\varepsilon_{j-1}}{\varepsilon_j} > 1.$$

(ii) Note que

$$\eta_1 \eta_2 \cdots \eta_j \varepsilon_j = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \cdots \frac{\varepsilon_{j-1}}{\varepsilon_j} \varepsilon_j = \varepsilon_0 = n = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \cdots \frac{\varepsilon_{g-1}}{\varepsilon_g} = \eta_1 \eta_2 \cdots \eta_g.$$

(iii) Finalmente,

$$\eta_{j+1} \cdots \eta_g = \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_{j+1}} \cdots \frac{\varepsilon_{g-1}}{\varepsilon_g} = \varepsilon_j.$$

□

3.5 ANEL LOCAL DE UMA CURVA PLANA

Seja K um corpo e seja $f \in M = \langle x, y \rangle$, onde M é o ideal maximal de $K[[x, y]]$. Definimos o anel de coordenadas da curva (f) como sendo a K -álgebra

$$\mathcal{O}_f = \frac{K[[x, y]]}{\langle f \rangle}.$$

A classe residual de um elemento $h \in K[[x, y]]$ em \mathcal{O}_f poderá ser denotada por \bar{h} , ou simplesmente h se não causar confusão.

O anel \mathcal{O}_f é um anel local com ideal maximal M_f dado por

$$M_f = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle f \rangle}.$$

De fato, seja $\bar{g} \in \mathcal{O}_f - M_f$, onde $g \in K[[x, y]]$, então $g(0, 0) \neq 0$ e conseqüentemente $g \in K[[x, y]]$ é invertível em $K[[x, y]]$. Daí, existe $h \in K[[x, y]]$ tal que $g \cdot h = 1$, isto é, $\bar{g} \cdot \bar{h} = \bar{1}$. Logo, todo elemento que não está no ideal M_f é invertível, em outras palavras \mathcal{O}_f é um anel local.

Observe que quando f é irredutível, então o anel \mathcal{O}_f é também um domínio.

Teorema 3.5.1. *Sejam (f) e (g) curvas algebróides planas em $K[[x, y]]$. Então $(f) \sim (g)$ se, e somente se, $\mathcal{O}_f \simeq \mathcal{O}_g$.*

Demonstração. Dado $h \in K[[x, y]]$ denotaremos por \bar{h} e $\overline{\bar{h}}$ a classe residual de h em \mathcal{O}_f e \mathcal{O}_g , respectivamente.

Primeiramente suponha que $(f) \sim (g)$, isto é, existem um automorfismo Φ e um elemento $u \in K[[x, y]]$ invertível tais que

$$\Phi(f) = u \cdot g.$$

Observe que a composição

$$\begin{array}{ccccc} K[[x, y]] & \xrightarrow{\Phi} & K[[x, y]] & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{O}_g \\ h & \mapsto & \Phi(h) & \mapsto & \overline{\Phi(h)}, \end{array}$$

onde π é a projeção canônica de $K[[x, y]]$ em \mathcal{O}_g , é sobrejetiva e tal que $\ker(\pi \circ \Phi) = \langle f \rangle$. Consequentemente, $\mathcal{O}_f \simeq \mathcal{O}_g$.

Reciprocamente suponha que $\mathcal{O}_f \simeq \mathcal{O}_g$. Se $\text{mult}(f) = \text{mult}(g) = 1$, então (f) e (g) são curvas regulares e, da Proposição 3.1.5, segue que $(f) \sim (g)$. Se $\text{mult}(g) > 1$, considere $\tilde{\Phi}$ o isomorfismo tal que $\mathcal{O}_f \simeq \mathcal{O}_g$. Sejam t_1 e $t_2 \in M$ tais que $\tilde{\Phi}(\bar{x}) = \overline{\bar{t}_1}$ e $\tilde{\Phi}(\bar{y}) = \overline{\bar{t}_2}$ e t_1, t_2 são séries dadas por

$$\begin{aligned} t_1 &= (ax + by) + T_{1,2}(x, y) + T_{1,3}(x, y) + \cdots \text{ e} \\ t_2 &= (cx + dy) + T_{2,2}(x, y) + T_{2,3}(x, y) + \cdots, \end{aligned}$$

onde $T_{i,j}$ é um polinômio homogêneo de grau j em $K[x, y]$.

Defina

$$\begin{array}{ccc} \Phi : K[[x, y]] & \longrightarrow & K[[x, y]] \\ x & \longmapsto & t_1 \\ y & \longmapsto & t_2. \end{array}$$

Como $\tilde{\Phi}$ é um isomorfismo de \mathcal{O}_f em \mathcal{O}_g , segue que existem r e $s \in K[[x, y]]$ tais que

$$\bar{x} = \tilde{\Phi}(r(\bar{x}, \bar{y})) = r(\overline{\bar{t}_1}, \overline{\bar{t}_2}) \quad \text{e} \quad \bar{y} = \tilde{\Phi}(s(\bar{x}, \bar{y})) = s(\overline{\bar{t}_1}, \overline{\bar{t}_2}).$$

Consequentemente, $x - r(t_1, t_2) \in \langle g \rangle \subset M^2$ e $y - s(t_1, t_2) \in \langle g \rangle \subset M^2$, pois $\text{mult}(g) \geq 2$. Além disso, se $r(x, y) = (\alpha_1 x + \beta_1 y) + r_2(x, y) + \cdots$ e $s(x, y) = (\lambda_1 x + \gamma_1 y) + s_2(x, y) + \cdots$, onde r_i, s_j são polinômios homogêneos em $K[x, y]$, então

$$\begin{aligned} x - r(t_1, t_2) &= x - (\alpha_1 t_1 + \beta_1 t_2) + r_2(t_1, t_2) + \cdots \\ &= x - \left[\alpha_1(ax + by + \cdots) + \beta_1(cx + dy + \cdots) \right] + \cdots \in M^2. \\ y - s(t_1, t_2) &= y - (\lambda_1 t_1 + \gamma_1 t_2) + s_2(t_1, t_2) + \cdots \\ &= y - \left[\lambda_1(ax + by + \cdots) + \gamma_1(cx + dy + \cdots) \right] + \cdots \in M^2. \end{aligned}$$

Como $x - r(t_1, t_2)$ e $y - s(t_1, t_2) \in M^2$, temos que suas multiplicidades são dadas por: $\text{mult}(x - r(t_1, t_2)) \geq 2$ e $\text{mult}(y - s(t_1, t_2)) \geq 2$, ou seja, as séries acima não devem ter monômios de grau 1. Equivalentemente, os sistemas

$$\begin{cases} \alpha_1 a + \beta_1 c = 1 \\ \alpha_1 b + \beta_1 d = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_1 a + \gamma_1 c = 0 \\ \lambda_1 b + \gamma_1 d = 1 \end{cases}$$

possuem solução e, portanto, $ad - bc \neq 0$. Consequentemente, Φ é um automorfismo de $K[[x, y]]$ tal que

$$\bar{0} = \tilde{\Phi}(f(\bar{x}, \bar{y})) = \bar{f}(t_1, t_2),$$

o que implica que $\Phi(f) \in \langle g \rangle$, portanto

$$\Phi(f) = h \cdot g. \tag{3.11}$$

Em particular, $\text{mult}(f) = \text{mult}(\Phi(f)) = \text{mult}(h) + \text{mult}(g) \geq 2$.

Como Φ é um automorfismo e Φ^{-1} induz $\tilde{\Phi}^{-1}$, invertendo os papéis de f e g , concluímos que

$$\Phi^{-1}(g) = h' \cdot f \iff g = \Phi(h') \cdot \Phi(f).$$

De (3.11), temos $\Phi(f) = h \cdot \Phi(h') \cdot \Phi(f)$. Portanto, h é um elemento invertível em $K[[x, y]]$. Logo, $(f) \sim (g)$. \square

O resultado acima nos diz que o anel local \mathcal{O}_f é invariante módulo relação de equivalência de curvas algebróides.

Corolário 3.5.2. *Se $\mathcal{O}_f \simeq \mathcal{O}_g$, então $\text{mult}(f) = \text{mult}(g)$.*

Proposição 3.5.3. *Seja $f \in K[[x, y]]$ regular em y de ordem n . Então \mathcal{O}_f é um $K[[x]]$ -módulo livre de posto n dado por*

$$\mathcal{O}_f = K[[x]] \oplus K[[x]]\bar{y} \oplus K[[x]]\bar{y}^2 \oplus \dots \oplus K[[x]]\bar{y}^{n-1},$$

onde \bar{y}^i é a classe residual de y^i em \mathcal{O}_f .

Demonstração. Se $g \in K[[x, y]]$, pelo Teorema da Divisão (Teorema 2.5.3), existem únicos $q \in K[[x, y]]$ e $r \in K[[x]][y]$ tais que $g = f \cdot q + r$, onde $\deg_y r < n$.

Consequentemente, $\bar{g} = \overline{f \cdot q + r} = \bar{r} \in K[[x]] \oplus K[[x]]\bar{y} \oplus \dots \oplus K[[x]]\bar{y}^{n-1}$. Ou seja, \mathcal{O}_f é um $K[[x]]$ -módulo gerado por \bar{y}^i , $i = 0, \dots, n-1$.

Agora resta mostrar que $\{\bar{1}, \bar{y}, \dots, \bar{y}^{n-1}\}$ é livre sobre $K[[x]]$. Suponha que existem séries de potências $a_i(x) \in K[[x]]$ tais que

$$a_0(x) + a_1(x)\bar{y} + \dots + a_{n-1}(x)\bar{y}^{n-1} = 0.$$

Como a classe residual de $a_0(x) + a_1(x)\bar{y} + \cdots + a_{n-1}(x)\bar{y}^{n-1}$ em \mathcal{O}_f é a classe residual do zero, existe um $q \in K[[x, y]]$ tal que

$$a_0(x) + a_1(x)y + \cdots + a_{n-1}(x)y^{n-1} = f \cdot q.$$

Ou ainda,

$$f \cdot q - (a_0(x) + a_1(x)y + \cdots + a_{n-1}(x)y^{n-1}) = 0.$$

Pela unicidade do Teorema da Divisão, segue que $a_0(x) + a_1(x)y + \cdots + a_{n-1}(x)y^{n-1} = 0$, uma vez que $0 = f \cdot 0 + 0$. Logo $a_i(x) = 0, \forall i = 0, \dots, n-1$. \square

Proposição 3.5.4. *Seja $f \in K[[x, y]]$ uma série irredutível regular em y de ordem n . Seja $(t^n, \varphi(t))$ uma parametrização de Puiseux da curva (f) . Então a aplicação*

$$\begin{aligned} H_\varphi : K[[x, y]] &\longrightarrow K[[t]] \\ g &\longmapsto g(t^n, \varphi(t)) \end{aligned}$$

é um homomorfismo de K -álgebras tal que $\ker(H_\varphi) = \langle f \rangle$.

Demonstração. Sejam g_1 e $g_2 \in K[[x, y]]$. Então

$$H_\varphi(g_1 + g_2) = (g_1 + g_2)(t^n, \varphi(t)) = g_1(t^n, \varphi(t)) + g_2(t^n, \varphi(t)) = H_\varphi(g_1) + H_\varphi(g_2).$$

Além disso,

$$H_\varphi(g_1 \cdot g_2) = (g_1 \cdot g_2)(t^n, \varphi(t)) = g_1(t^n, \varphi(t)) \cdot g_2(t^n, \varphi(t)) = H_\varphi(g_1) \cdot H_\varphi(g_2).$$

Portanto, H_φ é um homomorfismo. Resta verificar que seu núcleo é gerado por f . Seja $g \in \ker(H_\varphi)$. Então, pelo Teorema da Divisão 2.5.3, existem únicos $q \in K[[x, y]]$ e $r \in K[[x]][[y]]$ tais que $g = f \cdot q + r$, onde $r = 0$ ou $\deg_y r < n$. Como $(t^n, \varphi(t))$ é uma parametrização de Puiseux de (f) existe $\alpha = \varphi\left(x^{\frac{1}{n}}\right) \in K((x))^* - K((x))$ tal que $f(x, \alpha) = 0$. Além disso, como $g \in \ker(H_\varphi)$, temos

$$g(t^n, \varphi(t)) = g(x, \alpha) = 0.$$

Daí,

$$g(x, \alpha) = f(x, \alpha) \cdot q(x, \alpha) + r(x, \alpha) = 0.$$

E conseqüentemente $r(x, \alpha) = 0$. Então como r é um polinômio em y com coeficientes em $K((x))$ que possui α como raiz segue, pelo Teorema 3.3.2, que o polinômio minimal de α sobre $K((x))$ divide r e possui grau n . Logo $r = 0$. \square

Corolário 3.5.5. *Dado f nas condições da proposição anterior com $(t^n, \varphi(t))$ uma parametrização de Puiseux de (f) . Então a aplicação*

$$\begin{aligned} H_\varphi : \mathcal{O}_f &\longrightarrow K[[t]] \\ g &\longmapsto g(t^n, \varphi(t)) \end{aligned}$$

é um homomorfismo de K -álgebras injetor.

Chamaremos a imagem de \mathcal{O}_f pelo homomorfismo H_φ de A_φ , isto é,

$$A_\varphi = H_\varphi(\mathcal{O}_f) = K[[t^n, \varphi(t)]].$$

Com esta definição, podemos ver \mathcal{O}_f como uma subálgebra de $K[[t]]$.

Se $\psi(t) = \varphi(\zeta t)$, onde ζ é uma n -ésima raiz da unidade, então $A_\psi \simeq A_\varphi$ pelo automorfismo

$$\begin{aligned} h_\zeta : K[[t]] &\longrightarrow K[[t]] \\ p(t) &\longmapsto p(\zeta t). \end{aligned}$$

Além disso, da Proposição 3.5.3, temos

$$\begin{aligned} A_\varphi &= H_\varphi(\mathcal{O}_f) \\ &= H_\varphi \left(K[[x]] \oplus K[[x]]y \oplus K[[x]]y^2 \oplus \dots \oplus K[[x]]y^{n-1} \right) \\ &= H_\varphi \left(K[[x]] \right) \oplus H_\varphi \left(K[[x]]y \right) \oplus H_\varphi \left(K[[x]]y^2 \right) \oplus \dots \oplus H_\varphi \left(K[[x]]y^{n-1} \right) \\ &= K[[t^n]] \oplus K[[t^n]]\varphi \oplus K[[t^n]]\varphi^2 \oplus \dots \oplus K[[t^n]]\varphi^{n-1}. \end{aligned}$$

Observação 3.5.6. O corpo de frações de A_φ é $K((t))$. Primeiramente note que $\mathcal{O}_f \simeq A_\varphi$ e como f é irredutível, temos que A_φ é um domínio de integridade. Então faz sentido olharmos para seu corpo de frações.

Do Teorema 3.3.2(i), temos que o corpo de frações de $K[[x, \varphi(x^{\frac{1}{n}})]]$ é $K((x^{\frac{1}{n}}))$. Como $K[[x, \varphi(x^{\frac{1}{n}})]] \simeq K[[t^n, \varphi(t)]] = A_\varphi$ temos que $K((x^{\frac{1}{n}})) \simeq K((t))$ é o corpo de frações de A_φ .

Se tivermos f regular em x de ordem n , então os resultados acima seriam análogos trocando o y por x .

Definição 3.5.7. Seja K um corpo. Uma valorização discreta sobre K é um mapa

$$\begin{aligned} v : K - \{0\} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ x &\longmapsto v(x), \end{aligned}$$

satisfazendo as seguintes condições:

- (i) $v(xy) = v(x) + v(y)$, e
- (ii) $v(x + y) \geq \min(v(x), v(y))$.

O conjunto consistindo do elemento zero de K e de todos os elementos $x \in K - \{0\}$ tais que $v(x) \geq 0$ é chamado de *anel de valorização de v* . Este é um anel de valorização do corpo K . O conceito de valorização discreta pode ser estendido a todo K se considerarmos $v(0) = \infty$.

Exemplo 3.5.8. O corpo das séries de Laurent das séries de potências em uma variável, $K((t))$, possui uma valorização dada por

$$\begin{aligned} v : K((t)) - \{0\} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ f &\longmapsto v(f) = \text{mult}(f). \end{aligned}$$

Pelas propriedades de multiplicidade é imediato que v satisfaz (i) e (ii) da definição acima. Além disso, note que todo elemento $f \in K((t)) - \{0\}$ tal que $\text{mult}(f) \geq 0$ pertencerá a $K[[t]]$, ou seja, $K[[t]]$ é o anel de valorização do corpo $K((t))$.

Seja $f \in K[[x, y]]$ uma série irredutível, regular em y de ordem n . Considere $(t^n, \varphi(t))$ uma parametrização de Puiseux de (f) . Lembrando que a aplicação H_φ é injetiva (Corolário 3.5.5), podemos induzir uma valorização em \mathcal{O}_f da seguinte forma

$$\begin{aligned} v_f : \mathcal{O}_f &\xrightarrow{H_\varphi} K[[t]] && \xrightarrow{v} \mathbb{N} \cup \{\infty\} \\ g &\longmapsto g(t^n, \varphi(t)) && \longmapsto v_f := \text{mult}(g(t^n, \varphi(t))). \end{aligned} \quad (3.12)$$

A valorização v_f é chamada valorização associada a f .

3.6 SEMIGRUPO DE VALORES

Nesta seção estudaremos o semigrupo de valores associados a uma curva algebróide plana irredutível.

Definição 3.6.1. Seja $G \neq \{0\}$ um subconjunto dos números naturais contendo o zero. Dizemos que G é um semigrupo se ele é fechado para a operação de soma dos naturais.

Dado um semigrupo G chamaremos de *multiplicidade* de G , e denotamos por $\text{mult}(G)$, o menor inteiro positivo não nulo de G , isto é, $\text{mult}(G) = \min(G - \{0\})$.

Se $x_0, \dots, x_r \in \mathbb{N}$, então

$$G = \langle x_0, \dots, x_r \rangle = \{\lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_r x_r; \lambda_i \in \mathbb{N}\}$$

é um semigrupo dos naturais gerado por x_0, \dots, x_r . Os elementos x_0, \dots, x_r são chamados de geradores do semigrupo G .

Proposição 3.6.2. Dado um semigrupo G , existe um único conjunto finito de elementos $v_0, \dots, v_g \in G$ tal que

$$(i) \quad v_0 < \dots < v_g \text{ e } v_i \not\equiv v_j \pmod{(v_0)}, \text{ para } i \neq j.$$

$$(ii) \quad G = \langle v_0, \dots, v_g \rangle.$$

$$(iii) \quad \{v_0, \dots, v_g\} \text{ está contido em qualquer conjunto de geradores de } G.$$

Demonstração. Vamos mostrar (i). Tome $v_0 = \text{mult}(G)$ e defina

$$v_1 = \min(\{G - \langle v_0 \rangle\}).$$

Observe que $v_0 \not\equiv v_1 \pmod{v_0}$ pois, caso contrário, v_1 pertenceria a $\langle v_0 \rangle$, isto é, $v_0 \neq v_1 \pmod{v_0}$.

Defina $v_2 = \min(\{G - \langle v_0, v_1 \rangle\})$. Daí, $v_0 \not\equiv v_2 \pmod{v_0}$ e $v_1 \not\equiv v_2 \pmod{v_0}$, pois caso contrário $v_2 \in \langle v_0, v_1 \rangle$. Para $i \geq 3$, defina

$$v_i = \min(\{G - \langle v_0, v_1, \dots, v_{i-1} \rangle\}).$$

Análogo ao observado para v_1 e v_2 , temos que $v_i \not\equiv v_j \pmod{v_0}$, para $i \neq j$.

Observe que o número máximo dos v_i 's tais que $v_i = \min(\{G - \langle v_0, v_1, \dots, v_{i-1} \rangle\})$ é $v_0 - 1$ que é exatamente o número máximo de não divisores de v_0 módulo v_0 . Como o mínimo de um conjunto, quando existe, é único segue a unicidade dos v_i 's.

Para (iii) suponha que existam dois conjuntos finitos de elementos $\{v_0, \dots, v_g\}$ e $\{v'_0, \dots, v'_g\}$ tais que estão contidos em qualquer conjunto de geradores de G . Desta forma, $G = \langle v_0, \dots, v_g \rangle = \langle v'_0, \dots, v'_g \rangle$, conseqüentemente $\{v_0, \dots, v_g\} \subset \{v'_0, \dots, v'_g\}$ e $\{v'_0, \dots, v'_g\} \subset \{v_0, \dots, v_g\}$, o que conclui a demonstração. \square

O conjunto $\{v_0, \dots, v_g\}$ visto na proposição acima será chamado de *sistema minimal de geradores de G* e o inteiro g será chamado de gênero do semigrupo G . Note que $g \leq v_0 - 1 = \text{mult}(G) - 1$.

Observe que a demonstração da Proposição 3.6.2 é construtiva, ou seja, dado G um semigrupo qualquer de \mathbb{N} sempre conseguimos encontrar o sistema minimal de geradores apenas seguindo os passos da demonstração.

Dado um semigrupo G os elementos pertencentes a $\mathbb{N} - G$ serão chamados de *gaps*, ou *lacunas*, de G .

Exemplo 3.6.3. Se $G = \langle 2 \rangle$, então todo número ímpar é um gap de G . Por outro lado, o semigrupo $H = \langle 2, 7 \rangle$ possui apenas os números 1, 3, 5 como gaps.

Dado um G semigrupo, se o número de gaps de G for finito, então existe um único inteiro c que satisfaz

- (a) $c - 1 \notin G$,
- (b) se $z \geq c$, então $z \in G, \forall z \in \mathbb{N}$.

Este elemento c é chamado de *condutor* do semigrupo G .

Observe que se $G = \langle n \rangle$, $n \neq 1$, todo elemento $m \not\equiv 0 \pmod{n}$ é um gap de G .

Proposição 3.6.4. *Seja G um semigrupo. São equivalentes*

(i) G possui condutor;

(ii) Os elementos de G têm máximo divisor comum igual a um;

(iii) Existem dois inteiros consecutivos em G .

Demonstração. (i) \implies (ii)

Se c é o condutor de G é claro que c e $c + 1 \in G$, pela definição de condutor. Consequentemente, $\text{mdc}(G) = 1$.

(ii) \implies (iii)

Seja $\{v_0, \dots, v_g\}$ o sistema minimal de geradores de G . Se $\text{mdc}(G) = 1$, então $\text{mdc}(v_0, \dots, v_g) = 1$. Daí, existem $\lambda_0, \dots, \lambda_g \in \mathbb{Z}$ tais que

$$\lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_g v_g = 1.$$

Vamos somar $|\lambda_i|v_i$ na equação acima, quando λ_i for negativo. Assim,

$$\sum_{j \in \Lambda_+} \lambda_j v_j = 1 + \underbrace{\sum_{i \in \Lambda_-} |\lambda_i| v_i}_{\in G} \in G,$$

onde $\Lambda_+ = \{i; \lambda_i \geq 0\}$ e $\Lambda_- = \{i; \lambda_i < 0\}$.

(iii) \implies (i)

Sejam a e $a + 1 \in G$.

Afirmção: Qualquer natural $n \geq (a - 1)(a + 1)$ pertence a G . De fato,

$$a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1) = \underbrace{(a + 1) + \dots + (a + 1)}_{(a-1) \text{ vezes}} \in G.$$

Além disso, se $k < a$, então

$$a^2 + k = k(a + 1) + (a - k)a = \underbrace{(a + 1) + \dots + (a + 1)}_{k \text{ vezes}} + \underbrace{a + \dots + a}_{(a-k) \text{ vezes}} \in G.$$

Se $k \geq a$, escreva $k = k_1 a + k_2$, onde $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ e $0 \leq k_2 < a$. Consequentemente

$$\begin{aligned} a^2 + k &= a^2 + (k_1 a + k_2) \\ &= \underbrace{(a^2 + k_2)}_{\in G} + \underbrace{k_1 a}_{\in G} \in G. \end{aligned}$$

Portanto, o número de gaps de G é finito. Consequentemente, G possui condutor. \square

Observação 3.6.5. Note que da demonstração da Proposição 3.6.4 temos que se a e $a + 1$ são elementos de G , então podemos estimar o condutor deste semigrupo que será um inteiro $c \leq (a - 1)(a + 1)$.

Definição 3.6.6. Seja $G = \langle v_0, \dots, v_g \rangle$ um semigrupo de \mathbb{N} com condutor c . Definimos duas seqüências de naturais associadas aos geradores v_0, \dots, v_g de G . Defina $e_0 = v_0$ e $n_0 = 1$. Para $i = 1, \dots, g$ defina

$$e_i = \text{mdc}(v_0, \dots, v_i) \quad \text{e} \quad n_i = \frac{e_{i-1}}{e_i}.$$

Da definição é imediato que $e_i \mid e_{i-1}, \forall i$ e $e_g = \text{mdc}(v_0, \dots, v_g) = 1$.

De agora em diante, f denotará um elemento de $M = \langle x, y \rangle \subset K[[x, y]]$ irredutível. Um semigrupo dos naturais que nos dará mais informações sobre a curva (f) é chamado semigrupo de valores associados a (f) e será definido a seguir.

Definição 3.6.7. O semigrupo de valores associados a uma curva (f) é o conjunto

$$\Gamma_f = \{v_f(\bar{g}); \bar{g} \in \mathcal{O}_f - \{0\}\},$$

onde v_f é a valorização definida em (3.12).

Observação 3.6.8. O semigrupo de valores de um determinado ramo plano também pode ser identificado como

$$\Gamma_f = \{mult(H_\varphi(\bar{g})); \bar{g} \in \mathcal{O}_f - \{0\}\} = \{mult_t(h); h \in A_\varphi - \{0\}\}.$$

O semigrupo de valores associado a (f) como definido acima é um semigrupo dos números naturais.

De fato, como f é irredutível, então existe $g \in K[[x, y]]$ tal que $g \notin \langle f \rangle$. Daí, $g \neq 0$ em \mathcal{O}_f , o que implica que $v_f(g) \neq 0$, se g não é um invertível, e $v_f(g) = 0$, se g é um invertível. Além disso, dados $v_f(g)$ e $v_f(h) \in \Gamma_f$, então $v_f(g) \geq 0$ e $v_f(h) \geq 0$ e, pela definição de valorização, temos

$$v_f(g) + v_f(h) = v_f(g \cdot h) \geq 0.$$

Consequentemente, $v_f(g) + v_f(h) \in \Gamma_f$, ou seja, Γ_f é um semigrupo dos naturais.

Definição 3.6.9. Dois ramos planos (f) e (g) serão chamados de equisingulares quando $\Gamma_f = \Gamma_g$.

Se dois ramos planos são tais que $(f) \sim (g)$, então $\Gamma_f = \Gamma_g$, uma vez que $\mathcal{O}_f \simeq \mathcal{O}_g$ (Teorema 3.5.1).

Proposição 3.6.10. O semigrupo de valores associados a um ramo plano possui condutor.

Demonstração. Seja (f) um ramo plano. Da Observação 3.5.6 temos que o corpo de frações de A_φ é $K((t))$, então existem p e $q \in A_\varphi$ não nulos tais que $\frac{p}{q} = t \in K((t))$. Se chamarmos $mult(q) = k$, então

$$mult(q) = k \in \Gamma_f \quad \text{e} \quad mult(p) = mult(q \cdot t) = mult(q) + mult(t) = k + 1 \in \Gamma_f.$$

Assim, pela Proposição 3.6.4, Γ_f possui condutor. \square

Exemplo 3.6.11. Considere o ramo plano $(f) = (y^2 - x^3)$. Uma parametrização de Puiseux da curva (f) é o par $(t^n, \varphi(t)) = (t^2, t^3)$ e seu semigrupo de valores será dado por

$$\Gamma_f = \{v_f(g); g \in \mathcal{O}_f - \{0\}\}.$$

Temos que

$$v_f(x) = \text{mult}(H_\varphi(x)) = \text{mult}_t(t^2) = 2 \quad \text{e} \quad v_f(y) = \text{mult}(H_\varphi(y)) = \text{mult}_t(t^3) = 3.$$

Além disso, como 2 e 3 são inteiros consecutivos em Γ_f , temos que o condutor c de Γ_f possui a seguinte estimativa (Observação 3.6.5)

$$c \leq (2 - 1)(2 + 1) = 3 \quad \implies \quad c \leq 2 \quad (2 \in \Gamma_f).$$

Note que $1 \in \Gamma_f$ se, e somente se, $t \in A_\varphi$. Se $t \in A_\varphi$, como $A_\varphi \simeq \mathcal{O}_f$, então existiria $h \in \mathcal{O}_f$ tal que $H_\varphi(h) = t$. Ainda do fato que H_φ é um homomorfismo, temos

$$H_\varphi(h^2) = H_\varphi(h \cdot h) = H_\varphi(t) \cdot H_\varphi(t) = t^2.$$

Por outro lado, $H_\varphi(x) = t^2$ e, pela injetividade de H_φ , temos que $h^2 = x$, mas isto não pode ocorrer pois x é irredutível. Logo, o condutor de Γ_f é $c = 2$. Portanto, podemos escrever Γ_f da seguinte forma

$$\Gamma_f = \{0, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\} = \langle 2, 3 \rangle.$$

Exemplo 3.6.12. Seja (f) o ramo plano dado por $(g) = (y^2 - x^5)$. Uma parametrização de Puiseux de (f) é dado pelo par (t^2, t^5) . Vamos encontrar seu semigrupo de valores.

Primeiramente vamos calcular os valores de x e y .

$$v_f(x) = \text{mult}(H_\varphi(x)) = \text{mult}_t(t^2) = 2 \quad \text{e} \quad v_f(y) = \text{mult}(H_\varphi(y)) = \text{mult}_t(t^5) = 5.$$

Note que todo elemento $l \geq 4$ pode ser escrito como $l = 2r + 5s$, r e $s \in \mathbb{N}$. Dado $\sum \alpha_{ij} x^i y^j \in \mathcal{O}_f$, temos

$$v_f\left(\sum \alpha_{ij} x^i y^j\right) = \text{mult}_t\left(\sum \alpha_{ij} (t^2)^i (t^5)^j\right) = 2r + 5s,$$

para algum $r, s \in \mathbb{N}$. Portanto, o condutor de Γ_f é $c = 4$. Assim,

$$\Gamma_f = \{0, 2, 4, 5, 6, 7, \dots\}.$$

Em geral, encontrar o semigrupo de valores associados a uma determinada curva pode não ser algo fácil de ser determinado.

Para o seguinte teorema vamos definir, para $k = 0, \dots, n$,

$$M_k := K[[x]]y + K[[x]]y^2 + \dots + K[[x]]y^k \subset \mathcal{O}_f,$$

onde $n = \text{mult}(f)$ e y é a classe residual de \bar{y} em \mathcal{O}_f . Do Teorema da Divisão, temos que $M_{n-1} = \mathcal{O}_f$.

Teorema 3.6.13. *Seja (f) uma curva algebróide plana com parametrização de Puiseux dada por*

$$(f) : \begin{cases} x = t^n \\ y = \varphi(t) = \sum_{i \geq m} b_i t^i, \quad b_m \neq 0, \quad m \geq n. \end{cases}$$

Então se g é o gênero de (f) e ε_i, β_j são como na Definição 3.4.3, temos

i. Para $j = 2, \dots, g$,

$$v_j = \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k}{\varepsilon_{j-1}} \beta_k + \beta_j.$$

ii. Se $h \in M_k$ com $k < \eta_1 \cdots \eta_j$, então $v(h) \in \sum_{i=0}^j v_i \mathbb{N}$. Em particular,

$$\Gamma_f = \langle v_0, \dots, v_g \rangle.$$

iii. $\text{mdc}(\varepsilon_{j-1}, v_j) = \varepsilon_j$, para $j = 1, \dots, g$. Além disso, v_j é o menor elemento não nulo de Γ_f que não é divisível por ε_{j-1} .

iv. O gênero de Γ_f é g e os inteiros v_0, \dots, v_g são o sistema mínimo de geradores.

Demonstração. Ver [8], p. 85. □

Observação 3.6.14. Do Teorema 3.6.13 $\Gamma_f = \langle v_0, \dots, v_g \rangle$ e da Definição 3.6.6, temos

$$e_i = \text{mdc}(v_0, \dots, v_i) \quad \text{e} \quad n_i = \frac{e_{i-1}}{e_i}.$$

Mas, por (iii.), ε_i divide v_j , para todo $j = 0, \dots, i$. Em particular, $\varepsilon_i | e_i = \text{mdc}(v_0, \dots, v_i)$. Por outro lado, do item (i.), e_i divide β_j , $j = 0, \dots, i$, ou seja, $e_i | \text{mdc}(\beta_0, \dots, \beta_i) = \varepsilon_i$. Logo, $e_i = \varepsilon_i$ e

$$n_i = \frac{e_{i-1}}{e_i} = \frac{\varepsilon_{i-1}}{\varepsilon_i} = \eta_i,$$

para todo $i = 0, \dots, g$ (ver Definição 3.4.6).

Observação 3.6.15. Da Proposição 3.4.7 e do Teorema 3.6.13, podemos escrever

$$v_j = \eta_{j-1} v_{j-1} - \beta_{j-1} + \beta_j,$$

para $j = 2, \dots, g$.

De fato,

$$\begin{aligned}
v_j &= \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k}{\varepsilon_{j-1}} \beta_k + \beta_j = \\
&= \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_1}{\varepsilon_{j-1}} \beta_1 + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_{j-1}} \beta_2 + \cdots + \frac{\varepsilon_{j-2} - \varepsilon_{j-1}}{\varepsilon_{j-1}} \beta_{j-1} + \beta_j = \\
&= \frac{\eta_1 \eta_2 \cdots \eta_g - \eta_2 \cdots \eta_g}{\eta_j \cdots \eta_g} \beta_1 + \frac{\eta_2 \cdots \eta_g - \eta_3 \cdots \eta_g}{\eta_j \cdots \eta_g} \beta_2 + \cdots + \\
&+ \frac{\eta_{j-1} \cdots \eta_g - \eta_j \cdots \eta_g}{\eta_j \cdots \eta_g} \beta_{j-1} + \beta_j = \\
&= \frac{(\eta_1 - 1) \eta_2 \cdots \eta_{j-1} \eta_j \cdots \eta_g}{\eta_j \cdots \eta_g} \beta_1 + \frac{(\eta_2 - 1) \eta_3 \cdots \eta_{j-1} \eta_j \cdots \eta_g}{\eta_j \cdots \eta_g} \beta_2 + \cdots + \\
&+ \frac{(\eta_{j-1} - 1) \eta_j \cdots \eta_g}{\eta_j \cdots \eta_g} \beta_{j-1} + \beta_j \\
v_j &= (\eta_1 - 1) \eta_2 \cdots \eta_{j-1} \beta_1 + (\eta_2 - 1) \eta_3 \cdots \eta_{j-1} \beta_2 + \cdots + (\eta_{j-1} - 1) \beta_{j-1} + \beta_j.
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$v_{j-1} = (\eta_1 - 1) \eta_2 \cdots \eta_{j-2} \beta_1 + (\eta_2 - 1) \eta_3 \cdots \eta_{j-2} \beta_2 + \cdots + (\eta_{j-2} - 1) \beta_{j-2} + \beta_{j-1}.$$

$$\text{Daí, } v_j = \eta_{j-1} v_{j-1} - \beta_{j-1} + \beta_j.$$

Exemplo 3.6.16. Seja f uma curva algebróide plana parametrizada por

$$(f) : \begin{cases} x = t^6, \\ y = t^9 + t^{10} + a_{11}t^{11} + a_{13}t^{13} + a_{14}t^{14} + a_{17}t^{17} + a_{20}t^{20} + a_{23}t^{23} + \\ \quad + a_{26}t^{26} + a_{29}t^{29} + a_{32}t^{32} + a_{35}t^{35}. \end{cases}$$

Veremos que seu semigrupo de valores associados é $\Gamma = \langle 6, 9, 19 \rangle$.

Do Exemplo 3.4.5, temos que $g = 2$, $(\beta_0, \beta_1, \beta_2) = (6, 9, 10)$ e $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = (6, 3, 1)$. Assim, pelo teorema acima,

$$v_2 = \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1} \beta_1 + \beta_2 = \frac{6 - 3}{3} 9 + 10 = 19.$$

Portanto, $\Gamma_f = \langle v_0 = 6, v_1 = 9, 19 \rangle$. Além disso, com o auxílio de um software (ver [15]), podemos verificar que os gaps de Γ são

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 20, 22, 23, 26, 29, 32, 35, 41\}.$$

Logo $c = 42$ é o condutor deste semigrupo Γ .

Teorema 3.6.17. *Seja $f \in K[[x, y]]$ irredutível com uma dada parametrização de Puiseux. Então Γ_f e os expoentes característicos determinam uns aos outros.*

Demonstração. Ver [8], p. 88. □

Teorema 3.6.18. *Seja Γ um semigrupo de valores com um condutor e sistema mínimo de geradores sendo v_0, v_1, \dots, v_g tais que $n_i > 1$ e $v_i > n_{i-1}v_{i-1}$ para todo $i = 1, \dots, g$. Então existe uma curva algebróide plana irredutível (f) tal que $\Gamma_f = \Gamma$.*

Demonstração. Ver [8], p. 88.

□

4 BASE PADRÃO MINIMAL PARA ÁLGEBRAS

Neste capítulo nosso principal objetivo será encontrar uma base minimal para uma determinada álgebra. Com esta finalidade usaremos um algoritmo, que será visto adiante, para nos auxiliar neste trabalho.

Ao longo deste capítulo, considere K um corpo algebricamente fechado, o anel das séries de potências $K[[x_1, x_2, \dots, x_n]] =: K[[X]]$ e $M_{K[[X]]}$ o ideal maximal de $K[[X]]$.

4.1 BASE PADRÃO PARA ÁLGEBRAS

Seja $F = \{f_1, f_2, \dots, f_m\} \subset K[[X]]$ e considere o homomorfismo substituição

$$\begin{aligned} S_{f_1, \dots, f_m} : K[[y_1, \dots, y_m]] &\longrightarrow K[[X]] \\ g &\longmapsto g(f_1, \dots, f_m). \end{aligned}$$

A K -subálgebra $K[[F]]$ de $K[[X]]$ é definida como

$$K[[F]] = S_{f_1, \dots, f_m}(K[[y_1, \dots, y_m]]).$$

Um F -produto é um elemento da forma

$$F^\alpha = \prod_{i=1}^m f_i^{\alpha_i},$$

onde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}^m$.

Note que qualquer constante $a \in K$ é um múltiplo escalar de um F -produto, basta tomar $\alpha = (0, \dots, 0) \in \mathbb{N}^m$. Observe ainda que cada F -produto é associado a uma única m -upla $\alpha \in \mathbb{N}^m$.

Dado um subconjunto arbitrário G de $M_{K[[X]]} - \{0\}$, não vazio, podendo inclusive ser infinito, definimos um G -produto como sendo um F -produto para algum subconjunto finito F de G .

Definimos a K -álgebra

$$K[[G]] = \bigcup_{\substack{F \subset G \\ F \text{ finito}}} K[[F]].$$

Quando G é finito a definição de G -produto e F -produto definido acima coincidem, conseqüentemente, $K[[G]]$ será uma subálgebra completa.

Vamos introduzir um conceito de ordem nos monômios de $K[[X]]$.

Definição 4.1.1. Sejam f e $g \in K[[X]]$ dois monômios. Então

$$f = \lambda_f x_1^{\alpha_1} \cdot x_n^{\alpha_n} \quad \text{e} \quad g = \lambda_g x_1^{\beta_1} \cdot x_n^{\beta_n}.$$

Escrevendo $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ e $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$ dizemos que $f \leq g$ (ou equivalentemente $\alpha \leq \beta$) se $\alpha = \beta$ ou a primeira coordenada não nula de $\beta - \alpha$ é positiva.

A ordem definida anteriormente é conhecida como ordem lexicográfica.

Exemplo 4.1.2. Sejam x e $y \in K[[x, y]]$. Então $\alpha = (1, 0)$, $\beta = (0, 1)$ são os elementos de \mathbb{N}^2 associados a x e y , respectivamente. Consequentemente, $y < x$.

Exemplo 4.1.3. Considere os monômios $f = x^2y^3$ e $g = x^2yz^4 \in K[[x, y, z]]$. Então $\alpha = (2, 3, 0)$ e $\beta = (2, 1, 4)$ são os elementos de \mathbb{N}^3 associados a f e a g , respectivamente. Como a primeira coordenada não nula de $\alpha - \beta$ é igual a dois temos que $g \leq f$.

Definição 4.1.4. Seja $f \in K[[X]]$. Escreva f como soma de monômios, isto é,

$$f = \sum \lambda_\alpha X^\alpha,$$

onde $X^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e $\lambda_\alpha \in K$. A *potência líder* de f e o *termo líder* de f são definidos como

$$\ell_P(f) = \min\{X^\alpha; \lambda_\alpha \neq 0\} \quad \text{e} \quad \ell_T(f) = \min\{\lambda_\alpha X^\alpha; \lambda_\alpha \neq 0\},$$

respectivamente. Se $G \subset K[[X]]$, vamos denotar por $\ell_P(G)$ o conjunto das potências líderes de todos os elementos não nulos de G .

Definição 4.1.5. Seja $G \subset M_{K[[X]]} - \{0\}$ um subconjunto não vazio. Dados dois elementos g e $r \in K[[X]]$, dizemos que g se *reduz* a r , ou que r é uma *redução* de g módulo G , se existe um G -produto F^α e uma constante $a \in K$ tais que

$$r = g - aF^\alpha, \text{ com } r = 0 \quad \text{ou} \quad \ell_P(g) < \ell_P(r).$$

Neste caso, escrevemos $g \xrightarrow{G} r$ ou $g \xrightarrow{aF^\alpha} r$, se quisermos especificar o G -produto usado para a redução. Observe que $g - r \in K[[G]]$.

Observação 4.1.6. Note que a condição $r = 0$ ou $\ell_P(g) < \ell_P(r)$ significa dizer que conseguimos “cancelar” o termo líder de g com termo líder de aF^α .

Considere a cadeia (possivelmente infinita) de reduções

$$g \xrightarrow{G} r_1 \xrightarrow{G} r_2 \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} r_m \xrightarrow{G} \dots$$

Por definição, existe um G -produto $F_i^{\alpha(i)}$ e $a_{\alpha(i)} \in K - \{0\}$ tais que

$$r_m = g - \sum_{i=1}^m a_{\alpha(i)} F_i^{\alpha(i)} \text{ e}$$

$$\ell_P(a_{\alpha(1)} F_1^{\alpha(1)}) < \ell_P(a_{\alpha(2)} F_2^{\alpha(2)}) < \dots \quad (4.1)$$

Se a cadeia é infinita, temos a seguinte sequência em $K[[X]]$

$$\left\{ s_m = \sum_{i=1}^m a_{\alpha(i)} F_i^{\alpha(i)} \right\}_{m \in \mathbb{N} - \{0\}}.$$

Quando o conjunto G é finito, a seqüência s_m converge a um elemento de $K[[X]]$. De fato, de (4.1) temos que o conjunto $\{a_{\alpha(i)} F_i^{\alpha(i)}; i \geq 1\}$ é somável e, portanto, seu limite existe em $K[[X]]$ e será o mesmo que o limite de s_m .

Dizemos que r é a *redução final* de g módulo G se r é uma redução de g e r não possui nenhuma outra redução módulo G , isto é, $\ell_P(F^\alpha) \neq \ell_P(r)$, $\forall G$ -produto F^α . Neste caso, escrevemos

$$g \xrightarrow{G+} r.$$

Definição 4.1.7. Um conjunto H com uma operação $*$ é chamado de *monóide* se

- i) $a * b \in H$, para todo $a, b \in H$;
- ii) $(a * b) * c = a * (b * c)$, para todo $a, b, c \in H$;
- iii) existe único $e \in H$ tal que $a * e = a = e * a$, para todo $a \in H$.

Um submonóide de H será um subconjunto H' de H , não vazio, que ainda é um monóide com a operação $*$.

O monóide gerado por um conjunto $B \subset K[[X]]$, com a operação produto de $K[[X]]$, será denotado por $\langle B \rangle$. Chamaremos o monóide gerado por x_1, \dots, x_n de T^n .

Note que dado $G \subset M_{K[[X]]} - \{0\}$ sempre temos que $\ell_P(K[[G]])$ é um submonóide de T^n e que

$$\langle \ell_P(G) \rangle \subset \ell_P(K[[G]]).$$

A inclusão contrária nem sempre é verificada e motiva a seguinte definição.

Definição 4.1.8. Dizemos que o conjunto $G \subset M_{K[[X]]} - \{0\}$ é uma *base padrão de álgebras* se

$$\langle \ell_P(G) \rangle = \ell_P(K[[G]]).$$

Equivalentemente, G é base padrão para $K[[G]]$ se dado $f \in K[[G]] - \{0\}$,

$$\ell_P(f) = \ell_P(F^\alpha),$$

para algum G -produto F^α .

Exemplo 4.1.9. O conjunto $G = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ é uma base padrão para a álgebra $K[[x_1, x_2, \dots, x_n]]$, pois qualquer potência líder de elementos de $K[[x_1, \dots, x_n]] - \{0\}$ é um G -produto.

Exemplo 4.1.10. O conjunto $G = \left\{ x^2, \sum_{i=3}^{\infty} x^i \right\} \subset K[[x]]$ é uma base padrão para álgebras.

De fato, se $f \in K[[G]]$, então $\ell_P(f) = 1$ ou $\ell_P(f) = x^\lambda$, para algum $\lambda \geq 2$. Consequentemente, $\ell_P(f) \in \langle x^2, x^3 \rangle = \langle \ell_P(G) \rangle$.

Definição 4.1.11. Uma base padrão de álgebras $G \subset M_{K[[X]]} - \{0\}$ será chamada *minimal* se para todo $g \in G$, temos $\ell_P(g) \notin \langle \ell_P(G - \{g\}) \rangle$.

Definição 4.1.12. Dado uma soma em $K[[X]]$,

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda, \quad f_\lambda \in K[[X]],$$

definimos a *altura* da soma como

$$ht\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda\right) = \min_{\lambda \in \Lambda} \{\ell_P(f_\lambda)\}.$$

Definição 4.1.13. Seja $G \subset K[[X]]$. Um *S-processo* de G é um elemento da forma

$$aF^\alpha + bF^\beta,$$

onde $a, b \in K - \{0\}$ e F^α e F^β são G -produtos tais que

$$\ell_P(aF^\alpha + bF^\beta) > ht(aF^\alpha + bF^\beta),$$

sempre que $aF^\alpha + bF^\beta \neq 0$.

Se $G \subset K[[X]]$ tiver n elementos, então cada S -processo é associado a um par de n -uplas $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^{2n}$ tal que

$$S(\alpha, \beta) =: aF^\alpha + bF^\beta.$$

Observação 4.1.14. A condição $\ell_P(aF^\alpha + bF^\beta) > ht(aF^\alpha + bF^\beta)$, sempre que $S(\alpha, \beta) \neq 0$, é o mesmo que dizer que as potências líderes de aF^α e bF^β são iguais e seus termos líderes se cancelam.

Exemplo 4.1.15. Seja $G = \{f = x, g = xy^3, h = y^4 + y^5, k = y^6 + y^7\} \subset K[[x, y]]$. As expressões $fg - gf$, $h^3f^4 - g^4$ e $k^2f^4 - g^4$ são S -processos em G . De fato,

Primeiramente observe que $fg - gf = 0$, logo $fg - gf$ é um S -processo de G . Além disso,

$$\begin{aligned} h^3f^4 - g^4 &= (y^4 + y^5)^3(x)^4 - (xy^3)^4 \\ &= (\cancel{x^4y^{12}} + 3x^4y^{13} + 3x^4y^{14} + x^4y^{15}) - \cancel{x^4y^{12}} \\ &= 3x^4y^{13} + 3x^4y^{14} + x^4y^{15}. \end{aligned}$$

Daí, $\ell_P(h^3f^4 - g^4) = x^4y^{13} > x^4y^{12} = ht(h^3f^4 - g^4)$. Portanto, $h^3f^4 - g^4$ é um S -processo de G .

Por último,

$$\begin{aligned} k^2f^4 - g^4 &= (y^6 + y^7)^2(x)^4 - (xy^3)^4 \\ &= (\cancel{x^4y^{12}} + 2x^4y^{13} + x^4y^{14}) - \cancel{x^4y^{12}} \\ &= 2x^4y^{13} + x^4y^{14}. \end{aligned}$$

Assim, $\ell_P(k^2f^4 - g^4) = x^4y^{13} > x^4y^{12} = ht(k^2f^4 - g^4)$ e $k^2f^4 - g^4$ é um S -processo de G .

4.2 ALGORITMO PARA DETERMINAR BASE PADRÃO PARA ÁLGEBRAS

Defina $ord_{x_j}(x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}) = \alpha_j$. Um S -processo de G da forma

$$S = aF^\alpha + bF^\beta,$$

onde $a, b \in K$ e $F = \{f_1, \dots, f_m\} \subset G$, é determinado a menos de constantes por $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) \in \mathbb{N}^m$, soluções das equações diofantinas

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^m \alpha_j ord_{x_1}(\ell_P(f_j)) = \sum_{j=1}^m \beta_j ord_{x_1}(\ell_P(f_j)) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m \alpha_j ord_{x_n}(\ell_P(f_j)) = \sum_{j=1}^m \beta_j ord_{x_n}(\ell_P(f_j)). \end{cases} \quad (4.2)$$

O conjunto de todas as soluções do sistema acima é um subconjunto de \mathbb{N}^{2m} . Além disso, o conjunto das *soluções minimais* de (4.2), isto é, conjunto das soluções que são linearmente independente umas das outras, será denotado por D .

Dado $F = \{f_1, \dots, f_m\} \subset K[[X]]$, os S -processos correspondentes as soluções minimais de (4.2) serão chamados de S -processos minimais de F .

Se G é conjunto arbitrário de $K[[X]]$, então definimos um S -processo *minimal* de G como sendo um S -processo minimal de algum subconjunto finito F de G .

Dada uma equação diofantina

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i z_i - \sum_{j=1}^n \beta_j w_j = 0, \quad (4.3)$$

onde $m, n \in \mathbb{N}$, definimos seu *defeito* em (α, β) , onde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}^m$ e $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$, pela diferença

$$d(\zeta, \eta) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \zeta_i - \sum_{j=1}^n \beta_j \eta_j.$$

Note que quando o defeito é nulo o elemento $(\alpha, \beta) = (\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^{m+n}$ é solução da equação diofantina (4.3).

No caso particular em que o sistema de equações diofantinas (4.2) tem somente uma equação, temos

$$\sum_{j=1}^m \alpha_j ord_t(\ell_P(f_j)) = \sum_{j=1}^m \beta_j ord_t(\ell_P(f_j)). \quad (4.4)$$

Chamando $ord_t(\ell_P(f_j)) = \zeta_j$, $\forall j = 1, \dots, m$, temos que as soluções de (4.4) são dadas pelos pares $(\alpha, \beta) = (\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_m) \in \mathbb{N}^{2m}$ tais que seu defeito é nulo.

A fim de encontrar as soluções minimais de (4.4) usaremos o seguinte algoritmo para o cálculo das soluções minimais de (4.3).

Teorema 4.2.1. *Dada uma equação diofantina como em (4.3) calculamos suas soluções minimais da seguinte forma.*

$$\begin{aligned}
\text{Defina:} \quad P_1 &= \{(e_1, \underline{0}), \dots, (e_m, \underline{0})\}, \text{ onde } e_i = (0, \dots, \overbrace{1}^i, \dots, 0), \\
&\quad \underline{0} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{N}^m \\
M_1 &= \emptyset \\
Q_1 &= \emptyset \\
\text{Enquanto} \quad P_k &\neq \emptyset \text{ faça} \\
Q_{k+1} &= \{p + (\underline{0}, e_j); p \in P_k, d(p) > 0 \text{ e } 1 \leq j \leq n\} \\
&\quad \cup \{p + (e_i, \underline{0}); p \in P_k, d(p) < 0 \text{ e } 1 \leq i \leq m\} \\
M_{k+1} &= \{p \in Q_{k+1}; d(p) = 0\} \\
P_{k+1} &= \{p \in Q_{k+1} - M_{k+1}; p \text{ é minimal em } \{p\} \cup \bigcup_{i=1}^k M_i\} \\
\text{Saída:} \quad M &= \bigcup_{i=1}^k M_i,
\end{aligned}$$

O conjunto M será o conjunto das soluções minimais de (4.3).

Demonstração. Ver [3], p. 205. □

Observação 4.2.2. Para determinar P_{k+1} , utilizamos a relação de ordem parcial em \mathbb{N}^{2m} dada por: para todo par $p = (p_1, \dots, p_{2m})$, $p' = (p'_1, \dots, p'_{2m}) \in \mathbb{N}^{2m}$, então $p < p'$, se $p_i < p'_i$, para cada $i = 1, \dots, 2m$.

Exemplo 4.2.3. Vamos encontrar as soluções minimais da equação diofantina

$$6\alpha_1 + 9\alpha_2 - 6\beta_1 - 9\beta_2 = 0. \quad (4.5)$$

Seja $d(\alpha, \beta) = 6\alpha_1 + 9\alpha_2 - 6\beta_1 - 9\beta_2$, onde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ e $\beta = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{N}^2$. As soluções de (4.5), serão dadas pelos pares α e β tais que $d(\alpha, \beta) = 0$.

Primeiro passo do algoritmo 4.2.1:

$$\begin{aligned}
P_1 &= \{(e_1, \underline{0}), (e_2, \underline{0})\} \\
M_1 &= \emptyset \\
Q_1 &= \emptyset.
\end{aligned}$$

Segundo passo do algoritmo 4.2.1:

$$\begin{aligned}
Q_2 &= \{p + (\underline{0}, e_j); p \in P_1, d(p) > 0 \text{ e } 1 \leq j \leq 2\} \cup \\
&\quad \{p + (e_i, \underline{0}); p \in P_1, d(p) < 0 \text{ e } 1 \leq i \leq 2\} \\
&= \{(e_1, e_1), (e_1, e_2), (e_2, e_1), (e_2, e_2)\} \\
M_2 &= \{p \in Q_2; d(p) = 0\} = \{(e_1, e_1), (e_2, e_2)\} \\
P_2 &= \{p \in Q_2 - M_2; p \text{ é minimal em } \{p\} \cup M_1\}.
\end{aligned}$$

Terceiro passo do algoritmo 4.2.1:

$$\begin{aligned}
Q_3 &= \{p + (\underline{0}, e_j); p \in P_2, d(p) > 0 \text{ e } 1 \leq j \leq 2\} \cup \\
&\quad \{p + (e_i, \underline{0}); p \in P_2, d(p) < 0 \text{ e } 1 \leq i \leq 2\} \\
&= \{(2e_1, e_2), (e_1 + e_2, e_2), (e_2, 2e_1), (e_2, e_1 + e_2)\}. \\
M_2 &= \{p \in Q_2; d(p) = 0\} = \emptyset \\
P_3 &= \{p \in Q_3 - M_3; p \text{ minimal em } \{p\} \cup M_1 \cup M_2\} = \{(2e_1, e_2), (e_2, 2e_1)\}.
\end{aligned}$$

Observe que $p = (e_1 + e_2, e_2)$ não é minimal em $\{p\} \cup M_1 \cup M_2$ e $p = (e_2, e_1 + e_2)$ não é minimal em $\{p\} \cup M_1 \cup M_2$.

Quarto passo do algoritmo 4.2.1:

$$\begin{aligned}
Q_4 &= \{p + (\underline{0}, e_j); p \in P_3, d(p) > 0 \text{ e } 1 \leq j \leq 2\} \cup \\
&\quad \{p + (e_i, \underline{0}); p \in P_3, d(p) < 0 \text{ e } 1 \leq i \leq 2\} \\
&= \{(2e_1, e_1 + e_2), (2e_1, 2e_2), (e_1 + e_2, 2e_1), (2e_2, 2e_1)\} \\
M_4 &= \{p \in Q_3; d(p) = 0\} = \emptyset \\
P_4 &= \{p \in Q_4 - M_4; p \text{ minimal em } \{p\} \cup M_1 \cup M_2 \cup M_3\} = \{(2e_1, 2e_2), (2e_2, 2e_1)\}.
\end{aligned}$$

Quinto passo do algoritmo 4.2.1:

$$\begin{aligned}
Q_5 &= \{p + (\underline{0}, e_j); p \in P_4, d(p) > 0 \text{ e } 1 \leq j \leq 2\} \cup \\
&\quad \{p + (e_i, \underline{0}); p \in P_4, d(p) < 0 \text{ e } 1 \leq i \leq 2\} \\
&= \{(3e_1, 2e_2), (2e_1 + e_2, 2e_2), (2e_2, 3e_1), (2e_2, 2e_1 + e_2)\} \\
M_5 &= \{p \in Q_4; d(p) = 0\} = \{(3e_1, 2e_2), (2e_2, 3e_1)\} \\
P_5 &= \{p \in Q_5 - M_5; p \text{ minimal em } \{p\} \cup M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4\} = \emptyset.
\end{aligned}$$

Portanto as soluções minimais de (4.5) são dadas pelo conjunto

$$M = \bigcup_{i=0}^5 M_i = \{(e_1, e_1), (e_2, e_2), (3e_1, 2e_2), (2e_2, 3e_1)\}.$$

Teorema 4.2.4. (Algoritmo para determinar base padrão para álgebras) *Seja $B \subset M_{K[[X]]} - \{0\}$. Então, sempre obtemos uma base padrão G para $K[[B]]$ da seguinte forma:*

$$\begin{aligned}
\text{Entrada: } & B; \\
\text{Defina: } & F_0 = B \text{ e } i = 0; \\
\text{Faça: } & S_i = \{s; \text{ se } \acute{e} \text{ um } S\text{-processo minimal de } F_i\} \\
& R_i = \{r; s \xrightarrow{F_i^+} r, s \in S_i \text{ e } r \neq 0\}; \\
& F_{i+1} = F_i \cup R_i; \\
& i = i + 1; \\
\text{Saída: } & G = \bigcup_{i \geq 0} F_i.
\end{aligned}$$

Além disso, se $K[[B]]$ admite uma base padrão finita, então o processo acima produzirá uma após um número finito de passos.

Demonstração. Ver [9], Teorema 2, p. 55. □

Vamos aplicar o algoritmo dado no Teorema 4.2.4 para obter uma base para o anel local de algumas curvas algebróides planas.

Teorema 4.2.5. *Seja (f) uma curva algebróide plana parametrizada por*

$$\begin{cases} x = t^6, \\ y = t^9 + t^{10} + a_{11}t^{11} + a_{13}t^{13} + a_{14}t^{14} + a_{17}t^{17} + a_{20}t^{20} + a_{23}t^{23} + \\ \quad + a_{26}t^{26} + a_{29}t^{29} + a_{32}t^{32} + a_{35}t^{35}. \end{cases} \quad (4.6)$$

Então a base minimal padrão para \mathcal{O}_f será $G = \{x, y, z = y^2 - x^3\}$.

Demonstração. Vamos calcular a base padrão de \mathcal{O}_f usando o algoritmo 4.2.4. Para isto define $B = \{x, y\}$, então $\mathcal{O}_f \simeq K[[B]]$.

Primeiro passo do algoritmo 4.2.4: $F_0 = B$, $i = 0$.

Para $i = 1$, temos $S_1 = \{s; s \text{ é um } S\text{-processo minimal de } F_0\}$. Os S -processos minimais de F_0 são as soluções minimais da equação diofantina

$$6\alpha_1 + 9\alpha_2 - 6\beta_1 - 9\beta_2 = 0 \quad (4.7)$$

que, pelo Exemplo 4.2.3, são elementos do conjunto

$$M = \{(e_1, e_1), (e_2, e_2), (3e_1, 2e_2), (2e_2, 3e_1)\}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} S_1 &= \{S(\alpha, \beta) = aF^\alpha - bF^\beta; (\alpha, \beta) \in M\} \\ &= \{S(2e_1, 3e_2) = y^2 - x^3 = -S(3e_1, 2e_2)\}. \end{aligned}$$

Note que para $y^2 - x^3$ não existem um F_0 -produto F^α e $a \in K$ tais que

$$r = (y^2 - x^3) - aF^\alpha, \text{ com } r = 0 \text{ ou } \ell_P(y^2 - x^3) < \ell_P(r).$$

$$\text{Logo, } R_1 = \{r; s \xrightarrow{F_0^+} r, s \in S_1 \text{ e } r \neq 0\} = \{y^2 - x^3\}.$$

Segundo passo do algoritmo 4.2.4: Temos que $F_1 = F_0 \cup R_1 = \{x, y, z = y^2 - x^3\}$. Precisamos agora encontrar os S -processos minimais de F_1 o que equivale a encontrar as soluções minimais da seguinte equação diofantina

$$6\alpha_1 + 9\alpha_2 + 19\alpha_3 - 6\beta_1 - 9\beta_2 - 19\beta_3 = 0. \quad (4.8)$$

Com uma implementação do algoritmo apresentado no Teorema 4.2.1 apresentada no Apêndice A, encontramos as soluções minimais da equação (4.8) que são os elementos

do conjunto M dado por

$$M = \left\{ \begin{array}{l} (e_1, e_1), (e_2, e_2), (e_3, e_3), (3e_3, 2e_1 + 5e_2), (2e_1 + 5e_2, 3e_3), \\ (3e_3, 5e_1 + 3e_2), (5e_1 + 3e_2, 3e_3), (e_1 + 3e_3, 7e_2), (7e_2, e_1 + 3e_3), \\ (3e_3, 8e_1 + e_2), (8e_1 + e_2, 3e_3), (e_2 + 3e_3, 11e_1), (11e_1, e_2 + 3e_3), \\ (6e_3, e_1 + 12e_2), (e_1 + 12e_2, 6e_3), (6e_3, 19e_1), (19e_1, 6e_3) \\ (9e_3, 19e_2), (19e_2, 9e_3), (2e_2, 3e_1), (3e_1, 2e_2) \end{array} \right\}.$$

Note que se (α, β) é uma solução minimal de (4.8), então (β, α) também será uma solução minimal da equação. Consequente um S -processo minimal determinado por um par (α, β) será o mesmo, a menos de sinal, S -processo minimal determinado por (β, α) .

Do Exemplo 3.6.16, temos que 42 é o condutor do semigrupo gerado por 6, 9 e 19, logo, para todo $n \geq 42$ existem $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{N}$ tais que

$$n = 6\alpha_1 + 9\alpha_2 + 19\alpha_3.$$

Isto implica que todo elemento t^n tal que $n \geq 42$ pode ser escrito como $t^n = t^{6\alpha_1}t^{9\alpha_2}t^{19\alpha_3}$. Além disso, podemos observar $\langle t^6, t^9, t^{19} \rangle = \langle x, y, z \rangle$, pois $y = t^9 \cdot u_1$ e $z = t^{19} \cdot u_2$, $u_1, u_2 \in K[[t]]$ elementos invertíveis.

Portanto qualquer potência t^n , $n \geq 42$, é um F_1 -produto.

Vamos determinar as reduções finais módulo F_1 dos S -processos de M .

$$S(e_1, e_1) = aF^{e_1} - bF^{e_1} = ax^1y^0(y^2 - x^3)^0 - bx^1y^0(y^2 - x^3)^0 = 0 \xrightarrow{F_1^+} 0;$$

$$S(e_2, e_2) = aF^{e_2} - bF^{e_2} = 0 \xrightarrow{F_1^+} 0; \quad S(e_3, e_3) = aF^{e_3} - bF^{e_3} = 0 \xrightarrow{F_1^+} 0;$$

$$S(3e_3, 2e_1 + 5e_2) = aF^{3e_3} - bF^{2e_1 + 5e_2} = ax^0y^0(y^2 - x^3)^3 - bx^2y^5(y^2 - x^3)^0 = \lambda t^{58} + \dots \xrightarrow{F_1^+} 0.$$

$$S(3e_3, 5e_1 + 3e_2) = aF^{3e_3} - bF^{5e_1 + 3e_2} = \lambda t^{58} + \dots \xrightarrow{F_1^+} 0;$$

$$S(e_1 + 3e_3, 7e_2) = \lambda t^{64} + \dots \xrightarrow{F_1^+} 0; \quad S(3e_3, 8e_1 + e_2) = \lambda t^{58} + \dots \xrightarrow{F_1^+} 0.$$

$$S(e_2 + 3e_3, 11e_1) = \lambda t^{67} + \dots \xrightarrow{F_1^+} 0; \quad S(6e_3, e_1 + 12e_2) = \lambda t^{115} + \dots \xrightarrow{F_1^+} 0.$$

$$S(6e_3, 19e_1) = \lambda t^{115} + \dots \xrightarrow{F_1^+} 0; \quad S(9e_3, 19e_2) = \lambda t^{172} + \dots \xrightarrow{F_1^+} 0.$$

$$S(2e_2, 3e_1) = y^2 - x^3 \xrightarrow{F_1^+} 0.$$

Lembre que, se $S(\alpha, \beta) = aF^\alpha - bF^\beta$ é um S -processo, então os inteiros a e b são tais que as potências líderes de aF^α e bF^β são iguais e seus termos líderes se cancelam.

Os demais S -processos são análogos. Logo, $R_2 = \emptyset$. Desta forma, segue que o conjunto $G = \{x, y, z = y^2 - x^3\}$ é uma base padrão para \mathcal{O}_f . Se $g \in G$, temos que $\ell_P(g) \notin \langle \ell_P(G - \{g\}) \rangle$, ou seja, a base padrão G é minimal. \square

5 BASE PADRÃO PARA $\mathcal{O}d\mathcal{O}$

Assim como no capítulo anterior nosso objetivo será encontrar uma base padrão, porém agora no contexto de módulos. Mais especificamente, encontraremos uma base padrão minimal para o módulo das diferenciais de Kähler de um tipo particular de curva algebróide plana irredutível. Esta base será importante para o cálculo de um invariante da curva f , τ_f , chamado número de Tjurina que será definido no próximo capítulo.

5.1 DIFERENCIAL DE KÄHLER SOBRE RAMOS

Seja f uma curva algebróide plana irredutível em $K[[x, y]]$ e K um corpo algebricamente fechado de característica zero. O ideal gerado por f , $\langle f \rangle$, é primo em $K[[x, y]]$ o que implica que o anel $\mathcal{O} := \frac{K[[x, y]]}{\langle f \rangle}$ é um domínio de integridade.

Definição 5.1.1. O *módulo das diferenciais de Kähler sobre \mathcal{O}* é o \mathcal{O} -módulo

$$\mathcal{O}d\mathcal{O} = \frac{\mathcal{O}^2}{\langle e_1g_x + e_2g_y; g \in \langle f \rangle \rangle},$$

onde $\{e_1, e_2\}$ é a base canônica de \mathcal{O}^2 .

Observação 5.1.2. Utilizando a regra do produto temos

$$\mathcal{O}d\mathcal{O} = \frac{\mathcal{O}^2}{\langle f_x e_1 + f_y e_2 \rangle}.$$

Vamos denotar por dx e dy a classe de e_1 e e_2 , respectivamente, em $\mathcal{O}d\mathcal{O}$. Observe que os elementos dx , dy não são geradores livres de $\mathcal{O}d\mathcal{O}$ como \mathcal{O} -módulo. De fato, temos a seguinte relação

$$g_x dx + g_y dy = 0, \quad \forall g \in \langle f \rangle.$$

Além disso, temos a K -derivação universal

$$\begin{aligned} d : \mathcal{O} &\longrightarrow \mathcal{O}d\mathcal{O} \\ g &\longmapsto dg := g_x dx + g_y dy. \end{aligned}$$

Denotando a função H_φ por Φ (ver Proposição 3.5.4), construímos o seguinte homomorfismo

$$\begin{aligned} \Psi : \quad \mathcal{O}d\mathcal{O} &\longrightarrow K[[t]] \\ g_1 dx + g_2 dy &\longmapsto \Phi(g_1) \frac{d}{dt}(t^n) + \Phi(g_2) \frac{d}{dt}(\varphi(t)), \end{aligned}$$

onde a estrutura de \mathcal{O} -módulo sobre $K[[t]]$ é induzida pelo mapa Φ obtido através da parametrização de Puiseux do ramo (f) .

Definição 5.1.3. O submódulo de torção \mathcal{T} de $\mathcal{O}d\mathcal{O}$ é o submódulo definido por

$$\mathcal{T} = \{\omega \in \mathcal{O}d\mathcal{O}; h\omega = 0, \text{ para algum } h \in \mathcal{O} - \{0\}\}.$$

Proposição 5.1.4. Se $\langle f \rangle$ é o ideal gerado por f , então o núcleo do homomorfismo Ψ é o submódulo de torção \mathcal{T} de $\mathcal{O}d\mathcal{O}$.

Demonstração. Ver [9], p. 93. □

Do resultado acima, temos $\mathcal{O}d\mathcal{O}/\mathcal{T} \simeq \text{Im}\Psi$.

Definição 5.1.5. Se $\omega \in \frac{\mathcal{O}d\mathcal{O}}{\mathcal{T}}$, então o valor de ω é definido como

$$v(\omega) = v(\Psi(\omega)) + 1,$$

onde v é a valorização discreta como em (3.12).

Se $\omega = g_1dx + g_2dy \in \mathcal{O}d\mathcal{O}/\mathcal{T}$, então

$$\Psi(\omega) = \Phi(g_1)\frac{d}{dt}(t^n) + \Phi(g_2)\frac{d}{dt}(\varphi(t)) = g_1(t^n, \varphi(t))nt^{n-1} + g_2(t^n, \varphi(t))\varphi'(t).$$

Consequentemente,

$$v(\omega) = v(\Psi(\omega)) + 1 = v(g_1(t^n, \varphi(t))nt^{n-1} + g_2(t^n, \varphi(t))\varphi'(t)) + 1.$$

Definição 5.1.6. Dizemos que $\omega \in \mathcal{O}d\mathcal{O}$ é uma diferencial exata se existe $g \in \mathcal{O}$ tal que $\omega = dg$. Caso contrário dizemos que a diferencial é não exata. Será denotado por $d\mathcal{O}$ o conjunto das diferenciais exatas de $\mathcal{O}d\mathcal{O}$.

Proposição 5.1.7. Seja Γ_f o semigrupo de valores de uma curva f e c o seu condutor. Se $\omega \in \mathcal{O}d\mathcal{O}$ é uma diferencial exata, então $v(\omega) \in \Gamma_f$.

Por outro lado, se $v(\omega) \geq c$, então ω é uma diferencial exata.

Demonstração. Observe que se $\omega = dg$ então podemos assumir g não invertível. Em particular, temos que $v(\omega) \neq 0$.

Para a primeira parte da proposição, suponha $\omega = dg$ e observe que

$$\Psi(dg) = g_x(t^n, \varphi(t))nt^{n-1} + g_y(t^n, \varphi(t))\varphi'(t) = \frac{d}{dt}(g(t^n, \varphi(t))).$$

Logo, $v(\Psi(dg)) = v(g) - 1$ se $g \in \mathcal{O}$ e, consequentemente,

$$v(\omega) = v(\Psi(dg)) + 1 = v(g) - 1 + 1 = v(g) \in \Gamma.$$

Seja $\omega \in \mathcal{O}d\mathcal{O}$ tal que $v(\omega) \geq c$. Como $v(\omega) \geq c$, então existe $h_1 \in \mathcal{O}$ tal que $v(\omega) = v(h_1) = v(dh_1)$. Consequentemente, existe $c_1 \in K$ tal que $v(\omega - c_1dh_1) > v(\omega)$. Continuando o processo recursivamente encontramos $c_i \in K$ tais que

$$\dots > v(\omega - c_n dh_n) > v(\omega - c_{n-1} dh_{n-1}) > \dots > v(\omega - c_2 dh_2) > v(\omega - c_1 dh_1).$$

A família $\{c_i dh_i; i \geq 1\}$ é somável pois, por construção,

$$v(c_1 h_1) = v(\omega) < v(c_2 h_2) = v(\omega - c_1 h_1) < \dots$$

Portanto,

$$\omega = \sum_{i \geq 1} c_i dh_i = d \left(\sum_{i \geq 1} c_i h_i \right) \in d\mathcal{O}.$$

□

Definimos $\Lambda = v(\mathcal{O}d\mathcal{O} - \{0\}) = v(\text{Im}(\Psi) - \{0\})$. Note que para todo $h \in M_{K[[x,y]]}$ temos que $v(dh) = v(h)$. Em particular, $\Gamma - \{0\} \subset \Lambda$.

Definição 5.1.8. O maior inteiro ℓ tal que $\ell \notin \Lambda$ será chamada maior *gap* de Λ .

Note que sempre $\ell \notin \Gamma$ e $\ell \leq c - 1$, onde c é o condutor de Γ .

5.2 BASE PADRÃO PARA SUBMÓDULOS DE $K[[x_1, \dots, x_n]]$

Nesta seção iremos reescrever os principais conceitos vistos no capítulo anterior no contexto de submódulos de $K[[X]] = K[[x_1, \dots, x_n]]$.

Em todo capítulo, A será uma subálgebra completa de $K[[X]]$ e M um A -submódulo completo de $K[[X]]$. Também consideraremos no monóide $T^n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$, a ordem lexicográfica.

Definição 5.2.1. Seja H um conjunto de geradores de um A -módulo M . Dizemos que H é uma *base padrão para o A -módulo M* se, para todo $m \in M - \{0\}$, temos

$$\ell_P(m) = \ell_P(ag),$$

para algum $a \in A$ e algum $g \in H$.

Se G é uma base padrão para a álgebra A podemos escrever um elemento qualquer $a \in A$ como $a = \sum_{\lambda} b_{\lambda} F_{\lambda}^{\lambda}$, onde $b_{\lambda} \in K$ e F_{λ}^{λ} é um G -produto e a tem amplitude 1, isto é, o número de somandos F_{λ}^{λ} em a que contribuem para a altura de a é igual a 1. Logo, se $F_{\lambda_0}^{\lambda_0}$ é um G -produto minimal em relação aos demais F_{λ}^{λ} , então $\ell_P(a) = \ell_P(F_{\lambda_0}^{\lambda_0})$.

Podemos então reescrever a Definição 5.2.1 como: um conjunto geradores H de M sobre A é uma base padrão para M se, para todo $m \in M - \{0\}$,

$$\ell_P(m) = \ell_P(F_{\lambda}^{\lambda} g),$$

para algum G -produto F_{λ}^{λ} e algum $g \in H$.

A definição de redução é análoga ao caso de álgebras. Dizemos que $h \in K[[X]]$ se reduz a r módulo (H, G) se existem $b \in K$, F^{α} um G -produto e $g \in H$ tais que

$$r = h - bF^{\alpha}g,$$

onde $\ell_P(r) > \ell_P(h)$ sempre que $r \neq 0$. Neste caso escrevemos $h \xrightarrow{(H,G)} r$.

Assim como no caso de álgebras, dizemos que r é a redução final de h módulo (H, G) se r é uma redução de h e r não possui nenhuma outra redução módulo (H, G) . Esta redução final será denotada por $h \xrightarrow{(H,G)^+} r$.

Definição 5.2.2. Sejam $A \subseteq K[[X]]$ uma subálgebra com base padrão G , M um A -submódulo de $K[[X]]$ com base padrão H . A base padrão H será chamada *minimal* se para todo elemento $h \in H$ temos $\ell_P(h) \neq \ell_P(F^\alpha g)$, para todo $g \in H - \{h\}$ e para todo G -produto F^α .

Definição 5.2.3. Seja $A \subseteq K[[X]]$ uma subálgebra com base padrão G . Um S -processo sobre G de um par de elementos $g, h \in K[[X]]$ é uma expressão da forma

$$S = S(g, h) = aF^\alpha g + bF^\beta h,$$

onde $a, b \in K$, F^α, F^β são G -produtos tais que

$$\ell_P(S) > \min\{\ell_P(F^\alpha g), \ell_P(F^\beta h)\} = ht(aF^\alpha g + bF^\beta h),$$

quando $S(g, h) \neq 0$.

Observação 5.2.4. Note que um S -processo $aF^\alpha g + bF^\beta h$ sobre G , do par de elementos $g, h \in K[[X]]$, com $F = \{f_1, \dots, f_s\}$, é determinado a menos de um múltiplo escalar como solução minimal do seguinte sistema de equações diofantinas não lineares

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^m \alpha_j \text{ord}_{x_1}(\ell_P(f_j)) + \text{ord}_{x_1}(\ell_P(g)) & = & \sum_{j=1}^m \beta_j \text{ord}_{x_1}(\ell_P(f_j)) + \text{ord}_{x_1}(\ell_P(h)) \\ & \vdots & \\ \sum_{j=1}^m \alpha_j \text{ord}_{x_n}(\ell_P(f_j)) + \text{ord}_{x_n}(\ell_P(g)) & = & \sum_{j=1}^m \beta_j \text{ord}_{x_n}(\ell_P(f_j)) + \text{ord}_{x_n}(\ell_P(h)). \end{cases} \quad (5.1)$$

No caso de apenas uma variável, ainda será possível utilizar o algoritmo encontrado no Teorema 4.2.1 para resolver a equação diofantina não linear. Basta reescrevermos a equação na forma

$$\sum_{j=1}^m \alpha_j \text{ord}_t(\ell_P(f_j)) + \gamma_1 \text{ord}_t(\ell_P(g)) = \sum_{j=1}^m \beta_j \text{ord}_t(\ell_P(f_j)) + \gamma_2 \text{ord}_t(\ell_P(h)).$$

e procurarmos as soluções minimais tais que $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$.

Teorema 5.2.5. *Seja G uma base padrão minimal para a álgebra \mathcal{O} . Então encontramos uma base padrão H para o \mathcal{O} -módulo $\mathcal{O}d\mathcal{O}$ da seguinte forma:*

Entrada: G ;
Defina: $H_{-1} = \emptyset$; $H_0 = \{dh; h \in G\}$ e $i = 0$;
Enquanto $H_i \neq H_{i+1}$ *faça*
 $\Lambda_i = \{v(G^\alpha \omega); \omega \in H_i \text{ e } G^\alpha \text{ um } G\text{-produto}\}$;
 $\ell_i = \text{maior gap de } \Lambda_i$;
 $S = \{s; s \text{ é um } S\text{-processo minimal não trivial de } H_i \text{ sobre } G$
*com } v(ht(s)) < \ell_i, \text{ não calculado em algum passo anterior}\};
 $R = \{r; s \xrightarrow{(H_i, G)^+} r \forall s \in S \text{ e } r \neq 0\}$;
 $H_{i+1} = H_i \cup R$;
 $i = i + 1$;
Saída: $H = H_i, \Lambda = \Lambda_i, \ell = \ell_i$.*

Demonstração. Ver [9], página 96. □

Como aplicação do algoritmo, encontraremos a base padrão minimal do \mathcal{O} -módulo $\mathcal{O}d\mathcal{O}$ no caso de um tipo de curva algebróide particular.

Teorema 5.2.6. *Seja (f) uma curva algebróide plana parametrizada por*

$$\begin{cases} x = t^6, \\ y = t^9 + t^{10} + a_{11}t^{11} + a_{13}t^{13} + a_{14}t^{14} + a_{17}t^{17} + a_{20}t^{20} + a_{23}t^{23} + \\ \quad + a_{26}t^{26} + a_{29}t^{29} + a_{32}t^{32} + a_{35}t^{35}. \end{cases}$$

Se $z = y^2 - x^3$, $\omega_1 = xdy - \frac{3}{2}ydx$, $\omega_2 = xdz - \frac{19}{6}$, $\omega_3 = 9ydz - 19zdy$ e

$$\omega = \left(\omega_2 + \frac{1}{3}x^2ydx - \frac{1}{18} \left(6a_{13} + \frac{11}{4} \right) zdy \right) + B\omega_3 - \left(\frac{c}{6}x^4 + \frac{d}{12}xz \right) dx,$$

onde $c = 90a_{13} + 540a_{14} + 35$, $d = -156a_{13}^2 - 166a_{14} - 139a_{13} + 432a_{13}a_{14} + \frac{217}{16}$,

$A = 532a_{17} - 630a_{13}^2 + 576a_{14}^2 - 644a_{13}a_{14} - 224a_{13} - \frac{769}{2}a_{14} - 14$ e $B = \left(8a_{14} - \frac{73}{18} + \frac{4}{3}a_{13} \right)$,

então uma base padrão minimal para $\mathcal{O}d\mathcal{O}$ será dado por

<i>Condição</i>	<i>Base para $\mathcal{O}d\mathcal{O}$</i>	$\Lambda_f - \Gamma$
$a_{11} \notin \{-\frac{1}{2}, \frac{29}{18}\}$	$dx, dy, dz, \omega_1, \omega_2, \omega_3$	16, 22, 26, 29, 32, 35, 41
$a_{11} = \frac{29}{18}$	$dx, dy, dz, \omega_1, \omega_2$	16, 22, 26, 32, 35, 41
$a_{11} = -\frac{1}{2}$ e $A \neq 0$	$dx, dy, dz, \omega_1, \omega_3, \omega$	16, 22, 29, 32, 35, 41
$a_{11} = -\frac{1}{2}$ e $A = 0$	$dx, dy, dz, \omega_1, \omega_3$	16, 22, 29, 35, 41

Demonstração. Do Teorema 4.2.5, temos que $G = \{x, y, z\}$ é uma base minimal padrão para \mathcal{O} . Vamos utilizar o algoritmo visto no Teorema 5.2.5 para encontrar a base padrão de $\mathcal{O}d\mathcal{O}$.

Primeira etapa do algoritmo:

- $H_0 = \{dx, dy, dz\}$ onde

$$dx = 6t^5,$$

$$dy = 9t^8 + 10t^9 + 11a_{11}t^{10} + \dots \text{ e}$$

$$\begin{aligned} dz = & 38t^{18} + 20(1 + a_{11})t^{19} + 42a_{11}t^{20} + 22(2a_{13} + a_{11}^2)t^{21} + 46(a_{14} + a_{13})t^{22} + \\ & + 48(a_{14} + a_{11}a_{13})t^{23} + 50a_{11}a_{14}t^{24} + 26(2a_{17} + a_{13}^2)t^{25} + 54(a_{17} + a_{13}a_{14})t^{26} + \\ & + 28(2a_{11}a_{17} + a_{14}^2)t^{27} + 58a_{20}t^{28} + 60(a_{20} + a_{13}a_{17})t^{29} + 62(a_{11}a_{20} + a_{14}a_{17})t^{30} + \\ & + 64a_{23}t^{31} + \dots \end{aligned}$$

- $\Lambda_0 = \{v(G^\alpha\omega); \omega \in H_0 \text{ e } G^\alpha \text{ um } G\text{-produto}\}$
 $= \{v(x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}z^{\alpha_3}\omega) = \alpha_1v(x) + \alpha_2v(y) + \alpha_3v(z) + v(\omega); \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{N} \text{ e } \omega \in H_0\}.$

Como $v(\omega) \in \{v(dx) = 6, v(dy) = 9, v(dz) = 19\}$ temos

$$v(G^\alpha\omega) = 6\alpha_1 + 9\alpha_2 + 19\alpha_3 + v(\omega) = 6\alpha'_1 + 9\alpha'_2 + 19\alpha'_3,$$

com $\alpha_i, \alpha'_j \in \mathbb{N}$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

Portanto, $\Lambda_0 = \langle 6, 9, 19 \rangle = \Gamma$ e $\ell_0 = 41$.

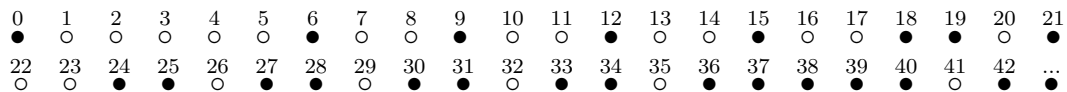


Figura 1 – Diagrama do semigrupo $\Gamma = \langle 6, 9, 19 \rangle$

No diagrama da Figura 1, bolinhas pretas indicam que o inteiro está em Γ .

- $S = \{s; s \text{ é um } S\text{-processo minimal não trivial de } H_0 \text{ sobre } G \text{ com } v(ht(s)) < 41\}$

$$\begin{aligned} S &= \{s \neq 0; s = aG^\alpha\omega_1 + bG^\beta\omega_2; \alpha, \beta \in \mathbb{N}^3, \omega_1, \omega_2 \in H_0 \text{ e } v(\ell_P(s)) > v(ht(s))\} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} s = ax^{\alpha_1}y^{\alpha_2}z^{\alpha_3}\omega_1 + bx^{\beta_1}y^{\beta_2}z^{\beta_3}\omega_2; \\ s \neq 0, \alpha_i, \beta_j \in \mathbb{N}, \omega_1, \omega_2 \in H_0 \text{ e } v(\ell_P(s)) > v(ht(s)) \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Pela Observação 5.2.4, os elementos de S são as soluções minimais da equação diofantina não linear

$$6\alpha_1 + 9\alpha_2 + 19\alpha_3 + k_1 = 6\beta_1 + 9\beta_2 + 19\beta_3 + k_2,$$

com $k_1, k_2 \in \{5, 8, 18\}$ e $k_1 \neq k_2$. Ou ainda, são as soluções minimais da equação diofantina linear

$$6\alpha_1 + 9\alpha_2 + 19\alpha_3 + k_1\gamma_1 = 6\beta_1 + 9\beta_2 + 19\beta_3 + k_2\gamma_2, \quad (5.2)$$

satisfazendo $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, $k_1, k_2 \in \{5, 8, 18\}$ e $k_1 \neq k_2$.

Temos então três possibilidades para k_1, k_2 e para a equação (5.2). A saber,

- (I) $k_1 = 5$ e $k_2 = 8$, isto é, $\omega_1 = dx$ e $\omega_2 = dy$,
- (II) $k_1 = 5$ e $k_2 = 18$, isto é, $\omega_1 = dx$ e $\omega_2 = dz$ e
- (III) $k_1 = 8$ e $k_2 = 18$, isto é, $\omega_1 = dy$ e $\omega_2 = dz$,

cujas equações correspondentes são, respectivamente:

$$6\alpha_1 + 9\alpha_2 + 19\alpha_3 + 5\gamma_1 = 6\beta_1 + 9\beta_2 + 19\beta_3 + 8\gamma_2 \quad (5.3)$$

$$6\alpha_1 + 9\alpha_2 + 19\alpha_3 + 5\gamma_1 = 6\beta_1 + 9\beta_2 + 19\beta_3 + 18\gamma_2, \quad (5.4)$$

$$6\alpha_1 + 9\alpha_2 + 19\alpha_3 + 8\gamma_1 = 6\beta_1 + 9\beta_2 + 19\beta_3 + 18\gamma_2. \quad (5.5)$$

Usando o algoritmo dado no Teorema 4.2.1, as soluções minimais da equação (5.3), satisfazendo $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, são:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma_1, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_2) = (2, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1) \Rightarrow \begin{array}{l} s_1 = ax^2y^0z^0dx + bx^0y^1z^0dy \\ s_1 = ax^2dx + bydy \end{array} \\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma_1, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_2) = (10, 0, 0, 1, 0, 0, 3, 1) \Rightarrow \begin{array}{l} s_2 = ax^{10}y^0z^0dx + bx^0y^0z^3dy \\ s_2 = ax^{10}dx + bz^3dy \end{array} \\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma_1, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_2) = (0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1) \Rightarrow \begin{array}{l} s_3 = ax^0y^1z^0dx + bx^1y^0z^0dy \\ s_3 = aydx + bxdy \end{array} \\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma_1, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_2) = (0, 0, 3, 1, 0, 6, 0, 1) \Rightarrow \begin{array}{l} s_4 = ax^0y^0z^3dx + bx^0y^6z^0dy \\ s_4 = az^3dx + by^6dy \end{array} \end{array} \right.$$

As soluções minimais da equação (5.4), satisfazendo $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, são:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma_1, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_2) = (2, 0, 1, 1, 0, 2, 0, 1) \Rightarrow s_5 = ax^2zdx + by^2dz \\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma_1, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_2) = (0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1) \Rightarrow s_6 = azdx + bxdz \\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma_1, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_2) = (0, 0, 4, 1, 0, 7, 0, 1) \Rightarrow s_7 = az^4dx + by^7dz \end{array} \right.$$

Por fim, as soluções minimais da equação (5.5), satisfazendo $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, são:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma_1, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_2) = (0, 1, 1, 1, 3, 0, 0, 1) \Rightarrow s_8 = ayzdy + bx^3dz \\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma_1, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_2) = (0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1) \Rightarrow s_9 = azdy + bydz \\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma_1, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_2) = (0, 0, 4, 1, 11, 0, 0, 1) \Rightarrow s_{10} = az^4dy + bx^{11}dz \end{array} \right.$$

Para determinar as constantes a e b em s_i , para $i = 1, 2, \dots, 10$, vamos usar que $x = t^6$, $y = t^9 + t^{10} + a_{11}t^{11} + \dots + a_{35}t^{35}$, $z = y^2 - x^3 = 2t^{19} + (1 + 2a_{11})t^{20} + 2a_{11}t^{21} + \dots$,

$$\begin{cases} dx = 6t^5, \\ dy = 9t^8 + 10t^9 + 11a_{11}t^{10} + \dots + 35a_{35}t^{34} \\ dz = 38t^{18} + 20(1 + 2a_{11})t^{19} + 42a_{11}t^{20} + \dots \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned} s_1 &= ax^2dx + bydy \\ &= [a(t^6)^26t^5] + [b(t^9 + t^{10} + a_{11}t^{11} + \dots + a_{35}t^{35})(9t^8 + 10t^9 + \dots + 35a_{35}t^{34})]. \end{aligned}$$

Como $v(\ell_P(s_1)) \geq v(ht(s_1)) = v(t^{17}) = 18$, concluímos que $6a = -9b$, isto é, a menos de múltiplo escalar, $a = -3$ e $b = 2$. Daí segue que

$$s_1 = 2ydy - 3x^2dx = dz.$$

Para s_2 , observe que

$$\begin{aligned} s_2 &= ax^{10}dx + bz^3dy \\ &= a[(t^6)^{10}6t^5] + [b(2t^{19} + \dots)^3(9t^8 + 10t^9 + \dots + 35a_{35}t^{34})] \end{aligned}$$

e que $v(ht(s_2)) = 66 > 41 = \ell_0$. Logo, $s_2 \notin S$.

Em s_3 , temos

$$\begin{aligned} s_3 &= aydx + bxdy \\ &= [a(t^9 + t^{10} + a_{11}t^{11} + \dots + a_{35}t^{35})6t^5] + [bt^6(9t^8 + 10t^9 + \dots + 35a_{35}t^{34})]. \end{aligned}$$

Como $v(\ell_P(s_3)) > v(ht(s_3)) = 15$, temos que $6a = -9b$, isto é, a menos de múltiplo escalar, $a = -3/2$ e $b = 1$. Daí segue que

$$s_3 = xdy - \frac{3}{2}ydx.$$

Como no caso de s_2 , temos que

$$\begin{aligned} s_4 &= az^3dx + by^6dy \\ &= [a(2t^{19} + \dots)^36t^5] + [b(t^9 + \dots + a_{35}t^{35})^6(9t^8 + \dots + 35a_{35}t^{34})] \end{aligned}$$

e $v(ht(s_4)) = 63 > 41 = \ell_0$. Logo, $s_4 \notin S$.

De modo análogo, podemos concluir que

$$\begin{cases} s_5 = 19x^2zdx - 6y^2dz, \\ s_6 = xdz - \frac{19}{6}zdx, \\ v(ht(s_7)) > 41 = \ell_0, \\ s_8 = 19yzdy - 9x^3dz, \\ s_9 = 9ydz - 19zdy \text{ e} \\ v(ht(s_{10})) > 41 = \ell_0. \end{cases}$$

Portanto, o conjunto S será dado por

$$S = \left\{ \begin{array}{l} s_1 = 2ydy - 3x^2dx, \quad s_3 = xdy - \frac{3}{2}ydx, \quad s_5 = 19x^2zdx - 6y^2dz, \\ s_6 = xdz - \frac{19}{6}zdx, \quad s_8 = 19yzdy - 9x^3dz, \quad s_9 = 9ydz - 19zdy \end{array} \right\}.$$

- Os elementos de R serão as reduções finais não nulas dos elementos de S , módulo (H_0, G) . Lembre que uma redução de s módulo (H_0, G) é um elemento $r = s - bG^\alpha\omega$, onde $b \in K$, $G^\alpha\omega = x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}z^{\alpha_3}\omega$, $\omega \in H_0 = \{dx, dy, dz\}$ e $\alpha_i \in \mathbb{N}$, satisfazendo $\ell_P(r) > \ell_P(s)$, sempre que $r \neq 0$. Isto equivale a encontrar b , um G -produto G^α e ω tais que os termos líderes de s e $bG^\alpha\omega$ se cancelem, ou ainda, encontrar uma solução para a equação

$$6\alpha_1 + 9\alpha_2 + 19\alpha_3 + m = v(\ell_P(s)), \quad (5.6)$$

onde $m \in \{5, 8, 18\}$ e $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{N}$.

Como $s_1 = dz$, escolhemos $bG^\alpha\omega = -dz$ e temos que $s_1 \xrightarrow{-dz} 0$. Portanto, $s_1 \notin R$.

Para encontrar sua redução final de s_3 módulo (H_0, G) , observe que

$$\begin{aligned} s_3 &= xdy - \frac{3}{2}ydx \\ &= (t^6)(9t^8 + 10t^9 + 11a_{11}t^{10} + 13a_{13}t^{12} + 14a_{14}t^{13} + \dots) + \\ &\quad - \frac{3}{2}(t^9 + t^{10} + a_{11}t^{11} + a_{13}t^{13} + a_{14}t^{14} + \dots)(6t^5) \\ &= [9t^{14} + 10t^{15} + 11a_{11}t^{16} + 13a_{13}t^{18} + 14a_{14}t^{19} + \dots] + \\ &\quad - [9t^{14} + 9t^{15} + 9a_{11}t^{16} + 9a_{13}t^{18} + 9a_{14}t^{19} + \dots] \\ &= t^{15} + 2a_{11}t^{16} + 4a_{13}t^{18} + 5a_{14}t^{19} + \dots \end{aligned}$$

Então, $\ell_P(s_3) = t^{15}$ e a equação (5.6) fica na forma

$$6\alpha_1 + 9\alpha_2 + 19\alpha_3 + m = 15.$$

Como m e cada α_i são naturais, $\alpha_3 = 0$ e $m \neq 18$. Porém, ainda que $m = 5$ ou $m = 8$, a equação acima não terá solução com $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}$. Portanto, s_3 não pode ser reduzido módulo (H_0, G) , ou seja, $s_3 \xrightarrow{(H_0, G)^+} s_3$ e $s_3 \in R$.

Agora vamos verificar se o S -processo s_5 se reduz módulo (H_0, G) . Então,

$$\begin{aligned} s_5 &= 19x^2zdx - 6y^2dz \\ &= 19(x^{12})(2t^{19} + (1 + 2a_{11})t^{20} + \dots)(6t^5) + \\ &\quad - 6(t^9 + t^{10} + \dots)^2(38t^{18} + 20(1 + 2a_{11})t^{19} + \dots) \\ &= 6 \cdot 19 [2t^{36} + 19(1 + 2a_{11})t^{37} + \dots] + \\ &\quad - 6 [38t^{36} + (20(1 + 2a_{11}) + 76)t^{37} + \dots] \\ &= [2046(1 + 2a_{11}) - 456] t^{37} + \dots \end{aligned}$$

Observe que

- i) $37 = 19 + 18$ e $t^{37} = \ell_P(zdz)$,
- ii) $38 = 2 \cdot 6 + 2 \cdot 9 + 8$ e $t^{38} = \ell_P(x^2y^2dy)$,
- iii) $39 = 2 \cdot 6 + 9 + 18$ e $t^{39} = \ell_P(x^2ydz)$,

ou seja, independentemente do valor de a_{11} conseguiremos reduzir s_5 módulo (H_0, G) se $\ell_P(s_5) = t^n$, com $n \in \{37, 38, 39\}$. Por outro lado, não existem $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ naturais e $m \in \{5, 8, 18\}$, tais que $40 = 6\alpha_1 + 9\alpha_2 + 19\alpha_3 + m$. Assim, conseguiremos reduzir s_5 até a potência t^{40} , caso o coeficiente de t^{40} seja não nulo. Caso contrário, teremos $v(ht(s_5)) \geq l_0 = 41$ e, portanto, não precisa ser considerado. Por enquanto, consideraremos que s_5 se reduz a $s'_5 = \lambda_1 t^{40} + \dots$, podendo λ_1 ser ou não nulo.

Agora vejamos se s_8 se reduz módulo (H_0, G) .

$$\begin{aligned}
s_8 &= 19yzdy - 9x^3dz \\
&= 19(t^9 + t^{10} + \dots)(2t^{19} + (1 + 2a_{11})t^{20} + \dots)(9t^8 + 10t^9 + \dots) + \\
&\quad - 9(x^{18})(38t^{18} + 20(1 + 2a_{11})t^{19} + \dots) \\
&= [342t^{36} + (722 + 171(1 + 2a_{11}))t^{37} + \dots] + \\
&\quad - [342t^{36} + 180(1 + 2a_{11})t^{37} + \dots] \\
&= [722 + 9(1 + 2a_{11})]t^{37} + \dots
\end{aligned}$$

Analogamente ao que foi feito para s_5 , podemos reduzir s_8 , módulo (H_0, G) , a $s'_8 = \lambda_2 t^{40} + \dots$, $\lambda_2 \in K$.

Vamos renomear $\omega_1 = s_3$, $\omega_2 = s_6$, $\omega_3 = s_9$, $\omega_4 = s'_5$ e $\omega_5 = s'_8$. Para as reduções de $\omega_2 = s_6$ e $\omega_3 = s_9$ módulo (H_0, G) precisaremos fazer algumas considerações.

Caso (i): $a_{11} \notin \{-\frac{1}{2}, \frac{29}{18}\}$. Daí,

$$\begin{aligned}
\omega_3 &= 9ydz - 19zdy \\
&= 9(t^9 + t^{10} + a_{11}t^{11} + \dots)(38t^{18} + 20(1 + 2a_{11})t^{19} + 42a_{11}t^{20} + \dots) + \\
&\quad - 19(2t^{19} + (1 + 2a_{11})t^{20} + 2a_{11}t^{21} + \dots)(9t^8 + 10t^9 + 11a_{11}t^{10} + \dots) \\
&= [342t^{27} + (180(1 + 2a_{11}) + 342)t^{28} + (720a_{11} + 180(1 + 2a_{11}))t^{29} + \dots] + \\
&\quad - [342t^{27} + (380 + 171(1 + 2a_{11}))t^{28} + (760a_{11} + 190(1 + 2a_{11}))t^{29} + \dots] \\
&= [-38 + 9(1 + 2a_{11})]t^{28} + [-40a_{11} - 10(1 + 2a_{11})]t^{29} + \dots
\end{aligned}$$

Como $a_{11} \neq \frac{29}{18}$, temos que $\ell_P(\omega_3) = t^{28}$. Mas não existem $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{N}$ e $m \in \{5, 8, 18\}$, tais que $28 = 6\alpha_1 + 9\alpha_2 + 19\alpha_3 + m$. Logo, ω_3 não se reduz módulo

(H_0, G) , isto é, $\omega_3 \xrightarrow{(H_0, G)^+} \omega_3$ e, portanto, $\omega_3 \in R$.

$$\begin{aligned}\omega_2 &= xdz - \frac{19}{6}zdx \\ &= (t^6)(38t^{18} + 20(1 + 2a_{11})t^{19} + \dots) - \frac{19}{6}(2t^{19} + (1 + 2a_{11})t^{20} + \dots)(6t^5) \\ &= [38t^{24} + 20(1 + 2a_{11})t^{25} + \dots] - [38t^{24} + 19(1 + 2a_{11})t^{25} + \dots] \\ &= (1 + 2a_{11})t^{25} + \dots\end{aligned}$$

Como $a_{11} \neq -1/2$, $\ell_P(\omega_2) = t^{25}$. Além disso, não existem $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{N}$ e $m \in \{5, 8, 18\}$, tais que $25 = 6\alpha_1 + 9\alpha_2 + 19\alpha_3 + m$. Consequentemente, ω_2 não se reduz módulo (H_0, G) , daí $\omega_2 \in R$. Assim,

$$R = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$$

e

$$H_1 = H_0 \cup R = \{dx, dy, dz, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}.$$

Segunda etapa do algoritmo:

- $\Lambda_1 = \{v(G^\alpha \omega); \omega \in H_1 \text{ e } G^\alpha \text{ é um } G\text{-produto}\}$. Observe que $v(dx) = 6, v(dy) = 9, v(\omega_1) = 16, v(dz) = 19, v(\omega_2) = 26, v(\omega_3) = 29$ e $v(\omega_4) = 41 = v(\omega_5)$, se $\lambda_1 \neq 0$ ou $\lambda_2 \neq 0$. Então,

$$G^\alpha \omega = x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} z^{\alpha_3} \omega; \omega \in H_1 \implies v(G^\alpha \omega) = 6\alpha_1 + 9\alpha_2 + 19\alpha_3 + v(\omega),$$

$v(\omega) \in \{6, 9, 16, 19, 26, 29, 41\}$, caso $\lambda_1 \neq 0$ ou $\lambda_2 \neq 0$. Se $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, usamos que $41 = v(xz\omega_1)$, ou seja, $41 \in \Lambda_1$. Logo,

$$\Lambda_1 = \{6, 9, 12, 15, 16, 18, 19, 21, 22, 24, 25, \rightarrow\},$$

onde a seta indica que todo natural maior ou igual 25 está em Λ_1 .

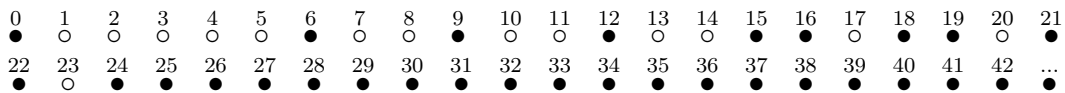


Figura 2 – Diagrama que representa Λ_1

- Consequentemente, $\ell_1 = 23$.
- Encontrar os S -processos minimais não triviais de H_1 sobre G , ou seja, encontrar soluções minimais da equação

$$6\alpha_1 + 9\alpha_2 + 19\alpha_3 + k_1\gamma_1 = 6\beta_1 + 9\beta_2 + 19\beta_3 + k_2\gamma_2, \quad (5.7)$$

onde $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{N}$, $k_1, k_2 \in \{5, 8, 15, 18, 25, 28, 40\}$, $k_1 \neq k_2$ e $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$.

Já encontramos no passo anterior as soluções minimais de (5.7) no caso em que $k_1, k_2 \in \{5, 8, 18\}$ e $k_1 \neq k_2$. Se $k_i \in \{25, 28, 40\}$, os S -processos minimais obtidos terão altura maior que $\ell_1 = 23$. Logo, $k_i \in \{5, 8, 15, 18\}$, com $k_1 = 15$ ou $k_2 = 15$. Sem perda de generalidade, podemos supor $k_2 = 15$. Se $k_1 = 18$, então $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, pois, caso contrário, a altura dos S -processos minimais seriam maior do que $\ell_1 = 23$. Mas, neste caso, a equação (5.7) seria

$$18 = 6\beta_1 + 9\beta_2 + 19\beta_3 + 15,$$

que não tem solução. Com isso, os S processos de H_1 sobre G correspondem às soluções minimais das equações

$$6\alpha_1 + 9\alpha_2 + 19\alpha_3 + 5\gamma_1 = 6\beta_1 + 9\beta_2 + 19\beta_3 + 15\gamma_2 \quad (5.8)$$

$$6\alpha_1 + 9\alpha_2 + 19\alpha_3 + 8\gamma_1 = 6\beta_1 + 9\beta_2 + 19\beta_3 + 15\gamma_2, \quad (5.9)$$

onde $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{N}$ e $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$.

As soluções minimais da equação (5.8) satisfazendo $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ são

$$\left\{ \begin{array}{l} (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma_1, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_2) = (8, 0, 0, 1, 0, 0, 2, 1) \Rightarrow s_1 = ax^8dx + bz^2\omega_1 \text{ e } v(ht(s_1)) = 54 \\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma_1, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_2) = (0, 1, 1, 1, 3, 0, 0, 1) \Rightarrow s_2 = ayzdx + bx^3\omega_1 \text{ e } v(ht(s_2)) = 34 \\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma_1, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_2) = (0, 6, 0, 1, 1, 0, 2, 1) \Rightarrow s_3 = ay^6dx + bxz^2\omega_1 \text{ e } v(ht(s_3)) = 60 \\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma_1, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_2) = (0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1) \Rightarrow s_4 = azdx + by\omega_1 \text{ e } v(ht(s_4)) = 25. \end{array} \right.$$

Como $v(ht(s_i)) > \ell_1 = 23$, para $i = 1, 2, 3, 4$, temos $s_1, s_2, s_3, s_4 \notin S$.

As soluções minimais de (5.9), satisfazendo $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, são

$$\left\{ \begin{array}{l} (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma_1, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_2) = (1, 0, 1, 1, 0, 2, 0, 1) \Rightarrow s_5 = axzdy + by^2\omega_1 \text{ e } v(ht(s_{15})) = 34 \\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma_1, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_2) = (0, 5, 0, 1, 0, 0, 2, 1) \Rightarrow s_6 = ay^5dy + bz^2\omega_1 \text{ e } v(ht(s_6)) = 54 \\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma_1, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_2) = (0, 0, 1, 1, 2, 0, 0, 1) \Rightarrow s_7 = azdy + bx^2\omega_1 \text{ e } v(ht(s_7)) = 28 \end{array} \right.$$

Como $v(ht(s_i)) > \ell_1 = 23$, para $i = 6, 7, 8$, temos $s_6, s_7, s_8 \notin S$.

Desta forma, R e S são como na primeira etapa do algoritmo, o que implica que $H_2 = H_1$ e o algoritmo termina.

- Conclusão: $H = \{dx, dy, dz, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$ é base padrão para o \mathcal{O} -módulo $\mathcal{O}d\mathcal{O}$. Porém, como vimos anteriormente, $\ell_P(xz\omega_1) = t^{40} = \ell_P(\omega_4)$, se $\lambda_1 \neq 0$. Assim, ω_4 é redundante na formação da base minimal. O mesmo vale para ω_5 . Logo,

$$H = \{dx, dy, dz, \omega_1, \omega_2, \omega_3\}$$

é uma base minimal padrão para $\mathcal{O}d\mathcal{O}$.

Caso (ii): $a_{11} = \frac{29}{18}$.

Neste caso, $\ell_P(\omega_3) = t^{29} = \ell_P(x^2ydy)$ e daí segue que existe $a \in K - \{0\}$, tal que $\omega_3 \xrightarrow{ax^2ydy} a_0t^{30} + \dots$, com $a_0 \in K$. Além disso, $t^{30} = \ell_P(x^2dz)$. Logo, existe $b \in K$ tal que

$$\omega_3 \xrightarrow{ax^2ydy} \xrightarrow{bx^2dz} \omega'_3 = \lambda_3 t^{31} + \dots,$$

para algum $\lambda_3 \in K$. No entanto, não existem inteiros $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ não negativos e $m \in \{5, 8, 18\}$ tais que $31 = 6\alpha_1 + 9\alpha_2 + 19\alpha_3 + m$. Conseqüentemente, ω'_3 não se reduz módulo (H_0, G) .

Neste caso, também temos que $\ell_P(\omega_2) = t^{25}$.

- Portanto, $R = \{\omega_1, \omega_2, \omega'_3, \omega_4, \omega_5\}$.
- $H_1 = H_0 \cup R = \{dx, dy, dz, \omega_1, \omega_2, \omega'_3, \omega_4, \omega_5\}$.

Segunda etapa do algoritmo, considerando o caso $a_{11} = 29/18$.

- $\Lambda_1 = \{v(G^\alpha\omega); \omega \in H_1 \text{ e } G^\alpha \text{ é um } G\text{-produto}\}$.

$$G^\alpha\omega = x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}z^{\alpha_3}\omega \implies v(G^\alpha\omega) = 6\alpha_1 + 9\alpha_2 + 19\alpha_3 + v(\omega),$$

$$v(\omega) \in \{6, 9, 19, 16 = v(\omega_1), 26 = v(\omega_2), 32 = v(\omega'_3), 41 = v(\omega_4) = v(\omega_5)\}.$$

Como no caso em que $a_{11} \neq -1/2, 29/18$, se $v(\omega_4), v(\omega_5) \geq 42$, ainda teremos $41 = v(xz\omega_1) \in \Lambda_1$. Logo,

$$\Lambda_1 = \{6, 9, 12, 15, 16, 18, 19, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 31, 32, \rightarrow\}.$$

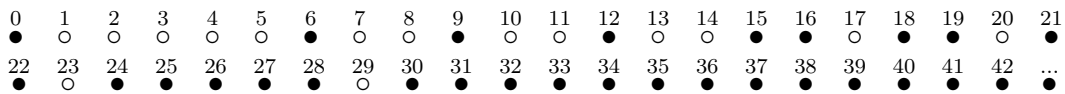


Figura 3 – Diagrama que representa Λ_1 no caso $a_{11} = 29/18$

- Conseqüentemente, $\ell_1 = 29$.
- Vamos encontrar os S -processos minimais de H_1 sobre G tais que $v(ht(s)) < \ell_1 = 29$. Para isto teremos que encontrar as soluções minimais da equação

$$6\alpha_1 + 9\alpha_2 + 19\alpha_3 + k_1\gamma_1 = 6\beta_1 + 9\beta_2 + 19\beta_3 + k_2\gamma_2, \quad (5.10)$$

onde $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{N}$, $k_1, k_2 \in \{5, 8, 15, 18, 25, 31, 40\}$, $k_1 \neq k_2$, tais que $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$.

Como $v(ht(s)) < \ell_1 = 29$, α_i 's e β_j 's são inteiros não negativos, devemos ter na equação (5.10) $k_1, k_2 \neq 31$ e 40 . Além disso, para $k_1 = 25$, a equação (5.10) não terá solução, qualquer que seja $k_2 \in \{5, 8, 15, 18\}$. Assim temos que analisar apenas as soluções em que $k_1, k_2 \in \{5, 8, 15, 18\}$. Mas as soluções minimais em que $k_1, k_2 \in \{5, 8, 18\}$ já foram obtidas no primeiro passo do algoritmo. Logo, ou $k_1 = 15$ ou $k_2 = 15$. Sem perda de generalidade, vamos supor que $k_2 = 15$.

Se $k_1 = 5$ e $k_2 = 15$, a equação (5.10) é igual à equação (5.8), cuja solução minimal s tal que $v(ht(s)) < \ell_1 = 29$ é:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma_1, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_2) = (0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1) \Rightarrow s_1 = -\frac{1}{6}zdx + 2y\omega_1 \text{ e } v(ht(s_1)) = 25.$$

Também já encontramos as soluções minimais da equação (5.10) quando $k_1 = 8$ e $k_2 = 15$ (veja soluções da equação (5.9)). Apenas uma satisfaz $v(ht(s)) < 29$, a saber,

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma_1, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_2) = (0, 0, 1, 1, 2, 0, 0, 1) \Rightarrow s_2 = zdy - 18x^2\omega_1 \text{ e } v(ht(s_2)) = 28.$$

Por fim, se $k_1 = 18$ e $k_2 = 15$, temos

$$6\alpha_1 + 9\alpha_2 + 19\alpha_3 + 18\gamma_1 = 6\beta_1 + 9\beta_2 + 19\beta_3 + 15\gamma_2. \quad (5.11)$$

As soluções minimais de (5.11), tais que $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, são:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma_1, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_2) = (1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1) \Rightarrow s_3 = 38y\omega_1 - xdz \text{ e } v(ht(s_3)) = 25 \\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma_1, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_2) = (9, 0, 0, 1, 3, 0, 0, 1) \Rightarrow s_4 = ax^9dz + bz^3\omega_1 \text{ e } v(ht(s_4)) = 83 \\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma_1, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_2) = (0, 1, 0, 1, 2, 0, 0, 1) \Rightarrow s_5 = 38x^2\omega_1 - ydz \text{ e } v(ht(s_5)) = 28 \\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma_1, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_2) = (0, 6, 0, 1, 0, 0, 3, 1) \Rightarrow s_6 = ay^6dz + bz^3\omega_1 \text{ e } v(ht(s_6)) = 73. \end{array} \right.$$

Assim, apenas s_1, s_2, s_3 e $s_5 \in S$.

- Vamos agora fazer as reduções desses S -processos módulo (H_1, G) . Observe que

$$\begin{aligned} s_1 - \omega_2 &= \left[2y\omega_1 - \frac{1}{6}zdx \right] - \left[xdz - \frac{19}{6}zdx \right] = \left[2xydy - 3y^2dx - \frac{1}{6}zdx + \frac{19}{6}zdx - xdz \right] \\ &= \left[2xydy - 3y^2dx + 3zdx - xdz \right] = \left[2xydy - 3y^2dx + 3y^2dx - 3x^3dx - xdz \right] \\ &= x(2ydy + 3x^2dx) - xdz = xdz - xdz = 0 \Rightarrow s_1 \xrightarrow{(H_1, G)^+} 0. \end{aligned}$$

Além disso, $s_2 - \omega_3 = 0$ e $s_3 - 18\omega_2 = 0$ o que implica $s_2 \xrightarrow{(H_1, G)^+} 0$ e $s_3 \xrightarrow{(H_1, G)^+} 0$.

Por fim, $s_5 = -\frac{640}{3}t^{29} + \dots \xrightarrow{(H_1, G)^+} 0$, pois todo monômio t^n , para $n \geq 29$, se reduz módulo (H_1, G) já que Λ_1 contém todo natural maior ou igual a 29.

- Logo, o conjunto R contém apenas os elementos do passo anterior o que nos leva a $H_2 = H_1$ e ao fim do algoritmo.

- Concluimos assim que $H = \{dx, dy, dz, \omega_1, \omega_2, \omega'_3, \omega_4, \omega_5\}$ é uma base padrão para $Od\mathcal{O}$. Também analogamente ao caso anterior, temos que ω_4 e ω_5 possuem redução final nula módulo (H, G) . Além disso, $\ell_P(x\omega_2) = \ell_P(\omega'_3)$. Logo, podemos tirar ω'_3 de H e a base minimal padrão, neste caso, será $H = \{dx, dy, dz, \omega_1, \omega_2\}$.

Caso (iii): Suponhamos $a_{11} = -\frac{1}{2}$. Então,

$$\begin{aligned}\omega_3 &= 9ydz - 19zdy \\ &= -38t^{28} + 20t^{29} + \left[54a_{13} + \frac{31}{4}\right]t^{30} + \left[72a_{14} - 64a_{13} - 8\right]t^{31} + \dots\end{aligned}$$

Como não existem $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{N}$ e $m \in \{5, 8, 18\}$ tais que $28 = 6\alpha_1 + 9\alpha_2 + 19\alpha_3 + m$, temos que ω_3 não possui redução módulo (H_0, G) , ou seja, $\omega_3 \in R$.

Além disso, $\omega_2 = xdz - \frac{19}{6}zdx$ e, portanto,

$$\begin{aligned}\omega_2 &= t^6 \left(38t^{18} + 20(1 + 2a_{11})t^{19} + 42a_{11} + 22(2a_{13} + a_{11}^2)t^{21} + 46(a_{13} + a_{14})t^{22} + \right. \\ &\quad \left. + 48(a_{14} + a_{11}a_{13})t^{23} + 50a_{11}a_{14}t^{24} + 26(2a_{17} + a_{13}^2)t^{25} + \dots \right) + \\ &\quad - \frac{19}{6} \left(2t^{19} + (1 + 2a_{11})t^{20} + 2a_{11}t^{21} + (2a_{13} + a_{11}^2)t^{22} + 2(a_{13} + a_{14})t^{23} + \right. \\ &\quad \left. + 2(a_{14} + a_{11}a_{13})t^{24} + 2a_{11}a_{14}t^{25} + (2a_{17} + a_{13}^2)t^{26} + \dots \right) 6t^5 \\ &= \underbrace{(1 + 2a_{11})}_{=0} t^{25} + 4a_{11}t^{26} + 3(2a_{13} + a_{11}^2)t^{27} + 8(a_{13} + a_{14})t^{28} + \\ &\quad + 10(a_{14} + a_{11}a_{13})t^{29} + 12a_{11}a_{14}t^{30} + 7(2a_{17} + a_{13}^2)t^{31} + \dots \\ &= -2t^{26} + 3 \left(2a_{13} + \frac{1}{4} \right) t^{27} + 8(a_{13} + a_{14})t^{28} + 10 \left(a_{14} - \frac{1}{2}a_{13} \right) t^{29} + \\ &\quad - 6a_{14}t^{30} + 7(2a_{17} + a_{13}^2)t^{31} + \dots\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}\omega_2 \xrightarrow{\frac{1}{3}x^2ydx} \omega'_2 &= \left[3 \left(2a_{13} + \frac{1}{4} \right) + 2 \right] t^{27} + \left[8(a_{13} + a_{14}) - 1 \right] t^{28} + 10 \left(a_{14} - \frac{1}{2}a_{13} \right) t^{29} + \\ &\quad + \left[-6a_{14} + 2a_{13} \right] t^{30} + \left[7(2a_{17} + a_{13}^2) + 2a_{14} \right] t^{31} + \dots \\ &= \left(6a_{13} + \frac{11}{4} \right) t^{27} + \left[8(a_{13} + a_{14}) - 1 \right] t^{28} + 10 \left(a_{14} - \frac{1}{2}a_{13} \right) t^{29} + \\ &\quad + (-6a_{14} + 2a_{13})t^{30} + 7(2a_{17} + a_{13}^2)t^{31} + \dots \\ \omega'_2 \xrightarrow{bzdy} \omega''_2 &= \left(8a_{14} - \frac{73}{18} + \frac{4}{3}a_{13} \right) t^{28} + \left(\frac{5}{3}a_{13} + \frac{55}{18} + 10a_{14} \right) t^{29} + \\ &\quad + \left(-6a_{14} + \frac{11}{6}a_{13} + \frac{341}{288} - 6a_{13}^2 \right) t^{30} + \\ &\quad + \left(14a_{17} - \frac{112}{9}a_{13} - \frac{3}{4}a_{14} - \frac{11}{9} - 6a_{13}a_{14} - \frac{43}{3}a_{13}^2 \right) t^{31} + \dots,\end{aligned}$$

onde $b = -\frac{1}{18}(6a_{13} + \frac{11}{4})$. Logo, $\omega''_2 = \omega_2 + \frac{1}{3}x^2dx + bzdy$.

Se $B = \left(8a_{14} - \frac{73}{18} + \frac{4}{3}a_{13}\right) \neq 0$, teremos $v(\omega_2'') = 29 = v(\omega_3)$. Caso contrário, $v(\omega_2'') = 30$.

- Assim, $H_1 = H_0 \cup R = \{dx, dy, dz, \omega_1, \omega_2'', \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$.

Segunda etapa do algoritmo no caso $a_{11} = -1/2$.

- Determinar $\Lambda_1 = \{v(G^\alpha \omega); \omega \in H_1 \text{ e } G^\alpha \text{ é um } G\text{-produto}\}$. Antes observe

$$G^\alpha \omega = x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} z^{\alpha_3} \omega \implies v(G^\alpha \omega) = 6\alpha_1 + 9\alpha_2 + 19\alpha_3 + v(\omega),$$

e que $v(dx) = 6$, $v(dy) = 9$, $v(dz) = 19$, $v(\omega_1) = 16$, $v(\omega_3) = 29$, $v(\omega_2'') = 29$ ou $= 30$, $v(\omega_4) = 41$ ou ≥ 42 e $v(\omega_5) = 41$ ou ≥ 42 . Desta forma, podemos considerar que $v(\omega) \in \{6, 9, 19, 16, 29, 41\}$, pois se $v(\omega_2'') = 30$ teremos $30 = v(x^4 dx) \in \Lambda_1$ e se $v(\omega_4) \geq 42$ ou $v(\omega_5) \geq 42$ teremos ainda $41 = v(xz\omega_1) \in \Lambda_1$. Logo,

$$\Lambda_1 = \{6, 9, 12, 15, 16, 18, 19, 21, 22, 24, 25, 27, 28, 29, 30, 31, 33, \rightarrow\}.$$

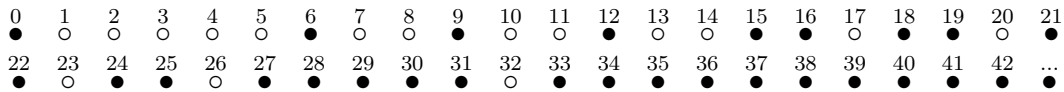


Figura 4 – Diagrama que representa Λ_1 no caso $a_{11} = -1/2$.

- Conseqüentemente, $\ell_1 = 32$.
- Vamos encontrar os S -processos minimais de H_1 sobre G tais que $v(ht(s)) < \ell_1 = 32$. Para isto, teremos que encontrar as soluções minimais da equação

$$6\alpha_1 + 9\alpha_2 + 19\alpha_3 + k_1\gamma_1 = 6\beta_1 + 9\beta_2 + 19\beta_3 + k_2\gamma_2, \quad (5.12)$$

onde $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{N}$ e $k_1, k_2 \in \{5, 8, 15, 18, 28, 40\}$, $k_1 \neq k_2$ e $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$.

Como $v(ht(s)) < \ell_1 = 32$, temos que $k_1, k_2 \neq 40$. Então, devemos encontrar as soluções para a equação (5.12) com $k_1, k_2 \in \{5, 8, 15, 18, 28\}$. Os casos em que $k_1, k_2 \in \{5, 8, 18\}$ já foram tratados no primeiro passo do algoritmo, por isso não produzirão novas soluções. Logo, sem perda de generalidade, podemos supor $k_2 = 15$ e assim devemos encontrar as soluções das seguintes equações diofantinas

$$6\alpha_1 + 9\alpha_2 + 19\alpha_3 + 5\gamma_1 = 6\beta_1 + 9\beta_2 + 19\beta_3 + 15\gamma_2, \quad (5.13)$$

$$6\alpha_1 + 9\alpha_2 + 19\alpha_3 + 8\gamma_1 = 6\beta_1 + 9\beta_2 + 19\beta_3 + 15\gamma_2 \quad (5.14)$$

$$6\alpha_1 + 9\alpha_2 + 19\alpha_3 + 18\gamma_1 = 6\beta_1 + 9\beta_2 + 19\beta_3 + 15\gamma_2. \quad (5.15)$$

Por último, como $v(\omega_2'') \geq 29$ e $v(\omega_3) = 29$, conseguimos produzir um S -processo não trivial, $s_{11} = 38\omega_2'' + B\omega_3$, no caso em que $k_1 = 28 = k_2$.

Observe que as equações (5.13), (5.14) e (5.15), são iguais às equações (5.8), (5.9) e (5.10), respectivamente. Coletando as soluções das equações (5.8), (5.9) e (5.10) que satisfazem $v(ht(s)) < \ell_1 = 32$ chegamos aos seguintes S -processos:

$$\begin{aligned} s_4 &= -\frac{1}{6}zdx + 2y\omega_1 & \text{com } v(ht(s_4)) &= 25 \\ s_7 &= -zdy + 18x^2\omega_1 & \text{com } v(ht(s_7)) &= 28 \\ s_8 &= -xdz + 38y\omega_1 & \text{com } v(ht(s_8)) &= 25 \\ s_{10} &= -ydz + 38x^2\omega_1 & \text{com } v(ht(s_{10})) &= 28 \\ s_{11} &= 38\omega_2'' + B\omega_3 & \text{com } v(ht(s_{11})) &= 28. \end{aligned}$$

Portanto, $S = \{s_4, s_7, s_8, s_{10}, s_{11}\}$.

- Agora vamos fazer as reduções dos elementos de S módulo (H_1, G) .

Primeiramente afirmamos que $s_4 = 2y\omega_1 - \frac{1}{6}zdx = xdz - \frac{19}{6}zdx = \omega_2$. De fato,

$$\begin{aligned} \omega_2 &= xdz - \frac{19}{6}zdx = x(2ydy - 3x^2dx) - \frac{18}{6}zdx - \frac{1}{6}zdx = \\ &= 2xydy - 3x^3dx - 3(y^2 - x^3)dx - \frac{1}{6}zdx = 2xydy - 3y^2dx - \frac{1}{6}zdx = \\ &= 2y \left(xdy - \frac{3}{2}ydx \right) - \frac{1}{6}zdx = 2y\omega_1 - \frac{1}{6}zdx = s_4. \end{aligned}$$

Além disso, $s_7 = 18x^2\omega_1 - zdy = 9ydz - 19zdy = \omega_3$. De fato,

$$\begin{aligned} \omega_3 &= 9ydz - 19zdy = 9y(2ydy - 3x^2dx) - 18zdy - zdy = \\ &= 18y^2dy - 27x^2ydx - 18(y^2 - x^3)dy - zdy = 18x^3dy - 27yx^2dx - zdy = \\ &= 18x^2 \left(xdy - \frac{3}{2}ydx \right) - zdy = 18x^2\omega_1 - zdy = s_7. \end{aligned}$$

Já $s_8 = 38y\omega_1 - xdz = 18xdz - 57zdx = 18\omega_2$. De fato,

$$\begin{aligned} s_8 &= 38y\omega_1 - xdz = 38y \left(xdy - \frac{3}{2}ydx \right) - xdz + 19xdz - 19xdz \\ &= 38xydy - 19x(2ydy - 3x^2dx) + 18xdz - 57y^2dx \\ &= 57x^3dx - 57y^2dx + 18xdz = 18xdz - 57zdx = 18\omega_2. \end{aligned}$$

Vamos mostrar agora que $s_{10} = 38x^2\omega_1 - ydz = 2\omega_3$. De fato,

$$\begin{aligned} s_{10} - 2\omega_3 &= 38x^2\omega_1 - ydz - 18ydz + 38zdy \\ &= 38x^2\omega_1 - 19y(2ydy - 3x^2dx) + 38(y^2 - x^3)dy \\ &= 38x^2\omega_1 - 38y^2dy + 57x^2ydx + 38y^2dy - 38x^3dy \\ &= 38x^2\omega_1 - 38x^2 \left(xdy - \frac{3}{2}ydx \right) = 38x^2\omega_1 - 38x^2\omega_1 = 0. \end{aligned}$$

Considerando o S -processo $s_{11} = 38\omega_2'' + B\omega_3$, onde $B = \left(8a_{14} - \frac{73}{18} + \frac{4}{3}a_{13}\right)$, temos

$$\begin{aligned} s_{11} &= 38\omega_2'' + B\omega_3 \\ &= \left[90a_{13} + 540a_{14} + 35\right]t^{29} + \left[-156a_{13}^2 - 166a_{14} - 139a_{13} + 432a_{13}a_{14} + \frac{217}{16}\right]t^{30} + \\ &+ \left[532a_{17} - 630a_{13}^2 + 576a_{14}^2 - 644a_{13}a_{14} - 224a_{13} - \frac{769}{2}a_{14} - 14\right]t^{31} + \dots \end{aligned}$$

Além disso, $x^4 dx = 6t^{29}$ e $xz dx = 12t^{30} - t^{32} + \dots$, consequentemente produzimos as seguintes reduções de s_{11} :

$$s_{11} = 38\omega_2'' + B\omega_3 \xrightarrow{-\frac{c}{6}x^4 dx - \frac{d}{12}xz dx} \omega = At^{31} + \dots,$$

onde

$$\begin{aligned} c &= 90a_{13} + 540a_{14} + 35, \\ d &= -156a_{13}^2 - 166a_{14} - 139a_{13} + 432a_{13}a_{14} + \frac{217}{16} \text{ e} \\ A &= 532a_{17} - 630a_{13}^2 + 576a_{14}^2 - 644a_{13}a_{14} - 224a_{13} - \frac{769}{2}a_{14} - 14. \end{aligned}$$

Desta forma,

$$\omega = 38\omega_2'' + B\omega_3 - \frac{c}{6}x^4 dx - \frac{d}{12}xz dx.$$

Note que se $A = 0$, então $v(\omega) \geq 33$. Como 32 é o maior gap de Λ_1 , temos que $\omega \xrightarrow{(H_1, G)^+} 0$. Assim, concluímos que as reduções de s_4, s_7, s_8, s_{10} e s_{11} são nulas módulo (H_1, G) e o algoritmo termina com

$$H = H_1 = \{dx, dy, dz, \omega_1, \omega_2'', \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$$

base padrão para o módulo $\mathcal{O}d\mathcal{O}$ e $\Lambda_f = \Lambda_1$. Para concluir precisamos verificar se H é minimal. Como nos caso anteriores, $v(\ell_p(\omega_4)) = v(\ell_p(\omega_5)) = v(\ell_p(xz\omega_1))$ ou ω_4 e ω_5 não precisavam ser considerados como elementos da base minimal. Além disso, como $v(\omega_2'') = 29 = v(\omega_3)$, também podemos desconsiderá-lo como elemento da base minimal. Logo, $H = \{dx, dy, dz, \omega_1, \omega_3\}$.

Por outro lado, se $A \neq 0$, então $v(\omega) = 32$ e $\ell_p(\omega) \neq \ell_p(G^\alpha h)$, para todo G -produto G^α e $h \in H$, isto é, $\omega \in R$.

- Logo, $H_2 = H_1 \cup R = \{dx, dy, dz, \omega_1, \omega_2'', \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega\}$.

Terceira etapa do algoritmo no caso $a_{11} = -1/2$ e $A \neq 0$.

- $\Lambda_2 = \{v(G^\alpha \omega); \omega \in H_2 \text{ e } G^\alpha \text{ é um } G\text{-produto}\}$.

$$G^\alpha \omega = x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} z^{\alpha_3} \omega \implies v(G^\alpha \omega) = 6\alpha_1 + 9\alpha_2 + 19\alpha_3 + v(\omega),$$

onde $v(\omega) \in \{6, 9, 19, 16, 29, 32, 41\}$.

Logo,

$$\Lambda_2 = \{6, 9, 12, 15, 16, 18, 19, 21, 22, 24, 25, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, \rightarrow\}.$$

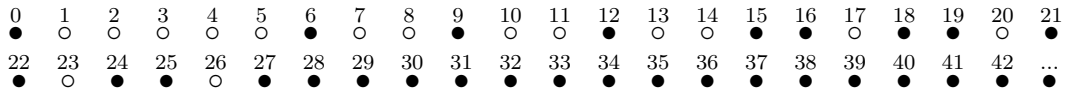


Figura 5 – Diagrama que representa Λ_2 no caso $a_{11} = -1/2$ e $A \neq 0$.

- Conseqüentemente, $\ell_2 = 23$.
- Vamos encontrar os S -processos minimais de H_2 sobre G tais que $v(ht(s)) < \ell_2 = 23$. Para isto, determinaremos as soluções não triviais de

$$6\alpha_1 + 9\alpha_2 + 19\alpha_3 + k_1\gamma_1 = 6\beta_1 + 9\beta_2 + 19\beta_3 + k_2\gamma_2, \quad (5.16)$$

onde $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{N}$ e $k_1, k_2 \in \{5, 8, 15, 18, 28, 31, 40\}$ e $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, não calculados em passos anteriores.

Como $v(ht(s)) < \ell_2 = 23$, temos que $k_1, k_2 \neq 28, 31, 40$. Mas, em passos anteriores (ver equação (5.2)), já encontramos as soluções da equação (5.16) para $k_1, k_2 \in \{5, 8, 18\}$.

- Assim, o algoritmo se encerra com $H = H_2 = \{dx, dy, dz, \omega_1, \omega_2'', \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega\}$ base padrão de $\mathcal{O}d\mathcal{O}$ e $\Lambda_f = \Lambda_2$. A base minimal padrão de $\mathcal{O}d\mathcal{O}$ será dada pelo conjunto $H = \{dx, dy, dz, \omega_1, \omega_3, \omega\}$.

□

Observação 5.2.7. Usando o critério de eliminação de parâmetros (ver [10], p. 4) temos que uma curva algebróide plana que possui semigrupo de valores igual a $\Gamma = \langle 6, 9, 19 \rangle$ é formalmente equivalente a uma curva do tipo

$$\begin{cases} x = t^6 \\ y = t^9 + t^{10} + a_{11}t^{11} + a_{13}t^{13} + a_{14}t^{14} + a_{17}t^{17} + a_{20}t^{20} + \\ \quad a_{23}t^{23} + a_{26}t^{26} + a_{29}t^{29} + a_{32}t^{32} + a_{35}t^{35}, \end{cases} \quad (5.17)$$

onde $a_{ij} \in K$.

Como aplicação do Teorema 5.2.6, encontraremos uma base para o K -espaço vetorial $\mathcal{O}d\mathcal{O}/d\mathcal{O}$ para uma curva algebróide com semigrupo de valores $\Gamma = \langle 6, 9, 19 \rangle$.

Teorema 5.2.8. *Seja (f) uma curva algebróide plana irredutível com semigrupo de valores $\Gamma = \langle 6, 9, 19 \rangle$ e parametrização do tipo (5.17). Sejam*

- $z = y^2 - x^3, \quad \omega_1 = xdy - \frac{3}{2}ydx \text{ mod } (d\mathcal{O}), \quad \omega_2 = xdz - \frac{19}{6}zdx \text{ mod } (d\mathcal{O}),$
- $\omega_3 = 9ydz - 19zdy \text{ mod } (d\mathcal{O}),$
- $\omega' = \left(\omega_2 + \frac{1}{3}x^2ydx - \frac{1}{18} \left(6a_{13} + \frac{11}{4} \right) zdy \right) + B\omega_3 - \left(\frac{c}{6}x^4 + \frac{d}{12}xz \right) dx \text{ mod } (d\mathcal{O}),$ onde
 $c = 90a_{13} + 540a_{14} + 35, \quad d = -156a_{13}^2 - 166a_{14} - 139a_{13} + 432a_{13}a_{14} + \frac{217}{16} e$
 $B = \left(8a_{14} - \frac{73}{18} + \frac{4}{3}a_{13} \right).$

Se $A = 532a_{17} - 630a_{13}^2 + 576a_{14}^2 - 644a_{13}a_{14} - 224a_{13} - \frac{769}{2}a_{14} - 14,$ então

Condição	Base para $\frac{\mathcal{O}d\mathcal{O}}{d\mathcal{O}}$
$a_{11} \notin \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{29}{18} \right\}$	$\omega_1, x\omega_1, z\omega_1, xz\omega_1, \omega_2, x\omega_2, \omega_3$
$a_{11} = \frac{29}{18}$	$\omega_1, x\omega_1, z\omega_1, xz\omega_1, \omega_2, x\omega_2$
$a_{11} = -\frac{1}{2} e A \neq 0$	$\omega_1, x\omega_1, z\omega_1, xz\omega_1, \omega_3, \omega'$
$a_{11} = -\frac{1}{2} e A = 0$	$\omega_1, x\omega_1, z\omega_1, xz\omega_1, \omega_3$

Demonstração. Vamos produzir uma base para o K -espaço vetorial $\mathcal{O}d\mathcal{O}/d\mathcal{O}$ a partir da base padrão H de $\mathcal{O}d\mathcal{O}$ obtida no Teorema 5.2.6.

Antes, observe que se $\omega \in \mathcal{O}d\mathcal{O}$ e $v(\omega) \geq 42$ então, pela Proposição 5.1.7, $\omega \in d\mathcal{O}$. Além disso, se $v(\omega) \in \Gamma$ então existe um $G^\alpha h \in d\mathcal{O}$, com $h \in H$, tal que $v(\omega - G^\alpha h) > v(\omega)$. Assim, conseguiremos reduzir ω , módulos diferenciais exatas, a uma forma ω'' tal que ω'' é exata ou $v(\omega'')$ é um gap de Γ . Logo, devemos procurar apenas formas não exatas $\omega \in \mathcal{O}d\mathcal{O}$ tais que $v(\omega) < 41$ e $v(\omega)$ é um gap de Γ .

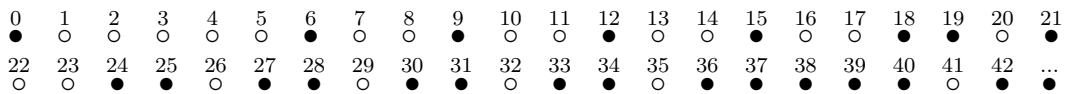


Figura 6 – Diagrama do semigrupo $\Gamma = \langle 6, 9, 19 \rangle$

Caso 1: $a_{11} \notin \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{29}{18} \right\}.$

Neste caso, pelo Teorema (5.2.6), temos que a base padrão para $\mathcal{O}d\mathcal{O}$ é

$$H_1 = \{dx, dy, dz, \omega_1, \omega_2, \omega_3\},$$

onde $\omega_1 = xdy - \frac{3}{2}ydx, \omega_2 = xdz - \frac{19}{6}zdx$ e $\omega_3 = 9ydz - 19zdy$ e $v(\omega_1) = 16, v(\omega_2) = 26$ e $v(\omega_3) = 29$. Como $v(\omega_i) \notin \Gamma$, para $i = 1, 2, 3$, temos que estas diferenciais não são exatas e, como também são linearmente independente sobre K , estão na base de $\mathcal{O}d\mathcal{O}/d\mathcal{O}$.

Observe também que $v(x\omega_1) = 22, v(z\omega_1) = 35, v(xz\omega_1) = 41$ e $v(x\omega_2) = 32$ são gaps de Γ e, portanto, essas diferenciais são não exatas.

Afirmamos que $H'_1 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, x\omega_1, z\omega_1, xz\omega_1, x\omega_2\}$ é base de $\mathcal{O}d\mathcal{O}/d\mathcal{O}$.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
●	○	○	○	○	○	●	○	○	●	○	○	●	○	○	●	×	○	●	●	○	●
22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	...
×	○	●	●	×	●	●	×	●	●	×	●	●	×	●	●	●	●	●	×	●	●

Figura 7 – \times no diagrama representa $v(\omega)$, para $\omega \in H'_1$.

De fato, não é difícil ver que para todo $m \in \{16 = v(\omega_1), 26 = v(\omega_2), 29 = v(\omega_3)\}$,

$$16 \leq 6\alpha + 9\beta + 19\gamma + m = v(x^\alpha y^\beta z^\gamma \omega) \neq 17, 20, 23,$$

para todo $\omega \in \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ e $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$. Logo, H'_1 contém todas as diferenciais não exatas geradas a partir de H_1 . Como H'_1 é LI, temos que H'_1 é uma base de $\mathcal{O}d\mathcal{O}/d\mathcal{O}$.

Caso 2: $a_{11} = \frac{29}{18}$.

Ainda pelo Teorema 5.2.6, temos que neste caso a base padrão minimal para $\mathcal{O}d\mathcal{O}$ é $H_2 = \{dx, dy, dz, \omega_1, \omega_2\}$. Afirmamos que

$$H'_2 = \{\omega_1, \omega_2, x\omega_1, z\omega_1, xz\omega_1, \omega_2\}$$

é uma base para o K -espaço vetorial $\mathcal{O}d\mathcal{O}/d\mathcal{O}$.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
●	○	○	○	○	○	●	○	○	●	○	○	●	○	○	●	×	○	●	●	○	●
22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	...
×	○	●	●	×	●	●	○	●	●	×	●	●	×	●	●	●	●	●	×	●	●

Figura 8 – \times no diagrama representa $v(\omega)$, para $\omega \in H'_2$.

De fato, como no **Caso 1**, temos que $\omega_1, x\omega_1, z\omega_1, xz\omega_1$ e ω_2 não são exatas e

$$v(x^\alpha y^\beta z^\gamma \omega) = 6\alpha + 9\beta + 19\gamma + m$$

não possui solução para $v(x^\alpha y^\beta z^\gamma \omega) = 17, 20$ ou 23 , com $m \in \{16 = v(\omega_1), 26 = v(\omega_2)\}$ e $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$. Além disso, a equação acima também não possui solução quando $v(x^\alpha y^\beta z^\gamma \omega) = 29$, conseqüentemente, H'_2 contém todas as diferenciais não exatas geradas a partir de H_2 e, como H'_2 é LI, temos que H' é base para $\mathcal{O}d\mathcal{O}/d\mathcal{O}$.

Caso 3: $a_{11} = -\frac{1}{2}$.

Quando $A = 0$, temos que a base minimal padrão para $\mathcal{O}d\mathcal{O}$ é $H_3 = \{dx, dy, dz, \omega_1, \omega_3\}$. Analogamente ao que foi realizado nos casos anteriores, podemos mostrar que ω_3 é não exata e que $H'_3 = \{\omega_1, \omega_3, x\omega_1, z\omega_1, xz\omega_1\}$ contém todas as diferenciais não exatas geradas por H_3 . Logo, H'_3 é uma base para $\mathcal{O}d\mathcal{O}/d\mathcal{O}$ como K -espaço vetorial.

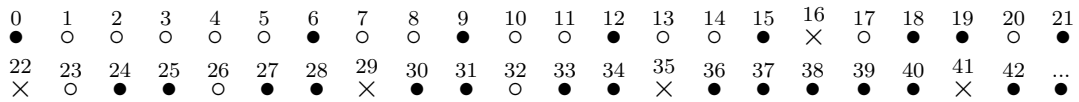


Figura 9 – \times no diagrama representa $v(\omega)$, para $\omega \in H'_3$.

Finalmente, para $A \neq 0$, a base minimal padrão de $\mathcal{O}d\mathcal{O}$ é

$$H_3 = \{dx, dy, dz, \omega_1, \omega_3, \omega'\},$$

onde $v(\omega') = 32$. Com isso, é possível ver que $H'_3 = \{\omega_1, \omega_3, \omega', x\omega_1, z\omega_1, xz\omega_1\}$ contém todas as diferenciais não exatas geradas por H_3 e, portanto, é uma base para K -espaço vetorial $\mathcal{O}d\mathcal{O}/d\mathcal{O}$.

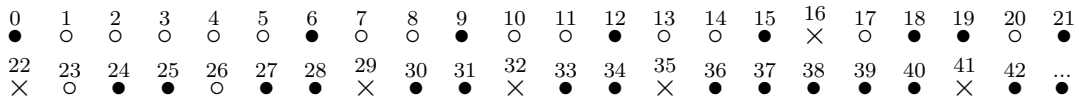


Figura 10 – \times no diagrama representa $v(\omega)$, para $\omega \in H'_3$.

□

6 CLASSIFICAÇÃO DE RAMOS COM SEMIGRUPO $\langle 6, 9, 19 \rangle$

Neste capítulo vamos classificar, módulo equivalência formal, as curvas algebróides planas irredutíveis que possuem semigrupo de valores $\Gamma = \langle 6, 9, 19 \rangle$ e com isso apresentar um contra-exemplo para a conjectura de Azevedo.

6.1 CLASSIFICAÇÃO FORMAL DE CURVAS COM SEMIGRUPO $\langle 6, 9, 19 \rangle$

Dado $f \in K[[x, y]]$ irredutível, sejam $\mathcal{O} = \mathcal{O}_f$ o anel de coordenadas de f , $\Gamma = \Gamma_f$ o semigrupo de valores de f , $\mathcal{O}d\mathcal{O}$ o módulo das diferenciais de Kähler sobre \mathcal{O} e

$$\Lambda_f = \{v(\omega); \omega \in \mathcal{O}d\mathcal{O} \setminus \mathcal{T}\},$$

onde \mathcal{T} é o submódulo de torção de $\mathcal{O}d\mathcal{O}$.

Consideraremos curvas algebróides planas com parametrização

$$f : \begin{cases} x = t^{v_0} \\ y = t^{v_1} + \sum_{i>v_1}^{\infty} a_i t^i, \end{cases} \quad (6.1)$$

onde $v_0, v_1 \in \mathbb{N}$, $v_1 > v_0$ e $v_0 \not\parallel v_1$.

Definimos os números

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \min\{\lambda \in \Lambda_f - \Gamma\} \\ \ell_0 &= \min\{\ell \in \Lambda_f; \ell + \mathbb{N} \subset \Lambda_f\} \\ w(r) &= \max\{v(p); v(qdx - pdy) = r \text{ e } p, q \in \mathcal{O}\} \\ \varepsilon &= \min\{v(p); qdx - pdy = 0 \text{ e } p, q \in \mathcal{O}\} \\ \Lambda'_f &= \{s \in \Lambda_f; s > v_1 + v_0, s \neq \lambda_0\}. \end{aligned}$$

Proposição 6.1.1. *Seja f uma curva algebróide e considere as seguintes condições:*

- (1) $r < 2w(r) - v_0 + v_1; \forall r \in \Lambda'_f;$
- (2) $\ell_0 \leq 2\varepsilon - v_0 + v_1.$

Então,

- (a) *Se a curva f satisfaz a condição (1), então f é formalmente equivalente à curva parametrizada por*

$$f' : \begin{cases} x = t^{v_0} \\ y = t^{v_1} + \sum_{i>v_1}^{\infty} a'_i t^i, \end{cases}$$

onde $a'_{r-v_0} = 0$ se $r \in \Lambda'_f$. A parametrização acima será chamada parametrização ultra-curta.

(b) Se f satisfaz (1) e (2), então duas parametrizações ultra-curtas f' e f'' de f serão homoteticamente relativas, isto é, existe $\gamma \in K^*$ tal que $a_i'' = a_i' \gamma^{i-v_1}$, $\forall i > v_1$.

Demonstração. Ver [5], p. 421. □

Observação 6.1.2. A condição (1) sempre é verdadeira para toda diferencial qdx e pdy com $q, p \in \mathcal{O}$, $v(q) > v_1$ e $v(p) > v_0$. De fato, se $\omega = qdx$ e $r = v(\omega)$, então $r = v(q) + v(dx) > v_1 + v_0$, $w(r) = v(0) = \infty$ e a condição (1) é claramente satisfeita. Por outro lado, se $\omega = pdy$ então

$$\begin{aligned} r = v(\omega) &= v(p) + v(dy) = v(p) + v_1 \\ &< 2v(p) - v_0 + v_1 \leq 2w(r) - v_0 + v_1. \end{aligned}$$

Observação 6.1.3. Note também que se a condição (1) é satisfeita por ω , então também será satisfeita por $g\omega$, $\forall g \in \mathcal{O} - \{0\}$. De fato, se $\omega = fdx - hdy$, onde $f, h \in \mathcal{O}$, então $r = v(\omega) < 2w(r) - v_0 + v_1$ e

$$\bar{r} = v(g\omega) = v(\omega) + v(g) < 2w(r) - v_0 + v_1 + 2v(g) = 2w(\bar{r}) - v_0 + v_1.$$

Teorema 6.1.4. A seguinte tabela nos dá a classificação formal de todas as curvas algebróides planas com classe de equisingularidade $\Gamma = \langle 6, 9, 19 \rangle$, onde

$$A = 532b_2 + 576b_1^2 - \frac{769}{2}b_1 - 14.$$

Condição	Parametrização ultra-curta
$b \notin \left\{-\frac{1}{2}, \frac{29}{18}\right\}$	$\begin{cases} x = t^6 \\ y = t^9 + t^{10} + bt^{11} + b_1t^{14} + b_2t^{17} \end{cases}$
$b = \frac{29}{18}$	$\begin{cases} x = t^6 \\ y = t^9 + t^{10} + bt^{11} + b_1t^{14} + b_2t^{17} + b_3t^{23} \end{cases}$
$b = -\frac{1}{2}$ e $A \neq 0$	$\begin{cases} x = t^6 \\ y = t^9 + t^{10} + bt^{11} + b_1t^{14} + b_2t^{17} + b_3t^{20} \end{cases}$
$b = -\frac{1}{2}$ e $A = 0$	$\begin{cases} x = t^6 \\ y = t^9 + t^{10} + bt^{11} + b_1t^{14} + b_2t^{17} + b_3t^{20} + b_4t^{26} \end{cases}$

onde quaisquer duas curvas pertencentes a quaisquer duas famílias acima serão equivalentes se, e somente se, elas são iguais.

Demonstração. Para demonstrar este resultado, mostraremos que uma curva (f) com classe de equisingularidade $\Gamma = \langle 6, 9, 19 \rangle$ satisfaz as condições (1) e (2) da Proposição 6.1.1 e assim, utilizando o Teorema 5.2.8, chegaremos à classificação formal de todas as curvas que possuem esse semigrupo de valores.

Da Observação 5.2.7 segue que $\Gamma = \langle 6, 9, 19 \rangle$ implica

$$v_0 = 6 = v(x) \quad \text{e} \quad v_1 = 9 = v(y).$$

Note que se $r = v(g\omega_1)$, onde $g \in \mathcal{O} - \{0\}$, então a condição (1) é verificada. De fato, lembrando que $\omega_1 = xdy - \frac{3}{2}ydx$, temos $g\omega_1 = gx dy - 3/2gy dx$ e, para $p' = xg$,

$$\begin{aligned} r &= v(g\omega_1) = v(g) + 16 \\ &< 2v(g) + 15 = 2v(g) + 2v_0 - v_0 + v_1 \\ &\leq 2(v(g) + v_0) - v_0 + v_1 \leq 2w(r) - v_0 + v_1, \end{aligned}$$

já que $v(g) + v_0 = v(p') \leq w(r)$. Além disso, em qualquer caso do Teorema 5.2.8 as diferenciais minimais com valores maiores que $v_0 + v_1 = 15$ e diferente de $\lambda_0 = 16$ pertencem ao conjunto $\{dz, \omega_2, \omega_3, \omega'\}$. Usando a expressão $dz = 2ydy - 3x^2dx$ e as diferenciais da tabela do Teorema 5.2.8 escritas da forma $qdx - pdy$, temos

$$\begin{aligned} 19 &= v(dz) < 2v(y) - v_0 + v_1 = 2 \cdot 9 - 6 + 9 = 21; \\ 26 &= v(\omega_2) < 2v(p) - v_0 + v_1 = 2v(xy) - v_0 + v_1 = 2(6 + 9) - 6 + 9 = 33; \\ 29 &= v(\omega_3) < 2v(p) - v_0 + v_1 = 2v(y^2) - v_0 + v_1 = 2(2 \cdot 9) - 6 + 9 = 39; \\ 32 &= v(\omega') < 2v(p) - v_0 + v_1 = 2v(y^2) - v_0 + v_1 = 2(2 \cdot 9) - 6 + 9 = 39. \end{aligned}$$

Logo, a condição (1) é satisfeita quando testada na base padrão de $\mathcal{O}d\mathcal{O}/d\mathcal{O}$ e, da Observação 6.1.3, segue que a condição (1) é verificada.

Vamos mostrar que a condição (2) é verificada.

Em qualquer caso, $\ell_0 = \min\{\ell \in \Lambda_f; \ell + \mathbb{N} \subset \Lambda_f\} \leq 33$ (ver Figuras 2, 3, 4, 5 e 6 na demonstração do Teorema 5.2.6). Logo, se mostrarmos que $\varepsilon \geq 15$, teremos

$$\ell_0 \leq 33 = 2 \times 15 - 6 + 9 \leq 2\varepsilon - v_0 + v_1.$$

Suponha que $\varepsilon < 15$. Então existem $P, Q \in \mathcal{O}$ tais que $Qdx - Pdy = 0$.

Escrevendo $P = \alpha_1x + \alpha_2y + \alpha_3x^2 + \alpha_4xy + \dots$ e $Q = \beta_1x + \beta_2y + \beta_3x^2 + \beta_4xy + \dots$, a condição $\varepsilon < 15$ implica que $\alpha_i \neq 0$ para algum $1 \leq i \leq 3$.

(i) Se $\alpha_1 \neq 0$, então

$$\begin{aligned} 0 &= Qdx - Pdy \\ &= (\beta_1x + \beta_2y + \beta_3x^2 + \beta_4xy + \dots)dx - (\alpha_1x + \alpha_2y + \alpha_3x^2 + \alpha_4xy + \dots)dy \\ &= 6\beta_1t^{11} + (6\beta_2 - 9\alpha_1)t^{14} + (6\beta_2 - 10\alpha_1)t^{15} + a_{11}(6\beta_2 - 10\beta_1)t^{16} + \\ &\quad + (6\beta_3 - 9\alpha_2)t^{17} + \dots \end{aligned}$$

implica $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 3/2\alpha_1 \neq 0$ e, portanto, $6\beta_2 - 10\alpha_1 = -\alpha_1 \neq 0$. Ou seja, $\ell_P(Qdx - Pdy) = t^{15}$ e conseqüentemente $Qdy - Pdx \neq 0$. Absurdo.

(ii) Se $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 \neq 0$, então

$$\begin{aligned} 0 &= Qdx - Pdy \\ &= (\beta_1x + \beta_2y + \beta_3x^2 + \beta_4xy + \dots)dx - (\alpha_2y + \alpha_3x^2 + \alpha_4xy + \dots)dy \\ &= 6\beta_1t^{11} + 6\beta_2t^{14} + 6\beta_2t^{15} + 6a_{11}\beta_2t^{16} + (6\beta_3 - 9\alpha_2)t^{17} - 19\alpha_2t^{18} + \dots \end{aligned}$$

Absurdo, já que $\ell_P(Qdx - Pdy) = t^{18}$.

(iii) Se $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ e $\alpha_3 \neq 0$, então

$$\begin{aligned} 0 &= Qdx - Pdy \\ &= (\beta_1x + \beta_2y + \beta_3x^2 + \beta_4xy + \dots)dx - (\alpha_2y + \alpha_3x^2 + \alpha_4xy + \dots)dy \\ &= (6\beta_4 - 9\alpha_3)t^{20} + (6\beta_4 - 10\alpha_3)t^{21} + \dots \end{aligned}$$

Logo, $\beta_4 = 3/2\alpha_3$ e, neste caso, $\ell_P(Qdx - Pdy) = t^{21}$. Absurdo.

Assim, $\varepsilon \geq 15$ e vale a condição (2).

Novamente, pela Observação 5.2.7, uma curva com classe de equisingularidade $\Gamma = \langle 6, 9, 19 \rangle$ é formalmente equivalente a uma curva do tipo

$$f : \begin{cases} x = t^6 \\ y = t^9 + t^{10} + a_{11}t^{11} + a_{13}t^{13} + a_{14}t^{14} + a_{17}t^{17} + a_{20}t^{20} + \\ \quad a_{23}t^{23} + a_{26}t^{26} + a_{29}t^{29} + a_{32}t^{32} + a_{35}t^{35}. \end{cases} \quad (6.2)$$

Como valem as condições (1) e (2) da Proposição 6.1.1, vamos encontrar os representantes formais das curvas que possuem semigrupo de valores Γ .

Suponha $b = a_{11} \notin \left\{-\frac{1}{2}, \frac{29}{18}\right\}$. Pelo Teorema 5.2.8, Λ_f é representado pelo seguinte diagrama:

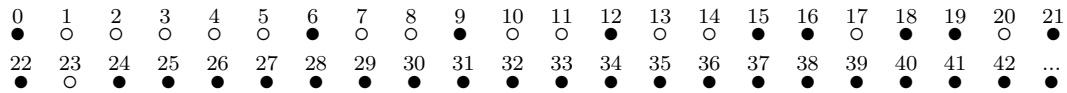


Figura 11 – Diagrama que representa Λ_f no caso $b = a_{11} \notin \left\{-\frac{1}{2}, \frac{29}{18}\right\}$

Daí segue que $\Lambda'_f = \{18, 19, 21, 22, 24, \rightarrow\}$, onde a seta indica que todo natural maior ou igual 24 está em Λ'_f . Então, pela Proposição 6.1.1, uma curva equivalente a f que possui parametrização ultra-curva deve ter os coeficientes a_i de t^i nulos para $i \in \{12, 13, 15, 16, 18, \rightarrow\}$. Daí, f é formalmente equivalente a curva

$$f' : \begin{cases} x = t^6 \\ y = t^9 + t^{10} + bt^{11} + b_1t^{14} + b_2t^{17}. \end{cases}$$

Suponha agora que $b = a_{11} = \frac{29}{18}$, logo Λ_f é dado por:

Neste caso, $\Lambda'_f = \{18, 19, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30, \rightarrow\}$ e, pela Proposição 6.1.1, os coeficientes de t^i , para $i \in \{12, 13, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 24, \rightarrow\}$, devem ser nulos na parametrização ultra-curva. Daí, f é formalmente equivalente a curva

$$f' : \begin{cases} x = t^6 \\ y = t^9 + t^{10} + bt^{11} + b_1t^{14} + b_2t^{17} + b_3t^{23}. \end{cases}$$

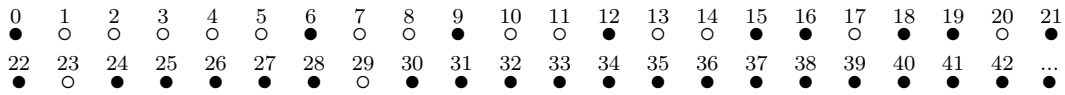


Figura 12 – Diagrama que representa Λ_f no caso $b = 29/18$.

Se $b = a_{11} = -\frac{1}{2}$ e $A = 0$, o conjunto Λ_f é dado por:

$$\Lambda_f = \{6, 9, 12, 15, 16, 18, 19, 21, 22, 24, 25, 27, 28, 29, 30, 31, 33, \rightarrow\}.$$

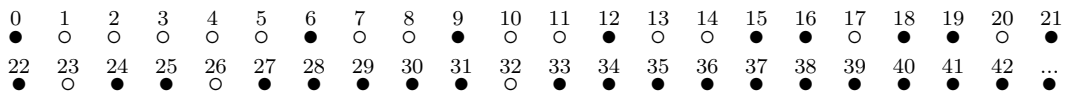


Figura 13 – Diagrama que representa Λ_f no caso $b = a_{11} = -1/2$ e $A = 0$.

Daí,

$$\Lambda'_f = \{18, 19, 21, 22, 24, 25, 27, 28, 29, 30, 31, 33, \rightarrow\}$$

e, portanto, os coeficientes de t^i , para $i \in \{12, 13, 15, 16, 18, 19, 21, i; i \geq 22 \text{ e } i \neq 26\dots\}$, devem ser nulos na parametrização ultra-curta. Daí, f é formalmente equivalente a curva

$$f' : \begin{cases} x = t^6 \\ y = t^9 + t^{10} + bt^{11} + b_1t^{14} + b_2t^{17} + b_3t^{20} + b_4t^{26}. \end{cases}$$

Finalmente, para $b = a_{11} = -1/2$ e $A \neq 0$, temos

$$\Lambda'_f = \{18, 19, 21, 22, 24, 25, 27, \rightarrow\}$$

e, portanto, os coeficientes de t^i , para $i \in \{12, 13, 15, 16, 18, 19, 21, \rightarrow\}$, devem ser nulos na parametrização ultra-curta. Daí, f é formalmente equivalente a curva

$$f' : \begin{cases} x = t^6 \\ y = t^9 + t^{10} + bt^{11} + b_1t^{14} + b_2t^{17} + b_3t^{20}. \end{cases}$$

□

6.2 NÚMERO DE MILNOR E NÚMERO DE TJURINA

Os números de Milnor e Tjurina, que definiremos a seguir, são de grande importância para o estudo das curvas algebróides planas. Como veremos mais adiante, o número de Milnor é um invariante por classe de equisingularidade enquanto o número de Tjurina é um invariante por equivalência formal das curvas.

Definição 6.2.1. Seja $f \in K[[x, y]]$ uma curva algebróide plana irreduzível. Definimos

$$\mu_f = \dim_K \frac{K[[x, y]]}{\langle f_x, f_y \rangle} \quad \text{e} \quad \tau_f = \dim_K \frac{K[[x, y]]}{\langle f, f_x, f_y \rangle},$$

como *número de Milnor* e *número de Tjurina* da curva f , respectivamente.

É possível mostrar que os números de Milnor e de Tjurina de uma curva algebróide irreduzível são finitos (ver [8], p. 61) e é imediato da definição que $\mu_f \geq \tau_f$.

Observação 6.2.2. Segue diretamente da Definição 3.1.4 que se $f, g \in K[[x, y]]$ forem formalmente equivalentes então, $\tau_f = \tau_g$.

Teorema 6.2.3. *Seja f uma curva algebróide plana irreduzível com semigrupo de valores Γ_f . Se μ_f é o número de Milnor de f e c o condutor de Γ_f , então $\mu_f = c$.*

Demonstração. Ver [8], p. 109. □

Observação 6.2.4. O Teorema 6.2.3 nos diz que o número de Milnor é invariante por classe de equisingularidade.

Teorema 6.2.5. *Dado f curva algebróide plana irreduzível em $K[[x, y]]$ vale a equação:*

$$\tau_f = \mu_f - \dim_K \left(\frac{\mathcal{O}d\mathcal{O}}{d\mathcal{O}} \right) = \mu_f - \#(\Lambda_f - \Gamma_f), \quad (6.3)$$

onde Γ_f é o semigrupo de valores de f , $\Lambda_f = \{v(\omega); \omega \in \mathcal{O}d\mathcal{O} \setminus \mathcal{T}_f\}$ e \mathcal{T}_f é o submódulo de torção de $\mathcal{O}d\mathcal{O}$.

Demonstração. Ver [16], p. 783. □

Proposição 6.2.6. *Seja f uma curva algebróide irreduzível com semigrupo de valores $\Gamma_f = \langle 6, 9, 19 \rangle$. Então, o número de Tjurina de f é igual a 35, 36 ou 37.*

Demonstração. Sejam a_{11} e A constantes definidas como no Teorema 5.2.6. Então, pelos Teoremas 6.2.5, 5.2.8 e 5.2.6, temos:

Condição	$\dim_K (\mathcal{O}d\mathcal{O}/d\mathcal{O})$	$\Lambda_f - \Gamma_f$	τ_f
$a_{11} \notin \{-\frac{1}{2}, \frac{29}{18}\}$	7	16, 22, 26, 29, 32, 35, 41	$42 - 7 = 35$
$a_{11} = \frac{29}{18}$	6	16, 22, 26, 32, 35, 41	$42 - 6 = 36$
$a_{11} = -\frac{1}{2}$ e $A \neq 0$	6	16, 22, 29, 32, 35, 41	$42 - 6 = 36$
$a_{11} = -\frac{1}{2}$ e $A = 0$	5	16, 22, 29, 35, 41	$42 - 5 = 37$

□

6.3 CONJECTURA DE AZEVEDO

Nesta seção iremos enunciar a conjectura que Alberto Azevedo propôs em sua tese de doutorado (ver [1]) e dar um contra-exemplo para a mesma.

Teorema 6.3.1. (Teorema de Zariski) *Seja (f) uma curva algebróide plana irredutível. Então $\tau_f = \mu_f$ se, e somente se, a curva f é formalmente equivalente a curva*

$$\begin{cases} x = t^{v_0} \\ y = t^{v_1}, \end{cases}$$

onde $v_0, v_1 \in \mathbb{N}$ e $v_1 > v_0$ com $v_0 \nmid v_1$.

Demonstração. Ver [16], p. 783. □

Motivado pelo Teorema de Zariski, Azevedo elaborou a seguinte conjectura:

Conjectura de Azevedo: Seja $\Gamma = \langle v_0, v_1, \dots, v_g \rangle$ um semigrupo de valores, então a curva canônica

$$\begin{cases} x = t^{\beta_0} \\ y = \sum_{i=1}^g t^{\beta_i}, \end{cases}$$

onde os β_i 's são os expoentes característicos obtidos da parametrização de Puiseux, atinge número de Tjurina máximo dentre todas as curvas algebróides planas irredutíveis com semigrupo de valores Γ .

A conjectura de Azevedo não é verdadeira e o primeiro contra-exemplo foi dado por Heinrich (ver [11]) que usou um método computacional para chegar ao resultado.

Se uma curva algebróide plana irredutível f de gênero $g = 1$, isto é, $\Gamma_f = \langle v_0, v_1 \rangle$ então v_0 e v_1 são primos entre si (ver Proposição 3.6.4). Desta forma, se $\mu_f = \tau_f$, então a curva algebróide f é formalmente equivalente a curva vista no Teorema de Zariski e a Conjectura de Azevedo é verificada.

No caso em que f possui gênero $g = 2$ o semigrupo de valores mais simples que obtemos é $\Gamma = \langle 4, 6, 13 \rangle$. Foi mostrado por Luengo and Pfister (ver [13], p. 259) que se $\Gamma = \langle 2p, 2q, 2pq + d \rangle$, onde p e q são primos entre si e $d \in \mathbb{N}$ é um número ímpar, então $\tau_f = \mu_f - (p-1)(q-1)$. Assim, nesta classe de equisingularidade todas as curvas possuem mesmo número de Tjurina e a Conjectura de Azevedo também é verificada. O próximo caso mais simples, de curva de gênero $g = 2$, o semigrupo de valores de f é igual a $\Gamma = \langle 6, 9, 19 \rangle$, que possui condutor $\mu = 42$. Com este semigrupo produz-se um contra-exemplo para a Conjectura de Azevedo.

Exemplo 6.3.2. Do Exemplo 3.6.16 uma curva f que possui semigrupo de valores $\Gamma = \langle 6, 9, 19 \rangle$ possui os seguintes expoentes característicos: $\beta_0 = 6$, $\beta_1 = 9$ e $\beta_2 = 10$.

Neste caso, a Conjectura de Azevedo afirma que a curva parametrizada

$$\begin{cases} x = t^6 \\ y = t^9 + t^{10} \end{cases}$$

possui número de Tjurina máximo. Mas, pelo Teorema 5.2.8 e pela Proposição 6.2.6, uma curva como esta tem $0 = a_{11} \notin \{29/18, -1/2\}$, ela possui número de Tjurina $\tau = 35$, o que contradiz a conjectura de Azevedo.

REFERÊNCIAS

- [1] AZEVEDO, A. **The jacobian Ideal of a Algebroid Plane Curve**. Ph. D. Thesis, Purdue University, 1967.
- [2] BAYER, V. and HEFEZ, A. **Algebroid Plane Curves whose Milnor and Tjurina Numbers Differ by One or Two**. Bol. Soc. Bras. Mat., Vol.32, No. 1, 63-81. 2001.
- [3] CLAUSEN, M. and FORTENBACHER, A. **Efficient Solution of linear Diophantine Equations**. Journal of Symbolic Computation. 201 – 216. 1989.
- [4] COHN, P. M. **Classic Algebra**. Jhon Wiley & Sons Ltda. 2000.
- [5] DELORNE, C. **Sur les modules des singularités des courbes planes**. Bulletin de la S. M. F., No 106. 417 – 446. 1978.
- [6] FULTON, W. **Algebraic Curves: An Introduction to Algebraic Geometry**. 2008.
- [7] GONÇALVES, A. **Introdução à álgebra**. 6. ed. IMPA. 2017.
- [8] HEFEZ, A. **Irreducible Plane Curve Singularities**. Real and Complex Singularities. New York. Marcel Decker, 1-120. 2003.
- [9] HEFEZ, A. and HERNANDES, M. E. **Computational Methods in the Local Theory of Curves**, 23o Colóquio Brasileiro de Matemática, Publicações Matemáticas, IMPA, Rio de Janeiro. 2001.
- [10] HEFEZ, A. and HERNANDES, M. E. **Classification of algebroid curves with semigroup $\langle 6, 9, 19 \rangle$** . Comm. in Algebra, 31, 3847-3861. 2003.
- [11] HEINRICH, J. **On a Conjecture of Azevedo**. Arch. Math. Vol. 64, 188-198. 1995.
- [12] LANG, S. **Algebra**. 3. ed. Springer. 1993.
- [13] LUENGO, I. and PFISTER, G. **Normal Forms and Moduli Spaces of Curve Singularities with Semigroup $\langle 2p, 2q, 2pq + d \rangle$** . Compositio Mathematica No. 76, 247 – 264. 1990.
- [14] ROMAN, S. **Field Theory**. 2. ed. Springer. 2006.
- [15] Singular online. Disponível em: <https://www.singular.uni-kl.de:8003/>. Acessado em: 13/04/2021.
- [16] ZARISKI, O. **Characterization of Plane Algebroid Curves whose Module of Differentials has Maximum Torsion**. Proceedings Nat. Acad. of Science, 56, 781-786. 1966.

APÊNDICE A – Algoritmo para determinar as soluções minimais de um tipo especial de equação diofantina

Aqui apresentaremos a implementação do algoritmo encontrado no Teorema 4.2.1. Este algoritmo foi programado em Fortran 90.

Algoritmo 1: ALGORITMO IMPLEMENTADO DO TEOREMA 4.2.1

```

module glob_var
implicit none

integer , dimension(100000) :: sol
integer :: n , limsol , aux

end module glob_var

program Xfile
use glob_var
implicit none

integer , allocatable , dimension (:) :: coef , vect
integer :: i , j , teste , nada , condpar , ultcte
integer :: err_coef , err_vect

limsol = 0
condpar = 0

write (*,*) 'Numero de coeficiente: '
read (*,*) n

allocate(coef(n), stat=err_coef)
allocate(vect(n), stat=err_vect)

write (*,*) 'Digite os coeficientes please:'
do i = 1 , n
    vect(i) = 0
    write(*,*) 'Coeficiente' , i
    read (*,*) coef(i)
end do

vect(1) = 1

aux = 2 * coef(1)

do ultcte = 2 , 5
    call recursao(coef , vect , vect(1) , nada , condpar , ultcte)
    do i = 1 , (limsol / n)
        do j = 1 ,
end do

vect(1) = 0
vect(2) = 1

!call recursao(coef , vect , vect(2) , nada , condpar)

!do i = 1 , 10000
! write(*,*) sol(((i-1) * 4)+1) , sol(((i-1)*4)+2) ,
sol(((i-1)*4)+3) , sol(((i-1)*4)+4)
!end do

stop
end program Xfile

```

```

integer function teste(coef , vect)
use glob_var
implicit none

integer , dimension(n) , intent(in) :: coef , vect

integer :: i

teste = 0
do i = 1 , n
    teste = teste + coef(i) * vect(i)
end do

end function

recursive subroutine recursao(coef , vect , verific , nada , condpar , ultcte)
use glob_var
implicit none

integer , dimension(n) , intent(in) :: coef
integer , dimension(n) , intent(out) :: vect
integer , intent(in) :: verific , condpar
integer , intent(out) :: nada

integer :: i , j , teste
integer , dimension(n) :: vetaux
logical :: bool

do i = 1 , n
    vetaux(i) = vect(i)
end do

write(*,*) 'teste' , vect(1) , vect(2) , vect(3) , vect(4) ,
vect(5) , vect(6) , verific , condpar

if (condpar /= ultcte .AND. bool(vect) .eqv. .TRUE.) then
    if (verific < 0 ) then
        do i = 1 , (n/2)
            teste = 0
            if (i /= 1) then
                vect(i-1) = vect(i-1) - 1
            end if
            vect(i) = vect(i) + 1
            do j = 1 , n
                teste = teste + coef(j) * vect(j)
            end do
            call recursao(coef , vect , teste , nada , condpar + 1)
        end do
    else
        if (verific > 0) then
            do i = 1 , (n/2)
                teste = 0
                if (i /= 1) then
                    vect((i + (n/2))-1) = vect((i + (n/2))-1) - 1
                end if
                vect(i + (n/2)) = vect(i + (n/2)) + 1
                do j = 1 , n
                    teste = teste + coef(j) * vect(j)
                end do
                call recursao(coef , vect , teste , nada , condpar + 1)
            end do
        else
            do i = 1 , n
                sol(limsol + i) = vect(i)
            end do
            limsol = limsol + n
            nada = 1
        end if
    end if
end if
end if

```

```
do i = 1 , n
    vect(i) = vetaux(i)
end do

return
end subroutine recursao

logical function bool(vect)
use glob_var
implicit none

integer , dimension(n) , intent(in) :: vect
integer :: i

bool = .FALSE.
if (vect(1) > 1) then
    do i = 2 , n - 1
        if (vect(i) == 0) then
            bool = .TRUE.
        end if
    end do
    if (vect(n) < 2) then
        bool = .TRUE.
    end if
else
    bool = .TRUE.
end if

end function
```
