UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Irís Jalane Nascimento dos Santos

Problemas de valor de fronteira envolvendo o operador de curvatura média prescrita com condições locais e globais

Juiz de Fora

2021

Irís Jalane Nascimento dos Santos

Problemas de valor de fronteira envolvendo o operador de curvatura média prescrita com condições locais e globais

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestra em Matemática. Área de concentração: Análise.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Fernando de Oliveira Faria

Juiz de Fora

2021

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Santos, Irís Jalane Nascimento dos.
Problemas de valor de fronteira envolvendo o operador de curvatura média prescrita com condições locais e globais / Irís Jalane Nascimento dos Santos. – 2021.
119 f.

Orientador: Luiz Fernando de Oliveira Faria
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2021.

1. Operador de curvatura média prescrita. 2. Teorema do Passo da Montanha. 3. Variedade de Nehari. I. Faria, Luiz Fernando de Oliveira, orient. II. Título.

Irís Jalane Nascimento dos Santos

Problemas de valor de fronteira envolvendo o operador de curvatura média prescrita com condições locais e globais

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestra em Matemática. Área de concentração: Análise.

Aprovada em 30 de abril de 2021

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Luiz Fernando de Oliveira Faria - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Eduard Toon
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros
Universidade Federal da Paraíba

Dedico este trabalho a todas as pessoas que me apoiaram, em especial, aos meus pais, Hilda e José Antônio, e a minha irmã, Vitória Arielly.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, pois sem ele nada disso teria se tornado realidade.

Agradeço aos meus pais, Hilda e José Antônio, por sempre apoiarem minhas escolhas e incentivarem a sempre prosseguir.

Agradeço aos professores que fazem parte da minha trajetória acadêmica. Em especial, ao professor Wilberclay Gonçalves Melo que foi meu orientador em projetos de iniciações cientificas durante minha graduação e em meu TCC; ao professor Luiz Fernando de Oliveira Faria por ter me orientado no desenvolvimento desta dissertação; e aos professores Eduard Toon e Everaldo Souto de Medeiros por aceitarem participar da banca examinadora.

Agradeço as pessoas que compõem o departamento de matemática da UFJF por sempre nos ajudarem quando precisamos.

Agradeço aos meus colegas de mestrado, em particular, a Jéssica e Mariane que estiveram comigo durante a minha trajetória no mestrado.

Agradeço à CAPES pela contribuição financeira.

RESUMO

Neste trabalho, abordamos alguns problemas de valor de fronteira que englobam o operador de curvatura média prescrita, com o objetivo de verificar existência de soluções de tais problemas. Mais especificamente, estudamos os principais problemas expostos em Cerda e Iturriaga [9], utilizando como principal ferramenta o Teorema do Passo da Montanha; em Lorca e Ubilla [8] e Bonheure, Derlet e Valeriola [4], para os quais usamos técnicas baseadas na variedade de Nehari. Além disso, apresentamos alguns exemplos destes problemas. Ressaltamos que nos artigos de Cerda e Iturriga [9] e Lorca e Ubilla [8] são consideradas condições locais, diferentemente do artigo de Bonheure, Derlet e Valeriola [4] que, embora apresente um problema mais simples, nos fornece uma tipo de solução distinta das apresentadas nos outros dois trabalhos, ou seja, soluções nodais. Outro objetivo ao desenvolver esta dissertação é estudar diferentes técnicas de verificação de existência de soluções de problemas de valor de fronteira. Para alcançar os objetivos mencionados, utilizamos uma abordagem variacional e técnicas baseadas no Teorema do passo da Montanha e na variedade de Nehari, que nos permitiram garantir: a existência de pelo menos uma solução não negativa dos problemas apresentados em Cerda e Iturriaga [9] e Lorca e Ubilla [8]; e a existência de pelo menos uma solução nodal do problema exposto em Bonheure, Derlet e Valeriola [4].

Palavras-chave: Operador de curvatura média prescrita. Teorema do Passo da Montanha. Variedade de Nehari.

ABSTRACT

In this work, we approach some boundary value problems that encompass the prescribed mean curvature operator, with the objective to verify the existence of solutions to such problems. More specifically, we study the main problems exposed in Cerda and Iturriaga [9], using as the main tool the Mountain Pass Theorem; Lorca and Ubilla [8] and Bonheure, Derlet and Valeriola [4], for which we use techniques based on Nehari manifold. Furthermore, we present some examples of these problems. We emphasize that in the articles of Cerda and Iturriaga [9] and Lorca and Ubilla [8] local conditions are considered, differently of the article of Bonheure, Derlet and Valeriola [4] that, although it presents a simpler problem provides us with a type of distinct solution of those exhibited in the other two works, i.e., nodal solutions. Another objective when developing this dissertation is to study different verification techniques of the existence of solution of boundary value problems. To reach the mentioned objectives, we utilize a variational approach and techniques based on Mountain Pass Theorem and Nehari manifold, that allowed us to ensure: the existence of at least one nonnegative solution of the problems presented in Cerda and Iturriaga [9] and Lorca and Ubilla [8]; and the existence of at least one nodal solution of the problem exposed in Bonheure, Derlet e Valeriola [4].

Keywords: Prescribed mean curvature operator. Mountain Pass Theorem. Nehari manifold.

LISTA DE SÍMBOLOS

Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira suave .
$\partial\Omega$ e $\overline{\Omega}$ são a fronteira e o fecho de Ω, respectivamente.
$|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$, para cada $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$.
$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}} = \partial_{x_1}^{\alpha_1} ... \partial_{x_n}^{\alpha_n} u(x)$ para cada $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$.
$C^k(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} | D^\alpha u$ é k-vezes continuamente diferenciável $\}$.
$C^k(\overline{\Omega}) = \Big\{u \in C^k(\Omega) | D^\alpha u$ é limitada e uniformemente contínua em Ω para $|\alpha| \leq k\Big\}$.
$C_c^\infty(\Omega)$ é o espaço das funções $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que u é infinitamente diferenciável possui suporte compacto em Ω. Esse espaço é denominado espaço das funções testes.
$U \subset\subset \Omega$ se $U \subset \overline{U} \subset \Omega$ e $\overline{U}$ é compacto, e nesse caso, dizemos que U está contido compactamente em Ω.
$Du = \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$, para $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, é o gradiente de u em x.
X^* é o dual do espaço de Banach X.
$T^j = \underbrace{T \circ T \circ .... \circ T}_{j-vezes}$.
$\mathcal{M}$ o conjunto de todas as funções mensuráveis $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 17
2 PRELIMINARES 25
2.1 DIFERENCIABILIDADE DE FUNCIONAIS 25
2.2 TEORAMA DO PASSO DA MONTANHA 26
2.3 OPERADORES DE NEMYTSKII 30
3 PROBLEMA ENVOLVENDO EQUAÇÕES QUASE LINEARES COM CONDIÇÕES LOCAIS VIA TEOREMA PASSO DA MONTANHA 33
3.1 GEOMETRIA PASSO DA MONTANHA 43
3.2 EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO 48
4 PROBLEMA DE VALOR DE FRONTEIRA A PARTIR DA VARIEDADE DE NEHARI 57
4.1 ESTIMATIVAS DAS H_0^1 - NORMA E $W^{2,n+1}$ - NORMA 59
4.2 EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO 69
5 EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES NODAIS DE UM DETERMINADO PROBLEMA DE CURVATURA MÉDIA PRESCRITA 81
5.1 EXISTÊNCIA DE MINIMIZADOR DE I_λ EM S_λ 83
5.2 EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO NODAL 89
6 APLICAÇÕES E EXEMPLOS 97
6.1 CLASSE DE PROBLEMAS ENVOLVENDO OPERADORES DE CURVATURA MÉDIA PRESCRITA 97
6.2 ESTUDO DO PROBLEMA $-\Delta u = \lambda|u|^{p-2}u$ 98
7 CONCLUSÃO 105
REFERÊNCIAS 107
APÊNDICE A – CONCEITOS FUNDAMENTAIS 111
A.1 ESPAÇOS L^p e L^p_{loc} 111
A.2 ESPAÇOS DE HÖLDER E DERIVADA FRACA 111
A.3 TEOREMA EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO FRACA 112
A.4 FÓRMULA DE GREEN 113
APÊNDICE B – ESPAÇOS DE SOBOLEV 115
B.1 IMERSÕES NOS ESPAÇOS DE SOBOLEV 115
APÊNDICE C – TEOREMA DE POINCARÉ - MIRANDA 119

1 INTRODUÇÃO

Vários autores abordam problemas que abrangem o operador de curvatura média prescrita em seus trabalhos, buscando verificar a existência de soluções, por exemplo: Obersnel e Omari [1] e Habets e Omari [2] verificam existência e multiplicidade de soluções positivas; Coffman e Ziemer [3] e Bonheure, Derlet e Valeriola [4] apresentam resultados sobre existência de soluções não negativas, para os quais utilizam como ferramenta a variedade de Nehari; Peletier e Serrin [5] e Clément, Manásevich e Mitidieri [6] expõem resultados de existência de soluções radiais. Além disso, uma das motivações do estudo do operador de curvatura média prescrita surge na abordagem de superfícies capilares, como por exemplo, ao estudar o problema (para o qual consultamos Finn [7])

$$div\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = \kappa u, \tag{1.1}$$

onde κ é a constante de capilaridade.

Além dos trabalhos citados anteriormente, podemos acrescentar Lorca e Ubilla [8] e Cerda e Iturriga [9] à medida que apresentam problemas que possuem como casos particulares, problemas que envolvem o operador de curvatura média prescrita. No entanto, as técnicas utilizadas nesses dois artigos para a verificação de existência de soluções são distintas: Lorca e Ubilla [8] utilizam a variedade de Nehari; e Cerda e Iturriga [9] usam o Teorema do Passo da Montanha. Salientamos que em tais artigos, para o estudo dos seus respectivos problemas, é utilizada uma abordagem variacional aplicada a um determinado problema auxiliar.

Tal como os artigos de Lorca e Ubilla [8] e Cerda e Iturriga [9], muitos outros trabalhos utilizam uma abordagem variacional para obter soluções fracas para os seus respectivos problemas, por exemplo: Figueiredo [10], Bonheure, Derlet e Valeriola [4], Habets e Omari [2], Coffman e Ziemer [3]. Esta abordagem consiste em buscar determinar pontos críticos do funcional associado ao problema a ser estudado. No entanto, algumas vezes não é possível utilizar uma abordagem variacional diretamente sobre um dado problema. Para contornar tal situação é analisado um problema auxiliar gerado ao introduzir funções no problema original, como é feito em Bonheure, Derlet e Valeriola [4].

Neste trabalho, abordaremos problemas de valor de fronteira que englobam o operador de curvatura média prescita. Mais especificamente, essa dissertação é baseada nos problemas centrais apresentados em Cerda e Iturriga [9], Lorca e Ubilla [8] e Bonheure, Derlet e Valeriola [4], com o objetivo de verificar a existência de soluções de tais problemas. Outro objetivo ao desenvolver essa dissertação, é estudar diferentes técnicas de verificação de existência de soluções de problemas de valor de fronteira. Para esse fim, utilizaremos uma abordagem variacional, sendo as principais ferramentas aplicadas o Teorema do Passo da Montanha e a variedade de Nehari. Além disso, este trabalho é apresentado da seguinte maneira: introdução, conclusão, mais cinco capítulos e três apêndices.

No Capítulo 2, apresentamos alguns resultados e definições importantes para o desenvolvimento dessa dissertação, entre eles: Diferenciabilidade de funcionais; Teorema do Passo da montanha; Operadores de Nemytskii.

No Capítulo 3, analisamos o problema

$$\begin{cases} -div(a(|\nabla u|^2)\nabla u) = \lambda f(x,u), & \text{em } \Omega; \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.2}$$

onde Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira suave $\partial\Omega$ ($\partial\Omega \in C^{1,1}$), $n > 2$, $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory, $a : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$ é uma função contínua que satisfazem as seguintes condições:

H1) Existem $R_0 > 0$ e $v > 0$ tais que $a \in C^1([0, R_0]; (0, \infty))$ é uma função não cresceste e

$$2a'(t)t + a(t) > v, \text{ para todo } t \in [0, R_0).$$

H2) Existem $p \in (2, 2^* - 1)$, com $2^* = \frac{2n}{n-2}$, e uma função contínua não trivial $\phi \in L^\infty(\Omega)$, que é positiva em um subconjunto aberto Ω_0 de Ω, com medida positiva, de modo que $\phi(x) \geq \phi_0$, para todo $x \in \Omega_0$ e algum $\phi_0 > 0$, e

$$\lim_{u \longrightarrow 0} \frac{f(x,u)}{|u|^{p-2}u} = \phi(x),$$

para $x \in \Omega$.

H3) Existe $q \in (2, 2^*)$, com $q \leq p$, e $s_0 > 0$ tal que

$$qF(x,u) - uf(x,u) \leq 0,$$

para todo $u \in (0, s_0]$ e para todo $x \in \Omega$, onde

$$F(x,u) = \int_0^u f(x,s)ds.$$

Para estudar o problema (1.2) utilizamos, como principal referência, o artigo de Cerda e Iturriga [9]. Além disso, destacamos que: a condição H1) é necessária para garantir que uma solução do problema auxiliar u_λ (que posteriormente provaremos ser solução do problema original (3.3)) pertença ao espaço $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ e que sua norma satisfaça a desigualdade

$$\|u_\lambda\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq O(\gamma, k, \Omega, \|\lambda\psi(\cdot, u_\lambda)\|_{L^\infty(\Omega)}),$$

para algumas constantes $\gamma, k, \alpha > 0$; a condição H2) é utiliza para garantir que o funcional associado ao problema auxiliar satisfaz a geometria do passo da montanha; por fim, temos que a condição H3) é um tipo de condição de Ambrosetti-Rabinowitz local, utilizada para mostrar que

$$\|u_\lambda\|^2_{H^1_0(\Omega)} = O(c_\lambda) \text{ quando } \lambda \longrightarrow \infty.$$

Ressaltamos também que o principal resultado apresentado no trabalho de Cerda e Iturriaga [9] (para o qual utilizaram como ferramenta o Teorema do Passo da Montanha), ao estudar o problema (1.2), é o seguinte teorema (ver [9], Teorema 1.1, p. 3):

Teorema 1.0.1. *Suponha que H1), H2), H3) são satisfeitas. Então, o problema (1.2) possui pelo menos uma solução não trivial desde que o parâmetro $\lambda > 0$ seja suficientemente grande.*

A fim de utilizar uma abordagem variacional, para garantir a existência de soluções fracas do problema (1.2), são consideradas as funções truncamento $\psi : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a_R : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$ definidas por

$$\psi(x,s) = \begin{cases} 0, & \text{se } s \leq 0 \\ f(x,s), & \text{se } 0 \leq s \leq k_0; \\ k_0^{1-q} f(x,k_0)s^{q-1}, & \text{se } s \geq k_0, \end{cases} \tag{1.3}$$

para um dado k_0, e

$$a_R(t) = \begin{cases} a(t), & \text{se } t \leq R; \\ a(\varphi(t)), & \text{se } R \leq t \leq R_0; \\ a\left(\frac{R_0+R}{2}\right), & \text{se } t \geq R_0. \end{cases} \tag{1.4}$$

onde $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é definida por

$$\varphi(t) = \frac{1}{2(R_0 - R)}(2R_0 t - t^2 - R^2),$$

para um dado R, com $R_0 > R$, e estuda-se o problema auxiliar gerado por tais funções dado por

$$\begin{cases} -div(a_R(|\nabla u|^2)\nabla u) = \lambda \psi(x,u), & \text{em } \Omega; \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.5}$$

No Capítulo 4, utilizando como principal referência o artigo de Lorca e Ubilla [8], estudamos o problema

$$\begin{cases} -div(a(|\nabla u|)\nabla u) = \lambda f(u), & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.6}$$

onde Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^n$ de modo que $\partial\Omega \in C^{1,1}$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ são funções contínuas e tais que, para $R > 0$ fixado, tem-se:

F1) Existem $C > 0$ e $1 < q < \frac{n+2}{n-2}$ de modo que

$$u^q \leq f(u) \leq Cu^q, \text{ para todo } u \in [0,R]. \tag{1.7}$$

F2) Existe $\sigma > 2$ tal que

$$\sigma F(u) \leq uf(u), \text{ para todo } u \in [0, R], \tag{1.8}$$

sendo $F(u) := \int_0^u f(s)ds$.

F3) A função $\frac{f(u)}{u}$ é crescente no intervalo $[0, R]$.

F4) A função a é não crescente e tal que $a(0) = 1$ e $a(t) \geq a(R) > 0$, para todo $t \in [0, R]$ e $a \in C^1([0, R]; (0, \infty))$.

O principal resultado apresentado pelos autores deste artigo é o seguinte teorema (ver [8], Teorema 2.1, p. 121):

Teorema 1.0.2. *Seja Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^n$, para $n \geq 2$, com fronteira $C^{1,1}$. Suponha que as condições F1), F2), F3) e F4) são satisfeitas, então existe um número positivo $\rho = \rho(\Omega, f, a)$ tal que, para $\lambda > \rho$, o problema (1.6) possui uma solução u_λ não trivial, não negativa e de classe C^1. Além disso,*

$$\|u_\lambda\|_{W^{2,n+1}(\Omega)} \longrightarrow 0 \textit{ quando } \lambda \longrightarrow \infty. \tag{1.9}$$

Para provar esse teorema, estuda-se o problema auxiliar (necessário para a utilização de uma abordagem variacional), gerado ao introduzir algumas funções truncamento no problema original, dado por

$$\begin{cases} -div(a_R(|\nabla u|)\nabla u) = \lambda g(u), & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.10}$$

onde

$$a_R(t) := \begin{cases} a(t), & \text{se } 0 \leq t \leq R, \\ a(R), & \text{se } t \geq R, \end{cases} \tag{1.11}$$

e

$$g(t) := \begin{cases} 0, & \text{se } t \leq 0, \\ f(t), & \text{se } 0 \leq t \leq R, \\ \frac{f(R)}{R^q} t^q, & \text{se } t \geq R. \end{cases} \tag{1.12}$$

Além disso, usa-se como ferramenta a variedade de Nehari

$$N := \{u \in H_0^1(\Omega); u \neq 0, \langle J_\lambda'(u), u\rangle = 0\}, \tag{1.13}$$

onde J_λ é o funcional associado ao problema (1.6). De forma mais especifica, o funcional J_λ é analisado sobre o conjunto $S(\lambda) \subset W^{2,n+1}(\Omega) \cap N$ definido por

$$S(\lambda) := \Big\{u \in W^{2,n+1}(\Omega); u \in N \cap C^0(\overline{\Omega}), 0 < \|u\|_{W^{2,n+1}(\Omega)} \leq m\lambda^{-\frac{1}{(q-1)}},$$
$$u \geq 0 \text{ e } J_\lambda(u) \leq \frac{K^2}{2}\lambda^{-\frac{2}{(q-1)}}\Big\},$$

pelo fato deste conjunto ser limitado em $W^{2,n+1}(\Omega)$ nos fornecendo um elemento $u_\lambda \in S(\lambda)$ que é o mínimo de J_λ sobre $S(\lambda)$.

Ressaltamos que, as hipóteses F1), F2), F3) e F4) são consideradas com as seguintes finalidades: a condição F1) é necessária para garantir que o conjunto $S(\lambda)$ é não vazio e que o operador

$$\begin{aligned} T : \mathcal{N}^+ &\longrightarrow \mathcal{N}^+ \\ u &\longmapsto v, \end{aligned}$$

onde

$$\mathcal{N}^+ := \{u \in N \cap W^{2,n+1}(\Omega); u \geq 0\}$$

e v é a solução do problema

$$\begin{cases} L_u v = \lambda \alpha g(u), & \text{em } \Omega, \\ v = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.14}$$

sendo L_u definido por

$$L_u w := -div(a_R(|\nabla u|)\nabla w), \tag{1.15}$$

está bem definido; para cada $u \in H_0^1(\Omega)$ não negativa, as condições F1), F2), F3) e F4) garantem a existência de um único $\alpha > 0$ que é o máximo da função $t \in (0, \infty) \longmapsto J_\lambda(tu)$, sendo J_λ o funcional associado ao problema auxiliar, e tal que αu pertence a variedade de Nehari; as condições F1) e F4) são utilizadas para mostrar que o funcional $J_\lambda|_{S(\lambda)}$ atinge seu ínfimo em alguma função $u \in S(\lambda)$; e as condições F1) juntamente com a F2) são necessárias para garantir que o ínfimo do funcional J_λ sobre a variedade de Nehari é maior ou igual que $Ca_R(R)^{\frac{q+1}{q-1}}\lambda^{\frac{-2}{q-1}}$, para alguma constante $C > 0$.

No Capítulo 5, estudamos o problema

$$\begin{cases} -div\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = \lambda |u|^{p-2}u, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.16}$$

com $2 < p < 2^*$, utilizando como principal referência o artigo de Bonheure, Derlet e Valeriola [4], para o qual os autores deste artigo buscam provar o seguinte resultado (ver [4], Teorema 1.1, p. 1073):

Teorema 1.0.3. *Existe $\lambda_1 > 0$ tal que para todo $\lambda \geq \lambda_1$ o problema (1.16) possui pelo menos uma solução nodal $u_\lambda \in H_0^1(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, para cada $\alpha \in (0,1)$. Além disso,*

$$\lim_{\lambda \longrightarrow \infty} \|u_\lambda\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} = 0.$$

Para provar esse teorema, utiliza-se uma abordagem variacional sobre o problema auxiliar

$$\begin{cases} -div\,(a(|\nabla u|^2)\nabla u) = \lambda |u|^{p-2}u, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.17}$$

onde $a : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função decrescente de classe C^1 que satisfaz as seguintes condições:

K1) $\frac{1}{2} < a(s) \leq 1$, para todo $s \geq 0$,

K2) $a'(s)s \geq -\frac{1}{8}$, para todo $s \geq 0$,

K3) $a(s) = \frac{1}{\sqrt{1+s}}$ se $0 \leq s \leq \tau$, para algum $\tau > 0$.

As hipóteses acima são utilizadas da seguinte maneira: K1) juntamente com K2) são utilizadas para provar a existência de um minimizador do funcional I_λ no conjunto nodal de Nehari dado por

$$S_\lambda = \{u \in H_0^1(\Omega); u^+, u^- \in N_\lambda\},$$

onde I_λ é o funcional associado ao problema (1.17) e a variedade de Nehari N_λ é dada por

$$N_\lambda = \{u \in H_0^1(\Omega); u \neq 0 \text{ e } \langle I_\lambda'(u), u\rangle = 0\};$$

as condições K1) e K3) são necessárias para provar que uma solução do problema auxiliar (1.17) também será solução do problema original (1.16); e a condição K1) é utilizada para mostrar que as soluções fracas u do problema auxiliar satisfazem a estimativa

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\lambda^{\frac{2^*-p+2}{2(2^*-p)}}\|u\|_{L^{2^*}(\Omega)}^{\frac{(p-2)(2^*-p+2)}{2(2^*-p)}}\|u\|_{L^{\eta_0}(\Omega)}, \tag{1.18}$$

para alguma constante $C > 0$ e $\eta_0 = \frac{2.2^*}{2^*-p+2}$.

Ressaltamos que, para os problemas abordados nos Capítulos 3 e 4 são impostas condições locais sobre as funções f e a, entre elas as condições H3) e F2), que são algumas das mais relevantes e um tipo de condição de Ambrosetti-Habinowitz. Por outro lado, o problema apresentado no artigo de Bonheure, Derlet e Valeriola [4] não é tão geral quanto os problemas apresentados nesses dois capítulos, porém nos fornece um tipo de solução diferente, as soluções nodais (isto é, soluções que mudam de sinal).

No Capítulo 6, apresentamos um caso particular dos problemas abordados nos Capítulos 3 e 4, para o qual estabelecemos uma relação entre a solução obtida via Teorema do Passo da Montanha e a Variedade de Nehari. Além disso, neste capítulo, expomos alguns exemplos de problemas envolvendo o operador de curvatura média que são casos particulares dos problemas estudados nos capítulos anteriores.

No Apêndice A, apresentamos alguns conceitos e resultados necessários para o desenvolvimento deste trabalho, entre eles: definição e propriedades dos espaços $L^p(\Omega)$; definição dos espaços de Hölder e de derivada fraca; o Teorema de existência de solução fraca.

No Apêndice B, definimos e apresentamos propriedades sobre os espaços de Sobolev, como por exemplo: a desigualdade de Poincaré, o teorema de imersão dos espaços de Sobolev, entre outros.

No Apêndice C, utilizando como principal referência Fonda e Gidoni [11], apresentamos o Teorema de Poincaré-Miranda, que é utilizado no capítulo 5.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo, discutiremos alguns tópicos necessários para a abordagem dos problemas de valor de fronteira que apresentaremos nos capítulos seguintes.

2.1 DIFERENCIABILIDADE DE FUNCIONAIS

Nesta seção, discutiremos quando um funcional possui derivadas Gateaux e a Fréchet, isto é, apresentaremos as definições dos tipos de derivadas mencionadas. Além disso, procuraremos estabelecer uma relação entre esses dois tipos de derivadas. Vale ressaltar que, para o desenvolvimento dessa seção, utilizamos como principal referência Willem [12].

Definição 2.1.1. *Seja E um conjunto aberto em um espaço de Banach X. Dizemos que um funcional $I : E \longrightarrow \mathbb{R}$ tem derivada a Gateaux $J \in X^*$ em $u \in E$, se*

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{1}{t}[I(u+th) - I(u) - \langle J, th \rangle] = 0, \tag{2.1}$$

para cada $h \in X$. Denotaremos a derivada de Gateaux em u por $I'(u)$, e teremos

$$\langle I'(u), h \rangle = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{1}{t}[I(u+th) - I(u)] = 0. \tag{2.2}$$

Observação 2.1.1. *Se X é um espaço de Hilbert e I tem derivada a Gateaux em $u \in E$, o gradiente de I em u é definido por*

$$(\nabla I(u), h) := \langle I'(u), h \rangle = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{1}{t}[I(u+th) - I(u)]. \tag{2.3}$$

Definição 2.1.2. *Seja E um conjunto aberto em um espaço de Banach X. Dizemos que um funcional $I : E \longrightarrow \mathbb{R}$ possui derivada de Fréchet em $u \in E$ se existir uma função $J \in X^*$ tal que*

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{|h|}[I(u+h) - I(u) - \langle J, h \rangle] = 0. \tag{2.4}$$

O funcional $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ se a derivada a Fréchet existe e é contínua.

Observação 2.1.2. *Como observado por Willem [12], temos que qualquer derivada a Fréchet é uma derivada a Gateaux.*

Proposição 2.1.1. *Se $I : E \longrightarrow \mathbb{R}$ tem uma derivada a Gateaux contínua em E, então $I \in C^1(E, \mathbb{R})$.*

Demonstração. Ver [12], Proposição 1.3, p. 7. □

2.2 TEORAMA DO PASSO DA MONTANHA

Nesta seção, apresentaremos o Teorema do Passo da Montanha. A fim de provar tal resultado, apresentaremos alguns teoremas e corolários, para os quais utilizaremos como principais referência Willem [12] e Faria [13].

A condição de Palais-Smale (ou sua variação, a condição $(PS)_c$) é uma ferramenta bastante utilizada na abordagem de problemas de valores de fronteira. Alguns dos trabalhos que abordam pelo menos uma dessas condições são Ambrosetti e Rabinowitz [14] e Chen e Tzeng [15]. Mais especificamente, nesses artigos é definido quando um funcional satisfaz alguma dessas condições. Outro trabalho que aborda quando um funcional satisfaz as condições mencionadas é o artigo de Cicortas [16], que embora o autor não estude um problema de valor de fronteira, apresenta definições de quando um funcional satisfaz outros tipos de condições, como por exemplo: quando um funcional satisfaz a condição de Palais-Smale fraca e a condição generalizada de Cerami.

A seguir, apresentaremos as definições de quando um funcional satisfaz a condição de Palais-Smale e sua variação.

Definição 2.2.1. *Um funcional I satisfaz a condição de Palais-Smale (ou simplesmente, condição (PS)) se dada qualquer sequência $\{u_n\}$ em um domínio E tal que $I(u_n)$ é limitada e $\|I'(u_n)\| \longrightarrow 0$ possui subsequência convergente.*

Definição 2.2.2 (Condição de Palais-Smale)**.** *Seja X um espaço de Banach, $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $c \in \mathbb{R}$. O funcional I satisfaz a condição $(PS)_c$ se qualquer sequência $\{u_n\} \subset X$ tal que*

$$I(u_n) \longrightarrow c \ \ e \ \ I'(u_n) \longrightarrow 0 \tag{2.5}$$

possui uma subsequência convergente.

Destacamos que, a condições $(PS)_c$ não é necessária para que um problema de valor de fronteira possua solução. Um exemplo (para o qual consultamos Chen e Tzeng [15]) que comprova tal fato é dado a seguir:

Exemplo 2.2.1. *Consideremos o problema*

$$\Delta u - u + |u|^{p-1} = 0, u \in W^{1,2}(E),$$

com $E = \mathbb{R}^2$ e seu funcional associado dado por

$$I(u) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}\left(|\nabla u|^2 + u^2\right) - \frac{|u|^{p+1}}{p+1}\right] dx.$$

O problema acima possui solução positiva u e, ao consideramos a sequência $v_m(x) = u(x + x_m)$, com $x_m \in \mathbb{R}^2$ de modo que $|x_m| \longrightarrow \infty$, tem-se $I(v_m) = I(u) := c$ e $I'(v_m) = 0$, mas a sequência $\{v_n\}$ não possui subsequência fortemente convergente em $W_0^{1,2}(E)$ se $|x_m| \longrightarrow \infty$ quando $m \longrightarrow \infty$. Dessa maneira, I não satisfaz a condição $(PS)_c$.

Agora, enunciaremos o Lema da Deformação de Clark que servirá para demonstrar o Teorema do Passo da Montanha. Para isso, precisaremos primeiro definir dois conjuntos. Sejam X um espaço de Banach, $S \subset X$, $\lambda > 0$, $d \in \mathbb{R}$, $\varphi \in C(X, \mathbb{R})$, então definimos os conjuntos

$$S_\lambda := \{x \in X; dist(x, S) \leq \lambda\}$$

e

$$\varphi^d := \{x \in X; \varphi(x) \leq d\}.$$

Lema 2.2.1 (Lema da Deformação de Clark)**.** *Sejam X um espaço de Banach, $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$, $S \subset X$, $c \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ tais que, para todo $u \in \varphi^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}$ temos*

$$\|\varphi'(u)\| \geq \frac{8\varepsilon}{\delta}. \tag{2.6}$$

Então, existe $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ tal que

i) *$\eta(t, u) = u$ se $t = 0$ ou se $u \notin \varphi^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}$,*

ii) *$\eta(1, \varphi^{c+\varepsilon} \cap S) \subset \varphi^{c-\varepsilon}$,*

iii) *$\eta(t, \cdot) : X \longrightarrow X$ é um homeomorfismo de X em X, para todo $t \in [0, 1]$,*

iv) *$\|\eta(t, u) - u\| \leq \delta$, $\forall u \in X$, para todo $t \in [0, 1]$,*

v) *$\varphi(\eta(\cdot, u))$ é não crescente para todo $u \in X$,*

vi) *$\varphi(\eta(t, u)) < c$, para todo $u \in \varphi^c \cap S_\delta$ e para todo $t \in (0, 1]$*

Demonstração. Ver em [12], Lema 2.3, p. 38. □

Como mencionamos anteriormente, estamos interessados em provar o Teorema do Passo da Montanha. Para tanto, precisamos do seguinte teorema:

Teorema 2.2.1. *Seja X um espaço de Banach. Seja M_0 um subespaço fechado do espaço métrico M e $\Gamma_0 \subset C(M_0, X)$. Defina*

$$\Gamma = \{\gamma \in C(M, X); \gamma|_{M_0} \in \Gamma_0\}.$$

Se $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$ satisfaz

$$\infty > c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{u \in M} \varphi(\gamma(u)) > a := \sup_{\gamma_0 \in \Gamma_0} \sup_{u \in M_0} \varphi(\gamma(u)) \tag{2.7}$$

então, para cada $\varepsilon \in (0, \frac{c-a}{2})$, $\delta > 0$ e $\gamma \in \Gamma$ tais que

$$\sup_{u \in M} \varphi(\gamma(u)) \leq c + \varepsilon, \tag{2.8}$$

existe $u \in X$ tal que

a) $c - 2\varepsilon \leq \varphi(u) \leq c + 2\varepsilon$;

b) $dist(u, \gamma(M)) \leq 2\delta$;

c) $\|\varphi'(u)\| \leq \frac{8\varepsilon}{\delta}$.

Demonstração. Faremos a prova desse teorema por contradição. Suponhamos que para todo $u \in X$ tenhamos que a) e b) são satisfeitas, mas $\|\varphi(u)\| > \frac{8\varepsilon}{\delta}$ para algum $\varepsilon \in \left(0, \frac{c-a}{2}\right)$ e $\delta > 0$. Considere $S := \gamma(M)$. Então, dado $u \in \varphi^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}$ temos que

a) $c - 2\varepsilon \leq \varphi(u) \leq c + 2\varepsilon$;

b) $dist(u, \gamma(M)) \leq 2\delta$;

c) $\|\varphi'(u)\| > \frac{8\varepsilon}{\delta}$.

Por outro lado, como $\varepsilon \in \left(0, \frac{c-a}{2}\right)$ temos que $a < c - 2\varepsilon$. Defina a aplicação $\beta(u) := \eta(1, \gamma(u))$, para todo $u \in M$, onde η é dada a partir do Lema 2.2.1. Então, como $\gamma_0 = \gamma|_{M_0}$, obtemos que

$$\varphi(\gamma(u)) = \varphi(\gamma_0(u)) \leq \sup_{u \in M_0} \varphi(\gamma_0(u)) \leq a < c - 2\varepsilon, \tag{2.9}$$

para todo $u \in M_0$. Desse modo, $\gamma(u) \notin \varphi^{-1}\left([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]\right) \cap S_{2\delta}$, para todo $u \in M_0$. Pelo lema 2.2.1 temos que

$$\beta(u) = \eta(1, \gamma_0(u)) = \gamma_0(u),$$

para todo $u \in M_0$. Assim, $\beta \in \Gamma$. Por outro lado, utilizando a desigualdade (2.8) obtém-se

$$\varphi(\gamma(u)) \leq \sup_{u \in M} \varphi(\gamma(u)) \leq c + \varepsilon, \text{ para todo } u \in M,$$

e desse modo, temos que $\beta(u) \in \varphi^{c+\varepsilon} \cap S$, para todo $u \in M$. Por fim, pelo lema 2.2.1 tem-se $\eta(1, \varphi^{c+\varepsilon} \cap S) \subset \varphi^{c-\varepsilon}$, e assim concluímos que

$$\sup_{u \in M} \varphi(\beta(u)) = \sup_{u \in M} \varphi(\eta(1, \gamma(u))) \leq c - \varepsilon < c, \tag{2.10}$$

contrariando o fato de $c \leq \sup_{u \in M} \varphi(\beta(u))$. $\square$

Teorema 2.2.2. *Suponha que (2.7) é valida. Então, existe uma sequência* $\{u_n\} \subset X$ *satisfazendo*

$$\varphi(u_n) \longrightarrow c \ \text{ e } \ \varphi'(u_n) \longrightarrow 0.$$

Em particular, se φ *satisfaz a condição* $(PS)_c$*, então* c *é um valor critico de* φ*.*

Demonstração. Dado $n \in \mathbb{N}$, consideremos $\varepsilon = \frac{1}{n}$ e $\delta = 1$, então pelo Teorema 2.2.1, existe $u_n \in X$ tal que $c - 2\varepsilon \leq \varphi(u_n) \leq c + 2\varepsilon$ e $|\varphi'(u_n)| \leq \frac{8\varepsilon}{\delta}$, ou seja, $|\varphi(u_n) - c| < \frac{2}{n}$ e $|\varphi'(u_n)| \leq \frac{8}{n}$. Assim, fazendo $n \longrightarrow \infty$ obtemos que $|\varphi(u_n) - c| \longrightarrow 0$ e $|\varphi'(u_n)| \longrightarrow 0$. Portanto,

$$\varphi(u_n) \longrightarrow c \ \text{ e } \ \varphi'(u_n) \longrightarrow 0.$$

Se φ satisfaz a condição $(PS)_c$, então existem uma subsequência $\{u_n\}_{n \in N_1}$ e $u \in X$, onde N_1 é um subconjunto infinto de $\mathbb{N}$, tais que $u_n \longrightarrow u$ em N_1. Logo,

$$\varphi(u_n) \longrightarrow \varphi(u) \ \text{ e } \ \varphi'(u_n) \longrightarrow \varphi'(u).$$

Pela unicidade do limite, concluímos $\varphi(u) = c$ e $\varphi'(u) = 0$, ou seja, c é um valor critico de φ. □

A seguir, enunciaremos e demonstraremos o teorema central desta seção.

Teorema 2.2.3 (Teorema Passo da Montanha)**.** *Seja X um espaço de Banach real com espaço dual X^* e $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ um funcional, satisfazendo a condição de Palais-Smale $(PS)_c$. Se $u_0 \in X$ e $0 < \rho < \|u_0\|$ são tais que*

$$a =: \max\{J(0), J(u_0)\} < \inf_{\|u\|=\rho} J(u) =: b, \tag{2.11}$$

então

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} J(\gamma(t)) \tag{2.12}$$

é um valor crítico de J com $c \geq b$, onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X); \gamma(0) = 0 \ \text{ e } \ \gamma(1) = u_0\} \tag{2.13}$$

é o conjunto dos caminhos contínuos ligando 0 e u_0.

Demonstração. Consideremos $M = [0,1]$, $M_0 = \{0,1\}$ e $\Gamma_0 = \{\gamma_0 \in C(M_0, X); \gamma_0(0) = 0, \gamma_0(1) = u_0\}$. Então,

$$\begin{aligned} \sup_{\gamma_0 \in \Gamma_0} \sup_{t \in M_0} \varphi(\gamma(t)) &= \sup_{\gamma_0 \in \Gamma_0} \max\{J(\gamma_0(0)), J(\gamma_0(1))\} = \sup_{\gamma_0 \in \Gamma_0} \max\{J(0), J(u_0)\} \\ &= \max\{J(0), J(u_0)\} < \inf_{\|u\|=\rho} J(u) \leq \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{t \in M} J(\gamma(t)). \end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema 2.2.2 concluímos que

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} J(\gamma(t)) \tag{2.14}$$

é um valor crítico de J. □

2.3 OPERADORES DE NEMYTSKII

Nesta seção, estudaremos os operadores de Nemytskii, mais especificamente, nosso objetivo nesta seção é estudar a continuidade de tais operadores. Para isso, apresentaremos o conceito de funções de Carathéodory. Frisamos que, para o desenvolvimento desta seção utilizaremos como principal referência Figueiredo [17]. Consultamos também Nariyoshi [18].

Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, para $n \geq 1$.

Definição 2.3.1. *Diremos que uma função $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é de Carathéodory se:*

i) *Para cada $s \in \mathbb{R}$, a função $x \longmapsto f(x,s)$ é (Lebesgue) mensurável em Ω.*

ii) *Para cada $x \in \Omega$ (quase toda parte), a função $s \longmapsto f(x,s)$ é contínua em $\mathbb{R}$.*

A seguir, apresentaremos um resultado que nos fornece informações sobre a mensurabilidade da função $x \longmapsto f(x,u(x))$, onde $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory e $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função mensurável. Para tal fim, considere $\mathcal{M}$ o conjunto de todas as funções mensuráveis $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

Teorema 2.3.1. *Se $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory, então a função $x \longmapsto f(x,u(x))$ é mensurável, para toda $u \in \mathcal{M}$.*

Demonstração. Seja $u \in \mathcal{M}$. Considere $\{u_m(x)\}$ uma sequência de funções simples. Suponha que $\{u_m(x)\}$ converge para $u(x)$ em quase toda parte. Como f é de Carathéodory, a função $x \longmapsto f(x,s)$ é mensurável e, consequentemente, $f(x,u_m(x))$ é mensurável. Além disso, como a aplicação $s \longmapsto f(x,s)$ é contínua tem-se que $f(x,u_m(x))$ converge para $f(x,u(x))$ em quase toda parte. Portanto, $f(x,u(x))$ é mensurável. □

Assim, dada uma função de Carathéodory $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definimos o operador de Nemytskii $N_f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ por

$$N_f u(x) := f(x,u(x)), \tag{2.15}$$

para cada $u \in \mathcal{M}$ e para $x \in \Omega$. Agora, apresentaremos um teorema sobre a continuidade de N_f.

Teorema 2.3.2. *Seja $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de Carathéodory. Suponha que existem uma constante $C > 0$, uma função $b(x) \in L^q(\Omega)$, $1 \leq q \leq \infty$, e $r > 0$ tais que*

$$|f(x,s)| \leq C|s|^r + b(x), \forall x \in \Omega, \forall s \in \mathbb{R}. \tag{2.16}$$

Então,

i) *N_f aplica $L^{qr}(\Omega)$ em $L^q(\Omega)$;*

ii) N_f *é contínuo e limitado.*

Demonstração. Seja $u \in L^{rq}(\Omega)$. Então, utilizando a desigualdade de Minkowski obtém-se

$$\begin{aligned}
\|N_f u\|_{L^q(\Omega)} &= \left(\int_\Omega |N_f u(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_\Omega |f(x,u(x))|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\int_\Omega |C|u|^r + b(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} = \|C|u|^r + b\|_{L^q(\Omega)} \\
&\leq C\||u|^r\|_{L^q(\Omega)} + \|b\|_{L^q(\Omega)} = C\|u\|^r_{L^{rq}(\Omega)} + \|b\|_{L^q(\Omega)} < \infty.
\end{aligned}$$

Portanto, $N_f u \in L^q(\Omega)$ e é limitado.

Agora, provaremos que N_f é contínuo. Seja $\{u_m\}$ uma sequência em $L^{qr}(\Omega)$ tal que $u_m \longrightarrow u$ em $L^{qr}(\Omega)$. Mostraremos que $N_f u_m \longrightarrow N_f u$ em $L^q(\Omega)$. Com efeito, como $u_m \longrightarrow u$ em $L^{rq}(\Omega)$, existe um subsequência $\{u_{m_k}\}$ e uma função $h \in L^{qr}(\Omega)$ (Ver [19], Teorema 4.9, p. 94) tais que $u_{m_k}(x) \longrightarrow u(x)$ quase toda parte e $|u_{m_k}(x)| \leq h(x)$ em quase toda parte em Ω. Por outro lado, temos que

$$|N_f u_{m_k}(x)| = |f(x, u_{m_k}(x))| \leq C|u_{m_k}(x)|^r + b(x) \leq C|h(x)|^r + b(x) \in L^q(\Omega). \quad (2.17)$$

Além disso, como a função $s \longmapsto f(x,s)$ é contínua em $\mathbb{R}$, para cada $x \in \Omega$, e $u_m \longrightarrow u$ em $L^{rq}(\Omega)$ temos que $f(x, u_{m_k}(x)) \longrightarrow f(x, u(x))$ q.t.p. em Ω. Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada, $N_f u_{m_k} \longrightarrow N_f u$ em $L^q(\Omega)$, e consequentemente, N_f é contínuo.

$\square$

3 PROBLEMA ENVOLVENDO EQUAÇÕES QUASE LINEARES COM CONDIÇÕES LOCAIS VIA TEOREMA PASSO DA MONTANHA

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, limitado, com fronteira $\partial\Omega$ limitada e suave. Defina o funcional $I : C_c^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$I(w) := \int_\Omega L(Dw(x), w(x), x)dx, \tag{3.1}$$

onde $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ (denominada o Lagrangiano) e $w : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções suaves de modo que $w = g$ em $\partial\Omega$. Então, ao considerarmos uma função suave $u = u(x)$ de modo que $u = g$ em $\partial\Omega$ e $u = u(x)$ seja um minimizador de I, teremos que $u = u(x)$ é solução de uma equação diferencial parcial, mais especificamente da equação (denominada equação Euler-Lagrange associada ao funcional I)

$$-\sum_{i=1}^n (L_{p_i}(Du, u, x))_{x_i} + L_z(D_u, u, x) = 0 \text{ em } \Omega, \tag{3.2}$$

sendo $x = (x_1, ..., x_n) \in \Omega$, $z \in \mathbb{R}$ e $p = (p_1, ..., p_n) \in \mathbb{R}^n$. Para mais detalhes consulte Evans [20].

O método apresentado acima é uma forma de abordar problemas variacionais, associando a um dado funcional um problema de equações diferenciais parciais. Em nosso trabalho, no entanto, faremos o processo reverso desta abordagem, isto é, a partir de um dado problema de equações diferenciais parciais associaremos um funcional (o funcional de Euler-Lagrange), pois ao determinar os pontos críticos de tal funcional estaremos encontrando as soluções fracas do problema em questão. Para obter tais pontos, neste capítulo, utilizaremos como principal ferramenta o Teorema do Passo da Montanha.

Agora, apresentaremos o problema central deste capitulo, utilizando como principal referência o artigo de Cerda e Iturriaga [9], que é dado por

$$\begin{cases} -div(a(|\nabla u|^2)\nabla u) = \lambda f(x, u), & \text{em } \Omega; \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.3}$$

onde Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira suave $\partial\Omega$ ($\partial\Omega \in C^{1,1}$), $n > 2$, $a : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$ é uma função contínua, λ é uma constante positiva, e $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função Caratheódory que cresce como $|u|^{p-2}u$ próximo de zero, para $2 < p < 2^*$, sendo $2^* = \frac{2n}{n-2}$. Além disso, as funções f e a satisfazem as seguintes condições:

H1) Existem $R_0 > 0$ e $v > 0$ tais que $a \in C^1([0, R_0]; (0, \infty))$ é uma função não cresceste e

$$2a'(t)t + a(t) > v, \text{ para todo } t \in [0, R_0).$$

H2) Existem $p \in (2, 2^* - 1)$ e uma função contínua não trivial $\phi \in L^\infty(\Omega)$, que é positiva em um subconjunto aberto Ω_0 de Ω, com medida positiva, de modo que $\phi(x) \geq \phi_0$, para todo $x \in \Omega_0$ e algum $\phi_0 > 0$, e

$$\lim_{u \longrightarrow 0} \frac{f(x,u)}{|u|^{p-2}u} = \phi(x),$$

para $x \in \Omega$.

H3) Existem $q \in (2, 2^*)$, com $q \leq p$, e $s_0 > 0$ tal que

$$qF(x,u) - uf(x,u) \leq 0, \text{ para todo } u \in (0, s_0] \text{ e para todo } x \in \Omega,$$

onde $F(x,u) = \int_0^u f(x,s)ds$.

Estamos interessados em verificar se o problema (3.3) possui soluções fracas. Para isso, utilizaremos alguns conceitos e resultados do cálculo variacional, que é uma importante ferramenta para abordar problemas envolvendo equações diferenciais parciais. Mais especificamente, usaremos uma abordagem variacional sobre um problema auxiliar gerado ao introduzir funções truncamento, denotadas por a_R e ψ, no problema original (3.3).

O problema auxiliar é necessário devido ao fato das hipóteses sobre as funções a e f serem assumidas apenas localmente e, desse modo, não sendo possível utilizar uma abordagem variacional diretamente no problema original, pois não teríamos garantia da boa definição do funcional associado ao problema original (3.3). Além disso, destacamos que as condições H1), H2) e H3) foram consideradas devido as seguintes necessidades: H1) é necessária para garantir que uma solução do problema auxiliar u_λ (que posteriormente provaremos ser solução do problema original (3.3)) pertença ao espaço $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ e que sua norma satisfaça a desigualdade

$$\|u_\lambda\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq O(\gamma, k, \Omega, \|\lambda\psi(\cdot, u_\lambda)\|_{L^\infty(\Omega)}),$$

para algumas constantes $\gamma, k, \alpha > 0$; a condição H2) é utiliza para garantir que o funcional associado ao problema auxiliar satisfaz a geometria do passo da montanha; por fim, temos que a condição H3) é um tipo de condição de Ambrosetti-Rabinowitz local, utilizada para mostrar que

$$\|u_\lambda\|^2_{H_0^1(\Omega)} = O(c_\lambda) \text{ quando } \lambda \longrightarrow \infty. \tag{3.4}$$

A seguir, apresentaremos alguns casos particulares do problema (3.3), para os quais consultamos Bonheure, Derlet e Valeriola [4] e Cerda e Iturriaga [9].

Exemplo 3.0.1. *Um caso particular, e bastante importante, do problema (3.3) é dado por*

$$\begin{cases} -div\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = \lambda|u|^{p-2}u, & em\ \Omega, \\ u = 0, & sobre\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.5}$$

para o qual tomamos $a(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t}}$ *e* $f(x,s) = |s|^{p-2}s$*, para todo* $t \geq 0$ *e* $(x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}$*. Tal problema também será abordado no capítulo 5, porém utilizando uma técnica baseada na variedade de Nehari.*

Exemplo 3.0.2. *Consideremos as funções* $a(t) := 1$ *e* $f(x,s) := sln(|s|+1)$*, para todo* $t \in \mathbb{R}$ *e todo* $(x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}$*. Então, teremos que o problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u ln(|u|+1), & em\ \Omega, \\ u = 0, & sobre\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.6}$$

é um caso particular de (3.3).

Agora, definimos a aplicação $\zeta : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\zeta(x,s) = \begin{cases} f(x,s), & \text{se } |s| \leq s_0; \\ s_0^{1-q} f(x, sgn(s)s_0)|s|^{q-1}, & \text{se } |s| > s_0. \end{cases} \tag{3.7}$$

Observação 3.0.1. *Existem* $m_0 > 0$ *e* $0 < k_0 \leq 1$ *tais que*

$$\zeta(y,s) \geq m_0 s^{p-1}, \ \text{para todo } (y,s) \in \Omega_0 \times (0, k_0]. \tag{3.8}$$

Demonstração. Pela definição de ζ temos que $\zeta(y,s) = f(y,s)$, para todo $\Omega_0 \times (0, s_0]$. Por outro lado, por H2), dado $y \in \Omega_0$ tem-se que

$$\lim_{s \longrightarrow 0} \frac{f(y,s)}{|s|^{p-2}s} = \phi(y).$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que

$$\begin{aligned} 0 < |s| < \delta_\varepsilon \implies & \left| \frac{f(y,s)}{|s|^{p-2}s} - \phi(y) \right| < \varepsilon \implies -\varepsilon + \phi(y) < \frac{f(y,s)}{|s|^{p-2}s} < \varepsilon + \phi(y) \\ \implies & \frac{f(y,s)}{|s|^{p-2}s} > -\varepsilon + \phi(y) > -\varepsilon + \phi_0. \end{aligned}$$

Desse modo, considerando $\varepsilon_0 > 0$, de modo que $-\varepsilon_0 + \phi_0 > 0$ e $0 < k_0 < \min\{s_0, \delta_\varepsilon, 1\}$, obtém-se que

$$0 < s \leq k_0 \implies \left| \frac{f(y,s)}{|s|^{p-2}s} - \phi(y) \right| < \varepsilon_0 \implies \frac{f(y,s)}{|s|^{p-1}} > -\varepsilon_0 + \phi_0 \implies f(y,s) > (-\varepsilon_0 + \phi_0)|s|^{p-1}.$$

Logo,

$$\zeta(y,s) > m_0|s|^{p-1}, \ \text{para todo } (y,s) \in \Omega_0 \times (0, k_0],$$

onde $m_0 = -\varepsilon_0 + \phi_0$. □

Definimos a função $\psi : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\psi(x,s) = \begin{cases} 0, & \text{se } s \leq 0 \\ f(x,s), & \text{se } 0 \leq s \leq k_0; \\ k_0^{1-q} f(x,k_0)s^{q-1}, & \text{se } s \geq k_0, \end{cases} \tag{3.9}$$

sendo que k_0 foi dado em (3.8).

Observação 3.0.2. *Como f é uma função de Carathéodory, teremos que ψ também é uma função de Carathéodory.*

Observação 3.0.3. *Existe $L > 0$ tal que $|\psi(x,s)| \leq L|s|^{q-1}$ para todo $(x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}$.*

Demonstração. De fato, por H2) temos que

$$\lim_{u \longrightarrow 0} \frac{f(x,u)}{|u|^{p-2}u} = \phi(x),$$

para todo $x \in \Omega$. Como $\phi \in L^\infty(\Omega)$, existe $c_1 > 0$ tal que $|\phi(x)| < c_1$ para todo $x \in \Omega$. Por outro lado, tomando $\varepsilon_0 > 0$ como na observação (3.0.1), temos que

$$0 < s \leq k_0 \Longrightarrow \left| \frac{f(x,s)}{|s|^{p-2}s} - \phi(x) \right| < \varepsilon_0 \Longrightarrow \frac{|f(x,s)|}{|s|^{p-1}} < \varepsilon_0 + |\phi(x)| \leq L,$$

para todo x em Ω e $L = \varepsilon_0 + c_1$. Assim, se $s \in (0, k_0]$, temos $|\psi(x,s)| \leq L|s|^{q-1}$ em Ω. Caso $s > k_0$, teremos que

$$|\psi(x,s)| = k_0^{1-q}|f(x,k_0)||s|^{q-1} \leq Lk_0^{1-q}k_0^{q-1}|s|^{q-1} = L|s|^{q-1}, \tag{3.10}$$

em Ω. Por fim, se $s < 0$ temos que $|\psi(x,s)| = 0 \leq L|s|^{q-1}$, para todo $x \in \Omega$. Portanto, $|\psi(x,s)| \leq L|s|^{q-1}$ para todo $s \in \mathbb{R}$ e todo $x \in \Omega$. □

Observação 3.0.4. *Devido ao fato de $\psi(x,s) = \zeta(x,s)$, para todo $(x,s) \in \Omega_0 \times (0, k_0]$ temos, por (3.8), que*

$$\psi(x,s) \geq m_0|s|^{p-1}, \text{ para todo } (x,s) \in \Omega \times (0, k_0]. \tag{3.11}$$

Observação 3.0.5. *Como $0 < k_0 < \min\{s_0, \delta_\varepsilon, 1\}$ temos, por H3), que*

$$q\Psi(x,u) - u\psi(x,u) \leq 0, \text{ para todo } u \in (0, k_0] \text{ e para todo } x \in \Omega,$$

onde $\Psi(x,u) = \int_0^u \psi(x,s)ds$.

Considere $R_0 > R > 0$ e defina $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\varphi(t) = \frac{1}{2(R_0 - R)}(2R_0 t - t^2 - R^2).$$

Como mencionamos, por estarmos interessados em utilizar uma abordagem variacional para obter soluções fracas de (3.3), consideramos o seguinte problema auxiliar:

$$\begin{cases} -div(a_R(|\nabla u|^2)\nabla u) = \lambda\psi(x,u), & \text{em } \Omega; \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.12}$$

onde a função $a_R : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$ é dada por

$$a_R(t) = \begin{cases} a(t), & \text{se } t \leq R; \\ a(\varphi(t)), & \text{se } R \leq t \leq R_0; \\ a\left(\frac{R_0+R}{2}\right), & \text{se } t \geq R_0. \end{cases} \tag{3.13}$$

Como observado por Cerda e Iturriaga [9], a função a_R satisfaz:

i) $a_R \in C^1((0,\infty))$, pois $\varphi(R) = R$, $\varphi(R_0) = \frac{R+R_0}{2}$, $\varphi'(R) = 1$, $\varphi'(R_0) = 0$, $\varphi'(t)t - \varphi(t) \leq 0$ para todo $t \in [R, R_0]$.

ii) $a'_R(t) = \begin{cases} a'(t), & \text{se } t \leq R; \\ a'(\varphi(t))\varphi'(t), & \text{se } R \leq t \leq R_0; \\ 0, & \text{se } t \geq R_0. \end{cases}$

iii) Para $t \geq 0$ temos que $2a'_R(t)t + a_R(t) \geq v_0 > 0$, onde $v_0 = \min\left\{v, a\left(\frac{R+R_0}{2}\right)\right\} > 0$.

iv) Definindo $G_0 = \min_{t\in[0,R_0]} a_R(t)$ e $\gamma_0 = \max_{t\in[0,R_0]} a_R(t)$, temos que $G_0 \leq a_R(t) \leq \gamma_0$ para todo $t \in [0,\infty)$.

Além disso, note que, pela condição H1) temos que $a(t) > 0$, para todo $t \in [0, R_0]$. Desse modo, $G_0 > 0$. Observe que, dada uma função $v \in H_0^1(\Omega)$ temos, por (3.12), que

$$-div(a_R(|\nabla u|^2)\nabla u)v = \lambda\psi(x,u)v$$

em Ω. Assim, integrando a equação anterior obtemos

$$\int_\Omega -div(a_R(|\nabla u|^2)\nabla u)vdx = \int_\Omega \lambda\psi(x,u)vdx,$$

e utilizando a Proposição A.4.1 juntamente com o fato de $u = 0$ sobre $\partial\Omega$ teremos

$$\int_\Omega a_R(|\nabla u|^2)\nabla u.\nabla v dx - \lambda\int_\Omega \psi(x,u)vdx = 0, \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.14}$$

Desse modo, as soluções fracas de (3.12) são as funções $u \in H_0^1(\Omega)$ tais que

$$\int_\Omega a_R(|\nabla u|^2)\nabla u.\nabla v - \lambda\int_\Omega \psi(x,u)v = 0, \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.15}$$

Além disso, temos que o funcional $I_\lambda : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ associado ao problema (3.12) é dado por

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega A_R(|\nabla u|^2)dx - \lambda\int_\Omega \Psi(x,u)dx, \tag{3.16}$$

onde

$$A_R(t) = \int_0^t a_R(s)ds \quad \text{e} \quad \Psi(x,u) = \int_0^u \psi(x,s)ds. \tag{3.17}$$

A seguir, apresentaremos uma proposição que nos garante que o funcional I_λ é de classe C^1. Para provar tal resultado consultamos Costa [21], Willem [12] e Faria [13].

Proposição 3.0.1. *$I_\lambda \in C^1(H_0^1(\Omega),\mathbb{R})$, com*

$$\langle I'_\lambda(u), h\rangle = \int_\Omega a_R(|\nabla u|^2)\nabla u.\nabla h\ dx - \lambda\int_\Omega \psi(x,u)h\ dx. \tag{3.18}$$

Demonstração. Com efeito, considere os funcionais $T_1, T_2 : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ definidos por

$$T_1(u) := \int_\Omega \Psi(x,u)dx \ \text{ e } \ T_2(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega A_R(|\nabla u|^2)dx,$$

para toda $u \in H_0^1(\Omega)$. Provaremos inicialmente que $T_1 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ e, para cada $u \in H_0^1(\Omega)$, tem-se $\langle T_1'(u), h\rangle = \int_\Omega \psi(x,u)hdx$, para toda $h \in H_0^1(\Omega)$.

Seja $u \in H_0^1(\Omega)$ fixada. Consideremos

$$\tau(h) := T_1(u+h) - T_1(u) - \int_\Omega \psi(x,u)hdx, \tag{3.19}$$

para toda $h \in H_0^1(\Omega)$. Pela desigualdade de Hölder ,

$$\begin{aligned}
|\tau(h)| &= \left|\int_\Omega \int_0^1 \frac{d}{dt}\Psi(x,u+th)dtdx - \int_\Omega \psi(x,u)hdx\right| \\
&= \left|\int_0^1 \int_\Omega \psi(x,u+th)hdxdt - \int_\Omega \psi(x,u)hdx\right| \\
&\leq \int_0^1 \int_\Omega |\psi(x,u+th) - \psi(x,u)||h|dxdt \\
&\leq \int_0^1 \|\psi(\cdot\,,u+th) - \psi(\cdot\,,u)\|_{L^q(\Omega)}\|h\|_{L^{q'}(\Omega)}dt,
\end{aligned}$$

onde $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. Como $H_0^1(\Omega) \subset L^{q'}(\Omega)$ e $1 < q' = \frac{q}{(q-1)} < 2^* - 1$ (pois $2 < q \leq p < 2^* - 1$), temos que $u + th \longrightarrow u$ em $L^{q'}(\Omega)$ quando $h \longrightarrow 0$ em $H_0^1(\Omega)$. Desse modo, utilizando o Teorema 2.3.2 temos que $\psi(\cdot\,,u+th) \longrightarrow \psi(\cdot\,,u)$ em $L^q(\Omega)$ quando $h \longrightarrow 0$ em $H_0^1(\Omega)$. Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e o Teorema B.1.1 obtemos

$$\frac{|\tau(h)|}{\|h\|_{H_0^1(\Omega)}} \leq C\frac{|\tau(h)|}{\|h\|_{L^{q'}(\Omega)}} \leq C\int_0^1 \|\psi(\cdot\,,u+th) - \psi(\cdot\,,u)\|_{L^q(\Omega)}dt \longrightarrow 0$$

quando $\|h\|_{H_0^1(\Omega)} \longrightarrow 0$. Portanto, T_1 possui derivada à Fréchet para qualquer $u \in H_0^1(\Omega)$, sendo $\langle T_1'(u), h\rangle = \int_\Omega \psi(x,u)hdx$, para toda $h \in H_0^1(\Omega)$.

Agora, verificaremos a continuidade de $T_1' : H_0^1(\Omega) \longrightarrow (H_0^1(\Omega))^*$. Sejam $u, v, h \in H_0^1(\Omega)$, então pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}
\langle T_1'(u+v) - T_1'(u), h\rangle &= \int_\Omega [\psi(x,u+v) - \psi(x,u)]hdx \\
&\leq \|\psi(\cdot\,,u+v) - \psi(\cdot\,,u)\|_{L^q(\Omega)}\|h\|_{L^{q'}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Pelo Teorema B.1.1,

$$\langle T_1'(u+v) - T_1'(u), h\rangle \leq \|\psi(\cdot\,,u+v) - \psi(\cdot\,,u)\|_{L^q(\Omega)}\|h\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\|T_1'(u+v) - T_1'(u)\|_{(H_0^1(\Omega))^*} &= \sup_{\substack{h \in H_0^1(\Omega) \\ \|h\| \leq 1}} |\langle T_1'(u+v) - T_1'(u), h\rangle| \\
&\leq \sup_{\substack{h \in H_0^1(\Omega) \\ \|h\| \leq 1}} \|\psi(\cdot\,,u+v) - \psi(\cdot\,,u)\|_{L^q(\Omega)}\|h\|_{H_0^1(\Omega)} \\
&\leq \|\psi(\cdot\,,u+v) - \psi(\cdot\,,u)\|_{L^q(\Omega)} \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

quando $v \longrightarrow 0$ em $H_0^1(\Omega)$. Dessa forma, temos que T_1' é contínua. Portanto, $T_1 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Vamos provar que $T_2 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$. Sejam $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Considere a aplicação

$$\begin{array}{rcl} H : (0,1) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & H(t) = \dfrac{1}{2} A_R(|\nabla u + t\nabla v|^2), \end{array}$$

então

$$H'(t) = a_R(|\nabla u + t\nabla v|^2)(\nabla u.\nabla v + t|\nabla v|^2).$$

Pelo Teorema do Valor Médio, existe $\theta \in (0,t)$, com $\theta = ct$ e $0 < c < 1$, tal que

$$H(t) - H(0) = H'(\theta)(t-0) = H'(\theta)t,$$

e assim,

$$\frac{1}{2t}(A_R(|\nabla u + t\nabla v|^2) - A_R(|\nabla u|^2)) = a_R(|\nabla u + ct\nabla v|^2)(\nabla u.\nabla v + ct|\nabla v|^2).$$

Fazendo $t \longrightarrow 0$ obtém-se que T_2 possui derivada de Gateaux e

$$\langle T_2'(u), h\rangle = \int_\Omega a_R(|\nabla u|^2)\nabla u \nabla h dx.$$

Para finalizar, provaremos que $T_2' : H_0^1(\Omega) \longrightarrow (H_0^1(\Omega))^*$ é contínua. Seja $\{u_m\}$ uma sequência em $H_0^1(\Omega)$ tal que $u_m \longrightarrow u$ em $H_0^1(\Omega)$, então pala desigualdade de Schwartz,

$$\begin{array}{rcl} |\langle T_2'(u_m) - T_2'(u), h\rangle| & \leq & \displaystyle\int_\Omega |(a_R(|\nabla u_m|^2)\nabla u_m - a_R(|\nabla u|^2)\nabla u).\nabla h| dx \\ & \leq & \|(a_R(|\nabla u_m|^2)\nabla u_m - a_R(|\nabla u|^2)\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|h\|_{H_0^1(\Omega)}. \end{array}$$

Assim,

$$\begin{array}{rcl} \|T_2'(u_m) - T_2'(u)\|_{(H_0^1(\Omega))^*} & = & \displaystyle\sup_{\substack{h \in H_0^1(\Omega) \\ \|h\| \leq 1}} |\langle T_2'(u_m) - T_2'(u), h\rangle| \\ & \leq & \displaystyle\sup_{\substack{h \in H_0^1(\Omega) \\ \|h\| \leq 1}} \|(a_R(|\nabla u_m|^2)\nabla u_m - a_R(|\nabla u|^2)\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|h\|_{H_0^1(\Omega)} \\ & \leq & \|(a_R(|\nabla u_m|^2)\nabla u_m - a_R(|\nabla u|^2)\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0, \end{array}$$

quando $m \longrightarrow \infty$. Dessa forma, T_2' é contínua. Portanto, $T_2 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$. Assim, concluímos que $I_\lambda \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ com

$$\langle I_\lambda'(u), h\rangle = \int_\Omega a_R(|\nabla u|^2)\nabla u.\nabla h \ dx - \lambda \int_\Omega \psi(x,u)h \ dx.$$

$\square$

Observação 3.0.6. *Defina a aplicação* $\Phi : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *por*

$$\Phi(x,t) = t\psi(x,t) - q\Psi(x,t). \tag{3.20}$$

Então, existe $M > 0$ *tal que* $\Phi(x,t) \geq -M$ *para todo* $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$.

Demonstração. Com efeito, se $|t| \leq k_0$ obtemos, pela Observação 3.0.3, que

$$\begin{aligned} |\Phi(x,t)| &= |t\psi(x,t) - q\Psi(x,t)| \leq |t\psi(x,t)| + q|\Psi(x,t)| \\ &\leq 2Lk_0^q, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\Phi(x,t) \geq -2Lk_0^q. \tag{3.21}$$

Por outro lado, caso $|t| > k_0$ teremos

$$\begin{aligned} \Phi(x,t) &= t\psi(x,t) - q\Psi(x,t) \\ &= tk_0^{1-q} f(x,k_0)|t|^{q-1} - q\int_0^t k_0^{1-q} f(x,k_0)|s|^{q-1} ds = 0. \end{aligned}$$

Assim, considerando $M = 2Lk_0^q > 0$ teremos $\Phi(x,t) \geq -M$. □

Proposição 3.0.2. *O funcional I_λ satisfaz a condição $(PS)_c$.*

Demonstração. Com efeito, sejam $c > 0$ e $\{u_n\}_n \subset H_0^1(\Omega)$ tais que

$$I_\lambda(u_n) \longrightarrow c \ \text{ e } \ I'_\lambda(u_n) \longrightarrow 0. \tag{3.22}$$

Nosso foco é provar que $\{u_n\}_n$ possui uma subsequência convergente, para isso vamos iniciar provando que $\{u_n\}_n$ é limitada. Note que, por (3.22), existem $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$n \geq N_1 \Longrightarrow |I_\lambda(u_n) - c| < \frac{1}{q}$$

e

$$n \geq N_2 \Longrightarrow \|I'_\lambda(u_n)\|_{(H_0^1(\Omega))^*} = \sup_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{|\langle I'_\lambda(u_n), v\rangle|}{\|v\|_{H_0^1(\Omega)}} < 1.$$

Assim, considerando $N = \max\{N_1, N_2\}$, temos que

$$n \geq N \Longrightarrow I_\lambda(u_n) < c + \frac{1}{q} \ \text{ e } \ \langle I'_\lambda(u_n), u_n\rangle > -\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \tag{3.23}$$

Desse modo, para $n \geq N$, teremos

$$\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} + 1 + qc \geq qI_\lambda(u_n) - \langle I'_\lambda(u_n), u_n\rangle,$$

ou seja,

$$\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} + 1 + qc \geq \int_\Omega \left[\frac{q}{2} A_R(|\nabla u_n|^2) - a_R(|\nabla u_n|^2)|\nabla u_n|^2\right] dx + \lambda \int_\Omega \Phi(x,u_n) dx, \tag{3.24}$$

onde Φ está definida na Observação 3.0.6.

Agora, para $n \geq N$, consideremos os conjuntos

1. $D_1 = \{x \in \Omega; |\nabla u_n|^2 \geq R_0\}$,

2. $D_2 = \{x \in \Omega; |\nabla u_n|^2 \leq R_0\}$,

3. $S_1 = \int_{D_1} \left[\frac{q}{2} A_R(|\nabla u_n|^2) - a_R(|\nabla u_n|^2)|\nabla u_n|^2\right] dx$ e

4. $S_2 = \int_{D_2} \left[\frac{q}{2} A_R(|\nabla u_n|^2) - a_R(|\nabla u_n|^2)|\nabla u_n|^2\right] dx$.

Então,

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \int_{D_1} \left[\frac{q}{2}\int_0^{|\nabla u_n|^2} a_R(s)ds - a_R(|\nabla u_n|^2)|\nabla u_n|^2\right] dx \\
&= \int_{D_1} \left[\frac{q}{2}\int_0^{R_0} a_R(s)ds + \frac{q}{2}\int_{R_0}^{|\nabla u_n|^2} a_R(s)ds - a\left(\frac{R+R_0}{2}\right)|\nabla u_n|^2\right] dx \\
&= \int_{D_1} \left[\frac{q}{2}\int_0^{R_0} a_R(s)ds + \frac{q}{2}\int_{R_0}^{|\nabla u_n|^2} a\left(\frac{R+R_0}{2}\right) ds - a\left(\frac{R+R_0}{2}\right)|\nabla u_n|^2\right] dx \\
&= \int_{D_1} \left[\frac{q}{2}\int_0^{R_0} a_R(s)ds + \frac{q}{2} a\left(\frac{R+R_0}{2}\right)\left(|\nabla u_n|^2 - R_0\right) - a\left(\frac{R+R_0}{2}\right)|\nabla u_n|^2\right] dx \\
&= \frac{q-2}{2} a\left(\frac{R+R_0}{2}\right)\int_{D_1} |\nabla u_n|^2 dx + \frac{q}{2}\int_{D_1}\left[\int_0^{R_0} a_R(s)ds - R_0 a\left(\frac{R+R_0}{2}\right)\right] dx \\
&= \frac{q-2}{2} a\left(\frac{R+R_0}{2}\right)\|u_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \frac{q-2}{2} a\left(\frac{R+R_0}{2}\right)\int_{D_2} |\nabla u_n|^2 dx \\
&\quad + \frac{q}{2}\int_{D_1}\left[\int_0^{R_0} a_R(s)ds - R_0 a\left(\frac{R+R_0}{2}\right)\right] dx.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\frac{q-2}{2} a\left(\frac{R+R_0}{2}\right)\|u_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} &= S_1 + \frac{q-2}{2} a\left(\frac{R+R_0}{2}\right)\int_{D_2} |\nabla u_n|^2 dx \\
&\quad - \frac{q}{2}\int_{D_1}\left[\int_0^{R_0} a_R(s)ds - R_0 a\left(\frac{R+R_0}{2}\right)\right] dx.
\end{aligned}
$$

Dessa forma, como

$$
S_1 + S_2 = \int_\Omega \left[\frac{q}{2} A_R(|\nabla u_n|^2) - a_R(|\nabla u_n|^2)|\nabla u_n|^2\right] dx
$$

e utilizando (3.24) obtemos que

$$
\begin{aligned}
\frac{q-2}{2} a\left(\frac{R+R_0}{2}\right)\|u_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} &\leq \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} + 1 + qc - \lambda\int_\Omega \Phi(x,u_n)dx - S_2 \\
&\quad + \frac{q-2}{2} a\left(\frac{R+R_0}{2}\right)\int_{D_2} |\nabla u_n|^2 dx \\
&\quad - \frac{q}{2}\int_{D_1}\left[\int_0^{R_0} a_R(s)ds - R_0 a\left(\frac{R+R_0}{2}\right)\right] dx,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
\frac{q-2}{2} a\left(\frac{R+R_0}{2}\right)\|u_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} &\leq 1 + qc - \lambda\int_\Omega \Phi(x,u_n)dx - S_2 \\
&\quad + \frac{q-2}{2} a\left(\frac{R+R_0}{2}\right)\int_{D_2} |\nabla u_n|^2 dx \\
&\quad - \frac{q}{2}\int_{D_1}\left[\int_0^{R_0} a_R(s)ds - R_0 a\left(\frac{R+R_0}{2}\right)\right] dx.
\end{aligned}
$$

Como

$$\begin{aligned}
-S_2 &= \int_{D_2}\left[a_R(|\nabla u_n|^2)|\nabla u_n|^2 - \frac{q}{2}\int_0^{|\nabla u_n|^2} a_R(s)ds\right]dx \\
&\leq \int_{D_2}\left[\gamma_0|\nabla u_n|^2 - \frac{qG_0}{2}\int_0^{|\nabla u_n|^2} ds\right]dx \leq \left(\gamma_0 - \frac{qG_0}{2}\right)\int_{D_2} R_0 dx \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

e

$$-\frac{q}{2}\int_{D_1}\int_0^{R_0} a_R(s)dsdx \leq -\frac{qG_0}{2}\int_{D_1} R_0 dx \tag{3.25}$$

temos, utilizando a Observação 3.0.6 e as desigualdades acima, que

$$\begin{aligned}
\frac{q-2}{2}a\left(\frac{R+R_0}{2}\right)\|u_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} &\leq 1 + qc + \lambda\int_\Omega M dx + \left(\gamma_0 - \frac{qG_0}{2}\right)\int_{D_2} R_0 dx \\
&\quad + \frac{q-2}{2}a\left(\frac{R+R_0}{2}\right)\int_{D_2}|\nabla u_n|^2 dx \\
&\quad - \int_{D_1}\left[\frac{qG_0}{2}R_0 - R_0 a\left(\frac{R+R_0}{2}\right)\right]dx.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\left(\frac{q-2}{2}a\left(\frac{R+R_0}{2}\right)\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} - 1\right)\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \leq D \tag{3.26}$$

onde

$$\begin{aligned}
D &= 1 + qc + \lambda\int_\Omega M dx + \left(\gamma_0 - \frac{qG_0}{2}\right)\int_{D_2} R_0 dx + \frac{q-2}{2}a\left(\frac{R+R_0}{2}\right)\int_{D_2} R_0^2 dx \\
&\quad - \int_{D_1}\left[\frac{qG_0}{2}R_0 - R_0 a\left(\frac{R+R_0}{2}\right)\right]dx.
\end{aligned}$$

Assim, se

$$\left(\frac{q-2}{2}a\left(\frac{R+R_0}{2}\right)\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} - 1\right) \leq 1,$$

então $\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{4}{(q-2)a\left(\frac{R+R_0}{2}\right)}$. Caso

$$\left(\frac{q-2}{2}a\left(\frac{R+R_0}{2}\right)\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} - 1\right) > 1,$$

teremos, utilizando a desigualdade (3.26), que $\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} < D$. Assim, concluímos que $\{u_n\}_n$ é limitada.

Para finalizar, provaremos que $\{u_n\}_n$ possui uma subsequência convergente. Como $\{u_n\}_n$ é limitada, existem uma subsequência $\{u_{n_k}\}$ e $u \in H_0^1(\Omega)$ tais que u_{n_k} converge fracamente para u (Ver [19], Teorema 3.18, p. 69). Assim, pelo Teorema B.1.2, $H_0^1(\Omega) \subset L^{q'}(\Omega)$, com $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ (visto que $2 < q < 2^*$ e $1 < q' = \frac{q}{q-1} < 2^*$) e, desse modo, $u_{n_k} \longrightarrow u$ em $L^{q'}(\Omega)$. Assim, pelo Teorema 2.3.2 tem-se $\psi(x, u_{n_k} - u) \longrightarrow 0$ em $L^q(\Omega)$, quando $n_k \longrightarrow \infty$. Além disso, temos (ver [19], Proposição 3.5, p. 58) que

$$\langle I'_\lambda(u_{n_k}) - I'_\lambda(u), u_{n_k} - u\rangle \longrightarrow 0,$$

quando $n_k \longrightarrow \infty$. Por outro lado, pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}\langle I'_\lambda(u_{n_k}-u), u_{n_k}-u\rangle &= \int_\Omega a_R(|\nabla(u_{n_k}-u)|^2)|\nabla(u_{n_k}-u)|^2dx\\ &\quad -\lambda\int_\Omega \psi(x,u_{n_k}-u)(u_{n_k}-u)dx\\ &\geq G_0\int_\Omega|\nabla(u_{n_k}-u)|^2dx-\lambda\int_\Omega\psi(x,u_{n_k}-u)(u_{n_k}-u)dx\\ &\geq G_0\|u_{n_k}-u\|^2_{H_0^1(\Omega)}-\lambda\|\psi(\cdot\,,u_{n_k}-u)\|_{L^q(\Omega)}\|u_{n_k}-u\|_{L^{q'}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\|u_{n_k}-u\|^2_{H_0^1(\Omega)}\leq\frac{1}{G_0}\left(\langle I'_\lambda(u_{n_k}-u),u_{n_k}-u\rangle+\lambda\|\psi(\cdot\,,u_{n_k}-u)\|_{L^q(\Omega)}\|u_{n_k}-u\|_{L^{q'}(\Omega)}\right).$$

Portanto, $\|u_{n_k}-u\|_{H_0^1(\Omega)}\longrightarrow 0$, quando $n_k\longrightarrow\infty$. Desse modo, I_λ satisfaz a condição $(PS)_c$. □

3.1 GEOMETRIA PASSO DA MONTANHA

Nesta seção, estamos interessados em verificar que o funcional $I_\lambda : H_0^1(\Omega)\longrightarrow\mathbb{R}$, definido em (3.16), satisfaz a geometria do passo da montanha. Para isso, definiremos dois funcionais auxiliares. Considerando $G_0=\min_{t\in[0,R_0]}a_R(t)$ e $\gamma_0=\max_{t\in[0,R_0]}a_R(t)$, definimos

$$J_1(u)=\frac{G_0}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2dx-\lambda\int_\Omega\Psi(x,u)dx \tag{3.27}$$

e

$$J_2(u)=\frac{\gamma_0}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2dx-\lambda\int_\Omega\Psi(x,u)dx. \tag{3.28}$$

Como observado por Cerda e Iturriaga [9], uma das relações que podemos estabelecer entre os funcionais definidos em (3.16), (3.27) e (3.28) é que

$$J_1(u)\leq I_\lambda(u)\leq J_2(u). \tag{3.29}$$

Com efeito, pelas definições de G_0 e γ_0 temos que

$$\begin{aligned}J_1(u) &= \frac{G_0}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2dx-\lambda\int_\Omega\Psi(x,u)dx=\frac{1}{2}\int_\Omega\int_0^{|\nabla u|^2}G_0dsdx-\lambda\int_\Omega\Psi(x,u)dx\\ &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega\int_0^{|\nabla u|^2}a_R(s)dsdx-\lambda\int_\Omega\Psi(x,u)dx=\frac{1}{2}\int_\Omega A_R(|\nabla u|^2)dx-\lambda\int_\Omega\Psi(x,u)dx\\ &= I_\lambda(u)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}J_2(u) &= \frac{\gamma_0}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2dx-\lambda\int_\Omega\Psi(x,u)dx=\frac{1}{2}\int_\Omega\int_0^{|\nabla u|^2}\gamma_0dsdx-\lambda\int_\Omega\Psi(x,u)dx\\ &\geq \frac{1}{2}\int_\Omega\int_0^{|\nabla u|^2}a_R(s)dsdx-\lambda\int_\Omega\Psi(x,u)dx=\frac{1}{2}\int_\Omega A_R(|\nabla u|^2)dx-\lambda\int_\Omega\Psi(x,u)dx\\ &= I_\lambda(u).\end{aligned}$$

Desse modo temos que a equação (3.29) é válida.

A seguir, apresentaremos dois lemas que nos darão suporte para garantir que I_λ realmente possui a geometria do passo da montanha. Para prosseguirmos, gostaríamos de ressaltar que a norma adotada no espaço $H_0^1(\Omega)$, que denotaremos por $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$, é dada por

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}, \text{ para todo } u \in H_0^1(\Omega). \tag{3.30}$$

Lema 3.1.1. *Suponha H2) é valido, então existem $\rho_\lambda > 0$ e $\beta_\lambda > 0$ tais que*

$$I_\lambda(u) > \beta_\lambda,$$

para todo $u \in X_\lambda := \{u \in H_0^1(\Omega); \|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \rho_\lambda\}$.

Demonstração. Seja $u \in H_0^1(\Omega)$, então pela Observação 3.0.3 e utilizando o Teorema B.1.1, obtemos que

$$\begin{aligned} J_1(u) &= \frac{G_0}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_\Omega \Psi(x,u)dx = \frac{G_0}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - \lambda \int_\Omega \int_0^u \psi(x,s)dsdx \\ &\geq \frac{G_0}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - \lambda L \int_\Omega \int_0^u |s|^{q-1}dsdx = \frac{G_0}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{\lambda L}{q}\int_\Omega |u|^q dx \\ &= \frac{G_0}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{\lambda L}{q}\|u\|^q_{L^q(\Omega)} \geq \frac{G_0}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{L\lambda C}{q}\|\nabla u\|^q_{L^2(\Omega)} \\ &= \left(\frac{G_0}{2} - \frac{\lambda LC}{q}\|u\|^{q-2}_{H_0^1(\Omega)}\right)\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Assim, considerando $\rho_\lambda = \left(\frac{qG_0}{4\lambda LC}\right)^{\frac{1}{(q-2)}}$ e $\beta_\lambda = \frac{G_0}{4}\left(\frac{qG_0}{4\lambda LC}\right)^{\frac{2}{q-2}}$ teremos, para cada $u \in X_\lambda$, que

$$\begin{aligned} J_1(u) &\geq \left(\frac{G_0}{2} - \frac{\lambda LC}{q}\|u\|^{q-2}_{H_0^1(\Omega)}\right)\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \left(\frac{G_0}{2} - \frac{\lambda LC}{q}\left(\frac{qG_0}{4\lambda LC}\right)\right)\left(\frac{qG_0}{4\lambda LC}\right)^{\frac{2}{(q-2)}} \\ &= \frac{G_0}{4}\left(\frac{qG_0}{4\lambda LC}\right)^{\frac{2}{q-2}} = \beta_\lambda. \end{aligned}$$

Por fim, pela desigualdade (3.29), chegamos ao seguinte resultado

$$I_\lambda(u) \geq J_1(u) \geq \beta_\lambda.$$

□

Lema 3.1.2. *Assuma (H2), então existe $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ tal que*

$$\|u_0\|_{H_0^1(\Omega)} > \rho_\lambda \;\; e \;\; I_\lambda(u_0) \leq 0.$$

Demonstração. Seja $v \in C_c^\infty(\Omega_0)$ uma função não-negativa tal que $\|v\|_{H_0^1(\Omega_0)} = 1$. Então, segue da definição de ψ e da desigualdade (3.11) que $\psi(x, \xi v) \geq 0$, para todo $\xi > 0$. Além disso, considerando $\tilde{v} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\tilde{v} = \begin{cases} v, & \text{se } x \in \Omega_0, \\ 0, & \text{se } x \notin \Omega_0, \end{cases}$$

os conjuntos $E_1 = \{x \in \Omega_0; \xi v > k_0\}$ e $E_2 = \{x \in \Omega_0; \xi v \leq k_0\}$, obtemos

$$\begin{aligned} J_2(\xi\tilde{v}) &= \frac{\gamma_0}{2}\int_{\Omega_0} |\nabla \xi v|^2 dx - \lambda \int_{\Omega_0} \Psi(x, \xi v)dx \\ &= \frac{\gamma_0 \xi^2}{2}\int_{\Omega_0} |\nabla v|^2 dx - \lambda \int_{\Omega_0} \Psi(x, \xi v)dx \\ &= \frac{\gamma_0 \xi^2}{2}\|v\|^2_{H^1_0(\Omega_0)} - \lambda \int_{E_1} \Psi(x, \xi v)dx - \lambda \int_{E_2} \Psi(x, \xi v)dx. \\ &= \frac{\gamma_0 \xi^2}{2} + G_1 + G_2, \end{aligned}$$

onde $G_1 = -\lambda \int_{E_1} \Psi(x, \xi v)dx$, $G_2 = -\lambda \int_{E_2} \Psi(x, \xi v)dx$. Utilizando novamente a desigualdade (3.11) e pela definição de ψ teremos:

i) $G_1 \leq -\frac{\lambda m_0 k_0^{p-q}}{p} \int_{E_1} \xi^q v^q dx$. Com efeito, note que

$$\begin{aligned} G_1 &= -\lambda \int_{E_1} \Psi(x, \xi v)dx \\ &= -\lambda \int_{E_1}\int_0^{k_0} \psi(x, s)dsdx - \lambda \int_{E_1}\int_{k_0}^{\xi v} \psi(x, s)dsdx, \end{aligned}$$

assim, escrevendo $Q_1 = -\lambda \int_{E_1}\int_0^{k_0} \psi(x, s)dsdx$, $Q_2 = -\lambda \int_{E_1}\int_{k_0}^{\xi v} \psi(x, s)dsdx$ temos, por (3.11), que

$$Q_1 = -\lambda \int_{E_1}\int_0^{k_0} \psi(x, s)dsdx \leq -\lambda m_0 \int_{E_1}\int_0^{k_0} |s|^{p-1}dsdx = -\lambda m_0 \int_{E_1} \frac{|k_0|^p}{p}dx$$

e, por (3.0.4), obtemos

$$\begin{aligned} Q_2 &= -\lambda \int_{E_1}\int_{k_0}^{\xi v} k_0^{1-q} f(x, k_0)|s|^{q-1}dsdx \leq -m_0 \lambda k_0^{p-q} \int_{E_1}\int_{k_0}^{\xi v} |s|^{q-1}dsdx \\ &= -\frac{\lambda m_0 k_0^{p-q}}{q}\int_{E_1} (\xi^q v^q - k_0^q)dx \leq -\frac{\lambda m_0 k_0^{p-q}}{p}\int_{E_1} (\xi^q v^q - k_0^q)dx \\ &= -\frac{\lambda m_0 k_0^{p-q}}{p}\int_{E_1} \xi^q v^q dx + \lambda m_0 \int_{E_1} \frac{|k_0|^p}{p}dx. \end{aligned}$$

Dessa maneira,

$$G_1 = Q_1 + Q_2 \leq -\frac{\lambda m_0 k_0^{p-q}}{p}\int_{E_1} \xi^q v^q dx.$$

ii) $G_2 \leq -\lambda m_0 \frac{\xi^p}{p} \int_{E_2} |v|^p dx$. De fato,

$$\begin{aligned} G_2 &= -\lambda \int_{E_2} \Psi(x, \xi v)dx = -\lambda \int_{E_2}\int_0^{\xi v} \psi(x, s)dsdx \\ &\leq -\lambda m_0 \int_{E_2}\int_0^{\xi v} |s|^{p-1}dsdx = -\lambda m_0 \frac{\xi^p}{p}\int_{E_2} |v|^p dx. \end{aligned}$$

Dessa forma, por i) e ii) obtemos que

$$\begin{aligned}
J_2(\xi\tilde{v}) &= \frac{\gamma_0\xi^2}{2} + G_1 + G_2 \leq \frac{\gamma_0\xi^2}{2} - \frac{\lambda m_0 k_0^{p-q}}{p}\int_{E_1}\xi^q v^q dx - \lambda m_0 \frac{\xi^p}{p}\int_{E_2}|v|^p dx \\
&= \frac{\gamma_0\xi^2}{2} - \frac{\lambda m_0 k_0^{p-q}}{p}\int_{E_1}\xi^q v^q dx - \frac{\lambda m_0 k_0^{p-q}}{p}\int_{E_2}\xi^q v^q dx + \frac{\lambda m_0 k_0^{p-q}}{p}\int_{E_2}\xi^q v^q dx \\
&\quad -\lambda m_0 \frac{\xi^p}{p}\int_{E_2}|v|^p dx \\
&= \frac{\gamma_0\xi^2}{2} - \frac{\lambda m_0 k_0^{p-q}\xi^q}{p}\|v\|^q_{L^q(\Omega_0)} + \frac{\lambda m_0 k_0^{p-q}}{p}\int_{E_2}\xi^q v^q dx - \lambda m_0 \frac{\xi^p}{p}\int_{E_2}|v|^p dx \\
&\leq \frac{\gamma_0\xi^2}{2} - \frac{\lambda m_0 k_0^{p-q}\xi^q}{p}\|v\|^q_{L^q(\Omega_0)} - \lambda m_0\left(\frac{\xi^p}{p} - \frac{k_0^{p-q}\xi^q}{q}\right)\int_{E_2}|v|^p dx.
\end{aligned}$$

Logo,

$$J_2(\xi\tilde{v}) \leq \xi^2\left[\frac{\gamma_0}{2} - \lambda m_0 \xi^{q-2}\left(\frac{k_0^{p-q}}{p}\|v\|^q_{L^q(\Omega_0)} + \left(\frac{\xi^{p-q}}{p} - \frac{k_0^{p-q}}{q}\right)\int_{E_2}|v|^p dx\right)\right]. \tag{3.31}$$

Escolhendo $\xi_0 > 0$ de modo que $\xi_0 \geq \left(\frac{\gamma_0 p}{2\lambda m_0\|v\|^q_{L^q(\Omega_0)}k_0^{p-q}}\right)^{\frac{1}{q-2}}$ e $\left(\frac{\xi_0^{p-q}}{p} - \frac{k_0^{p-q}}{q}\right) \geq 0$, e considerando $u_0 = \xi_0\tilde{v}$, teremos que $J_2(u_0) \leq 0$. De fato, pela desigualdade (3.31),

$$\begin{aligned}
J_2(\xi_0\tilde{v}) &\leq \xi_0^2\left[\frac{\gamma_0}{2} - \lambda m_0 \xi_0^{q-2}\left(\frac{k_0^{p-q}}{p}\|v\|^q_{L^q(\Omega_0)} + \left(\frac{\xi_0^{p-q}}{p} - \frac{k_0^{p-q}}{q}\right)\int_{E_2}|v|^p dx\right)\right] \\
&\leq \xi_0^2\left[-\lambda m_0 \xi_0^{q-2}\left(\frac{\xi_0^{p-q}}{p} - \frac{k_0^{p-q}}{q}\right)\int_{E_2}|v|^p dx\right] \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

Assim, utilizando a desigualdade (3.29), temos que $I_\lambda(u_0) \leq J_2(u_0) \leq 0$.

Para finalizar, provaremos que $\|u_0\|_{H_0^1(\Omega)} > \rho_\lambda$. Observe que, utilizando o fato de $\gamma_0 \geq G_0$, $\xi_0 \geq \left(\frac{\gamma_0 p}{2\lambda m_0\|v\|^q_{L^q(\Omega_0)}k_0^{p-q}}\right)^{\frac{1}{q-2}}$ e o Teorema B.1.1, temos

$$\begin{aligned}
\|u_0\|_{H_0^1(\Omega)} &= \xi_0\|v\|_{H_0^1(\Omega_0)} = \xi_0 \geq \left(\frac{G_0 p}{2\lambda m_0\|v\|^q_{L^q(\Omega_0)}k_0^{p-q}}\right)^{\frac{1}{q-2}} \\
&\geq \left(\frac{G_0 p}{2\lambda m_0 C k_0^{p-q}}\right)^{\frac{1}{q-2}} = \left[\left(\frac{G_0 p}{2\lambda C}\right)\left(\frac{1}{m_0 k_0^{p-q}}\right)\right]^{\frac{1}{q-2}}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, pela Observação 3.0.3 e a desigualdade (3.11), temos

$$m_0 k_0^{p-1} \leq \psi(x, k_0) \leq L k_0^{q-1} \Longrightarrow \frac{1}{L} \leq \frac{1}{m_0 k_0^{p-q}}.$$

Assim, concluímos que

$$\|u_0\|_{H_0^1(\Omega)} \geq \left[\left(\frac{G_0 p}{2\lambda C}\right)\left(\frac{1}{L}\right)\right]^{\frac{1}{q-2}} > \left[\frac{G_0 p}{4\lambda C L}\right]^{\frac{1}{q-2}} \geq \left[\frac{G_0 q}{4\lambda C L}\right]^{\frac{1}{q-2}} = \rho_\lambda. \tag{3.32}$$

□

Dada $u \in H_0^1(\Omega)$, definimos as funções

$$u^+ := \max\{u, 0\} \text{ e } u^- := \max\{0, -u\}, \tag{3.33}$$

denominadas as partes positiva e negativa de u, respectivamente. Assim, teremos que $u = u^+ - u^-$ e obtemos o seguinte resultado:

Teorema 3.1.1. *O problema auxiliar (3.12) possui uma solução não negativa.*

Demonstração. Pelos Lemas 3.1.1 e 3.1.2, existe $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ de modo que

$$\inf_{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}=\rho_\lambda} I_\lambda(u) = \inf_{u\in X_\lambda} I_\lambda(u) \geq \beta_\lambda \geq 0 \geq I_\lambda(u_0), \tag{3.34}$$

onde $\|u_0\|_{H_0^1(\Omega)} > \rho_\lambda$. Além disso, $I_\lambda(0) = 0$. Desse modo, teremos que

$$\inf_{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}=\rho_\lambda} I_\lambda(u) \geq \max\{I_\lambda(u_0), I_\lambda(0)\}. \tag{3.35}$$

Portanto, I_λ satisfaz a geometria do passo da montanha. Dessa forma, pelo Teorema 2.2.3, temos que

$$c_\lambda = \inf_{\gamma\in\Gamma} \sup_{t\in[0,1]} I_\lambda(\gamma(t)) \tag{3.36}$$

é um valor crítico de I_λ e

$$c_\lambda \geq \inf_{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}=\rho_\lambda} I_\lambda(u) \geq \beta_\lambda, \tag{3.37}$$

ou seja, existe $u_\lambda \in H_0^1(\Omega)$ tal que $I_\lambda(u_\lambda) = c_\lambda$ e $I'_\lambda(u_\lambda) = 0$. Assim, u_λ é uma solução fraca do problema auxiliar (3.12).

Agora, considere u_λ^- como uma função teste em (3.12). Então,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega -div(a_R(|\nabla u_\lambda|^2)\nabla u_\lambda)u_\lambda^- dx &= \lambda \int_\Omega \psi(x, u_\lambda)u_\lambda^- dx \\
&= \lambda \int_{\{x\in\Omega; u_\lambda\geq 0\}} \psi(x, u_\lambda)u_\lambda^- dx + \lambda \int_{\{x\in\Omega; u_\lambda\leq 0\}} \psi(x, u_\lambda)u_\lambda^- dx \\
&= 0,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
0 &= \int_\Omega -div(a_R(|\nabla u_\lambda|^2)\nabla u_\lambda)u_\lambda^- dx = \int_\Omega a_R(|\nabla u_\lambda|^2)\nabla u_\lambda \nabla u_\lambda^- dx \\
&= \int_\Omega a_R(|\nabla u_\lambda|^2)|\nabla u_\lambda^-|^2 dx \geq G_0 \int_\Omega |\nabla u_\lambda^-|^2 dx = G_0\|u_\lambda^-\|^2_{H_0^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Logo, temos $\|u_\lambda^-\|_{H_0^1(\Omega)} = 0$, e consequentemente, $u_\lambda^- = 0$. Portanto, $u_\lambda = u_\lambda^+ - u_\lambda^- = u_\lambda^+ \geq 0$. $\square$

Observação 3.1.1. *Como observado por Cerda e Iturriaga [9], ao considerar a função*

$$r(t) = \gamma_0 \xi_0^2 \frac{t^2}{2} - \lambda m_0 k_0^{p-q} \xi_0^q \|v\|_{L^q(\Omega_0)}^q \frac{t^q}{p}, \tag{3.38}$$

temos que

$$J_2(\gamma(t)) \leq r(t_0), \tag{3.39}$$

onde $v \in C_c^\infty(\Omega_0)$, *com* $\|v\|_{H_0^1(\Omega_0)} = 1$, $\xi_0 \geq \left(\frac{\gamma_0 p}{2\lambda m_0 \|v\|_{L^q(\Omega_0)}^q k_0^{p-q}} \right)^{\frac{1}{q-2}}$ *com* $\left(\frac{\xi_0^{p-q}}{p} - \frac{k_0^{p-q}}{q} \right) \geq 0$, $\gamma(t) = t\xi_0 v$ *e* $t_0 = \left(\frac{\gamma_0 \xi_0^{2-q} p}{\lambda m_0 k_0^{p-q} q \|v\|_{L^q(\Omega_0)}^q} \right)^{\frac{1}{q-2}}$. *Além disso,*

$$\max_{t\in[0,1]} I_\lambda(\gamma(t)) \leq \max_{t\in[0,1]} J_2(\gamma(t)) \leq r(t_0) = \frac{\gamma_0}{2} \left(\frac{\gamma_0 p}{m_0 k_0^{p-q} q \|v\|_{L^q(\Omega_0)}^q} \right)^{\frac{2}{q-2}} \lambda^{\frac{-2}{q-2}}. \tag{3.40}$$

Para verificar a desigualdade (3.39), basta aplicar o teste da segunda derivada para garantir que $r(t)$ *possui um máximo e, em seguida, igualar* $r'(t)$ *a zero para garantir que* $r(t)$ *assume seu máximo em* t_0. *Enquanto que, para provar a desigualdade (3.40), basta utilizar a desigualdades (3.29) e (3.39). Portanto,*

$$c_\lambda = \inf_{\gamma\in\Gamma} \sup_{t\in[0,1]} I_\lambda(\gamma(t)) \leq r(t_0). \tag{3.41}$$

3.2 EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO

Nesta seção, enunciaremos e provaremos o teorema central deste capítulo, que nos garante a existência de solução não trivial do problema (3.3). Para isso, apresentaremos um lema que nos fornece uma estimativa das funções $u \in H_0^1(\Omega)$ que são soluções de um dado problema.

Lema 3.2.1. *Sejam* $A = A(\eta)$ *um campo vetorial de classe* C^1 *em* $\mathbb{R}^n$, *e* $f = f(x,s)$ *uma função de Carathéodory limitada em* $\Omega \times \mathbb{R}$. *Seja* $u \in H_0^1(\Omega)$ *uma solução de*

$$\int_\Omega (A(\nabla u)).\nabla v + f(x,u)v)dx = 0 \tag{3.42}$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. *Suponha que existem dois números reais* $0 < \gamma < k$ *tais que*

$$\gamma\|\xi\|^2 \leq \frac{\partial A_i}{\partial \eta_j}(\nabla u)\xi_i\xi_j \ e \ \left|\frac{\partial A_i}{\partial \eta_j}(\nabla u)\right| \leq k, \tag{3.43}$$

para todo $i,j = 1,...,n$ *e todo* $\xi = (\xi_1,...,\xi_n) \in \mathbb{R}^n$. *Então,* $u \in W^{2,r}(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, *para todo* $\alpha \in (0,1)$ *e todo* $r \in (1,\infty)$. *Além disso,*

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq O(\gamma, k, \Omega, \|f(\cdot,u)\|_{L^\infty(\Omega)}).$$

Demonstração. Ver [22], Teorema 2.1, p. 244 ou [9], Lema 2.2, p. 5 □

Observação 3.2.1. *Defina a aplicação* $\mathcal{G} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *por*

$$\mathcal{G}(\eta) = a_R(|\eta|^2)\eta. \tag{3.44}$$

Então, como observado por Cerda e Iturriaga (2019), considerando $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_1, ..., \mathcal{G}_n)$ *temos que:,*

i) $\mathcal{G}$ *é de classe* C^1*, pois* a_R *é de classe* C^1*;*

ii) $\dfrac{\partial \mathcal{G}_i}{\partial \eta_j} = 2a_R'(|\eta|^2)\eta_i\eta_j + a_R(|\eta|^2)\delta_{ij}$*, onde* $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & se\ i = j \\ 0, & se\ i \neq j; \end{cases}$

iii) *Dado* $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n$*, se* $a_R \leq 0$ *então*

$$\frac{\partial \mathcal{G}_i}{\partial \eta_j}\xi_i\xi_j \geq (2a_R'(|\eta|^2)|\eta|^2 + a_R(|\eta|^2))|\xi|^2.$$

Demonstração. De fato, o item i) é válido por a_R ser de classe C^1. Agora provaremos ii). Como $\mathcal{G}(\eta) = a_R(|\eta|^2)\eta = (a_R(|\eta|^2)\eta_1, ..., a_R(|\eta|^2)\eta_n)$, obtemos, utilizando a regra da cadeia e identificando $\mathcal{G}_i = a_R(|\eta|^2)\eta_i$ (para $i = 1, ..., n$), que

$$\frac{\partial \mathcal{G}_i}{\partial \eta_j} = 2a_R'(|\eta|^2)\eta_j\eta_i + a_R(|\eta|^2)\delta_{ij}.$$

Assim, o item ii) está provado. Para finalizar, provaremos iii). Dado $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, consideremos ξ^t o vetor transposto de ξ. Então,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{G}_i}{\partial \eta_j}\xi_i\xi_j &= 2a_R'(|\eta|^2)\xi^t(\eta_i\eta_j)\xi + a_R(|\eta|^2)|\xi|^2 \\ &= 2a_R'(|\eta|^2)\xi.(\eta(\xi.\eta)) + a_R(|\eta|^2)|\xi|^2 \\ &= 2a_R'(|\eta|^2)(\xi.\eta)^2 + a_R(|\eta|^2)|\xi|^2. \end{aligned}$$

Assim, como $a_R' \leq 0$ (pois a_R é não crescente) temos, utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e H1), que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{G}_i}{\partial \eta_j}\xi_i\xi_j &\geq 2a_R'(|\eta|^2)|\xi|^2|\eta|^2 + a_R(|\eta|^2)|\xi|^2 \\ &= (2a_R'(|\eta|^2)|\eta|^2 + a_R(|\eta|^2))|\xi|^2 \\ &\geq v|\xi|^2. \end{aligned}$$

□

Lema 3.2.2. *Seja* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *uma solução do problema (3.12), então existe uma constante positiva* $C_1 = C_1(\Omega, q)$ *tal que*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_1(\lambda L G_0^{-1})^{\frac{1}{(2^*-q)}}\|u\|_{L^{2^*}(\Omega)}^{\frac{2^*-2}{2^*-q}}. \tag{3.45}$$

Demonstração. Seja u uma solução do problema (3.12) dada pelo Teorema 3.1.1. Consideremos a função teste dada por $v = sgn(u)|u|^{2z+1} = u^{2z}u$ na equação (3.12). Então, tomando $G_0 = \min_{t\in[0,R_0]} a_R(t)$ temos que

$$
\begin{aligned}
\frac{(2z+1)}{(z+1)^2}G_0\int_\Omega |\nabla(u^{z+1})|^2dx &= \frac{(2z+1)}{(z+1)^2}G_0\int_\Omega \nabla(u^{z+1}).\nabla(u^{z+1})dx\\
&= \frac{(2z+1)}{(z+1)^2}G_0\int_\Omega (z+1)^2u^{2z}(\nabla u.\nabla u)dx\\
&= (2z+1)\int_\Omega G_0|\nabla u|^2|u|^{2z}dx\\
&\leq (2z+1)\int_\Omega a_R(|\nabla u|^2)|\nabla u|^2|u|^{2z}dx\\
&= (2z+1)\int_\Omega a_R(|\nabla u|^2)(\nabla u.\nabla u)|u|^{2z}dx\\
&= \int_\Omega (a_R(|\nabla u|^2)\nabla u).\nabla(u|u|^{2z})dx\\
&= \int_\Omega -div(a_R(|\nabla u|^2)\nabla u).u|u|^{2z}dx
\end{aligned}
$$

Assim, utilizando o fato de u ser solução de (3.12) e a Observação 3.0.3, teremos que

$$
\begin{aligned}
\frac{(2z+1)}{(z+1)^2}G_0\int_\Omega |\nabla(u^{z+1})|^2dx &\leq \int_\Omega \lambda\psi(x,u)sgn(u)|u|^{2z+1}dx\\
&\leq \lambda L\int_\Omega |u|^{2z+q}dx.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$\frac{(2z+1)}{(z+1)^2}G_0\int_\Omega |\nabla(u^{z+1})|^2dx \leq \lambda L\int_\Omega |u|^{2z+q}dx. \tag{3.46}$$

Por outro lado, considerando $m = \frac{2^*}{q-2}$ e $m' = \frac{2^*}{2^*-q+2}$ temos que

$$\frac{1}{m'} + \frac{1}{m} = \frac{2^*-q+2}{2^*} + \frac{q-2}{2^*} = 1.$$

Assim, pela desigualdade de Hölder (ver Teorema A.1.1), obtém-se que:

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |u|^{2z+q}dx &= \int_\Omega |u|^{2z+2-2+q}dx = \int_\Omega |u|^{2(z+1)}|u|^{q-2}dx\\
&\leq \|u^{2(z+1)}\|_{L^{m'}(\Omega)}\|u^{q-2}\|_{L^m(\Omega)}\\
&= \left(\int_\Omega |u|^{2(z+1)m'}dx\right)^{\frac{1}{m'}}\left(\int_\Omega |u|^{(q-2)m}dx\right)^{\frac{1}{m}}\\
&= \left(\int_\Omega |u|^{\frac{2(z+1)2^*}{2^*-q+2}}dx\right)^{\frac{2^*-q+2}{2^*}}\left(\int_\Omega |u|^{2^*}dx\right)^{\frac{q-2}{2^*}}\\
&= \left(\int_\Omega |u|^{\frac{2(z+1)2^*}{2^*-q+2}}dx\right)^{\frac{2^*-q+2}{2^*}\frac{2(z+1)}{2(z+1)}}\left(\int_\Omega |u|^{2^*}dx\right)^{\frac{q-2}{2^*}}\\
&= \|u\|^{2(z+1)}_{L^{\frac{2(z+1)2^*}{2^*-q+2}}(\Omega)}\|u\|^{(q-2)}_{L^{2^*}(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Dessa maneira,

$$\int_\Omega |u|^{2z+q}dx \leq \|u\|^{2(z+1)}_{L^{\frac{2(z+1)2^*}{2^*-q+2}}(\Omega)}\|u\|^{(q-2)}_{L^{2^*}(\Omega)}. \tag{3.47}$$

Além disso, pelo Teorema B.1.1, existe uma constate $C = C(p, 2^*, n, \Omega)$ tal que

$$\|u^{z+1}\|_{L^{2^*}(\Omega)} \leq C\|\nabla(u^{z+1})\|_{L^2(\Omega)} \Longrightarrow \left(\int_\Omega |u|^{2^*(z+1)}dx\right)^{\frac{(n-2)}{n}} \leq C\int_\Omega |\nabla(u^{z+1})|^2 dx. \quad (3.48)$$

Utilizando as desigualdades (3.46), (3.47) e (3.48) teremos

$$\begin{aligned} \|u\|^{2(z+1)}_{L^{2^*(z+1)}(\Omega)} &= \left(\int_\Omega |u|^{\frac{2n(z+1)}{n-2}}dx\right)^{\frac{n-2}{n}} \leq C\int_\Omega |\nabla(u^{z+1})|^2 dx \\ &\leq \frac{\lambda CL(z+1)^2}{(2z+1)G_0}\int_\Omega |u|^{2z+q}dx \leq \frac{\lambda CL(z+1)^2}{(2z+1)G_0}\|u\|^{2(z+1)}_{L^{\frac{2(z+1)2^*}{2^*-q+2}}(\Omega)}\|u\|^{(q-2)}_{L^{2^*}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Desse modo,

$$\|u\|_{L^{2^*(z+1)}(\Omega)} \leq \left[\frac{\lambda CL(z+1)^2}{(2z+1)G_0}\right]^{\frac{1}{2(z+1)}}\|u\|_{L^{\frac{2(z+1)2^*}{2^*-q+2}}(\Omega)}\|u\|^{\frac{(q-2)}{2(z+1)}}_{L^{2^*}(\Omega)}. \quad (3.49)$$

Agora, para cada $j \in \mathbb{N}$, defina $z_j = \left(\frac{2^*-q+2}{2}\right)^j - 1$. Então,

$$\frac{2(z_j+1)2^*}{2^*-q+2} = 2^*(z_{j-1}+1) \quad (3.50)$$

e

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^{2^*(z_j+1)}(\Omega)} &\leq \left[\frac{\lambda LC(z_j+1)^2}{(2z_j+1)G_0}\right]^{\frac{1}{2(z_j+1)}}\|u\|^{\frac{(q-2)}{2(z_j+1)}}_{L^{2^*}(\Omega)}\|u\|_{L^{2^*(z_{j-1}+1)}(\Omega)} \quad (3.51) \\ &\leq \left[\prod_{j=1}^n\left(\frac{\lambda LC(z_j+1)^2}{(2z_j+1)G_0}\right)^{\frac{1}{2(z_j+1)}}\right]\|u\|^{1+\frac{(q-2)}{2}\sum_{j=1}^n\frac{1}{z_j+1}}_{L^{2^*}(\Omega)}. \quad (3.52) \end{aligned}$$

De fato, para provar a equação (3.50) basta observar que

$$\begin{aligned} \frac{2(z_j+1)2^*}{2^*-q+2} &= \frac{2}{2^*-q+2}\left(\frac{2^*-q+2}{2}\right)^j 2^* \\ &= \frac{2}{2^*-q+2}\left[\left(\left(\frac{2^*-q+2}{2}\right)^{j-1}-1\right)\left(\frac{2^*-q+2}{2}\right)+\left(\frac{2^*-q+2}{2}\right)\right]2^* \\ &= 2^*(z_{j-1}+1). \end{aligned}$$

Quanto à prova de (3.51) e (3.52) basta utilizar a desigualdade (3.49) e a equação (3.50).

Observemos que:

1) $\lim_{n\longrightarrow\infty}\prod_{j=1}^n C^{\frac{1}{2(z_j+1)}} = C^{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{2^*-q}\right)}$, pois

$$\begin{aligned} \lim_{n\longrightarrow\infty}\prod_{j=1}^n C^{\frac{1}{2(z_j+1)}} &= \lim_{n\longrightarrow\infty} C^{\sum_{j=1}^n\frac{1}{2(z_j+1)}} = C^{\sum_{j=1}^\infty\frac{1}{2(z_j+1)}} \\ &= C^{\sum_{j=1}^\infty\frac{2^{(j-1)}}{(2^*-q+2)^j}} = C^{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^\infty\left(\frac{2}{2^*-q+2}\right)^j} \\ &= C^{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{2^*-q}\right)}. \end{aligned}$$

2) $\lim_{n\longrightarrow\infty}\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\lambda L}{G_0}\right)^{\frac{1}{2(z_j+1)}} = (\lambda L G_0^{-1})^{\frac{1}{2^*-q}}$ a prova dessa igualdade é análoga a feita no item 1).

3) $\prod_{j=1}^{\infty}\left[\frac{(z_j+1)^2}{(2z_j+1)}\right]^{\frac{1}{2(z_j+1)}} < \infty$. Com efeito, como $\prod_{j=1}^{\infty}\left[\frac{(z_j+1)^2}{(2z_j+1)}\right]^{\frac{1}{2(z_j+1)}} \leq \prod_{j=1}^{\infty}\left[(z_j+1)\right]^{\frac{1}{(z_j+1)}}$, $z_j+1 = \left(\frac{2^*-q+2}{2}\right)^j = \beta^j$, para $\beta := \frac{2^*-q+2}{2}$, e

$$\prod_{j=1}^{\infty}(\beta^j)^{\frac{1}{\beta^j}} = \prod_{j=1}^{\infty} e^{ln(\beta^j)^{\frac{1}{\beta^j}}} = \prod_{j=1}^{\infty} e^{\frac{j}{\beta^j}ln(\beta)} = e^{ln\beta\sum_{j=0}^{\infty}\frac{j}{\beta^j}}.$$

Considere $b_j = \frac{(\sqrt[j]{j})^j}{\beta^j}$, então

$$\lim_{j\longrightarrow\infty}\sqrt[j]{b_j} = \lim_{j\longrightarrow\infty}\frac{\sqrt[j]{j}}{\beta} = \frac{1}{\beta} < 1.$$

Assim, a série $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{j}{\beta^j}$ é convergente, ou seja, existe $m > 0$ tal que $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{j}{\beta^j} = m$. Portanto,

$$\prod_{j=1}^{\infty}\left[\frac{(z_j+1)^2}{(2z_j+1)}\right]^{\frac{1}{2(z_j+1)}} < \infty.$$

Agora, considerando

$$C_1 = C^{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{2^*-q}\right)}\lim_{n\longrightarrow\infty}\prod_{j=1}^{n}\left[\frac{(z_j+1)^2}{(2z_j+1)}\right]^{\frac{1}{2(z_j+1)}}$$

e fazendo $n \longrightarrow \infty$ em (3.52) obtemos que

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq \lim_{n\longrightarrow\infty}\prod_{j=1}^{n}\left(\lambda L C G_0^{-1}\right)^{\frac{1}{2(z_j+1)}}\left(\frac{(z_j+1)^2}{(2z_j+1)}\right)^{\frac{1}{2(z_j+1)}}\|u\|_{L^{2^*}(\Omega)}^{1+\frac{q-2}{2}\sum_{j=1}\frac{1}{z_j+1}}\\ &= C_1(\lambda L G_0^{-1})^{\frac{1}{2^*-q}}\|u\|_{L^{2^*}(\Omega)}^{\frac{2^*-2}{2^*-q}}.\end{aligned}$$

□

Agora, apresentaremos o principal resultado desta seção, que é exposto e demonstrado em Cerda e Iturriaga [9].

Teorema 3.2.1. *Suponha que H1), H2), H3) são satisfeitas. Então, o problema (3.3) possui pelo menos uma solução não trivial desde que o parâmetro $\lambda > 0$ seja suficientemente grande.*

Demonstração. Seja u_λ a solução do problema (3.12) dada no Teorema 3.1.1. Então, pela Observação 3.1.1 e a desigualdade (3.37), temos que

$$0 < \beta_\lambda \leq c_\lambda \leq r(t_0),$$

sendo β_λ e $r(t_0)$ dados no Lema 3.1.1 e em (3.40), respectivamente. Ou seja,

$$c_1\lambda^{\frac{-2}{q-2}} \leq c_\lambda \leq c_2\lambda^{\frac{-2}{q-2}}, \tag{3.53}$$

onde

$$c_1 = \frac{G_0}{4}\left(\frac{qG_0}{4LC}\right)^{\frac{2}{q-2}} \text{ e } c_2 = \frac{\gamma_0}{2}\left(\frac{\gamma_0 p}{m_0 k_0^{p-q} q\|v\|^q_{L^q(\Omega_0)}}\right)^{\frac{2}{q-2}}.$$

Observe que, integrando por partes obtemos

$$\int_0^{|\nabla u_\lambda|^2} t a_R'(t)dt = a_R(|\nabla u_\lambda|^2)|\nabla u_\lambda|^2 - \int_0^{|\nabla u_\lambda|^2} a_R(t)dt. \tag{3.54}$$

Além disso, como u_λ é solução do problema auxiliar (3.12), temos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \lambda\psi(x,u_\lambda)dx &= \int_\Omega -div(a_R(|\nabla u_\lambda|^2)\nabla u_\lambda)u_\lambda\\ &= \int_\Omega a_R(|\nabla u_\lambda|^2)|\nabla u_\lambda|^2 dx.\end{aligned}$$

Assim, considerando $D = \{x \in \Omega; u_\lambda \geq k_0\}$, $E = \{x \in \Omega; 0 \leq u_\lambda \leq k_0\}$ e utilizando a equação (3.54) obtemos

$$\begin{aligned}c_\lambda &= I_\lambda(u_\lambda) = \frac{1}{2}\int_\Omega A_R(|\nabla u_\lambda|^2)dx - \lambda\int_\Omega \Psi(x,u_\lambda)dx\\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega A_R(|\nabla u_\lambda|^2)dx - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega [q\Psi(x,u_\lambda) - \psi(x,u_\lambda)u_\lambda + \psi(x,u_\lambda)u_\lambda]dx\\
&= \frac{1}{2q}\int_\Omega [qA_R(|\nabla u_\lambda|^2) - 2\lambda\psi(x,u_\lambda)u_\lambda]dx - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega [q\Psi(x,u_\lambda) - \psi(x,u_\lambda)u_\lambda]dx\\
&= \frac{1}{2q}\int_\Omega \left[q\left(\int_0^{|\nabla u_\lambda|^2} a_R(t)dt\right) - 2a_R(|\nabla u_\lambda|^2)|\nabla u_\lambda|^2 dx\right] - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega [q\Psi(x,u_\lambda) - \psi(x,u_\lambda)u_\lambda]dx\\
&= \frac{(q-2)}{2q}\int_\Omega a_R(|\nabla u_\lambda|^2)|\nabla u_\lambda|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega\int_0^{|\nabla u_\lambda|^2} t a_R'(t)dtdx\\
&\quad -\frac{\lambda}{q}\int_E [qF(x,u_\lambda) - f(x,u_\lambda)u_\lambda]dx - \frac{\lambda}{q}\int_D [q\Psi(x,u_\lambda) - \psi(x,u_\lambda)u_\lambda]dx\\
&= \frac{(q-2)}{2q}\int_\Omega a_R(|\nabla u_\lambda|^2)|\nabla u_\lambda|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega\int_0^{|\nabla u_\lambda|^2} t a_R'(t)dtdx\\
&\quad -\frac{\lambda}{q}\int_E [qF(x,u_\lambda) - f(x,u_\lambda)u_\lambda]dx\\
&\quad -\frac{\lambda}{q}\int_D [k_0^{1-q} sgn(u_\lambda)f(x,sng(u_\lambda)k_0)u_\lambda^q - k_0^{1-q} sgn(u_\lambda)f(x,sgn(u_\lambda)k_0)u_\lambda^q]dx.\end{aligned}$$

Desse modo, por H3), obtemos que

$$\begin{aligned}c_\lambda &\geq \frac{(q-2)}{2q}\int_\Omega a_R(|\nabla u_\lambda|^2)|\nabla u_\lambda|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega\int_0^{|\nabla u_\lambda|^2} t a_R'(t)dtdx\\
&\geq \frac{(q-2)}{2q}\int_\Omega a_R(|\nabla u_\lambda|^2)|\nabla u_\lambda|^2 dx\\
&\geq \frac{(q-2)G_0}{2q}\int_\Omega |\nabla u_\lambda|^2 dx\\
&= \frac{(q-2)G_0}{2q}\|u_\lambda\|^2_{H_0^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\|u_\lambda\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leq c_\lambda \frac{2q}{(q-2)G_0}. \tag{3.55}$$

Dessa forma, teremos que

$$\|u_\lambda\|^2_{H^1_0(\Omega)} = O(c_\lambda) \text{ quando } \lambda \longrightarrow \infty.$$

Agora, note que, pelo Lema 3.2.2 e utilizando as desigualdades (3.55), (3.53) e Teorema B.1.1, temos

$$\begin{aligned}
\|u_\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq C\left(\lambda L G_0^{-1}\right)^{\frac{1}{2^*-q}} \|u_\lambda\|_{H^1_0(\Omega)}^{\frac{2^*-2}{2^*-q}} \\
&\leq C\left(\lambda L G_0^{-1}\right)^{\frac{1}{2^*-q}} \left(c_\lambda \frac{2q}{(q-2)G_0}\right)^{\frac{2^*-2}{(2^*-q)2}} \\
&\leq C_2 \lambda^{\frac{-1}{q-2}},
\end{aligned}$$

onde

$$C_2 = C(LG_0^{-1})^{\frac{1}{2^*-q}} \left(\frac{2q}{(q-2)G_0}\right)^{\frac{2^*-2}{(2^*-q)2}}.$$

Ou seja,

$$\|u_\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} = O(\lambda^{\frac{-1}{q-2}}) \text{ quando } \lambda \longrightarrow \infty.$$

Além disso, pela Observação 3.0.3 temos que $|\psi(x, u_\lambda)| \leq L|u_\lambda|^{q-1}$. Desse modo,

$$\begin{aligned}
\|\lambda\psi\|_{L^\infty(\Omega)} &= \lambda\|\psi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \lambda L \|u_\lambda\|^{q-1}_{L^\infty(\Omega)} \\
&\leq \lambda L \left(C_2 \lambda^{\frac{-1}{q-2}}\right)^{q-1} = L C_2^{\frac{-(q-1)}{(q-2)}} \lambda^{\frac{-1}{q-2}},
\end{aligned}$$

isto é, $\lambda\psi \in L^\infty(\Omega)$ (e assim, $\lambda\psi$ é limitada) e

$$\|\lambda\psi\|_{L^\infty(\Omega)} = O(\lambda^{\frac{-1}{q-2}}) \text{ quando } \lambda \longrightarrow \infty. \tag{3.56}$$

Além disso, como u_λ é solução de (3.12) temos

$$-div(a_R(|\nabla u_\lambda|^2)\nabla u_\lambda) - \lambda\psi(x, u_\lambda) = 0$$

em Ω e utilizando a aplicação $\mathcal{G} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada na equação (3.44), temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left(\mathcal{G}(\nabla u_\lambda).\nabla v - \lambda\psi(x, u_\lambda)v\right) dx &= \int_\Omega (-div(\mathcal{G}(\nabla u_\lambda)) - \lambda\psi(x, u_\lambda))v dx \\
&= \int_\Omega (-div(a_R(|\nabla u_\lambda|^2)\nabla u_\lambda) - \lambda\psi(x, u_\lambda))v dx. \\
&= 0
\end{aligned}$$

Assim, pelo Lema 3.2.1 temos que $u_\lambda \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ e

$$\|u_\lambda\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq O(\gamma, k, \Omega, \|\lambda\psi(\cdot, u_\lambda)\|_{L^\infty(\Omega)}).$$

Desse modo, por (3.56), obtemos que

$$\|u_\lambda\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} = O(\lambda^{\frac{-1}{q-2}}) \text{ quando } \lambda \longrightarrow \infty.$$

Portanto, existe $\lambda_0 > 0$ tal que

$$\lambda > \lambda_0 \Longrightarrow \|u_\lambda\|_{C^0(\overline{\Omega})} \leq k_0 \text{ e } \|\nabla u_\lambda\|_{C^0(\overline{\Omega})} \leq R.$$

Dessa maneira, obtemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \langle I'_\lambda(u_\lambda), v\rangle \\ &= \int_\Omega [a_R(|\nabla u_\lambda|^2)\nabla u_\lambda.\nabla v - \lambda\psi(x,u_\lambda)v]dx \\ &= \int_\Omega [a(|\nabla u_\lambda|^2)\nabla u_\lambda.\nabla v - \lambda f(x,u_\lambda)v]dx \\ &= \int_\Omega [-div(a(|\nabla u_\lambda|^2)\nabla u_\lambda) - \lambda f(x,u_\lambda)]vdx, \end{aligned}$$

para toda $v \in H_0^1(\Omega)$. Ou seja, u_λ é solução fraca do problema (3.3), finalizando assim a prova desse teorema. □

Observação 3.2.2. *A solução do problema (3.3) dada pelo Teorema 3.2.1 é não negativa, pois é obtida através do Teorema 3.1.1.*

4 PROBLEMA DE VALOR DE FRONTEIRA A PARTIR DA VARIEDADE DE NEHARI

Neste capítulo, abordaremos um problema de equações quase lineares, mais especificamente, o problema que trabalharemos aqui (utilizando como base o artigo de Lorca e Ubilla [8]) é dado por

$$\begin{cases} -div(a(|\nabla u|)\nabla u) = \lambda f(u), & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

sendo Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^n$ de modo que $\partial\Omega \in C^{1,1}$, $\lambda > 0$ é um parâmetro suficientemente grande e as funções contínuas $a : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ e $f : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty)$ são tais que, para $R > 0$ fixado, tem-se:

F1) Existem $C > 0$ e $1 < q < \frac{n+2}{n-2}$ de modo que

$$u^q \leq f(u) \leq Cu^q, \text{ para todo } u \in [0, R]. \tag{4.2}$$

F2) Existe $\sigma > 2$ tal que

$$\sigma F(u) \leq uf(u), \text{ para todo } u \in [0, R], \tag{4.3}$$

sendo $F(u) := \int_0^u f(s)ds$.

F3) A função $\frac{f(u)}{u}$ é crescente no intervalo $[0, R]$.

F4) A função a é não crescente, $a(0) = 1$, $a(t) \geq a(R) > 0$, para todo $t \in [0, R]$ e $a \in C^1([0, R]; (0, \infty))$.

Para abordar o problema (4.1), utilizaremos uma abordagem variacional sobre um problema auxiliar gerado ao introduzir funções truncamento, denotadas por g e a_R, no problema original, e como principal ferramenta a variedade de Nehari, denotada por N. Mais especificamente, verificaremos a existência de soluções fracas do problema (4.1) estudando como o funcional J_λ age sobre a variedade de Nehari e sobre um determinado subconjunto $S(\lambda)$ de $N \cap W^{2,n+1}(\Omega)$ (que definiremos na próxima seção), pois como veremos no decorrer deste capítulo: o subconjunto $S(\lambda)$ possui a propriedade de ser invariante sobre um determinado operador T ou alguma de suas iterações; $S(\lambda)$ é limitado em $W^{2,n+1}(\Omega)$, nos possibilitando provar que o funcional $J_\lambda|_{S(\lambda)}$ atinge seu ínfimo em alguma função $u \in S(\lambda)$ que, posteriormente, provaremos ser uma solução do problema original.

Com relação as condições expostas acima, ressaltamos que: a condição F1) é necessária para garantir que o conjunto $S(\lambda)$ é não vazio e que o operador T mencionado acima estará bem definido; para cada $u \in H_0^1(\Omega)$ não negativa, as condições F1), F2), F3) e F4) garantem a existência de um único $\alpha > 0$ que é o máximo da função $t \in (0, \infty) \longmapsto$

$J_\lambda(tu)$, sendo J_λ o funcional associado ao problema auxiliar, e tal que αu pertence a variedade de Nehari; as condições F1) e F4) são utilizadas para mostrar que o funcional $J_\lambda|_{S(\lambda)}$ atinge seu ínfimo em alguma função $u \in S(\lambda)$; e as condições F1) juntamente com a F2) são necessárias para garantir que o ínfimo do funcional J_λ sobre a variedade de Nehari satifaz

$$\inf_{u \in N} J_\lambda(u) \geq C a_R(R)^{\frac{q+1}{q-1}} \lambda^{\frac{-2}{q-1}}. \tag{4.4}$$

Além dos motivos para considerarmos as hipóteses F1), F2), F3) e F4) apresentadas anteriormente, destacamos que devido ao fato das condições de crescimento serem consideradas apenas em uma vizinhança da origem, necessitamos introduzir um problema auxiliar. Para isso, definimos as funções truncamento a_R e g por

$$a_R(t) := \begin{cases} a(t), & \text{se } 0 \leq t \leq R, \\ a(R), & \text{se } t \geq R, \end{cases} \tag{4.5}$$

e

$$g(t) := \begin{cases} 0, & \text{se } t \leq 0, \\ f(t), & \text{se } 0 \leq t \leq R, \\ \frac{f(R)}{R^q} t^q, & \text{se } t \geq R, \end{cases} \tag{4.6}$$

e as aplicamos no problema original, gerando o seguinte problema auxiliar:

$$\begin{cases} -div(a_R(|\nabla u|)\nabla u) = \lambda g(u), & \text{sobre } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.7}$$

Assim, as soluções fracas do problema (4.7) são as funções $u \in H_0^1(\Omega)$ que satisfazem

$$\int_\Omega a_R(|\nabla u|)\nabla u.\nabla v - \lambda \int_\Omega g(u)v = 0, \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega), \tag{4.8}$$

e, portanto, o funcional $J_\lambda : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ associado ao problema (4.7) é dado por

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega A_R(|\nabla u|^2)dx - \lambda \int_\Omega G(u)dx, \tag{4.9}$$

onde

$$A_R(t) = \int_0^t a_R(\sqrt{s})ds \quad \text{e} \quad G(u) = \int_0^u g(s)ds. \tag{4.10}$$

A seguir, apresentaremos alguns casos particulares do problema (4.1) e algumas observações sobre o funcional J_λ e as funções a_R e g.

Exemplo 4.0.1. *Sejam $2 < q < 2^* - 1$, $a(t) = 1$, para todo $t \geq 0$, $f(s) = s^q + h(s)$, para todo $s \in \mathbb{R}$, e $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que*

$$\lim_{u \longrightarrow 0} \frac{h(u)}{u} = 0 \tag{4.11}$$

e satisfaz as condições F2) e F3). Então, um caso particular do problema (4.1) é dado por

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda(u^q + h(u)), & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.12}$$

Além disso, temos que um exemplo da função h é dado por $h(u) = u^r$, para $r > q$.

Exemplo 4.0.2. *Um caso particular do problema (4.1), que envolve o operador de curvatura média, é dado por*

$$\begin{cases} -div\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = \lambda |u|^{q-1}u, & em\ \Omega, \\ u = 0, & sobre\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.13}$$

para o qual consideramos $2 < q < 2^* - 1 := \frac{n+2}{n-2}$, $a(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ *e* $f(s) = |s|^{q-1}s$ *em (4.1) , para todo* $t \geq 0$ *e* $s \in \mathbb{R}$.

Observação 4.0.1. $J_\lambda \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$, *com*

$$\langle J'_\lambda(u), h\rangle = \int_\Omega a_R(|\nabla u|)\nabla u.\nabla h dx - \lambda \int_\Omega g(u)h dx.$$

A prova desse fato é feita de forma similar à da Proposição 3.0.1.

Observação 4.0.2. *A partir das condições F1), F2), F3) e F4) temos que:*

M1) *Existem* $C > 0$ *e* $1 < q < \frac{n+2}{n-2}$ *de modo que*

$$u^q \leq g(u) \leq Cu^q, \text{ para todo } u \in [0, \infty). \tag{4.14}$$

M2) *Existe* $\sigma > 2$ *tal que*

$$\sigma G(u) \leq ug(u), \text{ para todo } u \in \mathbb{R}, \tag{4.15}$$

M3) *A função* $\frac{g(u)}{u}$ *é crescente em* $[0, \infty)$.

M4) *A função* a_R *é não crescente,* $a_R(0) = 1$, $a_R(t) \geq a_R(R) > 0$, *para todo* $t \in [0, \infty)$ *e* $a_R \in C^1([0, \infty); (0, \infty))$,

Como mencionamos anteriormente, a principal ferramenta utilizada para verificar a existência de soluções fracas do problema (4.1) será a variedade de Nehari, que é definida por

$$N := \{u \in H_0^1(\Omega); u \neq 0, \langle J'_\lambda(u), u\rangle = 0\}, \tag{4.16}$$

onde

$$\langle J'_\lambda(u), u\rangle := \int_\Omega (a_R(|\nabla u|)|\nabla u|^2 - \lambda g(u)u)dx. \tag{4.17}$$

4.1 ESTIMATIVAS DAS H_0^1 - NORMA E $W^{2,n+1}$ - NORMA

Nesta seção, apresentaremos estimativas da H_0^1 - norma e $W^{2,n+1}$ - norma de algumas funções $u_\lambda \in C_c^\infty(\Omega) \cap N$. A seguir, apresentaremos um lema que nos auxiliará na demonstração do principal resultado desta seção.

Lema 4.1.1. *Suponha que M1), M2), M3) e M4) são válidas. Então, para qualquer* $u \in H_0^1(\Omega) - \{0\}$ *tal que* $u \geq 0$*, existe uma única constante* $\alpha_0 = \alpha_0(u) > 0$ *tal que* $\alpha_0 u \in N$*. Além disso, para* $\alpha > 0$*, o máximo da aplicação* $H(\alpha) = J_\lambda(\alpha u)$ *é atingido em* α_0*.*

Demonstração. Seja $u \in H_0^1(\Omega) - \{0\}$, com $u \geq 0$, fixada. Consideremos a função $H : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $H(\alpha) = J_\lambda(\alpha u)$. Então, temos que

$$H'(\alpha) = 0 \Longleftrightarrow \alpha u \in N, \tag{4.18}$$

pois

$$\begin{aligned}
\langle J_\lambda'(\alpha u), \alpha u\rangle &= \int_\Omega [a_R(|\nabla(\alpha u)|)|\nabla \alpha u|^2 - \lambda g(\alpha u)\alpha u]dx \\
&= \alpha\left[\int_\Omega [a_R(|\nabla(\alpha u)|)\nabla(\alpha u).\nabla u - \lambda g(\alpha u)u]dx\right] \\
&= \alpha\langle J_\lambda'(\alpha u), u\rangle \\
&= \alpha H'(\alpha).
\end{aligned}$$

Além disso, se $H'(\alpha) = 0$ teremos que

$$\int_\Omega a_R(\alpha|\nabla u|)|\nabla u|^2 dx = \lambda \int_\Omega \frac{g(\alpha u)}{\alpha} u dx. \tag{4.19}$$

Assim, utilizando M3) concluímos que $\frac{g(\alpha u)}{\alpha u}$ é crescente, e assim teremos que a função $j(\alpha) := \lambda \int_\Omega \frac{g(\alpha u)}{\alpha} u dx$ é crescente em α. Por outro lado, utilizando M1) e M2) temos que:

i) $H(0) = 0$, pois $H(0) = J_\lambda(0) = 0$.

ii) $H(\alpha) > 0$, para $\alpha > 0$ pequeno.

De fato, sejam $\alpha > 0$. Então, por M1) e M2) temos

$$\begin{aligned}
H(\alpha) &= J_\lambda(\alpha u) = \frac{1}{2}\int_\Omega A_R(|\nabla(\alpha u)|^2)dx - \lambda \int_\Omega G(\alpha u)dx \\
&\geq \frac{1}{2}\int_\Omega A_R(|\nabla(\alpha u)|^2)dx - \frac{\lambda\alpha}{\sigma}\int_\Omega ug(\alpha u)dx \\
&\geq \frac{1}{2}\int_\Omega A_R(|\nabla(\alpha u)|^2)dx - \frac{\lambda C\alpha^{q+1}}{\sigma}\int_\Omega u^{q+1}dx \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \int_0^{|\nabla(\alpha u)|^2} a_R(\sqrt{s})dsdx - \frac{\lambda C\alpha^{q+1}}{\sigma}\|u\|_{L^{q+1}(\Omega)}^{q+1} \\
&\geq \frac{a(R)\alpha^2}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda C\alpha^{q+1}}{\sigma}\|u\|_{L^{q+1}(\Omega)}^{q+1} \\
&= \frac{a(R)\alpha^2}{2}\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - \frac{\lambda C\alpha^{q+1}}{\sigma}\|u\|_{L^{q+1}(\Omega)}^{q+1}.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Poncaré,

$$\begin{aligned}
H(\alpha) &\geq \frac{a(R)\alpha^2}{2}\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - \frac{\lambda C\alpha^{q+1}}{\sigma}\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{q+1} \\
&= \left(\frac{a(R)}{2} - \frac{\lambda C\alpha^{q-1}}{\sigma}\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{q-1}\right)\alpha^2\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2.
\end{aligned}$$

Desse modo, para todo $\alpha > 0$ tal que $\alpha < \left(\frac{a(R)\sigma}{2\lambda C\|u\|^{q-1}_{H_0^1(\Omega)}}\right)^{\frac{1}{q-1}}$, obtemos

$$H(\alpha) > \left(\frac{a(R)}{2} - \frac{\lambda C}{\sigma}\left(\frac{a(R)\sigma}{2\lambda C\|u\|^{q-1}_{H_0^1(\Omega)}}\right)\|u\|^{q-1}_{H_0^1(\Omega)}\right)\alpha^2\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} = 0,$$

e assim provamos o desejado.

iii) $H(\alpha) < 0$, para $\alpha > 0$ grande.

Com efeito, sejam $\alpha > 0$. Então, por M1) e por $a(0) = a_R(0) \geq a_R(t)$ (pois a_R é não crescente em $[0, \infty)$), para todo $t \in [0, \infty)$, tem-se

$$\begin{aligned}
H(\alpha) &= J_\lambda(\alpha u) = \frac{1}{2}\int_\Omega A_R(|\nabla(\alpha u)|^2)dx - \lambda\int_\Omega G(\alpha u)dx \\
&\leq \frac{1}{2}\int_\Omega A_R(|\nabla(\alpha u)|^2)dx - \lambda\int_\Omega\int_0^{\alpha u} s^q ds dx \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega A_R(|\nabla(\alpha u)|^2)dx - \frac{\lambda\alpha^{q+1}}{q+1}\|u\|^{q+1}_{q+1} \\
&\leq \frac{1}{2}\int_\Omega\int_0^{|\nabla(\alpha u)|^2} a(0)dsdx - \frac{\lambda\alpha^{q+1}}{q+1}\|u\|^{q+1}_{q+1} \\
&= \frac{\alpha^2}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda\alpha^{q+1}}{q+1}\|u\|^{q+1}_{q+1} \\
&= \frac{\alpha^2}{2}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \frac{\lambda\alpha^{q+1}}{q+1}\|u\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
H(\alpha) &\leq \frac{\alpha^2}{2}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \frac{\lambda\alpha^{q+1}}{q+1}\|u\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)} \\
&= \left(\frac{1}{2}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \frac{\lambda\alpha^{q-1}}{q+1}\|u\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)}\right)\alpha^2.
\end{aligned}$$

Dessa forma, para todo $\alpha > 0$ tal que $\alpha > \left(\frac{(q+1)\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}}{2\lambda\|u\|^{(q+1)}_{L^{q+1}(\Omega)}}\right)^{\frac{1}{(q-1)}}$ teremos

$$H(\alpha) < \left(\frac{1}{2}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \frac{\lambda}{q+1}\left(\frac{(q+1)\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}}{2\lambda\|u\|_{L^{q+1}(\Omega)}}\right)\|u\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)}\right)\alpha^2 = 0,$$

ou seja, $H(\alpha) < 0$.

Portanto, existe $\alpha_0 = \alpha_0(u)$ ponto máximo de H, e dessa forma, $H'(\alpha_0) = 0$ e $\alpha_0 u \in N$.

Para finalizar, provaremos que $\alpha_0 = \alpha_0(u)$ é único. Suponha, por contradição, que existem dois pontos críticos α_1 e α_2 de H. Considere, sem perda de generalidade, $\alpha_1 < \alpha_2$. Então,

$$\begin{aligned}
\lambda\int_\Omega \frac{g(\alpha_1 u)}{\alpha_1}dx &= \int_\Omega a_R(\alpha_1|\nabla u|)|\nabla u|^2 dx \geq \int_\Omega a_R(\alpha_2|\nabla u|)|\nabla u|^2 dx \\
&= \lambda\int_\Omega \frac{g(\alpha_2 u)}{\alpha_2}dx,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\lambda \int_\Omega \left(\frac{g(\alpha_1 u)}{\alpha_1} u - \frac{g(\alpha_2 u)}{\alpha_2} u \right) dx \geq 0,$$

com $\alpha_1 < \alpha_2$, o que contraria o fato de $j(\alpha) := \lambda \int_\Omega \frac{g(\alpha u)}{\alpha} u dx$ ser crescente em $[0, \infty)$. □

Observação 4.1.1. *No Lema 4.1.1, podemos tomar $u \geq 0$ em quase toda parte em Ω. Mas não podemos ter que $u \leq 0$ em Ω (ou $u \leq 0$ em quase toda parte em Ω).*

Demonstração. De fato, suponha por contradição, que $u \in N$, com $u < 0$ em Ω. Então, por $u < 0$ temos que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |u|^2 dx > 0.$$

Por outro lado, temos que

$$0 = \lambda \int_\Omega g(u) u dx = \int_\Omega a_R(|\nabla u|) |\nabla u|^2 dx \geq a_R(R) \int_\Omega |\nabla u|^2 dx = a_R(R) \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

Logo, $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = 0$. Pela desigualdade de Poincaré (ver Teorema B.1.1), tem-se

$$0 = \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \geq C \|u\|_{L^2(\Omega)}. \tag{4.20}$$

Portanto, $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 0$, que é uma contradição. De modo análogo, é possível provar que não podemos ter $u < 0$ em quase toda parte em Ω. □

Observação 4.1.2. *Dada $u \in N$ temos que*

$$J_\lambda(u) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sigma} \right) \int_\Omega a_R(|\nabla u|) |\nabla u|^2 dx. \tag{4.21}$$

Demonstração. De fato, como $u \in N$ obtemos

$$0 = \langle J'_\lambda(u), u \rangle = \int_\Omega [a_R(|\nabla u|) |\nabla u|^2 - \lambda g(u) u] dx,$$

ou seja,

$$\int_\Omega \lambda g(u) u dx = \int_\Omega a_R(|\nabla u|) |\nabla u|^2 dx. \tag{4.22}$$

Assim, utilizando a equação (4.22), o fato de a_R ser não crescente e M2) teremos que

$$\begin{aligned}
J_\lambda(u) &= \frac{1}{2} \int_\Omega A_R(|\nabla u|^2) dx - \lambda \int_\Omega G(u) dx \\
&\geq \frac{1}{2} \int_\Omega A_R(|\nabla u|^2) dx - \frac{\lambda}{\sigma} \int_\Omega u g(u) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_\Omega A_R(|\nabla u|^2) dx - \frac{1}{\sigma} \int_\Omega a_R(|\nabla u|) |\nabla u|^2 dx \\
&= \frac{1}{2} \int_\Omega \int_0^{|\nabla u|^2} a_R(\sqrt{s}) ds dx - \frac{1}{\sigma} \int_\Omega a_R(|\nabla u|) \int_0^{|\nabla u|^2} ds dx \\
&\geq \frac{1}{2} \int_\Omega \int_0^{|\nabla u|^2} a_R(|\nabla u|) ds dx - \frac{1}{\sigma} \int_\Omega a_R(|\nabla u|) \int_0^{|\nabla u|^2} ds dx \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sigma} \right) \int_\Omega a_R(|\nabla u|) \int_0^{|\nabla u|^2} ds dx \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sigma} \right) \int_\Omega a_R(|\nabla u|) |\nabla u|^2 dx,
\end{aligned}$$

e assim provamos a desigualdade (4.21). □

Lema 4.1.2. *Dada $u \in N$, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$J_\lambda(u) \geq C a_R(R)^{\frac{q+1}{q-1}} \lambda^{\frac{-2}{q-1}}. \tag{4.23}$$

Em particular,

$$\inf_{u \in N} J_\lambda(u) \geq C a_R(R)^{\frac{q+1}{q-1}} \lambda^{\frac{-2}{q-1}}. \tag{4.24}$$

Demonstração. Observe inicialmente que

$$1 < q + 1 < \frac{n+2}{n-2} + 1 = 2^*. \tag{4.25}$$

Assim, dada $u \in N$ podemos utilizar o Teorema B.1.1 juntamente com a hipótese M1) para obter que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega a_R(|\nabla u|)|\nabla u|^2 dx &= \int_\Omega \lambda g(u) u dx \leq \lambda C \int_\Omega |u|^{q+1} dx \\
&= \lambda C \|u\|^{(q+1)}_{L^{(q+1)}(\Omega)} \leq \lambda C_1 \|\nabla u\|^{(q+1)}_{L^2(\Omega)} \\
&= \lambda C_1 \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{(q+1)}{2}} \\
&= \lambda C_1 \left(\int_\Omega \frac{a_R(|\nabla u|)}{a_R(|\nabla u|)} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{(q+1)}{2}} \\
&\leq \frac{\lambda C_1}{a_R(R)^{\frac{(q+1)}{2}}} \left(\int_\Omega a_R(|\nabla u|)|\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{(q+1)}{2}}.
\end{aligned}$$

Desse modo,

$$\int_\Omega a_R(|\nabla u|)|\nabla u|^2 dx \geq \left(\frac{a_R(R)^{\frac{q+1}{2}}}{\lambda C_1} \right)^{\frac{2}{q-1}} \geq C_1^{\frac{-2}{q-1}} a_R(R)^{\frac{q+1}{q-1}} \lambda^{\frac{-2}{q-1}}. \tag{4.26}$$

Assim, aplicando a equação (4.21) em (4.26) obtemos

$$J_\lambda(u) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sigma} \right) C_1^{\frac{-2}{q-1}} a_R(R)^{\frac{q+1}{q-1}} \lambda^{\frac{-2}{q-1}}, \text{ para todo } u \in N,$$

e pela definição de ínfimo concluímos que

$$\inf_{u \in N} J_\lambda(u) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sigma} \right) C_1^{\frac{-2}{q-1}} a_R(R)^{\frac{q+1}{q-1}} \lambda^{\frac{-2}{q-1}}. \tag{4.27}$$

$\square$

Dada $u \in N \cap C^0(\overline{\Omega})$, consideremos o problema

$$\begin{cases} L_u w = \lambda g(u), & \text{em } \Omega, \\ w = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.28}$$

sendo L_u o operador diferencial parcial definido por

$$L_u w := -div(a_R(|\nabla u|)\nabla w) \tag{4.29}$$

para $w \in H_0^1(\Omega)$. Como $u \in C^0(\overline{\Omega})$, existe uma constante $C_1 > 0$ tal que $|u(x)| < C_1$, para todo $x \in \Omega$. Observe que, dado $\lambda > 0$ temos, utilizando M1), que

$$\|\lambda g(u)\|_{L^2(\Omega)}^2 \;=\; \lambda \int_\Omega |g(u)|^2 dx \leq \lambda C^2 \int_\Omega |u|^{2q} dx \leq \lambda C^2 C_1^{2q} \int_\Omega dx < \infty,$$

ou seja, $\lambda g(u) \in L^2(\Omega)$, para todo $\lambda > 0$. Então, pela definição do operador L_u, utilizando o Teorema A.3.1 temos que o problema (4.28) possui uma única solução fraca $w \in H_0^1(\Omega)$. Além disso, como $\lambda g(u) \geq 0$ temos (ver [23], Corolário 3.2, p. 33) que $w \geq 0$.

Observação 4.1.3. *Na definição acima do operador L_u, tomamos u em $N \cap C^0(\overline{\Omega})$ devido a necessidade de garantir que $\lambda g(u) \in L^2(\Omega)$, diferentemente do que é feito em Lorca e Ubilla [8], que tomam u em N.*

A seguir, apresentaremos um lema que nos fornece uma estimativa para a função $\alpha \in (0, \infty) \longmapsto J_\lambda(\alpha w)$. Sendo que, para abordar tal resultado, consultamos Lorca e Ubilla [8] e Coffman e Ziemmer [3].

Lema 4.1.3. *Dada $u \in N \cap C^0(\overline{\Omega})$, seja $w \in H_0^1(\Omega)$ a solução fraca de*

$$L_u w = \lambda g(u). \tag{4.30}$$

Então, para qualquer $\alpha > 0$ temos

$$J_\lambda(\alpha w) \leq J_\lambda(u). \tag{4.31}$$

A igualdade ocorre somente se $\alpha w \in N$ e u é uma solução para o problema (4.7).

Demonstração. Sejam $\alpha > 0$ e $u \in N \cap C^0(\overline{\Omega})$ fixados. Inicialmente provaremos a desigualdade (4.31), para isso utilizaremos algumas propriedades de funções côncavas e convexas. Dados $u, v \in H_0^1(\Omega)$, com $u, v \geq 0$, defina as aplicações $\phi_1, \phi_2 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\phi_1(t) = G(\sqrt{tv^2 + (1-t)u^2}) \text{ e } \phi_2(t) = A_R(tv + (1-t)u).$$

Então, pela condições M3) e M4) temos que

$$\phi_1'(t) = \frac{g(\sqrt{tv^2 + (1-t)u^2})}{\sqrt{tv^2 + (1-t)u^2}}.(v^2 - u^2)$$

e

$$\phi_2'(t) = a_R(\sqrt{tv + (1-t)u})(v - u)$$

são não decrescente e não crescente, respectivamente. Logo, as funções ϕ_1 é convexa e ϕ_2 é côncava (ver [24], Teorema 4, p.110). Desse modo, teremos (ver [24], Teorema 4, p.110) que

$$G(v) = \phi_1(1) \geq \phi_1(0) + \phi_1'(0) = G(u) + (v^2 - u^2)\frac{g(u)}{u}$$

e

$$A_R(v) = \phi_2(1) \leq \phi_2(0) + \phi_2'(0) = A_R(u) - a_R(0)(v-u)$$

Portanto,

$$G(v) \geq G(u) + \frac{(v^2-u^2)}{2}\frac{g(u)}{u} \tag{4.32}$$

e

$$A_R(v) \leq A_R(u) + (v-u)a_R(\sqrt{u}), \tag{4.33}$$

para $u, v \geq 0$. Agora, consideremos

$$h(u) := \begin{cases} \frac{g(u)}{u}, & \text{se } u \neq 0, \\ 0, & \text{se } u = 0, \end{cases} \tag{4.34}$$

e $v = \alpha w$. Desse modo, tem-se

$$J_\lambda(v) - J_\lambda(u) \leq \frac{1}{2}\int_\Omega [vL_u v - uL_u u - \lambda(v^2-u^2)h(u)]dx. \tag{4.35}$$

Com efeito, utilizando a Proposição A.4.2, temos que

$$\int_\Omega uL_u u dx = -\int div(a_R(|\nabla u|)\nabla u)u dx = \int_\Omega a_R(|\nabla u|)|\nabla u|^2 dx, \tag{4.36}$$

e

$$\int_\Omega vL_u v dx = -\int div(a_R(|\nabla u|)\nabla v)v dx = \int_\Omega a_R(|\nabla u|)|\nabla v|^2 dx. \tag{4.37}$$

Desse modo, por (4.32), (4.33), (4.36) e (4.37) obtemos

$$\begin{aligned} J_\lambda(v) - J_\lambda(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega [A_R(|\nabla v|^2) - A_R(|\nabla u|^2)]dx - \lambda\int_\Omega [G(v) - G(u)]dx \\ &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla v|^2 - |\nabla u|^2)a_R(|\nabla u|)dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega (v^2-u^2)h(u)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega (vL_u v - uL_u u)dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega (v^2-u^2)h(u)dx, \end{aligned}$$

e assim provamos a desigualdade (4.35).

Agora, observe que, para $v = \alpha w$, temos que

$$\begin{aligned} L_u v &= L_u(\alpha w) = -div(a_R(|\nabla u|)\nabla(\alpha w)) \\ &= \alpha(-div(a_R(|\nabla u|)\nabla w)) \\ &= \alpha L_u w \\ &= \alpha\lambda g(u), \end{aligned}$$

ou seja, $L_u v = \alpha\lambda g(u)$. Por outro lado, como $u \in N$ temos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega (a_R(|\nabla u|)|\nabla u|^2 - \lambda g(u)u)dx = \int_\Omega \left(uL_u u - \lambda\frac{g(u)}{u}u^2\right)dx \\ &= \int_\Omega (uL_u u - \lambda u^2 h(u))dx. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
J_\lambda(v) - J_\lambda(u) &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega [vL_u v - uL_u u - \lambda(v^2 - u^2)h(u)]dx \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \left[vL_u v - \lambda v^2 h(u)\right] dx - \frac{1}{2}\int_\Omega \left[uL_u u - \lambda u^2 h(u)\right] dx \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \left[vL_u v - \lambda v^2 h(u)\right] dx \\
&= \frac{\lambda}{2}\int_\Omega \left[\alpha v g(u) - v^2 h(u)\right] dx \\
&= \frac{\lambda}{2}\int_\Omega \left[\alpha v u\frac{g(u)}{u} - v^2 h(u)\right] dx \\
&= \frac{\lambda}{2}\int_\Omega [\alpha uv - v^2]h(u)dx,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$J_\lambda(v) - J_\lambda(u) \leq \frac{\lambda}{2}\int_\Omega [\alpha uv - v^2]h(u)dx. \tag{4.38}$$

Agora, provaremos que

$$\alpha^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega uvh(u)dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_\Omega v^2 h(u)dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.39}$$

Com efeito, utilizando desigualdade de Schwartz e a Proposição A.4.2, temos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \alpha\lambda u^2 h(u)dx &= \int_\Omega uL_u v dx = \int_\Omega -div(a_R(|\nabla u|)\nabla v)udx \\
&= \int_\Omega a_R(|\nabla u|)\nabla v.\nabla u dx \\
&= \int_\Omega \left(a_R(|\nabla u|)^{\frac{1}{2}}\nabla v\right).\left(a_R(|\nabla u|)^{\frac{1}{2}}\nabla u\right) dx \\
&\leq \left(\int_\Omega a_R(|\nabla u|)|\nabla v|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega a_R(|\nabla u|)|\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_\Omega -div(a_R(|\nabla u|)\nabla v)vdx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega -div(a_R(|\nabla u|)\nabla u)udx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_\Omega vL_u v dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega uL_u u dx\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Como $u \in N$ temos

$$\int_\Omega uL_u u dx = \int_\Omega \lambda u^2 h(u)dx, \tag{4.40}$$

e assim

$$\int_\Omega \alpha\lambda u^2 h(u)dx \leq \left(\int_\Omega vL_u v dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega uL_u u dx\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.41}$$

$$= \left(\alpha\lambda\int_\Omega uvh(u)dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega \lambda u^2 h(u)dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.42}$$

Dessa forma,

$$\alpha\left(\lambda\int_\Omega u^2 h(u)dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\alpha\lambda\int_\Omega uvh(u)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Multiplicando ambos os lados da desigualdade acima por $(\alpha\lambda\int_\Omega uvh(u)dx)^{\frac{1}{2}}$ obtemos

$$\begin{aligned}\alpha\left(\lambda\int_\Omega u^2h(u)dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\alpha\lambda\int_\Omega uvh(u)dx\right)^{\frac{1}{2}} &\leq \alpha\lambda\int_\Omega uvh(u)dx\\ &= \alpha\lambda\int_\Omega\left(h(u)^{\frac{1}{2}}u\right)\left(h(u)^{\frac{1}{2}}v\right)dx,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\alpha^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega u^2h(u)dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega uvh(u)dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \int_\Omega\left(h(u)^{\frac{1}{2}}u\right)\left(h(u)^{\frac{1}{2}}v\right)dx. \tag{4.43}$$

Pela desigualdade de Schwartz, temos que

$$\int_\Omega\left(h(u)^{\frac{1}{2}}u\right)\left(h(u)^{\frac{1}{2}}v\right)dx \leq \left(\int_\Omega h(u)u^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega h(u)v^2dx\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.44}$$

onde a igualdade ocorre apenas se existe $s\in\mathbb{R}$ tal que $h(u)^{\frac{1}{2}}v = sh(u)^{\frac{1}{2}}u$, ou seja, caso $w = tu$, para algum $t = t(\alpha)\in\mathbb{R}$. Desse modo, obtemos que

$$\alpha^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega u^2h(u)dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega uvh(u)dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_\Omega h(u)u^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega h(u)v^2dx\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.45}$$

onde a igualdade ocorre apenas caso $w = tu$, para algum $t = t(\alpha)\in\mathbb{R}$. E assim, concluímos que a desigualdade (4.39) é válida. Desse modo, aplicando a desigualdade (4.39) em (4.38) obtemos que $J_\lambda(v) - J_\lambda(u)\leq 0$, e portanto, $J_\lambda(\alpha u)\leq J_\lambda(u)$, provando assim a primeira parte do lema.

Para finalizar, provaremos que se $J_\lambda(\alpha_0 w) = J_\lambda(u)$, para algum $\alpha_0 > 0$, então $\alpha_0 u\in N$ e u é solução do problema auxiliar (4.7). Para isso, observe primeiramente que $J_\lambda(\alpha w)\leq J_\lambda(u) = J_\lambda(\alpha_0 w)$, para todo $\alpha > 0$, e assim temos que $J_\lambda(\alpha w)$ atinge seu máximo em α_0, e desse modo, $\langle J'_\lambda(\alpha_0 w), \alpha_0 w\rangle = 0$. Portanto, $\alpha_0 w\in N$.

Agora, note que existe $t\in\mathbb{R}$ tal que $w = tu$. De fato, por (4.45), temos que

$$\int_\Omega[\alpha uv - v^2]h(u)dx = 0$$

somente se $w = tu$, para algum $t = t(\alpha_0)\in\mathbb{R}$. Por outro lado, por (4.38) e (4.39), obtemos

$$0 = J_\lambda(v) - J_\lambda(u)\leq\frac{\lambda}{2}\int_\Omega[\alpha uv - v^2]h(u)dx\leq 0,$$

ou seja,

$$\int_\Omega[\alpha uv - v^2]h(u)dx = 0.$$

Portanto, $w = tu$, para algum $t = t(\alpha_0)\in\mathbb{R}$. Assim, utilizando o fato de w ser solução fraca de (4.30) e substituindo o valor de w obtemos

$$\begin{cases} -div(a_R(|\nabla u|)\nabla tu) = \lambda g(u), & \text{em } \Omega,\\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega.\end{cases} \tag{4.46}$$

Como $u \in N$ temos que

$$\int_{\Omega} a_R(|\nabla u|)|\nabla u|^2 dx = \int_{\Omega} \lambda g(u) u dx = \int_{\Omega} -div(a_R(|\nabla u|)\nabla tu) u dx.$$

Pela Proposição A.4.2 obtemos que

$$\int_{\Omega} a_R(|\nabla u|)|\nabla u|^2 dx = \int_{\Omega} t a_R(|\nabla u|)|\nabla u|^2 dx,$$

implicando que

$$(1-t)\int_{\Omega} a_R(|\nabla u|)|\nabla u|^2 dx = 0. \tag{4.47}$$

Logo, $t = 1$, e desse modo, concluímos que u é solução do problema (4.7). $\square$

Lema 4.1.4. *Existem constantes K e $\widetilde{K}$ tais que, para cada $\lambda > 0$, existe uma função positiva $u = u_\lambda \in C_c^\infty(\Omega) \cap N$ tal que*

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq K\lambda^{-\frac{1}{(q-1)}} \tag{4.48}$$

e

$$\|u\|_{W^{2,n+1}(\Omega)} \leq \widetilde{K}\lambda^{-\frac{1}{(q-1)}}. \tag{4.49}$$

Demonstração. Considere $w \in C_c^\infty(\Omega)$ fixado de modo que $w \geq 0$. Então, pelo Lema 4.1.1 existe $\beta = \beta(\lambda) > 0$ tal que $\beta w \in N$. Desse modo, utilizando o fato de $\beta w \in N$ e que $1 = a_R(0) \geq a(t)$, para todo $t \geq 0$, temos

$$\begin{aligned} \beta^2 \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx &= \int_{\Omega} \beta^2 a_R(0)|\nabla w|^2 dx \geq \int_{\Omega} a_R(\beta|\nabla w|)|\nabla(\beta w)|^2 dx \\ &= \lambda \int_{\Omega} g(\beta w)(\beta w) dx. \end{aligned}$$

Por M1) temos que $|t|^q \leq g(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$, e assim

$$\beta^2 \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx \geq \lambda \beta^{q+1} \int_{\Omega} |w|^{q+1} dx.$$

Portanto,

$$\beta \leq \left(\frac{\|w\|^2_{H_0^1(\Omega)}}{\|w\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)}} \right)^{\frac{1}{(q-1)}} \lambda^{-\frac{1}{(q-1)}}. \tag{4.50}$$

Então, considerando $u = \beta w$, $K \geq \|w\|_{H_0^1(\Omega)}^{\frac{q+1}{q-1}} \|w\|_{L^{q+1}(\Omega)}^{-\frac{q+1}{q-1}}$ e $\widetilde{K} \geq \left(\frac{\|w\|^2_{H_0^1(\Omega)}}{\|w\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)}} \right)^{\frac{1}{(q-1)}} \|w\|_{W^{2,n+1}(\Omega)}$ teremos que

$$\begin{aligned} \|u\|_{H_0^1(\Omega)} &= \beta \|w\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \left(\frac{\|w\|^2_{H_0^1(\Omega)}}{\|w\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)}} \right)^{\frac{1}{(q-1)}} \lambda^{-\frac{1}{(q-1)}} \|w\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\leq K\lambda^{-\frac{1}{(q-1)}} \end{aligned}$$

e

$$\|u\|_{W^{2,n+1}(\Omega)} = \beta \sum_{|\alpha| \leq 2} \|D^\alpha w\|_{L^{n+1}(\Omega)} \leq \widetilde{K}\lambda^{-\frac{1}{(q-1)}}, \tag{4.51}$$

concluindo assim a prova desse lema. $\square$

Observação 4.1.4. *Como observado por Lorca e Ubilla [8], dado $\lambda > 0$ temos, pelo Lema 4.1.4, que existe $u \in C_c^\infty(\Omega) \cap N$ tal que*

$$J_\lambda(u) \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \frac{1}{2}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{K^2}{2}\lambda^{-\frac{2}{(q-1)}}. \tag{4.52}$$

Assim, para $m = m(\Omega, n) \geq \widetilde{K}$, temos que o conjunto

$$S(\lambda) := \Big\{ u \in W^{2,n+1}(\Omega); u \in N \cap C^0(\overline{\Omega}), 0 < \|u\|_{W^{2,n+1}(\Omega)} \leq m\lambda^{-\frac{1}{(q-1)}},$$
$$u \geq 0 \text{ e } J_\lambda(u) \leq \frac{K^2}{2}\lambda^{-\frac{2}{(q-1)}} \Big\}$$

é não vazio.

4.2 EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO

Nesta seção, apresentaremos nosso principal resultado que refere-se à existência de solução fraca do problema (4.1). Para isso, utilizaremos o lema a seguir, apresentado em Lorca e Ubilla [8], que nos fornece uma estimativa da inversa do operador L_u .

Lema 4.2.1. *Sejam Ω uma região com fronteira $C^{1,1}$ e $1 < s_0 < n+1$. Então, para qualquer $\delta > 0$, existe $M = M(\delta)$ tal que se $u \in W^{2,n+1}(\Omega)$ e $\|u\|_{W^{2,n+1}(\Omega)} < \delta$, então o operador L_u age de $W^{2,s}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ para $L^s(\Omega)$, onde $s_0 \leq s \leq n+1$. Além disso, L_u é invertível e sua inversa $L_u^{-1} : L^s(\Omega) \longrightarrow W^{2,s}(\Omega)$ satisfaz $\|L_u^{-1}\| \leq M$.*

Demonstração. Ver [8], Lema 3.3, p.124. □

A partir do que vimos na seção anterior, dado $u \in \mathcal{N}^+$, onde $\mathcal{N}^+ := \{u \in N \cap W^{2,n+1}(\Omega); u \geq 0\}$, existe uma única solução fraca $w \in H_0^1(\Omega)$ do problema (4.28), com $w \geq 0$. Pelo Lema 4.1.1, existe um único $\alpha = \alpha(w) > 0$ tal que $\alpha w \in N$. Assim, considerando $v = \alpha w \geq 0$ teremos que

$$\begin{cases} L_u v = \lambda\alpha g(u), & \text{em } \Omega, \\ v = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.53}$$

onde o operador L_u é definido em (4.29). De fato, como w é solução do problema (4.28), para $h \in H_0^1(\Omega)$, teremos

$$\begin{aligned} \alpha\lambda\int_\Omega g(u)hdx &= \alpha\int_\Omega -div(a_R(|\nabla u|)\nabla w)hdx = \alpha\int_\Omega a_R(|\nabla u|)\nabla w.\nabla hdx \\ &= \int_\Omega a_R(|\nabla u|)\nabla(\alpha w).\nabla hdx = \int_\Omega -div(a_R(|\nabla u|)\nabla v)hdx \\ &= \int_\Omega (L_u v)hdx, \end{aligned}$$

e que $v = 0$ em $\partial\Omega$. Portanto, $v = \alpha w$ é solução de (4.53). Além disso, pelo principio do máximo fraco (ver [23], Teorema 3.1, p. 32), temos que $v \geq 0$.

Agora, provaremos que $v = \alpha w$ é a única solução de (4.53). Considere a aplicação $\beta(u) := \alpha\lambda g(u)$, para $\alpha = \alpha(w) > 0$, $\lambda > 0$ e $u \in \mathcal{N}^+$. Então, $\beta(u) \in L^2(\Omega)$. Assim, dado $u \in \mathcal{N}^+$, pelo Teorema A.3.1, existe uma única solução $v \in H_0^1(\Omega)$ do problema (4.53). Portanto, $v = \alpha w \in N$ é a única solução de (4.53).

Seja $u \in \mathcal{N}^+$ e $v = \alpha w \geq 0$ a solução do problema (4.53). Como $u \in W^{2,n+1}(\Omega)$ e, pelo Teorema B.1.3, $W^{2,n+1}(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega})$, então $u \in C^0(\overline{\Omega})$. Desse modo, existe uma constante $C_1 > 0$ tal que $|u(x)| < C_1$, para todo $x \in \Omega$. Assim, utilizando $M1$), obtemos

$$\begin{aligned}
\|\lambda\alpha g(u)\|_{L^{n+1}(\Omega)} &= \lambda\alpha\left(\int_\Omega |g(u)|^{n+1}dx\right)^{\frac{1}{n+1}} \leq \lambda\alpha C\left(\int_\Omega |u|^{q(n+1)}dx\right)^{\frac{1}{n+1}} \\
&\leq \lambda\alpha C C_1^q\left(\int_\Omega dx\right)^{\frac{1}{(n+1)}} < \infty.
\end{aligned}$$

Desse modo, $L_u v = \lambda\alpha g(u) \in L^{n+1}(\Omega)$. Pelo Lema 4.2.1, temos que $v = L_u^{-1}(L_u v) = L_u^{-1}(\lambda\alpha g(u)) \in W^{2,n+1}(\Omega)$. Portanto, temos que o operador

$$\begin{aligned}
T : \mathcal{N}^+ &\longrightarrow \mathcal{N}^+ \\
u &\longmapsto v,
\end{aligned}$$

onde $\mathcal{N}^+ := \{u \in N \cap W^{2,n+1}(\Omega); u \geq 0\}$, está bem definido. Além disso, teremos $T^j(\mathcal{N}^+) \subset \mathcal{N}^+$, para $j \geq 1$.

Ressaltamos que, como observado em Lorca e Ubilla [8], uma estimativa para α dado no problema (4.53) é

$$\alpha \leq (2C)^{\frac{-1}{2}} a_R(R)^{-1}. \tag{4.54}$$

Com efeito, por (4.40) e (4.41) temos

$$\alpha\int_\Omega uL_u u dx = \int_\Omega \alpha\lambda u^2 h(u)dx \leq \left(\int_\Omega vL_u v dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega uL_u u dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

logo

$$\alpha\left(\int_\Omega uL_u u dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_\Omega vL_u v dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.55}$$

Por outro lado, como a_R é decrescente e satisfaz $a_R(t) \geq a(R)$ e $a(0) = 1$ obtemos que

$$\begin{aligned}
J_\lambda(u) &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega A_R(|\nabla u|^2)dx = \frac{1}{2}\int_\Omega\int_0^{|\nabla u|^2} a_R(\sqrt{s})dsdx \\
&\leq \frac{1}{2}\int_\Omega\int_0^{|\nabla u|^2} a_R(0)dsdx = \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{a_R(|\nabla u|)}{a_R(|\nabla u|)}|\nabla u|^2 dx \\
&\leq \frac{1}{2a_R(R)}\int_\Omega a_R(|\nabla u|)|\nabla u|^2 dx = \frac{1}{2a_R(R)}\int_\Omega uL_u u dx
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\int_\Omega vL_u v dx &= \int_\Omega a_R(|\nabla u|)|\nabla v|^2 dx \leq \int_\Omega a_R(0)|\nabla v|^2 dx \\
&= \int_\Omega \frac{a_R(|\nabla v|)}{a_R(|\nabla v|)}|\nabla v|^2 dx \leq \frac{1}{2a_R(R)}\int_\Omega a_R(|\nabla v|)|\nabla v|^2 dx.
\end{aligned}$$

Assim, utilizando (4.55), (4.21) e as desigualdades acima obtemos

$$
\begin{aligned}
\alpha\left(2a_R(R)J_\lambda(u)\right)^{\frac{1}{2}} &\leq \alpha\left(2a_R(R)\frac{1}{2a_R(R)}\int_\Omega uL_u u dx\right)^{\frac{1}{2}} = \alpha\left(\int_\Omega uL_u u dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_\Omega vL_u v\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{1}{2a_R(R)}\int_\Omega a_R(|\nabla v|)|\nabla v|^2 dx.\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq (a_R(R)C)^{-\frac{1}{2}} J_\lambda(v)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}
$$

onde $C = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sigma}\right)$. Além disso, pelo Lema 4.1.3, temos que $J_\lambda(v) \leq J_\lambda(u)$, e assim

$$\alpha\left(2a_R(R)J_\lambda(u)\right)^{\frac{1}{2}} \leq (a_R(R)C)^{\frac{1}{2}} J_\lambda(v)^{\frac{1}{2}} \leq (a_R(R)C)^{\frac{1}{2}} J_\lambda(u)^{\frac{1}{2}}.$$

Portanto, $\alpha \leq (2C)^{-\frac{1}{2}} a_R(R)^{-1}$.

Agora, apresentaremos uma importante proposição para o desenvolvimento desta seção, pois nos fornece informações do funcional J_λ sobre o conjunto $S(\lambda)$ e do operador T e suas iterações sobre $S(\lambda)$.

Proposição 4.2.1. i) *O conjunto $S(\lambda)$ é não vazio desde que $m \geq \widetilde{K}$.*

ii) *J_λ tem um limite inferior positivo em $S(\lambda)$.*

iii) *Existe um m que pode ser escolhido de modo que, para λ suficientemente grande, $S(\lambda)$ é invariante sob a aplicação T ou alguma de suas iterações.*

Demonstração. Se $m \geq \widetilde{K}$, temos pelo Lema 4.1.4 que existe $u \in S(\lambda)$, provando assim i). Além disso, utilizando o Lema 4.1.2, temos que

$$0 < Ca_R(R)^{\frac{q+1}{q-1}} \lambda^{\frac{-2}{q-1}} \leq \inf_{u \in N} J_\lambda(u) \leq \inf_{u \in S(\lambda)} J_\lambda(u),$$

provando ii). Para provar iii), observe que pelo Lema 4.1.3 temos, para $u \in S(\lambda)$, que

$$J_\lambda(T^j(u)) \leq J_\lambda(T^{j-1}(u)) \leq ... \leq J_\lambda(T(u)) \leq J_\lambda(u),$$

para $j \geq 1$. De fato, seja $u \in S(\lambda)$. Como $u_1 = T(u)$ é solução do problema

$$\begin{cases} L_u u_1 = \alpha_1 \lambda g(u), & \text{em } \Omega, \\ u_1 = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.56}$$

onde $\alpha_1 = \alpha_1(w_1) > 0$ é escolhido de forma que $u_1 = \alpha_1 w_1 \in N$, com w_1 sendo a solução fraca de

$$L_u(w_1) = \lambda g(u),$$

segue do Lema 4.1.3, que $J_\lambda(T(u)) \leq J_\lambda(u)$. Como $u_2 = T(T(u)) = T^2(u)$ é solução do problema

$$\begin{cases} L_{u_1} u_2 = \alpha_2 \lambda g(u_1), & \text{em } \Omega, \\ u_2 = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.57}$$

onde $\alpha_2 = \alpha_2(w_2) > 0$ escolhido de forma que $u_2 = \alpha_2 w_2 \in N$, com w_2 sendo a solução fraca de

$$L_{u_1}(w_2) = \lambda g(u_1),$$

temos, pelo Lema 4.1.3, que $J_\lambda(T^2(u)) \leq J_\lambda(T(u))$. Por um processo indutivo, obtemos que $u_k = T^k(u) = \alpha_k w_k$, com w_k sendo a solução fraca de

$$L_{u_{k-1}}(w_k) = \lambda g(u_{k-1}),$$

para $k = 1, ..., j$, e

$$J_\lambda(T^j u) \leq J_\lambda(T^{j-1} u) \leq ... \leq J_\lambda(u).$$

Portanto,

$$J_\lambda(T^j(u)) \leq J_\lambda(u) \leq \frac{K^2}{2}\lambda^{-\frac{2}{(q-1)}},$$

para $j \geq 1$. Assim, falta mostrar que, para algum $j \geq 1$, T^j preserva a seguinte condição:

$$\|T^j(u)\|_{W^{2,n+1}(\Omega)} \leq m\lambda^{-\frac{1}{(q-1)}}, \text{ para algum } m.$$

Considere a sequência finita $s_0, s_1, ..., s_j$ definida da seguinte maneira:

$$s_0 = \frac{2^*}{q} \text{ e } s_{k+1} = \frac{n.s_k}{q(n-2s_k)},$$

para $0 \leq k < j-1$ e $2^* = \frac{2n}{n-2}$. Como $1 < q < \frac{(n+2)}{n-2}$, temos que sequência $s_0, ..., s_j$ é estritamente crescente. Com efeito, note que

$$\frac{n}{q(n-2s_0)} = \frac{n}{qn - 2.2^*} = \frac{n-2}{q(n-2)-4}.$$

Por outro lado,

$$\frac{n+2}{n-2} > q \Longrightarrow n+2 > q(n-2) \Longrightarrow n-2 > q(n-2)-4 \Longrightarrow \frac{n-2}{q(n-2)-4} > 1.$$

Dessa forma,

$$s_1 = \frac{ns_0}{q(n-2s_0)} = \frac{(n-2)s_0}{q(n-2)-4} > s_0$$

e

$$s_2 = \frac{ns_1}{q(n-2s_1)} > \frac{ns_1}{q(n-2s_0)} > s_1.$$

Suponha que $s_0 < s_1 < s_2 < ... < s_k$, para $2 < k < j-1$, então

$$s_{k+1} = \frac{ns_k}{q(n-2s_k)} > \frac{ns_k}{q(n-2s_0)} > s_k.$$

Portanto, a sequência $s_0, s_1, ..., s_{j-1}$ é estritamente crescente.

Considere
$$j := \min\{i \in \mathbb{N}; \frac{n}{2} \leq s_{i-2}\}.$$
Então, $j = 1$ apenas se $n = 2$ ou $n = 3, 4, 5$ e $q \leq \frac{4}{(n-2)}$, pois se $n = 2$ e $j = 1$ teremos que $2^* = \infty$ e $s_0 = \infty$. Caso $n > 2$ e $j = 1$, então
$$s_0 = \frac{2^*}{q} \geq \frac{n}{2} \Longrightarrow \frac{4}{n-2} \geq q > 1 \Longrightarrow q \leq \frac{4}{n-2} \text{ e } \frac{4}{n-2} > 1.$$
Assim, $2 < n < 6$, ou seja, $n = 3, 4, 5$ e $q \leq \frac{4}{n-2}$. Assim, podemos escolher $s_{j-1} = n + 1$.

Agora, seja $u_0 = u \in S(\lambda)$. Considere a sequência finita $u_0, u_1, ..., u_j$ de modo que $u_0 = u$ e $T(u_k) = u_{k+1}$, ou seja,
$$\begin{cases} L_k u_{k+1} = \alpha_{k+1}\lambda g(u_k), & \text{em } \Omega, \\ u_{k+1} = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.58}$$
onde $L_k v = L_{u_k} v = -div(a_R(|\nabla u_k|)\nabla v)$, para $v \in H_0^1(\Omega)$, e $\alpha_{k+1} = \alpha_{k+1}(w_{k+1}) > 0$ é escolhido de tal forma que $u_{k+1} = \alpha_{k+1} w_{k+1} \in N$, com w_{k+1} sendo a solução fraca de
$$L_{u_k}(w_{k+1}) = \lambda g(u_k).$$
Então, iremos estimar o valor de m para que tenhamos
$$\|u_k\|_{W^{2,s_k}(\Omega)} \leq m\lambda^{-\frac{1}{(q-1)}}, \text{ para } 0 \leq k \leq j.$$
De fato, considere
$$\|u_k\|_{W^{2,n+1}(\Omega)} \leq \delta, \forall k = 0, 1, ..., j, \tag{4.59}$$
onde $\delta > 0$ é escolhido de forma que $\|u_k\|_{L^\infty(\Omega)} \leq R$ e $\|\nabla u_k\|_{L^\infty(\Omega)} \leq R$. Por definição, temos que $u_0 = u \in S(\lambda)$ e desse modo $J_\lambda(u_0) \leq \frac{K^2}{2}\lambda^{-\frac{2}{(q-1)}}$. Além disso, pela desigualdade (4.21), temos que
$$\begin{aligned} J_\lambda(u_0) &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sigma}\right)\int_\Omega a_R(|\nabla u_0|)|\nabla u_0|^2 dx \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sigma}\right) a_R(R)\int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sigma}\right) a_R(R)\|u_0\|^2_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$
Dessa forma,
$$\|u_0\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sigma}\right)^{-1} a_R(R)^{-1} J_\lambda(u_0) \leq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sigma}\right)^{-1} a_R(R)^{-1}\frac{K^2}{2}\lambda^{-\frac{2}{(q-1)}}.$$
Portanto,
$$\|u_0\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_2 K\lambda^{-\frac{1}{(q-1)}},$$
onde $C_2 = 2^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{2}} a_R(R)^{-\frac{1}{2}}$.

Por M1) e o Teorema B.1.1, obtemos

$$\begin{aligned}
\|g(u_0)\|_{L^{s_0}(\Omega)} &= \left(\int_\Omega |g(u_0)|^{s_0} dx\right)^{\frac{1}{s_0}} \leq C\left(\int_\Omega |u_0|^{qs_0} dx\right)^{\frac{1}{s_0}} \\
&= C\left(\int_\Omega |u_0|^{2^*} dx\right)^{\frac{q}{2^*}} = C\|u_0\|^q_{L^{2^*}(\Omega)} \\
&\leq CC_3^q\|u_0\|^q_{H_0^1(\Omega)} \leq CC_3^qC_2^qK^q\lambda^{-\frac{q}{(q-1)}}.
\end{aligned}$$

Além disso, pelo Lema 4.2.1 temos, para $0 \leq k \leq j-1$ e $s_0 \leq s \leq n+1$, que

$$M \geq \|L_k^{-1}\| \geq \frac{\|L_k^{-1}(L_k u_{k+1})\|_{W^{2,s}(\Omega)}}{\|L_k u_{k+1}\|_{L^s(\Omega)}} = \frac{\|u_{k+1}\|_{W^{2,s}(\Omega)}}{\|L_k u_{k+1}\|_{L^s(\Omega)}},$$

ou seja,

$$\|u_{k+1}\|_{W^{2,s}(\Omega)} \leq M\|L_k u_{k+1}\|_{L^s(\Omega)} \tag{4.60}$$

para $0 \leq k \leq j-1$ e $s_0 \leq s \leq n+1$.

Assim, por (4.58), temos que

$$\begin{aligned}
\|u_1\|_{W^{2,s_0}(\Omega)} &\leq M\|L_0 u_1\|_{L^{s_0}(\Omega)} = M\alpha_1\lambda\|g(u_0)\|_{L^{s_0}(\Omega)} \\
&\leq \alpha_1 M\lambda CC_2^qC_3^qK^q\lambda^{-\frac{q}{(q-1)}}.
\end{aligned}$$

Por (4.53) e (4.54) segue que

$$\alpha_k \leq (2C)^{-\frac{1}{2}} a_R(R)^{-1} := \mu, \forall k = 1,..,j. \tag{4.61}$$

Desse modo,

$$\|u_1\|_{W^{2,s_0}(\Omega)} \leq \mu MCC_2^qC_3^qK^q\lambda^{-\frac{1}{(q-1)}} = \tau_1\lambda^{-\frac{1}{(q-1)}},$$

para $\tau_1 := \mu MCC_2^qC_3^qK^q$.

Observe que, devido ao fato de $2s_k < n$, para $k = 0,1,...,j-3$, temos, pelo Corolário B.1.1, que $W^{2,s_k}(\Omega) \subset L^z(\Omega)$, para $s_k \leq z \leq \frac{ns_k}{n-2sk} = qs_{k+1}$. Assim, existem constantes $\tilde{c}_k > 0$ tais que

$$\|u\|_{L^{qs_{k+1}}(\Omega)} \leq \tilde{c}_k\|u\|_{W^{2,s_k}(\Omega)}, \tag{4.62}$$

para $u \in W^{2,s_k}(\Omega)$ e $k = 0,1,...,j-3$. Além disso, como $2s_{j-2} \geq n$ temos, pelo Corolário B.1.1, que $W^{2,s_{j-2}}(\Omega) \subset L^z(\Omega)$, para $s_{j-2} \leq z < \infty$. Em particular, $W^{2,s_{j-2}}(\Omega) \subset L^{qs_{j-1}}(\Omega)$, ou seja, existe uma constante $\tilde{c}_{j-1} > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^{qs_{j-1}}(\Omega)} \leq \tilde{c_j}\|u\|_{W^{2,s_{j-2}}(\Omega)}. \tag{4.63}$$

Assim, considerando $C_4 = \max\{\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, ..., \tilde{c}_{j-2}, \tilde{c}_{j-1}, C_3\}$ teremos que

$$\|u\|_{L^{qs_k}(\Omega)} \leq C_4\|u\|_{W^{2,s_{k-1}}(\Omega)}. \tag{4.64}$$

para $u \in W^{2,s_k}(\Omega)$ e $k = 0, 1, ..., j-2$. Desse modo, utilizando a condição M1) e a estimativa (4.64) temos que

$$\begin{aligned}
\|g(u_1)\|_{L^{s_1}(\Omega)} &= \left(\int_\Omega |g(u_1)|^{s_1} dx\right)^{\frac{1}{s_1}} \leq C\left(\int_\Omega |u_1|^{qs_1} dx\right)^{\frac{1}{s_1}} \\
&= C\|u_1\|^q_{L^{qs_1}(\Omega)} \leq CC_4^q \|u_1\|^q_{W^{2,s_0}(\Omega)} \\
&\leq CC_4^q \tau_1^q \lambda^{-\frac{q}{(q-1)}} = \tau_2 \lambda^{-\frac{q}{(q-1)}}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|u_2\|_{W^{2,s_1}(\Omega)} &\leq M\|L_1 u_2\|_{L^{s_1}(\Omega)} = M\alpha_2\lambda\|g(u_1)\|_{L^{s_1}(\Omega)} \\
&\leq \mu MCC_4^q \tau_1^q \lambda^{-\frac{1}{(q-1)}}.
\end{aligned}$$

Por um processo indutivo, para $1 \leq k \leq j-2$, teremos

$$\begin{aligned}
\|g(u_k)\|_{L^{s_k}(\Omega)} &= \left(\int_\Omega |g(u_k)|^{s_k} dx\right)^{\frac{1}{s_k}} \leq C\left(\int_\Omega |u_k|^{qs_k} dx\right)^{\frac{1}{s_k}} \\
&= C\|u_k\|^q_{L^{qs_k}(\Omega)} \leq CC_4^q \|u_k\|^q_{W^{2,s_{k-1}}(\Omega)} \leq CC_4^q \tau_k^q \lambda^{-\frac{q}{(q-1)}}.
\end{aligned}$$

Assim, utilizando as estimativas (4.60) e (4.61) obtemos

$$\begin{aligned}
\|u_{k+1}\|_{W^{2,s_k}(\Omega)} &\leq M\|L_k u_{k+1}\|_{L^{s_k}(\Omega)} = M\alpha_{k+1}\lambda\|g(u_k)\|_{L^{s_k}(\Omega)} \\
&\leq \mu M\lambda CC_4^q \tau_k^q \lambda^{-\frac{q}{(q-1)}} = \tau_{k+1}\lambda^{-\frac{1}{(q-1)}},
\end{aligned}$$

onde $\tau_{k+1} := \mu MCC_4^q \tau_k^q$.

Agora, considere m de forma que

$$\max\{\widetilde{K}, \tau_1, ..., \tau_j\} \leq m.$$

Mostraremos que $\|u_k\|_{W^{2,n+1}(\Omega)} \leq \delta$, para $k = 1, 2, ..., j$ e λ suficientemente grande. De fato, como

$$\|u_0\|_{W^{2,n+1}(\Omega)} = \|u\|_{W^{2,n+1}(\Omega)} \leq m\lambda^{-\frac{1}{(q-1)}}$$

teremos, para λ suficientemente grande, que $\|u_0\|_{W^{2,n+1}(\Omega)} \leq \delta$. Além disso, por M1) e pelo Corolário B.1.1, temos

$$\begin{aligned}
\|g(u_0)\|_{L^{n+1}(\Omega)} &= \left(\int_\Omega |g(u_0)|^{n+1} dx\right)^{\frac{1}{(n+1)}} \leq C\left(\int_\Omega |u_0|^{q(n+1)} dx\right)^{\frac{1}{n+1}} \\
&\leq \widetilde{C}\|u_0\|^q_{L^\infty(\Omega)} \leq \widetilde{C}C_3^q \|u_0\|^q_{W^{2,n+1}(\Omega)} \\
&\leq CC_3^q \tilde{K}^q \lambda^{-\frac{q}{(q-1)}} \leq CC_3^q m^q \lambda^{-\frac{q}{(q-1)}}
\end{aligned}$$

Por outro lado, utilizando o Lema 4.2.1, as estimativas (4.60) e (4.61) obtemos, para λ suficientemente grande, que

$$\begin{aligned}
\|u_1\|_{W^{2,n+1}(\Omega)} &\leq M\|L_0 u_1\|_{L^{n+1}(\Omega)} = M\alpha_1\lambda\|g(u_0)\|_{L^{n+1}(\Omega)} \\
&\leq \mu MCC_3^q m^q \lambda^{-\frac{1}{(q-1)}} \leq \delta.
\end{aligned}$$

Aplicando um processo de indução, para $1 \leq k \leq j-1$, concluímos que

$$\begin{aligned} \|u_k\|_{W^{2,n+1}(\Omega)} &\leq M\|L_k u_{k+1}\|_{L^{n+1}(\Omega)} = M\alpha_{k+1}\lambda\|g(u_k)\|_{L^{n+1}(\Omega)} \\ &\leq \mu MCC_3^q m^q \lambda^{-\frac{1}{(q-1)}} \leq \delta, \end{aligned}$$

para λ suficientemente grande. Dessa forma, $\|u_k\|_{W^{2,n+1}(\Omega)} \leq \delta$. Como consequência, $\|u_{k+1}\|_{W^{2,s_k}(\Omega)} \leq \tau_{k+1}\lambda^{-\frac{1}{(q-1)}} \leq m\lambda^{-\frac{1}{(q-1)}}$, para $0 \leq k \leq j-1$. Em particular, $\|u_j\|_{W^{2,n+1}(\Omega)} \leq m\lambda^{-\frac{1}{(q-1)}}$. □

A seguir, apresentaremos um lema que nos auxiliará a provar que o funcional $J_\lambda|_{S(\lambda)}$ atinge seu ínfimo em $S(\lambda)$.

Lema 4.2.2. *Sejam $a, b \in (0, \infty)$, $b \geq a$, $1 < r < \infty$. Considerando*

$$[r] := \min\{k \in \mathbb{N}; k \geq r\}$$

teremos que

$$\sum_{i=0}^{[r]} b^{r-i}a^i(b-a) \geq b^{r+1} - a^{r+1}. \tag{4.65}$$

Demonstração. Com efeito, se $r \in \mathbb{N}$ teremos, por um processo de indução, que

$$\sum_{i=0}^{[r]} b^{r-i}a^i(b-a) = \sum_{i=0}^{r} b^{r-i}a^i(b-a) = b^{r+1} - a^{r+1}.$$

Se $r \notin \mathbb{N}$, então existem $\theta, \xi \in [0,1]$ tais que

$$[r] = r + \theta, r = (r) + \xi \text{ e } \theta + \xi = 1,$$

sendo $(r) := \max\{k \in \mathbb{N}; r \geq k\}$. Além disso, $r - (r) = r - [r] + 1$ e $(r) + 1 = [r]$. Desse modo,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{[r]} b^{r-i}a^i(b-a) &= b^r(b-a) + b^{r-1}a(b-a) + ... + b^{r-(r)}a^{(r)}(b-a) + b^{r-[r]}a^{[r]}(b-a) \\ &= b^{r+1} - b^{r-[r]}a^{[r]+1}. \end{aligned}$$

Como $b \geq a$ e $r - [r] \leq 0$ temos que $-a^{r-[r]} \leq -b^{r-[r]}$. Portanto,

$$\sum_{i=0}^{[r]} b^{r-i}a^i(b-a) = b^{r+1} - b^{r-[r]}a^{[r]+1} \geq b^{r+1} - a^{r-[r]}a^{[r]+1} = b^{r+1} - a^{r+1}. \tag{4.66}$$

Assim, concluímos que (4.65) é válida. □

Proposição 4.2.2. *O funcional $J_\lambda|_{S(\lambda)}$ atinge seu ínfimo em $S(\lambda)$, ou seja, existe $u_\lambda \in S(\lambda)$ tal que*

$$J_\lambda(u_\lambda) = \inf_{v \in S(\lambda)} J_\lambda(v). \tag{4.67}$$

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência em $S(\lambda)$ tal que $J_\lambda(u_n) \longrightarrow \beta := \inf_{v\in S(\lambda)} J_\lambda(v)$. Pelo Teorema B.1.3 temos que $W^{2,n+1}(\Omega) \subset C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ compactamente, para algum $0 < \alpha < \frac{1}{n+1}$. Desse modo, como $S(\lambda)$ é limitado em $W^{2,n+1}(\Omega)$ segue que $\overline{S(\lambda)}$ é compacto em $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, ou seja, existe $u \in S(\lambda)$ tal que $\|u_n - u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$. Assim, $J_\lambda(u_n) \longrightarrow J_\lambda(u)$. Note que a prova deste fato pode ser feita utilizando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue. No entanto, apresentaremos uma demostração alternativa utilizando o Lema 4.2.2. Considere os conjuntos

1. $E_1^n := \{x \in \Omega; |\nabla u_n|^2 \leq |\nabla u|^2\}$,
2. $E_2^n := \{x \in \Omega; |\nabla u_n|^2 \geq |\nabla u|^2\}$,
3. $E_3^n := \{x \in \Omega; u_n \leq u\}$ e
4. $E_4^n := \{x \in \Omega; u_n \geq u\}$.

Então, temos que

$$\begin{aligned}
|J_\lambda(u_n) - J_\lambda(u)| &= \left|\frac{1}{2}\int_\Omega A_R(|\nabla u_n|^2) - A_R(|\nabla u|^2)dx - \lambda \int_\Omega G(u_n) - G(u)dx\right| \\
&\leq \frac{1}{2}\int_\Omega \left|A_R(|\nabla u_n|^2) - A_R(|\nabla u|^2)\right| dx + \lambda \int_\Omega |G(u_n) - G(u)|\, dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{E_1^n} \left|A_R(|\nabla u_n|^2) - A_R(|\nabla u|^2)\right| dx \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{E_2^n} \left|A_R(|\nabla u_n|^2) - A_R(|\nabla u|^2)\right| dx \\
&\quad + \lambda \int_{E_3^n} |G(u_n) - G(u)|\, dx + \lambda \int_{E_4^n} |G(u_n) - G(u)|\, dx.
\end{aligned}$$

Por outro lado, como $u \in S(\lambda) \subset C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ e $\|u_n - u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$, existe $K > 0$ tal que $\|u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq K$ e $\|u_n\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq K$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Desse modo, utilizando a condição M4), temos que existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$\begin{aligned}
\int_{E_1^n} \left|A_R(|\nabla u_n|^2) - A_R(|\nabla u|^2)\right| dx &= \int_{E_1^n} \left|\int_0^{|\nabla u_n|^2} a_R(\sqrt{s})ds - \int_0^{|\nabla u|^2} a_R(\sqrt{s})ds\right| dx \\
&= \int_{E_1^n} \left|-\int_{|\nabla u_n|^2}^{|\nabla u|^2} a_R(\sqrt{s})ds\right| dx \leq \int_{E_1^n} \int_{|\nabla u_n|^2}^{|\nabla u|^2} ds dx \\
&= \int_{E_1^n} |\nabla u|^2 - |\nabla u_n|^2 dx = \int_{E_1^n} (\nabla u - \nabla u_n).(\nabla u + \nabla u_n) dx \\
&\leq C_1 \|\nabla u - \nabla u_n\|_{C(\overline{\Omega})} \|\nabla u + \nabla u_n\|_{C(\overline{\Omega})} \\
&\leq C_2 \|\nabla u - \nabla u_n\|_{C(\overline{\Omega})}
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{E_1^n} \left|A_R(|\nabla u_n|^2) - A_R(|\nabla u|^2)\right| dx \leq C_2 \|\nabla u - \nabla u_n\|_{C(\overline{\Omega})}. \tag{4.68}$$

De modo análogo, podemos provar que

$$\int_{E_2^n} \left| A_R(|\nabla u_n|^2) - A_R(|\nabla u|^2) \right| dx \leq C_2 \|\nabla u - \nabla u_n\|_{C(\overline{\Omega})}. \tag{4.69}$$

Agora, observe que, pela condição $M1$) e o Lema 4.2.2, existe uma constante $C_3 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{E_3^n} |G(u_n) - G(u)|\, dx &= \int_{E_3^n} \left| \int_0^{u_n} g(s)ds - \int_0^u g(s)ds \right| dx \\ &= \int_{E_3^n} \left| - \int_{u_n}^u g(s)ds \right| dx = \int_{E_3^n} \int_{u_n}^u g(s)dsdx \\ &\leq C \int_{E_3^n} \int_{u_n}^u |s|^q dsdx = \frac{C}{q+1} \int_{E_3^n} (u^{q+1} - u_n^{q+1})dx \\ &\leq \frac{C}{q+1} \|u - u_n\|_{C(\overline{\Omega})} \sum_{i=0}^{[q]} \int_{E_3^n} u^{q-i} u_n^i dx \\ &\leq C_3 \|u - u_n\|_{C(\overline{\Omega})}, \end{aligned}$$

sendo $[q] := \min\{k \in \mathbb{N}; k \geq q\}$. De modo análogo, podemos provar que existe uma constante $C_4 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{E_4^n} |G(u_n) - G(u)|\, dx &= \int_{E_4^n} \left| \int_u^{u_n} g(s)ds \right| dx \leq \frac{C}{q+1} \|u - u_n\|_{C(\overline{\Omega})} \sum_{i=0}^{[q]} \int_{E_4^n} u_n^{q-i} u^i dx \\ &\leq C_4 \|u - u_n\|_{C(\overline{\Omega})}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} |J_\lambda(u_n) - J_\lambda(u)| &\leq \frac{1}{2} \int_{E_1^n} \left| A_R(|\nabla u_n|^2) - A_R(|\nabla u|^2) \right| dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{E_2^n} \left| A_R(|\nabla u_n|^2) - A_R(|\nabla u|^2) \right| dx \\ &\quad + \lambda \int_{E_3^n} |G(u_n) - G(u)|\, dx + \lambda \int_{E_4^n} |G(u_n) - G(u)|\, dx \\ &\leq C_2 \|\nabla u - \nabla u_n\|_{C(\overline{\Omega})} + C_3 \|u - u_n\|_{C(\overline{\Omega})} + C_4 \|u - u_n\|_{C(\overline{\Omega})} \end{aligned}$$

Logo, $|J_\lambda(u_n) - J_\lambda(u)| \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$. Portanto, pela unicidade do limite, concluímos que $J_\lambda(u) = \beta$. □

Agora, apresentaremos o principal resultado deste capítulo, que é exposto e provado em Lorca e Ubilla [8].

Teorema 4.2.1. *Seja Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^n$, para $n \geq 2$, com fronteira $C^{1,1}$. Suponha que as condições F1), F2), F3) e F4) são satisfeitas, então existe um número positivo $\rho = \rho(\Omega, f, a)$ tal que, para $\lambda > \rho$, o problema (4.1) possui uma solução fraca u_λ não trivial, não negativa e de classe C^1. Além disso,*

$$\|u_\lambda\|_{W^{2,n+1}(\Omega)} \longrightarrow 0 \textit{ quando } \lambda \longrightarrow \infty. \tag{4.70}$$

Demonstração. Inicialmente considere $\lambda > 0$ de modo que as condições i), ii) e iii) da Proposição 4.2.1 sejam válidas. Pela Proposição 4.2.2, existe $u_\lambda \in S(\lambda)$ de forma que

$$J_\lambda(u_\lambda) = \min\{J_\lambda(u); u \in S(\lambda)\}, \tag{4.71}$$

Pelo Lema 4.1.3, temos que

$$J_\lambda(T^j u_\lambda) \leq J_\lambda(T^{j-1} u_\lambda) \leq ... \leq J_\lambda(u_\lambda), \tag{4.72}$$

para $j \geq 1$. Além disso, por $S(\lambda)$ ser invariante sobre o operador T ou alguma de suas iterações temos que $T^j u_\lambda \in S(\lambda)$, para algum $j \geq 1$. Desse modo,

$$J_\lambda(T^j u_\lambda) \geq \min\{J_\lambda(u); u \in S(\lambda)\} = J_\lambda(u_\lambda),$$

e assim $J_\lambda(Tu_\lambda) = J_\lambda(u_\lambda)$. Portanto, pelo Lema 4.1.3 concluímos que u_λ é solução do problema (4.7). Por fim, sejam m e δ como na demonstração da Proposição 4.2.1, então

$$\|u_\lambda\|_{W^{2,n+1}(\Omega)} \leq m\lambda^{-\frac{1}{q-1}} \longrightarrow 0 \text{ quando } \lambda \longrightarrow \infty$$

e

$$\|u_\lambda\|_{W^{2,n+1}(\Omega)} \leq \delta.$$

Assim, $\|u_\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} \leq R$ e $\|\nabla u_\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} \leq R$ e, portanto, concluímos que u_λ é solução do problema (4.1). $\square$

5 EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES NODAIS DE UM DETERMINADO PROBLEMA DE CURVATURA MÉDIA PRESCRITA

Neste capítulo, abordaremos um problema de valor de fronteira envolvendo o operador de curvatura média prescrita. Mais especificamente, verificaremos a existência de soluções que mudam de sinal, denominadas soluções nodais, do seguinte problema de curvatura média (para o qual utilizamos como principal referência Bonheure, Delert e Valeriola [4]):

$$\begin{cases} -div\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = \lambda |u|^{p-2}u, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.1}$$

sendo $\lambda > 0$ um parâmetro grande, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado com fronteira $C^{1,1}$, para $n \geq 2$, e $2 < p < 2^*$, onde $2^* = \frac{2n}{n-2}$ se $n \geq 3$ e $2^* = \infty$ se $n = 2$. Para isso, utilizaremos uma abordagem variacional sobre o problema auxiliar

$$\begin{cases} -div\,(a(|\nabla u|^2)\nabla u) = \lambda |u|^{p-2}u, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.2}$$

onde $a : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função decrescente de classe C^1 que satisfaz as seguintes condições:

K1) $\frac{1}{2} < a(s) \leq 1$, para todo $s \geq 0$,

K2) $a'(s)s \geq -\frac{1}{8}$, para todo $s \geq 0$,

K3) $a(s) = \frac{1}{\sqrt{1+s}}$ se $0 \leq s \leq \tau$, para algum $\tau > 0$.

As condições apresentadas acima sobre a função a são consideradas com as seguintes finalidades: K1) juntamente com K2) são utilizadas para provar a existência de um minimizador do funcional I_λ no conjunto nodal de Nehari (que definiremos a seguir); as condições K1) e K3) são necessárias para provar que uma solução do problema auxiliar (5.2) também será solução do problema original (5.1); e a condição K1) é utilizada para mostrar que dada uma solução do problema auxiliar u existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\lambda^{\frac{2^*-p+2}{2(2^*-p)}} \|u\|_{L^{2^*}(\Omega)}^{\frac{(p-2)(2^*-p+2)}{2(2^*-p)}} \|u\|_{L^{\eta_0}(\Omega)}, \tag{5.3}$$

onde $\eta_0 = \frac{2.2^*}{2^*-p+2}$

Resultados sobre soluções que mudam de sinal de problemas de valor de fronteira vêm sendo apresentados em vários trabalhos ao longo dos anos, podemos citar os artigos de Bartsch e Wang [25] e Castro, Cossio e Neuberger ([26] - [27]), que abordam problemas envolvendo o operador Laplaciano Δ sobre domínios limitados. Outros trabalhos que expõem resultados sobre esses tipos de soluções são: Bartsch, Liu e Weth [28], que estudam equações de Schrödinger superlinear sobre $\mathbb{R}^n$; Aftalion e Pacellla [29], que estudam um problema de valor de fronteira sobre um domínio U, sendo U uma bola ou um anel em $\mathbb{R}^n$.

Como nos trabalhos citados acima, apresentaremos resultados sobre soluções que mudam de sinal de um dado problema. Para tanto, definimos as soluções fracas do problema (5.2) pelas funções $u \in H_0^1(\Omega)$ tais que

$$\int_\Omega a(|\nabla u|^2)\nabla u.\nabla v dx - \lambda \int_\Omega |u|^{p-2}uv dx = 0, \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega). \tag{5.4}$$

Além disso, o funcional $I_\lambda : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ associado ao problema auxiliar é definido por

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega A(|\nabla u|^2)dx - \frac{\lambda}{p}\int_\Omega |u|^p dx, \tag{5.5}$$

onde $A(s) := \int_0^s a(t)dt$, para todo $s \geq 0$, e $I_\lambda \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$, com

$$\langle I'_\lambda(u), v\rangle = \int_\Omega a(|\nabla u|^2)\nabla u.\nabla v dx - \lambda \int_\Omega |u|^{p-2}uv dx, \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega). \tag{5.6}$$

Assim, podemos definir a variedade de Nehari

$$N_\lambda = \{u \in H_0^1(\Omega); u \neq 0 \text{ e } \langle I'_\lambda(u), u\rangle = 0\}$$

e o conjunto nodal de Nehari

$$S_\lambda = \{u \in H_0^1(\Omega); u^+, u^- \in N_\lambda\},$$

onde as funções $u^+ : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ e $u^- : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ são definidas por $u^+(x) := \max\{0, u(x)\}$ e $u^-(x) := \max\{0, -u(x)\}$, denominadas a parte positiva e a parte negativa de u, respetivamente.

Observação 5.0.1. *Dada $u \in H_0^1(\Omega)$, temos que*

$$I_\lambda(tu^+ - su^-) = I_\lambda(tu^+) + I_\lambda(su^-),$$

para todo $t, s > 0$.

Demonstração. Considerando $E_1 := \{x \in \Omega; u \geq 0\}$ e $E_2 := \{x \in \Omega; u \leq 0\}$, teremos que

$$\begin{aligned}
I_\lambda(tu^+ - su^-) &= \frac{1}{2}\int_\Omega A(|\nabla(tu^+) - \nabla(su^-)|^2)dx - \frac{\lambda}{p}\int_\Omega |tu^+ - su^-|^p dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{E_1} A(|\nabla(tu^+) - \nabla(su^-)|^2)dx + \frac{1}{2}\int_{E_2} A(|\nabla(tu^+) - \nabla(su^-)|^2)dx \\
&\quad -\frac{\lambda}{p}\int_{E_1} |tu^+ - s\hat{u}^-|^p dx - \frac{\lambda}{p}\int_{E_2} |tu^+ - su^-|^p dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{E_1} A(|\nabla(tu^+)|^2)dx + \frac{1}{2}\int_{E_2} A(|\nabla(su^-)|^2)dx - \frac{\lambda}{p}\int_{E_1} |tu^+|^p dx \\
&\quad -\frac{\lambda}{p}\int_{E_2} |su^-|^p dx \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega A(|\nabla(tu^+)|^2)dx + \frac{1}{2}\int_\Omega A(|\nabla(su^-)|^2)dx - \frac{\lambda}{p}\int_\Omega |tu^+|^p dx \\
&\quad -\frac{\lambda}{p}\int_\Omega |su^-|^p dx \\
&= I_\lambda(tu^+) + I_\lambda(su^-)
\end{aligned}$$

$\square$

Agora, estamos preparados para definir soluções nodais. Diremos que uma função $u \in H_0^1(\Omega)$ é solução nodal do problema (5.2) se u é solução fraca de (5.2) e $u \in S_\lambda$.

5.1 EXISTÊNCIA DE MINIMIZADOR DE I_λ EM S_λ

Nesta seção, buscaremos provar a existência de uma função $u \in S_\lambda$ de modo que $I_\lambda(u) = \min_{v \in S_\lambda} I_\lambda(v)$ pois, como provaremos posteriormente, u será a solução do problema auxiliar (5.2). Para isso, precisamos do seguinte resultado:

Lema 5.1.1. *Para qualquer $u \in H_0^1(\Omega) - \{0\}$ com $u \geq 0$ em q.t.p. de Ω, existe um único $t = t(u) > 0$ tal que $t(u)u \in N_\lambda$. Além disso, o máximo da função $t \in [0, \infty) \longmapsto I_\lambda(tu) \in \mathbb{R}$ é atingido em $t = t(u)$.*

Demonstração. A prova é feita de forma análoga ao Lema 4.1.1. Para mais detalhes consulte [4], Lema 2.1, p. 1074.

□

Teorema 5.1.1. *Se $u \in S_\lambda$ é um minimizador de $I_\lambda|_{S_\lambda}$, então u é solução nodal de (5.2).*

Demonstração. Seja $u \in S_\lambda$ tal que $I_\lambda(u) = \beta := \inf_{v \in S_\lambda} I_\lambda(v) > -\infty$. Suponhamos, por absurdo, que $I'_\lambda(u) \neq 0$. Então, existe $\phi \in (H_0^1(\Omega))^*$ tal que

$$\langle I'_\lambda(u), \phi \rangle = -2. \tag{5.7}$$

Assim, pela continuidade de I'_λ, dado $\alpha = \frac{1}{\|\phi\|_{H_0^1(\Omega)}} > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
z \in H_0^1(\Omega), \|u - z\|_{H_0^1(\Omega)} < \delta \quad &\Longrightarrow \quad \|I'_\lambda(u) - I'_\lambda(z)\|_{(H_0^1(\Omega))^*} < \frac{1}{\|\phi\|_{H_0^1(\Omega)}} \\
&\Longrightarrow \quad \sup_{h \in H_0^1(\Omega)} \frac{|\langle I'_\lambda(u), h \rangle - \langle I'_\lambda(z), h \rangle|}{\|h\|_{H_0^1(\Omega)}} < \frac{1}{\|\phi\|_{H_0^1(\Omega)}} \\
&\Longrightarrow \quad \frac{|\langle I'_\lambda(u), \phi \rangle - \langle I'_\lambda(z), \phi \rangle|}{\|\phi\|_{H_0^1(\Omega)}} < \frac{1}{\|\phi\|_{H_0^1(\Omega)}} \\
&\Longrightarrow \quad \langle I'_\lambda(z), \phi \rangle < 1 + \langle I'_\lambda(u), \phi \rangle.
\end{aligned}$$

Por (5.7), obtemos que

$$z \in H_0^1(\Omega), \|u - z\|_{H_0^1(\Omega)} < \delta \quad \Longrightarrow \quad \langle I'_\lambda(z), \phi \rangle < -1. \tag{5.8}$$

Por outro lado, para $0 < \varepsilon < \min\left\{1, \frac{\delta}{3\|u^+\|_{H_0^1(\Omega)}}, \frac{\delta}{3\|u^-\|_{H_0^1(\Omega)}}, \frac{\delta}{3\|\phi\|_{H_0^1(\Omega)}}\right\}$, $t \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$, $s \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$ e $r \in (0, \varepsilon]$ teremos

$$\begin{aligned}
\|(tu^+ - su^- + r\phi) - u\|_{H_0^1(\Omega)} &= \|(tu^+ - su^- + r\phi) - u^+ + u^-\|_{H_0^1(\Omega)} \\
&\leq |t - 1|\|u^+\|_{H_0^1(\Omega)} + |s - 1|\|u^-\|_{H_0^1(\Omega)} + r\|\phi\|_{H_0^1(\Omega)} \\
&< \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} = \delta.
\end{aligned}$$

Portanto, por (5.8) temos que

$$\langle I'_\lambda(tu^+ + su^- + r\phi), \phi\rangle < -1, \tag{5.9}$$

para todo $r \in (0,\varepsilon]$ e $(s,t) \in D := [1-\varepsilon, 1+\varepsilon] \times [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$.

Agora, considere $\eta : D \longrightarrow [0,\varepsilon]$ uma função suave de modo que $\eta(\partial D) = 0$ e $\eta(1,1) = \varepsilon$, e a função $G : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$G(s,t) = \Big(F([tu^+ - su^- + \eta(s,t)\phi]^-), F([tu^+ - su^- + \eta(s,t)\phi]^+)\Big),$$

onde $F(u) := \langle I'_\lambda(u), u\rangle$. Note que, se $s = 1-\varepsilon$ e $t \in [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$, então

$$F([tu^+ - su^- + \eta(s,t)\phi]^-) > 0. \tag{5.10}$$

De fato, como $(1-\varepsilon, t) \in \partial D$, para todo $t \in [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$, temos que $\eta(1-\varepsilon, t) = 0$, para todo $t \in [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$. Assim, para $s = 1-\varepsilon$, temos que

$$\begin{aligned} [tu^+ - su^- + \eta(s,t)\phi]^- &= [tu^+ - (1-\varepsilon)u^-]^- = \max\{0, -(tu^+ - (1-\varepsilon)u^-)\} \\ &= \max\{0, (1-\varepsilon)u^-\} + \max\{0, -tu^+\} = (1-\varepsilon)u^-. \end{aligned}$$

Desse modo, por a ser decrescente e $0 < (1-\varepsilon)^2 < 1$ obtemos

$$\begin{aligned} F([tu^+ - su^- + \eta(s,t)\phi]^-) &= F((1-\varepsilon)u^-) \\ &= (1-\varepsilon)^2 \int_\Omega a((1-\varepsilon)^2|\nabla u^-|^2)|\nabla u^-|^2 dx - \lambda(1-\varepsilon)^p \int_\Omega |u^-|^p dx \\ &\geq (1-\varepsilon)^2 \int_\Omega a(|\nabla u^-|^2)|\nabla u^-|^2 dx - \lambda(1-\varepsilon)^p \int_\Omega |u^-|^p dx. \end{aligned}$$

Como $u^- \in N_\lambda$, temos que

$$\int_\Omega a(|\nabla u^-|^2)|\nabla u^-|^2 dx = \lambda \int_\Omega |u^-|^p dx. \tag{5.11}$$

Dessa forma,

$$F([tu^+ - su^- + \eta(s,t)\phi]^-) \geq \Big((1-\varepsilon)^2 - (1-\varepsilon)^p\Big) \int_\Omega a(|\nabla u^-|^2)|\nabla u^-|^2 dx > 0.$$

De modo análogo, é possível provar que:

i) $F([tu^+ - su^- + \eta(s,t)\phi]^-) < 0$, se $s = 1+\varepsilon$ e $t \in [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$;

ii) $F([tu^+ - su^- + \eta(s,t)\phi]^+) > 0$, se $t = 1-\varepsilon$ e $s \in [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$;

iii) $F([tu^+ - su^- + \eta(s,t)\phi]^+) < 0$, se $t = 1+\varepsilon$ e $s \in [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$.

Assim, pelo Teorema de Poincaré-Miranda (Teorema C.0.1), existe $(s_0, t_0) \in D$ tal que $G(s_0, t_0) = (0,0)$. Note que, $(s_0, t_0) \in intD$, pois se $(s_0, t_0) \in D - intD = \partial D$, então

$F([tu^+ - su^- + \eta(s,t)\phi]^-) \neq 0$, implicando que $G(s_0, t_0) \neq (0,0)$, que é uma contradição. Além disso, como $G(s_0, t_0) = (0,0)$ temos que

$$\begin{aligned} 0 &= F([t_0u^+ - s_0u^- + \eta(s_0,t_0)\phi]^-) \\ &= \langle I_\lambda'([t_0u^+ - s_0u^- + \eta(s_0,t_0)\phi]^-), [t_0u^+ - s_0u^- + \eta(s_0,t_0)\phi]^- \rangle \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} 0 &= F([t_0u^+ - s_0u^- + \eta(s_0,t_0)\phi]^+) \\ &= \langle I_\lambda'([t_0u^+ - s_0u^- + \eta(s_0,t_0)\phi]^+), [t_0u^+ - s_0u^- + \eta(s_0,t_0)\phi]^+ \rangle. \end{aligned}$$

Portanto, $[t_0u^+ - s_0u^- + \eta(s_0,t_0)\phi]^- \in N_\lambda$ e $[t_0u^+ - s_0u^- + \eta(s_0,t_0)\phi]^+ \in N_\lambda$, consequentemente,

$$t_0u^+ - s_0u^- + \eta(s_0,t_0)\phi \in S_\lambda.$$

Agora, observe que devido a desigualdade (5.9) obtemos

$$\begin{aligned} I_\lambda(t_0u^+ - s_0u^- + \eta(s_0,t_0)\phi) &= I_\lambda(t_0u^+ - s_0u^-) + \int_0^{\eta(s_0,,t_0)} \langle I_\lambda'(t_0u^+ - s_0u^- + r\phi), \phi \rangle dr \\ &\leq I_\lambda(t_0u^+ - s_0u^-) - \eta(s_0,t_0). \end{aligned}$$

Se $(s_0, t_0) = (1,1)$ então $\eta(s_0,t_0) = \varepsilon > 0$ e $I_\lambda(t_0u^+ - s_0u^-) = I_\lambda(u^+ - u^-) = I_\lambda(u) = \beta$. Desse modo,

$$I_\lambda(t_0u^+ - s_0u^- + \eta(s_0,t_0)\phi) \leq \beta - \varepsilon < \varepsilon.$$

Se $(s_0, t_0) \neq (1,1)$, então $I_\lambda(t_0u^+) \leq I_\lambda(u^+)$ e $I_\lambda(s_0u^-) \leq I_\lambda(u^-)$. Com efeito, pelo Lema 5.1.1, existe $t_3 = t_3(u^+) > 0$ tal que $t_3u^+ \in N_\lambda$ e

$$I_\lambda(t_3u^+) = \max_{t>0} I_\lambda(tu^+) \geq I_\lambda(t_0u^+).$$

Além disso, temos que $t_3 = 1$, pois se $t_3 > 1$ então, por $u^+ \in N_\lambda$, $t_3u^+ \in N_\lambda$ e a ser decrescente, teremos

$$\begin{aligned} t_3^p \int_\Omega a(|\nabla u^+|^2)|\nabla u^+|^2 dx &= \lambda t_3^p \int_\Omega |u^+|^p dx = t_3^2 \int_\Omega a(t_3^2|\nabla u^+|^2)|\nabla u^+|^2 dx \\ &\leq t_3^2 \int_\Omega a(|\nabla u^+|^2)|\nabla u^+|^2 dx, \end{aligned}$$

ou seja,

$$(t_3^{p-2} - 1) \int_\Omega a(|\nabla u^+|^2)|\nabla u^+|^2 dx \leq 0.$$

Logo, $t_3 \leq 1$, que é uma contradição. De forma análoga, é possível provar que não podemos ter $t_3 < 1$. Portanto, $t_3 = 1$ e $I_\lambda(u^+) = I_\lambda(t_3u^+) \geq I_\lambda(t_0u^+)$. Analogamente, temos que $I_\lambda(u^-) \geq I_\lambda(s_0u^-)$. Assim, utilizando a Observação 5.0.1, teremos que

$$I_\lambda(t_0u^+ - s_0u^-) = I_\lambda(t_0u^+) + I_\lambda(s_0u^-) \leq I_\lambda(u^+) + I_\lambda(u^-) = I_\lambda(u) = \beta.$$

Desse modo,

$$I_\lambda(t_0u^+ - s_0u^- + \eta(s_0,t_0)\phi) \leq \beta - \eta(s_0,t_0) < \beta.$$

Assim,

$$I_\lambda(t_0u^+ - s_0u^- + \eta(s_0,t_0)\phi) < \beta,$$

que contradiz a definição de β. Portanto, $I'_\lambda(u) = 0$, ou seja, u é ponto crítico de I_λ e uma solução de (5.2).

□

A seguir, apresentaremos um Lema que nos fornece uma estimativa do funcional I_λ sobre N_λ. Destacamos que, para provar tal resultado consultamos Lorca e Ubilla [8].

Lema 5.1.2. *Existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$I_\lambda(u) \geq C\lambda^{-\frac{2}{p-2}}, \tag{5.12}$$

para toda $u \in N_\lambda$

Demonstração. Seja $u \in N_\lambda$. Então, por integração por partes, temos que

$$\int_0^{|\nabla u|^2} ta'(t)dt = a(|\nabla u|^2)|\nabla u|^2 - \int_0^{|\nabla u|^2} a(t)dt. \tag{5.13}$$

Além disso, utilizando o fato de $u \in N_\lambda$, o Teorema B.1.1 e a condição K1), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega a(|\nabla u|^2)|\nabla u|^2 dx &= \frac{\lambda}{p}\int_\Omega |u|^p dx = \frac{\lambda}{p}\|u\|^p_{L^p(\Omega)} \leq \lambda C\|u\|^p_{H^1_0(\Omega)} \\
&= \lambda C\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{p}{2}} = \lambda C\left(\int_\Omega \frac{a(|\nabla u|^2)}{a(|\nabla u|^2)}|\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{p}{2}} \\
&\leq 2\lambda C\left(\int_\Omega a(|\nabla u|^2)|\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{p}{2}}.
\end{aligned}$$

Desse modo,

$$(2C)^{-\frac{2}{p-2}}\lambda^{-\frac{2}{p-2}} \leq \int_\Omega a(|\nabla u|^2)|\nabla u|^2 dx \tag{5.14}$$

Assim, utilizando o fato de $u \in N_\lambda$, equação (5.13) e a estimativa (5.14) teremos que

$$\begin{aligned}
I_\lambda(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega\int_0^{|\nabla u|^2} a(t)dt - \frac{\lambda}{p}\int_\Omega |u|^p dx \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega\left(a(|\nabla u|^2)|\nabla u|^2 - \int_0^{|\nabla u|^2} ta'(t)dt\right)dx - \frac{1}{p}\int_\Omega a(|\nabla u|^2)|\nabla u|^2 dx \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\int_\Omega a(|\nabla u|^2)|\nabla u|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega\int_0^{|\nabla u|^2} ta'(t)dtdx \\
&\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\int_\Omega a(|\nabla u|^2)|\nabla u|^2 dx \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)(2C)^{-\frac{2}{p-2}}\lambda^{-\frac{2}{p-2}}.
\end{aligned}$$

Portanto, $I_\lambda(u) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)(2C)^{-\frac{2}{p-2}}\lambda^{-\frac{2}{p-2}}$.

□

Agora, vamos enunciar e provar um resultado que nos garante a existência de uma função u em S_λ que é o minimo do funcional I_λ sobre S_λ.

Teorema 5.1.2. *Existe pelo menos um minimizador de I_λ em S_λ. Em particular, o problema auxiliar (5.2) possui pelo menos uma solução nodal.*

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência em S_λ tal que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} I_\lambda(u_n) = \beta := \inf_{v\in S_\lambda} I_\lambda(v).$$

Defina

$$v_n = \frac{u_n^+}{\|u_n^+\|_{H_0^1(\Omega)}} - \frac{u_n^-}{\|u_n^-\|_{H_0^1(\Omega)}}.$$

Então, $\|v_n^+\|_{H_0^1(\Omega)} = 1$ e $\|v_n^-\|_{H_0^1(\Omega)} = 1$. De fato, consideremos $V_n^1 := \{x \in \Omega; u_n(x) \leq 0\}$ e $V_n^2 := \{x \in \Omega; u_n(x) \geq 0\}$. Como $v_n^+ = \frac{u_n^+}{\|u_n^+\|_{H_0^1(\Omega)}}$, se $u_n \geq 0$, e $v_n^+ = 0$, se $u_n \leq 0$, temos que

$$\begin{aligned}
\|v_n^+\|^2_{H_0^1(\Omega)} &= \int_\Omega |\nabla v_n^+|^2 dx = \int_{V_n^1} |\nabla v_n^+|^2 dx + \int_{V_n^2} |\nabla v_n^+|^2 dx \\
&= \int_{V_n^2} |\nabla v_n^+|^2 dx = \frac{1}{\|u_n^+\|^2_{H_0^1(\Omega)}} \int_{V_n^2} |\nabla u_n^+|^2 dx \\
&= \frac{1}{\|u_n^+\|^2_{H_0^1(\Omega)}} \int_\Omega |\nabla u_n^+|^2 dx = 1.
\end{aligned}$$

Logo,$\|v_n^+\|_{H_0^1(\Omega)} = 1$. De modo análogo, é possível provar que $\|v_n^-\|_{H_0^1(\Omega)} = 1$. Assim, por (v_n^+) e (v_n^-) serem limitadas em $H_0^1(\Omega)$, existem v^+ e v^- tais que $v_n^+ \rightharpoonup v^+$ e $v_n^- \rightharpoonup v^-$ em $H_0^1(\Omega)$, a menos de uma subsequência (ver [19], Teorema 3.18, p. 69). Além disso, as seguintes condições são válidas:

1. v^+ e v^- tem suportes disjuntos;

2. $v := v^+ - v^- \in H_0^1(\Omega)$.

Agora, mostraremos que $v^+ \neq 0$ e $v^- \neq 0$. Suponha, por contradição, que $v_n^+ \rightharpoonup 0$ em $H_0^1(\Omega)$. Então, para $1 < p < 2^*$, teremos $\int_\Omega |v_n^+|^p dx \longrightarrow 0$. Além disso, pelo Lema 5.1.1, as seguintes condições são satisfeitas:

a) $I_\lambda(sv_n^+) \leq I_\lambda(u_n^+)$, para todo $s > 0$.
Pelo Lema 5.1.1, existe $\overline{s} = \overline{s}(v_n^+) > 0$ tal que $\overline{s}v_n^+ \in N_\lambda$ e $I_\lambda(\overline{s}v_n^+) = \max_{s>0} I_\lambda(sv_n^+)$. Por outra lado, como $u_n \in S_\lambda$ e $v_n^+ = \frac{u_n^+}{\|u_n^+\|_{H_0^1(\Omega)}}$ temos que $I_\lambda(u_n^+) = I_\lambda(\overline{s}v_n^+)$. De fato, como $\overline{s}v_n^+ = s_1 u_n^+$, com $s_1 = \frac{\overline{s}}{\|u_n^+\|_{H_0^1(\Omega)}}$, temos que $s_1 = 1$. Suponha, sem perda

de generalidade, que $s_1 > 1$. Então, por a ser decrescente teremos

$$\begin{aligned} s_1^2 \int_\Omega a(|\nabla(s_1 u_n^+)|^2)|\nabla(u_n^+)|^2 dx &= \lambda s_1^p \int_\Omega |u_n^+|^p dx \\ &= s_1^p \int_\Omega a(|\nabla u_n^+|^2)|\nabla u_n^+|^2 dx \\ &\geq s_1^p \int_\Omega a(|\nabla(s_1 u_n^+)|^2)|\nabla(u_n^+)|^2 dx, \end{aligned}$$

ou seja,

$$(s_1^{p-2} - 1)\int_\Omega a(|\nabla(s_1 u_n^+)|^2)|\nabla(u_n^+)|^2 dx \leq 0 \Longrightarrow s_1 \leq 1,$$

que é uma contradição. Portanto, $s_1 = 1$ e $I_\lambda(\overline{s}v_n^+) = I_\lambda(s_1 u_n^+) = I_\lambda(u_n^+)$.

b) $I_\lambda(tv_n^-) \leq I_\lambda(u_n^-)$, para todo $t > 0$. A prova é análoga ao item anterior.

Por K1) e os itens a) e b), temos que

$$\begin{aligned} I_\lambda(u_n) &= I_\lambda(u_n^+ - u_n^-) = I_\lambda(u_n^+) + I_\lambda(u_n^-) \geq I_\lambda(sv_n^+) + I_\lambda(tv_n^-) \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega A(s^2|\nabla v_n^+|^2)dx + \frac{1}{2}\int_\Omega A(t^2|\nabla v_n^-|^2)dx - \frac{\lambda s^p}{p}\int_\Omega |v_n^+|^p dx - \frac{\lambda t^p}{p}\int_\Omega |v_n^-|^p dx \\ &> \frac{s^2}{4}\int_\Omega |\nabla v_n^+|^2 dx + \frac{t^2}{4}\int_\Omega |\nabla v_n^-|^2 dx - \frac{\lambda s^p}{p}\int_\Omega |v_n^+|^p dx - \frac{\lambda t^p}{p}\int_\Omega |v_n^-|^p dx \\ &= \frac{s^2}{4}\|v_n^+\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \frac{t^2}{4}\|v_n^-\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \frac{\lambda s^p}{p}\int_\Omega |v_n^+|^p dx - \frac{\lambda t^p}{p}\int_\Omega |v_n^-|^p dx \\ &= \frac{s^2}{4} + \frac{t^2}{4} - \frac{\lambda s^p}{p}\int_\Omega |v_n^+|^p dx - \frac{\lambda t^p}{p}\int_\Omega |v_n^-|^p dx, \end{aligned}$$

para todo $s, t > 0$. Fazendo $n \longrightarrow \infty$, obtemos $\beta \geq \frac{s^2}{4} + \frac{t^2}{4}$, para todo $s, t > 0$, que é uma contradição. Portanto, $v^+ \neq 0$. Analogamente, provamos que $v^- \neq 0$. Assim, utilizando a Observação 5.0.1, obtemos que

$$I_\lambda(sv_n^+ - tv_n^-) = I_\lambda(sv_n^+) + I_\lambda(tv_n^-) \leq I_\lambda(u_n^+) + I_\lambda(u_n^-) = I_\lambda(u_n^+ - u_n^-) = I_\lambda(u_n).$$

Observe que, pelo Lema 5.1.1, existem $s_0 = s_0(v^+)$ e $t_0 = t_0(v^-)$ tais que $s_0 v^+, t_0 v^- \in N_\lambda$. Assim, $w = s_0 v^+ - t_0 v^- \in S_\lambda$ e $I_\lambda(w) \geq \inf_{v \in S_\lambda} I_\lambda(v) = \beta$. Além disso, por K2) temos que a função $\varphi_1 : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi_1(u) = \int_\Omega A(|\nabla u|^2)dx. \tag{5.15}$$

é uniformemente convexa. Com efeito, utilizando K1), K2) e a desigualdade de Schwartz, para $u, v \in H_0^1(\Omega)$, teremos que

$$\begin{aligned} \varphi_1''(u)(v,v) &= 2\int_\Omega a'(|\nabla u|^2)(\nabla u.\nabla v)^2 dx + \int_\Omega a(|\nabla u|^2)|\nabla v|^2 dx \\ &\geq 2\int_\Omega a'(|\nabla u|^2)|\nabla u|^2|\nabla v|^2 dx + \int_\Omega a(|\nabla u|^2)|\nabla v|^2 dx \\ &\geq \frac{1}{4}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx = \frac{1}{4}\|v\|^2_{H_0^1(\Omega)} \geq 0. \end{aligned}$$

Desse modo, temos (ver [30], Lema 2.3. p. 1209) que φ_1 é uniformemente convexa. Assim, $\phi_1 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ e convexa, consequentemente, é semicontínua inferior fracamente. Logo,

$$\varphi_1(sv^+) \leq \liminf \phi_1(sv_n^+) \text{ e } \varphi_1(tv^-) \leq \liminf \phi_1(tv_n^-).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
I_\lambda(sv^+ - tv^-) &= I_\lambda(sv^+) + I_\lambda(tv^-) \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega A(s^2|\nabla v^+|^2)dx + \frac{1}{2}\int_\Omega A(t^2|\nabla v^-|^2)dx - \frac{\lambda s^p}{p}\int_\Omega |v^+|^p dx \\
&\quad -\frac{\lambda t^p}{p}\int_\Omega |v^-|^p dx \\
&= \frac{1}{2}\varphi_1(sv^+) + \frac{1}{2}\varphi_1(sv^-) - \frac{\lambda s}{p}\int_\Omega |v^+|^p dx - \frac{\lambda t}{p}\int_\Omega |v^-|^p dx \\
&\leq \frac{1}{2}\lim_{n\longrightarrow\infty}\inf \phi_1(sv_n^+) + \frac{1}{2}\lim_{n\longrightarrow\infty}\inf \phi_1(tv_n^-) - \frac{\lambda s}{p}\lim_{n\longrightarrow\infty}\int_\Omega |v_n^+|^p dx \\
&\quad -\frac{\lambda t}{p}\lim_{n\longrightarrow\infty}\int_\Omega |v_n^-|^p dx \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty}\inf I_\lambda(sv_n^+ - tv_n^-) \\
&\leq \lim_{n\longrightarrow\infty} I_\lambda(u_n) = \beta,
\end{aligned}$$

para cada $s, t > 0$. Em particular, $I_\lambda(w) = I_\lambda(s_0v^+ - t_0v^-) \leq \beta$. Assim, $I_\lambda(w) = \beta$.

Para finalizar, provaremos que $I_\lambda(w) = \beta > -\infty$. De fato, como $s_0v^+, t_0v^- \in N_\lambda$ temos, pelo Lema 5.1.2, que

$$\beta \;=\; I_\lambda(w) = I_\lambda(s_0v^+) + I_\lambda(t_0v^-) \geq 2C\lambda^{-\frac{2}{p-2}} > -\infty.$$

□

5.2 EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO NODAL

Para que possamos apresentar o resultado principal desse capítulo, precisamos do seguinte resultado:

Lema 5.2.1. *Se $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução do problema auxiliar (5.2), então $u \in L^\infty(\Omega)$ e*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\lambda^{\frac{2^*-p+2}{2(2^*-p)}}\|u\|_{L^{2^*}(\Omega)}^{\frac{(p-2)(2^*-p+2)}{2(2^*-p)}}\|u\|_{L^{\eta_0}(\Omega)}, \tag{5.16}$$

onde $\eta_0 = \frac{2.2^*}{2^*-p+2}$ e $C > 0$ uma constante que depende somente de Ω e n.

Demonstração. Seja $\alpha \geq 1$. Considere $|u|^{\alpha-1}u$ como uma função teste em (5.2). Então, por K1), temos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega -div(a(|\nabla u|^2)\nabla u)|u|^{(\alpha-1)}udx &= \int_\Omega a(|\nabla u|^2)\nabla u.\nabla(|u|^{(\alpha-1)}u)dx \\
&= \alpha\int_\Omega a(|\nabla u|^2)|\nabla u|^2|u|^{(\alpha-1)}dx \\
&> \frac{\alpha}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2|u|^{(\alpha-1)}dx.
\end{aligned}$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\frac{2\alpha}{(\alpha+1)^2}\int_\Omega |\nabla(u^{\frac{(\alpha+1)}{2}})|^2dx &= \frac{2\alpha}{(\alpha+1)^2}\int_\Omega \frac{(\alpha+1)^2}{4}|u|^{(\alpha-1)}|\nabla u|^2dx \\
&= \frac{\alpha}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2|u|^{(\alpha-1)}dx \\
&< -\int_\Omega div(a(|\nabla u|^2)\nabla u)|u|^{(\alpha-1)}udx \\
&= \lambda\int_\Omega |u|^{p-2}u|u|^{(\alpha-1)}udx \\
&= \lambda\int_\Omega |u|^{(p-1+\alpha)}dx,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\frac{2\alpha}{(\alpha+1)^2}\int_\Omega |\nabla(u^{\frac{(\alpha+1)}{2}})|^2dx < \lambda\int_\Omega |u|^{(p-1+\alpha)}dx. \tag{5.17}
$$

Considere $v = u^{\frac{(\alpha+1)}{2}}$. Então, pelo Teorema B.1.1, temos que

$$
\left(\int_\Omega |u|^{\frac{2^*(\alpha+1)}{2}}\right)^{\frac{2}{2^*}} = \|v\|^2_{L^{2^*}(\Omega)} \leq C_1\|v\|^2_{H_0^1(\Omega)} = C_1\int_\Omega |\nabla(u^{\frac{(\alpha+1)}{2}})|^2dx, \tag{5.18}
$$

para alguma constante $C_1 > 0$. Utilizando (5.17), (5.18) e a desigualdade de Hölder, obtemos que

$$
\begin{aligned}
\frac{2\alpha}{(\alpha+1)^2}\left(\int_\Omega |u|^{\frac{2^*(\alpha+1)}{2}}\right)^{\frac{2}{2^*}} &\leq \frac{2\alpha}{(\alpha+1)^2}C_1\int_\Omega |\nabla(u^{\frac{(\alpha+1)}{2}})|^2dx \\
&< \lambda C_1\int_\Omega |u|^{(p-1+\alpha)}dx \\
&= \lambda C_1\int_\Omega |u|^{(p-2)}|u|^{\alpha+1}dx \\
&\leq \lambda C_1\left(\int_\Omega |u|^{(p-2)r}dx\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int_\Omega |u|^{(\alpha+1)r'}dx\right)^{\frac{1}{r'}},
\end{aligned}
$$

onde $r = \frac{2^*}{(p-2)}$ e r' é dado de modo que $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'} = 1$. Logo,

$$
\|u\|_{L^{\frac{2^*(\alpha+1)}{2}}(\Omega)} \leq \left[\frac{\lambda C_1(\alpha+1)^2}{2\alpha}\|u\|^{(p-2)}_{L^{2^*}(\Omega)}\right]^{\frac{1}{(\alpha+1)}}\|u\|_{L^{(\alpha+1)r'}(\Omega)}. \tag{5.19}
$$

Agora, considere uma sequência (η_k) em $[0,\infty)$ dada por

$$
\eta_0 = \frac{2r}{r-1} \text{ e } \eta_k = \frac{2^*(r-1)}{2r}\eta_{k-1}, \text{ para todo } k \geq 1. \tag{5.20}
$$

Então, como $2 < p < 2^*$, temos que as seguintes condições são satisfeitas:

1. $\eta_0 < 2^*$.
   Como $\eta_0 = \frac{2r}{r-1} = \frac{2}{2^*-p+2}2^*$ e $2^*-p+2 > 2$, então $\eta_0 < 2^*$.

2. $\eta_{k+1} > \eta_k$, para todo $k \geq 0$.
Com efeito, como

$$2^* \frac{(r-1)}{2r} = \frac{(2^* - p + 2)}{2} > 1, \tag{5.21}$$

temos que $\eta_{k+1} > \eta_k$, para todo $k \geq 0$.

3. $\eta_k \longrightarrow \infty$ quando $k \longrightarrow \infty$.
Para provar esse item, iniciaremos provando que

$$\eta_k = (2^*)^k \left(\frac{r-1}{2r} \right)^{(k-1)}, \tag{5.22}$$

para todo $k \geq 0$. Com efeito, para $k = 0$ e $k = 1$ temos $\eta_0 = \frac{2r}{r-1} = (2^*)^0 \left(\frac{r-1}{2r} \right)^{-1}$ e

$$\eta_1 = \frac{2^*}{2} \left(\frac{r-1}{r} \right) \eta_0 = 2^* = (2^*)^1 \left(\frac{r-1}{2r} \right)^0.$$

Supondo que (5.22) é válida para k, temos que

$$\eta_{k+1} = \frac{2^*}{2} \left(\frac{r-1}{r} \right) \eta_k = \frac{2^*}{2} \left(\frac{r-1}{r} \right) (2^*)^k \left(\frac{r-1}{2r} \right)^{(k-1)} = (2^*)^{(k+1)} \left(\frac{r-1}{2r} \right)^k.$$

Portanto, (5.22) é válida para todo $k \geq 0$. Desse modo, por (5.21) e (5.22) obtemos que

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} \eta_k = \lim_{k \longrightarrow \infty} (2^*)^k \left(\frac{r-1}{2r} \right)^{(k-1)} = \lim_{k \longrightarrow \infty} 2^* \left(2^* \frac{r-1}{2r} \right)^{(k-1)} = \infty,$$

provando o desejado.

Dado $k \geq 0$, escolha $\alpha_k \in \mathbb{R}$ de forma que $\eta_k = (\alpha_k + 1)\frac{r}{r-1}$. Pela equação (5.22), temos que

$$(\alpha_k + 1) \frac{r}{r-1} = \eta_k = (2^*)^k \left(\frac{r-1}{2r} \right)^{(k-1)} \Longrightarrow \alpha + 1 = 2(2^*)^k \left(\frac{r-1}{2r} \right)^k, \tag{5.23}$$

ou seja,

$$\alpha_k = 2 \left(2^* \frac{r-1}{2r} \right)^k - 1 > 1.$$

Além disso,

$$\frac{2^*}{2}(\alpha_k + 1) = (2^*)^{k+1} \left(\frac{r-1}{2r} \right)^k = \eta_{k+1} \tag{5.24}$$

e

$$(\alpha_k + 1) r' = 2 \left(\frac{r-1}{2r} \right)^k \frac{2^*}{2^* - p + 2} = \left(\frac{r-1}{2r} \right)^k \eta_0 = \left(\frac{r-1}{2r} \right)^{k-1} \eta_1 = \eta_k. \tag{5.25}$$

Considerando α_0 em (5.19) e utilizando (5.24) e (5.25), obtemos

$$\|u\|_{L^{\eta_1}(\Omega)} \leq \left[\frac{\lambda C_1 (\alpha_0 + 1)^2}{2\alpha_0} \|u\|_{L^{2^*}(\Omega)}^{(p-2)} \right]^{\frac{1}{(\alpha_0+1)}} \|u\|_{L^{\eta_0}(\Omega)}.$$

Aplicando α_1 em (5.19) e utilizando (5.24) e (5.25), obtemos

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^{\eta_2}(\Omega)} &\leq \left[\frac{\lambda C_1(\alpha_1+1)^2}{2\alpha_1}\|u\|_{L^{2^*}(\Omega)}^{(p-2)}\right]^{\frac{1}{(\alpha_1+1)}}\|u\|_{L^{\eta_1}(\Omega)}\\
&\leq \left[\frac{\lambda C_1(\alpha_1+1)^2}{2\alpha_1}\|u\|_{L^{2^*}(\Omega)}^{(p-2)}\right]^{\frac{1}{(\alpha_1+1)}}\left[\frac{\lambda C_1(\alpha_0+1)^2}{2\alpha_0}\|u\|_{L^{2^*}(\Omega)}^{(p-2)}\right]^{\frac{1}{(\alpha_0+1)}}\|u\|_{L^{\eta_0}(\Omega)}\\
&= \left[\prod_{j=0}^{1}\left[\frac{\lambda C_1(\alpha_j+1)^2}{2\alpha_j}\|u\|_{L^{2^*}(\Omega)}^{(p-2)}\right]^{\frac{1}{(\alpha_j+1)}}\right]\|u\|_{L^{\eta_0}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Prosseguindo com esse argumento, obtemos

$$\|u\|_{L^{\eta_{k+1}}(\Omega)} \leq \left[\prod_{j=0}^{k}\left[\frac{\lambda C_1(\alpha_j+1)^2}{2\alpha_j}\|u\|_{L^{2^*}(\Omega)}^{(p-2)}\right]^{\frac{1}{(\alpha_j+1)}}\right]\|u\|_{L^{\eta_0}(\Omega)},$$

para todo $k \geq 0$. Como $\alpha_j > 1$ temos que

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^{\eta_{k+1}}(\Omega)} &\leq \left[\prod_{j=0}^{k}\left[\lambda C_1(\alpha_j+1)^2\|u\|_{L^{2^*}(\Omega)}^{(p-2)}\right]^{\frac{1}{(\alpha_j+1)}}\right]\|u\|_{L^{\eta_0}(\Omega)}\\
&= \left[\left(\lambda C_1\|u\|_{L^{2^*}(\Omega)}^{(p-2)}\right)^{\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{2\beta^j}}\prod_{j=0}^{k}(2\beta^j)^{\frac{1}{\beta^j}}\right]\|u\|_{L^{\eta_0}(\Omega)},
\end{aligned}$$

onde $\beta := \frac{2^*(r-1)}{2r}$. Portanto,

$$\|u\|_{L^{\eta_{k+1}}(\Omega)} \leq \left[\left(\lambda C_1\|u\|_{L^{2^*}(\Omega)}^{(p-2)}\right)^{\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{2\beta^j}}\prod_{j=0}^{k}(2\beta^j)^{\frac{1}{\beta^j}}\right]\|u\|_{L^{\eta_0}(\Omega)}, \tag{5.26}$$

para todo $k \geq 0$.

Agora, observe que:

i) $\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2\beta^j} = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\beta}\right)^j = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\beta^{-1}}\right) = \frac{2^*-p+2}{2(2^*-p)}$.

ii) $\prod_{j=0}^{\infty}(2\beta^j)^{\frac{1}{\beta^j}} > 0$ é finito. De fato, note que

$$\begin{aligned}
\prod_{j=0}^{\infty}(2\beta^j)^{\frac{1}{\beta^j}} &= \prod_{j=0}^{\infty}e^{ln(2\beta^j)^{\frac{1}{\beta^j}}} = \prod_{j=0}^{\infty}e^{\frac{1}{\beta^j}ln(2\beta^j)} = \prod_{j=0}^{\infty}e^{\frac{1}{\beta^j}(ln2+jln\beta)}\\
&= e^{\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{\beta^j}(ln2+jln\beta)} = e^{ln2\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{\beta^j}+ln\beta\sum_{j=0}^{\infty}\frac{j}{\beta^j}}.
\end{aligned}$$

Considere $b_j = \frac{(\sqrt[j]{j})^j}{\beta^j}$, então

$$\lim_{j\longrightarrow\infty}\sqrt[j]{b_j} = \lim_{j\longrightarrow\infty}\frac{\sqrt[j]{j}}{\beta} = \frac{1}{\beta} < 1.$$

Portanto, a série $\sum_{j=0}^{\infty}\frac{j}{\beta^j}$ é convergente, ou seja, existe $m > 0$ tal que $\sum_{j=0}^{\infty}\frac{j}{\beta^j} = m$. Além disso, $\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\beta}\right)^j = \left(\frac{1}{1-\beta^{-1}}\right) = \frac{2^*-p+2}{(2^*-p)}$. Desse modo,

$$\prod_{j=0}^{\infty}(2\beta^j)^{\frac{1}{\beta^j}} = e^{m(ln2)+ln\beta\left(\frac{2^*-p+2}{(2^*-p)}\right)} > 0$$

é finito.

Fazendo $k \longrightarrow \infty$ em (5.26) obtemos

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\lambda^{\frac{2^*-p+2}{2(2^*-p)}} \|u\|_{L^{2^*}(\Omega)}^{\frac{(p-2)(2^*-p+2)}{2(2^*-p)}} \|u\|_{L^{\eta_0}(\Omega)}, \tag{5.27}$$

onde $C = C_1^{\frac{2^*-p+2}{2(2^*-p)}} \prod_{j=0}^{\infty}(2\beta^j)^{\frac{1}{\beta^j}}$.

$\square$

Observação 5.2.1. *Considere a aplicação $\mathcal{G} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $\mathcal{G}(\eta) = a(|\eta|^2)\eta$, para todo $\eta \in \mathbb{R}^n$. De forma semelhante ao que fizemos na Observação 3.2.1, é possível provar que $\mathcal{G}$ satisfaz as condição do Lema 3.2.1. Por outro lado, se u é solução do problema (3.12), temos que*

$$-div(a(|\nabla u|^2)\nabla u) - \lambda|u|^{(p-2)}u = 0$$

em Ω e utilizando a aplicação $\mathcal{G} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada na equação (3.44), temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left(\mathcal{G}(\nabla u).\nabla v - \lambda|u|^{p-2}u\right) dx &= \int_\Omega (-div(\mathcal{G}(\nabla u)) - \lambda|u|^{(p-2)}u)vdx \\
&= \int_\Omega (-div(a(|\nabla u|^2)|\nabla u|^2) - \lambda|u|^{(p-2)}u)vdx. \\
&= 0
\end{aligned}$$

Assim, pelo Lema 3.2.1 temos que $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ e

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq O(\gamma, k, \Omega, \|\lambda|u|^{(p-2)}u\|_{L^\infty(\Omega)}).$$

Agora, apresentaremos o principal resultado desse capítulo, que é exposto e demonstrado em Bonheure, Delert e Valeriola [4].

Teorema 5.2.1. *Existe $\lambda_1 > 0$ tal que para todo $\lambda \geq \lambda_1$ o problema (5.1) possui pelo menos uma solução nodal $u_\lambda \in H_0^1(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, para cada $\alpha \in (0,1)$. Além disso,*

$$\lim_{\lambda \longrightarrow \infty} \|u_\lambda\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} = 0.$$

Demonstração. Sejam u_λ a solução do problema (5.2) dada pelo Teorema 5.1.2 e $w \in \mathcal{U} := \{v \in H_0^1(\Omega); v^+ \neq 0 \text{ e } v^- \neq 0\}$. Pelo Lema 5.1.1, existem $t^+ = t^+(w^+) > 0$ e $t^- = t^-(w^-) > 0$ de forma que $t^+w^+, t^-w^- \in N_\lambda$, $I_\lambda(t^+w^+) = \max_{t\geq 0} I_\lambda(tw^+)$ e $I_\lambda(t^-w^-) = \max_{t\geq 0} I_\lambda(tw^-)$. Como $t^+w^+ \in N_\lambda$ e $\frac{1}{2} < a(s) \leq 1$, para todo $s \geq 0$, temos que

$$\lambda(t^+)^{(p-1)} \int_\Omega |w^+|^p dx = t^+ \int_\Omega a(|t^+w^+|^2)|\nabla w^+|^2 dx < t^+ \int_\Omega |\nabla w^+|^2 dx,$$

ou seja,

$$t^+ \leq \left[\frac{\int_\Omega |\nabla w^+|^2 dx}{\lambda \int_\Omega |w^+|^p dx}\right]^{\frac{1}{p-2}}. \tag{5.28}$$

De forma análoga, podemos provar que

$$t^- \leq \left[\frac{\int_\Omega |\nabla w^-|^2 dx}{\lambda \int_\Omega |w^-|^p dx}\right]^{\frac{1}{p-2}}. \tag{5.29}$$

Além disso, como $t^+w^+, t^-w^- \in N_\lambda$ temos que $t^+w^+ - t^-w^- \in S_\lambda$. Assim, utilizando a Observação 5.0.1, obtemos que

$$\begin{aligned}
I_\lambda(u_\lambda) &= \min_{v \in S_\lambda} I_\lambda(v) \leq I_\lambda(t^+w^+ - t^-w^-) = I_\lambda(t^+w^+) + I_\lambda(t^-w^-) \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega A(|\nabla(t^+w^+)|^2)dx - \frac{\lambda}{p}\int_\Omega |t^+w^+|^p dx + \frac{1}{2}\int_\Omega A(|\nabla(t^-w^-)|^2)dx \\
&\quad -\frac{\lambda}{p}\int_\Omega |t^-w^-|^p dx \\
&\leq \frac{1}{2}\int_\Omega A(|\nabla(t^+w^+)|^2)dx + \frac{1}{2}\int_\Omega A(|\nabla(t^-w^-)|^2)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \int_0^{|\nabla(t^+w^+)|^2} a(t)dtdx + \frac{1}{2}\int_\Omega \int_0^{|\nabla(t^-w^-)|^2} a(t)dtdx \\
&\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(t^+w^+)|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(t^-w^-)|^2 dx \\
&\leq \frac{1}{2}\left[\frac{\int_\Omega |\nabla w^+|^2 dx}{\lambda \int_\Omega |w^+|^p dx}\right]^{\frac{2}{p-2}} \int_\Omega |\nabla(w^+)|^2 dx + \frac{1}{2}\left[\frac{\int_\Omega |\nabla w^-|^2 dx}{\lambda \int_\Omega |w^-|^p dx}\right]^{\frac{2}{p-2}} \int_\Omega |\nabla(w^-)|^2 dx \\
&= C_1 \lambda^{-\frac{2}{p-2}},
\end{aligned}$$

onde

$$C_1 = \frac{(\int_\Omega |\nabla w^+|^2 dx)^{\frac{p}{p-2}}}{2\,(\int_\Omega |w^+|^p dx)^{\frac{2}{p-2}}} + \frac{(\int_\Omega |\nabla w^-|^2 dx)^{\frac{p}{p-2}}}{2\,(\int_\Omega |w^-|^p dx)^{\frac{2}{p-2}}}.$$

Portanto,

$$I_\lambda(u_\lambda) \leq C_1 \lambda^{-\frac{2}{p-2}}. \tag{5.30}$$

Agora, provaremos que $u_\lambda \in L^\infty(\Omega)$ e existe $C > 0$ tal que

$$\|u_\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\lambda^{-\frac{1}{p-2}}. \tag{5.31}$$

Utilizando o fato de u_λ ser solução do problema (5.2) e a Proposição A.4.1 , obtemos

$$\int_\Omega a(|\nabla u_\lambda|^2)|\nabla u|^2 dx = \int_\Omega -div(a(|\nabla u_\lambda|^2)\nabla u_\lambda)u_\lambda dx = \lambda \int_\Omega |u_\lambda|^p dx. \tag{5.32}$$

Além disso, integrado por partes temos que

$$\int_0^{|\nabla u_\lambda|^2} t a'(t)dt = a(|\nabla u_\lambda|^2)|\nabla u_\lambda|^2 - \int_0^{|\nabla u_\lambda|^2} a(t)dt. \tag{5.33}$$

Por (5.32) e (5.33), K1) e o fato de a ser decrescente, obtemos

$$\begin{aligned}
I_\lambda(u_\lambda) &= \frac{1}{2}\int_\Omega \int_0^{|\nabla u_\lambda|^2} a(t)dtdx - \frac{\lambda}{p}\int_\Omega |u_\lambda|^p dx \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \left[a(|\nabla u_\lambda|^2)|\nabla u_\lambda|^2 - \int_0^{|\nabla u_\lambda|^2} ta'(t)dt\right] dx - \frac{1}{p}\int_\Omega a(|\nabla u_\lambda|^2)|\nabla u_\lambda|^2 dx \\
&= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\int_\Omega a(|\nabla u_\lambda|^2)|\nabla u_\lambda|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega\int_0^{|\nabla u_\lambda|^2} ta'(t)dtdx \\
&\geq \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\int_\Omega a(|\nabla u_\lambda|^2)|\nabla u_\lambda|^2 dx \\
&> \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_\lambda|^2 dx.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\frac{1}{2}\|u_\lambda\|^2_{H_0^1(\Omega)} < I_\lambda(u_\lambda) \leq C_1\lambda^{-\frac{2}{p-2}}.$$

Dessa forma, pelo Teorema B.1.1, temos

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\frac{1}{2}\|u_\lambda\|^2_{L^{2^*}(\Omega)} \leq C_2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\frac{1}{2}\|u_\lambda\|^2_{H_0^1(\Omega)} < C_1C_2\lambda^{-\frac{2}{p-2}},$$

implicando que

$$\|u_\lambda\|_{L^{2^*}(\Omega)} \leq C_3\lambda^{-\frac{1}{p-2}},$$

sendo $C_3 = \left(2C_1C_2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}$. Pelo Lema 5.2.1, existe $C > 0$ tal que

$$\|u_\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\lambda^{\frac{2^*-p+2}{2(2^*-p)}}\|u_\lambda\|_{L^{2^*}(\Omega)}^{\frac{(p-2)(2^*-p+2)}{2(2^*-p)}}\|u_\lambda\|_{L^{\eta_0}(\Omega)},$$

onde $\eta_0 = \frac{2.2^*}{2^*-p+2} < 2^*$. Logo,

$$\|u_\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} < CC_3^2\lambda^{\frac{2^*-p+2}{2(2^*-p)}}\lambda^{-\frac{2^*-p+2}{2(2^*-p)}}\lambda^{-\frac{1}{p-2}} = CC_3^2\lambda^{-\frac{1}{p-2}}. \tag{5.34}$$

Para finalizar, provaremos que u_λ é solução do problema (5.1), para $\lambda > 0$ suficientemente grande. Observe que

$$\|\lambda|u_\lambda|^{(p-2)}u_\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} = \lambda\|u_\lambda\|^{p-1}_{L^\infty(\Omega)} \leq (CC_3^2)^{(p-1)}\lambda^{-\frac{p-1}{p-2}+1} = (CC_3^2)^{(p-1)}\lambda^{-\frac{1}{p-2}}.$$

Desse modo, $\|\lambda|u_\lambda|^{(p-2)}u_\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} \longrightarrow 0$, quando $\lambda \longrightarrow \infty$. Por outro lado, pela Observação 5.2.1, $u_\lambda \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ e $\|u_\lambda\|_{C^{1,\alpha}(\Omega)} \leq O(\|\lambda|u_\lambda|^{(p-2)}u_\lambda\|_{L^\infty(\Omega)})$, quando $\lambda \longrightarrow \infty$. Logo, $\|\nabla u_\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} \longrightarrow 0$, quando $\lambda \longrightarrow \infty$, consequentemente, existe $\lambda_1 > 0$ tal que $\|\nabla u_\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \tau^{\frac{1}{2}}$, para $\lambda \geq \lambda_1$. Por K3), obtemos que $a(|\nabla u_\lambda|^2) = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u_\lambda|^2}}$. Assim, concluímos que u_λ é solução de (5.1). $\square$

6 APLICAÇÕES E EXEMPLOS

Apresentaremos neste capítulo alguns casos particulares dos problemas abordados nos capítulos anteriores. Sendo tal capítulo dividido da seguinte maneira: na primeira seção, iremos expor alguns problemas envolvendo o operador de curvatura média prescrita; na segunda seção, estudaremos um caso particular, para o qual estabeleceremos uma relação entre a solução obtida via Teorema do Passo da Montanha e a variedade de Nehari.

6.1 CLASSE DE PROBLEMAS ENVOLVENDO OPERADORES DE CURVATURA MÉDIA PRESCRITA

A seguir, apresentaremos dois problemas envolvendo operador de curvatura média prescrita, para os quais consultamos Cerda e Iturriaga [9] e Lorca e Ubilla [8].

Exemplo 6.1.1. *Seja $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de Carathéodory que satisfaz as condições H2) e H3) apresentadas no capítulo 3 e Ω um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira $\partial\Omega$ suave. Defina a função $a(t) := \frac{1}{(1+g(|t|^2))^\gamma}$, para $\gamma \geq 0$ e $g : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$ uma função não decrescente de classe C^1. Note que, a satisfaz a condição H1) dada no capítulo 3. Com efeito, dado $R_0 > 0$ consideremos $m_1 = \max\{g'(t^2); t \in [0, R_1]\}$, $\beta_0 = \left(\frac{1+g(R_0^2)}{8\gamma m_1}\right)^{\frac{1}{2}}$ e $R_1 = \min\{R_0, \beta_0\}$. Então, $a \in C^1([0, R_1]; (0, \infty))$ com $a'(t) = -\frac{2\gamma g'(t^2)t}{(1+g(t^2))^{\gamma+1}}$. Além disso, para $t \in [0, R_1]$ e $v_0 = \frac{1}{2(1+g(R_0^2))^\gamma} > 0$, temos que*

$$
\begin{aligned}
2a'(t)t + a(t) &= -\frac{4\gamma g'(t^2)t^2}{(1+g(t^2))^{\gamma+1}} + \frac{1}{(1+g(t^2))^\gamma} \\
&\geq -\frac{4\gamma m_1 t^2}{(1+g(R_0^2))^{\gamma+1}} + \frac{1}{(1+g(R_0^2))^\gamma} \\
&\geq -\left(\frac{4\gamma m_1}{(1+g(R_0^2))^{\gamma+1}}\right)\left(\frac{1+g(R_0^2)}{8\gamma m_1}\right) + \frac{1}{(1+g(R_0^2))^\gamma} \\
&= \frac{1}{2(1+g(R_0^2))^\gamma} = v_0 > 0.
\end{aligned}
$$

Desse modo, aplicando a função $a : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$ definida acima no problema (3.3) obtemos

$$
\begin{cases}
-div\left(\frac{\nabla u}{(1+g(|\nabla u|^2))^\gamma}\right) = \lambda f(x,u), & em\ \Omega, \\
u = 0, & sobre\ \partial\Omega.
\end{cases}
\tag{6.1}
$$

Pelo Teorema 3.2.1, existe pelo menos uma solução do problema (6.1).

Exemplo 6.1.2. *Sejam Ω um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^n$ tal que $\partial\Omega \in C^{1,1}$, $1 < q < \frac{n+2}{n-2}$ e $g : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua satisfazendo as condições F2) e F3) apresentadas no capítulo 4 e tal que*

$$\lim_{u \longrightarrow 0} \frac{g(u)}{u^q} = 0.$$

Defina as funções $f(u) := u^q + g(u)$ e $a(t) := (1+t^2)^{\frac{p-2}{2}}$, para $p < 2$. Note que:

a) *A função f satisfaz as condições F2) e F3) apresentadas no capítulo 4 , pois como g satisfaz tais condições obtemos:*

1. *$F(u) := \int_0^u f(s)ds = \int_0^u s^q + g(s)ds = \frac{u^{q+1}}{(q+1)} + \int_0^u g(s)ds \leq \frac{u^{q+1}}{(q+1)} + \frac{u}{\sigma}g(u)$, com $\sigma > 2$. Assim, considerando $\sigma_1 = \min\{q+1, \sigma\} > 2$ teremos $\sigma_1 F(u) \leq uf(u)$, para $u \in [0, R]$.*
2. *$\frac{f(u)}{u} = u^{q-1} + \frac{g(u)}{u}$ é crescente em $[0, R]$.*

b) *A função a satisfaz a condição F3) apresentada no capítulo 4, pois $a(t) = (1+t^2)^{\frac{p-2}{2}} \geq (1+R^2)^{\frac{(p-2)}{2}} > 0$, para todo $t \in [0, R]$. Portando, $a(t) \geq a(0) > 0$, para todo $t \in [0, R]$.*

Desse modo, aplicando as funções a e f definidas anteriormente no problema (4.1), obtemos

$$\begin{cases} -div((1+|\nabla u|^2)^{\frac{(p-2)}{2}}\nabla u) = \lambda(u^q + g(u)), & em\ \Omega, \\ u = 0, & sobre\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{6.2}$$

e pelo Teorema 4.2.1, o problema (6.2) possui uma solução não trivial, não negativa e C^1.

6.2 ESTUDO DO PROBLEMA $-\Delta u = \lambda |u|^{p-2}u$

Nesta seção, estudaremos o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda |u|^{p-2}u, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{6.3}$$

onde Ω é um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira $\partial\Omega$ suave e $p \in (2, 2^* - 1)$.

Considere as funções $a : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$ e $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $a(t) := 1$, para todo $t \in \mathbb{R}$, e $f(x, s) := |s|^{p-2}s$. Note que as funções a e f satisfazem as condições H1), H2) e H3) dadas no Capítulo 3, e além disso, f é uma função de Carathéodory. Com efeito, considerando $0 < v < 1$ e $R_0 > 0$ temos $a \in C^1([0, R_0]; (0, \infty))$ é uma função não cresceste (mais especificamente, uma função constante) e

$$2a'(t) + a(t) = 1 > v, \text{ para todo } t \in [0, R_0),$$

ou seja, a condição H1) é satisfeita. Para mostrar H2), defina $\phi(x) := 1$, para todo $x \in \Omega$, e $0 < \phi_0 \leq 1$, então

$$\lim_{u \longrightarrow 0} \frac{f(x, u)}{|u|^{p-2}u} = 1 = \phi(x), \text{ para todo } x \in \Omega,$$

e assim garantimos H2). Agora, dados $s_0 > 0$ e $q \in (2, 2^*)$, com $q < p$, tem-se

$$F(x, u) := \int_0^u f(x, s)ds = \int_0^u |s|^{p-2}sds = \frac{|u|^p}{p},$$

para todo $u \in (0, s_0)$ e todo $x \in \Omega$. Dessa forma, teremos

$$qF(x,u) - uf(x,u) = \frac{q}{p}|u|^p - |u|^p < |u|^p - |u|^p = 0.$$

Portanto, $H3)$ é satisfeita. Para cada $s \in \mathbb{R}$, a função $x \in \Omega \longmapsto f(x,s) = |s|^{p-2}s$ é constante, consequentemente, é mensurável. Além disso, dado $x \in \Omega$ fixado, a função $s \in \mathbb{R} \longmapsto f(x,s) = |s|^{p-2}s$ é contínua. Portanto, f é uma função de Carathéodory.

Aplicando as funções a e f definidas anteriormente no problema (3.3) obtemos o problema (6.3). Assim, pelo Teorema 3.2.1 garantimos a existência de pelo menos uma solução não trivial de (6.3). No qual, as soluções fracas do problema são as funções $u \in H_0^1(\Omega)$ tais que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \lambda \int_\Omega |u|^{p-2} uv dx = 0, \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega).$$

Dessa forma, o funcional $I : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ associado ao problema (6.3) é dado por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{p}\int_\Omega |u|^p dx = \frac{1}{2}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \frac{\lambda}{p}\|u\|^p_{L^p(\Omega)},$$

para todo $u \in H_0^1(\Omega)$. Além disso, $I \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ e, para cada $u \in H_0^1(\Omega)$, teremos

$$\langle I'(u), v\rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \lambda \int_\Omega |u|^{p-2} uv dx, \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega).$$

Agora, definimos o funcional

$$\psi(u) := \langle I'(u), u\rangle = \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \lambda\|u\|^p_{L^p(\Omega)} \tag{6.4}$$

e o conjunto

$$N = \left\{u \in H_0^1(\Omega); u \neq 0, \psi(u) = 0\right\}. \tag{6.5}$$

A seguir, definiremos quando um conjunto $M \subset H_0^1(\Omega)$ é uma C^m- subvariedade de codimensão k e apresentaremos um lema que nos fornece informações sobre o conjunto N definido em (6.5). Para abordar tal resultado (assim como os demais que apresentaremos nesta seção) utilizamos como principal referência Costa [21]. Consultamos também o trabalho de Silva [31].

Definição 6.2.1. *Sejam $M \subset H_0^1(\Omega)$, m e k números inteiros maiores iguais a 1. Diremos que M é uma C^m- subvariedade de codimensão k se, para cada $u_0 \mathrm{Im} M$, existe uma vizinhaça aberta U de u_0 e uma função $\varphi \in C^m(U, \mathbb{R}^k)$ tal que*

1. *$\varphi'(u)$ é sobrejetiva, para cada $u \in U$,*

2. *$M \cap U = \{u \in U; \varphi(u) = 0\}$.*

Lema 6.2.1. **i)** *N é uma C^1-subvariedade de $H_0^1(\Omega)$ de codimensão 1, $N \neq \emptyset$ e $0 \notin \overline{N}$.*

ii) *$u \in H_0^1(\Omega) - \{0\}$ é um ponto crítico de I se, e somente se, $u \in N$ e u é ponto crítico de $I|_N$.*

Demonstração. i): Vamos iniciar provando que $N \neq \emptyset$. Para isso, observe que ao considerar a aplicação $0 < t \longmapsto \psi(tv)$, para $0 \neq v \in H_0^1(\Omega)$, teremos que $\psi(tv) > 0$ para $t > 0$ pequeno. De fato, utilizando o Teorema B.1.1, obtemos

$$\begin{aligned}\psi(tv) &= t^2\|v\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \lambda t^p\|v\|^p_{L^p(\Omega)} \geq t^2\|v\|^2_{L^p(\Omega)} - \lambda t^p\|v\|^p_{L^p(\Omega)}\\ &= (1-\lambda t^{p-2}\|v\|^{p-2}_{L^p(\Omega)})t^2\|v\|^2_{L^p(\Omega)}.\end{aligned}$$

Assim, para $t > 0$ suficientemente pequeno temos $(1-\lambda t^{p-2}\|v\|^{p-2}_{L^p(\Omega)}) > 0$, consequentemente, $\psi(tv) > 0$. Além disso, temos que

$$\psi(tv) = t^2\|v\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \lambda t^p\|v\|^p_{L^p(\Omega)} = (\|v\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \lambda t^{p-2}\|v\|^p_{L^p(\Omega)})t^2$$

implicando que

$$\lim_{t\longrightarrow\infty}\psi(tv) = -\infty.$$

Portanto, existe $t_0 > 0$ tal que $\psi(t_0v) = 0$, ou seja, $t_0v \in N$, e concluímos que $N \neq \emptyset$. Agora, vamos para a segunda parte da prova deste lema, isto é, mostrar que N é uma C^1-subvariedade de $H_0^1(\Omega)$. Para isso, note que $\psi \in C^1(H_0^1(\Omega, \mathbb{R}))$. Além disso, $\psi'(u) \neq 0$, para todo $u \in N$. De fato, suponha por contradição, que existe $u \in N$ tal que $\langle\psi'(u), w\rangle = 0$, para todo $w \in H_0^1(\Omega)$, então

$$0 = \langle\psi'(u), w\rangle = 2\int_\Omega \nabla u.\nabla w dx - \lambda p\int_\Omega |u|^{p-2}uwdx, \text{ para todo } w \in H_0^1(\Omega).$$

Em particular, para $w = u$ teremos

$$0 = 2\int_\Omega |\nabla u|^2dx - \lambda p\int_\Omega |u|^pdx \Longrightarrow 2\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \lambda p\|u\|^p_{L^p(\Omega)}.$$

Por outro lado, como $u \in N$ temos que $\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \lambda\|u\|^p_{L^p(\Omega)}$, e dessa forma,

$$2\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \lambda p\|u\|^p_{L^p(\Omega)} = p\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \Longrightarrow p = 2,$$

contrariando o fato que $2 < p < 2^* - 1$. Portanto, $\psi'(u) \neq 0$, para todo $u \in N$, e assim concluímos que N é uma C^1-subvariedade de $H_0^1(\Omega)$ de codimensão 1.

Agora, provaremos que $0 \notin N$. Com efeito, dado $u \in N$, utilizando o Teorema B.1.1 e o fato de $u \in N$, obtemos

$$\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \lambda\|u\|^p_{L^p(\Omega} \leq \lambda C\|u\|^p_{H_0^1(\Omega)} \Longrightarrow \|u\|^{(p-2)}_{H_0^1(\Omega)} \geq \frac{1}{\lambda C} > 0.$$

Portanto, $0 \notin \overline{N}$.
ii): Se $u \in H_0^1(\Omega) - 0$ é um ponto crítico de I, então

$$0 = \langle I'(u), v\rangle = \int_\Omega \nabla u.\nabla v dx - \lambda\int_\Omega |u|^{p-2}uvdx, \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega).$$

Em particular, para $v = u$ temos

$$0 = \langle I'(u), u\rangle \Longrightarrow u \in N. \tag{6.6}$$

Reciprocamente, seja $u \in N$ um ponto crítico de $I|_N$. Então,

$$I'(u) = \alpha\psi'(u),$$

para algum $\alpha \in \mathbb{R}$ (ver [21], Teorema 2.1, p. 51). Ou seja,

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v dx - \lambda \int_\Omega |u|^{p-2} uv dx = \alpha\left[2\int_\Omega \nabla u.\nabla v - \lambda p \int_\Omega |u|^{p-2} uv dx\right],$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. Em particular, para $u \in N$, temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \langle I'(u), u\rangle = \langle \alpha\psi(u), u\rangle = 2\alpha \int_\Omega \nabla u.\nabla u dx - \lambda\alpha p \int_\Omega |u|^{p-2} uu dx \\ &= 2\alpha\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \lambda\alpha p\|u\|^p_{L^p(\Omega)} = 2\alpha\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \alpha p\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \\ &= (2\alpha - p\alpha)\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Assim, $2\alpha - p\alpha = 0$ implicando que $\alpha = 0$, pois $p > 2$. Logo,

$$\langle I'(u), v\rangle = \langle \alpha\psi'(u), v\rangle = 0, \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega),$$

ou seja, u é ponto crítico de I. □

Dado $u \in N$, temos que

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \frac{\lambda}{p}\|u\|^p_{L^p(\Omega)} = \frac{1}{2}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \frac{1}{p}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} > 0,$$

pois $2 < p < 2^* - 1$. Desse modo, temos que

$$c_* := \inf_{u \in N} I(u) \geq 0.$$

A seguir, apresentaremos um lema que nos garante a desigualdade estrita, ou seja, que $c_* > 0$.

Lema 6.2.2. *Seja $c_* = \inf_{u\in N} I(u)$. Então, $c_* > 0$ e*

$$c_* = c_{MP} \tag{6.7}$$

onde $c_{MP} > 0$ é o valor crítico de I, obtido pelo Teorema do Passo da Montanha 2.2.3. Em particular, existe $u \in N$ que é solução do problema (6.3).

Demonstração. Inicialmente verificaremos se o funcional I satisfaz a geometria do passo da montanha, isto é, se as seguintes condições são satisfeitas:

1. Existem $\theta, \delta > 0$ tais que $I(u) \geq \theta$ se $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \delta$.

2. Existe $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\|v_0\|_{H_0^1(\Omega)} > \delta$ e $I(v_0) \leq 0$.

Vamos provar a primeira condição. Seja $u \in H_0^1(\Omega)$. Então, pelo Teorema B.1.1, obtemos

$$I(u) \;=\; \frac{1}{2}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \frac{\lambda}{p}\|u\|^p_{L^p(\Omega)} \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda C}{p}\|u\|^{(p-2)}_{H_0^1(\Omega)}\right)\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

Considerando $0 < \delta < \left(\frac{p}{4\lambda C}\right)^{\frac{1}{(p-2)}}$, $\theta = \frac{\delta^2}{4}$ e $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \delta$ temos

$$I(u) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda C}{p}\delta^{(p-2)}\right)\delta^2 = \frac{\delta^2}{4} = \theta,$$

provando que a primeira condição é satisfeita. Sejam $v \in H_0^1(\Omega)$, com $\|v\|_{H_0^1(\Omega)} = 1$, e $t_0 \in (0,\infty)$ de modo que $t_0 \geq \left(\frac{p}{2\lambda\|v\|^p_{L^p(\Omega)}}\right)^{\frac{1}{(p-2)}}$ e $t_0 > \delta$. Desse modo, considerando $v_0 = t_0 v$ teremos

$$\begin{aligned} I(t_0v) &= \frac{t_0^2}{2}\|v\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \frac{\lambda t_0^p}{p}\|v\|^p_{L^p(\Omega)} = \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda t_0^{p-2}}{p}\|v\|^p_{L^p(\Omega)}\right)t_0^2 \\ &\leq \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda p}{2\lambda p\|v\|^p_{L^p(\Omega)}}\|v\|^p_{L^p(\Omega)}\right)t_0^2 = 0 \end{aligned}$$

Além disso, $\|v_0\|_{H_0^1(\Omega)} = t_0 > \delta$. Portanto, a segunda condição é válida, e assim, I satisfaz a geometria do passo da montanha.

Agora, dado $v \in H_0^1(\Omega)$, defina a função $g(t) = I(tv)$, para todo $t \in (0,\infty)$. Então, o máximo da função g é atingido. Com efeito, observe que:

i) $g(t) \leq 0$, para todo $t \geq \left(\frac{p}{2\lambda\|v\|^p_{L^p(\Omega)}}\right)^{\frac{1}{(p-2)}}$, pois se $t \geq \left(\frac{p}{2\lambda\|v\|^p_{L^p(\Omega)}}\right)^{\frac{1}{(p-2)}}$ teremos

$$\begin{aligned} g(t) = I(tv) &= \frac{t^2}{2}\|v\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \frac{\lambda t^p}{p}\|v\|^p_{L^p(\Omega)} = \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda t^{p-2}}{p}\|v\|^p_{L^p(\Omega)}\right)t^2 \\ &\leq \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda p}{2\lambda p\|v\|^p_{L^p(\Omega)}}\|v\|^p_{L^p(\Omega)}\right)t^2 = 0 \end{aligned}$$

ii) $g(t) = 0$, se $t = \left(\frac{p}{2\lambda\|v\|^p_{L^p(\Omega)}}\right)^{\frac{1}{(p-2)}}$, pois

$$g(t) = I(tv) \;=\; \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda t^{p-2}}{p}\|v\|^p_{L^p(\Omega)}\right)t^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda p}{2\lambda p\|v\|^p_{L^p(\Omega)}}\|v\|^p_{L^p(\Omega)}\right)t^2 = 0$$

iii) $g(t) \geq 0$, se $t \leq \left(\frac{p}{2\lambda\|v\|^p_{L^p(\Omega)}}\right)^{\frac{1}{(p-2)}}$. A prova é feita de forma análoga ao item i).

Portanto, existe $t_0 = t_0(v) > 0$ tal que $g(t_0) = \max_{t>0} g(t)$, e assim, $\langle I'(t_0v), t_0v\rangle = 0$. Desse modo, $t_0v \in N$. Assim, podemos escrever

$$N = \{t_0(v)v; \|v\|_{H_0^1(\Omega)} = 1\}.$$

Para finalizar, considere o conjunto

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0,1]; H_0^1(\Omega)); \gamma(0) = 0, I(\gamma(1)) < 0\}.$$

Pelo Teorema do Passo da Montanha (ver Teorema 2.2.3), temos que

$$c_{MP} := \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{0 \le t \le 1} I(\gamma(t)) > 0$$

é valor crítico de I, ou seja, existe $u_\lambda \in H_0^1(\Omega)$ tal que $I(u_\lambda) = c_{MP}$ e $I'(u_\lambda) = 0$. Assim, pelo Lema 6.2.1, $u_\lambda \in N$ e

$$c_* = \inf_{u \in N} I(u) \le I(u_\lambda) = c_{MP}. \tag{6.8}$$

Por outro lado, dados $v \in N$ e $t > 0$ temos que

$$I(tv) = \left(\frac{1}{2} \|v\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \frac{\lambda t^{p-2}}{p} \|v\|^p_{L^p(\Omega)} \right) t^2. \tag{6.9}$$

Assim,

1. $I(tv) \le 0$, para $t \ge \left(\frac{p\|v\|^2_{H_0^1(\Omega)}}{2\lambda \|v\|^p_{L^p(\Omega)}} \right)^{\frac{1}{(p-2)}}$,

2. $I(tv) \ge 0$, para $0 < t \le \left(\frac{p\|v\|^2_{H_0^1(\Omega)}}{2\lambda \|v\|^p_{L^p(\Omega)}} \right)^{\frac{1}{(p-2)}}$,

3. $I(tv) = 0$, para $t = \left(\frac{p\|v\|^2_{H_0^1(\Omega)}}{2\lambda \|v\|^p_{L^p(\Omega)}} \right)^{\frac{1}{(p-2)}}$.

Dessa forma, existe $t_0 = t_0(v) > 0$ tal que $I(t_0 v) = \max_{t>0} I(tv)$. Fixando $t_1 > \left(\frac{p\|v\|^2_{H_0^1(\Omega)}}{2\lambda \|v\|^p_{L^p(\Omega)}} \right)^{\frac{1}{(p-2)}}$ e $v_1 = t_1 v$ temos $I(v_1) < 0$. Assim, definindo $\gamma(t) := tv_1$, para $t \in [0,1]$, temos que $\gamma \in \Gamma$ e

$$I(t_0 v) \ge I(\gamma(t)), \forall t \in [0,1] \Longrightarrow I(t_0 v) \ge \sup_{0 \le t \le 1} I(\gamma(t)) \ge \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{0 \le t \le 1} I(\gamma(t)) = c_{MP}.$$

Além disso, como $t_0 v \in N$ e $v \in N$ teremos

$$0 = \psi(t_0 v) = t_0^2 \|v\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \lambda t_0^p \|v\|^p_{L^p(\Omega)} = t_0^2 \|v\|^2_{H_0^1(\Omega)} - t_0^p \|v\|^2_{H_0^1(\Omega)} \Longrightarrow t_0 = 1.$$

Dessa modo, obtemos que

$$I(v) = I(t_0 v) \ge c_{MP}.$$

Assim, $c_* = \inf_{u \in N} I(u) \ge c_{MP} > 0$. Portanto, $c_* = c_{MP} = I(u_\lambda)$, onde $u_\lambda \in N$. Em particular, u_λ é solução do problema (6.3). $\square$

7 CONCLUSÃO

Estudamos alguns problemas de valor de fronteira que englobam o operador de curvatura média, para os quais buscamos provar a existência de soluções fracas utilizando uma abordagem variacional sobre problemas auxiliares. No capitulo 3, abordamos o problema (utilizando como principal referência Cerda e Iturriaga [9] e técnica baseada na utilização do Teorema do Passo da Montanha)

$$\begin{cases} -div(a(|\nabla u|^2)\nabla u) = \lambda f(x,u), & \text{em } \Omega; \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{7.1}$$

para o qual foi obtida a garantia da existência de pelo menos uma solução não negativa através do Teorema 3.2.1 e apresentados alguns exemplos no capítulo 6. Entre os exemplos deste problema, temos

$$\begin{cases} -div\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = \lambda |u|^{p-2}u, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{7.2}$$

que é abordado (utilizando outra técnica) no capítulo 5.

No capítulo 4, estudamos o problema (utilizando como principal referência Lorca e Ubilla [8] e principal ferramenta a variedade de Nehari)

$$\begin{cases} -div(a(|\nabla u|)\nabla u) = \lambda f(u), & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{7.3}$$

provando a existência de pelo menos uma solução u_λ não negativa e de classe C^1 deste problema no Teorema 4.2.1. Além disso, apresentamos um exemplo envolvendo o operador de curvatura média no capítulo 6.

No capítulo 5, estudamos o problema (utilizando como principal referência Bonheure, Delert e Valeriola [4] e técnica baseada na variedade de Nehari)

$$\begin{cases} -div\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = \lambda |u|^{p-2}u, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{7.4}$$

para o qual mostramos a existência de pelo menos uma solução nodal u_λ deste problema através do Teorema 5.2.1.

Portanto, conseguimos atingir os objetivos deste trabalho, pois provamos a existência de soluções fracas dos problemas centrais apresentados nos artigos de Cerda e Iturriaga [9], Lorca e Ubilla [8] e Bonheure, Delert e Valeriola [4] utilizando técnicas distintas. Além disso, o problema abordado em Bonheure, Delert e Valeriola [4] possui pelo menos duas soluções distintas: a primeira fornecida pelo Teorema 3.2.1, que é não negativa; e a segunda obtida pelo Teorema 5.2.1, sendo esta uma solução nodal.

REFERÊNCIAS

[1] OBERSNEL, Franco; OMARI, Pierpaolo. Positive solutions of the Dirichlet problem for the prescribed mean curvature equation. **Journal of Differential Equations 249**, p.1674-1725, 2010.

[2] HABETS, Patrick; OMARI, Pierpaolo. Positive solutions of an indefinite prescribed mean curvature problem on a general domain. **Advanced Nonlinear Studies 4**, p. 1-13, 2004.

[3] COFFMAN, Charles V.; ZIEMER, Willian K. A prescribed mean curvature problem on domains without radial symmetry. **SIAM J. Math. Anal.**, v.22, n.4, p. 982-990, 1991.

[4] BONHEURE, Denis; DERLET, Ann; VALERIOLA, Sébastien de. On the multiplicity of nodal solutions of a prescribed mean curvature problem. **Math. Nachr. 286**, p.1072-1086, 2013.

[5] PELETIER, L. A.; SERRIN, J. Ground states for the prescribed mean curvature equation. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v.100, n.4, 1987.

[6] CLÉMENT, Philippe; MANÁSEVICH, Raúl; MITIDIERI, Enzo. On a modified capillary equation. **Journal of Differential Equations 124**, p.343-358, 1996.

[7] FINN, Robert. **Equilibrium capillary surfaces**. New York: Springer-Verlag, 1986.

[8] LORCA, Sebastián; UBILLA, Pedro. Partial differential equations involving subcritical, critical and supercritical nonlinearities. **Nonlinear Analysis 56**, p. 119-131, 2004.

[9] CERDA, Patricio; ITURRIAGA, Leonelo. Existence of solution for quasilinear equations involving local conditions. **Proceedings of the Royal Society of Edinburgh**, p.1-13, 2019.

[10] FIGUEIREDO, Djairo G. de. Métodos variacionais em equações diferenciais. **Matemática Universitária**, n.7, p. 21-47, 1988.

[11] FONDA, A.; GIDONI, P. Generalizing the Poincaré – Miranda theorem: the avoiding cones condition. p. 1-38. Disponível em: `https://www.dmi.units.it/pubblicazioni/Quaderni_Matematici/643_2015.pdf` Acesso em: 14 de Janeiro de 2021.

[12] WILLEM, Michel. **Minimax theorems**. Basel: Birkhäuser, 1996.

[13] FARIA, Luiz Fernando de Oliveira. **Equações elípticas semilineares com dependência do gradiente por passo da montanha**. 2004. Dissertação de mestrado em matemática, Universidade Federal de Minas Gerais.

[14] AMBROSETTI, Antonio; RABINOWITZ, Paul H. Dual variational methods in critical point theory and applications. **Journal of Functional Analysis 14**, p.349-381, 1973.

[15] CHEN, Chao-Nien; TZENG, Shyuh-yaur. Some properties of Palais-Smale sequences with applications to elliptic boundary-value problems. **Electronic Journal of Differential Equations**, v. 1999, n. 17, p. 1-29, 1999.

[16] CICORTA, G. On some generalizations of the Palais-Smale condition. The International Conference "Differential Geometry-Dynamical Systems 2009", p. 49-55, 2009. Disponível em: `http://www.mathem.pub.ro/proc/bsgp-17/K17-CI.pdf` Acesso em: 09 de Setembro de 2020.

[17] FIGUEIREDO, Djairo G. de. **Lectures on the Ekeland variatonal principle with applications and detours**. Tata Institute of Fundamental Research, Springer-Verlag, 1989.

[18] NARIYOSHI, João Fernando da Cunha. **Introdução aos métodos variacionais**. 2014. Monografia, Universidade de São Paulo.

[19] BREZIS, Haim. **Funtional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations**. Springer, 2010.

[20] EVANS, Lawrence C. **Partial Differential Equations**. American Mathematical Society, USA (2010).

[21] COSTA, Davi G. **An Invitation to Variational Methods In Differential Equations**. Boston: Birkhauser, 2007.

[22] LEWY, H.; STAMPACCHIA, G. On Existence and Smoothness of Solutions of Some Non-Coercive Variational Inequalities. **Arch. Rational Mech. Anal.**, Vol. 41, p.241-253, 1971.

[23] GILBARG, David; TRUDINGER, Neil S. **Elliptic partial differential equations of second order**. Reprint of the 1998 edition. Berlim: Springer-Verlag, 2001.

[24] LIMA, Elon Lages. **Análise Real**. Volume 1, Coleção matemática universitária. Rio de Janiero: IMPA, 2016.

[25] BARTSCH, Tomas; WANG, Zhi-Qiang. On the existence of sign changing solutions for semilinear Dirichlet problems. **Topological Methods in Nonlinear Analysis Journal of the Juliusz Schauder Center**, v. 7, p. 115-131, 1996.

[26] CASTRO, Alfonso; COSSIO, Jorge; NEUBERGER, John M. A sign-changing solution for a superlinear Dirichlet problem. **Rocky Mountain Journal of Mathematics**, v.27, n. 4, p. 1041-1053, 1997.

[27] CASTRO, Alfonso; COSSIO, Jorge; NEUBERGER, John M. A minmax principle, index of the critical point, and existence of sign-changing solutions to elliptic boundary value problems. **Electronic Journal of Differential Equations**, v. 1998, n.2, p. 1-18, 1998.

[28] BARTSCH, Tomas; LIU, Zhaoli; WETH, Tobias. Sign changing solutions of superlinear Schrödinger equations. **Communications in Partial Differential Equations**, v. 29, p.25-42, 2004.

[29] AFTALION, Amandine; PACELLA, Filomena. Qualitative properties of nodal solutions of semilinear elliptic equations in radially symmetric domains. **C. R. Acad. Sci. Paris**, p. 339-344, 2004.

[30] NÁPOLI, Pablo de; MARIANI, María Cristina. Mountain pass solutions to equations of p-Laplacian type. **Nonlinear Analysis 54**, p. 1205-1219 , 2003.

[31] SILVA, Rosinângela Cavalcanti da. **Existência de soluções para equações elípticas semilineares envolvendo não linearidades do tipo côncavo-convexas**. 2012. Dissertação de mestrado em matemática, Universidade Federal da Paraíba.

[32] RABINOWITZ, Paul H. **Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations**. Rhode Island: American Mathematical Society Providence, 1986.

[33] ADAMS, Robert A. **Sobolev spaces**. Academic Press, 1975.

APÊNDICE A – CONCEITOS FUNDAMENTAIS

Neste capítulo, apresentaremos alguns conceitos e resultados necessários para estudar os problemas apresentados nos capítulos anteriores. Para isso, utilizamos como referências Brezis [19], Evans [20] e Gilbarg e Trudinger [23].

A.1 ESPAÇOS L^p e L^p_{loc}

Nesta seção apresentaremos as definições e algumas propriedades dos espaços L^p e L^p_{loc}. Assim, sejam Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p \leq \infty$.

Definição A.1.1. *$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} | u$ é Lebesgue mensurável e $\|u\|_{L^p(\Omega) < \infty}\}$, onde*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \begin{cases} \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, & se\ 1 \leq p < \infty; \\ \inf\{C > 0; |u(x)| < C \text{ em quase toda parte em } \Omega\}, & se\ p = \infty, \end{cases}$$

Um resultado importante dos espaços de L^P é a desigualdade de Hölder, que apresentaremos no teorema a seguir.

Teorema A.1.1 (Desigualdade de Hölder)**.** *: Sejam $1 \leq p, q \leq \infty$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$. Então, $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}$$

Demonstração. Ver [19], Teorema 4.6, p. 92. □

Agora, definiremos os espaços L^p_{loc}.

Definição A.1.2. *Dizemos que uma função $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ pertence a $L^p_{loc}(\Omega)$ se $u \in L^p(U)$ para cada $U \subset\subset \Omega$.*

A.2 ESPAÇOS DE HÖLDER E DERIVADA FRACA

Definição A.2.1. *Sejam $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ um multi-índice. Dizemos v é a α-ésima derivada parcial de u, que denotaremos por $D^\alpha u = v$, se satisfaz a equação*

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \varphi dx, \tag{A.1}$$

para toda $\varphi \in C^\infty_c(\Omega)$. Neste caso, v é dita a derivada de u no sentido fraco. Caso a função v não exista, diremos que u não possui derivada no sentido fraco.

Lema A.2.1 (Unicidade da Derivada Fraca)**.** *Uma α-ésima derivada parcial de u, se existir, é unicamente definida a menos de um conjunto de medida nula.*

Demonstração. Ver [20], p. 257. □

Sejam Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, $0 < \gamma \leq 1$. Então:

Definição A.2.2. *Dizemos que uma função $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é Hölder contínua com expoente γ, se existe uma constante $c > 0$ tal que*

$$\|u(x) - u(y)\| \leq c\|x - y\|^\gamma, \forall x, y \in \Omega.$$

Além disso, se $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e limitada escreveremos a norma de u por

$$\|u\|_{C(\overline{\Omega})} := \sup_{x \in \Omega} \|u(x)\|,$$

a semi-norma γ-Hölder de u por

$$[u]_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} := \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ u \neq y}} \frac{\|u(x) - u(y)\|}{\|x - y\|^\gamma},$$

e a norma γ-Hölder

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} := \|u\|_{C(\overline{\Omega})} + [u]_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})}.$$

Definição A.2.3. *Diremos que uma função $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é localmente Hölder contínua com expoente γ em Ω se u é Hölder contínua com expoente γ em subconjuntos compactos de Ω. Denotaremos por $C^{k,\gamma}(\Omega)$ o subespaço de $C^k(\Omega)$ que consiste de todas as funções que tem derivadas parciais de ordem k localmente Hölder contínua com expoente γ em Ω. Além disso, denotaremos $C^{k,0}(\Omega) = C^k(\Omega)$.*

Definição A.2.4. *Definimos os espaços de Hölder, que denotaremos por $C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$, como o espaço de todas as funções $u \in C^k(\overline{\Omega})$ tais que a norma*

$$\|u\|_{C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{C(\overline{\Omega})} + \sum_{|\alpha| = k} [D^\alpha u]_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})}$$

é finita.

A.3 TEOREMA EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO FRACA

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e limitado. Consideremos o problema

$$\begin{cases} Lu = f, & \text{em } \Omega; \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{A.2}$$

onde $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função desconhecida, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é um função dada, L é um operador diferencial parcial de segunda ordem L dado por

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1} b_i(x)u_{x_i} + c(x)u, \tag{A.3}$$

onde as funções a_{ij}, b_i, c são dadas de modo que $a_{ij} = a_{ji}$, para $i, j = 1, ..., n$.

Definição A.3.1 (Condição de Elipticidade)**.** *Dizemos que o operador L definido em (A.3) é (uniformemente) elíptico se existe uma constante $\theta > 0$ tal que*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2, \tag{A.4}$$

para quase todo $x \in \Omega$ e todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Teorema A.3.1 (Primeiro Teorema Existência de Soluções Fracas)**.** *Existe um número $\gamma \geq 0$ tal que para cada $\mu \geq \gamma$ e cada função $f \in L^2(\Omega)$, existe uma única solução fraca $u \in H_0^1(\Omega)$ do problema de valor de fronteira*

$$\begin{cases} Lu + \mu u = f, & em\ \Omega; \\ u = 0, & sobre\ \partial\Omega. \end{cases} \tag{A.5}$$

Demonstração. Ver [20], Teorema 3, p. 319. □

A.4 FÓRMULA DE GREEN

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto, limitado com fronteira $\partial\Omega \in C^1$, $x \in \Omega$ e $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

Teorema A.4.1 (Fórmula de Green)**.** *Sejam $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$. Então,*

i) $\int_\Omega \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS,$

ii) $\int_\Omega \nabla v . \nabla u dx = -\int_\Omega u\Delta v + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \nu} u dS,$

iii) $\int_\Omega u\Delta v - v\Delta u dx = \int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu} dS$

Demonstração. Ver [20], Teorema 3, p. 712. □

Uma generalização do teorema acima é apresentada em Gilbarg e Trudinger [23], dada por:

Teorema A.4.2. *Para qualquer campo vetorial $w \in C^1(\overline{\Omega})$, tem-se que*

$$\int_\Omega divw\ dx = \int_{\partial\Omega} w.\nu\ dS, \tag{A.6}$$

onde ν é a unidade normal externa de $\partial\Omega$ e dS é o elemento de área $(n-1)$ - dimensional em $\partial\Omega$.

Demonstração. Ver [23], p.13. □

Proposição A.4.1. *Sejam $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$. Então,*

$$\int_\Omega v div(a(|\nabla u|^2)\nabla u) dx = \int_{\partial\Omega} a(|\nabla u|^2) v \frac{\partial u}{\partial \nu} dS - \int_\Omega a(|\nabla u|)\nabla u.\nabla v dx, \tag{A.7}$$

sendo $a : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$ uma função de classe C^1.

Demonstração. Considerando $w = va(|\nabla u|^2)\nabla u \in C^1(\overline{\Omega})$ em (A.6) temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} a(|\nabla u|^2) v \frac{\partial u}{\partial \nu} dS &= \int_{\partial\Omega} va(|\nabla u|^2)\nabla u.\nu dS = \int_{\Omega} div(va(|\nabla u|^2)\nabla u) dx \\
&= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(va(|\nabla u|^2)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) dx \\
&= \int_{\Omega} a(|\nabla u|^2)\nabla u.\nabla v dx + \int_{\Omega} v div(a(|\nabla u|^2))\nabla u dx.
\end{aligned}$$

Portanto, equação (A.7) é válida. □

Proposição A.4.2. *Sejam $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$. Então,*

$$\int_{\Omega} v div(a(|\nabla u|))\nabla u dx = \int_{\partial\Omega} a(|\nabla u|) v \frac{\partial u}{\partial \nu} dS - \int_{\Omega} a(|\nabla u|)\nabla u.\nabla v dx, \tag{A.8}$$

sendo $a : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ uma função de classe C^1.

Demonstração. A prova desta proposição é feita de forma análoga a proposição anterior.

□

APÊNDICE B – ESPAÇOS DE SOBOLEV

Neste capítulo, definiremos e apresentaremos algumas propriedades dos espaços de Sobolev. Para tanto, utilizaremos como referências Evans [20], Rabinowitz [32], Adams [33] e Gilbarg e Trudinger [23].

Seja Ω um subconjunto aberto em $\mathbb{R}^n$.

Definição B.0.1. *Os espaços de Sobolev, que denotaremos por $W^{k,p}(\Omega)$, consistem de todas as funções $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que para cada para cada multi-índice α, com $|\alpha| \leq k$, $u \in L^p(\Omega)$ e $D^\alpha u$ existe no sentido fraco e $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$. As normas nesses espaços são dadas por*

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, & se\ 1 \leq p < \infty; \\ \sum_{|\alpha|\leq k} \inf\{C > 0 | |D^\alpha u(x)| < C \text{ em quase toda parte em } \Omega\}, & se\ p = \infty, \end{cases}$$

Denotaremos os espaços $W^{k,2}(\Omega)$ por $H^k(\Omega)$, para $k = 0, 1, 2, \ldots$.

A seguir, apresentaremos algumas noções topológicas que adotaremos nos espaços de Sobolev e alguns resultados que nos auxiliarão no desenvolvimento desse trabalho.

Definição B.0.2. *Sejam $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ e $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Diremos que a sequência $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ converge para u em $W^{k,p}(\Omega)$, e denotaremos por $u_m \longrightarrow u$ em $\{u_m\}_{m=1}^\infty$, se*

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} \|u_m - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 0.$$

Além disso, diremos que $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ converge para u em $W^{k,p}_{loc}(\Omega)$, e escreveremos $u_m \longrightarrow u$ em $W^{k,p}_{loc}(\Omega)$, se $u_m \longrightarrow u$ em $W^{k,p}(U)$, para cada $U \subset\subset \Omega$.

Agora podemos definir o fecho de um conjunto em $W^{k,p}(\Omega)$, mais especificamente, definiremos o fecho de $C_c^\infty(\Omega)$ em $W^{k,p}(\Omega)$, que denotaremos por $W_0^{k,p}(\Omega)$.

Definição B.0.3. *Dizemos que uma função $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ se, e somente se, existe uma sequência de funções $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ em $C_c^\infty(\Omega)$ tal que $u_m \longrightarrow u$ em $W^{k,p}(\Omega)$. Quando $p = 2$, denotaremos $H_0^k(\Omega) := W_0^{k,2}(\Omega)$*

B.1 IMERSÕES NOS ESPAÇOS DE SOBOLEV

Nesta seção, apresentaremos algumas desigualdades importantes, entre elas a desigualdade de Poincaré. Além disso, apresentaremos alguns resultados sobre imersões nos espaços de Sobolev. Para isso, definiremos o conjugado de Sobolev de um número $1 \leq p < n$.

Definição B.1.1. *Seja p, com $1 \leq p < n$, então o conjugado de Sobolev de p, que denotaremos por p^*, é dado por*

$$p^* := \frac{np}{n-p}.$$

Teorema B.1.1 (Estimativas de $W_0^{1,p}$, para $1 \leq p < n$)**.** *Suponha que Ω é um subconjunto limitado e aberto de $\mathbb{R}^n$. Suponha que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ para algum $1 \leq p < n$. Então, teremos a estimativa*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \tag{B.1}$$

para cada $q \in [1, p^*]$, a constante C depende somente de p, q, n e Ω. Em particular, para todo $1 \leq p \leq \infty$ temos que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \tag{B.2}$$

sendo esta desigualdade denominada desigualdade de Poincaré.

Demonstração. Ver [20], Teorema 3, p. 279. □

Observação B.1.1. *Pelo teorema anterior, dada $u \in H_0^1(\Omega)$ temos que*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} = C\|u\|_{H_0^1(\Omega)} < \infty. \tag{B.3}$$

Assim, $H_0^1(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, para cada $q \in [1, 2^*]$.

O teorema que apresentaremos a seguir pode ser visto em Rabinowitz [32].

Teorema B.1.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado em $\mathbb{R}^n$ onde sua fronteira é uma variedade suave, para $n \geq 3$. Se $u \in H_0^1(\Omega)$, então $u \in L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)$ e existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|u\|_{L^t(\Omega)} \leq C\|u\|_{H_0^1(\Omega)}, \tag{B.4}$$

para todo $t \in [1, 2^*]$ e todo $u \in H_0^1(\Omega)$. Além disso, a aplicação imersão $u \in H_0^1(\Omega) \longmapsto u \in L^t(\Omega)$ é compacta para todo $t \in [1, 2^*]$.

Demonstração. [32], Proposição B7, p.90. □

Para obter os resultados a seguir utilizaremos como referências Adams [33] e Gilbarg e Trudinger [23].

Definição B.1.2. *Seja Ω um domínio aberto em $\mathbb{R}^n$. Diremos que Ω satisfaz a propriedade local Lipschitz forte se existem $\delta, M > 0$, uma cobertura abeta localmente finita $\{U_j\}$ de $\partial\Omega$, e para cada U_j uma função real φ_j de $n-1$ variáveis tais que:*

i) *Para algum r, cada coleção de $r+1$ dos conjuntos U_j tem interseção vazia.*

ii) *Para cada par de pontos* $x, y \in \Omega_\delta := \{x \in \Omega; dist(x, \partial\Omega) < \delta\}$, $dist(x, \partial U) = \inf_{z \in \partial\Omega} |x - z|$, *de modo que* $|x - y| < \delta$ *existe* j *tal que*

$$x, y \in := \{x \in U_j; dist(x, \partial U_j) > \delta\}, \tag{B.5}$$

sendo $dist(x, U_j) = \inf_{z \in U_j} |x - z|$.

iii) *Cada função* φ_j *satisfaz uma condição Lipschitz com constante* M*, isto é,*

$$|\varphi_j(\xi_1, ..., \xi_{n-1}) - \varphi_j(\eta_1, ..., \eta_{j-1})| \leq M|(\xi_1 - \eta_1, ..., \xi_{n-1} - \eta_{j-1})|. \tag{B.6}$$

iv) *Para algum sistema de coordenada cartesiana* $(\xi_{j,1}, ..., \xi_{j,n})$ *em* U_j *o conjunto* $\Omega \cap U_j$ *é representado por*

$$\xi_{j,n} < \varphi_j(\xi_{j,1}, ..., \xi_{j,n-1}). \tag{B.7}$$

Observação B.1.2. *Como observado por Adams [33], se* Ω *é limitado, então as condições na Definição B.1.2 podem ser reduzidas a seguinte condição: Para cada* $x \in \partial\Omega$ *existe uma vizinhança* U_x *de* x *tal que* $\partial\Omega \cap U_x$ *é o gráfico de uma função contínua Lipschitz.*

Definição B.1.3. *Dado* $x \in \mathbb{R}^n$*, uma bola aberta* B_1 *com centro em* x *e uma bola aberta* B_2 *que não contém* x*, diremos que o conjunto*

$$C_x = B_1 \cap \{x + \lambda(y - x); y \in B_2, \lambda > 0\} \tag{B.8}$$

é um cone finito em $\mathbb{R}^n$ *com vértices em* x.

Definição B.1.4. *Seja* Ω *um domínio aberto em* $\mathbb{R}^n$*. Diremos que* Ω *satisfaz a propriedade do cone se existe um cone finito* $\mathcal{C}$ *tal que cada* $x \in \Omega$ *é vértice de um cone finito* C_x *contido em* Ω *e congruente a* $\mathcal{C}$.

Observação B.1.3. *Se* Ω *satisfaz a propriedade local Lipschitz forte então* Ω *satisfaz a propriedade do cone.*

Proposição B.1.1. *Seja* Ω *um domínio em* $\mathbb{R}^n$ *que satisfaz a propriedade do cone. Se* $mp < n$ *então* $W^{m,p}(\Omega)$ *está continuamente imerso em* $L^q(\Omega)$*, para* $p \leq q \leq \frac{np}{n-mp}$*. Se* $mp = n$ *então* $W^{m,p}(\Omega)$ *está continuamente imerso em* $L^q(\Omega)$*, para* $p \leq q < \infty$.

Demonstração. Ver [33], Lema 5.14, p. 106. □

Proposição B.1.2. *Seja* Ω *um domínio em* $\mathbb{R}^n$ *que satisfaz a propriedade do cone. Se* $mp > n$*, então* $W^{m,p}(\Omega)$ *está continuamente imerso em* $L^q(\Omega)$*, para* $p \leq q \leq \infty$.

Demonstração. Ver [33], Corolário 5.16, p.108. □

Definição B.1.5. *Um domínio limitado* Ω *em* $\mathbb{R}^n$ *e sua fronteira* $\partial\Omega$ *são de classe* $C^{k,\alpha}$ *(ou* $\Omega \in C^{k,\alpha}$*), para* $0 \leq \alpha \leq 1$*, se para cada ponto* $x_0 \in \partial\Omega$ *existir um bola* $B = B(x_0)$ *e uma aplicação injetiva* $\varphi : B \longrightarrow D \subset \mathbb{R}^n$ *tal que:*

i) $\varphi(B \cap \Omega) \subset \mathbb{R}^n_+$;

ii) $\varphi(B \cap \partial\Omega) \subset \partial\mathbb{R}^n_+$;

iii) $\varphi \in C^{k,\alpha}(\Omega)$, $\varphi^{-1} \in C^{k,\alpha}(D)$.

Observação B.1.4. *Como observado por Gilbarg e Trudinger [23], se $\Omega \in C^{k,\alpha}$ então cada ponto de $\partial\Omega$ tem uma vizinhança na qual $\partial\Omega$ é o gráfico de uma função de classe $C^{k,\alpha}$ de $n-1$ coordenadas.*

Observação B.1.5. *Pela Observações B.1.2, B.1.3 e B.1.4 temos que*

$$\begin{aligned} \Omega \in C^{1,1} &\implies \Omega \text{ satisfaz a propriedade local de Lipshitz forte} \\ &\implies \Omega \text{ satisfaz a propriedade do cone.} \end{aligned}$$

Corolário B.1.1. *Seja $\Omega \in C^{1,1}$. Se $mp > n$, então $W^{m,p}(\Omega)$ está continuamente imerso em $L^q(\Omega)$, para $p \leq q \leq \infty$. Se $mp < n$ então $W^{m,p}(\Omega)$ está continuamente imerso em $L^q(\Omega)$, para $p \leq q \leq \frac{np}{n-mp}$. Se $mp = n$ então $W^{m,p}(\Omega)$ está continuamente imerso em $L^q(\Omega)$, para $p \leq q < \infty$.*

Demonstração. Pela Observação B.1.5, Ω satisfaz a propriedade do cone. Assim, pelas Proposições 4.2.1 e B.1.2 obtemos o resultado desejado. □

Teorema B.1.3. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto limitado tal que $\Omega \in C^{1,1}$ e $1 \leq p < \infty$. Então, dados os inteiros j, m de modo que $j \geq 0$ e $m \geq 1$ tem-se que as seguintes imersões são compactas:*

1. $W^{j+m,p}(\Omega) \subset C^j(\overline{\Omega})$, *se* $mp > n$.

2. $W^{j+m,p}(\Omega) \subset C^{j,\lambda}(\overline{\Omega})$, *se* $mp > n \geq (m-1)p$ *e* $0 < \lambda < m - \frac{n}{p}$.

Demonstração. Ver [33], Teorema 6.2, p. 144. □

APÊNDICE C – TEOREMA DE POINCARÉ - MIRANDA

Neste capítulo, apresentaremos o Teorema de Poincaré-Miranda, para o qual utilizamos como referência o trabalhos de Fonda e Gidoni [11].

Seja $\mathcal{R}$ um retângulo em $\mathbb{R}^n$ dado por

$$\mathcal{R} := [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n], \tag{C.1}$$

onde $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, com $a_k < b_k$, para $k = 1, ..., n$, e

$$\begin{aligned} f : \mathcal{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto f(x) := (f_1(x), ..., f_n(x)) \end{aligned}$$

uma função contínua, onde $f_k : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, para $k = 1, .., n$. Consideremos os conjuntos

$$\mathcal{F}_k^- := \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathcal{R}; x_k = a_k\}$$

e

$$\mathcal{F}_k^+ := \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathcal{R}; x_k = b_k\},$$

para $k = 1, ..., n$.

Teorema C.0.1 (Teorema Poincaré-Miranda)**.** *Suponha que, para $k = 1, .., n$, tenhamos*

$$f_k(x) \begin{cases} \leq 0, & \textit{para cada } x \in \mathcal{F}_k^-, \\ \geq 0, & \textit{para cada } x \in \mathcal{F}_k^+, \end{cases} \tag{C.2}$$

ou

$$f_k(x) \begin{cases} \geq 0, & \textit{para cada } x \in \mathcal{F}_k^-, \\ \leq 0, & \textit{para cada } x \in \mathcal{F}_k^+. \end{cases} \tag{C.3}$$

Então, existe $\overline{x} \in \mathcal{R}$ tal que $f(\overline{x}) = 0$.

Demonstração. Ver [11], Teorema 1, p. 2. □