UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO DE MATEMÁTICA

Manuel Stalin Torres Gonzales

SOLUÇÕES POSITIVAS PARA UMA CLASSE DE EQUAÇÕES ELÍPTICAS DO TIPO KIRCHHOFF VIA MÉTODOS VARIACIONAIS

Juiz de Fora

2020

Manuel Stalin Torres Gonzales

SOLUÇÕES POSITIVAS PARA UMA CLASSE DE EQUAÇÕES ELÍPTICAS DO TIPO KIRCHHOFF VIA MÉTODOS VARIACIONAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação de Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração:

Orientador: Prof. Dr. Fábio Rodrigues Pereira

Coorientador: Prof. Dr. Olimpio Hiroshi Miyagaki

Juiz de Fora

2020

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Torres Gonzáles, Manuel Stalin.
SOLUÇÕES POSITIVAS PARA UMA CLASSE DE EQUAÇÕES ELÍPTICAS DO TIPO KIRCHHOFF VIA MÉTODOS VARIACIONAIS / Manuel Stalin Torres Gonzales. – 2020.
74 f. : il.

Orientador: Fábio Rodrigues Pereira
Coorientador: Olimpio Hiroshi Miyagaki
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas . Programa de Pós-Graduação de Matemática, 2020.

1. Equação de Kirchhoff. 2. Espaços de Sobolev. 3. Problemas não locais. 4. Métodos Variacionais I. Rodrigues Pereira, Fábio, orient. II. Hiroshi Miyagaki, Olimpio, coorient. III. Título.

Manuel Stalin Torres Gonzales

SOLUÇÕES POSITIVAS PARA UMA CLASSE DE EQUAÇÕES ELÍPTICAS DO TIPO KIRCHHOFF VIA MÉTODOS VARIACIONAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Análise

Aprovada em 25 de setembro de 2020

BANCA EXAMINADORA

Fábio Rodrigues Pereira

Prof. Dr. Fábio Rodrigues Pereira - Orientador

Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki - Coorientador

Universidade Federal de São Carlos

Prof. Dr. Augusto César dos Reis Costa

Universidade Federal do Pará

Eduard Toon

Prof. Dr. Eduard Toon

Universidade Federal de Juiz de Fora

Dedico este trabalho a meus pais Fabiola e Francisco.

AGRADECIMENTOS

Nestes últimos dias, fiquei pensando a quem agradecer neste trabalho e comecei a escrever os nomes das pessoas com as quais estou grato e percebi que tinha mais de 250 nomes, e dia após dia, a lista aumentava cada vez mais. Assim, decidi simplificar para não deixar ninguém de fora da lista.

Agradeço a Deus, à minha família, aos meus amigos, aos meus colegas do mestrado e a todos os professores que foram responsáveis pela minha formação até o dia de hoje.

Agradeço de forma especial a meu Orientador Dr. Fábio Rodrigues Pereira e a meu Coorientador Dr. Olimpio Hiroshi Miyagaki, por terem aceitado compartilhar seus conhecimentos comigo.

Agradeço aos professores Dr. Eduard Toon e Dr. Augusto César dos Reis Costa, por aceitarem participar da minha banca examinadora e pelas sugestões cuidadosamente elaboradas para a melhora deste trabalho.

Agradeço também à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior-Brasil (CAPES) e à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG) pelo apoio financeiro, sem o qual este trabalho não seria possível.

"Um cientista digno de seu nome, principalmente um matemático, experimenta no seu trabalho a mesma sensação que um artista; o seu prazer é igualmente grande e da mesma natureza."

Henri Poincaré.

RESUMO

Neste trabalho, trataremos sobre a existência de soluções positivas para problemas de valor de fonteira não-locais do tipo Kirchhoff

$$\begin{cases} -M\left(\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u = f(x,u) \ \text{ em } \ \Omega, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad u = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

em que, Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira suave, M é uma função contínua positiva e f é uma função contínua que possui crescimento subcrítico.

Este trabalho está baseado no artigo [2].

Palavras-chave: Equação de Kirchhoff, Espaços de Sobolev, Problemas não locais, Métodos Variacionais.

ABSTRACT

This work is concerned with the existence of positive solutions for a class of nonlocal boundary value problems of Kirchhoff type

$$\begin{cases} -M\left(\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u = f(x,u) \ \text{ in } \ \Omega, \\ u = 0 \ \text{ on } \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

where, Ω is a smooth bounded domain of $\mathbb{R}^n$, M is a positive function, and f has subcritical growth.

This work is based on the article [2].

Keywords: Kirchhoff equation, Sobolev Spaces, Nonlocal problems, Variational methods.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

(PS)	Condição de Palais-Smale.
$(PS)_c$	Condição de Palais-Smale no nível c.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$	Subconjunto aberto não-vazio e limitado.
$\partial\Omega$	Fronteira de Ω.
$\overline{\Omega}$	Fecho de Ω.
A^c	Complementar do conjunto A.
$med(A)$	Medida de Lebesgue de um subconjunto A de $\mathbb{R}^n$.
$Im(T)$	imagem do operador T.
$B_R(x_0)$	Bola centrada no ponto x_0 de raio R.
∇u	$= \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right)$ é o gradiente de u.
Δu	$= \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ é o Laplaciano de u.
$supp(f)$	Suporte da função f.
$D^\alpha u$	$= \dfrac{\partial^{\lvert\alpha\rvert}}{\partial x_1^{\alpha_1}, \ldots, \partial x_n^{\alpha_n}} u, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é a derivada de ordem $\lvert\alpha\rvert$ de u.
$\lVert \cdot \rVert_0$	Norma definida em $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$.
$C^1(\Omega, \mathbb{R})$	Espaço das funções reais que possuem derivadas contínuas em Ω.
$\lVert \cdot \rVert_{C^1}$	Norma definida em $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$.
$C_o^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$	Espaço das funções reais que possuem derivadas contínuas em $\overline{\Omega}$ com suporte compacto.
$C_o^\infty(\Omega, \mathbb{R})$	Espaço das funções reais infinitamente diferenciáveis com suporte compacto.
$L^p(\Omega)$	Espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$ com norma L^p finita $$\lVert u \rVert_{L^p} = \lVert u \rVert_p = \left(\int_\Omega \lvert u\rvert^p \, dx\right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty.$$
$L^\infty(\Omega)$	Espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$, onde $supess_{x\in\Omega}\lvert u(x)\rvert < \infty$ com norma $$\lVert u \rVert_{L^\infty} = \lVert u \rVert_\infty = \inf\{C > 0 : \lvert u(x)\rvert \leq C \text{ quase sempre em } \Omega\}.$$
$W^{k,p}(\Omega)$	Espaços de Sobolev.
$H^k(\Omega)$	Espaço de Sobolev $W^{k,2}(\Omega)$.

$H_0^1(\Omega)$	Fecho de $C_c^\infty(\Omega)$ com respeito ao espaço $H^1(\Omega)$ com norma dada por $$\|u\|_{H^1} = \left[\int_\Omega (\|\nabla u\|^2 + \|u\|^2)\ dx\right]^{\frac{1}{2}}.$$ A norma considerada em $H_0^1(\Omega)$ é dada por $\|u\|_{H_0^1} = \left[\int_\Omega \|\nabla u\|^2\ dx\right]^{\frac{1}{2}}$.
$H^{-1}(\Omega)$	Espaço dual topológico de $H_0^1(\Omega)$.
$U \hookrightarrow V$	Imersão contínua de U em V.
$U \overset{c}{\hookrightarrow} V$	Imersão compacta de U em V.
$p^* = \dfrac{np}{n-p}$	Expoente crítico de Sobolev com respeito à imersão de Sobolev $$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega).$$ Em particular, é quando $p = 2$, temos que $2^* = \dfrac{2n}{n-2}$ e $$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega),\ 1 \leqslant s \leqslant 2^*$$
X^*	Espaço dual topológico de X.
$\langle \cdot, \cdot \rangle_X$	Produto interno definido em X.
$\to$	Convergência forte.
$\rightharpoonup$	Convergência fraca.
q.t.p.	Quase todo ponto (a menos de um conjunto de medida de Lebesgue nula).
$f = O(g)$	Significa que existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $\|f(x)\| \leq C\|g(x)\|$, para todo x suficientemente próximo de x_0.
$f = o(g)$	Significa que $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\|f(x)\|}{\|g(x)\|} = 0$.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho foi inspirado principalmente pelos resultados de C. O. Alves, F. J. S. A. Corrêa, T. F. Ma no artigo [2].

Consideramos uma classe de problemas não-locais do tipo

$$(P) \qquad \begin{cases} -M(\|u\|^2_{H^1_0})\Delta u = f(x,u) \;\text{ em }\; \Omega, \\ \qquad\qquad\qquad\quad u = 0 \;\text{ sobre }\; \partial\Omega, \end{cases}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado suave, $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ são funções contínuas e Δ é operador laplaciano.

Consideramos a norma usual $\| \cdot \|_{H^1_0}$ no espaço de Sobolev $H^1_0(\Omega)$ dada por

$$\|u\|_{H^1_0} = \left(\int_\Omega |\nabla u^2| dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

A equação (P) é conhecida como um problema do tipo Kirchhoff, pois está relacionada à versão estacionária da equação de Kirchhoff

$$(K) \qquad u_{tt} - M\left(\int_\Omega |\nabla_x u|^2 \, dx \right) \Delta_x u = f(x,t),$$

em que $M(s) = as + b$, com $a, b > 0$, a qual foi proposta por Kirchhoff [18] em 1883. Esta equação estende o problema clássico da onda de D'Alambert, considerando os efeitos da mudança no comprimento da corda durante as vibrações transversais.

A equação (K) recebeu mais atenção somente após a publicação do artigo de J. Lions [19], onde uma abordagem abstrata foi proposta para esse problema.

O interesse sobre tais tipos de problema é devido ao fato de que eles modelam vários sistemas físicos e biológicos, onde u descreve um processo que depende de si mesmo (na média), como por exemplo a densidade populacional (veja [7], [20] e [21] para trabalhos relacionados). Além disso, a equação (P), também tem chamado a atenção dos matemáticos por ser um tipo de problema não-local devido a presença do termo $M\left(\|u\|^2_{H^1_0} \right)$ fazendo com que a equação em questão não seja uma igualdade pontual.

O objetivo principal desse trabalho é, usando ferramentas variacionais, mostrar a existência de soluções positivas para o problema (P) para certas classes de funções M e f. Esse resultado foi obtido em 2005, por C. O. Alves, F. J. S. A. Corrêa e T. F. Ma no interessante artigo [2].

Dividimos a apresentação dessa dissertação da seguinte forma:

No Capítulo 2 (Perturbações Homogêneas), consideramos o problema

$$\begin{cases} -M(\|u\|^2)\Delta u = f(x) \;\text{ em }\; \Omega, \\ \qquad\qquad\quad u = 0 \;\text{ sobre }\; \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

em que Ω é um domínio limitado suave de $\mathbb{R}^n$.

Considerando $f : \Omega \to \mathbb{R}$ como uma função em $L^2(\Omega)$ que satisfaz:

($\hat{f}_1$) f é não-negativa e

$M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo:

(M_1) Existe $m_0 > 0$ tal que $M(t) \geq m_0$, para todo $t \geq 0$.

No teorema 2.0.1, mostramos que o problema (1.1) tem o mesmo número de soluções que uma equação algébrica. A mesma conclusão é obtida, no teorema 2.0.2, quando a não linearidade é p-homogênea do tipo $f(x,u) = u^p$.

No Capítulo 3 (Soluções para uma classe de equações envolvendo o termo Kirchhoff não crescente), consideramos o problema (P) com $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo:

(f_1) A condição de crescimento subcrítico, isto é, f satisfaz

$$|f(x,s)| \leq C(1 + |s|^p), \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

em que $C > 0, 1 < p < 2^* - 1$ se $N \geq 3$ e $1 < p < \infty$ se $N = 1, 2$.

(f_2) $f(x,t) = o(t)$, quando $t \to 0$.

(f_3) Existem $\mu > 2$ e $R > 0$ tais que

$$0 < \mu F(x,t) \leq f(x,t)t, \quad |t| > R.$$

$M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo:

(M_1) $M(t) \geq m_0$, para todo $t \geq 0$ e para algum $m_0 \geq 0$.

(M_2) $\hat{M}(t) \geq M(t)t$ para todo $t \geq 0$.

Nessas condições, usando o Teorema do Passo da Montanha, mostramos o seguinte resultado:

Teorema 1.0.1. *Se $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ é uma função localmente Lipschitziana, satisfazendo as condições descritas acima, então, o problema (P) possui pelo menos uma solução clássica positiva.*

No Capítulo 4 (Uma classe de problemas envolvendo um termo de Kirchhoff limitado que se torna constante), estudamos o problema (P) substituindo a condição (M_2) pela hipótese

($\overline{M}_2$) existe $m_1 \geq m_0$ e existe $t_0 > 0$ tais que $M(t) = m_1$, para todo $t \geq t_0$.

Neste caso, mostramos o seguinte teorema:

Teorema 1.0.2. *Se $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ é uma função localmente Lipschitziana satisfazendo (f_1), (f_2) e (f_3) e $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é uma função que satisfaz (M_1) e $(\overline{M_2})$, com*

$$\frac{m_0}{2} - \frac{m_1}{\mu} > 0,$$

então, o problema (P) possui uma solução (clássica) positiva.

No Capítulo 5 (Soluções para um problema envolvendo uma função de Kirchhoff com crescimento controlado próximo da origem), estudamos o problema (P) com o objetivo de estender o Teorema 1.0.2 para uma classe maior de funções M, incluída as funções lineares crescente. Isso foi feito usando argumentos de truncamento combinado com uma estimativa a priori do tipo Gidas e Spruck (veja [16]).

Mais precisamente, consideramos o problema (P), com as seguintes hipóteses:

$f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e localmente Lipschitziana que satisfaz (f_2), (f_3) e a condição

$(\overline{f}_1)$ $\lim_{t\to\infty} \dfrac{f(x,t)}{t^p} = h(x)$, uniformemente em $\overline{\Omega}$ para alguma função contínua $h > 0$ em $\overline{\Omega}$.

Além disso, $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo (M_1) e as seguintes hipóteses

$(\overline{\overline{M}}_2)$ Existe $\alpha > 0$ tal que $M(\alpha) < \dfrac{\mu m_0}{2}$,

(M_3) $\max\left\{M(\alpha)^{\frac{2-p+q}{p-1}}, M(\alpha)^{\frac{2}{p-1}}\right\} \leq \dfrac{\alpha}{\theta}$, onde $0 < q \leq p$ e $\theta > 0$.

Nestas condições provamos o seguinte teorema:

Teorema 1.0.3. *Se $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e localmente Lipschitziana que satisfaz $(\overline{f}_1)$, (f_2), (f_3) e $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é uma função contínua que satisfaz (M_1), $(\overline{\overline{M}}_2)$ e (M_3), então o problema (P) possui solução (clássica) positiva.*

Finalmente, considerando as mesmas hipóteses do teorema 1.0.3 e adicionando a condição $0 < q < 1$, pelo Teorema do Passo da Montanha e pelo Princípio Variacional de Ekeland, mostramos que o problema

$$(P_\lambda) \qquad \begin{cases} -M(\|u\|^2_{H^1_0})\Delta u = \lambda u^q + f(x,u) \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

possui pelo menos duas soluções positivas. Mais precisamente, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.0.4. *Se f e M são funções contínuas que satisfazem $(\overline{f}_1)$, (f_2), (f_3), (M_1), $(\overline{\overline{M}}_2)$ e (M_3), então dado $0 < q < 1$, existe $\lambda_* > 0$ tal que para cada $\lambda \in (0, \lambda_*)$, o problema (P_λ) possui pelo menos duas soluções positivas u_1 e u_2 satisfazendo $I(u_1) < 0 < I(u_2)$.*

2 PERTURBAÇÕES HOMOGÊNEAS

Neste capítulo, vamos estudar equações do tipo Kirchhoff

$$\begin{cases} -M\left(\|u\|^2_{H^1_0}\right)\Delta u = f(x) \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

em que Ω é um domínio limitado suave de $\mathbb{R}^n$ com $n \geq 1$.

Vamos supor as seguintes condições sobre as funções f e M:

$f : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função em $L^2(\Omega)$ que satisfaz:

$(\hat{f}_1)$ f é não negativa e

$M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo

(M_1) Existe $m_0 > 0$ tal que $M(t) \geq m_0, \forall t \geq 0$.

Com essas hipóteses, no teorema 2.0.1, mostramos que problema (2.1), tem o mesmo número de soluções que uma equação algébrica.

A mesma conclusão é obtida, no teorema 2.0.2, quando a não linearidade é p-homogênea do tipo $f(x,u) = u^p$.

Para iniciarmos o nosso estudo, mostraremos que o problema linear não homogêneo

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x), \text{ em } \Omega, \\ u = 0, \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.2}$$

possui uma única solução. Mais precisamente, temos o seguinte resultado:

Lema 2.0.1. *Seja Ω um domínio limitado suave em $\mathbb{R}^n$ com $n \geq 1$. Se $f \in L^2(\Omega)$, então o problema (2.2) possui solução única.*

Demonstração: Considere o espaço $H^1_0(\Omega)$ e a aplicação $a(.,.)$ definida por

$$a(v,w) = \int_\Omega \nabla v \nabla w \;\; dx, \quad \forall v, w \in H^1_0(\Omega).$$

Note que a é bilinear e além disso, veja que

$$|a(u,w)| \leq \|\nabla u\|_2 \|\nabla w\|_2 \leq \|u\|_{H^1_0} \|w\|_{H^1_0},$$

ou seja, a é contínua.

Por outro lado, pela desigualdade de Poincaré (Ver Apêndice A.1.8), obtemos que

$$|a(v,v)| = \|\nabla v\|^2_2 \geq c\|v\|^2_2,$$

em que c é uma constante positiva.

Portanto, a é coerciva. Além disso, identificando $L^2(\Omega)$ com seu dual temos,

$$H^1_0(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega).$$

Assim, $f \in H^{-1}(\Omega)$ e como $\langle f, v\rangle = \int_\Omega fvdx$, então pelo Teorema de Lax-Milgran (A.1.9), o problema (2.2) possui uma única solução $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega fvdx, \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

□

Observação 2.0.1. *Tomando $v \in C_0^\infty(\Omega)$ temos que $-\int_\Omega \Delta uvdx = \int_\Omega fvdx$. Logo*

$$\int_\Omega (-\Delta u - f)vdx = 0, \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Portanto, no sentido das distribuições

$$-\Delta u = f$$

e como $u \in H_0^1(\Omega)$, então u satisfaz a condição de contorno e consequentemente u é solução clássica para o problema (2.2).

O próximo teorema foi motivado por alguns argumentos de [7] e [8], dedicados à equação do tipo

$$\begin{cases} a\left(\displaystyle\int_\Omega udx\right)\Delta u = f(x), & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Nesse teorema, faremos uma análise do número de soluções de uma equação do tipo Kirchhoff em relação ao número de soluções de uma equação algébrica relacionada a um problema linear. Assim, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.0.1. *Sejam $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função contínua que satisfaz (M_1) e $f \in L^2(\Omega)$ uma função que satisfaz $(\hat{f}_1)$, então o problema (2.1) tem o mesmo número de soluções quanto a equação algébrica $M(t)t^{1/2} = \|\omega\|_{H_0^1}$ (com respeito a t), em que ω é a única solução positiva de*

$$\begin{cases} -\Delta\omega = f(x) & \text{em } \Omega, \\ \omega = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.3}$$

Demonstração: Pelo Lema 2.0.1 e pelo princípio do máximo considere $\omega > 0$ a única solução da equação (2.3) e seja $u = \gamma\omega\|\omega\|_{H_0^1}^{-1}$, com $\gamma > 0$, então $u > 0$ e

$$\begin{aligned} -M(\|u\|_{H_0^1}^2)\Delta u &= -M\left(\|\gamma\omega\|\omega\|_{H_0^1}^{-1}\|_{H_0^1}^2\right)\Delta\left(\gamma\omega\|\omega\|_{H_0^1}^{-1}\right), \\ &= -M\left(\gamma^2\right)\frac{\gamma}{\|\omega\|_{H_0^1}}\Delta\omega, \\ &= M\left(\gamma^2\right)\frac{\gamma}{\|\omega\|_{H_0^1}}f. \end{aligned}$$

Assim, u é solução positiva de (2.1) se, e somente se, u satisfaz $-M(\|u\|_{H_0^1}^2)\Delta u = f(x)$, ou seja, $M(\gamma^2)\dfrac{\gamma}{\|\omega\|_{H_0^1}}$ é igual a 1.

Portanto, u é solução positiva de (2.1) se, e somente se, γ resolve a equação

$$M(\gamma^2)\gamma = \|\omega\|_{H_0^1}.$$

Agora, fazendo $t = \gamma^2 > 0$, temos que, u é solução positiva de (2.1) se, e somente se, t satisfaz a equação algébrica. $\square$

Observação 2.0.2. *A equação algébrica $M(t)t^{\frac{1}{2}} = \|\omega\|_{H_0^1}$, em que $\omega \neq 0$ é uma função conhecida e $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, satisfazendo (M_1) tem solução real pois, pela continuidade de M,*

$$\lim_{t\to 0^+} M(t) = M(0) \geq m_0 > 0.$$

Assim, obtemos que,

$$\lim_{t\to 0^+} M(t)t^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Por outro lado, como $M(t)t^{\frac{1}{2}} > m_0 t^{\frac{1}{2}}$, segue que

$$\lim_{t\to +\infty} M(t)t^{\frac{1}{2}} = +\infty.$$

Agora, definimos a função $g : [0, \infty] \to \mathbb{R}$ por $g(t) = M(t)t^{\frac{1}{2}}$.

Temos que $g(t) \geq 0$, $\quad \lim_{t\to 0^+} g(t) = 0 \quad$ e $\lim_{t\to +\infty} g(t) = +\infty$.

Logo, pelo teorema do valor intermediário, existe $t_0 \in [0, +\infty)$ tal que $g(t_0) = \|\omega\|_{H_0^1}$, ou seja $M(t_0)t_0^{\frac{1}{2}} = \|\omega\|_{H_0^1}$ e assim, a equação algébrica tem solução.

Agora, aplicaremos os resultados acima para estudar a existência de soluções positivas do problema subcrítico

$$\begin{cases} -M(\|u\|_{H_0^1}^2)\Delta u = u^p & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.4}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto e limitado. Faremos isso comparando o problema (2.4) com o problema semilinear

$$\begin{cases} -\Delta\omega = \omega^p & \text{em } \Omega, \\ \omega = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.5}$$

que é conhecido por ter soluções positivas. Este problema foi estudado e generalizado em diferentes direções e pode ser encontrado em [12] (veja também [10],[6],[5]).

Teorema 2.0.2. *Se $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo (M_1), então o problema (2.4) possui tantas soluções positivas quanto a equação*

$$\frac{M(t)}{t^{(p-1)/2}} = \|\omega\|_{H_0^1}^{1-p} \tag{2.6}$$

com respeito a t, em que ω é uma solução positiva de (2.5). Além disso, se

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{M(t)}{t^{(p-1)/2}}=0, \tag{2.7}$$

então o problema (2.4) possui pelo menos uma solução positiva.

Demonstração:

Sejam $t>0$ solução da equação algébrica (2.6) e $\gamma = t^{1/2}\|\omega\|_{H_0^1}^{-1}>0$, em que ω é solução positiva de (2.5).

Defina a função positiva $u=\gamma\omega$. Mostraremos que u é solução positiva de (2.4).

De fato, note que $t=\|\gamma\omega\|_{H_0^1}^2$ e portanto,

$$\begin{aligned}
M(\|\gamma\omega\|_{H_0^1}^2) &= M(t)\\
&= t^{(p-1)/2}\|\omega\|_{H_0^1}^{1-p}\\
&= (t^{1/2-p/2}\|\omega\|_{H_0^1}^{p-1})^{-1}\\
&= (t^{1/2}\|\omega\|_{H_0^1}^{-1}t^{-p/2}\|\omega\|_{H_0^1}^{p})^{-1}\\
&= (\gamma.\gamma^{-p})^{-1}\\
&= \gamma^{p-1}.
\end{aligned}$$

Agora, como $u=\gamma\omega$, $M(\|\gamma\omega\|_{H_0^1}^2)=\gamma^{p-1}$ e ω é solução positiva de (2.5), temos que

$$\begin{aligned}
-M(\|u\|_{H_0^1}^2)\Delta u &= -M(\|\gamma\omega\|_{H_0^1}^2)\gamma\Delta\omega\\
&= -\gamma^{p-1}\gamma\Delta\omega\\
&= (\gamma\omega)^p\\
&= u^p.
\end{aligned}$$

Portanto, $u=\gamma\omega$ é solução positiva de (2.4).

Reciprocamente, seja u uma solução positiva de (2.4).

Defina a função

$$\omega = M\left(\|u\|_{H_0^1}^2\right)^{\frac{-1}{p-1}}u.$$

Temos que ω é solução positiva de (2.5), pois

$$\begin{aligned}
-\Delta\omega &= -M\left(\|u\|_{H_0^1}^2\right)^{\frac{-1}{p-1}}\Delta u\\
&= \frac{u^p}{M\left(\|u\|_{H_0^1}^2\right)}M\left(\|u\|_{H_0^1}^2\right)^{\frac{-1}{p-1}}\\
&= u^pM\left(\|u\|_{H_0^1}^2\right)^{\frac{-p}{p-1}}\\
&= \omega^p.
\end{aligned}$$

Notando que

$$\|\omega\|_{H_0^1}^{1-p} = M\left(\|u\|_{H_0^1}^2\right)\|u\|_{H_0^1}^{1-p},$$

nós temos que $t = \|u\|_{H_0^1}^2 > 0$ é solução da equação algébrica (2.6).

Finalmente, mostraremos que se

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{M(t)}{t^{(p-1)/2}} = 0,$$

então o problema (2.4) possui pelo menos uma solução positiva.

De fato, como o número de soluções positivas da equação algébrica e da equação diferencial coincidem, basta mostrar que a equação (2.6) possui solução. Assim, note que, como $M(t) \geq m_0 > 0$, $\forall t \geq 0$ e $p > 1$, temos que

$$\lim_{t\to+0}\frac{M(t)}{t^{(p-1)/2}} = +\infty.$$

Logo, fixado ω uma solução positiva de (2.5), pela continuidade da função

$$h(t) = \frac{M(t)}{t^{(p-1)/2}}, \quad t > 0$$

e pelo teorema do valor intermediário, a equação $\dfrac{M(t)}{t^{(p-1)/2}} = \|\omega\|_{H_0^1}^{1-p}$ tem uma solução t_0 e consequentemente o problema (2.4) tem solução. $\square$

Observação 2.0.3.

- *O argumento acima é baseado nas propriedades de p-homogeneidade de $f(x,u) = u^p$, e pode ser facilmente estendido para não linearidade dependente de x como $f(x,u) = c(x)u^p$. Se a homogeneidade for descartada, os métodos variacionais ainda poderiam ser aplicadas conforme discutido no próximo capítulo.*

- *Notemos que o problema (2.4) com $0 < p < 1$ foi considerado em [10] em que os resultados da existência foram obtidos usando o método de sub e super soluções e assumindo outras hipóteses para M.*

3 SOLUÇÕES PARA UMA CLASSE DE EQUAÇÕES ENVOLVENDO O TERMO KIRCHHOFF NÃO CRESCENTE

Neste capítulo, vamos considerar o seguinte problema:

$$\begin{cases} -M\left(\|u\|^2_{H^1_0}\right)\Delta u = f(x,u) \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

em que $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz:

(f_1) A condição de crescimento subcrítico, isto é, f satisfaz

$$|f(x,s)| \leq C(1+|s|^p), \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

em que $C > 0, 1 < p < 2^* - 1$ se $N \geq 3$ e $1 < p < \infty$ se $N = 1, 2$.

(f_2) $f(x,t) = o(t)$, quando $t \to 0$.

(f_3) Existem $\mu > 2$ e $R > 0$ tais que

$$0 < \mu F(x,t) \leq f(x,t)t, \quad |t| > R,$$

em que $F(x,t) = \int\limits_0^t f(x,s)\ ds$,

e $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é uma função contínua que satisfaz:

(M_1) $M(t) \geq m_0$, para todo $t \geq 0$ e para algum $m_0 > 0$.

(M_2) $\hat{M}(t) \geq M(t)t$, para todo $t \geq 0$, em que $\hat{M}(t) = \int\limits_0^t M(s)\ ds$.

Observação 3.0.1. *Se $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é uma função estritamente crescente, como por exemplo, o termo clássico de Kirchhoff, $M(t) = at + b$ com $a, b > 0$, então a função $\hat{M} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por $\hat{M}(t) = \int_0^t M(s)ds$ satisfaz $\hat{M}(u) < M(u)u$. De fato, se M é estritamente crescente, então $M(s) < M(u)$, para todo $0 \leq s < u$ assim,*

$$\hat{M}(u) = \int_0^u M(s)ds < \int_0^u M(u)ds = M(u)u.$$

Portanto, neste caso, a condição (M_2) não é satisfeita.

Definição 3.0.1. *Uma função $u \in H^1_0(\Omega)$ é chamada solução fraca de (3.1), se*

$$M(\|u\|^2_{H^1_0})\langle u, \phi\rangle_{H^1_0} - \int\limits_\Omega f(x,u)\phi\ dx = 0,\ \forall \phi \in H^1_0(\Omega), \tag{3.2}$$

em que $\langle u, \phi\rangle_{H^1_0} = \int\limits_\Omega \nabla u \nabla \phi\ dx$.

Para demonstrar o principal teorema deste capítulo, usaremos um resultado clássico conhecido como o Teorema do Passo da Montanha (ver Apêndice A.1.11) devido a A. Ambrosetti e a P. H. Rabinowitz (1973), para o qual precisamos de algumas definições prévias.

Definição 3.0.2. *Dizemos que uma sequência* (u_n) *é uma sequência de Palais-Smale para o funcional* I*, quando* $I(u_n)$ *é limitada e* $|I'(u_n)| \to 0$*, quando* $n \to \infty$*, em que*

$$|I'(u)| = sup\{\langle I'(u), \phi\rangle : \|\phi\|_{H_0^1(\Omega)} = 1\}.$$

Definição 3.0.3. *O funcional* I *satisfaz a condição de Palais-Smale* (PS)*, quando toda sequência de Palais-Smale de* I *possui uma subsequência fortemente convergente.*

TEOREMA DO PASSO DA MONTANHA (Ambrosetti-Rabinowitz [3])

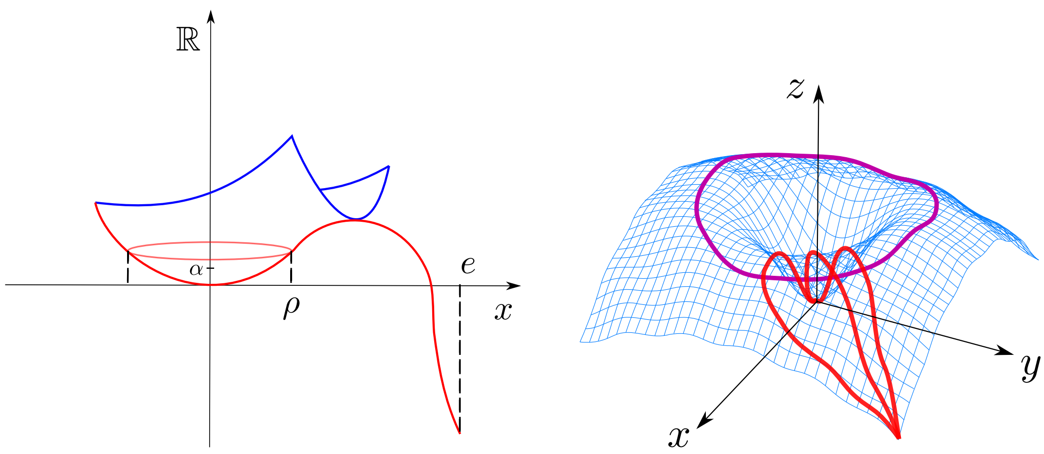
Sejam X *um espaço de Banach e* $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ *satisfazendo a condição (PS). Além disso, suponha que*

- $I(0) = 0$*;*
- *existem* $\alpha, \rho > 0$ *tais que* $I|_{\partial B_\rho(0)} \geq \alpha$*;*
- *existe* $e \in X$ *tal que* $\|e\| > \rho$ *e* $I(e) \leq 0$*.*

Então I *possui um valor crítico*

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma}\{\max_{u \in \gamma([0,1])]} I(u)\},$$

em que $\Gamma = \{\gamma : [0,1] \to X \ \text{contínuos} : \gamma(0) = 0 \ e \ \gamma(1) = e\}$.



Geometria do Passo da Montanha

Vamos considerar a função f localmente Lipschitziana em $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$. Assim, pela teoria de regularidade para EDP (ver [1]), toda solução fraca será também solução clássica.

Considere o seguinte funcional energia associado ao problema 3.1,

$$I : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$

definido por

$$I(u) = \frac{1}{2}\hat{M}(\|u\|^2_{H_0^1}) - \int_\Omega F(x, u^+)\ dx, \tag{3.3}$$

em que

$$\hat{M}(t) = \int_0^t M(s)\ ds \ \text{ e } \ F(x,t) = \int_0^t f(x,s)\ ds. \tag{3.4}$$

De (3.3), temos

$$I'(u)\phi = M(\|u\|^2_{H_0^1})\int_\Omega \nabla u \nabla \phi\ dx - \int_\Omega f(x, u^+)\phi\ dx.$$

Logo, u é ponto crítico do funcional I (isto é, $I'(u)\phi = 0$) se, e somente se,

$$M(\|u\|^2)\int_\Omega \nabla u \nabla \phi\ dx = \int_\Omega f(x,u)\phi\ dx, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega),$$

isto é, u é solução fraca de (3.1). Dado que M é contínua e que f tem crescimento subcrítico, o funcional I definido em $H_0^1(\Omega)$ é de classe C^1 (ver [9]) e combinado aos crescimentos de M e f, podemos obter resultados de existência via métodos minimax. Para usar a teoria dos pontos críticos, mostraremos a condição de compacidade para o funcional I (condição (PS)) e em seguida, enunciaremos um resultado fundamental para a aplicação do Teorema do Passo da Montanha.

Proposição 3.0.1. *Seja $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função que satisfaz (f_2), (f_3) e $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função que satisfaz (M_1) e (M_2). Então o funcional I definido por (3.3) satisfaz a condição (PS).*

Demonstração. Mostraremos primeiro que toda sequência (PS) do funcional I é limitada em $H_0^1(\Omega)$. De fato, seja (u_n) uma sequência (PS) do funcional I, ou seja $|I(u_n)| \le C$ e $I'(u_n) \to 0$, quando $n \to \infty$, então $|I'(u_n)| \le K$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\begin{aligned} I(u_n) - \frac{1}{\mu}I'(u_n)u_n &\le |I(u_n)| + \frac{1}{\mu}\|I'(u_n)\|\|u_n\|_{H_0^1} \\ &\le C + \frac{1}{\mu}K\|u_n\|_{H_0^1} \\ &\le C + c\|u_n\|_{H_0^1}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

onde $c = \max\left\{C, \dfrac{1}{\mu}K\right\}$.

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
I(u_n) - \frac{1}{\mu}I'(u_n)u_n &= I(u_n) - \frac{1}{\mu}M(\|u_n\|^2_{H^1_0})\int\limits_\Omega \nabla u_n \nabla u_n \; dx + \frac{1}{\mu}\int\limits_\Omega f(x,u_n^+)u_n \; dx \\
&= I(u_n) - \frac{1}{\mu}M(\|u_n\|^2_{H^1_0})\|u_n\|^2_{H^1_0} + \frac{1}{\mu}\int\limits_\Omega f(x,u_n^+)u_n \; dx \\
&= \frac{1}{2}\hat{M}(\|u_n\|^2_{H^1_0}) - \frac{1}{\mu}M(\|u_n\|^2_{H^1_0})\|u_n\|^2_{H^1_0} - \int\limits_\Omega F(x,u_n^+) \; dx \\
&\quad + \frac{1}{\mu}\int\limits_\Omega f(x,u_n^+)u_n \; dx.
\end{aligned}
$$

Como M satisfaz (M_2), segue que

$$
\begin{aligned}
I(u_n) - \frac{1}{\mu}I'(u_n)u_n \geq \frac{1}{2}M(\|u_n\|^2_{H^1_0})\|u_n\|^2_{H^1_0} &- \frac{1}{\mu}M(\|u_n\|^2_{H^1_0})\|u_n\|^2_{H^1_0} \\
&+ \int\limits_\Omega \left(\frac{1}{\mu}f(x,u_n^+)u_n - F(x,u_n^+)\right) \; dx \\
= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) M(\|u_n\|^2_{H^1_0})\|u_n\|^2_{H^1_0} &+ \int\limits_\Omega \left(\frac{1}{\mu}f(x,u_n^+)u_n - F(x,u_n^+)\right) \; dx.
\end{aligned}
$$

Seja $A_n = \{x \in \Omega : |u_n(x)| > R\}$, então $A_n^c = \{x \in \Omega : |u_n(x)| \leq R\}$ e $\Omega = A_n \cup A_n^c$. Agora vamos estimar a integral $\int\limits_\Omega \left(\frac{1}{\mu}f(x,u_n^+)u_n - F(x,u_n^+)\right) dx$.

Note que

$$
\begin{aligned}
\int\limits_\Omega \left(\frac{1}{\mu}f(x,u_n^+)u_n - F(x,u_n^+)\right) dx = &\int\limits_{A_n} \left(\frac{1}{\mu}f(x,u_n^+)u_n - F(x,u_n^+)\right) dx \\
&+ \int\limits_{A_n^c} \left(\frac{1}{\mu}f(x,u_n^+)u_n - F(x,u_n^+)\right) dx,
\end{aligned}
$$

Considere o caso em que $u_n \leq 0$, então $u_n^+ = 0$ e $u_n = -u_n^-$.

Logo,

$$
\frac{1}{\mu}f(x,u_n^+)u_n - F(x,u_n^+) = \frac{1}{\mu}f(x,0)(-u_n^-) - F(x,0). \tag{3.6}
$$

Como f satisfaz (f_2), ou seja, $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{|f(x,t)|}{|t|} = 0$ e consequentemente, $\lim\limits_{t\to 0^+}|f(x,t)| = 0$.

Por outro lado, f é contínua, então $\lim\limits_{t\to 0^+}|f(x,t)| = |f(x,0)|$ e assim, pela unicidade do limite, temos que $f(x,0) = 0$.

Agora, como $F(x,0) = 0$, pela equação (3.6), nós obtemos

$$
\frac{1}{\mu}f(x,u_n^+)u_n - F(x,u_n^+) = 0.
$$

Note que em A_n, temos que $u_n(x) > R$ ou $u_n(x) < -R$.

- Se $u_n(x) < -R < 0$, temos que $u_n^+ = 0$ e pelos cálculos feitos anteriormente

$$\frac{1}{\mu} f(x, u_n^+)u_n - F(x, u_n^+) = 0.$$

- Se $u_n(x) > R > 0$, então $u_n(x) = u_n^+(x) > R$, então por (f_3),

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu} I'(u_n)u_n \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 + \int\limits_{A_n} \left(\frac{1}{\mu} f(x, u_n^+)u_n^+ - F(x, u_n^+)\right) dx + \int\limits_{A_n^c} \left(\frac{1}{\mu} f(x, u_n^+)u_n^+ - F(x, u_n^+)\right) dx.$$

Agora nosso objetivo é estimar $\displaystyle\int\limits_{A_n^c} \left(\frac{1}{\mu} f(x, u_n^+)u_n - F(x, u_n^+)\right) dx$.

Seja $g(x,t) = \left|\frac{1}{\mu} f(x, t^+)t - F(x, t^+)\right|$, definida em $\overline{\Omega} \times [-R, R]$.

Note que se $-R \leq t \leq 0$, então $f(x, t^+) = 0$ e $F(x, t^+) = 0$, donde $g(x,t) = 0$.

Agora, se $0 \leq t \leq R$, segue que g é contínua em $\overline{\Omega} \times [0, R]$, logo g é limitada em $\overline{\Omega} \times [0, R]$. Assim, existe $\tilde{c} > 0$ tal que $g(x,t) < \tilde{c}$, ou seja, $\left|\frac{1}{\mu} f(x, t^+)t - F(x, t^+)\right| \leq \tilde{c}$, em $\overline{\Omega} \times [0, R]$ e consequentemente

$$-\tilde{c} \leq \frac{1}{\mu} f(x, t^+)t - F(x, t^+) \leq \tilde{c}.$$

Logo,

$$\int\limits_{A_n^c} \left(\frac{1}{\mu} f(x, u_n^+)u_n - F(x, u_n^+)\right) dx \geq \int\limits_{A_n^c} -\tilde{c}\, dx = -\tilde{c}\; med(A_n^c) \geq -\tilde{c}\; med(\Omega) =: -c.$$

Portanto, por (M_1) e (f_3),

$$\begin{aligned} I(u_n) - \frac{1}{\mu} I'(u_n)u_n &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) M(\|u_n\|^2_{H_0^1})\|u_n\|^2_{H_0^1} \\ &\quad + \int\limits_{A_n} \left(\frac{1}{\mu} f(x, u_n^+)u_n - F(x, u_n^+)\right) dx - c \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) m_0\|u_n\|^2_{H_0^1} - c. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Assim, por (3.5) e (3.7), segue que

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) m_0\|u_n\|^2_{H_0^1} - c \leq k + k\|u_n\|_{H_0^1}.$$

Ou equivalentemente,

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) m_0\|u_n\|^2_{H_0^1} - k\|u_n\|_{H_0^1} \leq C,$$

em que m_0, k e C são constantes positivas.

Portanto, (u_n) é limitada em $H_0^1(\Omega)$, pois $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\mu} > 0$.

Afirmação: Supondo que (f_1) e (M_1) ocorrem, toda sequência (PS) limitada de I, possui uma subsequência que converge forte.

De fato, como (u_n) é uma sequência (PS) qualquer e mostramos acima que é limitada em $H_0^1(\Omega)$, passando a uma subsequência se necessário, podemos admitir que:

1. $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$;

2. $u_n(x) \to u(x)$ q.t.p. em Ω;

3. $u_n \to u$ em $L^q(\Omega)$, para $q \in [1, 2^*)$.

em que os itens 2. e 3., seguem das imersões de Sobolev.

Como $I'(u_n) \to 0$, quando $n \to \infty$ então $I'(u_n)(u_n - u) \to 0$, quando $n \to \infty$.

Logo,

$$M(\|u_n\|^2_{H_0^1}) \int_\Omega \nabla u_n \nabla (u_n - u)\ dx - \int_\Omega f(x, u_n)(u_n - u)\ dx \to 0 \text{ quando } n \to \infty. \tag{3.8}$$

Do crescimento subcrítico de f e da imersão de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, temos que

$$\begin{aligned}
\left| \int_\Omega f(x, u_n)(u_n - u)\ dx \right| &\leq \int_\Omega |f(x, u_n)||(u_n - u)|\ dx \\
&\leq \int_\Omega c(1 + |u_n(x)|^p)|u_n(x) - u(x)|\ dx \\
&= \int_\Omega c|u_n(x) - u(x)|\ dx + \int_\Omega c|u_n(x)|^p|u_n(x) - u(x)|\ dx \\
&\leq c\left(\int_\Omega 1^r\ dx\right)^{1/r} \left(\int_\Omega |u_n(x) - u(x)|^{p+1}\ dx\right)^{\frac{1}{p+1}} \\
&\quad + c\left(\int_\Omega |u_n(x)|^{pr}\ dx\right)^{1/r} \left(\int_\Omega |u_n(x) - u(x)|^{p+1}\ dx\right)^{\frac{1}{p+1}} \\
&\leq c(med(\Omega))^{\frac{1}{r}}\|u_n - u\|_{p+1} + c\|u_n\|^p_{rp}\|u_n - u\|_{p+1} \\
&\leq \tilde{c}\|u_n - u\|_{p+1} + c\|u_n\|^p_{rp}\|u_n - u\|_{p+1},
\end{aligned}$$

onde $\dfrac{1}{p+1} + \dfrac{1}{r} = 1$, o que implica que $r = \dfrac{p+1}{p}$ e assim $rp = p + 1$.

Por outro lado, como u_n é limitada em $H_0^1(\Omega)$ e $H_0^1 \hookrightarrow L^{p+1}$, então $\|u_n\|_{p+1} \leq K\|u_n\|_{H_0^1}$, logo $\|u_n\|_{rp}$ é limitada e consequentemente segue que

$$\int_\Omega f(x, u_n)(u_n - u)\ dx \to 0, \text{quando } n \to \infty, \tag{3.9}$$

pois $2 \leq p+1 < 2^*$ e $u_n \to u$ em $L^{p+1}(\Omega)$.

Agora, por (3.8) e (3.9) em $M(\|u_n\|^2_{H_0^1}) \int\limits_\Omega \nabla u_n \nabla(u_n - u)\, dx \to 0$ e como $M(\|u\|^2_{H_0^1}) \geq m_0$, segue que

$$\int\limits_\Omega \nabla u_n \nabla(u_n - u)\, dx \to 0, \text{quando } n \to \infty.$$

ou seja,

$$\int\limits_\Omega |\nabla u_n|^2\, dx - \int\limits_\Omega \nabla u_n \nabla u\, dx = o_n(1), \tag{3.10}$$

em que $o_n(1) \to 0$, quando $n \to \infty$.

Como u_n converge fracamente a u em $H_0^1(\Omega)$, obtemos:

$$\int\limits_\Omega \nabla u_n \nabla u\, dx \to \int\limits_\Omega |\nabla u|^2\, dx, \text{quando } n \to \infty.$$

Assim,

$$\int\limits_\Omega \nabla u_n \nabla u\, dx = \int\limits_\Omega |\nabla u|^2\, dx + o_n(1), \tag{3.11}$$

em que $o_n(1) \to 0$, quando $n \to \infty$.

Agora, por (3.10) e (3.11)

$$\begin{aligned}
\|u_n - u\|^2_{H_0^1} &= \int\limits_\Omega |\nabla(u_n - u)|^2\, dx \\
&= \int\limits_\Omega |\nabla u_n|^2\, dx - 2\int\limits_\Omega \nabla u_n \nabla u\, dx + \int\limits_\Omega |\nabla u|^2\, dx \\
&= \int_\Omega \nabla u_n \nabla u\, dx + o_n(1) - 2\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx + o_n(1) + \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx,
\end{aligned}$$

nós obtemos que $\|u_n - u\|_{H_0^1} \to 0$, quando $n \to \infty$. □

Teorema 3.0.1. *Seja $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ uma função localmente Lipschitziana satisfazendo a condição de crescimento subcrítico (f_1) e as condições (f_2) e (f_3). Além disso, suponha que M é uma função que satisfaz (M_1) e (M_2). Então, o problema (3.1) possui solução positiva.*

Demostração: Temos da proposição 3.0.1, que o funcional I satisfaz a condição (PS). Agora somente nos resta provar as condições geométricas do Teorema do Passo da Montanha A.1.11 . Vejamos:

(i) Como $I(u) = \dfrac{1}{2}\hat{M}(\|u\|^2_{H_0^1}) - \int_\Omega F(x, u^+)dx$, então

$$I(0) = \frac{1}{2}\hat{M}(0) - \int_\Omega F(x, 0)\, dx = 0,$$

pois,

$$\hat{M}(0) = \int_0^0 M(s) = 0 \quad \text{e} \quad F(x, 0) = \int_0^0 f(x, s) = 0.$$

(ii) Provaremos que existem α, $\rho > 0$ tais que $I|_{\partial B(0,\rho)} \geq \alpha$.
Pela hipótese (f_2), dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x,s)| < \epsilon |s|, \quad \text{se} \quad |s| < \delta. \tag{3.12}$$

Por (f_1), temos que,

$$|f(x,s)| \leq c(1+|s|^p), \quad \text{para todo } x \in \Omega, \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R}, \text{ em que } 1 < p < 2^*-1.$$

Caso 1: Para $|s| \geq 1$, temos que

$$|f(x,s)| \leq c(|s| + |s|^p) \leq c(|s|^p + |s|^p) = 2c|s|^p. \tag{3.13}$$

Caso 2: Para $\delta \leq |s| \leq 1$ e $p > 1$, temos que $\delta^p \leq |s|^p \leq 1$, o que implica que $c \leq \dfrac{c}{\delta^p}|s|^p \leq \dfrac{c}{\delta^p}$, logo,

$$|f(x,s)| \leq c + c|s|^p \leq \tilde{c}|s|^p + c|s|^p = k|s|^p, \tag{3.14}$$

onde, $\tilde{c} = \dfrac{c}{\delta^p}$ e $k = c + \tilde{c}$.

Assim, por (3.12), (3.13) e (3.14), temos que

$$|f(x,s)| \leq \epsilon |s| + \tilde{k}|s|^p, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \Omega. \tag{3.15}$$

Logo,

$$\left| \int_0^t f(x,s)ds \right| \leq \int_0^t |f(x,s)|ds \leq \epsilon \int_0^t |s|ds + \tilde{k} \int_0^t |s|^p ds,$$

daí que,

$$|F(x,t)| \leq \epsilon t^2 + \overline{c}|t|^{p+1}, \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \forall x \in \Omega. \tag{3.16}$$

Portanto, por (M_1),

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{1}{2}M(\|u\|^2_{H^1_0})\|u\|^2_{H^1_0} - \int_\Omega (\epsilon(u^+)^2 + \overline{c}|u^+|^{p+1})dx \\ &\geq \frac{1}{2}m_0\|u\|^2_{H^1_0} - \epsilon \int_\Omega (u^+)^2 - \overline{c}\int_\Omega (u^+)^{p+1}dx. \end{aligned}$$

Por outro lado, como

$$|u^+| = u^+ \leq |u| = u^+ + u^-,$$

segue que

$$\int_\Omega |u^+|^2 dx \leq \int_\Omega |u|^2 dx \quad \text{e} \quad \int_\Omega |u^+|^{p+1}dx \leq \int_\Omega |u|^{p+1}dx.$$

Além disso, como $H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ e $H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$. Então

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{1}{2}m_0\|u\|^2_{H^1_0} - \epsilon r\|u\|^2_{H^1_0} - \overline{c}\ \overline{r}\|u\|^{p+1}_{H^1_0} \\ &= \left(\frac{1}{2}m_0 - \epsilon r\right)\|u\|^2_{H^1_0} - \overline{c}\ \overline{r}\|u\|^{p+1}_{H^1_0}, \end{aligned}$$

onde r e $\overline{r}$ são constantes positivas. Seja $\epsilon = \epsilon_0 > 0$ suficientemente pequeno tal que $\dfrac{1}{2}m_0 - \epsilon_0 r > 0$.

Portanto, se $\|u\|_{H_0^1} = \rho$ é suficientemente pequeno, nós temos que $I(u) \geq \alpha$, onde $\alpha = \left(\dfrac{1}{2}m_0 - \epsilon_0 r\right)\rho^2 - \overline{c}\ \overline{r}\rho^{p+1} > 0$.

(iii) Mostremos que existe $e \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\|e\|_{H_0^1} > \rho$ e $I(e) < 0$.
De fato, sejam $u_0 \in C_0^\infty(\Omega)$, com $u_0(x) \geq 0$ em $\overline{\Omega}$ e $t > 0$. Assim, segue que,

$$\begin{aligned} I(tu_0) &= \frac{1}{2}\hat{M}(\|tu_0\|^2_{H_0^1}) - \int_\Omega F(x,(tu_0)^+)dx \\ &= \frac{1}{2}\hat{M}(\|tu_0\|^2_{H_0^1}) - \int_\Omega F(x,tu_0)dx. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Agora vamos estimar a seguinte integral,

$$\int_\Omega F(x,tu_0)\ dx. \tag{3.18}$$

Pela hipótese (f_3), existem $\mu > 2$ e $R > 0$ tais que

$$0 < \mu F(x,s) \leq f(x,s)s, \text{ para todo } |s| > R.$$

Caso 1: Se $s > R > 0$, então

$$0 < \frac{\mu}{s} \leq \frac{f(x,s)}{F(s,x)}, \quad \forall s > R, \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Integrando de R a s temos,

$$0 < \int_R^s \frac{\mu}{t}dt \leq \int_R^s \frac{f(x,t)}{F(x,t)}dt.$$

Logo,

$$\mu|ln(t)|\Big|_R^s \leq ln|F(x,t)|\Big|_R^s, \quad \forall s > R, \quad \forall x \in \overline{\Omega},$$

e consequentemente,

$$\mu(ln(s) - ln(R)) \leq ln|F(x,s)| - ln|F(x,R)|, \quad \forall s > R, \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Portanto,

$$ln\left(\frac{s}{R}\right)^\mu \leq ln\left(\frac{F(x,s)}{F(x,R)}\right), \quad \forall s > R, \quad \forall x \in \overline{\Omega},$$

e daí segue que

$$\left(\frac{s}{R}\right)^\mu \leq \frac{F(x,s)}{F(x,R)}, \quad \forall s > R, \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Assim,

$$F(x,s) \geq \frac{F(x,R)}{R^\mu}s^\mu, \quad \forall s > R, \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Seja $k = min\{F(x,R) : x \in \overline{\Omega}\}$, então

$$F(x,s) \geq \frac{k}{R^\mu} s^\mu = c_1 s^\mu, \quad \forall s > R, \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Caso 2: Se $s < -R < 0$, temos da hipótese (f_3) que:

$$\frac{f(x,s)}{F(x,s)} \leq \frac{\mu}{s}, \quad \forall s < -R, \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Logo

$$\int_s^{-R} \frac{f(x,t)}{F(x,t)}\, dt \leq \int_s^{-R} \frac{\mu}{t}\, dt, \quad \forall s < -R, \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Analogamente ao primeiro caso, obtemos

$$F(x,s) \geq c_2 |s|^\mu, \quad \forall s < -R, \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Seja $A = min\{c_1, c_2\}$, então, pelos dois casos tratados acima,

$$F(x,s) \geq A|s|^\mu, \quad \forall x \in \overline{\Omega} \text{ e } \forall |s| \geq R \tag{3.19}$$

Por outro lado,

$$F(x,s) \geq m, \ \forall (x,s) \in \overline{\Omega} \times [-R,R]. \tag{3.20}$$

onde $m = min\{F(x,s) : (x,s) \in \overline{\Omega} \times [-R,R]\}$.
Seja $B > 0$ tal que $B \geq AR^\mu - m$, então $B \geq A|s|^\mu - m$, para todo $|s| \leq R$, para todo $x \in \overline{\Omega}$.

Logo

$$m \geq A|s|^\mu - B, \text{ para todo } s \in [-R,R], \text{ para todo } x \in \overline{\Omega}. \tag{3.21}$$

Assim, por (3.19), (3.20) e (3.21), temos

$$F(x,s) \geq A|s|^\mu - B, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \overline{\Omega}. \tag{3.22}$$

Por outro lado, como $\hat{M}(s) \geq M(s)s$ para todo $s \geq 1$, segue que

$$\frac{M(s)}{\hat{M}(s)} \leq \frac{1}{s}, \qquad \text{para todo } s \geq 1,$$

e consequentemente,

$$\int_1^t \frac{M(s)}{\hat{M}(s)} ds \leq \int_1^t \frac{1}{s} ds, \quad \forall s \geq 1.$$

Assim,

$$ln|\hat{M}(s)|\Big|_1^t \leq ln|s|\Big|_1^t,$$

donde,

$$ln\left(\frac{\hat{M}(s)}{\hat{M}(1)}\right) \leq ln(t), \text{pois } \hat{M}(t) > 0, \text{ para todo } t \geq 1.$$

Logo, obtemos que $\hat{M}(t) \leq t\hat{M}(1)$.

Agora, por (3.22), obtemos

$$\begin{aligned}
I(tu_0) &= \frac{1}{2}\hat{M}(\|tu_0\|^2_{H^1_0}) - \int_\Omega F(x, tu_0)dx \\
&\leq \frac{1}{2}\|tu_0\|^2_{H^1_0}\hat{M}(1) - \int_\Omega (A(tu_0)^\mu dx - B)\ dx \\
&= \frac{1}{2}\hat{M}(1)\|u_0\|^2_{H^1_0}t^2 - t^\mu A\int_\Omega u_0^\mu\ dx + \int_\Omega B\ dx \\
&< 0,\ \text{para } t > 0 \text{ suficientemente grande, pois } \mu > 2.
\end{aligned}$$

Ou seja, existe $t_0 > 0$ suficientemente grande, tal que $I(e) < 0$ e $\|e\|_{H^1_0} \geq \rho$, em que $e = t_0u_0 \in H^1_0(\Omega)$. Assim, pelo Teorema do Passo da Montanha (ver Apêndice A.1.11), existe uma solução fraca não nula do problema (3.1).

Como $f : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função localmente Lipschitziana, então pela teoria de regularidade (ver [9]), temos que essa solução é clássica.

Observação 3.0.2. *(Positividade da solução fraca).*

Suponha que u_0 é solução fraca do problema (3.1), então

$$I'(u_0)\,\phi = 0, \quad \forall \phi \in H^1_0(\Omega).$$

Em particular, para $\phi = -u_0^-$ temos,

$$\begin{aligned}
0 =& -I'(u_0)u_0^- \\
=& M\left(\|u_0\|^2_{H_0}\right)\int_\Omega (\nabla u_0^+ - \nabla u_0^-)(-\nabla u_0^-)dx + \int_\Omega f(x, u_0^+)u_0^- dx.
\end{aligned}$$

Por outro lado, de (3.15), obtemos que,

$$\int_\Omega f(x, u_0^+)u_0^- dx = 0.$$

Assim, como $M(\|u_0\|^2_{H_0}) \geq m_0 > 0$ e

$$\begin{aligned}
0 &= M(\|u_0\|^2_{H_0})\int_\Omega (\nabla u_0^+ - \nabla u_0^-)(-\nabla u_0^-)dx \\
&= M(\|u_0\|^2_{H_0})\|u_0^-\|^2_{H_0},
\end{aligned}$$

segue que $u_0^- = 0$ e consequentemente $u = u_0^+ \geq 0$.

Observação 3.0.3. *Como $M(t) \geq m_0 > 0$, para todo $t \in [0, \infty)$, temos que a equação (3.1) pode ser reescrita como*

$$-\Delta u = \frac{f(x, u)}{M(\|u\|_{H^1_0})} := g(x, u).$$

Como $f(x, u) \leq C(1 + |u|^p)$, para todo $x \in \Omega$, para todo $u \in \mathbb{R}$, em que C é uma constante positiva, $1 < p < 2^* - 1$ se $N \geq 3$ e $1 < p < \infty$ se $N = 1, 2$, segue que

$$g(x, u) \leq \frac{C}{m_0}(1 + |u|^p) = k(1 + |u|^p),$$

com $K = \dfrac{C}{m_0}$. *Logo,* g *também possui crescimento subcrítico. Além disso, como* f *é localmente Lipschitziana, então o mesmo ocorre com* g, *e consequentemente, por argumentos de regularidade, a solução fraca do problema (3.1) é uma solução clássica (Ver [17]).*

4 UMA CLASSE DE PROBLEMAS ENVOLVENDO UM TERMO DE KIRCHHOFF LIMITADO QUE SE TORNA CONSTANTE

Neste capítulo, vamos considerar o problema

$$\begin{cases} -M(\|u\|^2_{H_0^1})\Delta u = f(x,u) \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0, \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

em que, $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ é uma função localmente lipschitziana que satisfaz:

(f_1) $|f(x,s)| \leq c(1+|s|^p)$, para todo $x \in \Omega$, para todo $s \in \mathbb{R}$, onde,

$$\begin{cases} 1 < p < 2^* - 1, \quad N \geq 3, \\ 1 < p < \infty, \quad N = 1, 2, \end{cases}$$

(f_2) $f(x,t) = o(t)$, quando $t \to 0$,

(f_3) Existem $\mu > 2$ e $R > 0$ tais que

$$0 < \mu F(x,t) \leq f(x,t)t, \quad \text{para todo } |t| > R,$$

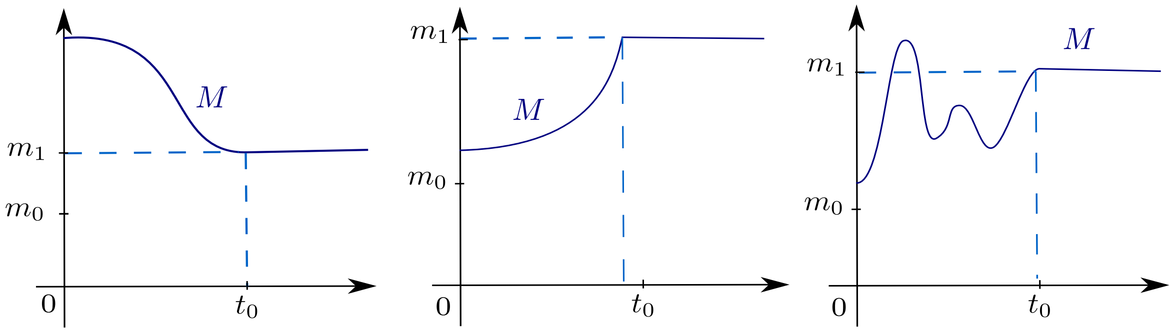
em que $F(x,t) = \displaystyle\int_0^t f(x,s)ds$.

Além disso suponha que $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ seja uma função contínua satisfazendo:

(M_1) existe $m_0 > 0$ tal que $M(t) \geq m_0$, para todo $t \geq 0$,

$(\overline{M}_2)$ existe $m_1 \geq m_0$ e existe $t_0 > 0$ tais que $M(t) = m_1$, para todo $t \geq t_0$.

Observação 4.0.1. *A classe de funções $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ deste capítulo, engloba as funções crescentes e as funções não-crescentes, desde que elas estabilizam para $t \geq t_0 > 0$.*



Classes de função M

O resultado principal deste capítulo é:

Teorema 4.0.1. *Sejam $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ uma função localmente Lipschitziana satisfazendo (f_1), (f_2) e (f_3) e $M(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uma função que satisfaz (M_1) e $(\overline{M}_2)$, com*

$$\frac{m_0}{2} - \frac{m_1}{\mu} > 0. \tag{4.2}$$

Então, o problema (4.1) possui uma solução (clássica) positiva.

Demonstração. De fato, mostraremos que o funcional I definido por

$$I(u) = \frac{1}{2}\hat{M}(\|u\|^2_{H^1_0}) - \int_\Omega F(x, u^+)dx \tag{4.3}$$

satisfaz as condições geométricas do Teorema do Passo da Montanha e a condição (PS).

A geometria do Passo da Montanha

As provas dos items (i) e (ii) das condições geométricas do Teorema do Passo da Montanha, são exatamente iguais as provas feitas no terceiro capítulo.

(iii) Agora provaremos que existe $e \in H^1_0(\Omega)$ tal que $\|e\|_{H^1_0} > \rho$ e $I(e) < 0$.

De fato, por (M_1) temos que:

$$\hat{M}(t) = \int_0^t M(s)ds \geq \int_0^t m_0 ds = m_0 t,$$

ou seja,

$$\hat{M}(t) \geq m_0 t, \quad \text{para todo } t \geq 0. \tag{4.4}$$

Por outro lado, por $(\overline{M}_2)$,

$$\begin{aligned}
\hat{M}(t) &= \int_0^t M(s)ds \\
&= \int_0^{t_0} M(s)ds + \int_{t_0}^t M(s)ds \\
&= \int_0^{t_0} M(s)ds + \int_{t_0}^t m_1 ds, \\
&= \int_0^{t_0} M(s)ds + m_1(t - t_0), \\
&= m_1 t + \left(\int_0^{t_0} M(s)ds - m_1 t_0\right), \\
&\leq m_1 t + m_2, \forall t \geq 0,
\end{aligned}$$

onde $m_2 = \left|\int_0^{t_0} M(s)ds - m_1 t_0\right|$.

Portanto,

$$\hat{M}(t) \leq m_1 t + m_2, \forall t \geq 0. \tag{4.5}$$

Sejam $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, com $\phi(x) > 0$, para quaisquer $x \in \Omega$ e $t > 0$. Por (4.5) temos,

$$\begin{aligned}
I(t\phi) &= \frac{1}{2}\hat{M}(\|t\phi\|^2_{H^1_0}) - \int_\Omega F(x, (t\phi)^+)dx \\
&\leq \frac{1}{2}m_1(\|t\phi\|^2_{H^1_0}) + \frac{m_2}{2} - \int_\Omega F(x, t\phi)dx \\
&= t^2\frac{m_1}{2}\|\phi\|^2_{H^1_0} + \frac{m_2}{2} - \int_\Omega F(x, t\phi)dx.
\end{aligned}$$

A estimativa da integral, $\int_\Omega F(x,t\phi)dx$ é exatamente a mesma do capítulo 3. Logo,

$$\begin{aligned} I(t\phi) &\leq t^2\frac{m_1}{2}\|\phi\|^2_{H^1_0} + \frac{m_2}{2} - t^\mu A\int_\Omega \phi^\mu dx + \int_\Omega B dx \\ &\leq c_1t^2 - c_2t^\mu + c_3, \end{aligned}$$

em que c_1 e c_2 são constantes positivas.

Como $\mu > 2$, para t suficientemente grande, temos $I(t\phi) < 0$, e consequentemente, existe $t_0 > 0$, tal que $I(e) < 0$, em que $e = t_0\phi$ com $\|e\|_{H^1_0} > \rho$.

Portanto, I satisfaz as condições geométricas do Teorema do Passo da Montanha.

A condição de Palais-Smale

Seja (u_n) uma sequência (PS) de I e assuma por contradição que $\|u_n\|_{H^1_0} \to +\infty$, quando $n \to \infty$.

Assim,

$$\begin{aligned} I(u_n) - \frac{1}{\mu}I'(u_n)u_n &= I(u_n) - \frac{1}{\mu}M(\|u_n\|^2_{H^1_0})\int_\Omega \nabla u_n \nabla u_n + \frac{1}{\mu}\int_\Omega f(x,u_n^+)u_n dx \\ &= I(u_n) - \frac{1}{\mu}M(||u_n||^2_{H^1_0})\|u_n\|^2_{H^1_0} + \frac{1}{\mu}\int_\Omega f(x,u_n^+)u_n dx \\ &= \frac{1}{2}\hat{M}(\|u_n\|^2_{H^1_0}) - \frac{1}{\mu}M(\|u_n\|^2_{H^1_0})\|u_n\|^2_{H^1_0} \\ &\quad - \int_\Omega F(x,u_n^+)dx + \frac{1}{\mu}\int_\Omega f(x,u_n^+)u_n dx. \end{aligned}$$

Como $\|u_n\|_{H^1_0} \to +\infty$, quando $n \to \infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que para $n \geq n_0$, tem-se $\|u_n\|^2_{H^1_0} > t_0$.

Logo, por $(\overline{M}_2)$ e (4.4), obtemos

$$\begin{aligned} I(u_n) - \frac{1}{\mu}I'(u_n)u_n &\geq \frac{1}{2}m_0\|u_n\|^2_{H^1_0} - \frac{1}{\mu}m_1\|u_n\|^2_{H^1_0} + \int_\Omega \left(\frac{1}{\mu}f(x,u_n^+)u_n - F(x,u_n^+)\right)dx \\ &= \left(\frac{m_0}{2} - \frac{m_1}{\mu}\right)\|u_n\|^2_{H^1_0} + \int_\Omega \left(\frac{1}{\mu}f(x,u_n^+)u_n - F(x,u_n^+)\right)dx. \end{aligned}$$

A estimativa para a integral $\int_\Omega \left(\frac{1}{\mu}f(x,u_n^+)u_n - F(x,u_n^+)\right)dx$ é feita da mesma forma àquela do capítulo 3. Assim, obtemos

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu}I'(u_n)u_n \geq \left(\frac{m_0}{2} - \frac{m_1}{\mu}\right)\|u_n\|^2_{H^1_0} + \int_{A_n} \left(\frac{1}{\mu}f(x,u_n^+)u_n - F(x,u_n^+)\right)dx - C,$$

onde $A_n = \{x \in \Omega : |u_n(x)| > R\}$. Por (f_3), isto implica que

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu}I'(u_n)u_n \geq \left(\frac{m_0}{2} - \frac{m_1}{\mu}\right)\|u_n\|^2_{H^1_0} - C. \tag{4.6}$$

Por outro lado, como (u_n) é uma sequência (PS), temos que existe $\tilde{C} > 0$ tal que $|I(u_n)| \leq \tilde{C},$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e existe $\tilde{K} > 0$ tal que $|I'(u_n)| \leq \tilde{K},$ para todo $n \in \mathbb{N}$ pois $I'(u_n) \to 0$ quando $n \to \infty$.

Logo, $I(u_n) - \dfrac{1}{\mu}I'(u_n)u_n \leq |I(u_n)| + \dfrac{1}{\mu}|I'(u_n)| \|u_n\|_{H_0^1}$, o que implica que

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu}I'(u_n)u_n \leq \tilde{C} + \frac{1}{\mu}\tilde{K}\|u_n\|_{H_0^1}. \tag{4.7}$$

Assim,

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu}I'(u_n)u_n \leq K + K\|u_n\|_{H_0^1}, \tag{4.8}$$

onde, $K = \max\left\{\tilde{C}, \dfrac{1}{\mu}\tilde{K}\right\}$.

Logo, de (4.6) e (4.8), temos que

$$\left(\frac{m_0}{2} - \frac{m_1}{\mu}\right)\|u_n\|^2_{H_0^1} - C \leq K + K\|u_n\|_{H_0^1}, \tag{4.9}$$

ou equivalentemente,

$$\left(\frac{m_0}{2} - \frac{m_1}{\mu}\right)\|u_n\|^2_{H_0^1} - K\|u_n\|_{H_0^1} \leq K + C. \tag{4.10}$$

Portanto por (4.3), como $\dfrac{m_0}{2} - \dfrac{m_1}{\mu} > 0$, segue que (u_n) é limitado em $H_0^1(\Omega)$, o que é uma contradição, pois $\|u_n\|_{H_0^1} \to +\infty$. Passando a subsequência se for necessário, temos que, (u_n) converge fracamente em $H_0^1(\Omega)$, isto é, existe $u \in H_0^1(\Omega)$, tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$, $u_n(x) \to u(x)$ q.t.p em Ω e $u_n \to u$ em $L^q(\Omega)$, para $1 < q < 2^* - 1$. Agora, argumentando como na proposição 3.0.1, segue que $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$ e assim, a condição (PS) é satisfeita.

Consequentemente, pelo Teorema do Passo da Montanha, temos que o problema (4.1) possui solução fraca (positiva), e pela observação (3.0.3), temos que tal solução é clássica. $\square$

5 SOLUÇÕES PARA UM PROBLEMA ENVOLVENDO UMA FUNÇÃO DE KIRCHHOFF COM CRESCIMENTO CONTROLADO PRÓXIMO DA ORIGEM

Neste capítulo, nosso objetivo é estender o Teorema 4.0.1 para uma classe maior de funções M, que inclua as funções lineares crescente. Isso será feito usando argumentos de truncamento e uma estimativa a priori do tipo Gidas e Spruck A.1.10 (veja [16]), que diz que se $\lim_{t\to\infty}\dfrac{f(x,t)}{t^p}=h(x)$ uniformemente em $\overline{\Omega}$, para alguma função contínua $h>0$, então toda solução clássica positiva de

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u), \text{ em } \Omega, \\ \qquad u = 0, \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.1}$$

satisfaz $u(x)\leq C_*$, em que C_* é uma constante positiva que depende de p,h, e Ω. Antes de provar os resultados principais desde capítulo, precisaremos do seguinte lema.

Lema 5.0.1. *Seja $f:\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função contínua, tal que*

$$|f(x,s)|\leq c_0|s|^q+c_1|s|^p, \text{ para todo } x\in\Omega, \text{ para todo } s\in\mathbb{R},$$

em que $c_0\geqslant 0, c_1>0, 0<q\leq p$ e

$$\begin{cases} 1<p<2^*-1, N\geqslant 3 \\ 1<p<\infty, N=1,2. \end{cases}$$

Se $\lim_{t\to\infty}\dfrac{f(x,t)}{t^p}=h(x)$ uniformemente em $\overline{\Omega}$ e $M:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ é uma função contínua, satisfazendo $M(t)\geqslant m_0$, para todo $t\geqslant 0$ e para algum $m_0>0$, então existe $\theta>0$ (que não depende de M), tal que

$$\|u\|^2_{H^1_0}\leq \max\left\{M\left(\|u\|^2_{H^1_0}\right)^{\frac{2-p+q}{p-1}}, M\left(\|u\|^2_{H^1_0}\right)^{\frac{2}{p-1}}\right\}\theta,$$

para toda solução clássica positiva de

$$\begin{cases} -M\left(\|u\|^2_{H^1_0}\right)\Delta u = f(x,u) \text{ em } \Omega, \\ \qquad u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.2}$$

Demonstração. Seja u solução clássica positiva do problema (5.2), então

$$\omega=\frac{u}{M\left(\|u\|^2_{H^1_0}\right)^{\frac{1}{p-1}}}$$

é solução clássica positiva de

$$\begin{cases} -\Delta\omega = g(x,\omega) \text{ em } \Omega, \\ \qquad \omega = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.3}$$

em que

$$g(x,s) = \frac{f\left(x, M\left(\|u\|^2_{H^1_0}\right)^{\frac{1}{p-1}} s\right)}{M\left(\|u\|^2_{H^1_0}\right)^{\frac{p}{p-1}}}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} -\Delta\omega =& \frac{-\Delta u}{M(\|u\|^2_{H^1_0})^{\frac{1}{p-1}}}, \\ =& \frac{f(x,u)}{M(\|u\|^2_{H^1_0})} \frac{1}{M(\|u\|^2_{H^1_0})^{\frac{1}{p-1}}}, \\ =& \frac{f(x,u)}{M(\|u\|^2_{H^1_0})^{\frac{p}{p-1}}}. \end{aligned}$$

Como $u = \omega M(\|u\|^2_{H^1_0})^{\frac{1}{p-1}}$, se que

$$\begin{aligned} -\Delta\omega &= \frac{f(x, \omega M(\|u\|^2_{H^1_0})^{\frac{1}{p-1}})}{M(\|u\|^2_{H^1_0})^{\frac{p}{p-1}}} \\ &= g(x,\omega), \text{ em } \Omega. \end{aligned}$$

Além disso, como $u = 0$ sobre $\partial\Omega$, então $\omega = 0$ sobre Ω por definição de ω, mostrando assim que ω satizfaz (5.3). Agora, como

$$\begin{aligned} \lim_{s\to\infty} \frac{g(x,s)}{s^p} =& \lim_{s\to\infty} \frac{f\left(x, M(\|u\|^2_{H^1_0})^{\frac{1}{p-1}} s\right)}{M(\|u\|^2_{H^1_0})^{\frac{p}{p-1}} s^p}, \\ =& \lim_{s\to\infty} \frac{f\left(x, M(\|u\|^2_{H^1_0})^{\frac{1}{p-1}} s\right)}{(M(\|u\|^2_{H^1_0})^{\frac{1}{p-1}} s)^p}, \\ =& \lim_{\overline{s}\to\infty} \frac{f(x,\overline{s})}{\overline{s}^p}, \text{ onde } \overline{s} = M(\|u\|^2_{H^1_0})^{\frac{1}{p-1}} s \\ =& h(x), \end{aligned}$$

uniformemente em $\overline{\Omega}$ e independente de $M > 0$, em que a última igualdade foi obtida usando uma das hipóteses sobre f. Pela estimativa de Gidas-Spruck [16] (ω é solução de (5.3)), existe $C_* > 0$ (independente de M) tal que $\|\omega\|_\infty \leq C_*$, ou seja,

$$\left\| \frac{u}{M(\|u\|^2_{H^1_0})^{\frac{1}{p-1}}} \right\|_\infty \leq C_*$$

Assim,

$$\|u\|_\infty \leq M(\|u\|^2_{H^1_0})^{\frac{1}{p-1}} C_*. \tag{5.4}$$

Por outro lado, u satisfaz a Equação (5.2), ou seja, $-M(\|u\|^2_{H^1_0})\Delta u = f(x,u)$ em Ω e, portanto,

$$\int_\Omega -M(\|u\|^2_{H^1_0})\Delta u u dx = \int f(x,u) u dx.$$

Como $u = 0$ sobre $\partial\Omega$, aplicando o Teorema de Divergência, obtemos

$$M(\|u\|^2_{H^1_0})\int_\Omega \nabla u \nabla u dx = \int_\Omega f(x,u)udx,$$

ou seja,

$$M(\|u\|^2_{H^1_0})\|u\|^2_{H^1_0} = \int_\Omega f(x,u)udx.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\|u\|^2_{H^1_0} =& M(\|u\|^2_{H^1_0})^{-1}\int_\Omega f(x,u)udx \\
\leq& M(\|u\|^2_{H^1_0})^{-1}\int_\Omega |f(x,u)||u|dx \\
\leq& M(\|u\|^2_{H^1_0})^{-1}\int_\Omega (c_0|u|^q + c_1|u|^p)|u|dx \\
=& M(\|u\|^2_{H^1_0})^{-1}\int_\Omega (c_0|u|^{q+1} + c_1|u|^{p+1})dx \\
\leq& M(\|u\|^2_{H^1_0})^{-1}\int_\Omega (c_0\|u\|^{q+1}_\infty + c_1\|u\|^{p+1}_\infty)dx \\
=& M(\|u\|^2_{H^1_0})^{-1}(c_0\|u\|^{q+1}_\infty + c_1\|u\|^{p+1}_\infty)med(\Omega).
\end{aligned}$$

Assim, por (5.4)

$$\begin{aligned}
\|u\|^2_{H^1_0} \leq& M(\|u\|^2_{H^1_0})^{-1}(c_0 M(\|u\|^2_{H^1_0})^{\frac{q+1}{p-1}}C_*^{q+1} + c_1 M(\|u\|^2_{H^1_0})^{\frac{p+1}{p-1}}C_*^{p+1})med(\Omega) \\
=& (c_0 M(\|u\|^2_{H^1_0})^{\frac{q-p+2}{p-1}}C_*^{q+1} + c_1 M(\|u\|^2_{H^1_0})^{\frac{2}{p-1}}C_*^{p+1})med(\Omega) \\
\leq& \max\left\{M(\|u\|^2_{H^1_0})^{\frac{2-p+q}{p-1}}, M(\|u\|^2_{H^1_0})^{\frac{2}{p-1}}\right\}(c_0C_*^{q+1} + c_1C_*^{p+1})med(\Omega).
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\|u\|^2_{H^1_0} \leq \max\left\{M(\|u\|^2_{H^1_0})^{\frac{2-p+q}{p-1}}, M(\|u\|^2_{H^1_0})^{\frac{2}{p-1}}\right\}(c_0C_*^{q+1} + c_1C_*^{p+1})med(\Omega),$$

que podemos escrever como

$$\|u\|^2_{H^1_o} \leq \max\left\{M(\|u\|^2_{H^1_0})^{\frac{2-p+q}{p-1}}, M(\|u\|^2_{H^1_0})^{\frac{2}{p-1}}\right\}\theta,$$

em que $\theta = (c_oC_*^{q+1} + c_1C_*^{p+1})med(\Omega)$. □

5.1 SOLUÇÕES PARA UM PROBLEMA VIA ARGUMENTOS DE TRUNCAMENTO COMBINADO COM UMA ESTIMATIVA A PRIORI DO TIPO GUIDAS-SPRUCK

Nesta seção, vamos considerar as seguintes hipóteses sobre f e M.

$f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e localmente Lipschitziana que satisfaz:

$(\overline{f}_1)$ $\lim_{t\to\infty} \dfrac{f(x,t)}{t^p} = h(x)$, uniformemente em $\overline{\Omega}$ para alguma função contínua $h > 0$ em $\overline{\Omega}$.

(f_2) $f(x,t) = o(t)$, quando $t \to 0$.

(f_3) existem $\mu > 2$ e $R > 0$ tais que $0 < \mu F(x,t) \leq f(x,t)t, \quad \forall |t| > R,$

Além disso, $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo:

(M_1) Existe $m_0 > 0$ tal que $M(t) \geq m_0$, para todo $t \geq 0$,

$(\overline{\overline{M}}_2)$ Existe $\alpha > 0$ tal que $M(\alpha) < \dfrac{\mu m_0}{2}$,

(M_3) $\max\left\{M(\alpha)^{\frac{2-p+q}{p-1}}, M(\alpha)^{\frac{2}{p-1}}\right\} \leq \dfrac{\alpha}{\theta}$, em que $0 < q \leq p$ são dados como no Lema 5.0.1.

Nas condições acima, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 5.1.1. *Se $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, localmente Lipschitziana que satisfaz $(\overline{f}_1)$, (f_2), (f_3) e $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo (M_1), $(\overline{\overline{M}}_2)$ e (M_3), então o problema (5.2) possui solução clássica positiva.*

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, como f satisfaz (f_2), isto é, $\lim_{t \to 0} \left|\dfrac{f(x,t)}{t}\right| = 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|t| < \delta$, então $\left|\dfrac{f(x,t)}{t}\right| < \epsilon$, o que implica

$$|f(x,t)| < \epsilon|t| < \epsilon|t|^q + c_1, \tag{5.5}$$

para $|t| < \delta$ e para alguma constante $c_1 > 0$.

Por outro lado, como f satisfaz $(\overline{f}_1)$, então existe $A > 1$ tal que $|t| > A$ implica

$$\left|\frac{f(x,t)}{t^p} - h(x)\right| < \epsilon, \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Assim $h(x) - \epsilon < \dfrac{f(x,t)}{t^p} < h(x) + \epsilon$, e como $-(h(x) + \epsilon) < h(x) - \epsilon$, pois $h > 0$, então

$$\left|\frac{f(x,t)}{t^p}\right| < h(x) + \epsilon \leq C + \epsilon \leq c_2, \text{ pois } h \text{ é contínua em } \overline{\Omega}.$$

Logo, como $|t| \geq A > 1$, temos que $c_1|t|^p > c_1$, então

$$|f(x,t)| < c_2|t|^p \leq c_2|t|^p + c_1 \leq c_2|t|^p + c_1|t|^p = \bar{C}|t|^p. \tag{5.6}$$

Agora, para $0 < \delta \leq |t| \leq A$, temos que, como f é uma função contínua no conjunto compacto $\overline{\Omega} \times [\delta, A]$,

$$\left|\frac{f(x,t)}{t^z}\right| \leq K, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{R},$$

assim,

$$|f(x,t)| \leq K|t|^z, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{R}. \tag{5.7}$$

Logo, de (5.5), (5.6) e (5.7) temos:

$$|f(x,t)| \leq c_3|t|^q + \bar{C}|t|^p + K|t|^z, \quad \text{para todo } x \in \Omega, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

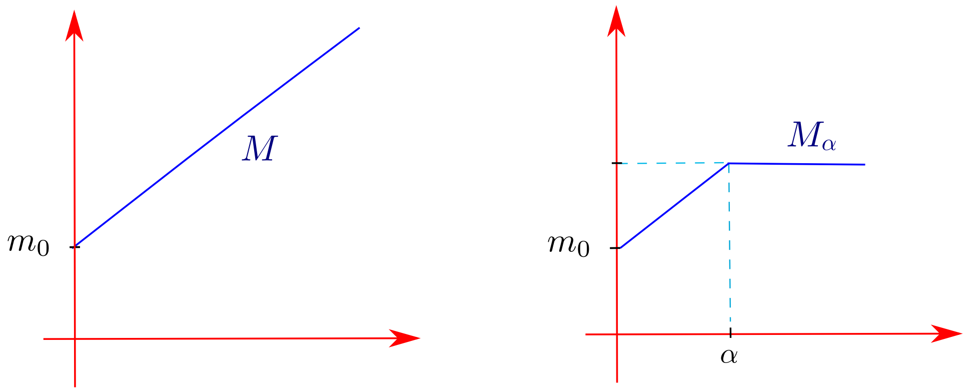
Escolhendo $z = p$ (ou $z = q$), temos

$$|f(x,t)| \leq c|t|^p + k|t|^q, \quad \text{para todo } x \in \Omega, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}, \tag{5.8}$$

que é o crescimento da função f exigido no lema 5.0.1 e consequentemente existe θ dado por tal lema.

Seja α dado na hipótese $(\overline{\overline{M}}_2)$ e defina $M_\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função truncada dada por:

$$M_\alpha(t) = \begin{cases} M(t), & t \leq \alpha, \\ M(\alpha), & t > \alpha. \end{cases} \tag{5.9}$$



M_α é a função truncada de M

Por $(\overline{\overline{M}}_2)$, temos que $M(\alpha) < \dfrac{\mu m_0}{2}$. Então

$$\frac{m_0}{2} - \frac{M(\alpha)}{\mu} > 0. \tag{5.10}$$

Assim, M_α satisfaz (4.2) e $(\overline{M}_2)$ com $m_1 = M(\alpha)$. De fato, como $M(t) \geq m_0$, para todo $t \geq 0$ temos que $m_1 = M(\alpha) \geq m_0$ e tomando $t_0 = \alpha > 0$, segue que $M_\alpha(t) = m_1 = M(\alpha)$, para todo $t > \alpha$.

Por outro lado, como $|f(x,t)| \leq c_2|t|^p$ para t suficientemente grande, então

$$|f(x,t)| \leq c_2(1 + |t|^p), \tag{5.11}$$

para $|t|$ suficientemente grande.

Agora para t suficientemente pequeno, estimando como em (5.5), temos que $|f(x,t)| \leq c_3|t|^p + c_1$.

Raciocinando como no caso anterior, como f é uma função contínua,

$$|f(x,t)| \leq K|t|^p,$$

em um conjunto compacto. Assim,

$$|f(x,t)| \leq C(1 + |t|^p), \ \forall t \in \mathbb{R}, \tag{5.12}$$

onde $C = \max\{c_2, c_3, K\}$.

Portanto, por (5.10) e (5.12) podemos aplicar o Teorema 4.0.1, com $t_0 = \alpha$, para obter uma solução clássica positiva para o problema truncado

$$\begin{cases} -M_\alpha(\|u\|^2_{H^1_0})\Delta u = f(x,u) \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.13}$$

Logo, pelo lema 5.0.1, temos que a solução u_α de (5.13) satisfaz

$$\|u_\alpha\|^2_{H^1_0} \le \max\left\{M(\|u_\alpha\|^2_{H^1_0})^{\frac{2-p+q}{p-1}}, M(\|u_\alpha\|^2_{H^1_0})^{\frac{2}{p-1}}\right\}\theta.$$

O que implica que se $\|u_\alpha\|^2_{H^1_0} > \alpha$, então por (5.9),

$$\alpha < \max\left\{M(\alpha)^{\frac{2-p+q}{p-1}}, M(\alpha)^{\frac{2}{p-1}}\right\}\theta$$

o que contradiz a hipótese (M_3).

Portanto, $\|u_\alpha\|^2_{H^1_0} \le \alpha$. Isso mostra que u_α é de fato uma solução clássica positiva para o problema não truncado (5.2), pois $M_\alpha(\|u_\alpha\|^2_{H^1_0}) = M(\|u_\alpha\|^2_{H^1_0})$, já que $\|u_\alpha\|^2_{H^1_0} \le \alpha$. $\square$

Exemplo 5.1.1.

Seja $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função que satisfaz $(\overline{f}_1)$, (f_3) e

$$(f_4) \quad |f(x,u)| \le k|u|^p, \text{ para todo } x \in \Omega, \text{ para todo } u \in \mathbb{R}.$$

Note que a expressão (f_4) nada mais é do que a expressão

$$|f(x,u)| \le c_0|u|^p + c_1|u|^q, \text{ para todo } x \in \Omega, \text{ para todo } u \in \mathbb{R},$$

quando $p = q$.

De (f_4), para $u \neq 0$ temos que se $p > 1$,

$$\lim_{u\to 0} \frac{|f(x,u)|}{|u|} \le k \lim_{u\to 0} |u|^{p-1} = 0.$$

Por outro lado, dado que $\mu > 2$ na hipótese (f_3) e $\theta > 0$ obtida pelo Lema 5.0.1, existem $m_0 > 0$ e $k > 0$ tais que

$$m_0 < \left(\frac{k}{\theta}\right)^{\frac{p-1}{2}} < \frac{\mu}{2}m_0,$$

pois, como $\mu > 2$, então $m_0 < \dfrac{\mu}{2}m_0$ e consequentemente podemos escolher $k > 0$ tal que

$$\left(\frac{k}{\theta}\right)^{\frac{p-1}{2}} = \frac{m_0 + \frac{\mu}{2}m_0}{2},$$

ou seja, podemos escolher

$$k = \left(\frac{m_0(\mu+2)}{4}\right)^{\frac{2}{p-1}} \theta.$$

Agora, definimos a função afim $M(s) = ms + m_0$, com coeficiente angular

$$m = \left(\left(\frac{k}{\theta}\right)^{\frac{p-1}{2}} - m_0\right)\frac{1}{k} > 0.$$

Daí resulta que M satisfaz $M(k) < \dfrac{\mu}{2}m_0$, pois

$$\begin{aligned} M(k) &= \left(\left(\frac{k}{\theta}\right)^{\frac{p-1}{2}} - m_0\right)\frac{1}{k}k + m_0, \\ &= \left(\frac{k}{\theta}\right)^{\frac{p-1}{2}} \\ &< \frac{\mu}{2}m_0 \end{aligned}$$

e consequentemente M satisfaz a hipótese $(\overline{\overline{M}}_2)$ para $\alpha = k$.

Por outro lado, quando $p = q$

$$M(\alpha)^{\frac{2-p+q}{p-1}} = M(\alpha)^{\frac{2}{p-1}},$$

assim,

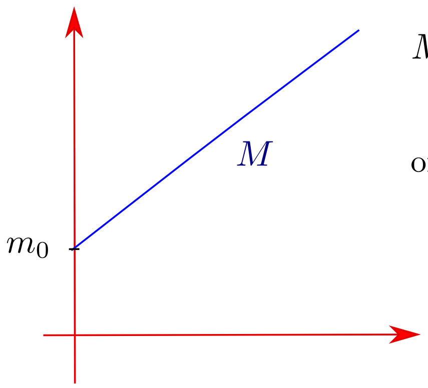
$$\max\left\{M(\alpha)^{\frac{2-p+q}{p-1}},\ M(\alpha)^{\frac{2}{p-1}}\right\} = M(\alpha)^{\frac{2}{p-1}}.$$

Logo,

$$M(\alpha)^{\frac{2}{p-1}} = \left(\left(\frac{\alpha}{\phi}\right)^{\frac{p-1}{2}}\right)^{\frac{2}{p-1}} = \frac{\alpha}{\phi}$$

e consequentemente, M satisfaz a hipótese (M_3) quando $\alpha = k$.

Uma função de Kirchhoff M que satisfaz (M_1), $(\overline{\overline{M}}_2)$ e (M_3)



$$M(s) = m\,s + m_0,$$

onde $m = \left(\left(\dfrac{k}{\theta}\right)^{\frac{p-1}{2}} - m_0\right)\dfrac{1}{k}$

Função M satisfazendo as condições técnicas.

Logo, se $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ é localmente Lipschitz e satisfaz $(\overline{f}_1)$, (f_3) e (f_4), então pelo Teorema 5.1.1, o problema (5.2), possui uma solução clássica positiva.

5.2 MULTIPLICIDADE DE SOLUÇÕES PARA UM PROBLEMA DE KIRCHHOFF

Nesta seção, vamos considerar o problema

$$\begin{cases} -M(\|u\|^2_{H_0^1})\Delta u = \lambda u^q + f(x,u) \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.14}$$

em que $M \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ e $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ é superlinear, $0 < q < 1$ e λ é um parâmetro positivo. Sob certas hipóteses, mostraremos um resultado de multiplicidade de soluções para o problema (5.14).

Mais precisamente, suponha que a função f seja localmente Lipschitziana e satisfaz:

($\overline{f}_1$) $\lim_{t\to\infty} \dfrac{f(x,t)}{t^p} = h(x)$, uniformemente em $\overline{\Omega}$ para alguma função contínua $h > 0$.

(f_2) $f(x,t) = o(t)$, quando $t \to 0$,

(f_3) existem $\mu > 2$ e $R > 0$ tais que $0 < \mu F(x,t) \leq f(x,t)t, \quad \forall |t| > R$,

Além disso, assuma que a função contínua $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, satisfaz:

(M_1) Existe $m_0 > 0$ tal que $M(t) \geq m_0$, $\forall t \geq 0$,

($\overline{\overline{M}}_2$) Existe $\alpha > 0$ tal que $M(\alpha) < \dfrac{\mu m_0}{2}$,

(M_3) $\max\left\{M(\alpha)^{\frac{2-p+q}{p-1}}, M(\alpha)^{\frac{2}{p-1}}\right\} \leq \dfrac{\alpha}{\theta}$, onde p, q e θ são dados como no Lema 5.0.1.

Definição 5.2.1. *Dizemos que uma função $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução fraca do problema truncado,*

$$\begin{cases} -M_\alpha(\|u\|^2_{H_0^1})\Delta u = \lambda u^q + f(x,u) \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.15}$$

quando,

$$M_\alpha(\|u\|^2_{H_0^1}) \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx - \lambda \int_\Omega (u^+)^q \varphi dx = \int_\Omega f(x,u^+)\varphi dx, \ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{5.16}$$

O principal resultado desta seção é:

Teorema 5.2.1. *Assuma que as funções contínuas f e M satisfazem ($\overline{f}_1$), (f_2), (f_3), (M_1), ($\overline{\overline{M}}_2$) e ($M_3$). Então, dado $0 < q < 1$, existe $\lambda_* > 0$ tal que para cada $\lambda \in (0, \lambda_*)$, o problema (5.2) possui pelo menos duas soluções positivas u_1 e u_2 satisfazendo $I(u_1) < 0 < I(u_2)$.*

Demonstração. Primeiro, truncamos M como em (5.9) e consideramos o funcional energia $I : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ associado ao problema (5.15) dado por

$$I(u) = \frac{1}{2}\hat{M}_\alpha(\|u\|^2_{H_0^1}) - \frac{\lambda}{q+1}\int_\Omega (u^+)^{q+1} dx - \int_\Omega F(x,u^+) dx, \tag{5.17}$$

onde

$$\hat{M}_\alpha(t) = \int_0^t M_\alpha(s)ds \text{ e } F(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds.$$

Temos que, $I \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ e

$$I'(u)\varphi = M_\alpha(\|u\|_{H_0^1}^2)\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx - \lambda \int_\Omega (u^+)^q \varphi dx - \int_\Omega f(x,u^+)\varphi dx, \ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Primeira solução: Via o Teorema do Passo da Montanha

Vamos analizar as condições geométricas do Teorema do Passo da Montanha:

(i) $I(0) = 0$, é imediata da definição do funcional I, dado em (5.17).

(ii) Como no Teorema 3.0.1, a seguinte estimativa é válida

$$|F(x,t)| \leq \epsilon t^2 + \overline{c}|t|^{p+1}, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}, \quad \text{para todo } x \in \Omega. \tag{5.18}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
I(u) &= \frac{1}{2}\hat{M}_\alpha(\|u\|_{H_0^1}^2) - \frac{\lambda}{q+1}\int_\Omega (u^+)^{q+1}dx - \int_\Omega F(x,u^+)dx \\
&\geq \frac{1}{2}\hat{M}_\alpha(\|u\|_{H_0^1}^2) - \frac{\lambda}{q+1}\int_\Omega |u|^{q+1}dx - \int_\Omega F(x,u^+)dx \\
&= \frac{1}{2}\hat{M}_\alpha(\|u\|_{H_0^1}^2) - \lambda c\|u\|_{q+1}^{q+1} - \int_\Omega F(x,u^+)dx \\
&\geq \frac{1}{2}\hat{M}_\alpha(\|u\|_{H_0^1}^2) - \lambda c\|u\|_{q+1}^{q+1} - \epsilon\int_\Omega u^{+2}dx - \overline{c}\int |u^+|^{p+1}dx.
\end{aligned}$$

Por outro lado, como $M(t) \geq m_0$, para todo $t \geq 0$, temos

$$\hat{M}_\alpha(t) = \int_0^t M_\alpha(s)ds \geq m_0 t. \tag{5.19}$$

Logo $\hat{M}_\alpha(\|u\|_{H_0^1}^2) \geq m_0\|u\|_{H_0^1}^2$, consequentemente

$$I(u) \geq \frac{1}{2}m_0\|u\|_{H_0^1}^2 - \lambda c\|u\|_{q+1}^{q+1} - \epsilon\int_\Omega {u^+}^2 dx - \overline{c}\int_\Omega |u^+|^{p+1}$$

e como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{q+1}(\Omega)$, então $\|u\|_{q+1}^{q+1} \leq \hat{c}\|u\|_{H_0^1}^{q+1}$.

Assim,

$$I(u) \geq c_1\|u\|_{H_0^1}^2 - c_2\lambda\|u\|_{H_0^1}^{q+1} - c_3\|u\|_{H_0^1}^{p+1}, \ \forall u \in H_0^1(\Omega), \tag{5.20}$$

em que c_1, c_2 e c_3 são constantes positivas.

Seja $r > 0$ tal que $r = \|u\|_{H_0^1}$, ou seja, $u \in \partial B(0,r)$.

Por (5.20),

$$\begin{aligned}
I(u) &\geq c_1 r^2 - c_2\lambda r^{q+1} - c_3 r^{p+1} \\
&= r^2(c_1 - c_2\lambda r^{q-1} - c_3 r^{p-1}),
\end{aligned}$$

gostaríamos de mostrar que,

$$c_2\lambda r^{q-1} + c_3 r^{p-1} < c_1. \tag{5.21}$$

Como por hipótese $q < 1 < p$, temos que para λ suficientemente pequeno

$$c_2\lambda r^{q-1} \leq c_3 r^{p-1}.$$

Portanto, existe $\lambda_* > 0$ tal que se $\lambda \in (0, \lambda_*)$, então

$$c_2\lambda r^{q-1} \leq c_3 r^{p-1}.$$

Assim, para que a equação (5.21) seja verificada, é suficiente que

$$2c_3 r^{p-1} < c_1.$$

Logo, tomando $r \in \left(0, \left(\dfrac{c_1}{2c_3}\right)^{\frac{1}{p-1}}\right)$, temos que para $\lambda \in (0, \lambda_*)$, existe $\rho > 0$, tal que

$$I(u) \geq \rho.$$

(iii) Sejam $u_0 > 0$ em $H_0^1(\Omega)$ e $t > 0$.

Temos que,

$$\begin{aligned} I(tu_0) &= \frac{1}{2}\hat{M}_\alpha\left(\|tu_0\|^2_{H_0^1}\right) - \frac{\lambda}{q+1}\int_\Omega (tu_0)^{q+1}dx - \int_\Omega F(x, tu_0)dx \\ &\leq \frac{1}{2}\hat{M}_\alpha(\|tu_0\|^2_{H_0^1}) - \int_\Omega F(x, tu_0)dx. \end{aligned}$$

A integral $\displaystyle\int_\Omega F(x, tu_0)dx$ já foi estimada no capítulo 3 (Veja 3.18).

Por outro lado, note que $\|tu_0\|^2_{H_0^1} = t^2\|u_0\|^2_{H_0^1} > \alpha$, para t suficientemente grande.

Assim,

$$\begin{aligned} \hat{M}_\alpha(\|tu_0\|^2_{H_0^1}) &= \int_0^{\|tu_0\|^2_{H_0^1}} M_\alpha(s)ds \\ &= \int_0^\alpha M_\alpha(s)ds + \int_\alpha^{\|tu_0\|^2_{H_0^1}} M_\alpha(s)ds \\ &\leq \hat{k} + \int_\alpha^{\|tu_0\|^2_{H_0^1}} M_\alpha(s)ds \\ &= \hat{k} + M(\alpha)(\|tu_0\|^2_{H_0^1} - \alpha) \\ &= c + d\|tu_0\|^2_{H_0^1} \\ &= c + d\|u_0\|^2_{H_0^1}t^2 \\ &= c + \hat{c}t^2 \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$
\begin{aligned}
I(tu_0) &\leq \frac{1}{2}\hat{M}_\alpha(\|tu_0\|^2_{H_0^1}) - \int_\Omega F(x,tu_0)dx \\
&\leq c + \hat{c}t^2 - t^\mu A\int_\Omega u_0^\mu dx + D \\
&= \hat{c}t^2 - c_1 t^\mu + c_2 \\
&< 0,
\end{aligned}
$$

para t suficientemente grande, pois $\mu > 2$.

Tomando $e = tu_0$, vemos que a terceira condição geométrica do Teorema do Passo da Montanha A.1.11 é satisfeita.

Segunda solução: Via o Princípio Variacional de Ekeland
A expressão (5.20) nos diz que:

$$
I(u) \geq c_1\|u\|^2_{H_0^1} - \lambda c_2\|u\|^{q+1}_{H_0^1} - c_3\|u\|^{p+1}_{H_0^1}, \quad \text{para todo } u \in H_0^1(\Omega),
$$

em que c_i denota várias constantes positivas.

Assim, fixe $r > 0$ tal que $\|u\|_{H_0^1} = r$. Logo, obtemos

$$
I(u) \geq c_1 r^2 - \lambda c_2 r^{q+1} - c_3 r^{p+1}.
$$

Escolhemos r suficientemente pequeno, de forma que

$$
c_1 r^2 - c_3 r^{p+1} \geq \frac{c_1}{4} r^2. \tag{5.22}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
I(u) &\geq \frac{c_1}{4}r^2 - \lambda c_2 r^{q+1} \\
&= r^2\left(\frac{c_1}{4} - \lambda c_2 r^{q-1}\right).
\end{aligned}
$$

Observando que,

$$
\begin{aligned}
\frac{c_1}{4} - \lambda c_2 r^{q-1} > 0 &\Leftrightarrow \frac{c_1}{4} > \lambda c_2 r^{q-1} \\
&\Leftrightarrow 0 < \lambda < \frac{c_1}{4c_2} r^{1-q}.
\end{aligned}
$$

Escolhendo $\lambda_* = \dfrac{c_1}{4c_2} r^{1-q}$, segue que para todo $\lambda \in (0, \lambda_*)$.

$$
I(u) \geq \rho > 0 \quad \text{para } \|u\|_{H_0^1} = r. \tag{5.23}
$$

Assim, I é limitada inferiormente na bola $\overline{B}_r(0)$ e consequentemente, existe $\inf_{\overline{B}_r(0)} I(u) = c$.

Agora, considere o espaço métrico completo $(B_r(0), \|.\|_{H_0^1})$.

Pelo Princípio Variacional de Ekeland, existe $(u_n) \subset \overline{B}_r(0)$ tal que

$$I(u_n) \to \inf_{\overline{B}_r(0)} I, \text{ quando } n \to \infty, \tag{5.24}$$

e

$$I(u_n) \leq I(u) + \frac{1}{n}\|u - u_n\|_{H_0^1}, \ \forall u \in \overline{B}_r(0), \ u \neq u_n.$$

Além disso,

$$I'(u_n) \to 0, \text{ quando } n \to \infty. \tag{5.25}$$

Note que o funcional I satisfaz a condição (PS), pois por (5.24) e (5.25), (u_n) é uma sequência (PS) limitada (pois, $(u_n) \subset \overline{B}_r(0)$). Assim, como $h_1(x,u) = \lambda u^q + f(x,u)$ satisfaz (f_1) da proposição 3.0.1 (veja a estimativa 5.12), argumentando como na afirmação dessa mesma proposição, segue que I satisfaz (PS).

Mostramos que

$$\inf_{\overline{B}_r(0)} I < 0.$$

De fato, fixe $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, com $\varphi > 0$ e seja $t > 0$.

Assim,

$$I(t\varphi) = \frac{1}{2}\int_0^{\|t\varphi\|^2_{H_0^1}} M_\alpha(s)ds - \frac{\lambda}{q+1}t^{q+1}\int_\Omega \varphi^{q+1}dx - \int_\Omega F(x,t\varphi)dx$$

Note que para $0 \leq t \leq \alpha$, temos

$$\|t\varphi\|_{H_0^1} = |t|\|\varphi\|_{H_0^1} \leq \alpha\|\varphi\|_{H_0^1},$$

e

$$\int_0^{\|t\varphi\|^2} M_\alpha(s)sds \leq \int_0^{\alpha^2\|\varphi\|^2} M(s)sds,$$

pois $M_\alpha(s) = M(s)$.

Pela continuidade de M, existe $\tilde{k} > 0$ tal que

$$m_0 \leq M(s) \leq \tilde{k}, \quad \text{para todo } s \in [0, \alpha^2\|\varphi\|^2_{H_0^1}].$$

Portanto,

$$\begin{aligned} I(t\varphi) &\leq \frac{\tilde{k}}{2}\int_0^{\|t\varphi\|^2_{H_0^1}} 1ds - \frac{\lambda}{q+1}t^{q+1}\int_\Omega \varphi^{q+1}dx - \int_\Omega F(x,t\varphi)dx \\ &= \frac{\tilde{k}}{2}t^2\|\varphi\|^2_{H_0^1} - \frac{\lambda}{q+1}t^{q+1}\int_\Omega \varphi^{q+1}dx - \int_\Omega F(x,t\varphi)dx. \end{aligned}$$

Assim,

$$I(t\varphi) \leq \frac{\tilde{k}}{2}t^2\|\varphi\|^2_{H_0^1} - \frac{\lambda}{q+1}t^{q+1}\int_\Omega \varphi^{q+1}dx - ct^{p+1} - c,$$

com $c > 0$. Como $1 < q+1 < 2 < p+1$ e como $t\varphi \in \overline{B}_r(0)$, para t suficientemente pequeno, nós temos que:

$$\inf_{\overline{B}_r(0)} I \leq I(t\varphi) < 0.$$

Note que, como $I(u_n) \to \inf_{\overline{B}_r(0)} I$, existem $n_0 \in \mathbb{N}$ e $c_4 > 0$ tais que

$$I(u_n) \leq -c_4 < 0, \quad \forall n \geq n_0$$

e consequentemente $(u_n) \notin \partial B_r(0)$, pois, se $(u_n) \in \partial B_r(0)$ segue que $I(u_n) \geq \rho > 0$, contradizendo $\inf_{\overline{B}_r(0)} I < 0$.

Assim, $(u_n) \subset B_r(0)$.

Por outro lado, como $I \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}), I(u_n) \to \inf_{\overline{B}_r(0)} I = c$ e $I'(u_n) \to 0$, segue que (u_n) é uma sequência $(PS)_c$,

Afirmação: A sequência (u_n) possui uma subsequência que converge forte em $H_0^1(\Omega)$ (isto segue da Proposição 3.0.1).

Assim, $u_n \to u_1$ em $H_0^1(\Omega)$.

Como I é contínuo, obtemos,

$$I(u_n) \to I(u_1).$$

Mas,

$$I(u_n) \to \inf_{\overline{B}_r(0)} I,$$

e pela unicidade do limite

$$I(u_1) = \inf_{\overline{B}_r(0)} I < 0.$$

Além disso, como I' é contínuo, temos que

$$I'(u_n) \to I'(u_1).$$

Usando o fato que

$$I'(u_n) \to 0,$$

novamente pela unicidade do limite, segue que

$$I'(u_1) = 0,$$

ou seja, u_1 é ponto crítico de I e consequentemente solução fraca do problema (5.14) com $I(u_1) < 0$.

Portanto, $u_1 \in \overline{B}_r(0)$ e $u_1 \neq 0$.

Já mostramos que $I(0) = 0$, existem ρ e r tais que $I(u) \geq \rho$, para todo $u \in \partial B_r(0)$ e existe $e \in (B_r(0))^c$ tal que $I(e) < 0$. Assim, pelo Teorema do Passo da Montanha, existe $u_2 \in H_0^1(\Omega)$, ponto crítico de I e, consequentemente, solução fraca para o problema (5.14) com $I(u_2) \geq \rho > 0$. Logo, como $I(u_1) < 0$, segue que $u_1 \neq u_2$. Além disso, u_1 e u_2 são positivas, pois o nosso funcional é definido com a parte positiva $u^+ = \max\{0, u\}$ (basta olhar para o funcional com parte positiva).

Agora, usando o lema 5.0.1, deduzimos que $\|u_1\|^2_{H^1_0} \leq \alpha$ e $\|u_2\|^2_{H^1_0} \leq \alpha$ e assim, u_1 e u_2 são soluções clássicas do problema original (5.14). $\square$

REFERÊNCIAS

[1] C.O. Alves. Introdução às equações elípticas. *Apostila I ENAMA, UFRJ*, 2007.

[2] C.O. Alves, F.J.S.A. Corrêa, and T.F. Ma. Positive solutions for a quasilinear elliptic equation of kirchhoff type. *Computers and Mathematics with Applications*, 49(1):85–93, 2005.

[3] A. Ambrosetti and P.H. Rabinowitz. Dual variational methods in critical point theory and applications. *Journal of functional Analysis*, 14(4):349–381, 1973.

[4] H. Brezis. Functional analysis, sobolev spaces and partial differential equations. *Springer Science & Business Media*, 2010.

[5] H. Brezis and S. Kamin. Sublinear elliptic equations in $\mathbb{R}^n$. *Manuscripta Mathematica*, 74(1):87–106, 1992.

[6] H. Brezis and L. Oswald. Remarks on sublinear elliptic equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 10(1):55–64, 1986.

[7] M. Chipot and B. Lovat. Some remarks on non-local elliptic and parabolic problems. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 30(7):4619–4627, 1997.

[8] M. Chipot and J.F. Rodrigues. On a class of nonlocal nonlinear elliptic problems. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis-Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, 26(3):447–467, 1992.

[9] D.G. Costa. An invitation to variational methods in differential equations. *Springer Science & Business Media*, 2010.

[10] D.G. De Figueiredo. Lectures on the ekeland variational principle with applications and detours. *Springer Berlin*, 81, 1989.

[11] C.R. De Oliveira. Introdução à análise funcional. *Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA*, 2001.

[12] J.I. Díaz and J.E. Saá. Existence et unicité de solutions positives pour certaines équations elliptiques quasilinéaires. *CR Acad. Sci. Paris Sér. I Math*, 305(12):521–524, 1987.

[13] I. Ekeland. On the variational principle. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 47(2):324–353, 1974.

[14] L.C. Evans. Partial differential equations and monge-kantorovich mass transfer. *Current developments in mathematics*, 1997(1):65–126, 1997.

[15] G.B. Folland. Real analysis: modern techniques and their applications. *John Wiley & Sons*, 40, 1999.

[16] B. Gidas and J. Spruck. A priori bounds for positive solutions of nonlinear elliptic equations. *Communications in Partial Differential Equations*, 6(8):883–901, 1981.

[17] D. Gilbarg and N.S. Trudinger. Elliptic partial differential equations of second order. *Springer*, 2001.

[18] G. Kirchhoff. Mechanik. *Teubner, Leipzig*, 1883.

[19] J.L. Lions. On some questions in boundary value problems of mathematical physics. *In Proceedings of International Symposium on Continuum Mechanics and Partial Differential Equations, Rio de Janeiro 1977, Math. Stud. (Edited by de la Penha and Medeiros)*, 30:284–346, 1978.

[20] T.F. Ma. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 63(5-7):e1967–e1977, 2005.

[21] T.F. Ma and J.M. Rivera. Positive solutions for a nonlinear non-local elliptic transmission problem. *Applied Mathematics Letters*, 16(2):243–248, 2003.

[22] L.A. Medeiros and M.M. Miranda. Espaços de sobolev. *IM-UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil*, 2000.

[23] J.M. Rivera. Teoria das distribuições e equações diferenciais parciais. *Laboratorio Nacional de Computação Cientifica - LNCC*, 2004.

APÊNDICE A – DEFINIÇÕES E RESULTADOS

Definição A.0.1. *Seja $\varphi : M \to \mathbb{R}$ uma função, definimos a parte positiva e negativa de φ por $\varphi^+(x) = \max\{\varphi(x), 0\}$ e $\varphi^-(x) = \max\{-\varphi(x), 0\}$, respectivamente.*

Além disso, note que $\varphi^+(x) \geqslant 0$ e $\varphi^-(x) \geqslant 0$, para todo $x \in M$ e

$$\varphi(x) = \varphi^+(x) - \varphi^-(x) \text{ e } |\varphi(x)| = \varphi^+(x) + \varphi^-(x).$$

Definição A.0.2. *Considere a função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é homogênea de grau p quando*

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^p f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Teorema A.0.1 (Desigualdade de Höder). *Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ com $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Então, $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

Demonstração. Ver [15]. □

Teorema A.0.2 (Banach Alaouglu). *A bola fechada unitaria $B_{E'}$ é compacta na topologia fraca estrela.*

Demonstração. Ver [4]. □

A.1 ESPAÇOS DE SOBOLEV

Nesta seção, apresentaremos os resultados mais usados sobre Espaços de Sobolev.

Sejam $p \in [1, +\infty]$, $m \in \mathbb{N}$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto.

Definimos o espaço $W^{m,p}(\Omega)$ como sendo

$$W^{m,p}(\mathbb{R}) = \left\{ u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^N \,\text{com}\, |\alpha| \le m \right\}$$

cuja norma é definida por:

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0 \le |\alpha| \le m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{1/p}, 1 \le p < \infty,$$

e para $p = \infty$ é dada por

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{0 \le |\alpha| \le m} \|D^\alpha u\|_\infty .$$

Chamamos os espaços normados $W^{m,p}(\Omega)$ de espaços de Sobolev.

Proposição A.1.1. *O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Ver [22]. □

No caso $p = 2$, denotamos o espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ por $H^m(\Omega)$.

O espaço $H^m(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno dado por:

$$(u, v)_m = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$$

para todo $u, v \in H^m(\Omega)$ e é denominado espaço de Sobolev de ordem m.

Definição A.1.1. *O espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ é o fecho de $C_o^m(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$, isto ê*

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_o^m(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{m,p}}}.$$

Quando $p = 2$, escrevemos $H_0^m(\Omega)$ em lugar de $W_0^{m,2}(\Omega)$.

A.1.1 Imersões de Sobolev

Apresentaremos os teoremas de imersões dos espaços de Sobolev.

Definição A.1.2 (Imersão Contínua). *Dizemos que o espaço normado $(X, \|.\|_X)$ está imerso continuamente no espaço $(Y, \|.\|_Y)$ e escrevemos $X \hookrightarrow Y$ quando,*

(i) X for subespaço vetorial de Y,

(ii) A aplicação inclusão

$$\begin{aligned} i : X &\to Y \\ x &\mapsto i(x) = x \end{aligned}$$

é contínua, isto é, existe $M > 0$ tal que $\|i(x)\|_Y \leq M\|x\|_X$, para todo $x \in X$.

Definição A.1.3 (Operador Linear Compacto). *Um operador linear $T : X \to Y$ é dito compacto, se toda sequência limitada $(x_n) \subset X$ é levada em uma sequência $T(x_n)$ que admite uma sequência convergente em Y.*

Definição A.1.4 (Imersão Compacta). *Dizemos que o espaço normado $(X, \|.\|_X)$ está imerso compactamente no espaço $(Y, \|.\|_Y)$ e escrevemos $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$ quando,*

$$\begin{aligned} i : X &\to Y \\ x &\mapsto i(x) = x \end{aligned}$$

é um operador linear compacto.

Teorema A.1.1 (Teorema das Imersões Contínuas). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira suave, $m \geq 0$ e $1 \leq p < \infty$. Então, para qualquer $j \geq 0$ as imersões abaixo são contínuas:*

(i) *Se* $m < \frac{N}{p}, W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), p \leq q \leq \frac{Np}{N-mp}$;

(ii) *Se* $m = \frac{N}{p}, W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), p \leq q < \infty$;

(iii) *Se* $m > \frac{N}{p}, W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^j_B(\Omega)$;

(iv) *Se* $m - 1 < \frac{N}{p} < m, W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\alpha}(\bar{\Omega}), 0 < \alpha \leq m - \frac{N}{p}$.

Demonstração. Ver [22]. □

Observação A.1.1. *$C^j_B(\Omega)$ é o espaço das funções $u \in C^j(\Omega)$ tais que $D^\alpha u$, para $|\alpha| \leq j$ é limitada em Ω, cuja norma é*

$$\|u\|_{C^j_B(\Omega)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq j} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)| .$$

Teorema A.1.2 (Teorema de Rellich-Kondrachov). *Seja Ω um domínio regular limitado, $j \geq 0$, $m \geq 1$ e $1 \leq p < \infty$. Então, as imersões abaixo são compactas:*

(i) *Se* $m < \frac{N}{p}, W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), 1 \leq q < \frac{Np}{N-mp}$;

(ii) *Se* $m = \frac{N}{p}, W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), 1 \leq q < \infty$;

(iii) Se $m > \frac{N}{p}, W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^j_B(\Omega)$ *e* $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), 1 \leq q < \infty$;

(iv) *Se* $m - 1 < \frac{N}{p} < m, W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\alpha}(\bar{\Omega}), 0 < \alpha < m - \frac{N}{p}$.

Demonstração. Ver [22]. □

Teorema A.1.3 (Identidades de Green). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio onde vale o teorema da divergência e sejam $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$. Então valem as seguintes identidades:*

(i) ***Primeira Identidade de Green***

$$\int_\Omega (v\Delta u + \nabla v \nabla u) dxdy = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \eta} ds;$$

(ii) ***Segunda Identidade de Green***

$$\int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v) dxdy = \int_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial \eta} - u \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) ds,$$

em que $\frac{\partial}{\partial \eta}$ é a derivada direcional na direção da normal unitária exterior η.

Demonstração. Ver [14]. □

Teorema A.1.4 (Princípio do Máximo)**.** *Seja* $u \in H_0^1(\Omega)$ *solução de*

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = h & em\ \Omega, \\ \qquad\quad u = 0 & sobre\ \partial\Omega, \end{cases}$$

em que $h \in L^{2^*}(\Omega)$*,* λ *um parâmetro real não-negativo e* $h \geq 0$ *em* Ω*. Então* $u \geq 0$ *em* Ω*. Além disso, se* $h > 0$ *em um conjunto de medida positiva, então* $u > 0$ *em* Ω*.*

Se $u \in C^1(\bar{\Omega})$*, então a derivada normal exterior* $\dfrac{\partial u}{\partial \eta}(x) < 0$*, para todo* $x \in \Omega$*.*

Demonstração. Ver [14]. □

Teorema A.1.5 (**Princípio do Máximo Forte**)**.** *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um aberto e* $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ *com* $\Delta u \geq 0 (\Delta u \leq 0)$ *em* Ω *e suponha que existe um ponto* $y \in \Omega$ *tal que*

$$u(y) = \sup_{\Omega} u \left(\inf_{\Omega} u \right).$$

Então u é constante.

Demonstração. Ver [**?**]. □

Teorema A.1.6 (**Princípio do Máximo Fraco**)**.** *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um aberto e* $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ *com* $\Delta u \geq 0 (\Delta u \leq 0)$ *em* Ω*. Então*

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u \left(\inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u \right).$$

Demonstração. Ver [**?**]. □

Teorema A.1.7. ***(Teorema de Lions Stampachia)*** *Seja* V *um espaço de Hilbert com norma* $\|\cdot\|_V$ *e denotemos por* K *um subconjunto convexo de* V*. Seja* $a(\cdot,\cdot)$ *uma aplicação bilinear simétrica satisfazendo,*

$$a(v,v) \geq \alpha_0 \|v\|_V^2, \qquad\qquad a(v,w) \leq \alpha_1 \|v\|_V \|w\|_V$$

e seja $f \in V^*$*. Então existe uma única solução do problema*

$$a(u, v-u) \geq \langle f, v-u \rangle, \ \forall v \in K.$$

Demonstração: Ver [23].

Teorema A.1.8. ***(Desigualdade de Poincaré)***
Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *é um conjunto aberto, conexo e limitado, então existe uma constante c (que depende de n e* Ω*) tal que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq a \|\nabla u\|_{L(\Omega)^2}, \ para\ todo\ u \in H_0^1(\Omega).$$

Demonstração. Seja $Q = (0, a)^n$ um cubo em $\mathbb{R}^n$ que contém $\overline{\Omega}$.

Dado $u \in W^{1,2}(\Omega)$, temos uma extensão $\bar{u}$ de u por zero no cubo Q. Logo, $\bar{u} \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $\|u\|_{L^2(\Omega)} = \|\bar{u}\|_{L^2(L)}$ e $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} = \|\nabla \bar{u}\|_{L^2(L)}$.

Assim, para qualquer função $u \in C_0^\infty(\Omega)$, temos

$$u\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) = \int_0^{x_n} u_{x_n}\left(x_1, \cdots, x_{n-1}, t\right) dt.$$

Logo,

$$\begin{aligned} |u(x)|^2 &= \left| \int_0^{x_n} u_{x_n}\left(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, t\right) dt \right|^2 \\ &= \left(\int_0^{x_n} \left|u_{x_n}\left(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, t\right)\right| |1| dt \right)^2. \end{aligned}$$

Consequentemente, pela desigualdade de Hölder, nós temos que

$$\begin{aligned} |u(x)|^2 &\leq \int_0^{x_n} |u_{x_n}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, t)|^2 dt \int_0^{x_n} 1^2 dt \\ &= |x_n| \int_0^{x_n} |u_{x_n}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, t)|^2 dt \\ &\leq a \int_0^{a} |u_{x_n}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, t)|^2 dt. \end{aligned}$$

Consequentemente, pelo teorema de Fubini, temos

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u(x)|^2 dx &\leq \int_\Omega a \int_0^a |u_{x_n}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, t)|^2 dt dx \\ &\leq a^2 \int_\Omega |u_{x_n}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, t)|^2 dx \\ &\leq a^2 \int_\Omega |\nabla u|^2 dx. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq a \|\nabla u\|_{L(\Omega)^2}, \text{ para todo } u \in C_o^\infty(\Omega).$$

Consequentemente, pela densidade de $C_o^\infty(\Omega)$ em $H_0^1(\Omega)$, temos que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq a \|\nabla u\|_{L(\Omega)^2}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

□

Corolário A.1.1. *As normas $\|\cdot\|_{H_0^1}$ de $H_0^1(\Omega)$ e $\|\cdot\|_{L^2}$ de $L^2(\Omega)$ são equivalentes.*

Demonstração. Ver [22]. □

Proposição A.1.2. *Seja H um espaço de Hilbert. Uma aplicação bilinear $B : H \times H \to \mathbb{R}$ é contínua se, e somente, se existe $M \geq 0$ tal que $|B(x, y)| \leq M\|x\|\|y\|$, para todo $x, y \in M$.*

Demonstração. Ver [11]. □

Proposição A.1.3. *Seja H um espaço de Hilbert. A aplicação bilinear $B : H \times H \to \mathbb{R}$ é contínua se, somente se, existe $A \in B(H)$ tal que $B(x, y) = (x, Ay)$, para quaisquer $x, y \in M$.*

Demonstração. Ver [11]. □

Teorema A.1.9. ***(Teorema de Lax-Milgram)*** *Seja B uma forma sesquilinear, contínua e coeciva com constante de coecividade c sobre o espaço de Hilbert H, então dado $\omega \in H$, existe um único elemento $x \in H$ tal que $B(u, x) = (u, \omega)$, para todo $u \in H$ e para tal x, temos $\|x\| \leq \frac{1}{c}\|\omega\|_{H_0^1}$.*

Demonstração: Como B é contínua, então existe $A \in B(H)$ que representa B, ou seja, $B(a, b) = \langle a, Ab \rangle$, para quaisquer $a, b \in H$.
Provaremos que A é inversível e que $X = A^{-1}\omega$ é única.
Como

$$c\|x\|^2 \leq B(x, x) = (x, Ax) \leq \|x\|\|Ax\|.$$

Então $c\|x\| \leq \|Ax\|$, para todo $x \in H$ e portanto, A é injetiva e o $Im(A)$ é fechado em H. Suponha por absurdo que existe $z \in H - \{0\}$ tal que $z \perp Im(A)$. Então $0 < c\|z\|^2 = B(z, z) = (z, Az) = 0$, o que é uma contradição.
Logo A é sobrejetiva e, portanto, A é inversível.
Por último, para provar a unicidade, suponha que

$$B(x, y) = (\omega, y) = B(\tilde{x}, y),$$

então $B(x - \tilde{x}, y) = 0$, para todo $y \in H$. Tomando $y = x - \tilde{x}$, temos

$$B(x - \tilde{x}, x - \tilde{x}) = 0.$$

Portanto, $x = \tilde{x}$.

Teorema A.1.10 (**Estimativa de Guidas-Spruck**)**.** *Suponha que $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ seja uma solução positiva do problema de valor de fronteira*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{i,j}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right) + b_j(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_j} + f(x, u) = 0, \text{ em } \Omega, \\ \hfill u = \varphi \text{ sobre } \Omega, \end{cases}$$

e além disso, suponha que,

(i) $a_{i,j}$ são funções contínuas em $\overline{\Omega}$, b_j são funções limitadas em $\overline{\Omega}$, φ é uma função limitada sobre $\partial\Omega$ e

(ii) f é uma função contínua em $x \in \overline{\Omega}$ e para algum $1 < \alpha < \dfrac{n+2}{n-2}$,

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{f(x, t)}{t^\alpha} = h(x),$$

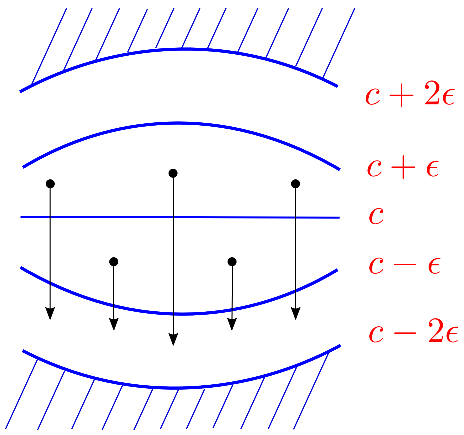
uniformemente em Ω, em que h é uma função contínua e estritamente positiva em $\overline{\Omega}$.

Então $u(x) \leq C$, para alguma contante C, que depende de α e Ω.

Demonstração. Ver [16]. $\square$

Lema A.1.1. ***(Lema de Deformação)*** *Sejam X um espaço de Banach e $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$. Suponha que φ satisfaz a condição (PS). Se $c \in \mathbb{R}$ não é um valor crítico de φ, então para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ tal que, para quaisquer $u \in X$ e $t \in [0,1]$, tem-se:*

1. $\eta(0, u) = u$;
2. $\eta(t, u) = u$, *se* $u \notin \varphi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon])$;
3. $\eta(1, \varphi^{c+e}) \subset \varphi^{c-e}$, *em que se* $k \in \mathbb{R}$, *definimos* $\varphi^k = \{u \in X; \varphi(u) \leq k\}$;
4. $\eta(1, \cdot) : X \to X$ *é um homeomorfismo.*



Deformação

Demonstração. Ver [14]. $\square$

Agora usaremos o Lema de Deformação para provarmos o famoso resultado de *Ambrosetti-Rabinowitz* (1973) que garante a existência de pontos críticos do tipo sela, mas antes daremos algumas definições.

Definição A.1.5. *Seja X um espaço de Banach e seja $I : X \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 Um ponto $u \in X$ tal que $I'(u) = 0 \in X'$ é dito ponto crítico do funcional I, e um número real c é dito ser um valor crítico de I se $c = I(u)$ para algum $u \in X$ tal que $I'(u) = 0$.*

O conjunto de todos os pontos críticos sobre o nível c é denotado por

$$K_c = \{u \in X : I'(u) = 0, I(u) = c\},$$

e o conjunto (subnível) dos pontos de X em que I não supera o nível c é denotado por

$$I^c = \{u \in X : I(u) \leq c\}$$

Teorema A.1.11. ***TEOREMA DO PASSO DA MONTANHA***
Sejam X um espaço de Banach e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ satisfazendo a condição (PS). Além disso, suponha que

(a) $I(0) = 0$;

(b) existem $\alpha, \rho > 0$ *tais que* $I|_{\partial B_\rho(0)} \geq \alpha$;

(c) existe $e \in X$ *tal que* $\|e\| > \rho$ *e* $I(e) \leq 0$.

Então I possui um valor crítico

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \{ \max_{u \in \gamma([0,1])]} I(u)\},$$

em que $\Gamma = \{\gamma : [0,1] \to X \text{ contínua } : \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = u_1\}$.

Demonstração.
Primeiro: $c \geq \alpha$. Mostraremos que para todo $\gamma \in \Gamma$, nós temos $\gamma([0,1]) \cap \partial B_\rho(0) \neq \emptyset$.

De fato, defina a função $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $h(t) = \|\gamma(t)\|$.

Observe que h é contínua,

$$h(0) = \|\gamma(0)\| = \|0\| = 0 < \rho$$

e

$$h(1) = \|\gamma(1)\| = \|e\| > \rho.$$

Assim, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $t_0 = t_0(\gamma) \in (0,1)$ tal que

$$h(t_0) = \|\gamma(t_0)\| = \rho.$$

Logo, pela condição (b),

$$\max_{t \in [0,1]} [I(\gamma(t))] \geq I(\gamma(t_0)) \geq \alpha$$

e, consequentemente, $c \geq \alpha$.
Segundo: c é um valor crítico de I.

Suponha que c não seja um valor crítico, ou seja $K_c = \emptyset$.

Tome $0 < \epsilon < \frac{\alpha}{2}$.

Por (b) e (c), temos que $c \geq \alpha > 2\epsilon$.

Pelo lema de deforma existe uma deformação $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ satisfazendo:

(ii) $\eta(t,u) = \eta_t(u) = u,$ para todo $u \notin I^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon])$ e para todo $t \in [0,1]$;

(iv) $\eta_1\left(I^{c+\epsilon}\right) \subset I^{c-\epsilon}$;

ou seja, $u \in I^{c+\epsilon}$, o que implica que $\eta_1(u) \in I^{c-\epsilon}$.

Como

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \left\{ \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) \right\},$$

existe $\bar{\gamma} \in \Gamma$ tal que

$$c \leq \max_{t \in [0,1]} I(\bar{\gamma}(t)) < c + \epsilon,$$

consequentemente,

$$\bar{\gamma}(t) \in I^{c+\epsilon}, \forall t \in [0,1] \ldots (*)$$

Seja $\sigma = \eta_1 \circ \bar{\gamma}$.

É fácil ver que $\sigma \in \Gamma$, pois, note que $I(e) \leq 0 = I(0) < c - 2\epsilon$ implica que $e \notin I^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon])$ e $0 \notin I^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon])$

Além disso, por (ii), $\sigma(0) = \eta_1(\bar{\gamma}(0)) = \eta_1(0) = 0$ e $\sigma(1) = \eta_1(\bar{\gamma}(1)) = \eta_1(e) = e$.

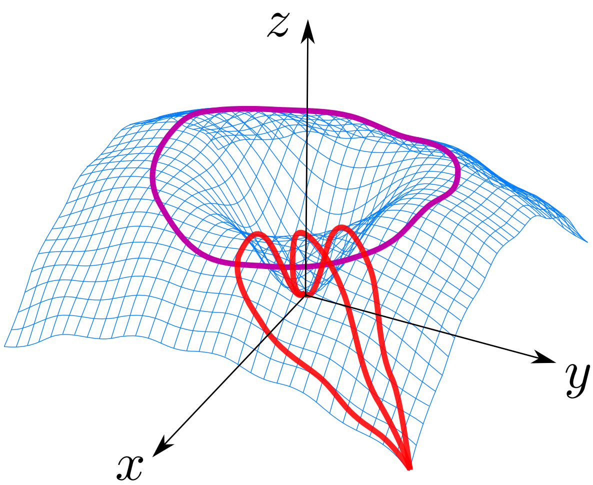
Por outro lado, usando $(*)$ e (iv), $\sigma(t) = \eta_1(\bar{\gamma}(t)) \in I^{c-\epsilon}$ consequentemente,

$$\max_{t \in [0,1]} I(\sigma(t)) \leq c - \epsilon,$$

assim,

$$c \leq c - \epsilon,$$

o que é uma contradição. $\square$



Geometria do Passo da Montanha

Teorema A.1.12 (Variacional de Ekeland). *Sejam V um espaço métrico completo e $F : V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função semicontínua inferiormente e limitada inferiormente. Então, para todo $\varepsilon > 0$ existe $v \in V$ tal que:*

$$F(v) \leq \inf_{v \in V} F(v) + \varepsilon \quad e \quad F(w) \geq F(v) - \varepsilon d(v, w), \quad \forall w \in V.$$

Demonstração. Ver [13]. □