

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Leidy Alejandra Salamanca Russi

Expoentes de Lyapunov sobre homeomorfismos que preservam densidade de
área

Juiz de Fora

2020

Leidy Alejandra Salamanca Russi

Expoentes de Lyapunov sobre homeomorfismos que preservam densidade de área

Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Sistemas Dinâmicos

Orientador: Dra. Laura Senos Lacerda Fernandez

Juiz de Fora

2020

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Salamanca Russi, Leidy Alejandra.

Expoentes de Lyapunov sobre homeomorfismos que **preservam densidade de área** / Leidy Alejandra Salamanca Russi. – 2020.

78 f. : il.

Orientador: Laura Senos Lacerda Fernandez

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós Graduação em Matemática, 2020.

1. Expoentes de Lyapunov. 2. Medidas invariantes. 3. Homeomorfismos sobre superfícies. I. Lacerda Fernandez, Laura, orient.

Leidy Alejandra Salamanca Russi

Expoentes de Lyapunov sobre homeomorfismos que preservam densidade de
área

Dissertação apresentada ao Programa de Pós
Graduação em Matemática da Universidade
Federal de Juiz de Fora como requisito par-
cial à obtenção do título de Mestre em Ma-
temática. Área de concentração: Sistemas
Dinâmicos

Aprovada em () de () de ()

BANCA EXAMINADORA

Dra. Laura Senos Lacerda Fernandez - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Dr. Maria José Pacífico
Universidade de Rio de Janeiro (UFRJ)

Dr.Regis Castijos Alves Soares Junior
Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)

RESUMO

Nesse trabalho apresentamos duas das ferramentas que servem para determinar o comportamento hiperbólico dos difeomorfismos e homeomorfismos que preservam densidade de área definidos sobre superfícies riemannianas (suaves compactas e conexas), os quais respectivamente chamaremos expoente de Lyapunov "clássico" e novo expoente de Lyapunov. Mostraremos algumas das semelhanças e diferenças que estes apresentam: a invariância do novo expoente de Lyapunov ao longo da órbita de quase todo ponto em M e a densidade do conjunto de aplicações diferenciáveis com expoente de Lyapunov zero no conjunto dos homeomorfismos que preservam a densidade de área.

Palavras-chave: Novo expoente de Lyapunov. Homeomorfismos sobre superfícies.

ABSTRACT

In this work we present two of the tools that are used to determine the hyperbolic behavior of the diffeomorphisms and homeomorphisms that dense- areas preserve on Riemannian surfaces (smooth, compact and connected), which we will respectively we call Lyapunov “classic”exponent and new Lyapunov exponent. We will show some of the similarities and differences that they present: the invariance of the new Lyapunov exponent along the orbit of almost every point in M and the density of the set of differentiable applications with Lyapunov exponent zero in the set of preserving area homeomorphisms. Keywords: New Lyapunov exponent. preserving area homeomorphisms.

SUMÁRIO

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 11 |
| 1.1 | MARCO HISTÓRICO | 11 |
| 1.2 | RESULTADOS A DEMONSTRAR | 12 |
| 1.3 | ESTRUTURA | 13 |
| 2 | PRELIMINARES | 15 |
| 2.1 | DIFERENCIABILIDADE ENTRE VARIEDADES | 15 |
| 2.1.1 | Variedades diferenciáveis | 15 |
| 2.1.2 | Difeomorfismos hiperbólicos | 25 |
| 2.1.3 | Conjuntos hiperbólicos | 29 |
| 2.2 | CONCEITOS DE TEORIA ERGÓDICA | 30 |
| 3 | EXPOENTES DE LYAPUNOV | 41 |
| 3.1 | COCÍCLOS LINEARES E EXPOENTES DE LYAPUNOV. | 41 |
| 3.2 | O EXPOENTE DE LYAPUNOV PARA DIFEOMORFISMOS | 51 |
| 4 | O NOVO EXPOENTE DE LYAPUNOV | 61 |
| 4.1 | O NOVO EXPOENTE DE LYAPUNOV | 61 |
| 4.2 | A DENSIDADE DOS HOMEOMORFISMOS COM NOVO EXPOENTE DE LYAPUNOV IGUAL A ZERO, EM $\text{Hom}_\mu(S)$ | 67 |
| | REFERÊNCIAS | 77 |

1 INTRODUÇÃO

1.1 MARCO HISTÓRICO

Grande parte do estudo dos sistemas dinâmicos consiste em determinar formas de descrever o comportamento de expansão e de contração das aplicações definidas sobre variedades.

A teoria da estabilidade de sistemas dinâmicos é uma contribuição de renomados matemáticos dos séculos XIX e XX, tais como A. M. Lyapunov, H. Poincaré e G. Birkhoff. Eles pesquisaram sobre o problema geral da estabilidade do movimento. Esses fornecem teoremas como: o *Teorema de Lyapunov*, que serve como método para determinar a estabilidade dos pontos próximos a um ponto de equilíbrio; o *Teorema de Recorrência de Poincaré*, o qual estabelece que um sistema do tipo (f, μ) onde $f : M \rightarrow M$ é uma função mensurável e μ é uma medida finita satisfazendo $\mu(B) = \mu(f^{-1}(B))$ para todo subconjunto mensurável B com medida positiva, $\mu(B) > 0$, a órbita de quase todo ponto em M passa um número infinito de vezes pelas vizinhanças do ponto; e o *Teorema Ergódico de Birkhoff* afirma que em certos sistemas a medida do tempo de visita de um ponto a um conjunto é igual à medida do espaço.

Atualmente, uma das ferramentas usadas para determinar o comportamento assintótico de sistemas dinâmicos diferenciáveis da forma $f : S \rightarrow S$, com S um espaço mensurável de medida μ finita f -invariante, é dada pelos expoentes de Lyapunov, visto que, através desses podemos conhecer o caráter divergente, dissipativo ou conservativo de um sistema dinâmico.

A priori, dada uma aplicação diferenciável $f : S \rightarrow S$, como acima, o expoente de Lyapunov em relação a f no ponto x , é o limite:

$$\chi^+(f, x, v) = \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|D f_x^m v\|, \quad \text{com } x \in S \text{ e } v \in T_x S.$$

Onde esse limite define uma função $\chi^+(f, x, \cdot) : T_x S \rightarrow \mathbb{R}$.

Fazendo abuso da notação, pode-se notar como estes números fornecem boa informação sobre a expansão e contração dos comprimentos no espaço tangente, pois escrevendo $\chi^+ = \chi^+(x, v)$, temos que para m suficientemente grande

$$\chi^+ \approx \frac{1}{m} \log \|D f_x^m\| \quad \text{implica} \quad e^{m\chi^+} \approx \|D f_x^m\|.$$

Um caso particular do uso desses expoentes é dado por Barreira e Pesin [4]. A esse respeito, é introduzido o expoente de Lyapunov a fim de caracterizar a estabilidade da solução trivial de uma equação diferencial linear, $\dot{x} = A(t)x$, onde $x(t)$ é um vetor de \mathbb{C}^n e $A(t)$ é uma matriz $n \times n$ limitada com entradas complexas que dependem continuamente de t . Além disso, é exposta a teoria dos sistemas dinâmicos com expoente de Lyapunov diferente de zero.

Em vista que o uso de expoentes de Lyapunov enriquece a teoria de estabilidade, é interessante estudar sobre quais espaços de funções podem se obter conjuntos de aplicações que mostrem os mesmos comportamentos dos expoentes de Lyapunov.

Em relação a essa afirmação, J. Bochi em 2002 [8, Teorema A], demonstra o teorema denominado Teorema de Bochi-Mañé, anunciado por Ricardo Mañé, o qual afirma que no espaço dos difeomorfismos que preservam densidade de área definidos numa superfície riemanniana S compacta, $\text{Diff}_\mu(S)$, existe um subconjunto residual G_δ (i.e. G_δ é a interseção de abertos densos) do conjunto dos difeomorfismos que preservam densidade de área, de classe C^1 , $\text{Diff}_\mu^1(S)$, no qual os elementos ou são Anosov ou tem expoente de Lyapunov clássico zero. Também mostra, que para qualquer sistema dinâmico discreto composto de um homeomorfismo $f : S \rightarrow S$ e μ uma medida ergódica para f , existe um subconjunto residual na topologia C^0 dos cociclos lineares $\mathcal{A} : S \rightarrow SL(2, R)$, onde cada elemento ou é uniformemente hiperbólico ou tem expoente de Lyapunov zero para quase todo ponto, usando a semicontinuidade superiormente da aplicação

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda} : \text{Diff}_\mu(S) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \int_M \chi^+(f, x) d\mu. \end{aligned}$$

Por outro lado, o expoente de Lyapunov clássico é determinado para aplicações diferenciáveis, pois o mesmo precisa da transformação derivada, logo, resulta que para homeomorfismos a função χ^+ não está bem definida.

1.2 RESULTADOS A DEMONSTRAR

Para o estudo do comportamento das órbitas $\mathcal{O}_f(x) := \{f^m(x); m \in \mathbb{Z}\}$ (de pontos que estão suficientemente próximos) de homeomorfismos que preservam densidade de área, definidos numa superfície riemanniana compacta, conexa, suave e sem bordo S , os portugueses M. Bessa e C. Silva em 2010, definem a noção de *novo expoente de Lyapunov*. Nós discutiremos os Teoremas expostos pelos autores em [6, Teoremas A, 2.4, B e C], os quais afirmam:

Teorema A: O novo expoente de Lyapunov coincide com o expoente de Lyapunov clássico se a aplicação for diferenciável.

Teorema A.1: Assumindo a integrabilidade de algumas funções, o novo expoente de Lyapunov é invariante para a órbita de quase todo ponto na superfície S . (quase todo ponto significa que o subconjunto de S , dos pontos que satisfazem a propriedade, “tem a mesma área que S ”).

Teorema B: Existe um subconjunto denso do conjunto de homeomorfismos que preservam área definidos em uma superfície compacta, conexa e sem bordo, no qual todo elemento tem expoente de Lyapunov zero, para Lebesgue quase todo ponto.

Teorema C: A função que associa um homeomorfismo que preserva densidade de área equipado com a topologia C^0 , à integral do seu novo expoente de Lyapunov superiormente em toda a superfície (com relação à medida de área dada pela medida de Lebesgue), não pode ser semicontínua superior, o que difere do caso C^1 .

Convém ressaltar que as características que descrevem os expoentes de Lyapunov (clássico e Novo) sobre espaços de funções, é área fértil de pesquisa nos dias de hoje.

Dentre os resultados mais recentes, encontramos propriedades para a entropia de sistemas dinâmicos, como as dadas por M. Bessa, C. Silva e H. Vilarinho em 2019 [7]. Eles mostram que a fórmula de entropia de Pesin se mantém genericamente dentro de um amplo subconjunto de homeomorfismos bi-Lipschitz que preservam o volume em relação à topologia de Lipschitz-Whitney. Por outro lado, M. Viana e J. Yang em 2019 [32], provam que o teorema de Bochi-Mañé é falso, em geral, para cociclos lineares sobre aplicações não inversíveis, encontrando subconjuntos C^0 -abertos de cociclos lineares que não são uniformemente hiperbólicos e com expoentes de Lyapunov limitados por zero.

1.3 ESTRUTURA

Este trabalho está organizado da seguinte forma:

No Capítulo 2, fornecemos as bases dos conceitos sobre variedades diferenciáveis e a estrutura hiperbólica dos difeomorfismos. Em seguida, introduzimos a medida de Lebesgue definida para variedades diferenciáveis e alguns dos resultados de teoria ergódica que consideramos importantes.

No Capítulo 3, apresentamos o expoente de Lyapunov clássico, enunciando o Teorema Ergódico Multiplicativo e mostramos dois resultados sobre a convergência uniforme dos expoentes de Lyapunov clássicos.

No Capítulo 4, daremos a definição de novo expoente de Lyapunov, e mostraremos, tomando um difeomorfismo que deixa invariante a medida de Lebesgue, que os expoentes de Lyapunov clássico e novo coincidem. Também mostraremos que existe um subconjunto denso no conjunto dos homeomorfismos que preservam densidade de área definidos sobre superfícies suaves compactas, conexas sem bordo, $\text{Hom}_\mu(S)$. Para finalizar o capítulo, mostramos que dado um homeomorfismo com novo expoente de Lyapunov zero, existe uma sequência de homeomorfismos perto, que tem novo expoente de Lyapunov não zero.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo, apresentamos alguns dos conceitos básicos de geometria diferencial e teoria ergódica, os quais foram considerados elementos base para o desenvolvimento do texto, esses ajudaram ao leitor a entender o por que podem ser feitas considerações locais quando queremos entender situações sobre uma superfície.

2.1 DIFERENCIABILIDADE ENTRE VARIEDADES

Esta seção é feita para introduzir ao leitor no contexto da diferenciabilidade de aplicações definidas entre variedades diferenciáveis, os difeomorfismos hiperbólicos e os conjuntos hiperbólicos, conceitos necessários no desenvolvimento dos capítulos seguintes. As demonstrações e os fatos aqui encontrados podem ser consultados em [1, 12, 13] e [17, 20].

2.1.1 Variedades diferenciáveis

Definição 2.1.1. Uma *variedade diferenciável* de dimensão n e de classe C^k é um par ordenado (M, \mathcal{U}) onde M é um espaço topológico de Hausdorff, com base enumerável, e \mathcal{U} é um atlas de dimensão n e classe C^k sobre M , isto é, $\mathcal{U} := \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ é uma coleção de difeomorfismos k -vezes diferenciáveis (de classe C^k), $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$, tais que

1. Cada U_α é aberto de M e cada V_α é aberto de \mathbb{R}^n .
2. $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$.
3. A aplicação $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ é diferenciável com inversa diferenciável, de classe C^k , para quaisquer α e β tais que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$.

Chamaremos de:

- *carta local* ou coordenada local, cada par $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$;
- *parametrizações* as aplicações φ_α^{-1} ;
- *mudanças de coordenadas*, as transformações $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$;
- *variedade orientável* a M , se a diferencial de qualquer mudança de coordenadas, $D\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$, tem determinante positivo;
- *Variedade suave* a uma variedade M tal que cada difeomorfismo nas cartas locais é de classe C^∞ (classe C^k , para todo $k = 1, 2, \dots$).

No que segue, é usado as duas noções: cartas locais e parametrizações.

Proposição 2.1.1. *Para cada ponto $p \in M$ na variedade existe uma carta local que identifica o ponto com a origem.*

Com efeito: sejam $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$ uma carta local de $p \in M$ com $\varphi_\alpha(p) = x$ e $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma translação em \mathbb{R}^n definida por $T(y) = y - x$. Então, já que a aplicação $\psi_\alpha \equiv T \circ \varphi_\alpha : U \rightarrow T(V_\alpha)$ é um difeomorfismo de classe C^k , tal que $\psi(p) = T \circ \varphi_\alpha(p) = T(\varphi_\alpha(p)) = \varphi_\alpha(p) - x = 0$, concluímos que o par (ψ_α, U_α) é uma carta local como queríamos. Além disso, notemos que dados α, β tais que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, temos que a composição $\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1} \equiv T \circ \varphi_\alpha \circ (T \circ \varphi_\beta)^{-1} \equiv T \circ (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) \circ T^{-1}$ é um difeomorfismo de classe C^k e $\cup_\alpha U_\alpha = M$, sendo assim, $\mathcal{U} = (U_\alpha, \psi_\alpha)$ é um atlas para M .

A partir de agora, se não precisarmos especificar a dimensão da variedade, escreveremos variedade para indicar uma n -variedade. Também, depois de dotar com um atlas uma variedade M , para cada $p \in M$, escreveremos $x = p$ no lugar de $x = \varphi(p)$.

Definição 2.1.2 (d -Toro). Para cada $d \geq 1$, considere a relação de equivalência em \mathbb{R}^d que identifica dois vetores se a sua diferença é um vetor com coordenadas inteiras, isto é,

$$(x_1, \dots, x_d) \sim (y_1, \dots, y_d) \Leftrightarrow (x_1 - y_1, \dots, x_d - y_d) \in \mathbb{Z}^d.$$

Chamamos **toro** de dimensão d ou, simplesmente, d -toro o espaço quociente

$$\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d = (\mathbb{R} / \mathbb{Z})^d \quad (2.1)$$

das classes de equivalência desta relação.

Para mais detalhes da definição, ver [22, p. 71].

Exemplo 2.1.1. O 2-toro ou simplesmente toro, \mathbb{T}^2 , é uma 2-variedade diferenciável. De fato:

Vamos dotar a \mathbb{T}^2 com um atlas diferenciável. Consideremos \mathbb{T}^2 identificado com o espaço quociente $\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ dotado da relação de equivalência definida. Assim, dois pontos $(x, y), (x', y')$ em \mathbb{R}^2 pertencem à mesma classe de equivalência (\mathbf{x}, \mathbf{y}) se, e somente se, $(x, y) = (x' + k, y' + h)$ para algum $(k, h) \in \mathbb{Z}^2$.

Escreveremos $(x, y) \bmod 1$ para indicar o representante da classe de (\mathbf{x}, \mathbf{y}) em $P^{-1}(\mathbb{T}^2) \cap (0, 1] \times (0, 1]$, onde P é a projeção canônica definida de \mathbb{R}^2 em \mathbb{T}^2 , que associa a cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sua classe (\mathbf{x}, \mathbf{y}) .

Agora, para cada ponto $(x, y) \bmod 1$, tomemos

$$U'_{(x,y)} = B((x, y) \bmod 1, \delta) \subset \mathbb{R}^2,$$

de modo que escolhendo $\delta > 0$ convenientemente pequeno, podemos dizer menor do que $1/6$, temos que as aplicações $\varphi_{(x,y)} : U_{(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \rightarrow U'_{(x,y)}$, com $U_{(\mathbf{x}, \mathbf{y})} = P(B(x, y) \bmod 1, \delta) \subset \mathbb{T}^2$, são cartas locais sobre \mathbb{T}^2 .

Definição 2.1.3. Uma *variedade compacta* M é uma variedade que é compacta como um espaço topológico, i.e., toda cobertura aberta admite uma subcobertura finita.

A seguinte caracterização das variedades compactas ajuda, em muitos casos, a simplificar cálculos.

Teorema 2.1.2. *Toda variedade M compacta admite um número finito de cartas locais que cobrem a variedade.*

Demonstração. Consideremos um atlas $\mathcal{U} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\}$ como na definição de variedade. Visto que $\cup_\alpha U_\alpha$ é uma cobertura aberta de M , pela compacidade de M , existe uma subcobertura finita $U' = U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_m}$ de M . Assim, se escolhermos $\mathcal{U}' = \{(\varphi_{\alpha_i}, U_{\alpha_i}); i = 1, \dots, m\}$, temos que \mathcal{U}' forma um atlas finito sobre M . \square

Definição 2.1.4. Um *n -simplexo* é o fecho convexo de $n+1$ pontos de $x_1, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{R}^n$.

Definição 2.1.5. Uma *triangulação* de uma variedade M é uma coleção de n -simplexo curvilíneos (imagens difeomorfas de n -simplex de \mathbb{R}^n) que cobrem M , de tal modo que dois quaisquer deles ou não se intersectam ou têm somente um k -simplexo em comum, com $k < n$.

Em particular, numa superfície, isto corresponde a decompor a superfície em triângulos (2-simplexo) que só compartilham ou um vértice ou um lado.

Teorema 2.1.3. *As 2-variedades compactas são triangularizáveis.*

Demonstração. A demonstração desse resultado pode ser vista em [13, p. 326], Proposições 1 e 2. \square

Esse teorema é equivalente a dizer que podemos encontrar uma decomposição da superfície, $\{\Delta_i\}_{i=1}^k$, de conjuntos 2-simplex.

Sejam (M_1, \mathcal{A}_1) e (M_2, \mathcal{A}_2) duas variedades de classe C^k . Dizemos que uma aplicação $f : M_1 \rightarrow M_2$ é contínua quando para todo ponto $p \in M$ existem uma carta local $(U, \varphi) \in \mathcal{A}_1$ de uma vizinhança de p em M_1 com $\varphi(p) = 0$ e uma carta local $(V, \psi) \in \mathcal{A}_2$ de uma vizinhança de $f(p)$ em M_2 , tal que, a composição $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$ é uma aplicação contínua em 0.

Definição 2.1.6. Uma aplicação contínua $f : M_1 \rightarrow M_2$ é dita *diferenciável de classe C^k* em M_1 se, e somente se, a composição $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ é uma aplicação diferenciável de classe C^k .

Exemplo 2.1.2. Seja $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação linear invertível com entradas nos inteiros. A aplicação $\bar{A} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ definida por:

$$\bar{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (2.2)$$

onde $\mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{T}^2$ é a classe de equivalência do ponto $A(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (ver Figura 1), é diferenciável em \mathbb{T}^2 .

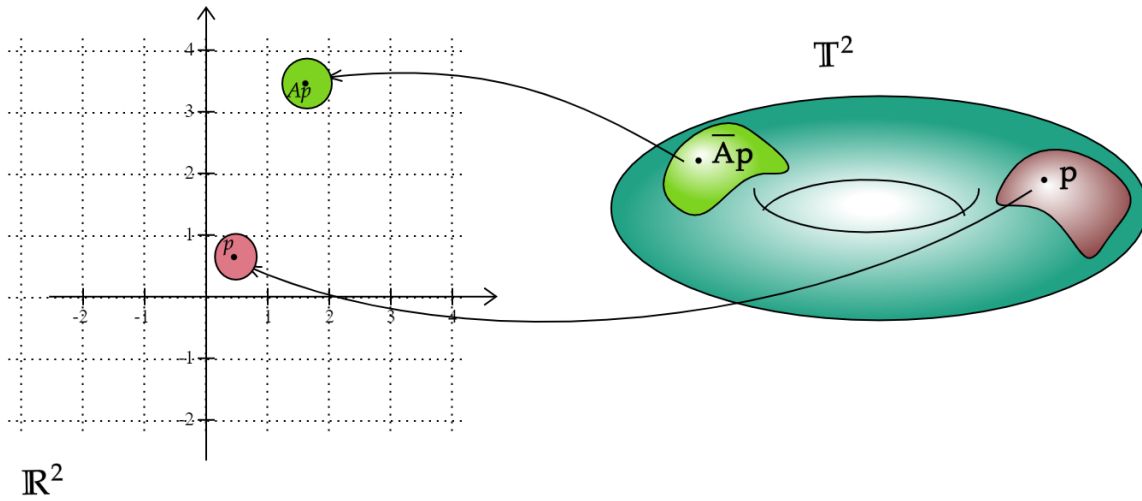


Figura 1 – Homomorfismo no Toro

De fato, seja (\mathbf{x}, \mathbf{y}) um ponto arbitrário do toro \mathbb{T}^2 e consideremos as cartas locais de (\mathbf{x}, \mathbf{y}) e $\bar{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, dadas por:

- $\varphi_{(\mathbf{x}, \mathbf{y})} : U_{(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \rightarrow U'_{(x, y)}$, tal que $(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \in U_{(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \xrightarrow{\varphi} P^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \cap U'_{(x, y)}$, com $U'_{(x, y)} = B((x, y), \delta)$, e
- $\varphi_{\bar{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})} : U_{\bar{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \rightarrow U'_{A(x, y)}$, tal que $(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \in U_{\bar{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \xrightarrow{\varphi} P^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \cap U'_{A(x, y)}$, com $U'_{A(x, y)} = B(A(x, y), \delta)$,

respectivamente, para algum δ suficientemente pequeno. Então, dado que $\varphi_{\bar{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \circ \bar{\mathbf{A}} \circ \varphi_{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}^{-1} \equiv A$, e A é uma transformação linear, temos que $\bar{\mathbf{A}}$ é diferenciável.

$$\begin{array}{ccc} U_{(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \subset \mathbb{T}^2 & \xrightarrow{\bar{\mathbf{A}}} & U_{\bar{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \subset \mathbb{T}^2 \\ \varphi_{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}^{-1} \uparrow & & \downarrow \varphi_{\bar{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \\ U'_{(x, y)} \subset \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{A} & U'_{A(x, y)} \subset \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Antes de continuar com as propriedades e definições sobre variedades diferenciáveis, considerando que o desenvolvimento do texto abrange aplicações diferenciáveis da forma $f : M \rightarrow M$, convém estabelecer daqui em diante $M_1 = M_2$ e para simplificar a notação escreveremos somente φ quando nos referirmos a uma carta local (φ, U_α) .

Definição 2.1.7. Dada M uma variedade diferenciável, dizemos que γ é uma **curva diferenciável** em M se, e somente se, dada uma carta local φ_α de p , temos que a composição $\varphi_\alpha \circ \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação diferenciável no ponto 0 com $\gamma(0) = p \in$

M . Um **vetor tangente** à variedade num ponto $p \in M$ é definido como o vetor tangente em $t = 0$ à alguma curva diferenciável $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ com $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = (\varphi_\alpha^{-1} \circ \gamma)'(0)$.

Definição 2.1.8. Dizemos que duas curvas diferenciáveis $\gamma_1, \gamma_2 : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ são **equivalentes** se $(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$, para toda carta local de p , $\varphi : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$. Simbolizando por $[\gamma]$ a classe de toda as curvas equivalentes a γ , isto é, $[\gamma] := \{\beta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M; (\varphi \circ \gamma)'(0) = (\varphi \circ \beta)'(0)\}$, chamaremos **espaço tangente** à variedade M no ponto p , ao espaço quociente

$$T_p M := \{[\gamma]; \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M \text{ diferenciável com } \gamma(0) = p\}.$$

Dada qualquer carta local $\varphi : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ do ponto p , com coordenadas $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ em \mathbb{R}^n , a aplicação

$$D\varphi_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^n$$

tal que $[\gamma] \in T_p M \mapsto (\varphi_\alpha \circ \gamma)'(0) = v \in \mathbb{R}^n$ permite identificar o plano tangente à variedade M no ponto p com \mathbb{R}^n e fornecer a $T_p M$, uma estrutura de espaço vetorial real munido das operações de soma e produto de um vetor por um número real, definidas pelas equações:

$$[\gamma] + [\beta] = D\varphi_p^{-1}(D\varphi_p[\gamma]) + D\varphi_p^{-1}(D\varphi_p[\beta]),$$

e

$$c[\gamma] = D\varphi_p^{-1}(c D\varphi_p[\gamma]),$$

para todo $[\gamma], [\beta] \in T_p M$ e $c \in \mathbb{R}$. As quais podem ser vistas como as operações usuais em \mathbb{R}^n de soma e produto de um vetor por um escalar.

Dados uma carta local $\varphi : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ em M com coordenadas (x_1, \dots, x_n) e um ponto p em U_α , indicamos por

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(p) \right\},$$

a **base canônica** de $T_p M$. O vetor básico $\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(p)$ é a classe de qualquer caminho γ tal que $(\varphi \circ \gamma)'(0) = e_i$.

Denominamos **fibrado tangente** ao conjunto $TM = \{(x, v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m; x \in M, v \in T_x M\}$.

Definição 2.1.9. Dada uma aplicação diferenciável $f : M \rightarrow M$, $p \in M$ e duas cartas locais $\varphi : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ de p e $\psi : U'_\alpha \rightarrow V'_\alpha$ de $f(p)$ com $f(U_\alpha) \subset U'_\alpha$, a **derivada** de f no ponto p é a aplicação linear $Df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} M$ definida em $\gamma'(0) = v \in \mathbb{R}^n$ por:

$$Df_p(v) = [D\psi_{f(p)}]^{-1} \circ D\psi \circ f \circ \varphi_p^{-1} \circ D\varphi(v);$$

$$\begin{array}{ccc}
U \subset M & \xrightarrow{f} & U' \subset M \\
\varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\
V \subset \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\psi \circ f \circ \varphi^{-1}} & V' \subset \mathbb{R}^n
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
T_p M & \xrightarrow{Df_p} & T_{f(p)} M \\
D(\varphi \circ \gamma)_0 \downarrow & & \downarrow D(\psi \circ f \circ \gamma)_0 \\
\mathbb{R}^n & \xrightarrow{D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{(\varphi \circ \gamma)_0}} & \mathbb{R}^n
\end{array}$$

Logo, $Df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} M$ é uma transformação linear cuja matriz pode ser expressa em relação às bases canônicas,

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}(p) \right\} \text{ e } \left\{ \frac{\partial}{\partial y_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial y_m}(p) \right\},$$

dos espaços $T_p M$ e $T_{f(p)} M$ respectivamente, como a matriz jacobiana $\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j} \right)$ da aplicação $D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})$ no ponto p .

Observação 1. É bom lembrar que embora a definição de aplicação diferenciável de uma função f definida numa variedade seja um conceito global, este depende das propriedades locais definidas. Nesse caso, se existirem duas cartas locais de um mesmo ponto p numa variedade, uma vez que a interseção de abertos é um conjunto aberto e as cartas locais definidas numa variedade restritas a qualquer subconjunto aberto do domínio, são também cartas locais, então a definição acima independe da escolha das cartas locais a menos de uma composição com um homeomorfismo (mudança de variáveis).

Observação 2. A *diferencial* de uma função de g de \mathbb{R}^n em \mathbb{R} num ponto p , é definido como o vetor de derivadas parciais da função, $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(p) \right)$. No caso que todas suas derivadas parciais forem contínuas, dizemos que ∇g_p é a *gradiente* da função g no ponto p .

Definição 2.1.10. Seja M uma variedade. Dizemos que uma aplicação f é diferenciável em M , se a derivada de f existe para todo ponto $p \in M$. Neste caso, podemos identificar a derivada de f em cartas locais $\varphi : U_\alpha \rightarrow \varphi(U_\alpha)$ de p e $\psi : V_\alpha \rightarrow \psi(V_\alpha)$ de $f(p)$ com a aplicação $Df : U_\alpha \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, onde $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ é o espaço das transformações lineares de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^n , definida da forma:

$$\begin{aligned}
Df : p \in U_\alpha & \mapsto Df_p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \\
\varphi(p) & \mapsto D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{(\varphi \circ \gamma)_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Observação 3. Dizemos que uma aplicação é de classe C^k quando a aplicação derivada de f , Df , for de classe C^{k-1} .

Em virtude que a derivada num ponto pode ser identificada com uma transformação linear de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^n e, lembrando que o espaço das transformações lineares é um espaço vetorial normado, quando a aplicação derivada, Df , for contínua, definimos sua norma nas coordenadas locais como:

$$\|Df\|_0 = \sup_{p \in M} \|Df_p\| = \sup_{p \in M} \sup \{ \|Df_p v\|; v \in \mathbb{R}^n, \|v\| = 1 \}.$$

Aqui, $\|\cdot\|$, denota a norma dos vetores em \mathbb{R}^n . Em vista disso, poderemos fazer cálculos usando a Desigualdade do Valor Médio em \mathbb{R}^n , enunciada a seguir:

Teorema 2.1.4 (Desigualdade do Valor Médio). *Dado um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função diferenciável em cada ponto do segmento de reta $(a, a + v)$ e tal que a restrição ao fechado $[a, a + v] \subset U$ seja contínua. Se $\|Df_x\| \leq M$ para todo $x \in [a, a + v]$ então,*

$$\|f(a + v) - f(a)\| \leq M\|v\|. \quad (2.4)$$

Dada uma aplicação diferenciável $f : M \rightarrow M$, denotemos por $\text{Spec}(f)$, o conjunto de todos os $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que $\det(Df_p - \lambda \text{Id}) = 0$, onde Id denota a matriz identidade de M em M dada nas cartas locais.

Proposição 2.1.5. *Dada uma aplicação de classe C^1 , $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, se existe $\epsilon > 0$ tal que $\text{Spec}(h) \cap (-\epsilon, \epsilon) \neq \emptyset$, então f é injetora.*

Demonstração. A demonstração desse resultado pode ser vista em [9, Teorema 1] □

Definição 2.1.11. Uma **métrica riemanniana** numa variedade M é uma aplicação que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno no espaço tangente $T_p M$, ou seja, uma aplicação bilinear simétrica da forma

$$\cdot_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}, \quad (2.5)$$

tal que:

1. $v \cdot_p v > 0$ para todo vetor não nulo $v \in T_p M$;
2. o produto interno varia diferenciavelmente com o ponto p , no seguinte sentido: Considerando qualquer carta local $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow X_\alpha$ de M e para cada $p \in U_\alpha$, podemos identificar $T_p M$ com \mathbb{R}^d , via $D\varphi_\alpha$, assim, podemos considerar \cdot_p como sendo um produto interno no espaço euclidiano em coordenadas locais. Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base a de \mathbb{R}^n . Então, pedimos que as funções $g_{\alpha,i,j}(p) = e_i \cdot_p e_j$ sejam diferenciáveis para todo par (i, j) e para qualquer escolha da carta local e da base.

Chamamos **variedade riemanniana** a qualquer variedade munida de uma métrica riemanniana.

Lembremos que o produto interno em \mathbb{R}^n é definido por $\langle v, w \rangle = \cos(\theta)\|v\|\|w\| = \sum_{i=1}^n v_i w_i$, onde $\theta = \angle(v, w)$ é o ângulo entre os vetores v e w .

Exemplo 2.1.3. Toda superfície riemanniana suave é uma 2-variedade (superfície). A prova decorre das definições de variedade e de variedade riemanniana.

Definição 2.1.12. Uma **1-forma diferencial** num subconjunto $U \subset \mathbb{R}^n$, é uma aplicação $\omega : U \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ que associa a cada ponto $x \in U$ um funcional linear $\omega_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

A notação $(\mathbb{R}^n)^*$ é usada para simbolizar o espaço de todos os funcionais lineares $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Definição 2.1.13. Dado $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, dizemos que uma 1-forma diferencial $\omega : U \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ é:

- **exata**, se existe uma função diferenciável $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $df = \omega$;
- **localmente exata**, se para todo $x \in U$ existe uma vizinhança aberta V de x para a qual, ω restrita a V é exata;
- **fechada** se, e somente se, é localmente exata.

De forma mais geral, podemos definir n -formas diferenciáveis, mas para isso precisaremos das seguintes definições:

Definição 2.1.14. Dados dois espaços vetoriais reais E, F , uma aplicação $h : E \times \cdots \times E \rightarrow F$ definida no produto cartesiano de n fatores iguais a E , é **n -linear**, se

$$h(x_1, \dots, \alpha x_i + \beta y_i, \dots, x_n) = \alpha h(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + \beta h(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n)$$

quaisquer que sejam $x_1, \dots, x_i, y_i, \dots, x_n \in E$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Se além de ser n -linear a aplicação h satisfaz

$$h(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = 0 \text{ quando } x_i = x_j$$

para quaisquer $i, j \in \{1, \dots, n\}$ com $i \neq j$, então dizemos que h é uma **forma n -linear alternada**.

Exemplo 2.1.4. O determinante de uma matriz real $n \times n$, é uma forma n -linear alternada. Com efeito:

Sejam $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$ e consideremos $\det(x_1, \dots, x_n)$ o determinante da matriz $n \times n$ cujas colunas são os vetores x_i . Levando em consideração as propriedades do determinante, temos que \det é n -linear e alternado. Mais detalhes podem ser consultadas em [15, cap. 5], [27, p. 308], e [21, cap. 3].

Definição 2.1.15. A partir de n funcionais lineares $f_1, \dots, f_n \in E^*$, definimos o **produto exterior** desses funcionais, como n -forma linear alternada $f_1 \wedge \cdots \wedge f_n : E \times \cdots \times E \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$(f_1 \wedge \cdots \wedge f_n)(x_1, \dots, x_n) = \det(f_i(x_j)),$$

onde, à direita temos o determinante da matriz $n \times n$ cuja i -ésima linha é o vetor $(f_1(x_i), \dots, f_n(x_i))$ e cuja j -ésima coluna é o vetor $(f_j(x_1), \dots, f_j(x_n))$.

Denotando por $D_n(E)$ o conjunto de todas as n -formas lineares alternadas sobre E , definimos:

Definição 2.1.16. A aplicação $\Lambda : E^* \times E^* \cdots E^* \rightarrow D_n(E)$ dada por $\Lambda(f_1, \dots, f_n) = f_1 \wedge \cdots \wedge f_n$ onde $f_1 \wedge \cdots \wedge f_n$ é o determinante de uma matriz $n \times n$ definida acima.

Definição 2.1.17. Uma n -**forma diferenciável numa n -variedade** M é uma aplicação

$$\omega : M \rightarrow D_n(T_x M), \quad \text{tal que, } x \in M \mapsto \omega_x \in D_n(T_x M).$$

Isto é, uma aplicação tal que para cada $x \in M$ associa uma n -forma linear alternada $\omega(x) = \omega_x$ no espaço tangente $T_x M$.

Mas especificamente, se consideramos $\varphi : U_0 \rightarrow U$ uma parametrização de um aberto $U \subset M$ e denotamos por u_1, u_2, \dots, u_n as coordenadas em U , em cada ponto $x \in U$, temos $x = \varphi(u)$ para algum $u \in U_0$ e obtemos uma base $\left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial u_n}(u) \right\} \subset T_x M$ para o espaço tangente a M em x . Além disso, se denotamos por $\{du_1, \dots, du_n\} \subset (T_x M)^*$ a base do espaço $(T_x M)^*$, obtemos que cada du_i , é uma 1-forma diferencial em U .

Logo, em cada ponto $x \in M$ as n -formas $du_I = du_{i_1} \wedge \cdots \wedge du_{i_r}$ com $I = \{i_1 < \cdots < i_r\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$, constituem uma base de $D_r(T_x M)$. Portanto, qualquer n -forma diferencial ω , definida num ponto $x \in M$, pode ser expressa da forma:

$$\omega_x = \omega_{\varphi(u)} = \sum_I a_{i_j}(u) du_{i_j}.$$

Dada ω uma n -forma diferenciável dizemos que: ω é **fechada**, se $d\omega = 0$; ω é **exata**, se existe uma $(n-1)$ -forma α em M , tal que $d\alpha = \omega$ e ω é **não degenerada**, se para todo $x \in M$ e todo $u \neq 0$ em $T_x M$ existe $v \in T_x M$, tal que, $\omega_x(u, v) \neq 0$.

Definição 2.1.18. Uma forma **simplética** numa variedade M é uma 2-forma diferencial fechada ω não degenerada.

A existência de uma forma simplética e a definição de 2-forma definida sobre uma base na variedade M implicam que a dimensão de M é par, $\dim M = 2n$. Por outro lado, também temos, a partir de ω a forma de volume em M , definida como a n -ésima potência de ω , $\omega^d = \omega \wedge \cdots \wedge \omega$.

Definição 2.1.19. Uma transformação diferenciável $f : M \rightarrow M$ diz-se simplética se ela preserva a forma simplética, isto é, $\omega_x(u, v) = \omega_{f(x)}(Df(x)u, Df(x)v)$ para todo $x \in M$ e quaisquer $u, v \in T_x M$.

Uma variedade simplética é um par (M, ω) onde M é uma variedade suave e ω é uma forma simplética.

Teorema 2.1.6. *Toda superfície riemanniana é uma variedade diferenciável simplética.*

Dada uma variedade simplética (M, ω) , o seguinte teorema, fornece uma representação para a forma simplética nas cartas locais:

Teorema 2.1.7. [*Teorema de Darboux*] Dado um ponto $x \in M$ existe uma vizinhança U de x no qual todo ponto $y \in U$ tem coordenadas $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ e a forma ω pode ser expressa na forma canônica em relação à base

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{2n}} \right\}$$

da seguinte maneira:

$$\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$$

Demonstração. A demonstração desse resultado pode ser encontrada em [20, p. 221]. \square

Definição 2.1.20. Seja M variedades diferenciável. Uma aplicação $f : M \rightarrow M$ é um **homeomorfismo** se ela é contínua, injetora, sobrejetora e sua inversa f^{-1} é contínua.

Aqui, denotaremos por $\text{Hom}^k(M)$ o conjunto dos homeomorfismos de classe C^k (k -vezes diferenciáveis) definidos sobre uma variedade M . Quando a aplicação f além de ser contínua é diferenciável e tem inversa diferenciável, f é chamada de difeomorfismo. Denotaremos por $\text{Diff}^k(M)$, o conjunto de todos os difeomorfismos de classe C^k , para $k \geq 1$ definidos numa variedade M .

Temos em $\text{Hom}^k(M)$ (respec. $\text{Diff}^k(M)$) uma estrutura natural de espaço vetorial com as operações usuais entre funções: $(f + g)(p) = f(p) + g(p)$ e $(\lambda f)(p) = \lambda f(p)$ para $f, g \in \text{Hom}^r(M)$ (respec. $f, g \in \text{Diff}^k(M)$) e $\lambda \in \mathbb{R}$. Esses espaços vetoriais podem ser vistos como espaços topológicos munidos da topologia C^0 ou da topologia C^k , geradas respectivamente pelas métricas:

$$d_0(f, g) := \sup \left\{ d(f(x), g(x)), d(f^{-1}(x), g^{-1}(x)); x \in M \right\} \quad (2.6)$$

e

$$d_k(f, g) := \sup \left\{ d_0(D^j f(x), D^j g(x)), d_0(D^j f(x)^{-1}, D^j g(x)^{-1}); 0 \leq j \leq k, x \in M \right\}. \quad (2.7)$$

Usando essas métricas podem ser definidas as normas C^0 e C^k para todo $k \geq 1$ sobre os espaços $\text{Hom}^k(M)$ e $\text{Diff}^k(M)$, da forma:

$$\|f\|_0 = \sup_{x \in M} \{\|f(x)\|\} = d_0(f, 0)$$

e

$$\|f\|_k = \max_{j=0,1,\dots,k} d_j(f, 0),$$

onde 0 é a função identicamente nula.

Definição 2.1.21. Dado $\epsilon > 0$, se duas aplicações $f, g : M \rightarrow M$ de classe C^k , com $k \geq 0$, são tais que,

$$d_k(f, g) < \epsilon, \quad (2.8)$$

dizemos que f e g estão $\epsilon - C^k$ -**perto** ou ϵ -perto na topologia C^k . Se não há perigo de confusão, dizemos simplesmente que f e g estão ϵ -perto.

Diremos que uma aplicação $g : M \rightarrow M$ é uma $\epsilon - C^k$ **perturbação** de f , se satisfaz a Desigualdade 2.8. No caso que um homeomorfismo ou um difeomorfismo f seja diferenciável para todo $k > 0$, dizemos que f é de **classe** C^∞ ou suave, respectivamente.

Definição 2.1.22. Uma propriedade é chamada **típica** (ou genérica) em $\text{Diff}^k(M)$, se o conjunto de pontos que satisfazem a propriedade é um conjunto $R \subset \text{Diff}^k(M)$, resultante da interseção enumerável de conjuntos abertos densos.

Muitos autores denotam a um conjunto o qual é a interseção contável de conjuntos abertos por G_δ -conjunto.

Observação 4. Propriedades típicas representam conjuntos os quais são grandes no sentido topológico e, em particular, não vazios.

2.1.2 Difeomorfismos hiperbólicos

Dados uma aplicação f definida numa variedade diferenciável M e um ponto $p \in M$, estaremos interessados em determinar se dado um ponto $q \in M$ suficientemente próximo a p e arbitrário, temos que através das iteradas da função f , os pontos $f^m(q)$ e $f^m(p)$ continuam próximos, para todo $m \in \mathbb{N}$ ou \mathbb{Z} , está caracterização fornece "estabilidade" que permite generalizar conceitos em vizinhanças de pontos e não apenas em esses. No caso das aplicações diferenciáveis, uma boa ferramenta é a transformação linear dada pela derivada.

Definição 2.1.23. Uma transformação linear $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dizemos que é **hiperbólica** se, para todo λ tal que $\det(A - \lambda \text{Id}) = 0$, o módulo de λ é diferente de 1.

Usando as convenções dadas pela álgebra linear, chamaremos os elementos λ que satisfazem a igualdade acima de autovalores de A e os elementos do conjunto de vetores $v \in \mathbb{R}^n$, tais que, $(A - \lambda \text{Id})v = 0$ de autovetores.

Definição 2.1.24. Dada uma matriz A , em virtude que as soluções da equação característica de A , $\det(A - x \text{Id}) = 0$, são raízes de um polinômio mônico, definimos a **multiplicidade** do autovalor λ como a maior potencia tal que $(\lambda - x)^q = 0$.

Denotemos por $\text{Spec}(A)$, o conjunto de todos os autovalores associados a uma transformação linear $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. A seguinte proposição mostra que $\text{Spec}(A)$ não explode

a través de uma pequena perturbação, isto é, que o espectro de A não explode, queremos indicar em vizinhanças pequenas ao redor de cada um dos autovalores a multiplicidade não é maior que a multiplicidade dos autovalores associados à perturbação.

Proposição 2.1.8. *Se λ é um autovalor de $L \in \mathcal{L}(R^n)$ de multiplicidade m , então existem $\epsilon > 0$ e $\delta > 0$ tal que, se $\|T - L\| < \delta$, a soma das multiplicidades dos autovalores de T contidos na bola de raio ϵ e centro em λ é no máximo igual a m .*

Demonstração. Seja $\lambda \in \text{Spec}(L)$, então pelas propriedades da álgebra linear [10, p. 125], λ é um autovalor do operador complexificado \tilde{L} . Por tanto $|\lambda| \leq \|\tilde{L}\| = \|L\|$. Logo, se $\|T - L\| < 1$, o conjunto $\text{Spec}(T)$ está contido no interior do disco D de centro na origem de \mathbb{C} e raio $1 + \|L\|$. Seja V_ϵ a união das bolas de raio ϵ e centro nos elementos de $\text{Spec}(L)$. Seja $\mu \in D \setminus V_\epsilon$, então $\det(\tilde{L} - \mu \text{Id}) \neq 0$. Por continuidade do determinante existe uma vizinhança U de μ em \mathbb{C} e $\delta > 0$, dependendo de μ , tal que se $\|T - L\| < \delta$ e $\hat{\mu} \in U$, então $\det(\tilde{T} - \mu \text{Id}) \neq 0$. Portanto, $\hat{\mu} \notin \text{Spec}(\tilde{T})$. Pela compacidade de $D - V_\epsilon$ concluímos que existe $\delta > 0$ tal que, se $\|T - L\| < \delta$ e $\mu \in D \setminus V_\epsilon$ então $\det(T - \mu \text{Id}) \neq 0$. Como $\text{Spec}(T) \subset D$ segue que $\text{Spec}(T) \subset V_\epsilon$, o que demonstra o lema. \square

Lema 2.1.9. *Se λ é um autovalor de $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ de multiplicidade m , então existe $\epsilon > 0$ e $\delta > 0$ tal que, se $\|T - L\| \leq \delta$, a soma das multiplicidades dos autovalores de T contidos na bola de raio ϵ e centro em λ é no máximo igual a m .*

Demonstração. A demonstração desse resultado pode ser vista em [17, p. 58]. \square

Definição 2.1.25. Dados M uma variedade e uma aplicação $f : M \rightarrow M$, dizemos que $x_0 \in M$ é um **ponto periódico** se existe um inteiro positivo q , tal que $f^q(x_0) = x_0$.

Se q for tal que $q = \min\{m \in \mathbb{N}; f^m(x_0) = x_0\}$, q é denominado o **período** de x_0 para f . Quando o período q é 1, x_0 é chamado **ponto fixo** de f .

Dado f um difeomorfismo definido numa variedade M , dizemos que um ponto $x_0 \in M$ é um **ponto hiperbólico periódico** para f se x_0 é um ponto periódico e a aplicação,

$$Df_{x_0}^m : T_{x_0}M \rightarrow T_{f^m(x_0)}M, \quad (2.9)$$

é uma aplicação linear hiperbólica. A segunda condição, fornece localmente na variedade uma estrutura local hiperbólica.

Definição 2.1.26. Dado um ponto $p \in M$, a **órbita** de p , é definida como o conjunto $\mathcal{O}_f(p) = \{f^m(p); m \in \mathbb{N} \text{ ou } \mathbb{Z}\}$, as vezes também chamada de órbita discreta.

As órbitas de pontos periódicos hiperbólicos são denominadas **órbitas periódicas hiperbólicas**.

Definição 2.1.27. Um ponto fixo, x_f , é considerado um *ponto assintoticamente estável* se, e somente se, para cada vizinhança $N \subset M$ de x_f , houver uma vizinhança $N' \subset N$ de x_f tal que se $x \in N'$, $\mathcal{O}_f(x) \subset N$.

Em outras palavras, x_f é assintoticamente estável, se e somente se, para cada ponto $x \in N$, $\lim_{m \rightarrow \infty} f^m(x) = x_f$. De modo geral, podemos ver que todo ponto z que satisfaz o limite acima é um ponto fixo para f . De fato, dado um difeomorfismo f , em particular, ele é contínuo, conseqüentemente

$$f(z) = f\left(\lim_{m \rightarrow \infty} f^m(z)\right) = \lim_{m \rightarrow +\infty} f^{m+1}(z) = z. \quad (2.10)$$

Definição 2.1.28. Dados X um espaço topológico, $f : X \rightarrow X$ e p um ponto fixo para f , se $f^m(x) \rightarrow p$ quando $m \rightarrow \infty$, então dizemos que x é (positivamente) *assintótico* a p . No caso de aplicações inversíveis que satisfazem $f^{-m}(x) \rightarrow p$ quando $m \rightarrow \infty$, dizemos que x é (negativamente) assintótico a p .

O seguinte teorema denominado Teorema do Ponto Fixo de Banach ou Princípio da Aplicação Contração garante a existência de pontos fixos para um tipo particular de aplicações e é uma ferramenta fundamental usada em muitos contextos.

Definição 2.1.29. Uma aplicação $f : M \rightarrow M$, para a qual existe uma constante $0 < \lambda < 1$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y)$ para todo $x, y \in M$ é chamada *aplicação contração*.

Definição 2.1.30. Dada $f : M \rightarrow M$, a função $g \equiv f + h$ com $h : M \rightarrow M$ define uma ϵ -perturbação de f , quando $\|h\|_0 \leq \epsilon$.

Teorema 2.1.10 (Teorema do Ponto Fixo). *Seja X um espaço métrico completo. Sob a ação das iteradas de uma aplicação contração contínua $f : X \rightarrow X$, todos os pontos em X convergem exponencialmente a um único ponto fixo de f . Isto é, para todo $x \in X$, existe um único $a \in X$ tal que*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f^m(x) = f(a) = a.$$

Demonstração. Vamos mostra que dado qualquer ponto $x \in X$, a sequência $\{f^m(x)\}$, com $m \in \mathbb{N}$, é de Cauchy em $f(X)$, logo, usando o fato que X é um espaço métrico completo, concluiremos que $\{f^m(x)\}$ é uma sequência convergente. Depois, tomando $p = \lim_{m \rightarrow \infty} f^m(x)$ mostraremos que p é o único ponto fixo de f .

Seja $0 < \lambda < 1$ uma constante tal que $d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y)$ para todo $x, y \in X$ então, como

$$d(f^j(x), f^{j-1}(x)) \leq \lambda^{j-1} d(f(x), x),$$

temos para quaisquer $0 < k < m$ em \mathbb{R} a seguinte desigualdade:

$$d(f^m(x), f^k(x)) \leq \sum_{j=k}^{m-1} d(f^{j+1}(x), f^j(x)) \leq \sum_{j=0}^{m-k-1} \lambda^{k+j} d(f(x), x).$$

Além disso, considerando

$$\lambda^k \sum_{j=0}^{m-k-1} \lambda^j \leq \lambda^k \left[\sum_{j=0}^{m-k-1} \lambda^j + \sum_{j=k}^{\infty} \lambda^j \right] = \lambda^k \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j = \frac{\lambda^k}{1-\lambda},$$

temos que $\{f_m(x)\}$ é uma sequência de Cauchy, pois

$$d(f^m(x), f^k(x)) \leq \frac{\lambda^k}{1-\lambda} \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow \infty.$$

Agora, dado que $p = \lim_{m \rightarrow \infty} f^m(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} f^{m-1}(f(x))$, pela unicidade do limite, a continuidade de f e a Equação (2.10), temos que $f(p) = p$ é o único ponto fixo de f . \square

Proposição 2.1.11. *Dada uma aplicação $f : M \rightarrow M$ de classe C^k , com $k \geq 1$, se $p \in M$ é um ponto periódico de período q para f , tal que a derivada de f em p , Df_p , é hiperbólica, então para toda ϵ -perturbação de f , na topologia C^1 , existe um único ponto periódico de período q perto de p .*

Demonstração. Primeiramente notemos que pelo Corolário 2.1.1 podemos escolher uma carta local de p tal que em coordenadas locais $p = 0$. Consideremos F sendo a equação

$$F \equiv f^q - \text{Id}. \quad (2.11)$$

Pela hipótese, Df_0^q tem autovalores com módulo diferente de 1, então $\det(DF_0) = \det(Df_0^q - \text{Id}) \neq 0$. Portanto, usando o Teorema da Aplicação Inversa (Ver, Lima [23, p. 295]) nessas coordenadas, F é um difeomorfismo local.

Por outro lado, consideremos uma $\epsilon - C^1$ perturbação de f , $g : M \rightarrow M$, assim, escolhendo U a vizinhança do 0, onde F é difeomorfismo, podemos escrever g nessa vizinhança, da forma:

$$g^q \equiv f^q - H,$$

onde $\|H\|_1 = \max\{\|H\|_0, \|DH\|_0\} \leq \epsilon$.

Logo, substituindo 2.11 na última expressão,

$$g^q \equiv F + \text{Id} - H.$$

Para mostrar que g assim definida tem um ponto fixo, vamos provar que a equação $x = F(x) + \text{Id}(x) - H(x)$, tem uma única solução perto de p . Para isto observemos que essa última igualdade é equivalente a $F(x) = H(x)$. Visto que F é invertível, dizemos que x é ponto fixo de g^q se,

$$F^{-1}H(x) = x.$$

Agora, diminuindo U , se necessário, e escrevendo $L = \|DF^{-1}\|_0$, como consequência da Desigualdade do Valor Médio e da regra da cadeia, temos que existe uma vizinhança do

zero, onde

$$\begin{aligned}
\|F^{-1}H(x) - F^{-1}H(y)\| &\leq \|D(F^{-1}H)_z\|\|x - y\| \\
&\leq \|D F_{H(z)}^{-1}\|\|D H_z\|\|x - y\| \\
&\leq \|D F^{-1}\|_0 \|D H\|_0 \|x - y\| \\
&\leq \epsilon L \|x - y\|,
\end{aligned}$$

para todo $x, y \in U$.

Portanto, visto que para $\epsilon \leq \frac{R}{L(1+R)}$, a aplicação f restrita à bola $V_0 = \{y; \|y\| \leq R\} \subset U$, satisfaz:

$$\begin{aligned}
\|F^{-1}H(y)\| &\leq L\epsilon(1 + \|y\|) \\
&= L \left(\frac{R}{L(1+R)} \right) (1 + \|y\|) \\
&\leq R.
\end{aligned}$$

e

$$\|F^{-1}H(x) - F^{-1}H(y)\| \leq \epsilon L \|x - y\| \leq \frac{R}{L(1+R)} L \|x - y\| \leq \frac{R}{(1+R)} \|x - y\|,$$

concluimos que $F^{-1}H : V_0 \rightarrow V_0$ é uma contração definida num compacto e, pelo Princípio do Ponto Fixo, existe um único $x_f \in V_0$ tal que,

$$F^{-1}H(x_f) = x_f.$$

O qual termina a prova. □

Definição 2.1.31. Um difeomorfismo f de M em M é chamado hiperbólico se para todo $x \in M$, a transformação linear $D f_x$ é hiperbólica.

2.1.3 Conjuntos hiperbólicos

Dados M uma variedade suave, $U \subset M$ um subconjunto aberto, $f : U \rightarrow M$ um difeomorfismo C^1 sobre a imagem de U , e $\Lambda \subset U$ um subconjunto compacto que satisfaz $f(\Lambda) \subset \Lambda$, dizemos que Λ é um conjunto **hiperbólico**, se existem $C > 0$, $\lambda \in (0, 1)$ e, para todo $x \in \Lambda$ existem subespaços $E^s(x), E^u(x) \subset T_x M$ que satisfazem:

1. $T_x M = E^s(x) \oplus E^u(x)$;
2. $\|D f_x^m v^s\| \leq C \lambda^m \|v^s\|, \forall v^s \in E^s(x)$ e $n \geq 0$;
3. $\|D f_x^{-m} v^u\| \leq C \lambda^m \|v^u\|, \forall v^u \in E^u(x)$ e $n \geq 0$;

$$4. D f_x E_x^s = E_{f(x)}^s \text{ e } D f_x E_x^u = E_{f(x)}^u.$$

Um conjunto Λ tal que $f(\Lambda) \subset \Lambda$ é chamado *invariante* por f .

Observação 5. Note que a diferencial contrai os vetores do subespaço E_x^s e expande os vetores do subespaço E_x^u .

Estes subespaços assim definidos são denominados *espaço estável* e *espaço instável*, respectivamente.

Observação 6. Usando o comentário acima, e os itens 2. e 3. na definição de conjunto hiperbólico, podemos identificar λ^m como estimativa para a taxa da variação da norma da derivada da evolução no tempo m da função f aplicada nos pontos do plano tangente, respeito à norma dos pontos no mesmo. Isto é,

$$\frac{\|D f_x^m v^s\|}{\|v^s\|} \leq C\lambda^m \quad \text{e} \quad \frac{\|D f_x^{-m} v^u\|}{\|v^u\|} \leq C\lambda^m. \quad (2.12)$$

Definição 2.1.32. Um difeomorfismo de classe C^k , $f : M \rightarrow M$, definido numa variedade compacta é chamado um *difeomorfismo Anosov* se, e somente se, M é um conjunto hiperbólico.

Definição 2.1.33. Seja Λ um conjunto compacto f -invariante para uma aplicação $f : U \subset M \rightarrow M$, o conjunto Λ é dito *hiperbolicamente repulsor* se existe uma métrica riemanniana em uma vizinhança de Λ tal que para todo ponto $v \in M$, $\|D f_x^{-1}\| < 1$.

Definição 2.1.34. Seja p um ponto fixo do difeomorfismo $f \in \text{Diff}^r(M)$. Dizemos que p é *elementar* se 1 não é autovalor de $D f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} M$.

Por definição de difeomorfismo Anosov, todo ponto fixo de um difeomorfismo Anosov é elementar.

Proposição 2.1.12. *Seja $f \in \text{Diff}^k(M)$ e $p \in M$ um ponto fixo elementar de f . Existem $\mathcal{N}(f) \subset \text{Diff}^k(M)$ vizinhança de f na topologia C^k , $U \subset M$ vizinhança de p e uma função contínua $\kappa : \mathcal{N}(f) \rightarrow U$ que, a cada $g \in \mathcal{N}(f)$, associa um único ponto fixo. Em particular, todo ponto fixo elementar é isolado.*

Corolário 2.1.13. *Todo ponto fixo de um difeomorfismo Anosov é isolado.*

2.2 CONCEITOS DE TEORIA ERGÓDICA

Ao final da seção anterior conseguimos uma estimativa para a média da taxa da variação na norma da derivada de uma função respeito à evolução no tempo. Nesta seção, apresentaremos outras ferramentas que surgem da teoria ergódica para obter informação

sobre o comportamento exponencial da norma da derivada. Mais detalhes podem ser encontrados em [5, 16] e [18, 24, 29].

Daqui em diante, adotaremos a definição dada por M. Viana e K. Oliveira em [18] de **sistema dinâmico discreto**, o qual é um par (f, μ) composto de uma transformação mensurável $f : X \rightarrow X$ definida em algum espaço mensurável X , e μ é uma medida f -invariante sobre X .

Um dos interesses fundamentais no estudo de um sistema dinâmico diferenciável é o estudo local, o qual pode ser feito através de uma linearização adequada do sistema. Uma vez que estudamos transformações diferenciáveis definidas em variedades, pode-se reduzir o estudo do sistema usando a linearização natural que provém da diferencial da transformação definida no fibrado tangente. Para entender estes conceitos, enunciaremos algumas noções de teoria da medida, maiores informações podem ser encontradas em [14] ou [5].

Definição 2.2.1. Dado um conjunto X , uma coleção não vazia de conjuntos é dita uma σ -álgebra de conjuntos de X ou simplesmente uma σ -álgebra de X , se essa satisfaz:

1. $\emptyset \in \mathcal{X}$;
2. se $E \in \mathcal{X}$, $E^c \in \mathcal{X}$, e
3. se $\{E_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, é uma sequência em \mathcal{X} , então $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} E_m \in \mathcal{X}$.

Cada um dos elementos de \mathcal{X} são denominados conjuntos **mensuráveis**. O par (X, \mathcal{X}) é chamado **espaço mensurável**.

Exemplo 2.2.1. Suponhamos que X é um espaço topológico. A menor σ -álgebra \mathcal{B} que contém todos os conjuntos abertos de X é chamada a σ -álgebra de Borel, e seus elementos são chamados **conjuntos de Borel** ou borelianos.

Definição 2.2.2. Dado um espaço mensurável (X, \mathcal{X}) , uma função de conjuntos $\mu : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ satisfazendo:

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$ para qualquer coleção enumerável de conjuntos de \mathcal{X} , disjuntos dois a dois,

é denominada uma **medida**.

Uma função definida sobre o conjunto de partes de X , $\mathcal{P}(X)$, que cumpre a condição 1 e satisfaz as propriedades:

- Se $A \subset B$, $\mu(A) \leq \mu(B)$ e

- $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$ para qualquer coleção enumerável de conjuntos de \mathcal{X} ,

é chamada *medida exterior*.

Definição 2.2.3. Uma medida exterior μ em X é dita **Borel regular** se, e somente se, os conjuntos de Borel forem mensuráveis para μ e cada subconjunto de X estiver contido em um conjunto de Borel da mesma μ -medida.

Qualquer medida definida na σ -álgebra \mathcal{B} de Borel é chamada de medida de Borel.

Um conjunto X , munido de uma σ -álgebra \mathcal{X} e uma medida μ , é denominado um **espaço de medida** sobre X .

Definição 2.2.4. Dado um espaço de medida (X, \mathcal{X}, μ) , dizemos que X é um **espaço de medida finita** se $\mu(X) = k < \infty$. Diremos que μ é uma **medida de probabilidade** ou simplesmente probabilidade, se $\mu(X) = 1$.

Corolário 2.2.1. Dado (X, \mathcal{X}, μ) um espaço de medida finita, temos como consequência, a existência de uma medida ν que é uma probabilidade.

Demonstração. Basta considerar, $\nu : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, tal que

$$\nu(B) = \frac{\mu(B)}{\mu(X)}$$

para todo $B \in \mathcal{X}$. □

Definição 2.2.5. Sejam (X, \mathcal{X}, μ) um espaço de medida e P uma propriedade em X . Dizemos que P é satisfeita em **μ -quase todo ponto** de X ou simplesmente μ -q.t.p, se P vale num conjunto $Y \subset X$, tal que, $\mu(X \setminus Y) = 0$.

Exemplo 2.2.2 (Medida exterior em \mathbb{R}^n). Primeiro vamos definir a medida exterior $\mathcal{L}^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^+$ em \mathbb{R} como segue. Se A é qualquer subconjunto de \mathbb{R} , \mathcal{D}_A denota a família de intervalos abertos limitados (a_i, b_i) tais que $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)$. Tomamos para todo A em $\mathcal{P}(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{L}^*(A) = \inf_{(a_i, b_i) \in \mathcal{D}_A} \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i). \quad (2.13)$$

Podemos verificar que \mathcal{L}^* é uma medida exterior para \mathbb{R} tal que a medida de qualquer intervalo é seu comprimento usual.

Esta construção pode ser generalizada a \mathbb{R}^n . Podemos chamar uma **célula** P ao produto de n intervalos $I_1 \times \cdots \times I_n$. Definimos o n -volume $\text{Vol}_n(P)$ de P , como o produto $l_1 \cdots l_n$ dos seus comprimentos, l_i , $1 \leq i \leq n$:

$$\text{Vol}_n(P) = l_1 \cdots l_n. \quad (2.14)$$

Se A é qualquer subconjunto de \mathbb{R}^n , \mathcal{D}_A denota a família de células abertas limitadas P_i tais que A está contido em $\cup_{i=1}^{\infty}(P_i)$. Tomamos

$$\mathcal{L}^{n*}(A) = \inf_{P_i \in \mathcal{D}_A} \sum_{i=1}^{\infty} \text{Vol}_n(P_i). \quad (2.15)$$

A aplicação \mathcal{L}^{n*} é uma medida exterior sobre \mathbb{R}^n tal que a medida de qualquer célula é seu n -volume usual. Esta medida exterior é chamada a **medida exterior de Lebesgue** sobre \mathbb{R}^n . Assim, nós podemos identificar para \mathbb{R} , \mathcal{L}^{1*} com \mathcal{L}^* .

Seja $\mathcal{M}_{\mathcal{L}^n}$ a σ -álgebra de todos os conjuntos mensuráveis de \mathcal{L}^{n*} . Pode-se verificar que todo subconjunto Borel de \mathbb{R}^n pertence a $\mathcal{M}_{\mathcal{L}^n}$, isto é, $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}_{\mathcal{L}^n}$, onde \mathcal{B} denota a coleção de todos os subconjuntos Borel de \mathbb{R}^n . A restrição da medida exterior \mathcal{L}^{n*} a $\mathcal{M}_{\mathcal{L}^n}$ (resp., a \mathcal{B}) é uma medida que será chamada de medida Lebesgue λ em $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_{\mathcal{L}^n})$ (resp., a $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B})$).

Definição 2.2.6. Uma medida boreliana μ num espaço topológico é **regular** se, para todo subconjunto mensurável B e todo $\epsilon > 0$, existir um conjunto fechado F e um conjunto aberto A tais que $F \subset B \subset A$ e $\mu(F \setminus A) < \epsilon$.

Teorema 2.2.2. A medida de Lebesgue sobre $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B})$ é regular no sentido que:

- a medida de Lebesgue de qualquer subconjunto compacto de \mathbb{R}^n é finita;
- para todo subconjunto mensurável A , $\lambda(A) = \inf\{\lambda(U) : A \subset U, U \text{ aberto}\}$;
- para todo subconjunto mensurável U , $\lambda(U) = \sup\{\lambda(K) : K \subset U, K \text{ compacto}\}$.

Demonstração. A demonstração desse teorema pode ser vista em [33, p. 51]. □

Definição 2.2.7. Sejam M uma variedade, $\omega \in D_k(M)$ uma n -forma diferenciável em M e ω_x uma n -forma sobre o espaço tangente $T_x M$, i.e., $\omega_x \in \Lambda^k(T_x M)$. Dizemos que ω é uma **n -forma de volume** sobre M , se $\omega_x \neq 0$ para todo $x \in M$.

Suponhamos que (M, ω) é uma variedade orientada e que (U, φ) é uma carta local definida em (M, ω) . Podemos definir a integral $\int_U \omega$ da restrição de ω a U , mas antes disso, consideremos a seguinte definição:

Definição 2.2.8. Dada uma aplicação $f : M \rightarrow M$, o **pullback** de uma n -forma diferenciável ω é uma n -forma diferenciável $f^*(\omega)$ sobre M , tal que, para todo $v_1, \dots, v_n \in TM$,

$$f^*\omega(v_1, \dots, v_n) = \omega(df(v_1), \dots, df(v_n)).$$

Definição 2.2.9. Como $\varphi^{-1*}(\omega)$ é uma n -forma sobre $\varphi(U)$, que é um conjunto aberto de \mathbb{R}^n dotado de sua orientação canônica ω_0 , ela tem a forma $\varphi^{-1*}(\omega) = a(x)dx_1 \dots dx_n$. Logo, a *integral* é definida da forma:

$$\varphi^*(\omega) = f\omega_0 \quad \text{e} \quad \int_U \omega = \int_{\varphi(U)} a(x)d\lambda(x),$$

onde f é uma aplicação de valor real definida sobre \mathbb{R} e λ é a medida de Lebesgue sobre \mathbb{R}^n .

Definição 2.2.10. Uma aplicação $f : X \rightarrow X$ é denominada *aplicação mensurável* se, e somente se, para todo $E \subset X$ mensurável, $f^{-1}(E)$ é um conjunto mensurável.

Considerando que os homeomorfismos são funções mensuráveis no lugar de pensar em determinar se a pre-imagem de um conjunto aberto é de novo um conjunto aberto com a mesma quantidade de pontos, a seguinte definição fornece uma ideia de como determinar se o volume da pre-imagem de um aberto através de um homomorfismo se mantém invariante.

Definição 2.2.11. Sejam (X, \mathcal{X}, μ) um espaço de medida e $f : X \rightarrow X$ uma aplicação mensurável. Dizemos que a medida μ é *invariante por f* (f -invariante) se,

$$\mu(E) = \mu(f^{-1}(E)) \quad \text{para todo conjunto mensurável } E \subset X. \quad (2.16)$$

Nesse caso, também dizemos que f preserva μ . Quando a função f é invertível, no sentido que a inversa é uma função mensurável, f deixa invariante a medida μ se, e somente se, $\mu(f^{-1}(E)) = \mu(E) = \mu(f(E))$. As vezes é natural usar a notação do pullback $f^*\mu$ para indicar $\mu(f^{-1}(\cdot))$.

Observação 7. Dada uma variedade M com elemento de volume μ , denotaremos:

- $\text{Hom}_\mu^k(M)$, ao conjunto dos homeomorfismos de classe C^k , $f : M \rightarrow M$, que preservam a medida μ , e
- $\text{Diff}_\mu^k(M)$, ao conjunto de todos os difeomorfismos de classe C^k , $f : M \rightarrow M$, tais que μ é invariante por f .

Teorema 2.2.3. Um difeomorfismo $f : S \rightarrow S$, definido numa superfície de classe C^1 e compacta, deixa invariante a medida de volume se, e somente se, $|\det Df|$ é constante igual a 1.

Demonstração. Representaremos por vol a medida de Lebesgue, ou medida de volume, em M . Usando a fórmula de mudança de variáveis, temos que para qualquer conjunto mensurável $B \subset M$,

$$vol(f(B)) = \int_{f(B)} dy = \int_B |\det D f_x| dx. \quad (2.17)$$

Por outro lado, aproveitando que f é um difeomorfismo, temos que em particular f é mensurável, logo, $f^{-1}(B)$ é um conjunto mensurável em M para todo boreliano $B \in M$.

Portanto, se $|\det D f_x| = 1$ para todo $x \in M$ temos:

$$vol(f^{-1}(B)) = \int_{f^{-1}(B)} dy = \int_B |\det D f_x| dx = vol(B). \quad (2.18)$$

Reciprocamente, suponhamos por contradição que f é uma aplicação que preserva medida, mas que $|\det D f_z| \neq 1$, para algum $z \in M$. Então, pela continuidade da função $\det D f$ existe uma vizinhança U de z tal que $|\det D f_x| \geq \eta > 1$ para todo $x \in U$. Assim, dado qualquer boreliano $B \subset U$ temos:

$$vol(f^{-1}(B)) = \int_{f^{-1}B} dy = \int_B |\det D f_x| dx \geq \int_B \eta dx > \int_B dx = vol(B),$$

o que é absurdo. Também, se supomos que $\eta < 1$ em alguma vizinhança de um ponto $z \in M$, da mesma forma, pode ser mostrado que $vol(f^{-1}(B)) < vol(B)$. \square

Um caso especial de medidas invariantes para uma aplicação f são as chamadas medidas ergódicas.

Definição 2.2.12. Dados um espaço de medida (X, \mathcal{X}, μ) e f uma aplicação mensurável, μ é chamada **medida ergódica em relação a f** , se μ é f -invariante e para qualquer conjunto $E \in \mathcal{X}$ f -invariante, a medida de E é total ou nula (i.e. $\mu(E) = 0$ ou $\mu(M \setminus E) = 0$).

Oxtoby e Ulam em [26], fornecem um resultado que envolve a ergodicidade no conjunto $\text{Diff}_\lambda(M)$ para uma variedade compacta M . Enunciado a seguir.

Teorema 2.2.4 (Teorema de Oxtoby-Ulam). *A ergodicidade é uma propriedade genérica em $\text{Hom}_\mu(M)$.*

Note que, se uma medida μ é invariante por uma aplicação f , então μ é invariante pelas iteradas de f , ou seja, $\mu(E) = \mu(f^{-m}(E))$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Por exemplo, dadas $S \subset \mathbb{R}$ uma superfície riemanniana compacta, conexa, suave, sem bordo; ω uma forma de área sobre S e λ a medida induzida pela forma, o par (S, λ) , considerando a σ -álgebra de Borel sobre S , determina o espaço de medida, no qual estaremos interessados para estudar o comportamento de aplicações $f : S \rightarrow S$ no desenvolvimento do texto, essencialmente, quando λ é invariante para f , e f for homeomorfismo.

Exemplo 2.2.3 (Rotações em Toros). A rotação associada a um vetor $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_d)$ é dada pela aplicação

$$R_\theta : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d, \quad R_\theta(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \theta. \quad (2.19)$$

Seja ν a medida de volume em \mathbb{R}^d e seja $\pi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$ a projeção canônica. Definimos a medida de Lebesgue no d -toro dada por:

$$\mu(B) = \nu(\pi^{-1}(B) \cap [k_1, k_1 + 1) \times [k_2, k_2 + 1) \times \dots \times [k_d, k_d + 1)), \quad (2.20)$$

onde $k_i \in \mathbb{Z}$ e $i = 1, 2, \dots, d$.

Afirmção 1. *A medida μ é invariante por R_θ para todo θ .*

De fato: Primeiramente, notemos que dado B um subconjunto mensurável em \mathbb{T}^2 o lado direito da igualdade (2.20) é independente dos k_i 's pois,

$$\pi^{-1}(B) \cap ([k_1, k_1 + 1) \times \dots \times [k_d, k_d + 1)) = \pi^{-1}(B) \cap [0, 1)^d + (k_1, k_2, \dots, k_d).$$

Logo, como a medida de Lebesgue ν é invariante por translações, temos que

$$\mu(B) = \nu(\pi^{-1}(B) \cap [0, 1)^d).$$

Por outro lado, pela definição, temos $\pi^{-1}(R_\theta^{-1}(B)) = \pi^{-1}(B) - \theta$ para todo conjunto mensurável $B \in \mathbb{T}^d$. Logo, se k_1, k_2, \dots, k_d são a parte inteira de $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d$, respectivamente, consideramos que

$$\begin{aligned} \nu((\pi^{-1}(B) - \theta) \cap [0, 1)^d) &= \nu(\pi^{-1}(B) \cap [\theta_1, \theta_1 + 1) \times \dots \times [\theta_d, \theta_d + 1)) \\ &= \nu(\pi^{-1}(B) \cap [\theta_1, k_1 + 1) \times \dots \times [\theta_d, k_d + 1)) + \quad (2.21) \\ &\quad \nu(\pi^{-1}(B) \cap [k_1 + 1, \theta_1 + 1) \times \dots \times [k_d + 1, \theta_d + 1)), \end{aligned}$$

com,

$$\pi^{-1}(B) \cap [k_1 + 1, \theta_1 + 1) \times \dots \times [k_d + 1, \theta_d + 1) = (\pi^{-1}(B) \cap [k_1, \theta_1) \times \dots \times [k_d, \theta_d)) + 1.$$

Daí, e pela invariância por translações de ν , temos que

$$\begin{aligned} \nu(\pi^{-1}(B) \cap [k_1 + 1, \theta_1 + 1) \times \dots \times [k_d + 1, \theta_d + 1)) \\ &= \nu((\pi^{-1}(B) \cap [k_1, \theta_1) \times \dots \times [k_d, \theta_d)) + 1) \\ &= \nu(\pi^{-1}(B) \cap [k_1, \theta_1) \times \dots \times [k_d, \theta_d)). \end{aligned}$$

Portanto, substituindo essa última igualdade no lado direito de (2.21), temos:

$$\begin{aligned} \mu(R_\theta^{-1}(B)) &= \nu((\pi^{-1}(B) - \theta) \cap [0, 1)^d) \\ &= \nu(\pi^{-1}(B) \cap [k_1, k_1 + 1) \times \dots \times [k_d, k_d + 1)) \\ &= \nu(\pi^{-1}(B) \cap [0, 1)^d) \\ &= \mu(B). \end{aligned}$$

O qual mostra que μ é invariante pela rotação R_θ , e como θ é arbitrário, isso termina a demonstração.

É tentador pensar que dada uma variedade não existem medidas invariantes para funções definidas na variedade. Porém, o teorema a seguir afirma que, sob certas condições no espaço, para uma função contínua há pelo menos uma medida invariante.

Teorema 2.2.5 (Existência de medidas invariantes). *Dada uma aplicação contínua, $f : M \rightarrow M$, definida num espaço métrico compacto, existe pelo menos uma medida de probabilidade em M que é invariante por f .*

Demonstração. A demonstração desse resultado pode ser vista em [18, cap. 2]. □

Contudo, a medida oriunda do teorema anterior nem sempre é a medida que se quer estudar. Nesse sentido, se $f : X \rightarrow X$ é um difeomorfismo, para uma medida fixa invariante por f definimos o seguinte conceito:

Definição 2.2.13. Seja (f, μ) um sistema dinâmico, com $f : X \rightarrow X$. Dado um conjunto $E \subset X$, dizemos que um ponto $x \in E$ é **recorrente**, se existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(x) \in E$.

Conforme [11] uma das condições necessárias para que um sistema seja caótico é a densidade do conjunto das órbitas periódicas num sistema caótico, portanto, o conjunto dos pontos recorrentes também.

O seguinte teorema estabelece sob quais condições os pontos do domínio de um sistema dinâmico são recorrentes.

Teorema 2.2.6 (Recorrência de Poincaré). *Seja $f : X \rightarrow X$ uma aplicação mensurável e seja μ uma medida finita invariante por f . Dado qualquer conjunto mensurável, $E \subset X$ com medida positiva, $\mu(E) > 0$, para μ -q.t.p. $x \in E$ existem infinitos valores de $m \in \mathbb{N}$ para os quais $f^m(x)$ também está em E .*

Demonstração. A demonstração desse resultado pode ser vista em [18, p.4]. □

Notemos que, se $x \in M$ é um dos pontos em E que retorna infinitas vezes então, podemos construir uma sequência crescente $n_j \rightarrow \infty$ em \mathbb{N} tal que $f_{n_j}(x) \rightarrow x$. Pelo Teorema 2.2.2, podemos afirmar que se $S \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto compacto, então a medida de Lebesgue de S é finita, ou seja, $\lambda(S) < +\infty$. O mesmo para variedades compactas M . Logo, se $f : M \rightarrow M$ é uma aplicação que preserva a medida de Lebesgue, pelo Teorema de Recorrência de Poincaré, qualquer subconjunto mensurável de medida positiva em M , tem pontos recorrentes, mas isso quer dizer que existe um subconjunto S_0 de S (respec. M_0 de M) com medida total, $\lambda(S_0) = \lambda(S)$ (respec. $\lambda(M_0) = \lambda(M)$), no qual todo ponto é recorrente.

Dado um conjunto E com medida positiva, pelo Teorema 2.2.6, temos que

$$\mu(f^{-1}(E)) > 0.$$

Portanto, usando iteradas vezes o Teorema 2.2.6, concluímos que

$$0 < \mu(E) = \mu(f^{-1}(E)) = \mu(f^{-2}(E)) = \dots = \mu(f^{-j}(E)),$$

para todo $j \in \mathbb{N}$.

Dado um conjunto $E \subset M$, para cada ponto $x \in E$ podemos determinar o tempo médio de visita do ponto x ao conjunto E , encontrando (se existir), o limite

$$\tau(x, E) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m-1} \varphi_E \circ f^j(x),$$

onde $\varphi_E(x) = 1$, se $x \in E$ e $\varphi_E(x) = 0$, se $x \notin E$. A seguinte definição e os dos seguintes resultados são ferramentas que inspiraram resultados fortes da teoria ergódica, os mesmos servem para determinar quando o limite acima existe.

Definição 2.2.14. Seja $\{\varphi_m\}_m$ uma sequência de funções $\varphi_m : M \rightarrow \mathbb{R}$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Dizemos que $\{\varphi_m\}_m$ é uma sequência subaditiva para uma aplicação mensurável $f : M \rightarrow M$ se, e somente se,

$$\varphi_{m+k} \leq \varphi_m + \varphi_k \circ f \text{ para todo } m, n \in \mathbb{N}.$$

Teorema 2.2.7. [Teorema Ergódico Subaditivo de Kingman] Dados um sistema dinâmico (f, μ) e $\{\varphi_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, uma sequência de funções mensuráveis subaditiva tal que $\varphi_1^+ \in L^1(\mu)$, então, existe uma função mensurável $\varphi : M \rightarrow [-\infty, +\infty)$ tal que,

$$(\varphi_m/m)_m \longrightarrow \varphi, \text{ para } \mu - \text{ q.t.p } x \in M. \quad (2.22)$$

Além disso, se $\varphi^+ \in L^1(\mu)$ temos que

$$\int \varphi d\mu = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \int \varphi_m d\mu = \inf_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \int \varphi_m d\mu \in [-\infty, \infty). \quad (2.23)$$

Demonstração. A prova deste resultado apresentada por Avila e Bochi em [3], também pode ser consultada em [18, p. 79 a 84]. \square

Por exemplo, se (f, μ) é um sistema dinâmico e $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função integrável, notemos que

$$\varphi_m(x) = \sum_{j=0}^{m-1} \varphi(f^j(x)),$$

satisfaz,

$$\begin{aligned}
\varphi_{m+k}(x) &= \sum_{j=0}^{m+k} \varphi(f^j(x)) \\
&= \sum_{j=0}^m \varphi(f^j(x)) + \sum_{j=k+1}^{m+k} \varphi(f^j(x)) \\
&= \sum_{j=0}^m \varphi(f^j(x)) + \sum_{j=1}^k \varphi(f^{m+j}(x)),
\end{aligned} \tag{2.24}$$

o qual mostra que $\{\varphi_m\}_m$ é uma sequencia subaditiva para f . Logo, pelo teorema de Kingman concluimos

$$\tilde{\varphi}(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \varphi(f^j(x))$$

e

$$\int \varphi d\mu = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \int \varphi_m d\mu = \inf_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \int \varphi_m d\mu \in [-\infty, +\infty). \tag{2.25}$$

Este resultado da origem ao seguinte teorema:

Teorema 2.2.8. [*Teorema Ergódico de Birkhoff*] Dado um sistema dinâmico (f, μ) e dada qualquer função integrável $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$, o limite,

$$\tilde{\varphi}(x) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \varphi(f^j(x)),$$

existe para μ -quase todo ponto $x \in M$. E $\tilde{\varphi}$ definida dessa forma é integrável e satisfaz

$$\int \tilde{\varphi}(x) d\mu(x) = \int \varphi(x) d\mu(x).$$

3 EXPOENTES DE LYAPUNOV

Neste capítulo apresentamos a definição de cociclos lineares, com o proposito de construir a partir destes os expoentes de Lyapunov [4], [20], [31]. Além disso, mostramos e enunciamos algumas das propriedades conhecidas. Maiores informações podem ser encontradas em [8], [30].

3.1 COCÍCLOS LINEARES E EXPOENTES DE LYAPUNOV.

Seja $GL(n, \mathbb{R})$ o conjunto das transformações lineares inversíveis de \mathbb{R}^n . Dadas uma aplicação mensurável e invertível $f : M \rightarrow M$ que preserve uma medida μ , para qualquer função mensurável, $A : M \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$, a função, $\mathcal{A} : M \times \mathbb{Z} \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$, definida da forma,

$$\begin{cases} \mathcal{A}(x, m) = A(f^{m-1}(x))A(f^{m-2}(x)) \cdots A(x) & \text{se } m > 0; \\ \mathcal{A}(x, m) = A(f^m(x))^{-1}A(f^{m+1}(x))^{-1} \cdots A(f^{-1}(x))^{-1} & \text{se } m < 0; \\ \mathcal{A}(x, 0) = \text{Id}(x), & \text{se } m = 0, \end{cases} \quad (\text{S.2.1})$$

é denominada **cociclo linear mensurável sobre f** , ou simplesmente **cociclo**.

Propriedades: Notemos que, dado $x \in M$ e $m, k \in \mathbb{Z}$ o cociclo \mathcal{A} satisfaz:

$$\mathcal{A}(x, m+k) = \mathcal{A}(f^m(x), k)\mathcal{A}(x, m). \quad (\text{S.2.2})$$

De fato: Se $m, k > 0$, temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x, m+k) &= A(f^{m+k-1}(x)) \cdots A(f^m(x))A(f^{m-1}(x)) \cdots A(x) \\ &= \underbrace{A(f^{k-1}(f^m(x))) \cdots A(f^m(x))}_{\mathcal{A}(f^m(x), k)} \underbrace{A(f^{m-1}(x)) \cdots A(x)}_{\mathcal{A}(x, m)}. \end{aligned}$$

Se $m, k < 0$, temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x, m+k) &= A(f^{m+k}(x))^{-1} \cdots A(f^{m-1}(x))^{-1}A(f^m(x))^{-1}A(f^{m+1}(x))^{-1} \cdots A(f^{-1}x)^{-1} \\ &= \underbrace{A(f^{k-1}(f^m(x)))^{-1} \cdots A(f^{-1}(f^m(x)))^{-1}}_{\mathcal{A}(f^m(x), k)} \\ &\quad \underbrace{A(f^m(x))^{-1}A(f^{m-1}(x))^{-1} \cdots A(f^{-1}(x))^{-1}}_{\mathcal{A}(x, m)}. \end{aligned}$$

Além disso, se considerarmos $m > 0 > k$ e $m+k > 0$ temos por um lado que,

$$\mathcal{A}(x, m+k) = A(f^{(m+k)-1}(x)) \cdots A(f^2(x))A(f(x))A(x),$$

e pelo outro,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(f^m(x), k) &= A(f^k(f^m(x)))^{-1} \cdots A(f^{-1}(f^m(x)))^{-1} \\ \mathcal{A}(x, m) &= A(f^{m-1}(x))A(f^{m-2}(x)) \cdots A(x).\end{aligned}$$

Logo, tomando $j = m + k > 0$, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(f^m(x), k)\mathcal{A}(x, m) &= A(f^k(f^m(x)))^{-1} \cdots A(f^{-1}(f^m(x)))^{-1} \\ &\quad A(f^{m-1}(x)) \cdots A(x) \\ &= A(f^j(x))^{-1} \cdots A(f^{m-2}(x))^{-1} A(f^{m-1}(x))^{-1} A(f^{m-1}(x)) \cdots \\ &\quad A(f^{j+1}(x))A(f^j(x))A(f^{j-1}(x)) \cdots A(x) \\ &= \mathcal{A}(x, m + k).\end{aligned}$$

Pois,

$$A(f^j(x))^{-1} \cdots A(f^{m-1}(x))^{-1} A(f^{m-1}(x)) \cdots A(f^{j+1}(x))A(f^j(x)) = \text{Id}.$$

Além disso, note que \mathcal{A} satisfaz:

$$\mathcal{A}(x, 1) = A(x). \tag{3.1}$$

Definição 3.1.1. A aplicação A é o **gerador** do cociclo \mathcal{A} .

Dado um cociclo \mathcal{A} sobre f podemos construir uma extensão linear F de f , definida em $M \times \mathbb{R}^n$, da forma:

$$F(x, v) = (f(x), A(x)v) = (f(x), \mathcal{A}(x, 1)v).$$

Logo, dado qualquer inteiro $m \in \mathbb{Z}$ a m -ésima iterada de F é

$$F^m(x, v) = (f^m(x), \mathcal{A}(x, m)v).$$

Portanto, a extensão F gera um cociclo.

Definição 3.1.2. Uma função mensurável $H : M \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R})$ é dita **temperada com respeito a f** , ou simplesmente **temperada**, se para quase todo $x \in M$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|[H(f^m(x))]^{\pm 1}\| = 0. \tag{3.2}$$

Em particular, todo cociclo \mathcal{A} sobre f , gerado por uma aplicação temperada, é uma aplicação temperada.

Definição 3.1.3. Se $A, B : M \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R})$ são duas funções mensuráveis que geram respectivamente os cociclos \mathcal{A} e \mathcal{B} sobre f , dizemos que \mathcal{A} e \mathcal{B} são **equivalentes** se, e somente se, existe uma função temperada, $H : M \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R})$, tal que para quase todo $x \in M$ satisfaz

$$A(x) = [H(f(x))]^{-1}B(x)H(x).$$

A relação assim definida é de equivalência, de fato:

- i) é **reflexiva**, já que a função constante $H : M \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R})$ definida por, $x \in M \mapsto H(x) = \text{Id}$, é função temperada para f e satisfaz (3.2). De fato, como

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|[H(f^m(x))]^{\pm 1}\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|\text{Id}^{\pm 1}\| = 0,$$

$H(x) = \text{Id}$ é temperada para f e

$$A(x) = [\text{Id}]^{-1} A(x) \text{Id}.$$

- ii) é **simétrica** uma vez que A e B são equivalentes, pois, existe $H_A : M \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R})$ tal que

$$A(x) = [H_A(f^m(x))]^{-1} B(x) H_A(x) \quad \text{e} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|[H_A(f^m(x))]^{\pm 1}\| = 0,$$

então, se tomarmos $H_B = [H_A]^{-1}$, temos

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|[H_B(f^m(x))]^{\pm 1}\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|[H_A(f^m(x))^{-1}]^{\pm 1}\| = 0,$$

e

$$B(x) = [H_B(f(x))]^{-1} A(x) H_B(x).$$

- iii) é **transitiva**. Suponhamos A relacionada com B e B relacionada com Z , então existem

$$H_A : M \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R}) \quad \text{e} \quad H_B : M \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R}),$$

tais que

$$A(x) = [H_A(f(x))]^{-1} B(x) H_A(x) \quad \text{e} \quad B(x) = [H_B(f(x))]^{-1} Z(x) H_B(x).$$

Assim, se tomamos $H = H_A H_B : M \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R})$, consequentemente, temos

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|H^{-1}(f^m(x))\| &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|[H_A H_B(f^m(x))]^{\pm 1}\| \\ &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|[H_A(f^m(x))]^{\pm 1}\| + \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|[H_B(f^m(x))]^{\pm 1}\| \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \left[\log \|[H_A(f^m(x))]^{\pm 1}\| + \log \|[H_B(f^m(x))]^{\pm 1}\| \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

e $A(x) = [H_B(f(x)) H_A(f(x))]^{-1} Z(x) [H_B(f(x)) H_A(f(x))]$. Portanto, A e Z são equivalentes.

Dizemos que o cociclo \mathcal{A} é **rígido** se é equivalente ao cociclo independente de x , isto é, se é dado pelas potências de uma única matriz.

Lema 3.1.1. *Sejam $f : M \rightarrow M$ uma transformação que preserva medida e $H : M \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R})$ uma aplicação mensurável. Se denotamos por*

$$g(x) = \max\{\log \|H(x)\|, \log \|[H(x)]^{-1}\|\} \text{ para todo } x \in M$$

e g é integrável em M , então, H é função temperada respeito a f .

Demonstração. Tomemos $g(x) = \log \|H(x)\|$, por hipótese $g^+(x)$ é integrável. Logo, aplicando o Teorema Ergódico de Birkhoff temos que, para quase todo ponto $x \in M$, o limite do lado esquerdo na seguinte expressão existe, e

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \log \|H(f^k(x))\| &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{k=0}^m \log \|H(f^k(x))\| \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \left[\log \|H(f^m(x))\| + \sum_{k=0}^{m-1} \log \|H(f^k(x))\| \right]. \end{aligned}$$

Portanto, $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|[H(f^m(x))]\| = 0$. Analogamente, se $g(x) = \log \|[H(x)]^{-1}\|$ obtemos o que queríamos. \square

Definição 3.1.4. Para um cociclo $A : M \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R})$ sobre a transformação $f : M \rightarrow M$ e para $(x, v) \in M \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ o número,

$$\bar{\chi}^+(x, v, \mathcal{A}) := \bar{\chi}^+(x, v) := \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|\mathcal{A}(x, m)v\|,$$

é chamado de **expoente de Lyapunov superior** de (x, v) respeito ao cociclo \mathcal{A} . Por definição, escreveremos $\bar{\chi}^+(x, 0) = -\infty$ sendo o expoente de Lyapunov para o vetor $v = 0$. Se além disso, existe o limite,

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \log \|\mathcal{A}(x, m)v\| = \chi^+(x, v),$$

então o número $\chi^+(x, v)$ é chamado de expoente de Lyapunov de (x, v) respeito ao cociclo \mathcal{A} .

Lema 3.1.2. *Dado um cociclo \mathcal{A} sobre f :*

1. *para $(x, v) \in M \times \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ temos $\bar{\chi}^+(x, v) = \bar{\chi}^+(x, \lambda v)$;*
2. *se $v, w \in \mathbb{R}^n$, então $\bar{\chi}^+(x, v + w) \leq \max\{\bar{\chi}^+(x, v), \bar{\chi}^+(x, w)\}$;*
3. *se $\bar{\chi}^+(x, v) \neq \bar{\chi}^+(x, w)$, então $\bar{\chi}^+(x, v + w) = \max\{\bar{\chi}^+(x, v), \bar{\chi}^+(x, w)\}$;*
4. *o conjunto dos valores $\{\bar{\chi}^+(x, v); (x, v) \in M \times \mathbb{R}\}$ é finito, com cardinal menor ou igual á dimensão de M .*

Demonstração. Aproveitando as propriedades do logaritmo e a linearidade de \mathcal{A} é fácil verificar as propriedades acima, de fato:

1.

$$\begin{aligned}
\bar{\chi}^+(x, \lambda v) &:= \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|\mathcal{A}(x, m)\lambda v\| \\
&= \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log |\lambda| \|\mathcal{A}(x, m)v\| \\
&= \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \left[\log |\lambda| + \log \|\mathcal{A}(x, m)v\| \right] \\
&= \bar{\chi}^+(x, v).
\end{aligned}$$

2. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\|\mathcal{A}(x, m)v\| \leq \|\mathcal{A}(x, m)w\|$, então como

$$\begin{aligned}
\bar{\chi}^+(x, v) &:= \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|\mathcal{A}(x, m)v\| \\
&\leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|\mathcal{A}(x, m)w\| \\
&= \bar{\chi}^+(x, w),
\end{aligned}$$

usando a linearidade de $\mathcal{A}(x, \cdot)$ e a propriedade 1, temos:

$$\begin{aligned}
\bar{\chi}^+(x, v + w) &= \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \|\mathcal{A}(x, m)(v + w)\| \\
&= \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|\mathcal{A}(x, m)v + \mathcal{A}(x, m)w\| \\
&\leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \left[\|\mathcal{A}(x, m)v\| + \|\mathcal{A}(x, m)w\| \right] \\
&\leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \left[2 \|\mathcal{A}(x, m)w\| \right] \\
&= \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|\mathcal{A}(x, m)w\| \\
&= \bar{\chi}^+(x, w) \\
&= \max\{\bar{\chi}^+(x, v), \bar{\chi}^+(x, w)\}.
\end{aligned}$$

3. Para esta propriedade suponhamos que $\|\mathcal{A}(x, m)v\| < \|\mathcal{A}(x, m)w\|$, então, pelas propriedades 1 e 2 temos:

$$\begin{aligned}
\bar{\chi}^+(x, v + w) &\leq \bar{\chi}^+(x, w) \\
&= \bar{\chi}^+(x, w + v - v) \\
&\leq \max\{\bar{\chi}^+(x, w + v), \bar{\chi}^+(x, -v)\} \\
&= \max\{\bar{\chi}^+(x, w + v), \bar{\chi}^+(x, v)\}.
\end{aligned}$$

Além disso, notemos que $\bar{\chi}^+(x, v + w) > \bar{\chi}^+(x, v)$, pois caso contrario teríamos:

$$\begin{aligned}
\bar{\chi}^+(x, w) &= \bar{\chi}^+(x, w + v - v) \\
&\leq \max\{\bar{\chi}^+(x, w + v), \bar{\chi}^+(x, v)\} \\
&= \bar{\chi}^+(x, v),
\end{aligned}$$

o qual é absurdo. Por tanto, $\bar{\chi}^+(x, v + w) \leq \bar{\chi}^+(x, v + w) \leq \bar{\chi}^+(x, w) \leq \bar{\chi}^+(x, v + w)$ conclui o que queríamos.

4. Primeiro vamos mostrar que se o conjunto $A = \{v_1, \dots, v_k; v_i \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \text{ e } k \leq n\}$ satisfaz $\bar{\chi}^+(x, v_i) \neq \bar{\chi}^+(x, v_j)$ para todo $i \neq j$, então o conjunto A é linearmente independente. De fato, suponhamos por absurdo que existem $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, não todos nulos, tais que, $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0$ então,

$$\bar{\chi}^+(x, \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k) = \bar{\chi}^+(x, 0) = -\infty.$$

Além disso, pela propriedade 3 podemos indutivamente mostrar que

$$\bar{\chi}^+(x, \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k) = \max\{\bar{\chi}^+(x, v_i); i = 1, \dots, k\}.$$

Portanto,

$$\bar{\chi}^+(x, \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k) = \max\{\bar{\chi}^+(x, v_i); i = 1, \dots, k\} \neq -\infty.$$

Mas isso é absurdo. Em consequência, $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$ é igual zero se, e somente se, $\alpha_i = 0$, para todo $i = 1, \dots, k$, ou seja, A é linearmente independente.

□

Seja $f : M \rightarrow M$ uma transformação mensurável e seja μ uma probabilidade invariante por f . Sejam $\theta : M \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R})$ e, $\theta^{-1} : M \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R})$ a aplicação definida por $\theta^{-1}(x) =$ matriz inversa de $\theta(x)$. Consideremos também,

$$\phi^m(x) = \theta(f^{m-1}(x)) \cdots \theta(f(x))\theta(x) \quad \text{e} \quad \phi^{-m}(x) = \text{inversa de } \phi^m(f^{-m}(x)) \quad (3.3)$$

para todo $m \geq 1$ e $x \in M$, os cociclos gerados por θ e θ^{-1} , respectivamente. Nestas condições temos o seguinte teorema:

Teorema 3.1.3 (Teorema de Furstenberg-Kesten). *Se $\log^+ \|\theta\|$ é integrável, então*

$$\lambda_{\max}(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|\phi^m(x)\|$$

existe em μ -quase todo ponto. Também, λ_{\max}^+ é integrável e

$$\int \lambda_{\max} d\mu = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \int \log \|\phi^m\| d\mu = \inf_m \frac{1}{m} \int \log \|\phi^m\| d\mu.$$

Além disso, se $\log^+ \|\theta^{-1}\|$ é integrável, o limite

$$\lambda_{\min}(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} -\frac{1}{m} \log \|\phi^{-m}(x)\|$$

existe em μ -quase todo ponto. Também, λ_{\min} é integrável e

$$\int \lambda_{\min} d\mu = \lim_{m \rightarrow \infty} -\frac{1}{m} \int \log \|\phi^{-m}\| d\mu = \sup_m -\frac{1}{m} \int \log \|\phi^{-m}\| d\mu$$

Demonstração. Basta observar que por definição de cociclo as seqüências

$$\varphi_m^{\max}(x) = \log \|\phi^m(x)\| \quad \text{e} \quad \varphi_m^{\min}(x) = \log \|\phi^{-m}(x)\|$$

são subaditivas para f , logo, usando o Teorema Ergódico de Kingman, obtemos o resultado. \square

Corolário 3.1.4. *Dado \mathcal{A} um cociclo, para cada número real χ e cada $x \in M$, o conjunto*

$$E_\chi(x) := \{v \in \mathbb{R}^n; \bar{\chi}^+(x, v) < \chi\}$$

é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^n , e se $\chi_1 \geq \chi_2$, então $E_{\chi_2}(x) \subseteq E_{\chi_1}(x)$.

Demonstração. Segue do Lema 3.1.2. \square

Além disso, como consequência, para cada $x \in M$ existe um inteiro $s(x) \leq n$, uma coleção de números

$$\chi_1(x) < \chi_2(x) < \cdots < \chi_{s(x)}(x),$$

e subespaços vetoriais (lineares)

$$\{0\} \subset E_{\chi_1(x)} \subset E_{\chi_2(x)} \subset \cdots \subset E_{\chi_{s(x)}(x)} = \mathbb{R}^n,$$

tais que, para qualquer $v \in E_{\chi_{i+1}}(x) \setminus E_{\chi_i}(x)$, $\chi^+(x, v) = \chi_{i+1}(x)$.

Chamaremos de

1. **expoente de Lyapunov superior** em x respeito ao cociclo \mathcal{A} , os números $\chi_i(x)$ para todo $i \in \{1, \dots, s^+(x)\}$;
2. **filtração em x associado ao cociclo \mathcal{A}** , a cadeia encaixada de subespaços E_{χ_i} ;
3. **multiplicidade do expoente** $\chi_i(x)$, o número

$$l_i(x) = \dim E_{\chi_i}(x) - \dim E_{\chi_{i-1}}(x),$$

com $l_{i(x)}$ dependendo de $\chi_i(x)$;

4. **espectro de \mathcal{A} em x** , a coleção de pares dada por

$$Sp_x \mathcal{A} = \{(\chi_i(x), l_i(x)); i = 1, \dots, s(x)\}.$$

Exemplo 3.1.1. Seja $M = \{x\}$ um conjunto que consiste de apenas um elemento. Se $A \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$, então, $\mathcal{A}(x, m) = A^m(x)$ e os expoentes de Lyapunov superiores estão dados pelo logaritmo dos autovalores da matriz A . Ainda mais, temos que o limite sempre existe.

De fato: suponhamos que $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}$ são os autovalores sem multiplicidades da matriz $A(x)$, com $s \leq n$ e sejam v_{λ_i} 's, com $i = 1, \dots, s$ os respectivos autovetores, então

$$\begin{aligned}
\bar{\chi}_i^+(x, v_{\lambda_i}) &= \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|\mathcal{A}(x, m)v_{\lambda_i}\| \\
&= \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|A^m(x)v_{\lambda_i}\| \\
&= \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|\lambda_i^m v_{\lambda_i}\| \\
&= \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log |\lambda_i^m| \\
&= \limsup_{m \rightarrow \infty} \log |\lambda_i^m|^{1/m} \\
&= \limsup_{m \rightarrow \infty} \log |\lambda_i| = \log |\lambda_i|.
\end{aligned}$$

Proposição 3.1.5. *Se \mathcal{A} e \mathcal{B} são dois cociclos equivalentes sobre uma transformação que preserva medida $f : M \rightarrow M$, então para quase todo $x \in M$ temos*

$$Sp_x \mathcal{A} = Sp_x \mathcal{B}.$$

Demonstração. Seja $H_A : M \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R})$ uma transformação temperada para f , tal que,

$$A(x) = [H_A(f(x))]^{-1} B(x) H_A(x).$$

Então,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(x, m) &= A(f^{m-1}(x))A(f^{m-2}(x)) \cdots A(x) \\
&= H(f^m(x))^{-1} B(f^{m-1}(x)) H(f^{m-1}(x)) \cdots H(f(x))^{-1} B(f(x)) H(x) \\
&= H(f^m(x))^{-1} B(f^{m-1}(x)) \cdots B(f(x)) H(x) \\
&= H(f^m(x))^{-1} \mathcal{B}(x, m) \cdots H(x).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\bar{\chi}_i^+(x, v, \mathcal{A}) &:= \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|\mathcal{A}(x, m)v\| \\
&\leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \left[\log \|[H_A(f^m(x))]^{-1}\| + \log \|\mathcal{B}(x, m)v\| + \log \|H_A(x)\| \right].
\end{aligned}$$

Analogamente, usando a simetria da relação de equivalência, obtemos que $H_B = H_A^{-1}$ é uma transformação temperada respeito a f do cociclo \mathcal{B} . Assim, pela desigualdade anterior temos que

$$\begin{aligned}
\bar{\chi}_i^+(x, v, \mathcal{B}) &:= \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|\mathcal{B}(x, m)v\| \\
&\leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \left[\log \|[H_B(f^m(x))]^{-1}\| + \log \|\mathcal{A}(x, m)v\| + \log \|H_B(x)\| \right] \\
&= \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \left[\log \|[H_A(f^m(x))]\| + \log \|\mathcal{A}(x, m)v\| + \log \|H_A(x)^{-1}\| \right] \\
&\leq \bar{\chi}_i^+(x, v, \mathcal{A}).
\end{aligned}$$

□

Dado um sistema dinâmico (f, M, \mathcal{B}, μ) com $f \in \text{Diff}^k(S)$ e (M, \mathcal{B}, μ) um espaço de medida de probabilidade, aproveitando a linearidade da transformação derivada, podemos construir o cociclo derivada e, a partir disso, definir o expoente de Lyapunov para esses sistemas dinâmicos.

Exemplo 3.1.2. Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo, definido sobre uma variedade riemanniana M compacta, sem bordo, e que preserva a probabilidade de Lebesgue μ . Pela compacidade da variedade, podemos representar M como a união finita $\cup_i \Delta_i$, de copias Δ_i de n -simplex, tais que

1. em cada Δ_i pela compacidade da variedade, é possível introduzir coordenadas locais tais que os fibrados tangentes $T\Delta_i$ podem ser identificados com $\Delta_i \times \mathbb{R}^n$ para todo i ;
2. qualquer interseção não vazia $\Delta_i \cap \Delta_j$, para $i \neq j$, é uma subvariedade de dimensão menor ou igual a $n - 1$. E como consequência de medida zero.

Assim, considerando a afirmação acima, em cada Δ_i a derivada de f , $Df : \Delta_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ gera o cociclo derivada. Daí, em vista que, $M = \cup_i \Delta_i$, a transformação $Df : M \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R})$, tal que $x \in M \mapsto Df_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ em coordenadas locais, pode ser expressa como a transformação geradora do **cociclo derivada**, dado por

$$\mathcal{A}(x, m) = Df_x^m. \quad (3.4)$$

Além disso, sabemos que a definição de derivada não depende da escolha das parametrizações, mas a definição de cociclo dada acima depende também da decomposição $\{\Delta_i\}_i$. Mas pela propriedade 1 da decomposição podemos ver que o resultado pode ser reduzido as coordenadas locais.

Para mostrar isso, suponhamos M uma variedade diferenciável, $f \in \text{Diff}^k(M)$ para $k \geq 1$ e consideremos as seguintes coordenadas locais em M e $f(M)$, (x_1, \dots, x_n) e (y_1, \dots, y_n) respectivamente. Agora, tomemos outras coordenadas compatíveis (x'_1, \dots, x'_n) e (y'_1, \dots, y'_n) de M e de $f(M)$, respectivamente. Denotaremos por $\varphi_{xx'}$ e $\varphi_{yy'}$ as matrizes de mudança de coordenadas $x \mapsto x'$ e $y \mapsto y'$ respectivamente. Também denotemos por f_{xy} a função f indo de $M \rightarrow M$ em coordenadas $x \mapsto y$ e $f_{x'y'}$ a função f indo de $M \rightarrow M$ em coordenadas $x' \mapsto y'$. Então

$$f_{xy} = \varphi_{y'y} \circ f_{x'y'} \circ \varphi_{xx'}.$$

Sendo assim, considerando que f é de classe C^k com $k \geq 1$, temos

$$Df_{xy} \equiv D\varphi_{y'y}(\varphi_{x'y'} \circ \varphi_{xx'}) \circ Df_{x'y'}(\varphi_{xx'}) \circ D\varphi_{xx'}. \quad (3.5)$$

Finalmente, considerando que a mudança de coordenadas que envia uma representação em outra é uma função invertível, contínua, uniformemente limitada e $D\varphi_{xx'}$ é a inversa

da derivada de $\varphi_{x'x}$, que é também uniformemente limitada, usamos o Lema 3.1.1 para obter que a mudança de coordenadas é uma função temperada para f , o qual conclui a demonstração.

Por outro lado, para cada $x \in S$ e $v \in T_x S$ o **expoente de Lyapunov** para f do par (x, v) , considerando o cociclo derivada, é dado por

$$\chi^+(f, x, v) = \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|D f_x^m v\|. \quad (3.6)$$

Com a convenção para $v = 0$, $\chi^+(f, x, 0) = -\infty$.

Exemplo 3.1.3. Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. A aplicação $\bar{A} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ dada por $\bar{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ é um difeomorfismo de Anosov, com expoentes de Lyapunov: $\chi_1(x) = \log(\lambda_1) = \log\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ e $\chi_2(x) = \log(\lambda_2) = \log\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$.

Com efeito: iniciamos mostrando que \bar{A} é uma aplicação Anosov.

Sejam $(x, y) \bmod 1$ as coordenadas locais de um ponto (\mathbf{x}, \mathbf{y}) em \mathbb{T}^2 , fornecidas pelas cartas locais definidas no Exemplo 2.1.1. Pela definição da diferencial entre superfícies, nessas coordenadas, a derivada de \bar{A} , $D\bar{A}_{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}$, coincide com a matriz A . Além disso, calculando os autovalores de A ,

$$\lambda_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

Visto que, $|\lambda_1| < 1$ e $|\lambda_2| > 1$, podemos concluir:

1. A é uma transformação linear hiperbólica;
2. o espaço E_{λ_1} gerado pelo autovetor associado a λ_1 é tal que $D\bar{A}(E_1) = E_1$;
3. o espaço E_{λ_2} gerado pelo autovetor associado a λ_2 é tal que $D\bar{A}(E_2) = E_2$;
4. $T_{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}S = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2}$.

Também, notemos que

5. $\|D\bar{A}_{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}^m(v)\| = \|A^m(\alpha v_1)\| = |\alpha| \|A^m(v_1)\| = |\alpha| \lambda_1^m \|v_{\lambda_1}\| = \lambda_1^m \| |\alpha| v_{\lambda_1} \| = \lambda_1^m \|v\|$
para todo $v \in E_{\lambda_1}$ e $m \in \mathbb{Z}$;
6. $\|D\bar{A}_{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}^m(v)\| = \lambda_2^m \|v\|$ para todo $v \in E_{\lambda_2}$ e $m \in \mathbb{Z}$;
7. $\bar{A}(\mathbb{T}^2) = \mathbb{T}^2$.

Logo, pelas afirmações acima temos que \bar{A} é um difeomorfismo Anosov.

Por outro lado, consideremos a aplicação $\mathcal{A} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \text{GL}(2, \mathbb{R})$, tal que $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{T}^2 \mapsto D\bar{A}_{(\mathbf{x}, \mathbf{y})} = A$. Assim, tomando o cociclo derivada definido no Exemplo 3.1.2, o expoente de Lyapunov superior associado ao cociclo gerado por $D\bar{A}$, é dado por

$$\chi^+(x, v) = \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|D\bar{A}_{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}^m v\| = \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|A^m v\|. \quad (3.7)$$

Isto é, os expoentes de Lyapunov para \bar{A} em qualquer ponto $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{T}^2$, em coordenadas locais, e $v \in \mathbb{R}^2$, são equivalentes aos expoentes de Lyapunov dados pelo cociclo gerado pela matriz A , avaliado nos autovetores v_{λ_1} e v_{λ_2} .

Pois, pela propriedade 3 acima, qualquer vetor em $T_{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}\mathbb{T}^2$ pode ser expresso da forma $v = v_1 + v_2$ para únicos $v_1 \in E_1$ e $v_2 \in E_2$. Logo, pelo Lema 3.1.2 o expoente de Lyapunov para v é dado por

$$\chi^+(x, v) = \chi^+(x, v_1 + v_2) = \chi^+(x, \alpha v_{\lambda_1} + \beta v_{\lambda_2}) = \max\{\chi^+(x, v_{\lambda_1}), \chi^+(x, v_{\lambda_2})\}.$$

Assim, para $\lambda = \lambda_1$ ou λ_2 , temos

$$\begin{aligned} \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|A^m v_\lambda\| &= \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|\lambda^m v_\lambda\| \\ &\leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} [\log |\lambda^m| + \log \|v_\lambda\|] \\ &\leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \left[\log |\lambda^m|^{1/m} + \frac{1}{m} \log \|v\| \right] \\ &= \log |\lambda|. \end{aligned}$$

3.2 O EXPOENTE DE LYAPUNOV PARA DIFEOMORFISMOS

Nesta seção daremos a definição do expoente de Lyapunov em tempo positivo e em tempo negativo, enunciaremos o Teorema Ergódico multiplicativo de Oseledets e finalizaremos expondo e demonstrando dois resultados de regularidade dos expoentes de Lyapunov clássicos quando $f : M \rightarrow M$ é uma aplicação diferenciável definida sobre uma variedade M . Para mais em esse assunto consultar os artigos [25] e [30, Teoremas 2 e 3]

Na seção anterior, definimos o cociclo derivada 3.4 e o expoente de Lyapunov,

$$\chi^+(f, x, v) := \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|Df_x^m \cdot v\|, \quad (3.8)$$

para este cociclo 3.6. A partir da definição desse último, temos que para m suficientemente grande,

$$\chi^+(x, v) \approx \frac{1}{m} \log \|Df_x^m v\|,$$

Logo, podemos ver que esse serve para estimar a expansão dos vetores no plano tangente, através de

$$e^{m\chi^+(x, v)} \approx \|Df_x^m v\|.$$

Assim, usando a representação da função em sua série de Taylor, segundo o sinal do expoente de Lyapunov, podemos caracterizar o comportamento assintótico local da função f .

Dada $f : M \rightarrow M \in \text{Diff}_\mu^k(M)$, definimos o expoente de Lyapunov (negativo) para a inversa da f de um modo análogo ao Exemplo 3.1.2. Mais precisamente:

Definição 3.2.1. Dado uma variedade M , o expoente de Lyapunov (negativo) de um difeomorfismo $f \in \text{Diff}(M)$, num ponto $(x, v) \in M \times T_x M$, é dado por

$$\chi^-(x, v) = \limsup_{m \rightarrow -\infty} \frac{1}{|m|} \log \|D f_x^m\|. \quad (3.9)$$

Além disso, pelo Corolário 3.1.4, cada expoente de Lyapunov (positivo) e (Negativo) tomam um número finito de valores $\chi_1^+(x) < \chi_2^+(x) < \dots < \chi_{s^+}^+(x)$, com filtração

$$\{0\} = V_0^+ \subset V_{\chi_1^+(x)}^+ \subset V_{\chi_2^+(x)}^+ \subset \dots \subset V_{\chi_{s^+}^+(x)}^+ = \mathbb{R}^n,$$

tal que, para qualquer $v \in V_{\chi_{i+1}^+(x)}^+ \setminus V_{\chi_i^+(x)}^+$, $\chi^+(x) = \chi_{i+1}^+(x)$.

E um número finito de valores $\chi_1^-(x) > \chi_2^-(x) > \dots > \chi_{s^-}^-(x)$ com filtração

$$\mathbb{R}^n = V_{\chi_1^-(x)}^- \supset V_{\chi_2^-(x)}^- \supset \dots \supset V_{\chi_{s^-}^-(x)}^- \supset V_{\chi_{s^-+1}^-(x)}^- = \{0\},$$

tal que, para qualquer $v \in V_{\chi_{i+1}^-(x)}^- \setminus V_{\chi_i^-(x)}^-$, $\chi^-(x) = \chi_{i+1}^-(x)$, respectivamente.

A partir de agora, também consideraremos o **expoente de Lyapunov superior** dado por:

$$\chi^+(f, x) := \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \sup_{v \neq 0} \frac{\|D f_x^m \cdot v\|}{\|v\|} \quad (3.10)$$

Observação 8. Antes de começar a expor os resultados desta seção, estabeleceremos uma notação conveniente das funções dadas nas cartas locais. Para isso, consideremos $f \in \text{Diff}_\mu(M)$ com M uma variedade diferenciável de classe C^k , dado um ponto $x \in M$, e (U, ϕ) e $(V, \tilde{\phi})$ cartas locais de x e de $f(x)$, respectivamente, com $f(U) \subset V$, escreveremos $f(x) = f(\phi(y))$ para todo $y \in \phi(U)$. Nesse sentido, não faremos a distinção dos pontos x na variedade com os pontos na carta local.

Consideremos μ a probabilidade de Lebesgue sobre uma variedade e M uma variedade compacta sem bordo.

Definição 3.2.2. Seja $f \in \text{Diff}_\mu(M)$ um difeomorfismo. Um ponto $x \in M$ é chamado **Lyapunov regular**, ou simplesmente regular com respeito a f , se satisfaz:

1. $s^+(x) = s^-(x) =: s(x)$;

2. existe uma decomposição

$$T_x M = \bigoplus_{i=1}^{s(x)} H_i(x)$$

tal que para cada $i = 1, \dots, s(x)$ temos

$$V_i^+(x) = \bigoplus_{j=1}^i H_j(x) \quad \text{and} \quad V_i^-(x) = \bigoplus_{j=i}^{s(x)} H_j(x)$$

3. se $v \in H_i(x) \setminus \{0\}$ então,

$$\lim_{m \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{|m|} \log \|D f_x^m v\| = \chi_i^+(x) = -\chi_i^-(x) =: \chi_i(x) \quad (3.11)$$

com convergência uniforme sobre $\{v \in H_i(x); \|v\| = 1\}$;

4.

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} \log |\det D f_x^n| = \sum_{i=1}^{s(x)} \chi_i(x) \dim H_i(x).$$

A noção de ponto regular exige muito da estrutura dada pelos expoentes de Lyapunov, χ^+ e χ^- . Sendo assim, é importante discutir condições com as quais podemos garantir a existência de pontos regulares. O seguinte teorema, O Teorema Ergódico Multiplicativo de Oseledets, dá uma resposta positiva do ponto de vista da teoria ergódica.

Teorema 3.2.1 (Teorema de Oseledets). *Dados $f : S \rightarrow S$ um difeomorfismo e μ uma probabilidade f -invariante, tal que, $\log^+ \|Df\|, \log^+ \|Df^{-1}\| \in L^1(M, \mu)$, então μ -q.t.p $x \in M$ é regular.*

Demonstração. A demonstração desse resultado pode ser encontrada em [25]. \square

O teorema a seguir é dado por Barreira e Silva em [30]. Nesse artigo eles fornecem expoentes de Lyapunov para transformações contínuas, não necessariamente homeomorfismos, mas da mesma forma que para os expoentes de Lyapunov clássicos é mostrado que esses mantêm propriedades como a existência de pontos regulares e que esses coincidam com os expoentes Lyapunov clássicos. o

Teorema 3.2.2. *Se $f : M \rightarrow M$ é diferenciável e μ é uma medida f -invariante sobre \mathbb{R}^n , tal que, $\log^+ \|Df\| \in L^1(M, \mu)$, então para μ -q.t.p $x \in M$, temos as seguintes propriedades:*

1. para quaisquer $i = 1, \dots, s^+(x)$ e $v \in V_i^+(x) \setminus V_{i-1}^+(x)$,

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \log \|D f_x^m v\| = \chi_i^+(f, x). \quad (3.12)$$

Além disso, a convergência é uniforme para todo v nos subespaços $F \subset V_i^+(x)$ tais que $F \cap V_{i-1}^+(x) = \{0\}$;

2.

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \log |\det D f_x^m| = \sum_{i=1}^{s^+(x)} k_i^+(x) \chi_i^+(f, x) \quad (3.13)$$

Antes de fazer a demonstração do teorema, provaremos o seguinte lema.

Lema 3.2.3. *Sejam $x \in X$ e f como no teorema acima. Se*

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \log \inf_{v \in S_F^1} \|D f_x^m v\| = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \log \sup_{v \in S_F^1} \|D f_x^m v\| = \chi_i^+(f, x), \quad (3.14)$$

onde $S_F^1 = \{v \in F; \|v\| = 1\}$, então o limite (3.12) é uniforme em F .

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$. Para começar, notemos que pelo Teorema 3.1.3 o limite na Equação (3.14) existe. Logo, existem dois números naturais N_1, N_2 tais que se $m > \max\{N_1, N_2\}$, então

$$\left| \frac{1}{m} \log \inf_{v \in S_F^1} \|D f_x^m v\| - \chi_i^+(x) \right| < \epsilon$$

e

$$\left| \frac{1}{m} \log \sup_{v \in S_F^1} \|D f_x^m v\| - \chi_i^+(x) \right| < \epsilon.$$

Por outro lado, tomando $v \in S_F^1$, temos a seguinte desigualdade

$$\inf_{v \in S_F^1} \|D f_x^m v\| \leq \|D f_x^m v\| \leq \sup_{v \in S_F^1} \|D f_x^m v\|. \quad (3.15)$$

Assim, substituindo $v = w/\|w\| \in S_F^1$ para todo $w \in F$ na Desigualdade 3.15, e aproveitando a monotonicidade do logaritmo e a linearidade da derivada, temos como consequência

$$\frac{1}{m} \log \inf_{v \in S_F^1} \|D f_x^m v\| \leq \frac{1}{m} \log \frac{\|D f_x^m w\|}{\|w\|} \leq \frac{1}{m} \log \sup_{v \in S_F^1} \|D f_x^m v\|.$$

Daí, para todo $m > \max\{N_1, N_2\}$

$$-\chi_i^+(x) - \epsilon \leq \frac{1}{m} \left[\log \|D f_x^m w\| - \log \|w\| \right] \leq \chi_i^+(x) + \epsilon.$$

Ou seja,

$$\frac{1}{m} \log \|D f_x^m w\| \longrightarrow \chi_i^+(x) \quad \text{uniformemente.}$$

□

Demonstração. (Prova do teorema 3.2.2) Seja X o conjunto de todos pontos $x \in S$ para os quais os limites 3.12 e 3.13 existem. Como consequência do Teorema 3.1.3, temos $\mu(X) = \mu(S)$.

Logo, é suficiente mostrar que as hipóteses no Lema 3.2.3 são satisfeitas.

Considere uma base ortonormal e_1, \dots, e_n de F , e para cada $m \in \mathbb{N}$ sejam

$$u_m = \sum_{j=1}^n C_{m,j} e_j \in C$$

vetores tais que $\|Df_x^m u_m\| = \min_{v \in F} \|Df_x^m v\|$, os mesmos existem pois a variedade é compacta e f é de classe C^1 . Além disso, considere $j(m) \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $|C_{m,j(m)}| = \max_j |C_{m,j}|$. Notemos que, pela bilinearidade do produto interno,

$$\begin{aligned} \|u_m\| &= \langle u_m, u_m \rangle^2 \\ &= \left[\left\langle \sum_{j=1}^n C_{m,j} e_j, \sum_{j=1}^n C_{m,j} e_j \right\rangle \right]^2 \\ &= \left[\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \langle C_{m,j} e_j, C_{m,k} e_k \rangle \right]^2 \\ &= \left[\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n C_{m,j} C_{m,k} \langle e_j, e_k \rangle \right]^2, \end{aligned}$$

logo, como $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ é base ortonormal, para $i \neq j$ $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ e $\langle e_i, e_i \rangle = 1$, temos

$$1 = \|u_m\| = \sum_{j=1}^n C_{m,j}^2.$$

Portanto, $|C_{m,j(m)}| \geq 1/\sqrt{n}$, pois caso contrário $\sum_{j=1}^n C_{m,j}^2 \leq \sum_{j=1}^n C_{m,j(m)}^2 < n/n = 1$, o que é absurdo.

Por outro lado, considere as notações:

- \hat{F} o espaço gerado por $\{e_i : i \neq j\}$;
- $\rho_{m,j} :=$ a distância entre $Df_x^m e_j$ e $Df_x^m \hat{F}$;
- $\varphi_{m,j} :=$ o ângulo entre $Df_x^m e_j$ e $Df_x^m \hat{F}$,

para cada $j = 1, \dots, n$.

Dados um espaço vetorial E , um subespaço vetorial K de E e um ponto $x \in E$, denotamos por $\text{Proj}_K x$, a projeção ortogonal do ponto x no conjunto K . Com essa notação obtemos $\rho_{i,j} = \|\text{Proj}_{\hat{F}} df_x^m e_j\|$. Assim,

$$\begin{aligned} \|Df_x^m e_j\| \text{sen } \varphi_{m,j} &= \|Df_x^m e_j\| \frac{\|\text{Proj}_{\hat{F}} df_x^m e_j\|}{\|Df_x^m e_j\|} \\ &= \|\text{Proj}_{\hat{F}} Df_x^m e_j\| \\ &= \rho_{i,j}. \end{aligned}$$

Logo, devido a existência dos limites (3.12) e (3.13), temos $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log |\text{sen } \varphi_{m,j}| = 0$, pois, $|\text{sen } \varphi_{m,j}| \leq 1$.

Além disso, considerando que

$$Df_x^m u_m = C_{m,j(m)} \left(Df_x^m e_{j(m)} + \sum_{j \neq j(m)} \frac{C_{m,j}}{C_{m,j(m)}} Df_x^m e_j \right),$$

e que $j(m)$ pode tomar apenas um número finito de valores, usando a prova feita para demonstrar o Lema 3.1.2, concluímos

$$\begin{aligned} \liminf_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \log \|D f_x^m u_m\| &\geq \liminf_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \log \|D f_x^m e_{j(m)}\| + \liminf_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \log |\operatorname{sen} \varphi_{m,j(m)}| \\ &\geq \min_{j \in \{1, \dots, m\}} \liminf_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \log \|D f_x^m e_j\| + \min_{j \in \{1, \dots, m\}} \liminf_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \log |\operatorname{sen} \varphi_{m,j}| \\ &= \chi_i^+(x). \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\liminf_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \log \|D f_x^m u_m\| \geq \chi_i^+(x). \quad (3.16)$$

Por outro lado, para cada $m \in \mathbb{N}$, escolhamos um vetor v_m da forma,

$$v_m = \sum_{j=1}^n d_{m,j} e_j \in C,$$

tal que $\|D f_x^m v_m\| = \max_{v \in F} \|D f_x^m v\|$. Então,

$$\|D f_x^m v_m\| \leq \sum_{j=1}^n |d_{n,j}| \cdot \|D f_x^m e_j\| \leq \sum_{j=1}^n \|D f_x^m e_j\|.$$

Portanto,

$$\limsup_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \log \|D f_x^m v_m\| \leq \chi_i^+(x). \quad (3.17)$$

Logo, as desigualdades 3.17 e 3.16, temos

$$\limsup_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \log \|D f_x^m v_m\| \leq \chi_i^+(x) \leq \liminf_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \log \|D f_x^m u_m\|.$$

Assim,

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \log \sup_{v \in C} \|D f_x^m v\| = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \log \inf_{v \in C} \|D f_x^m v\| = \chi_i^+(x),$$

Finalmente usando o Lema 3.2.3 concluímos a demonstração. \square

Definição 3.2.3. Considere uma transformação $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Para cada $x \in \mathbb{R}^n$ e $k \in \{1, \dots, m\}$ é definido o número

$$c_k^+(x) := \inf_{\dim F=k} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \sup_{v \in F \setminus \{0\}} \frac{\|D f_x^n v\|}{\|v\|}, \quad (3.18)$$

sendo o ínfimo tomado sobre todos os subespaços variando no conjunto dos subespaços de \mathbb{R}^n de dimensão k . Para os quais

$$c_1^+(x) \leq c_2^+(x) \leq \dots \leq c_n^+(x).$$

O seguinte resultado relaciona esses números com os valores $\rho_k^+(x)$ dos expoentes clássicos de Lyapunov, i.e., os valores dos expoentes de Lyapunov $\chi^+(x, \cdot)$ contando com suas multiplicidades.

Teorema 3.2.4. *Dadas $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação e μ uma probabilidade f -invariante. Se $\log^+ \|Df\| \in L^1(M, \mu)$, então para μ -q.t.p $x \in \mathbb{R}^n$ e todo $k = 1, \dots, n$ temos que os números, definidos pelas Equações (3.6) e (3.18), são iguais em cada subespaço $G \neq \{0\}$ de dimensão $k > \dim V_{i+1}$ tal que $G \subset V_i^+(x)$ para algum i .*

Demonstração. Pelo Teorema 3.2.2 para μ -q.t.p $x \in \mathbb{R}^n$ e cada $i = 1, \dots, s^+(x)$ temos

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \frac{\|D f_x^m v\|}{\|v\|} = \chi_i^+(x) \quad (3.19)$$

quando $v \in V_i^+(x) \setminus V_{i-1}^+(x)$, e a convergência é uniforme sobre cada subespaço $F \subset V_i^+(x)$ tal que $F \cap V_{i-1}^+(x) = \{0\}$. Seja $x \in \mathbb{R}^m$ um desses pontos nos que o limite existe. Dado $i \in \{1, \dots, s^+(x)\}$, seja $G \subset V_i^+(x)$ um subespaço de dimensão $k = \dim V_{i-1}^+(x)$. Será provado por indução sobre i que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \log \sup_{v \in G \setminus \{0\}} \frac{\|D f_x^m v\|}{\|v\|} = \chi_i^+(x). \quad (3.20)$$

Note que para $i = 1$ tomando $F = G$, como no Teorema 3.2.2, temos pela convergência uniforme em G ,

$$c_1^+(x) = \inf_{\dim F=k} \limsup_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \log \sup_{v \in G \setminus \{0\}} \frac{\|D f_x^m v\|}{\|v\|} \leq \limsup_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \log \|D f_x^m v\| = \chi_1^+(x).$$

Ou seja, $\chi_1^+(x) \leq c_1^+(x)$. Para a outra desigualdade, considere o conjunto S_G^1 , dos $v \in G \setminus \{0\}$, tais que $\|v\| = 1$. Então,

$$\limsup_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \log \sup_{v \in S_G^1} \|D f_x^m v\| \geq \limsup_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \log \|D f_x^m v\|,$$

logo,

$$c_1(x) \geq \chi_1^+(x).$$

Dessa forma, $c_1(x) = \chi_1^+(x)$, o qual mostra nossa hipótese de indução. Suponhamos agora que para $k = 1, \dots, i-1$, $c_k^+(x) = \chi_k^+(x)$. Então, já que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \sup_{v \in G \setminus \{0\}} \frac{\|D f_x^m v\|}{\|v\|} \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \frac{\|D f_x^m w\|}{\|w\|} = \chi_i^+(x) = \rho_k^+(x) \quad (3.21)$$

quando $w \in G \setminus V_{i-1}^+(x)$, obtemos a desigualdade, $c_i(x) \geq \chi_i^+$.

Por outro lado, seja $v_m \in G$ um vetor tal que $\|v_m\| = 1$ e o supremo em 3.20 é atingido. Seja $V_i^+(x) = V_i^+(x) \cap V_{i-1}^+(x)^\perp \oplus V_{i-1}^+$, a decomposição em soma direta do espaço $V_i^+(x)$. Simbolizando por $V = V_i^+(x) \cap V_{i-1}^+(x)^\perp$ e $\hat{V} = V_{i-1}^+(x)$, tomemos $a_m \in V$ e $b_m \in \hat{V}$ tais que $v_m = a_m + b_m$. Como $\|v_m\| = 1$ então $\|a_m\|, \|b_m\| \leq 1$, consequentemente

$$\begin{aligned} \|D f_x^m v_m\| &\leq \|D f_x^m a_m\| + \|\hat{\phi}_x^m b_m\| \\ &\leq \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{\|D f_x^m v\|}{\|v\|} + \sup_{v \in \hat{V} \setminus \{0\}} \frac{\|D f_x^m v\|}{\|v\|}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Por outro lado, pela hipótese de indução, temos

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \log \sup_{v \in \hat{V} \setminus \{0\}} \frac{\|D f_x^m v\|}{\|v\|} = \chi_{i-1}^+(x) < \chi_i^+(x), \quad (3.23)$$

e pela convergência uniforme em V , segue que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \log \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{\|D f_x^m v\|}{\|v\|} = \chi_i^+(x) = \rho_k^+(x). \quad (3.24)$$

Suponhamos agora

$$M_0 = \max \left\{ \sup_{V \setminus \{0\}} \frac{\|D f_x^m v\|}{\|v\|}, \sup_{v \in \hat{V} \setminus \{0\}} \frac{\|D f_x^m v\|}{\|v\|} \right\},$$

da desigualdade 3.22 e os resultados 3.23 e 3.24, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \log \sup_{v \in G \setminus \{0\}} \frac{\|D f_x^m v\|}{\|v\|} &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \log(2M_0) \\ &\leq \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \log(M_0) \\ &\leq \chi_i^+(x) = \rho_k^+(x). \end{aligned}$$

Assim, concluímos a igualdade 3.20 para todo $G \subset V_i^+(x)$ de dimensão $k > \dim V_{i-1}^+$. Logo,

$$\begin{aligned} c_x^+(x) &= \inf_F \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \left[\sup_{v \in F \setminus \{0\}} \frac{\|D f_x^m v\|}{\|v\|} \right] \\ &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \left[\sup_{v \in F \setminus \{0\}} \frac{\|D f_x^m v\|}{\|v\|} \right] \\ &\leq \chi_i^+(x). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Por outro lado, para cada subespaço de dimensão $k > \dim V_{i-1}^+(x)$ existe $v_F \in F \setminus V_{i-1}^+$, tal que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \log \frac{\|D f_x^m v_F\|}{\|v_F\|} \geq \chi_i^+(x) = \rho_k^+(x). \quad (3.26)$$

Portanto,

$$c_k^+(x) \geq \inf_{\dim F=k} \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \log \frac{\|D f_x^m v_F\|}{\|v_F\|} \geq \chi_i^+(x) = \rho_k^+(x). \quad (3.27)$$

□

Corolário 3.2.5. $\chi^+(f, x) = \sup_{v \in T_x S} \chi^+(f, x, v)$.

Demonstração. Primeiro tomemos $v \in T_x S$ tal que $\|v\| = 1$, pela definição de $\chi^+(f, x, v)$ e $\chi^+(f, x)$, temos que

$$\begin{aligned} \chi^+(f, x) &= \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \sup_{v \in T_x S \setminus \{0\}} \frac{\|D f_x^m v\|}{\|v\|} \\ &\geq \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|D f_x^m v\| \\ &= \chi^+(f, x, v). \end{aligned}$$

Assim, posto que o lado esquerdo da desigualdade acima não depende de v , temos a desigualdade $\chi^+(f, x) \geq \sup_{v \neq 0} \chi^+(f, x, v)$.

Reciprocamente, pelo Teorema 3.2.2, para cada $i \in \{1, 2, \dots, s^+(x)\}$ e todo subespaço $F \subset V_i$ tal que $F \cap V_{i-1} = \{0\}$, temos que

$$\chi^+(f, x) = \chi^+(f, x, v),$$

de onde $\chi^+(f, x) \leq \sup_{v \in T_x S \setminus \{0\}} \chi^+(f, x, v)$, o qual conclui a prova. \square

4 O NOVO EXPOENTE DE LYAPUNOV

Neste capítulo, discutiremos os resultados fornecidos por de Mario Bessa e César Silva em [6]. Começamos expondo a definição de novo expoente de Lyapunov e demonstramos que este novo conceito coincide com a definição do expoente de Lyapunov clássico, quando a aplicação f é diferenciável. Também, mostraremos a densidade dos homeomorfismos com novo expoente de Lyapunov nulo no conjunto dos homeomorfismos $\text{Hom}_\mu^1(S)$, onde S uma superfície riemanniana compacta. Finalmente, exibimos um exemplo para mostrar que a aplicação que leva cada $f \in \text{Hom}_\mu^1(S)$ na integral do seu expoente de Lyapunov não é semicontínua superior.

4.1 O NOVO EXPOENTE DE LYAPUNOV

Até aqui, vimos alguns dos resultados expostos em [8], [30] referentes aos expoentes de Lyapunov clássicos. Encontramos que estes indicadores definidos a partir da aplicação derivada, serviram para determinar o comportamento assintótico dos sistemas dinâmicos da forma (f, μ) , sendo f um difeomorfismo e demonstramos os Teoremas A e A.1 enunciados na introdução. Embora esses dependam da derivada, Df_x , os novos expoentes de Lyapunov determinados com propósito de descrever a separação de órbitas de homeomorfismos, infinitesimalmente perto, são definidos com a intenção de imitar a Definição 3.6.

Seja S uma superfície riemanniana suave, limitada, conexa, compacta e sem bordo. Usando os Teoremas 2.1.2, 2.1.3, 2.1.7 consideremos um atlas finito de S ,

$$\mathcal{A} := \{\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^2; i = 1, \dots, k\},$$

no qual para cada $x \in S$ inequivocamente podemos escolher um único aberto $U_{i(x)}$ contendo x , com $i(x) \in \{1, \dots, k\}$. Com essas considerações definimos:

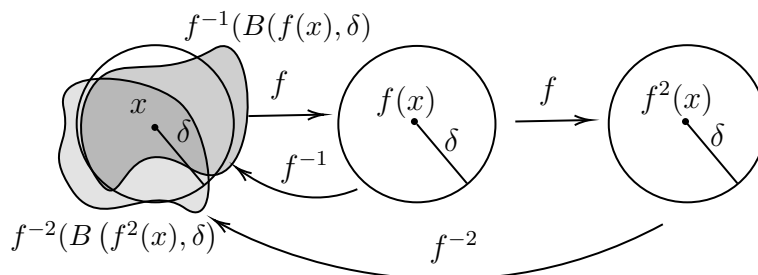


Figura 2 – Bola dinâmica

Definição 4.1.1. Dada uma aplicação contínua $f : S \rightarrow S$, e $x \in S$, para cada $\delta > 0$ e $m \in \mathbb{N}$, uma **bola dinâmica** de f em x , é definida como o conjunto

$$B_x(\delta, m) = \{y \in S : d(f^j(x), f^j(y)) < \delta \text{ para } j = 0, 1, \dots, m\}.$$

Ver figura 2.

Nesse caso, a bola dinâmica resulta da interseção das pre-imagens dos conjuntos em cinza, i.e.,

$$B_x(\delta, m) = \bigcap_{k=0}^m f^{-k}(B(f^k(x), \delta)).$$

Definição 4.1.2. Para cada $x \in S$ e $v \in T_x S$ o *novo expoente de Lyapunov* de f em x , é definido por

$$\chi_N^+(f, x, v) = \limsup_{m \rightarrow +\infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{m} \log \sup_{y \in B_x(\delta, m) \setminus \{x\} \cap L_{x,v}} \Delta(f, m, x, y), \quad (4.1)$$

onde,

$$\Delta(f, n, x, y) = \frac{\|f^n(x) - f^n(y)\|}{\|x - y\|} \quad \text{e} \quad L_{x,v} := \{x + kv : k \in \mathbb{R}\}.$$

Adicionalmente, para cada $x \in S$, definimos o *novo expoente de Lyapunov superior* como o número,

$$\chi_N^+(f, x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{n} \log \sup_{y \in B_x(\delta, n) \setminus \{x\}} \Delta(f, n, x, y). \quad (4.2)$$

Note que $B_x(\delta, m) \setminus \{x\} \cap L_{x,v} \subset B_x(\delta, n) \setminus \{x\}$, logo, pela definição acima temos que

$$\chi_N^+(f, x, v) \leq \chi_N^+(f, x). \quad (4.3)$$

Observação 9. Daqui para frente levaremos em conta as seguintes considerações:

- dada uma parametrização $\varphi_{i(x)}$ de $x \in S$, escreveremos por simplicidade, $B_x(\delta, m)$ para indicar a bola dinâmica de f em x dada na parametrização no lugar de

$$\varphi_{i(x)}(B_x(\delta, m)),$$

com $\delta > 0$ suficientemente pequeno para que $B_x(\delta, m)$ esteja contido em $U_i(x)$;

- vamos identificar o vetor $v \in T_x S$ com o correspondente $D_{\varphi_{i(x)}}v \in \mathbb{R}^2$ a fim de abrir mão de uma notação muito carregada.

O seguinte teorema afirma que em boas condições os expoentes de Lyapunov, novo e clássico, coincidem.

Teorema A. *Se f é uma aplicação diferenciável então, para todo $x \in S$ e $v \in T_x S$, temos que o expoente de Lyapunov coincide com o novo expoente Lyapunov.*

Demonstração. Primeiramente, mostraremos que os expoentes de Lyapunov superiores clássicos de $(x, v) \in S \times T_x S$ para f , denotados da forma $\chi^+(f, x, v)$, coincidem com

$\chi_N^+(f, x, v)$. Para isso, sejam $x \in S$ e $v \in T_x S$ arbitrários e f diferenciável. Pela diferenciabilidade de f existe uma função r_m para todo m , tal que

$$\frac{\|f^m(x) - f^m(y)\|}{\|x - y\|} = \frac{\|D f_x^m(y - x) + r_m(y - x)\|}{\|y - x\|} \quad (4.4)$$

e

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{r_m(y - x)}{\|y - x\|} = 0. \quad (4.5)$$

Logo, usando a expressão acima, temos

$$\begin{aligned} & \sup_{y \in B_x(\delta, m) \setminus \{x\} \cap L_{x,v}} \Delta(f, m, x, y) \\ & \leq \sup_{y \in B_x(\delta, m) \setminus \{x\} \cap L_{x,v}} \frac{\|D f_x^m(y - x)\|}{\|y - x\|} + \sup_{y \in B_x(\delta, m) \setminus \{x\} \cap L_{x,v}} \frac{\|r_m(y - x)\|}{\|y - x\|} \\ & \leq \|D f_x^m|_{L_{x,v}}\| + \phi_{m,x}(\delta), \end{aligned}$$

sendo

$$\phi_{m,x}(\delta) := \sup_{y \in B_x(\delta, m) \setminus \{x\} \cap L_{x,v}} \frac{\|r_m(y - x)\|}{\|y - x\|}. \quad (4.6)$$

Por outro lado, já que dados $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}^+$ com $\delta_1 < \delta_2$, temos

$$B_x(\delta_2, m) \subset B_x(\delta_1, m).$$

Logo, a função $\phi_{m,x}(\cdot)$ é monótona, assim, usando a Equação (4.5), concluímos que $\lim_{\delta \rightarrow 0} \phi_{m,x}(\delta) = 0$. Portanto, se $\delta \rightarrow 0$ temos que $y \rightarrow x$. Desse modo, usando 4.5 concluímos

$$\begin{aligned} \chi_N^+(f, x, v) &= \limsup_{m \rightarrow \infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{m} \log \sup_{y \in B_x(\delta, m) \setminus \{x\} \cap L_{x,v}} \Delta(f, m, x, y) \\ &\leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \left[\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{y \in B_x(\delta, m) \setminus \{x\} \cap L_{x,v}} \frac{\|D f_x^m(y - x)\|}{\|y - x\|} + \lim_{\delta \rightarrow 0} \phi_{m,x}(\delta) \right] \\ &= \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|D f_x^m v\| \\ &= \chi^+(f, x, v). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Para a outra desigualdade, consideremos $v \in T_x S$ e $\epsilon > 0$. Aproveitando mais uma vez a diferenciabilidade de f em x , temos

$$\|D f_x^m \cdot v\| = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\|f^m(x) - f^m(x + \epsilon v)\|}{|\epsilon|}.$$

Logo, para ϵ suficientemente pequeno, o vetor $x + \epsilon v$ pertence à bola dinâmica $B_x(m, \delta)$, em consequência

$$\begin{aligned} \sup_{y \in B_x(m, \delta) \setminus \{x\} \cap L_{x,v}} \Delta(f, m, x, y) &= \sup_{y \in B_x(m, \delta) \setminus \{x\} \cap L_{x,v}} \frac{\|f^m(x) - f^m(y)\|}{\|x - y\|} \\ &\geq \frac{\|f^m(x) - f^m(x + \epsilon v)\|}{\|x - (x + \epsilon v)\|} \\ &= \frac{\|f^m(x) - f^m(x + \epsilon v)\|}{|\epsilon|}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\chi_N^+(f, x, v) &= \limsup_{m \rightarrow \infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{m} \log \sup_{y \in B_x(\delta, m) \setminus \{x\} \cap L_{x,v}} \Delta(f, m, x, y) \\
&\geq \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|Df_x^m v\| \\
&= \chi^+(f, x, v).
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Assim, das desigualdades 4.7 e 4.8, obtemos $\chi_N^+(f, x, v) = \chi^+(f, x, v)$.

Para finalizar a prova, mostraremos a igualdade $\chi_N^+(x, v) = \chi_N^+(x, v)$. Primeiro, observamos que tomando a equação (4.4), temos

$$\begin{aligned}
\chi_N^+(f, x) &= \limsup_{m \rightarrow \infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{m} \log \sup_{y \in B_x(\delta, m) \setminus \{x\}} \Delta(f, m, x, y) \\
&\leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \left[\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{y \in B_x(\delta, m) \setminus \{x\}} \frac{\|Df_x^m(y-x)\|}{\|y-x\|} + \lim_{\delta \rightarrow 0} \phi_{m,x}(\delta) \right] \\
&= \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|Df_x^m v\| = \chi^+(f, x, v) \\
&\leq \chi_N^+(f, x, v) \leq \chi_N^+(f, x).
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Para a outra desigualdade, pelo Corolário 3.2.5, obtemos

$$\begin{aligned}
\chi^+(f, x) &= \sup_{v \in T_x S} \chi^+(f, x, v) \\
&= \sup_{v \in T_x S} \chi_N^+(f, x, v)
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Também, pela desigualdade 4.3, $\chi_N^+(f, x)$ é limite superior de $\chi_N^+(f, x, v)$, logo, $\chi^+(f, x) \leq \chi_N^+(f, x)$. \square

Lembrando que o expoente de Lyapunov clássico é invariante nas órbitas de quase todo ponto em S , quando f é diferenciável, o seguinte teorema fornece condições suficientes para garantir que o novo expoente de Lyapunov é invariante pela órbita.

Teorema A.1. *Seja $f \in \text{Hom}_\mu(S)$. Se para todo $\delta > 0$ suficientemente pequeno e todo $m \in \mathbb{N}$ a função $g_m^\delta : S \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, dada por*

$$g_m^\delta(x) = \sup_{y \in B_x(\delta, m) \setminus \{x\}} \Delta(f, m, x, y), \tag{4.11}$$

é integrável, então, para μ -q.t.p $x \in S$ temos

$$\chi_N^+(f, x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{n} \log \sup_{y \in B_x(\delta, n) \setminus \{x\}} \Delta(f, n, x, y) \tag{4.12}$$

e $\chi_N^+(f, x) = \chi_N^+(f, f^m(x))$ para todo $m \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Seja $x \in S$, $\delta > 0$ e $m \in \mathbb{N}$, levando em conta que f é um homeomorfismo, então

$$\begin{aligned}
f(B_x(\delta, n+1)) &= f\left(\bigcap_{k=0}^{n+1} f^{-k}(B(f^k(x), \delta))\right) \\
&= \bigcap_{k=0}^{n+1} f^{-k+1}(B(f^k(x), \delta)) \\
&= f(B(x, \delta)) \cap \bigcap_{k=1}^{n+1} f^{-k+1}(B(f^k(x), \delta)) \\
&\subseteq \bigcap_{k=1}^{n+1} f^{-k+1}(B(f^k(x), \delta)) \\
&= \bigcap_{j=0}^n f^{-j}(B(f^{j+1}(x), \delta)) \\
&= \bigcap_{j=0}^n f^{-j}(B(f^j(f(x)), \delta)) = B_{f(x)}(\delta, n).
\end{aligned}$$

Portanto, para todo $m, k \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned}
g_{m+k}^\delta(x) &= \sup_{y \in B_x(\delta, m+k)} \log \Delta(f, m+k, x, y) \\
&= \sup_{y \in B_x(\delta, m+n)} \log \left[\frac{\|f^{m+k}(x) - f^{m+k}(y)\| \|f^m(x) - f^m(y)\|}{\|f^m(x) - f^m(y)\| \|x - y\|} \right] \\
&\leq \sup_{y \in B_x(\delta, m+k)} \log \frac{\|f^{m+k}(x) - f^{m+k}(y)\|}{\|f^m(x) - f^m(y)\|} + \sup_{y \in B_x(\delta, m+k)} \log \frac{\|f^m(x) - f^m(y)\|}{\|x - y\|}.
\end{aligned}$$

Além disso, como $B_x(\delta, m+k) \subset B_x(\delta, m)$, e

$$\begin{aligned}
B_{f^m(x)}(\delta, k) &= \{u \in M; d(f^j(f^m(x)), f^j(u)) \text{ para } j = 0, \dots, k\} \\
&= \{u \in M; d(f^{j+m}(x), f^j(u)) \text{ para } j = 0, \dots, k\} \\
&\supset \{y \in M; d(f^{j+m}(x), f^j(f^m(y))) \text{ para } j = 0, \dots, k\} \\
&\supset \{y \in M; d(f^j(x), f^j(y)) \text{ para } j = 0, \dots, m+k\} \\
&\supset B_x(\delta, m+k),
\end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
g_{m+k}^\delta(x) &\leq \sup_{u \in B_{f^m(x)}(\delta, k)} \log \frac{\|f^k(f^m(x)) - f^k(u)\|}{\|f^m(x) - u\|} + \sup_{y \in B_x(\delta, m)} \log \Delta(f, m, x, y) \\
&= \sup_{y \in B_{f^m(x)}(\delta, n)} \log \Delta(f, m, f^m(x), u) + \sup_{y \in B_x(\delta, m)} \log \Delta(f, m, x, y) \\
&= g_n^\delta(f^m(x)) + g_m^\delta(x).
\end{aligned}$$

Ou seja, $g_m^\delta(x)$ é uma sequência subaditiva. Desse modo, pelo Teorema Ergódico Subaditivo de Kingman 2.2.7, considerando a hipótese de integrabilidade de g_m^δ , concluímos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sup_{y \in B_x(\delta, m)} \log \Delta(f, m, x, y)$$

existe para μ -q.t.p $x \in S$ e que a função $h : S \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $x \mapsto g_m^\delta(x)$ satisfaz, $g_m^\delta(f(x)) = g_m^\delta(x)$. Assim, como f é um homeomorfismo, temos $g_m^\delta(f^k(x)) = g_m^\delta(x)$, para todo $m, k \in \mathbb{N}$. Em consequência,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{n} \log g_n^\delta(f^m(x)) = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{m} \log g_m^\delta(x). \quad (4.13)$$

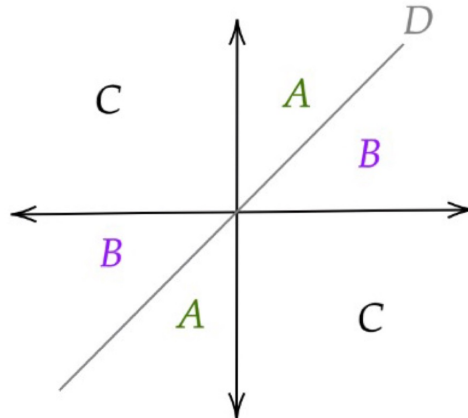
Isto é, $\chi^+(f, f^m(x)) = \chi^+(f, x)$ para todo $m \in \mathbb{Z}$. \square

Pelo Teorema de Oseledets 3.2.1 e as propriedades de regularidade, os expoentes de Lyapunov clássicos são um conjunto finito de valores, sendo no máximo uma quantidade igual à dimensão do espaço n . Contudo, essa propriedade é perdida pelo novo expoente de Lyapunov quando a diferenciabilidade não é um fator muito importante.

Exemplo 4.1.1. Consideremos os conjuntos $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x(y - x) > 0\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy > 0 \text{ e } x(y - x) < 0\}$, $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy \leq 0\}$ e $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = y\}$, e a aplicação $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida da forma

$$f(x, y) = \begin{cases} (2x, \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y), & \text{se } (x, y) \in A \\ (3x - y, 2y), & \text{se } (x, y) \in B \\ (3x, \frac{1}{2}y), & \text{se } (x, y) \in C \\ (2x, 2y) & \text{se } (x, y) \in D. \end{cases}$$

Consideremos o sistema dinâmico (f, μ) composto de um homeomorfismo f , e μ a medida



de Lebesgue (sigma aditiva) sobre \mathbb{R}^n . A inversa de f , f^{-1} , definida da forma,

$$f^{-1}(x, y) = \begin{cases} (\frac{1}{2}x, \frac{-3}{2}x + 2y), & \text{se } (x, y) \in A \\ \frac{1}{6}(2x + 1y, 3y), & \text{se } (x, y) \in B \\ \frac{2}{3}(\frac{1}{2}x, 3y), & \text{se } (x, y) \in C \\ \frac{1}{4}(2x, 2y) & \text{se } (x, y) \in D. \end{cases}$$

Assim, se denotamos por $\partial(X)$ o bordo (fronteira) do conjunto X , podemos notar que as aplicações f, f^{-1} são contínuas em $\mathbb{R}^2 = \text{Int}(A) \cup \text{Int}(B) \cup \text{Int}(C) \cup \text{Int}(D) \cup \partial(A) \cup \partial(B) \cup \partial(C) \cup \partial(D)$.

Por outro lado, f não é um difeomorfismo pois no conjunto dos pontos $(x, 0), (0, y)$ e (x, x) com $x, y \in \mathbb{R}$, a diferencial de f não está definida. A saber, tomemos um ponto (x, x) na reta $x = y$, posto que os limites

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x, x+t) - f(x, x)}{t} = (0, 1/2) \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t, x) - f(x, x)}{t} = (-1, 0)$$

não coincidem, f não é um difeomorfismo. Porém, satisfaz as seguintes propriedades:

1. Os conjuntos A, B, C e D são invariantes por f , isto é, $f(A) \subset A, f(B) \subset B, f(C) \subset C$ e $f(D) \subset D$.
2. Se μ é a medida de Lebesgue em \mathbb{R}^2 , $\mu(A) = \mu(\mathbb{R}^2)$.

Finalmente, também temos $f^m(0, 0) = (0, 0)$, $f^m(0, h) = (0, h/2^m)$, $f^m(h, 0) = (3^m h, 0)$ para todo $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $m \in \mathbb{Z}$. Logo, para $h \neq 0$, temos as seguintes igualdades

$$\Delta(f, m, (0, 0), (h, h)) = \frac{\|(2^m h, 2^m h)\|}{\|(h, h)\|},$$

$$\Delta(f, m, (0, 0), (0, h)) = \frac{\|(0, h/2^m)\|}{\|(0, h)\|} \quad \text{e} \quad \Delta(f, m, (0, 0), (h, 0)) = \frac{\|(3h^m, 0)\|}{\|(h, 0)\|}.$$

Assim, calculando no ponto $(0, 0)$ o novo expoente de Lyapunov para f nas direções dos vetores $(h, h), (0, h)$ e $(h, 0)$ com $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, obtemos: $\chi_N^+(f, m, (0, 0), (h, h)) = \log(2)$, $\chi_N^+(f, m, (0, 0), (0, h)) = -\log(2)$ e $\chi_N^+(f, m, (0, 0), (h, 0)) = \log(3)$.

4.2 A DENSIDADE DOS HOMEOMORFISMOS COM NOVO EXPOENTE DE LYAPUNOV IGUAL A ZERO, EM $\text{Hom}_\mu(S)$

Nesta seção demonstraremos os Teoremas B e C, enunciados na introdução. Para a prova do Teorema B, mostraremos o teorema fornecido por Arbieto e Matheus em [2, Teorema 3.6], o qual permite criar a partir de qualquer difeomorfismo de classe C^2 que preserva densidade de área, um difeomorfismo que preserva densidade de área e se comporta como a derivada do primeiro difeomorfismo numa pequena vizinhança de um ponto periódico. Além disso, enunciaremos teoremas que garantam que o conjunto $\text{Diff}_\mu(S)$ é denso no conjunto $\text{Hom}_\mu(S)$.

Lema 4.2.1. *Seja M uma variedade compacta com ou sem fronteira, de classe C^1 . Sejam $F, G \in C^{k+\alpha}(M)$ com $(k + \alpha > 0)$ tal que $F, G > 0$. Então, existe um difeomorfismo $C^{k+1+\alpha}$ φ (com a mesma regularidade na fronteira), tal que*

$$\begin{cases} G(\varphi(x)) \det(D\varphi(x)) = \lambda F(x), & x \in M \\ \varphi(x) = x, & x \in \partial M, \end{cases} \quad (4.14)$$

no qual $\lambda = \int G / \int F$. Além disso, existe $C = (C, k, M) > 0$ tal que $\|\varphi - \text{Id}\|_{k+1+\alpha} \leq C\|F - G\|_{k+\alpha}$. Também, se f, g são C^∞ , então φ é C^∞ .

Demonstração. Consultar [2]. □

Para as provas dos seguintes teoremas levaremos em consideração que o teorema de recorrência de Poincaré e a igualdade 2.10, afirmam que uma aplicação diferenciável definida numa superfície compacta S admite pelo menos um ponto fixo.

Teorema 4.2.2. [*Lema de colagem fraco*] Se f é um difeomorfismo em $\text{Diff}_\mu(S)$ de classe C^2 e $x \in S$, então para qualquer $\alpha \in (0, 1)$ e $\epsilon > 0$, existe uma $\epsilon - C^1$ -perturbação $g \in \text{Diff}_\mu(S)$ de classe $C^{1+\alpha}$ de f , tal que para toda vizinhança $U \supset V$ de x temos

1. $g|_{U^c} = f$, com U^c o conjunto complemento de U e
2. nas cartas locais $g|_V = Df_x$.

Demonstração. Aqui nós não faremos a demonstração completa, daremos apenas, a ideia. Consideramos f em cartas locais, isto é, aproveitamos a compacidade de S para cobrir a superfície com finitos abertos $U_{i(x)}$, logo consideramos $\varphi_{i(x)}$, cartas locais de S , de modo que f pode ser visto como a função $g \equiv \varphi_{i(f(x))} \circ f \circ \varphi_{i(x)}^{-1}$ (por simplicidade escrevemos $f = g$). Logo, nessas cartas locais tomamos uma aplicação $\rho : S \rightarrow [0, 1]$ de classe C^∞ tal que para r suficientemente pequeno $\rho(z) = \overline{B(x, r)} \setminus B(x, r/2) \in (0, 1)$, $\rho(z) = 1$ em $B(x, r/2)$ e $\rho(z) = 0$ em $S \setminus B(x, r)$, daí construímos uma aplicação $h(y) = \rho(y)(f(x) + Df_x(y - x)) + (1 - \rho(y))f(y)$ tal que $\|h_1 - f\|_0 \leq rC$, $\|h_1 - f\|_1 \leq rC$ e $\|h_1 - f\|_2 \leq C$ para alguma constante $C > 0$, suficientemente grande. Então, h é um C^1 -difeomorfismo ϵ -perto de f (para r suficientemente pequeno). Agora, para construir uma aplicação g tal que ela seja conservativa e satisfaça a tese do teorema, tomamos a função de densidade de h^{-1} , $\hat{\theta}(y) = \det(Dh_y^{-1})$ a qual satisfaz $\|\hat{\theta}(y) - 1\|_0 < Cr$ e $\|\hat{\theta}(y) - 1\|_1 < C$. Assim considerando a desigualdade das normas, para $0 < \alpha < 1$ temos $\|\theta(y) - 1\|_\alpha < r^\alpha C$. Por outro lado, considerando o Lema 4.2.1 temos que para $F \equiv \theta : h^{-1}(\overline{B(x, r)} \setminus B(x, r/2)) \rightarrow (\overline{B(x, r)} \setminus B(x, r/2))$ tal que

$$\begin{cases} \det(D\psi(z)) = F(z), & \text{se } z \in \overline{B(x, r)} \setminus B(x, r/2), \\ \psi(z) = z \text{ se } \|y - x\| = r \end{cases}$$

Além disso, estendendo ψ usando a “identidade” temos que $g \equiv h \circ \psi : S \rightarrow S$ é um difeomorfismo $\epsilon - C^1$ -perto de f , tal que

$$\begin{cases} g \equiv Df_x & \text{em } B(x, r/2) \\ f \equiv Df_x & \text{em } S \setminus B(x, r) \end{cases}$$

□

No teorema anterior, podemos escolher qualquer aplicação linear invertível em V , de modo que a configuração conservativa se mantém. Em particular, veremos que a partir uma aplicação g podemos colar a transformação identidade numa vizinhança de um ponto fixo de f , de forma conservativa, de modo que g esteja C^0 -perto, mas não C^1 -perto.

Teorema 4.2.3. *Se f é um difeomorfismo Anosov em $\text{Diff}_\mu^\infty(S)$ e $x \in S$ é um ponto fixo para f , então existe um difeomorfismo $g \in \text{Diff}_\mu(S)$ $\epsilon - C^1$ -perto de f de classe C^1 , tal que numa vizinhança $U \supset V$ de x temos*

1. $g|_{U^c} = f$, com U^c o conjunto complemento de U e
2. $g|_V = \text{Id}$.

Para a prova desse resultado imitaremos a demonstração feita por Arbieto e Matheus em [2, p. 1404], e levaremos em conta a seguinte observação:

Observação 10. Como f preserva a densidade de área e é Anosov, temos que em qualquer ponto $y \in S$, a derivada de f , Df_y possui autovalores distintos λ_1, λ_2 com $0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2$ e $\lambda_1 \lambda_2 = 1$. Seja $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ a base dos autovetores unitários associados a λ_1 e λ_2 respectivamente. Então $\{v_1, -v_2\}, \{-v_1, -v_2\}$ e $\{-v_1, v_2\}$ são base de autovetores unitários com autovalores λ_1 e λ_2 , respectivamente.

Demonstração. Suponhamos que os autovalores de Df_y são positivos para todo $y \in M$. Sejam $x \in S$ um ponto fixo de f e $r > 0$. Consideremos uma aplicação $\rho : S \rightarrow [0, 1]$ de classe C^∞ , tal que

$$\rho(y) = \begin{cases} 1, & \text{se } y \in B(x, r/2) = B_{r/2} \\ 0, & \text{se } y \in M \setminus B(x, r) = B_r^c, \end{cases}$$

e $\rho(y) \in (0, 1)$ se $y \in \overline{B(x, r)} \setminus B(x, r/2) = \Omega$. Escolhamos C uma constante suficientemente grande, de modo que $|\nabla \rho| \leq C/r$. Sem perda de generalidade sobre ρ , poderemos aumentar C , se necessário. Agora, consideremos a aplicação $h : S \rightarrow S$ definidas por

$$h(y) = \rho(y)(f(x) + \text{Id}(y - x)) + (1 - \rho(y))f(y).$$

Assim,

$$h(y) = \begin{cases} y, & \text{se } y \in B_{r/2}, \\ \rho(y)y + (1 - \rho(y))f(y), & \text{se } y \in \Omega, \\ f(y), & \text{se } y \in B_r^c. \end{cases}$$

Para mostrar que a afirmação é verdadeira, mostraremos que h está $\epsilon - C^0$ -perto de f , logo provaremos que h é um difeomorfismo e, finalmente, com ajuda do Lema 4.2.1, construiremos o difeomorfismo conservativo desejado.

Consideremos os seguintes três casos:

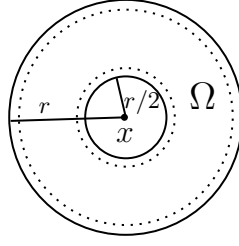


Figura 3 – Vizinhança parametrizada

Caso I: Se $y \in B_r^c$, então

$$\|h(y) - f(y)\| = \|f(y) - f(y)\| = 0 \quad \text{e} \quad \|Dh_y - Df_y\| = 0.$$

Caso II: Se $y \in B_{r/2}$, pela Desigualdade do Valor Médio dada em coordenadas locais, temos

$$\begin{aligned} \|h(y) - f(y)\| &= \|y - f(y)\| \leq \|y - x\| + \|f(x) - f(y)\| \\ &\leq r + \|Df\|_0 r \leq r(1 + \|f\|_1) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|Dh_y - Df_y\| &= \|\text{Id} - Df_y\| \leq 1 + \|Df\|_0 \\ &\leq 1 + \|f\|_1. \end{aligned}$$

Caso III: Se $y \in \Omega$, temos

$$\begin{aligned} \|h(y) - f(y)\| &= \|\rho(y)y + (1 - \rho(y))f(y) - f(y)\| \\ &\leq \|\rho(y)y - \rho(y)f(y)\| \\ &\leq \|\rho\|_0 \|y - f(y)\| \\ &\leq r(1 + \|f\|_1) \end{aligned}$$

e

Daí, $\|f - h\|_0 \leq r(1 + \|f\|_1)$ e $\|f - h\|_1 \leq (C + 1)(1 + \|f\|_1)$. Logo, se pegarmos r suficientemente pequeno concluímos que h está $r - c^0$ -perto de f , mas não está C^1 -perto.

Logo, construída h dessa forma, temos que Dh_y é um isomorfismo para todo $y \in S$.

Finalmente, considerando que não temos muita informação sobre o determinante da derivada de h , vamos mostrar que podemos construir a partir de h um difeomorfismo conservativo em Ω , o qual se comporta como a identidade no bordo de Ω , $\partial\Omega$.

Agora, visto que em princípio h não é conservativa, mas em $B_{r/2}$ e em B_r^c sim, podemos usar o Lema 4.2.1 para construir uma função φ em Ω , tal que a composição $\varphi \circ h$ é um difeomorfismo conservativo em Ω . Nessa ordem, primeiro, consideremos a função de densidade de h dada por $\theta(y) = \det Dh_y$. Considerando o resultado na prova da injetividade de h dada acima, temos que os autovalores de Dh_y estão longe do zero, isto é,

$\det D h \geq k > 0$. Além disso, pela compacidade da superfície e pela multilinearidade do determinante, existe uma constante M tal que $|\det D h_y| \leq M$. Assim

$$\begin{aligned} \|\det D h - 1\|_0 &= \max_{y \in \Omega} \{ \|\det D h_y - \det D f_y\| \\ &\leq \|\det D h_y - \det D f_y\| \\ &\leq M \|D h_y - D f_y\| \\ &\leq MC(1 + \|f\|_1), \end{aligned}$$

Aumentando C , se necessário, temos

$$\|\det D h - 1\|_1 \leq C(1 + \|f\|_2).$$

Por outro lado, consideremos a função de densidade da inversa de h , dada por $\hat{\theta}(y) = (\det D h_{h^{-1}(y)})^{-1}$. Então tomando $F(y) = \hat{\theta}(y)$ e $G = 1$, pelo Lema 4.2.1, temos que existe um difeomorfismo $\varphi : h(\Omega) \rightarrow \Omega$ tal que

$$\begin{cases} \det(D\varphi(y)) = \lambda F(y), & y \in h(\Omega) \\ \varphi(y) = y, & y \in \partial h(\Omega). \end{cases} \quad (4.15)$$

Fazendo uma mudança de variáveis obtemos

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\int_{h(\Omega)} 1 dy}{\int_{h(\Omega)} \hat{\theta}(y) dy} \\ &= \frac{\text{vol}(h(\Omega))}{\int_{h(\Omega)} \det D h_{h^{-1}} dy} \\ &= \frac{\text{vol}(h(\Omega))}{\int_{\Omega} dz} = \frac{\text{vol}(h(\Omega))}{\text{vol}(\Omega)} \\ &= 1. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Logo, estendendo φ a S , definida como a aplicação identidade no complementar de $h(\Omega)$, temos que o difeomorfismo $g = \varphi \circ h : S \rightarrow S$ satisfaz

$$\begin{aligned} \det D g_z &= \det D \varphi \circ h \\ &= \det(D \varphi_{h(z)}) \det(D h_z) \\ &= \det(D \varphi_{h(y)}) \det(D h_{h^{-1}(y)}) \\ &= \hat{\theta}(y) \hat{\theta}(y)^{-1} = 1. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Em vista que $g = \text{Id}$ em $B_{r/2}$, que $g = f$ em B_r temos que $g(B(x, r)) \subset f(B(x, r))$. Além disso, pela continuidade de f temos que existe $\epsilon > 0$ tal que $f(B(x, r)) \subset B(f(x), \epsilon)$. Assim, $\|f(y) - g(y)\| \leq \epsilon$. O qual termina a prova.

□

Teorema 4.2.4 (Teorema de Zender, 1977). *Dada S , uma superfície orientável e μ uma probabilidade, o conjunto dos difeomorfismos $\text{Diff}_\mu^\infty(S)$ é denso em $\text{Diff}_\mu^k(S)$. Em símbolos, isto é,*

$$\overline{\text{Diff}_\mu^\infty(S)} = \text{Diff}_\mu^k(S) \text{ para todo } k \geq 1.$$

Demonstração. A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [34]. \square

Teorema 4.2.5. *Dado qualquer difeomorfismo Anosov em $f \in \text{Diff}_\mu^1(S)$ e $\epsilon > 0$, existe um difeomorfismo $g \in \text{Diff}_\mu(S)$ não Anosov, tal que g está $\epsilon - C^0$ -perto a f .*

Demonstração. Seja $p \in S$ um ponto fixo de f . Pelo Teorema 4.2.4, podemos escolher um difeomorfismo $f_1 \in \text{Diff}_\lambda^1(S)$ de classe C^∞ $\epsilon/2 - C^0$ -perto de f , logo, pela Proposição 2.1.11 temos que existe um ponto $p_1 \in S$, fixo para f_1 .

Agora, tomemos V_1 sendo vizinhança de p_1 suficientemente pequena, de modo que usando o Teorema 4.2.2, existem vizinhanças V_1 de p_1 e $U \supset V_1$ suficientemente pequenas, onde podemos construir um difeomorfismo f_2 tal que:

1. f_2 preserva área;
2. $f_2^2 = id$ (id = Identidade) em V_1 ;
3. $f_2 = f_1$ fora de U ;
4. f_2^2 está $\epsilon/2 - C^0$ -perto de f_1 .

Agora, tomando $g = f_2$, temos que g não é um difeomorfismo de Anosov, pois a derivada de g em V_1 , é a matriz identidade e g está $\epsilon - C^0$ -perto de f . \square

Lema 4.2.6 (Teorema de Bochi-Mañé). *Existe um subconjunto residual $\mathcal{R} \subset \text{Diff}_\mu^1(S)$, tal que, para todo f em \mathcal{R} ou f é Anosov ou f tem expoente de Lyapunov (clássico) nulo em μ -q.t.p $x \in S$.*

Demonstração. A demonstração desse resultado é o tema a tratar no artigo de Bochi [8, Teorema A] e sua prova pode ser encontrado no mesmo. \square

Lema 4.2.7 (Teorema de Zikorav, 2007). *Dados S uma superfície riemanniana compacta e conexa e uma aplicação $f : S \rightarrow S$ em $\text{Hom}_\mu(S)$, existe uma sequência de aplicações $\{h_n\} \subset \text{Diff}_\mu(S)$, tal que $h_n \rightarrow f$, quando $n \rightarrow \infty$.*

Demonstração. A demonstração desse resultado pode ser encontrada em [28]. \square

Teorema B. *Dado qualquer $f \in \text{Hom}_\lambda(S)$ e $\epsilon > 0$, existe $g \in \text{hom}_\mu(S)$ $\epsilon - C^0$ -perto de f que tem expoente de Lyapunov zero.*

Demonstração. Construiremos a prova desse resultado fazendo uso dos lemas acima enunciados. Pelo Lema 4.2.7 podemos considerar um difeomorfismo $f_1 \in \text{Diff}_\mu^\infty(S)$ tal que,

$$\|f - f_1\|_0 < \epsilon/3. \quad (4.18)$$

Logo, dado um ponto fixo para f_1 , usando o Teorema 4.2.5, existe um difeomorfismo $f_2 \in \text{Diff}_\mu(S)$ não Anosov e tal que

$$\|f_2 - f_1\|_0 < \epsilon/3. \quad (4.19)$$

Além disso, considerando que o conjunto das aplicações Anosov é denso em $\text{Diff}_\mu(S)$ numa vizinhança de f_2 , existem difeomorfismos que não são Anosov. Assim, usando a densidade do conjunto residual \mathcal{R} fornecido pelo Lema 4.2.6, existe um difeomorfismo f_3 tal que,

$$\|f_3 - f_2\|_0 < \epsilon/3, \quad (4.20)$$

com expoente de Lyapunov nulo para μ quase todo ponto. Já que f_3 é um difeomorfismo, pelo Teorema 4.1, o novo expoente de Lyapunov de f_3 coincide com o expoente de Lyapunov clássico, daí, $\chi_N^+(f_3, x) = 0$ para μ -q.t.p $x \in S$.

Finalmente, usando as desigualdades 4.18, 4.19 e 4.20, temos:

$$\begin{aligned} \|f - f_3\|_0 &= \|f - f_1 + f_1 - f_2 + f_2 - f_3\|_0 \\ &\leq \|f - f_1\|_0 + \|f_1 - f_2\|_0 + \|f_2 - f_3\|_0 \\ &< \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon. \end{aligned}$$

□

Antes de expor o último resultado do artigo de Mario Bessa e César Silva, [6], vamos expor os resultados de Katok [19]. Estes permitem construir uma imersão difeomorfa do disco D^n numa variedade M , compacta, conexa de classe C^∞ e um difeomorfismo que deixa invariante a medida μ do disco com expoente de Lyapunov não nulo. Não vamos expor aqui as provas desses lemas, porém suas demonstrações podem ser encontrada em Katok [19].

Observação 11. Daqui por diante usaremos a notação D^n para o disco de raio 1, em \mathbb{R}^n .

Lema 4.2.8 (Teorema de Katok, 1979). *Existe um difeomorfismo $g \in \text{Diff}_\mu(D^2)$ com expoente de Lyapunov positivo, tal que se $A \subset D^2$ e $g(A) \subset A$ então*

$$\mu(A) = 0 \quad \text{ou} \quad \mu(A) = 1.$$

Lema 4.2.9. *Para toda variedade M de classe C^∞ , conexa e compacta, existe uma aplicação $f : D^n \rightarrow M$ μ -invariante tal que*

1. $f(D^n) = M$ e
2. f restrita a $\text{Int } D^n$ é uma imersão difeomorfa.

Demonstração. A demonstração desse Lema pode ser encontrado em [19]. □

Definição 4.2.1. Seja $\text{Hom}_\mu(S)$ o conjunto dos homeomorfismos $f : S \rightarrow S$ que preservam a medida μ dotado com a topologia C_0 . Definimos $\Lambda : \text{Hom}_\lambda(S) \rightarrow [0, +\infty)$ tal que,

$$h \in \text{Hom}_\lambda(S) \mapsto \int_S \chi_N^+(h, x) d\mu(x) \in \bar{\mathbb{R}}. \quad (4.21)$$

O seguinte teorema afirma que dada uma aplicação f , se perturbamos f , então o comportamento da perturbação pode ser muito diferente do comportamento de f e, portanto, não podemos ter a dicotomia do Teorema de Bochi-Mañé 4.2.6.

Definição 4.2.2. Seja X um espaço topológico. Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se semicontínua superiormente num ponto $a \in X$, se para cada $\epsilon > 0$, existe uma vizinhança V de a , tal que, se $x \in V$ então

$$f(a) + \epsilon > f(x).$$

Da definição da acima temos que se $\{x_m\}$ é uma sequência em X , tal que $x_m \rightarrow a$ quando $m \rightarrow \infty$, tem-se que para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$f(a) + \epsilon > f(x_m) \text{ para todo } m > N.$$

Teorema C. *A função Λ não é semicontínua superiormente.*

Demonstração. Vamos mostrar que na aplicação identidade $id : S \rightarrow S$ a função Λ não é semicontínua superior. Isto é, vamos construir uma sequência de funções $\{g_m\} \subset \text{Hom}_\lambda(S)$ que converge para a identidade tal que para um $\epsilon > 0$ adequado, para todo $N \in \mathbb{N}$ existe $m \geq N$ tal que $\Lambda(id) + \epsilon < \Lambda(g_m)$.

Para isso, consideremos $A = \text{área da superfície}$, $k < 10\sqrt{\frac{A}{\pi}}$ fixo e $\{D_i\}$ uma coleção de m^2 discos disjuntos dois a dois, de radio $\frac{K}{10m}$.

Agora, usando a construção de Katok [19] consideremos $\zeta : D^2 \rightarrow D^2$, um difeomorfismo de classe C^∞ , tal que, ζ é um difeomorfismo ergódico que preserva área em D^2 com expoente de Lyapunov não nulo para μ -q.t.p $x \in D^2$; pela regularidade dos expoentes dada pelo teorema de 3.2.1, tomemos $\chi > 0$. Seja $\{\ell_i\}$ uma coleção de m^2 homotecias $\ell_i : D_i \rightarrow D^2$, que levam cada disco D_i em D para todo $i = 1, \dots, m^2$. Em continuação, para cada $m \in \mathbb{N}$, seja $g_m : S \rightarrow S$ tal que

1. $g_m = id$, fora de $\bigcup_{i=1}^{m^2} D_i$ e
2. $g_m = \ell_i \circ \zeta \circ \ell_i^{-1}$ sobre cada D_i .

Notemos que g_m está $\frac{k}{10m}$ - C^0 -perto da identidade id , então visto que $\Lambda(id) = 0$, temos

$$\begin{aligned} \Lambda(g_m) &= \int_S \chi_N^+(g_m, x) d\mu(x) \\ &= \int_{M \setminus \bigcup_{i=1}^{m^2} D_i} \chi_N^+(g_m, x) d\mu(x) + \int_{\bigcup_{i=1}^{m^2} D_i} \chi_N^+(g_m, x) d\mu(x) \\ &= \int_{\bigcup_{i=1}^{m^2} D_i} \chi_N^+(g_m, x) d\mu(x). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Logo, considerando que g_m é diferenciável em D_i para todo $i = 1, \dots, m^2$, pelo Teorema 4.1, temos:

$$\begin{aligned}
 \Lambda(g_m) &= \int_{\cup_{i=1}^{m^2} D_i} \chi_N^+(g_m, x) d\mu(x) \\
 &= \int_{\cup_{i=1}^{m^2} D_i} \chi^+(g_m, x) d\mu(x) \\
 &= \int_{\cup_{i=1}^{m^2} D_i} \chi d\mu(x) \\
 &= \chi \mu\left(\cup_{i=1}^{m^2} \mathcal{D}_i\right) \\
 &= \chi \sum_{i=1}^{m^2} \frac{\pi k^2}{100m^2} \\
 &= \chi \frac{\pi k^2}{100}.
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Finalmente, como $\Lambda(g_m) = \chi \frac{\pi k^2}{100}$ para todo $m \in \mathbb{N}$, e para todo $\eta > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned}
 \|g_m - id\|_0 &= \sup_{x \in S} \|g_m(x) - x\| \\
 &= \frac{k}{10m} \leq \frac{k}{10N} < \eta,
 \end{aligned}$$

para todo $m \geq N$, temos que $\{g_m\}$ converge para id na norma C^0 , e existe $\epsilon = \frac{\pi k^2}{200} > 0$, tal que

$$\Lambda(id) + \epsilon < \Lambda(g_m),$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Portanto, Λ não é semicontínua superior. \square

REFERÊNCIAS

- [1] Ahlfors, L., and Sario, L. *Riemann Surfaces*. Princeton Mathematical Series. Princeton University Press, 1960.
- [2] Arbieto, A., and Matheus, C. A pasting lemma and some applications for conservative systems. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 27, 5 (2007), 1399–1417.
- [3] Avila, A., and Bochi, J. On the subadditive ergodic theorem. *preprint* (2009).
- [4] Barreira, L., and Pesin, Y. B. *Lectures on Lyapunov Exponents and Smooth Ergodic Theory*, vol. 23. American Mathematical Soc., 2002.
- [5] Bartle, R. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. Wiley Classics Library. Wiley, 2014.
- [6] Bessa, M., and Silva, C. Dense area-preserving homeomorphisms have zero Lyapunov exponents. *Discrete and Continuous Dynamical Systems* 32 (04 2012), 1231–1244.
- [7] Bessa, M., Silva, C. M., and Vilarinho, H. Stretching generic Pesin’s entropy formula. *Journal of Statistical Physics* 173, 5 (2018), 1523–1546.
- [8] Bochi, J. Genericity of zero Lyapunov exponents. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 22, 6 (2002), 1667–1696.
- [9] Cobo, M., Gutierrez, C., and Llibre, J. On the injectivity of $c \geq 1$ maps of the real plane. *Canadian Journal of Mathematics* 54, 6 (2002), 1187–1201.
- [10] Dávila, G. *Álgebra Lineal*. Colección textos académicos. Universidad de Sonora, 2006.
- [11] Devaney, R. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Addison-Wesley advanced book program. Addison-Wesley, 1989.
- [12] do Carmo, M. *Geometria Riemanniana*. Escola de geometria diferencial. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.
- [13] do Carmo, M. *Geometria diferencial de curvas e superficies*. Textos Universitarios: Ciências médicas. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2005.
- [14] Halmos, P. R. *Measure Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 1976.
- [15] Hoffman, K., and Kunze, R. *Linear Algebra*. Prentice-Hall mathematics series. Prentice-Hall, New Jersey, 1961.
- [16] James, B. *Probabilidade: um curso em nível intermediário*. Projeto Euclides. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2004.
- [17] Júnior, J., and de Melo, W. *Introdução aos sistemas dinâmicos*. Projeto Euclides. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1978.

- [18] K., O., and M., V. *Fundamentos da Teoria Ergódica*. SBM, Rio de Janeiro, 2019.
- [19] Katok, A. Bernoulli diffeomorphisms on surfaces. *Annals of Mathematics* 110, 3 (1979), 529–547.
- [20] Katok, A., and Hasselblatt, B. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, New York, 1995.
- [21] Kolman, B., Hill, D., and Mercado, V. *Álgebra Lineal*. Pearson Educación, 2006.
- [22] Lima, E. *Elementos de topologia geral*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Coleção elementos de matemática. Ao Livro Técnico, Editôra da Universidade de São Paulo, Rio de Janeiro, 1970.
- [23] Lima, E. *Curso de análise*. No. v. 2 in Projeto Euclides. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, Rio de Janeiro, 1992.
- [24] Mañé, R. *Introdução à teoria ergódica*. Projeto Euclides. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1983.
- [25] Oseledec, V. I. A multiplicative ergodic theorem. Characteristic Ljapunov, exponents of dynamical systems. *Trans. Moscow Math. Soc.* 19 (1968), 179–210.
- [26] Oxtoby, J. C., and Ulam, S. M. Measure-preserving homeomorphisms and metrical transitivity. *Annals of Mathematics* (1941), 874–920.
- [27] Roman, S. *Advanced Linear Algebra*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2007.
- [28] Sikorav, J. Approximation of a volume-preserving homeomorphism by a volume-preserving diffeomorphism, 2007.
- [29] Silva, C. *Invitation to Ergodic Theory*. Student mathematical library. American Mathematical Society, 2008.
- [30] Silva, C., and Barreira, L. Lyapunov Exponents For Continuous Transformations And Dimension Theory. *Discrete and Continuous Dynamical Systems* 13 (07 2005), 469–490.
- [31] Viana, M. *Lectures on Lyapunov Exponents*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2014.
- [32] Viana, M., and Yang, J. Continuity of lyapunov exponents in the c^0 topology. *Israel Journal of Mathematics*, 229 (2019), 461– 485.
- [33] Yeh, J. *Real Analysis: Theory of Measure and Integration*. World Scientific, 2006.
- [34] Zehnder, E. **Note on smoothing symplectic and volume preserving diffeomorphisms**. In *Geometry and Topology* (Berlin, Heidelberg, 1977), J. Palis and M. do Carmo, Eds., Springer Berlin Heidelberg, pp. 828–854.