UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

MESTRADO EM MATEMÁTICA

Juan Sebastian Correa Amaya

Sobre a não Existência de Curvas Algébricas Invariantes por Folheações Algébricas Planas

Juiz de Fora

2020

Juan Sebastian Correa Amaya

Sobre a não Existência de Curvas Algébricas Invariantes por Folheações Algébricas Planas

Dissertação apresentada ao Mestrado em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração: Álgebra, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Joana Darc Antonia Santos da Cruz

Coorientadora: Profa. Dra. Flaviana Andréa Ribeiro

Juiz de Fora

2020

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Correa Amaya, Juan Sebastian.
Sobre a não Existência de Curvas Algébricas Invariantes por Folheações Algébricas Planas / Juan Sebastian Correa Amaya. – 2020.
80 f.

Orientadora: Joana Darc Antonia Santos da Cruz
Coorientadora: Flaviana Andréa Ribeiro
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Mestrado em Matemática, 2020.

1. Campos Vetoriais. 2. Curvas Invariantes. 3. Folheações Algébricas. 4. Singularidades. I. Santos da Cruz, Joana Darc Antonia, orient. II. Ribeiro, Flaviana Andréa, coorient. III. Título.

Juan Sebastian Correa Amaya

Sobre a não Existência de Curvas Algébricas Invariantes por Folheações Algébricas Planas

Dissertação apresentada ao Mestrado em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração: Álgebra, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em 05 de março de 2020

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Joana Darc Antonia Santos da Cruz - Orientadora
Universidade Federal de Juiz de Fora

Profa. Dra. Flaviana Andréa Ribeiro - Coorientadora
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Nivaldo Nunes de Medeiros Júnior
Universidade Federal de Fluminense

Prof. Dr. Frederico Sercio Feitosa
Universidade Federal de Juiz de Fora

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Deus por me ajudar nesta etapa tão importante.

As minhas orientadoras Joana e Flaviana pela orientação, paciência, confiança e pelos ensinamentos.

Aos professores Frederico Sércio Feitosa e Nivaldo Nunes de Medeiros Júnior por aceitar participar da banca.

Aos meus pais, irmão, cunhada e meu sobrinho Juan Pablo.

À Alejandra por ser minha amiga e mãe neste tempo. À Heber pelo apoio e amizade. À Mariane pela ajuda e amizade. Aos colegas do mestrado que fizeram muito mais agradável esta caminhada.

À secretária do Mestrado Acadêmico em Matemática, Paula Mara, pela ajuda. Aos professores do Departamento de Matemática da UFJF, pela formação.

À CAPES pelo apoio financeiro.

RESUMO

Neste trabalho, o qual é baseado no artigo de S. C. Coutinho e L. Menasche Schechter [7], descreveremos em detalhes como verificar se uma dada derivação do plano complexo não tem curvas algébricas invariantes.

Palavras-chave: Campos Vetoriais. Curva Invariante. Folheação Algébrica. Singularidade.

ABSTRACT

In this work, which is based on the article by S. C. Coutinho e L. Menasche Schechter [7], we describe in detail how to check if a given derivation of the complex plane does not have invariant algebraic curves.

Keywords: Vector Fields. Invariant Curve. Algebraic Foliations. Singularity.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Em 1878, Darboux mostrou que curvas algébricas invariantes por um campo vetorial polinomial podem ser usadas para determinar uma integral primeira da equação diferencial de primeira ordem correspondente ao campo.

O problema de encontrar curvas algébricas invariantes por campos vetoriais polinomiais foi retomado recentemente. Podemos citar por exemplo, o trabalho de [21] M. J. Prelle e M. F. Singer, da década de 80.

O objetivo deste trabalho é estudar condições sobre um campo vetorial no plano projetivo que garantam a não existência de curvas algébricas invariantes. A referência principal para este estudo foi o artigo "*Algebraic Solutions of plane Vector Fields*,"de autoria de S.C. Coutinho e L. Menasché Schechter (ver [7]). Os artigos [26] e [27] de Sebastian Walcher, assim como o livro de James E. Humphreys, [12], também foram muito importantes para a elaboração deste trabalho.

Este texto será apresentado na ordem seguinte.

No Capítulo 2 são apresentados conceitos básicos de variedades afins, projetivas e matriz resultante.

Apresentamos os conceitos de derivação, diferenciais e 1-formas diferenciais no plano projetivo ao longo do Capítulo 3. Para isso precisamos também estudar espaços tangentes.

No Capítulo 4 estudamos campos vetoriais em $\mathbb{P}^2$, que por sua vez definirão folheações em $\mathbb{P}^2$. Além disso, definimos curvas algébricas projetivas invariantes por uma folheação no plano projetivo.

Apresentamos no Capítulo 5 alguns conceitos de álgebras de Lie, como por exemplo a derivação de Lie com relação a um campo vetorial, funções invariantes e semi-invariantes. O principal resultado deste Capítulo, o Teorema 5.5, relaciona a existência de expoentes racionais com curvas semi-invariantes e é de suma importância para o estudo apresentado no Capítulo 6.

No Capítulo 6 apresentamos as condições para que um dado campo vetorial $D_{a,b}$ em $\mathbb{P}^2$ não possua curvas algébricas invariantes.

2 CONCEITOS BÁSICOS

Neste capítulo vamos definir e enunciar resultados clássicos da Geometria Algébrica que serão usados ao longo deste trabalho. Mais detalhes e as demonstrações omitidas podem ser encontradas em [22] e em [10].

2.1 VARIEDADES ALGÉBRICAS

Denota-se por $\mathbb{A}^n(k)$ ou simplesmente por $\mathbb{A}^n$ o espaço afim n dimensional sobre um corpo k algebricamente fechado cujos os pontos são da forma $p = (X_1, \ldots, X_n)$ com $X_i \in k$, para todo $i = 1, \ldots, n$.

Definição 2.1. Seja $F \in k[X_1, \ldots, X_n]$. Um ponto $p \in \mathbb{A}^n$ é dito um zero de F se $F(p) = 0$.

Definição 2.2. Um subconjunto fechado de $\mathbb{A}^n$ é um subconjunto V formado pelos zeros de um conjunto de polinômios de $k[X_1, \ldots, X_n]$. Denotado por

$$\mathcal{Z}(S) = \{p \in \mathbb{A}^n; F(p) = 0, \forall F \in S\}.$$

Os subconjuntos fechados de $\mathbb{A}^n$ formam uma topologia chamada *topologia* de *Zariski*. Os abertos desta topologia são os complementares dos subconjuntos fechados.

Definição 2.3. Um subconjunto V de $\mathbb{A}^n$ é dito um conjunto algébrico (afim) se $V = \mathcal{Z}(S)$, para algum subconjunto $S \subset k[X_1, \ldots, X_n]$.

Lema 2.1. Os conjuntos algébricos satisfazem as seguintes propriedades:

1. $\mathcal{Z}(\{0\}) = \mathbb{A}^n$ e $\mathcal{Z}(k[X_1, \ldots, X_n]) = \varnothing$.

2. Se $S_1, S_2 \subset k[X_1, ..., X_n]$ e $S_1 \subset S_2$, então $\mathcal{Z}(S_2) \subset \mathcal{Z}(S_1)$.

3. Dada uma coleção $\{S_\lambda\} \subset k[X_1, \ldots, X_n]$, tem-se $\cap_\lambda \mathcal{Z}(S_\lambda) = \mathcal{Z}(\cup_\lambda S_\lambda)$.

4. Se $S_1, S_2 \subset k[X_1, \ldots, X_n]$ e $S_1.S_2 := \{F_1.F_2 : F_i \in S_i, i = 1, 2\}$, então

$$\mathcal{Z}(S_1.S_2) = \mathcal{Z}(S_1) \cup \mathcal{Z}(S_2).$$

Demonstração. Segue direto das definições. □

Exemplo 1. Se $F(X, Y) = Y^2 - X^2Y \in k[Y, Y]$, então o conjunto algébrico $\mathcal{Z}(F)$ é dado por

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}(F) &= \left\{(X,Y) \in \mathbb{A}^2; Y\left(Y - X^2\right) = 0\right\} \\ &= \left\{(X,Y) \in \mathbb{A}^2; Y = 0\right\} \cup \left\{(X,Y) \in \mathbb{A}^2; \left(Y - X^2\right) = 0\right\} \\ &= \mathcal{Z}(Y) \cup \mathcal{Z}\left(Y - X^2\right).\end{aligned}$$

Definição 2.4. Um conjunto algébrico $V \subset \mathbb{A}^n$ é dito redutível se $V = V_1 \cup V_2$, onde V_1, V_2 são conjuntos algébricos não vazios em $\mathbb{A}^n$ e $V_i \subsetneq V$, para $i = 1, 2$. Caso contrário, V é chamado irredutível.

Definição 2.5. Seja $V \subset \mathbb{A}^n$ um subconjunto. Definimos o ideal de V, denotado por $\mathcal{I}(V)$, como sendo o ideal

$$\mathcal{I}(V) = \{F \in k[X_1, \ldots, X_n]; F(p) = 0, \forall p \in V\}.$$

Proposição 2.1. Seja $V \subset \mathbb{A}^n$ um conjunto algébrico. Então V é irredutível, se e somente se, $\mathcal{I}(V)$ é ideal primo em $k[X_1, \ldots, X_n]$.

Demonstração. Ver [10], Cap.1, Prop 1. □

Teorema 2.2. *(Teorema dos Zeros de Hilbert) Sejam k um corpo algebricamente fechado e J um ideal em $k[X_1, \ldots, X_n]$. Então,*

$$\mathcal{I}(\mathcal{Z}(J)) = \sqrt{J}.$$

Demonstração. Ver [10], Cap.1, Seção 7. □

Exemplo 2. Se $F \in k[X_1, \ldots, X_n]$ é um polinômio irredutível, então $\langle F \rangle$ é um ideal primo e portanto $V = \mathcal{Z}(F) \subset \mathbb{A}^n$ é irredutível.

Definição 2.6. Dado um polinômio $F \in k[X_1, \ldots, X_n]$, chamamos o conjunto algébrico $\mathcal{Z}(F) := \mathcal{Z}(\{F\}) \subset \mathbb{A}^n$ de hipersuperfície. No caso $n = 2$, a hipersuperfície $\mathcal{Z}(F)$ é chamada de curva plana afim.

Definição 2.7. Um conjunto V algébrico e irredutível de $\mathbb{A}^n$ é chamado uma variedade afim.

2.2 FUNÇÕES RACIONAIS

Se $V \subset \mathbb{A}^n$ é uma variedade. O anel de coordenadas de V, definido por

$$K[V] := \frac{k[X_1, \ldots, X_n]}{\mathcal{I}(V)}$$

é um domínio de integridade, pois, pela Proposição 2.1, $\mathcal{I}(V)$ é um ideal primo.

Definição 2.8. Seja V uma variedade em $\mathbb{A}^n$. O corpo de frações do anel de coordenadas de V é chamado corpo das funções racionais em V e será denotado por $K(V)$, ou seja,

$$K(V) = \left\{ \frac{f}{g}; f, g \in K[V], g \neq 0 \right\}.$$

Definição 2.9. Uma função $\phi \in K(V)$ é dita regular em um ponto $p \in V$ se puder ser escrita na forma $\phi = \dfrac{f}{g}$, com $f, g \in K[V]$ e $g(p) \neq 0$.

2.3 VARIEDADES PROJETIVAS

Definição 2.10. O espaço projetivo de dimensão n sobre um corpo k é o conjunto

$$\mathbb{P}^n(k) = \frac{\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}}{\sim},$$

onde a relação de equivalência $\sim$ em $\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}$ é dada por:

$$(P_0, P_1, \ldots, P_n) \sim (Q_0, Q_1, \ldots, Q_n) \Leftrightarrow \exists\ \lambda \in k \setminus \{0\}\, ; Q_i = \lambda P_i, \forall\ i = 0, \ldots, n.$$

Um ponto $P \in \mathbb{P}^n(k)$, que é a classe de equivalência do ponto $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ de $\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}$, será denotado por $(X_0 : X_1 : \ldots : X_n)$. Se um ponto $P \in \mathbb{P}^n(k)$ é a classe de equivalência de $(X_0, X_1, \ldots, X_n) \in \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}$, dizemos que $X_0, X_1, \ldots, X_n$ são as coordenadas homogêneas do ponto $(X_0 : X_1 : \cdots : X_n)$. Assim,

$$\mathbb{P}^n(k) = \left\{ (X_0 : \cdots : X_n); (X_0, X_1, \ldots, X_n) \in \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\} \right\}.$$

Quando o corpo k estiver fixado, denotaremos $\mathbb{P}^n(k)$ por $\mathbb{P}^n$.

Para cada $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, definimos o conjunto de $U_i \subset \mathbb{P}^n$ por:

$$U_i = \{(X_0 : \cdots : X_i : \cdots : X_n) \in \mathbb{P}^n; X_i \neq 0\}.$$

É fácil ver que as funções

$$\begin{array}{rccc} \varphi_i : & U_i & \longrightarrow & \mathbb{A}^n \\ & (X_0 : \cdots : X_i : \cdots : X_n) & \longmapsto & \left(\dfrac{X_0}{X_i}, \ldots, \dfrac{X_{i-1}}{X_i}, \dfrac{X_{i+1}}{X_i}, \ldots, \dfrac{X_n}{X_i} \right) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccc} \psi_i : & \mathbb{A}^n & \longrightarrow & U_i \\ & (X_0, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1} \cdots, X_n) & \longmapsto & (X_0 : \ldots : X_{i-1} : 1 : X_{i+1} : \ldots : X_n) \end{array}$$

são bijeções, uma inversa da outra. Por isso, escrevemos $U_i = \mathbb{A}^n_i \simeq \mathbb{A}^n$ e chamamos os ponto de U_i de pontos finitos. Os pontos pertencentes ao conjunto

$$\mathbb{L}_\infty := \{(X_0 : X_1 : \cdots : X_n) \in \mathbb{P}^n; X_i = 0\}$$

são chamados pontos no infinito do aberto U_i.

Podemos então escrever, para cada $i = 0, \ldots, n$, o espaço projetivo de dimensão n como a união disjunta de dois conjuntos, ou seja,

$$\mathbb{P}^n = U_i \cup \mathbb{L}_\infty,$$

ou ainda,

$$\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=1}^{n} U_i.$$

Definição 2.11. Seja $F \in k[X_0, X_1, \ldots, X_n]$. Dizemos que $p = (X_0 : X_1 : \cdots : X_n) \in \mathbb{P}^n$ é zero do polinômio F, e escrevemos por $F(p) = 0$, se F se anula em qualquer escolha de coordenadas homogêneas de p, isto é, se

$$F(\lambda X_0, \lambda X_1, \ldots, \lambda X_n) = 0,\ \forall \lambda \in k \backslash \{0\}.$$

Definição 2.12. Um polinômio $F \in k[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ não nulo é chamado um polinômio homogêneo de grau d, se

$$F(\lambda X_0, \lambda X_1, \ldots, \lambda X_n) = \lambda^d F(X_0, X_1, \ldots, X_n), \forall\ \lambda \in k \backslash \{0\}. \tag{2.1}$$

Observação 1. Todo polinômio $F \in k[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ de grau r se escreve na forma

$$F = F^0 + F^1 + \cdots + F^r,$$

onde cada F^i é a soma de todos os monômios de grau i de F, para todo $i = 0, 1, \ldots, r$. Os polinômios $F^0, F^1, \ldots, F^r$ são chamados componentes homogêneas de F. Além disso, $F(\lambda X_0, \lambda X_1, \ldots, \lambda X_n) = F^0(X_0, X_1, \ldots, X_n) + \lambda F^1(X_0, X_1, \ldots, X_n) + \cdots + \lambda^r F^r(X_0, X_1, \ldots, X_n)$, para todo $\lambda \in k \backslash \{0\}$.

Para um corpo k infinito, temos $F(\lambda X_0, \lambda X_1, \ldots, \lambda X_n) = 0$, para todo $\lambda \in k \backslash \{0\}$, se e somente se, $F^i(X_0, X_1, \ldots, X_n) = 0$, para todo $i = 0, 1, \ldots, r$. Nesse caso, se um polinômio F se anula em um ponto $p \in \mathbb{P}^n(k)$, então todas as suas componentes homogêneas se anulam nesse ponto.

Definição 2.13. Seja $S \subset k[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ um subconjunto. O conjunto de zeros de S, denotado por $\mathcal{Z}(S)$, é definido como sendo

$$\mathcal{Z}(S) = \{p \in \mathbb{P}^n; F(p) = 0, \forall F \in S\}.$$

Definição 2.14. Um subconjunto $V \subseteq \mathbb{P}^n$ é chamado um conjunto algébrico (projetivo) se $V = \mathcal{Z}(S)$ para algum subconjunto $S \subset k[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ formado por polinômios homogêneos.

Definição 2.15. Os conjuntos algébricos projetivos são também chamados fechados projetivos e os complementares dos fechados projetivos são chamados de abertos projetivos.

Definição 2.16. Os fechados projetivos definem em $\mathbb{P}^n(k)$ uma topologia chamada Topologia de Zariski.

Definição 2.17. Seja $F \in k[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ um polinômio homogêneo. O conjunto $\mathcal{Z}(F) := \mathcal{Z}(\{F\})$ é um fechado projetivo de $\mathbb{P}^n$, chamado de hipersuperfície. No caso $n = 2$, a hipersuperfície $\mathcal{Z}(F)$ é chamada de curva.

Se F é um polinômio sem componentes múltiplas, dizemos que C é uma curva reduzida.

Exemplo 3. Seja $F \in k[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ um polinômio homogêneo. O conjunto

$$U_F := \mathbb{P}^n - \mathcal{Z}(F)$$

é um aberto de $\mathbb{P}^n$, chamado um aberto principal.

Exemplo 4. Os conjuntos

$$U_i = \{(X_0 : X_1 : \cdots : X_n) \in \mathbb{P}^n; X_i \neq 0\},$$

para cada $i = 0, 1, \ldots, n$ são abertos principais de $\mathbb{P}^n$, já que $U_i = \mathbb{P}^n - \mathcal{Z}(X_i)$.

Definição 2.18. Um subconjunto de $\mathbb{P}^n$ que é a interseção de um aberto com um fechado projetivo é chamado quasiprojetivo.

Observação 2. Para qualquer fechado projetivo $X \subset \mathbb{P}^n$, o conjunto $X_i := X \cap \mathbb{A}^n_i$ é quasiprojetivo e é aberto em X (na topologia induzida).

Dado um fechado $V \subset \mathbb{A}^n \simeq U_0$, seja $\overline{V}$ a interseção de todos os fechados de $\mathbb{P}^n$ contendo V. Então, $\overline{V}$ é um fechado de $\mathbb{P}^n$, chamado fecho projetivo de V. Não é difícil ver que $\overline{V} = \mathcal{Z}(S)$, onde

$$S = \left\{ X_0^{\deg(F)} F\left(\frac{X_1}{X_0}, \ldots, \frac{X_n}{X_0}\right); F(X_1, \ldots, X_n) \in \mathcal{I}(V) \right\}.$$

Exemplo 5. Todo conjunto algébrico afim $V \subset \mathbb{A}^n$ é um conjunto quasiprojetivo já que $V = \overline{V} \cap U_0$, onde $\overline{V}$ é o fecho projetivo de V.

Definição 2.19. Sejam $X \subset \mathbb{P}^n$ e $Y \subset \mathbb{P}^m$ dois conjuntos quasiprojetivos. Uma função $\phi : X \to Y$ é um morfismo se, para cada $x \in X$, existirem polinômios $F_0, F_1, \ldots, F_m$ em $k[X_0, X_1, \ldots, X_n]$, homogêneos de mesmo grau, tais que

$$\phi(x) = (F_0(x) : F_1(x) : \cdots : F_m(x)).$$

Um morfismo bijetor cuja inversa é também um morfismo é chamado um isomorfismo.

Definição 2.20. Um conjunto quasiprojetivo que é isomorfo a um fechado afim é chamado *variedade afim*.

Exemplo 6. Os conjuntos $U_i = \{(X_0 : X_1 : \cdots : X_n) \in \mathbb{P}^n; X_i \neq 0\}$, para cada $i = 0, 1, \ldots, n$, são variedades afins.

2.4 ANEL LOCAL

Definição 2.21. Sejam $V \subset \mathbb{A}^n$ uma variedade afim e $p \in V$. Definimos o anel local de V no ponto p por

$$\mathcal{O}_p(V) := \left\{ \frac{f}{g} \in K(V); g(p) \neq 0 \right\}.$$

Logo, $\mathcal{O}_p(V)$ é o subanel de $K(V)$ das funções que são regulares em p. Além disso, $\mathcal{O}_p(V)$ é subanel de $K(V)$ contendo $K[V]$, ou seja,

$$k \subset K[V] \subset \mathcal{O}_p(V) \subset K(V).$$

Definição 2.22. Sejam A um anel comutativo, P um ideal primo e

$$A \times (A - P) = \{(f, g); f, g \in A \ e \ g \notin P\}$$

Definimos a localização de A em P como o anel

$$A_P = \{A \times (A - P)\} / \sim .$$

onde $(f, g) \sim (f', g')$ se existir $h \in A - P$, tal que $h(fg' - f'g) = 0$.

Segue da definição de localização que o anel local de V em um ponto $p \in V$, $\mathcal{O}_p(V)$, é a localização de $K[V]$ no ideal maximal $m_p = \{f \in K[V]; f(p) = 0\}$, ou seja,

$$\mathcal{O}_p(V) = K[V]_{m_p}.$$

2.5 MATRIZ RESULTANTE

Nesta seção definimos a matriz resultante de dois polinômios usada para a determinação dos seus zeros comuns. Mais especificamente, dados dois polinômios $f(X, Y)$ e $g(X, Y)$, considerados como polinômios na variável Y e coeficientes no anel $k[X]$, tentamos encontrar os valores x de X para os quais $f(x, Y)$ e $g(x, Y)$ admitem raiz comum. Geometricamente, queremos encontrar as projeções, no eixo x, dos pontos de $f \cap g$. Este processo, típico da chamada teoria da eliminação, é baseado no estudo da resultante de dois polinômios.

Definição 2.23. Sejam A um anel comutativo (por exemplo, $A = k[X_1, \ldots, X_n]$) e

$$f = a_d Y^d + \cdots + a_0 \quad \text{e} \quad g = b_e Y^e + \cdots + b_0 \in A[Y], \text{ com } d, e \geq 1.$$

A resultante de f, g é definida por

$$R = R_{f,g} = \det \begin{bmatrix} a_d & a_{d-1} & \cdots & \cdots & a_0 & & & \\ & a_d & a_{d-1} & \cdots & \cdots & a_1 & a_0 & \\ & & & & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & a_d & \cdots & \cdots & a_0 \\ b_e & \cdots & \cdots & \cdots & b_0 & & & \\ & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & & & b_e & \cdots & b_0 \end{bmatrix},$$

ou seja, R é o determinante da matriz $(d+e) \times (d+e)$, com e linhas de $a's$ e d linhas de $b's$, cujos espaços em branco são preenchidos com zero.

Na definição, os polinômios f e g são considerados formalmente de graus d e e, respectivamente, embora a_d, b_e possam ser nulos. Quando não explicitados, convencionamos atribuir aos polinômios o grau efetivo, isto é, o maior grau em que Y ocorre efetivamente.

Exemplo 7. Sejam $f = Y^2 + X^2 - 4$ e $g = XY - 1$. Então,

$$R(X) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & X^2 - 4 \\ X & -1 & 0 \\ 0 & X & -1 \end{bmatrix} = X^4 - 4X^2 + 1.$$

Observe que se resolvermos o sistema

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 = 4 \\ XY = 1 \end{cases}$$

substituindo $Y = 1/X$ na primeira equação, teríamos

$$X^4 - 4X^2 + 1 = 0.$$

Ou seja, os pontos de interseção da circunferência com a hipérbole tem como abscisas as soluções dessa última equação obtida pela resultante.

Lema 2.2. Sejam $f(Y) = a_d Y^d + \cdots + a_0$ e $g(Y) = b_e Y^e + \cdots + b_0$ polinômios com coeficientes em um domínio de fatoração única A. Então $R_{f,g} = 0$ se, e somente se, $a_d = b_e = 0$ ou f e g admitem um fator comum não constante.

Demonstração. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $a_d \neq 0$. Vamos mostrar que f, g admitem fator comum h, não constante, se e somente se existirem $p, q \in A[Y]$ não ambos nulos, tais que $\deg(p) \leq d - 1$, $\deg(q) \leq e - 1$ e

$$qf = pg. \tag{2.2}$$

Com efeito, se $f = ph$ e $g = qh$, com $p, q \in A[Y]$ não ambos nulos, $\deg(p) \leq d - 1$ e $\deg(q) \leq e - 1$, segue a relação (2.2). Reciprocamente, usando que $A[Y]$ também é fatorial, a relação (2.2) implica que existe um fator irredutível de f que também é um fator de g, pois $\deg(f) > \deg(p)$. Escrevendo

$$p(Y) = u_0 Y^{d-1} + \cdots + u_{d-1} \ e \ q(Y) = v_0 Y^{e-1} + \cdots + v_{e-1},$$

a equação (2.2) é equivalente ao sistema linear, obtido comparando coeficientes, dado por:

$$\sum_{j=0}^{e-1} a_{d-i-j} v_j = \sum_{h=0}^{d-1} b_{e-i-h} u_h, \ \ i = 0, \ldots, d+e-1,$$

onde convencionamos que $a_m = b_n = 0$, se $m, n < 0$, ou $m < d$ ou $n > e$. Como se trata de um sistema linear homogêneo nas variáveis $u_0, \ldots, u_{d-1}, v_0, \ldots, v_{e-1}$, existe solução não trivial se, e somente se, o determinante da matriz dos coeficientes, que é igual a $R_{f,g}$, é nulo. $\square$

Proposição 2.3. Sejam

$$f = a_d(X)Y^d + \cdots + a_0(X) \ e \ g = b_e(X)y^e + \cdots + b_0(X),$$

onde a_i, b_j são polinômios nas variáveis $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Então, para cada $x = (x_1, \ldots, x_n)$, temos $R(x) = 0$ se e somente se $a_d(x) = b_e(x) = 0$ ou $f(x, Y)$, $g(x, Y)$ admitem raiz comum.

Demonstração. Para cada x, a resultante de $f(x, Y)$ e $g(x, Y)$ é $R(x)$. Por outro lado, $f(x, y)$ e $g(x, y)$ admitem uma raiz y em comum se e somente se admitirem um fator não constante $Y - y$. Portanto, o resultado segue do Lema 2.2. $\square$

Quanto ao problema da interseção de duas curvas f e g, observemos que $R_{f,g}$ é identicamente nulo se e somente se f e g admitirem componentes em comum, caso em que $f \cap g$ não é finito. Quando a interseção é finita, podemos estimar o número de pontos contando o número de abscissas, que é limitado pelo grau da resultante $R(x)$, mas essa cota não é muito boa, pois podem ocorrer vários pontos de interseção com a mesma abscissa.

3 DERIVAÇÕES E ESPAÇO TANGENTE

Neste capítulo apresentaremos a relação entre derivações e vetores tangentes a uma variedade algébrica afim. As definições e os resultados apresentados aqui podem ser encontrados em [22] e [23].

3.1 DERIVAÇÕES

Definição 3.1. Sejam R um anel comutativo, A uma R-álgebra comutativa e M um A-módulo. Uma R-derivação de A em M é uma aplicação R-linear $D : A \to M$ tal que $D(ab) = aD(b) + bD(a)$, para quaisquer $a, b \in A$.

Propriedades das R-derivações:

(P1) $D(1) = 0$. De fato, temos

$$D(1) = D(1.1) = 1D(1) + 1D(1) = D(1) + D(1) \Rightarrow D(1) = 0.$$

(P2) $D(r) = 0$ para todo $r \in R$. Com efeito,

$$D(r) = D(1.r) = rD(1) = r.0 = 0.$$

Exemplo 8. Um exemplo canônico de k-derivação é a derivação parcial. Considere o anel de polinômios em n variáveis, $k[X_1, \ldots, X_n]$, como k-álgebra via inclusão $k \hookrightarrow k[X_1, \ldots, X_n]$. A derivada parcial em relação a qualquer variável X_i é uma k-derivação, geralmente denotada por $\dfrac{\partial}{\partial X_i}$, ∂_{X_i} ou ∂_i.

O conjunto das R-derivações de A em M, denotado por $\mathrm{Der}_R(A, M)$, ou seja,

$$\mathrm{Der}_R(A, M) = \{D : A \to M; D \text{ é } R\text{-derivação}\},$$

tem estrutura de $A-$módulo se definirmos, para todo $b \in A$ e $D, D' \in \mathrm{Der}_R(A, M)$:

$$\begin{aligned} D + D' : A &\longrightarrow M \\ a &\longmapsto D(a) + D'(a) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} bD : A &\longrightarrow M \\ a &\longmapsto bD(a). \end{aligned}$$

Lema 3.1. Sejam $\varphi : A \to B$ um homomorfismo de R-álgebras e $D \in \mathrm{Der}_R(B, N)$, então $D \circ \varphi \in \mathrm{Der}_R(A, N)$.

Demonstração. Dados $r \in R$ e $a, b \in A$ temos

$$(D \circ \varphi)(ra+b) = D(\varphi(ra+b)) = D(r\varphi(a) + \varphi(b)) = rD(\varphi(a)) + D(\varphi(b)) = \\ = r(D \circ \varphi)(a) + (D \circ \varphi)(b).$$

Logo $D \circ \varphi$ é R- linear. Além disso,

$$D \circ \varphi(ab) = D(\varphi(ab)) = D(\varphi(a)\varphi(b)) = \varphi(a)D(\varphi(b)) + \varphi(b)D(\varphi(a)) = \\ = a(D \circ \varphi)(b) + b(D \circ \varphi)(a).$$

$\square$

Proposição 3.1. Seja $\varphi : A \to B$ um homomorfismo de R-álgebras e N um B-módulo (portanto, um A-módulo também). A aplicação $\phi : \mathrm{Der}_R(B, N) \to \mathrm{Der}_R(A, N)$, definida por $\phi(D) = D \circ \varphi$, é um homomorfismo de A-módulos cujo núcleo é $\mathrm{Der}_A(B, N)$.

Demonstração. Para $D, D' \in \mathrm{Der}_R(B, N)$ e $a \in A$, temos:

$$\phi(D + D') = (D + D') \circ \varphi = D \circ \varphi + D' \circ \varphi = \phi(D) + \phi(D'),$$

$$\phi(aD) = (aD) \circ \varphi = a(D \circ \varphi) = a\phi(D).$$

Logo, ϕ é homomorfismo de A-módulos.

Seja $D \in \ker(\phi)$. Então, $\phi(D)(a) = D(\phi(a)) = 0$, $\forall a \in A$. Desta forma, para cada $b \in B$ e $a \in A$, como $ab := \varphi(a)b$, temos

$$D(ab) = D(\varphi(a)b) = \varphi(a)D(b) + bD(\varphi(a)) = \varphi(a)D(b) = aD(b).$$

Portanto, $D \in \mathrm{Der}_A(B, N)$ e $\ker(\phi) \subseteq \mathrm{Der}_A(B, N)$. Por outro lado, se $D \in \mathrm{Der}_A(B, N)$ temos $D(\varphi(a)) = D(a.1_B) = aD(1_B) = 0$, para todo $a \in A$, isto é, $\phi(D) = D \circ \varphi = 0$ e $D \in \ker(\phi)$. $\square$

3.2 ESPAÇO TANGENTE

Sejam $V \subset \mathbb{A}^n = \mathbb{A}^n(k)$ um conjunto algébrico afim, $\mathcal{I} = \mathcal{I}(V)$ o ideal de V e $p \in V$. Como pode ser visto em [10], Seção 1.4, $k[X_1, \ldots, X_n]$ é um anel Noetheriano , então $\mathcal{I}(V)$ é finitamente gerado. Suponhamos $\mathcal{I} = \mathcal{I}(V) = \langle F_1, F_2, \ldots, F_s \rangle$. Seja $\ell \subset \mathbb{A}^n$ uma reta passando por p com vetor diretor $v = (v_1, \ldots, v_n)$, isto é, $\ell = \{p + tv;\ t \in k\}$. Então,

$$\ell \cap V = \{p + tv;\ F_i(p + tv) = 0, \forall\ i = 1, \ldots, s\}.$$

Seja $\partial_i : k[X_1, \ldots, X_n] \to k[X_1, \ldots, X_n]$ a derivação parcial em relação a X_i. A expansão em série de Taylor de F_j em p, $j = 1, \ldots, s$, é

$$F_j(p + tv) = F_j(p) + \sum_{i=1}^{n} \partial_i F_j(p) t v_i + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 F_j}{\partial X_i \partial X_k}(p) t^2 v_i v_k + \cdots$$

Como $F_j(p) = 0$, temos

$$F_j(p + tv) = t\sum_{i=1}^{n} \partial_i F_j(p)v_i + t^2(\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 F_j}{\partial X_i \partial X_k}(p)v_i v_k) + \cdots .$$

Quando $t = 0$ for uma raiz múltipla das equações $F_j(p+tv) = 0$, para $j \in \{1, \ldots, s\}$, isto é, quando

$$\sum_{i=1}^{n} \partial_i F_j(p)v_i = 0, \forall\ j = 1, \ldots, s, \tag{3.1}$$

dizemos que ℓ é tangente a V em p e que v é um vetor tangente a V em p.

Definição 3.2. Seja V um conjunto algébrico afim em $\mathbb{A}^n$. O espaço tangente a V em um ponto p, denotado por T_pV, é o espaço vetorial definido por

$$T_pV := \{v \in \mathbb{A}^n \setminus \{0\}|\ v \text{ é vetor tangente à } V \text{ em } p\} \cup \{0\}.$$

Veremos a seguir que o espaço tangente a V em p está em bijeção com os pontos de uma variedade algébrica em $\mathbb{A}^n$. Para isto, seja T'_pV a coleção dos pontos $q \in \mathbb{A}^n$ que pertencem a alguma reta tangente a V em $p = (p_1, \ldots, p_n)$, ou seja,

$$T'_pV = \mathcal{Z}\left(\sum_{i=1}^{n} \partial_i F_1(p) \cdot (X_i - p_i), \ldots, \sum_{i=1}^{n} \partial_i F_s(p) \cdot (X_i - p_i)\right).$$

Dado $q \in T'_pV$, sejam $v_j = q_j - p_j$, para $j = 1, \ldots, n$, e $v = (v_1, \ldots, v_n)$. Então, $v = q - p$ satisfaz o sistema de equações (3.1), ou seja, $v \in T_pV$.

Reciprocamente, dado um vetor $\omega \in T_pV$, seja $q = p + \omega$. Então, q pertence a uma reta tangente a V em p, isto é, $q \in T'_pV$.

Logo, a função $T'_pV \to T_pV$ definida por $q \mapsto v = q - p$ é uma bijeção e usando-a, vamos identificar T'_pV com T_pV.

Exemplo 9. Seja k um corpo infinito. Como $\mathcal{I}(\mathbb{A}^n) = \langle 0 \rangle$, o espaço tangente a $\mathbb{A}^n$ em qualquer ponto p é o próprio $\mathbb{A}^n$.

Exemplo 10. O espaço tangente à curva plana $Y(Y - X^2) = 0$ em $(0, 0)$ é todo $\mathbb{A}^2$, mas as suas componentes irredutíveis $\mathcal{Z}(Y)$ e $\mathcal{Z}(Y - X^2)$ tem a mesma tangente $Y = 0$ em $(0, 0)$.

No que segue, vamos estabelecer uma relação entre espaço tangente e derivações.

Lema 3.2. Dado $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{A}^n$, a aplicação $D_v : k[X_1, \ldots, X_n] \to k[X_1, \ldots, X_n]$, dada por $D_v = \sum_{i=1}^{n} v_i \partial_i$ é uma k-derivação.

Demonstração. Sejam $a \in k$ e $F, G \in k[X_1, \ldots, X_n]$. Temos que

$$D_v(aF + G) = \sum_{i=1}^{n} v_i \partial_i (aF + G) = \sum_{i=1}^{n} [\, a v_i \partial_i(F) + v_i \partial_i(G)] =$$
$$= a \sum_{i=1}^{n} v_i \partial_i(F) + \sum_{i=1}^{n} v_i \partial_i(G) = aD_v(F) + D_v(G).$$

Portanto, D_v é k-linear. Além disso,

$$D_v(FG) = \sum_{i=1}^{n} v_i \partial_i (FG) = \sum_{i=1}^{n} v_i \left[F \partial_i(G) + G \partial_i(F)\right] =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} F v_i \partial_i(G) + \sum_{i=1}^{n} G v_i \partial_i(F) = FD_v(G) + GD_v(F).$$

Logo, D_v é k-derivação. $\square$

Fixado um ponto p em um conjunto algébrico afim V, definiremos em k uma estrutura de $k[V]$-módulo. Para isso, observamos que

$$k[V] = \frac{K[X_1, \ldots, X_n]}{\mathcal{I}(V)} = k[x_1, \ldots, x_n],$$

onde x_i é a classe de X_i em $k[V]$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Dado $f(x_1, \ldots, x_n) \in k[V]$, isto é,

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \overline{F(X_1, \ldots, X_n)} \text{ onde } F \in k[X_1, \ldots, X_n],$$

e $a \in k$, defina $f(x_1, \ldots x_n).a := F(p)a$. Esta operação está bem definida pois, $f = g$ em $k[V]$ implica $f - g \in \mathcal{I}(V)$ e, portanto, $f(p) - g(p) = 0$. O corpo k com esta estrutura de $k[V]$-módulo será denotado por k_p.

Proposição 3.2. Sejam v um vetor tangente à V em p e $D_v = \sum v_j \partial_j$ como definido no Lema 3.2. A aplicação $D : k[V] \to k_p$ definida por $D(f) = D_v(F)(p)$, onde $f = \overline{F(X_1, \ldots, X_n)}$ com $F \in k[X_1, \ldots, X_n]$, é uma k-derivação.

Demonstração. Vejamos que D está bem definida. Se $f = \bar{F}$, $g = \bar{G}$, então $F - G \in \mathcal{I}(V)$. Como v é um vetor tangente a V em p, $\sum v_j \partial_j (F - G)(p) = 0$, donde concluímos que $\sum v_j \partial_j(F)(p) = \sum v_j \partial_j(G)(p)$. Além disso, D é claramente k-linear e

$$D(fg) = D_v(FG)(p) = \left[FD_v(G)\right](p) + \left[GD_v(F)\right](p) =$$
$$= F(p)D_v(G)(p) + G(p)D_v(F)(p) = fD(g) + gD(f),$$

o que mostra que D é k-derivação. $\square$

Para mostrarmos que toda k-derivação de $k[V]$ em k_p pode ser dada como na Proposição 3.2, vamos precisar do resultado seguinte.

Lema 3.3. Seja B um $k[X_1, \ldots, X_n]$-módulo. Se $D : k[X_1, \ldots, X_n] \to B$ é uma k-derivação, então $D(F) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i)\partial_i(F)$.

Demonstração. Sendo $F(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{\alpha} a_\alpha X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n}$, temos $D(F) = \sum_{\alpha} a_\alpha D(X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n})$. Usando indução em n, conseguimos

$$D(X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n}) = D(X_1^{\alpha_1})X_2^{\alpha_2} \ldots X_n^{\alpha_n} + \cdots + X_1^{\alpha_1} \ldots X_{n-1}^{\alpha_{n-1}} D(X_n^{\alpha_n}).$$

Como $D(X_i^{\alpha_i}) = \alpha_i X_i^{\alpha_i - 1} D(X_i)$,

$$D(F) = \sum_{\alpha} a_\alpha D\left(X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n}\right) = \sum_{i,\alpha} a_\alpha \alpha_i X_1^{\alpha_1} \ldots X_i^{\alpha_i - 1} \ldots X_n^{\alpha_n} D\left(X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i(F) D\left(X_i\right).$$

□

A proposição seguinte mostra que todo elemento de $\mathrm{Der}_k(k[V], k_p)$ pode ser obtido a partir de um vetor tangente a V em p.

Proposição 3.3. Seja $D \in \mathrm{Der}_k(k[V], k_p)$. Existe um vetor tangente $v \in T_pV$ tal que $D(f) = D_v(f)(p)$, para todo $f \in k[V]$.

Demonstração. Consideremos a k-derivação $\tilde{D} = D \circ \pi : k[X_1, \ldots, X_n] \to k_p$, onde o homomorfismo $\pi : k[X_1, \ldots, X_n] \to k[V]$ é a projeção canônica $\pi(F) = \overline{F}$. Sejam $v_i = \tilde{D}(X_i)$ e $v = (v_1, \ldots, v_n)$. Para toda $F \in \mathcal{I}(V) \subset k[X_1, \ldots, X_n]$, temos

$$\tilde{D}(F) = D(\overline{F}) = D(\overline{0}) = 0 \Rightarrow$$

$$\tilde{D}(F) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{D}\left(X_i\right) \partial_i(F)(p) = \sum_{i=1}^{n} v_i \partial_i(F)(p) = 0,$$

onde a primeira igualdade da última equação segue do Lema 3.3. Portanto, v é tangente a V em p. Além disso, para toda $F \in k[X_1, \ldots, X_n]$, usando novamente o Lema 3.3, temos

$$D_v(\bar{F})(p) = \sum_{i=1}^{n} v_i \partial_i(F)(p) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{D}\left(X_i\right) \partial_i(F)(p) = \tilde{D}(F) = D(\overline{F}).$$

□

As Proposições 3.2 e 3.3 implicam que existe uma bijeção entre o conjunto de vetores tangentes a V em p e o conjunto das k-derivações $\mathrm{Der}_k(k[V], k_p)$, a saber,

$$\begin{aligned} \psi : T_pV &\to \mathrm{Der}_k\left(k[V], k_p\right) \\ v &\mapsto D, \end{aligned} \tag{3.2}$$

onde $\psi(v) := D$; $\psi(v)(\bar{f}) = D_v(f)(p)$. Mais ainda, para quaisquer $a \in k$ e $v, w \in T_pV$ vale que

$$D_{av+w} = \sum_{i=1}^{n} \left(av_i + w_i\right) \partial_i = a \sum_{i=1}^{n} v_i \partial_i + \sum_{i=1}^{n} w_i \partial_i = aD_v + D_w.$$

Portanto, $\psi(av+w) = D_{av+w} = aD_v + D_w = a\psi(v) + \psi(w)$ e ψ é um isomorfismo entre os espaços vetoriais T_pV e $\mathrm{Der}_k(k[V], k_p)$. Esse isomorfismo ψ nos dá a seguinte definição alternativa de espaço tangente:

Definição 3.3. Sejam V um conjunto algébrico afim e $p \in V$. Definimos T_pV, o espaço tangente a V em p,como sendo k-espaço vetorial dado por

$$T_pV := \mathrm{Der}_k(k[V], k_p).$$

Exemplo 11. Para todo $p \in \mathbb{A}^n$, o espaço vetorial $T_p\mathbb{A}^n$ tem como base o conjunto

$$\beta := \left\{ \left.\frac{\partial}{\partial X_1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial X_n}\right|_p \right\},$$

onde $\left.\frac{\partial}{\partial X_i}\right|_p (f) := \frac{\partial f}{\partial X_i}(p)$. De fato, pela Proposição 3.3, temos que para toda derivação $D \in \mathrm{Der}_k(k[X_1, \ldots, X_n], k_p)$ existe um vetor $v = (v_1, \ldots, v_n) \in T_pV$ tal que

$$D(f) = D_v(f)(p) = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial X_i}(p).$$

Logo β gera $T_p\mathbb{A}^n$. Além disso, se existirem $a_1, \ldots, a_n \in k$ tais que $\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial f}{\partial X_i}(p) = 0$ para toda $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$, então $\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial X_j}{\partial X_i}(p) = a_j = 0$, para todo $j = 1, \ldots, n$. Logo, β é LI.

Definição 3.4. Seja $\Phi : V \to W$ um morfismo entre variedades algébricas afins e $p \in V$. Existem um correspondente homomorfismo de anéis entre $\Phi^* : k[W] \to k[V]$ e um homomorfismo induzido $d_p\Phi : \mathrm{Der}_k(k[V], k_p) \to \mathrm{Der}_k(k[W], k_{\Phi(p)})$, que é uma k-transformação linear, dado por $d_p\Phi(D) = D \circ \Phi^*$. Chamamos $d_p\Phi$ de diferencial de Φ em p.

$$\begin{tikzcd}
k[W] \arrow[rr, "\Phi^*"] \arrow[dr, "D\circ\Phi^*"'] & & k[V] \arrow[dl, "D"] \\
& k_q \simeq k_p &
\end{tikzcd}$$

Note que $d_p(\Phi \circ \Psi) = d_{\Psi(p)}\Phi \circ d_p\Psi$ e que $d_p\Psi$ é um isomorfismo se Ψ o for.

Proposição 3.4. Sejam V um conjunto algébrico em $\mathbb{A}^n$, $F \in k[X_1, \ldots, X_n]$ e V_F o aberto de V definido por $V_F := \{x \in V | F(x) \neq 0\}$. O conjunto V_F é uma variedade afim e T_pV é isomorfo a $T_p(V_F)$.

Demonstração. Consideremos $F_1(X_1,\ldots,X_n,T) = 1-TF(X_1,\ldots,X_n) \in k[X_1,\ldots,X_n,T]$ e $W := \{(x,t) \in V \times k, F_1(x,t) = 0\} \subset \mathbb{A}^{n+1}$. Então,

$$\begin{aligned} \Phi : V_F &\longrightarrow W \\ x &\longmapsto (x, 1/F(x)) \end{aligned}$$

é um isomorfismo e

$$k[V_F] \cong k[x_1,\ldots,x_n,t]/\langle 1 - tF(x_1,\ldots,x_n)\rangle \cong k[V][1/F].$$

Para todo elemento $D \in T_pV = \mathrm{Der}_k(k[V], k_p)$, a aplicação

$$\begin{aligned} D' : k\left[V_F\right] = k[V][1/F] &\longrightarrow \mathrm{k}_p \\ \frac{a}{F^m} &\longrightarrow \frac{F^m(p)D(a)(p) - mF^{m-1}(p)D(F)(p)a(p)}{\left(F^m\right)^2(p)} \end{aligned}$$

é uma k-derivação e a aplicação

$$\begin{aligned} \psi : T_pV &\longrightarrow T_p(V_F) \\ D &\longmapsto D' \end{aligned}$$

é um isomorfismo de k-espaços vetoriais. $\square$

Corolário 3.5. *Se U for um aberto afim de V contendo p, então $T_pU \simeq T_pV$.*

O Corolário 3.5 expressa o caráter local da definição de espaço tangente de uma variedade afim. Podemos então fazer a seguinte definição.

Definição 3.5. Seja V uma variedade afim ou projetiva. Definimos o espaço tangente a V em $p \in V$ denotado por T_pV, como sendo T_pU onde U é qualquer aberto afim de V contendo p.

3.3 1-FORMAS DIFERENCIAIS REGULARES

Sejam $V \subseteq \mathbb{A}^n$ um conjunto algébrico e $p \in V$. Se $v = (v_1,\ldots,v_n)$ é um vetor tangente a V em p e $F \in I(V)$, vimos que

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \partial_i(F)(p) = 0.$$

Então, para $\overline{F} = \overline{G}$ em $k[V]$, temos $F - G \in I(V)$ e

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \partial_i(F)(p) = \sum_{i=1}^{n} v_i \partial_i(G)(p).$$

Logo, podemos fazer a seguinte definição.

Definição 3.6. Dado $f = \overline{F} \in k[V]$, o funcional linear $d_pf : T_pV \to k$ definido por

$$d_pf(v) = \sum_{i=1}^{n} v_i \partial_i F(p)$$

é chamado de diferencial de f em p.

Fixado $f \in k[V]$, definimos a função $\varphi_f : V \to \bigcup_{p\in V} (T_pV)^*$ por $\varphi_f(p) = d_pf$. Denotaremos esta função por df.

Seja $x_i = \bar{X}_i \in k[V]$. Observemos que, para todo ponto $p \in V$ e todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, a aplicação $d_px_i : T_pV \to k$ é dada por $d_px_i(v) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j X_i(p) v_j = v_i$. Logo, para toda $f = \bar{F} \in k[V]$ e todo $v \in T_pV$,

$$d_pf(v) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i F(p) v_i = \sum_{i=1}^{n} \partial_i F(p) d_px_i(v).$$

Portanto, podemos escrever $d_pf = \sum_{i=1}^{n} \partial_i F(p) d_px_i$ e $df = \sum_{i=1}^{n} \partial_i F dx_i$.

Consideremos o conjunto $\Phi[V]$ consistindo de todas as funções que associam cada ponto $p \in V$ a um elemento em $(T_pV)^*$. Então, $df \in \Phi[V]$.

Com a operação usual de soma de funções, $\Phi[V]$ é um grupo abeliano. Além disso, definindo $(f\phi)(p) = F(p)\phi(p)$, para cada $f = \bar{F} \in k[V]$ e $\phi \in \Phi[V]$, $\Phi[V]$ é um $k[V]$-módulo.

Lema 3.4. A aplicação $d : k[V] \to \Phi[V]$, dada por $d(f) = df$ é uma k-derivação.

Demonstração. Sejam $f = \bar{F}, g = \bar{G} \in k[V]$ e $a \in k$. Então,

$$d(af + g) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i (aF + G) dx_i = a \sum_{i=1}^{n} \partial_i F dx_i + \sum_{i=1}^{n} \partial_i G dx_i = ad(f) + d(g).$$

Logo, d é uma função k-linear. Além disso, d é uma k-derivação pois

$$d(fg) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i (FG) dx_i = \sum_{i=1}^{n} (G\partial_i F + F\partial_i G) dx_i =$$

$$= G \sum_{i=1}^{n} \partial_i F dx_i + F \sum_{i=1}^{n} \partial_i G dx_i = gd(f) + fd(g).$$

□

Definição 3.7. Um elemento $\phi \in \Phi[V]$ é chamado uma forma diferencial regular em V se cada ponto $p \in V$ tem uma vizinhança afim U tal que a restrição de ϕ a U pertence ao $k[U]$-submódulo de $\Phi[V]$ gerado pelos elementos df com $f \in k[U]$.

Assim, ϕ é uma forma diferencial regular em V se, e somente se, para cada $p \in V$ a restrição de ϕ a uma vizinhança afim de p puder ser escrita na forma $\sum_{i=1}^{m} f_i dg_i$, com $f_i's, g_i's$ funções regulares nessas vizinhanças.

O conjunto das formas diferenciais regulares sobre V é um $k[V]$-módulo, que denotaremos por $\Omega[V]$.

Exemplo 12. Seja k um corpo de característica zero. Então, $\Omega[\mathbb{A}^n] = \bigoplus_{i=1}^{n} k[\mathbb{A}^n]dx_i$.

Para ver isso, sejam $p \in \mathbb{A}^n$ e $\left\{ \frac{\partial}{\partial X_1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial X_n}\Big|_p \right\}$ base de $T_p\mathbb{A}^n$. Como

$$d_p x_j \left(\frac{\partial}{\partial X_i}\bigg|_p \right) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ se } i \neq j, \end{cases}$$

segue que $d_p x_1, \ldots, d_p x_n$ é base para $(T_p\mathbb{A}^n)^*$ sobre k. Dada $\phi \in \Phi[\mathbb{A}^n]$, temos que $\phi(p) \in (T_p\mathbb{A}^n)^*$, ou seja, $\phi(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i d_p x_i$ com $a_i \in k$. Portanto, podemos escrever de maneira única $\phi = \sum_{i=1}^{n} \psi_i dx_i$, onde $\psi_i : V \to k$ é uma função definida por $\psi_i(p) = a_i$.

Se $\phi \in \Omega[\mathbb{A}^n]$, então $\phi = \sum_{j=1}^{l} g_j dh_j$ em uma vizinhança U de p, onde $g_j, h_j \in k[U]$. Para cada $j \in \{1, \ldots, l\}$, existem polinômios P_j e Q_j tais que Q_j não se anula em U e $h_j = P_j/Q_j$. Pela regra de derivação do quociente, obtemos

$$dh_j = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{Q_j}\frac{\partial P_j}{\partial X_i} - \frac{P_j}{Q_j^2}\frac{\partial Q_j}{\partial X_i} \right) dX_i. \tag{3.3}$$

Substituindo (3.3) na expressão de ϕ, podemos escrever $\phi = \sum_{i=1}^{n} f_i dx_i$ onde as f_i são funções regulares em p. Pela unicidade da expressão de ϕ conseguimos $\psi_i = f_i$, isto é, as ψ_i são regulares em p, para todo $p \in \mathbb{A}^n$, ou seja, $\psi_i \in k[\mathbb{A}^n] = k[X_1, \ldots, X_n]$.

Definição 3.8. Chamaremos uma forma diferencial regular em $\mathbb{A}^n$ de uma 1-forma polinomial em $\mathbb{A}^n$. Pelo exemplo anterior, uma 1-forma polinomial em $\mathbb{A}^n$ é dada por

$$\omega = a_1 dx_1 + \cdots + a_n dx_n$$

onde $a_1, \ldots, a_n \in k[X_1, \ldots, X_n]$. Quando $a_1, \ldots, a_n$, não nulos, são todos homogêneos de mesmo grau s, dizemos que ω é uma 1-forma homogênea de grau s.

Definição 3.9. Diremos que um ponto $p \in \mathbb{A}^n$ é uma singularidade de ω quando $a_i(p) = 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Observação 3. Por definição, um vetor v é tangente a $V = \mathcal{Z}(F)$ no ponto $p \in V$ se e somente se $\sum_{i=1}^{n} \partial i F(p) v_i = 0$, ou seja, se e somente se $d_p F(v) = 0$. Daí, segue que $T_p V = \ker(d_p F)$.

3.4 O PRODUTO EXTERIOR DE 1-FORMAS

Sejam $T_1, T_2 : \mathbb{A}^n \to k$ dois funcionais lineares. O produto exterior de T_1 e T_2, denotado por $T_1 \wedge T_2$, é a aplicação bilinear dada por

$$(T_1 \wedge T_2)(u, v) = \det \begin{bmatrix} T_1(u) & T_2(u) \\ T_1(v) & T_2(v) \end{bmatrix} = T_1(u)T_2(v) - T_1(v)T_2(u).$$

Decorrem imediatamente das propriedades de determinantes que:

(1) $T_1 \wedge (aT_2 + T_3) = a(T_1 \wedge T_2) + (T_1 \wedge T_3)$.

(2) $T_2 \wedge T_1 = -T_1 \wedge T_2$.

(3) $T_i \wedge T_i = 0$, para $i = 1, 2$.

Proposição 3.6. Sejam $T_1 : \mathbb{A}^n \to k$ e $T_2 : \mathbb{A}^n \to k$ funcionais lineares não nulos. São equivalentes:

(1) $\ker(T_1) = \ker(T_2)$.

(2) T_1 e T_2 são múltiplos, isto é, existe $\lambda \in k \backslash \{0\}$, tal que $T_1 = \lambda T_2$.

(3) $T_1 \wedge T_2 = 0$.

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2) Seja $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ uma base para $\ker(T_1) = \ker(T_2)$ e $v_n \notin \ker(T_i)$. Então, $\{v_1, \cdots, v_{n-1}, v_n\}$ é base de $\mathbb{A}^n$. Dado $\omega \in \mathbb{A}^n$, temos $\omega = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$, $T_i(\omega) = a_nT_i(v_n)$ e

$$a_n = \frac{T_1(\omega)}{T_1(v_n)} = \frac{T_2(\omega)}{T_2(v_n)}.$$

Logo, $T_1 = \lambda T_2$, onde $\lambda = T_1(v_n)/T_2(v_n)$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Óbvio.

(3) $\Rightarrow$ (1) Sejam $u \in \ker(T_1)$ e $v \notin \ker(T_1)$. Sendo $(T_1 \wedge T_2)(u, v) = 0$, temos que $T_1(u)T_2(v) - T_1(v)T_2(u) = 0$, o que implica em $T_1(v)T_2(u) = 0$. Como $T_1(v) \neq 0$ segue que $T_2(u) = 0$. Logo, $\ker(T_1) \subseteq \ker(T_2)$. De forma análoga, mostramos a inclusão contrária e, portanto, a igualdade. □

Definição 3.10. Dadas duas 1-formas ω_1, ω_2 em $\mathbb{P}^2$, o produto exterior de ω_1 com ω_2, chamado uma 2-forma em $\mathbb{P}^2$, é a aplicação bilinear $\omega_1 \wedge \omega_2$ definida por

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(p) = \omega_1(p) \wedge \omega_2(p), \text{ para todo } p \in T_p\mathbb{P}^2.$$

4 FOLHEAÇÕES EM $\mathbb{P}^2$

Neste capítulo, apresentaremos as definições de folheações algébricas e campos de vetores, bem como a relação entre elas. Ambas são os objetos principais deste trabalho.

4.1 CAMPOS VETORIAIS EM $\mathbb{P}^2$

Considere $\mathbb{P}^2$, o plano projetivo sobre $k = \mathbb{C}$, com coordenadas homogêneas $(X : Y : Z)$ e, para todo ponto $p = (X : Y : Z) \in U_0$, sejam $(y, z) \in \mathbb{C}^2$ as coordenadas locais de p em U_0, isto é, $y = Y/X$ e $z = Z/X$. Denotaremos por (x, z) as coordenadas locais de pontos p em U_1, onde $x = X/Y$ e $z = Z/Y$, e por (x, y) as coordenadas locais em U_2, onde $x = X/Z$ e $y = Y/Z$ se $p \in U_2$.

Ao longo deste capítulo, denotaremos por p um ponto em U_i e também por p suas coordenadas locais. Assim, diremos que se $p \in U_i$ anula um polinômio homogêneo F nas variáveis X, Y, Z, então "p anula f", onde f é a desomogeneização de F com respeito a X, Y ou Z.

Definição 4.1. Um campo de vetores em uma variedade V é uma função $\mathcal{X}(p)$ que associa cada ponto $p \in V$ a um vetor tangente $\mathcal{X}(p) \in T_pV$.

O exemplo a seguir descreve o espaço tangente a $\mathbb{P}^2$ em um ponto p.

Exemplo 13. O espaço projetivo $\mathbb{P}^2$ é coberto pelos abertos afins $\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=0}^{2} U_i$, onde $U_0 = \{(X : Y : Z);\ X \neq 0\}$, $U_1 = \{(X : Y : Z);\ Y \neq 0\}$ e $U_2 = \{(X : Y : Z);\ Z \neq 0\}$. Se $p \in U_0$, então $T_p\mathbb{P}^2 = T_pU_0 \simeq T_p\mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{C}^2$ e, como vimos no capítulo anterior,

$$T_p\mathbb{P}^2 = \mathrm{Der}_k\left(k[y, z], k_p\right) = \left\langle \left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_p \right\rangle,$$

onde $y = Y/X$ e $z = Z/X$. A igualdade acima continua válida se $p \in U_1$ ou $p \in U_2$, fazendo-se as alterações necessárias em y e z.

Segue do Exemplo 13 que um campo de vetores $\mathcal{X}$ em $\mathbb{P}^2$ é dado localmente por um par de funções a e b nas coordenadas locais (y, z), isto é,

$$\mathcal{X}(p) = a(p)\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_p + b(p)\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_p.$$

Se a e b são polinômios, dizemos que $\mathcal{X}$ é um **campo de vetores polinomial**.

Os campos trabalhados daqui em diante serão polinomiais e escritos como

$$\mathcal{X} = a\frac{\partial}{\partial y} + b\frac{\partial}{\partial z}. \tag{4.1}$$

Note que a expressão (4.1) nos dá uma descrição do campo apenas em um dos abertos U_i, para $i \in \{0,1,2\}$. É natural então perguntarmos se é possível dar uma descrição global do campo $\mathcal{X}$. A resposta é sim e é o que faremos a seguir.

O plano projetivo $\mathbb{P}^2$ é construído identificando pontos de $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ que estão na mesma reta passando pela origem. Veremos então como certos campos em $\mathbb{C}^3$ definem campos em $\mathbb{P}^2$.

No que segue, é importante ter em mente que vetores tangentes a uma variedade V são identificados, como mostramos no Capítulo 2, com derivações no anel $k[V]$ de coordenadas de V. Então, para relacionarmos vetores tangentes a $\mathbb{C}^3$ em um ponto $p = (X,Y,Z) \neq (0,0,0)$ com vetores tangentes a $\mathbb{P}^2$ no ponto correspondente $p = (X:Y:Z)$ é preciso explicitar a relação entre o anel de coordenadas $k[X,Y,Z]$ de $\mathbb{C}^3$ e $k[U_i]$, o anel de coordenadas de $U_i \subset \mathbb{P}^2$, uma vizinhança afim de $p \in \mathbb{P}^2$.

Comecemos considerando o aberto $U = \mathbb{C}^3 \setminus \mathcal{Z}(X) = \{(X,Y,Z) \in \mathbb{C}^3; X \neq 0\}$,

$$\begin{array}{rccc} \phi: & U & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ & (X,Y,Z) & \longmapsto & \left(\frac{Y}{X}, \frac{Z}{X}\right) := (y,z) \end{array} \tag{4.2}$$

e ϕ^* o isomorfismo induzido por ϕ, definido por

$$\begin{aligned} \phi^* : k[\mathbb{C}^2] = \mathbb{C}[y,z] &\longrightarrow k[U] = \mathbb{C}[X,Y,Z][1/X] \\ f(y,z) &\longmapsto f\left(\frac{Y}{X}, \frac{Z}{X}\right). \end{aligned}$$

Então, para cada $p \in U$, existe a transformação linear

$$\begin{aligned} d_p\phi : T_p\mathbb{C}^3 \cong T_pU &\longrightarrow T_{\phi(p)}\mathbb{C}^2 \simeq T_{\phi(p)}U_0 = T_{\phi(p)}\mathbb{P}^2 \\ D &\longmapsto D \circ \phi^*. \end{aligned}$$

Vale a pena destacar que a aplicação $d_p\phi$ definida acima é a maneira natural de associar um vetor $D \in T_p\mathbb{C}^3$ a um vetor $D \circ \phi^* \in T_{\phi(p)}\mathbb{P}^2$.

$$\begin{tikzcd} k[\mathbb{C}^2] \arrow[rr, "\phi^*"] \arrow[dr, "D\circ\phi^*"'] & & k[U] \arrow[dl, "D"] \\ & k_p & \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} d_p\phi : T_p\mathbb{C}^3 &\longrightarrow T_{\phi(p)}\mathbb{P}^2 \\ D &\longmapsto D \circ \phi^*. \end{aligned}$$

Observação 4. Dado um polinômio $g \in k[y,z]$ de grau m, seja

$$A(X,Y,Z) = X^m g\left(\frac{Y}{X}, \frac{Z}{X}\right)$$

a homogeneização de g. Então, as derivações parciais $\partial/\partial Y$ e $\partial/\partial Z$ aplicadas a $A(X,Y,Z)$ estão relacionadas com as derivadas parciais de $g(y,z) \in k[y,z]$ da seguinte maneira:

$$\left.\frac{\partial A}{\partial Y}\right|_{(X,Y,Z)} = X^{m-1}\left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{\left(\frac{Y}{X},\frac{Z}{X}\right)} \quad \text{e} \quad \left.\frac{\partial A}{\partial Z}\right|_{(X,Y,Z)} = X^{m-1}\left.\frac{\partial g}{\partial z}\right|_{\left(\frac{Y}{X},\frac{Z}{X}\right)}.$$

De fato, se $g = \sum_{i,j} a_{ij} y^i z^j$, então $\frac{\partial g}{\partial y}(y,z) = \sum_{i,j} a_{ij} i y^{i-1} z^j$ e

$$X^{m-1}\frac{\partial g}{\partial y}\left(\frac{Y}{X},\frac{Z}{X}\right) = X^{m-1}\sum_{i,j} a_{ij} i \left(\frac{Y}{X}\right)^{i-1}\left(\frac{Z}{X}\right)^{j} = \sum_{i,j} a_{ij} i X^{m-i-j} Y^{i-1} Z^j, \tag{4.3}$$

como $A(X,Y,Z) = \sum_{i,j} a_{ij} i X^{m-i-j} Y^i Z^j$, segue que

$$\frac{\partial A}{\partial Y}(X,Y,Z) = \sum_{i,j} a_{ij} i X^{m-i-j} Y^{i-1} Z^j.$$

De maneira análoga, prova-se a segunda igualdade.

Exemplo 14. Neste exemplo veremos como um campo em $\mathbb{C}^3$ define um campo em U_0. Para isso, vamos descrever $d_p\phi$ explicitamente usando coordenadas nos espaços tangentes.

Denotemos por $\partial_X = \partial/\partial_X$, $\partial_Y = \partial/\partial_Y$ e $\partial_Z = \partial/\partial_Z$. Dado um vetor tangente

$$D = a_0 \partial_X\big|_p + a_1 \partial_Y\big|_p + a_2 \partial_Z\big|_p \in T_p\mathbb{C}^3;\ a_0, a_1, a_2 \in k,$$

seja $g(y,z) \in k[y,z]$ de grau m. Então,

$$\phi^*(g) = g\left(\frac{Y}{X},\frac{Z}{X}\right) = A(X,Y,Z)/X^m,$$

onde $A(X,Y,Z)$ é a homogeneização de g e

$$d_p\phi(D)(g) := D \circ \phi^*(g) = D(A(X,Y,Z)/X^m).$$

Calculando $D(A(X,Y,Z)/X^m)$ temos:

$$\begin{aligned}
d_p\phi(D)(g) = D(A(X,Y,Z)/X^m) &= \left[a_0\partial_X\left(\frac{A}{X^m}\right) + a_1\partial_Y\left(\frac{A}{X^m}\right) + a_2\partial_Z\left(\frac{A}{X^m}\right)\right](p) = \\
&= \left[a_0\left(\frac{X\partial_X A - mA}{X^{m+1}}\right) + a_1\left(\frac{\partial_Y A}{X^m}\right) + a_2\left(\frac{\partial_Z A}{X^m}\right)\right](p) = \\
&= \left[a_0\left(\frac{-Y\partial_Y A - Z\partial_Z A}{X^{m+1}}\right) + a_1\left(\frac{X\partial_Y A}{X^{m+1}}\right) + a_2\left(\frac{X\partial_Z A}{X^{m+1}}\right)\right](p) = \\
&= \left[\frac{(Xa_1 - Ya_0)\,\partial_Y A + (Xa_2 - Za_0)\,\partial_Z A}{X^{m+1}}\right](p) = \\
&= \left[\left(\frac{1}{X}a_1 - \frac{Y}{X^2}a_0\right)\frac{1}{X^{m-1}}\partial_Y A + \left(\frac{1}{X}a_2 - \frac{Z}{X^2}a_0\right)\frac{1}{X^{m-1}}\partial_Z A\right](p).
\end{aligned}$$

Da segunda para a terceira linha, usamos a fórmula de Euler $mA = X\partial_0 A + Y\partial_1 A + Z\partial_2 A$, já que A é homogêneo. Usando as igualdades dadas na Observação 4, podemos escrever

$$d_p\phi(D)(g) = \left[\left(\frac{1}{X}a_1 - \frac{Y}{X^2}a_0\right)\partial_y g + \left(\frac{1}{X}a_2 - \frac{Z}{X^2}a_0\right)\partial_z g\right](p) \tag{4.4}$$

ou também,

$$Xd_p\phi(D)(g) = (a_1 - ya_0)\partial_y g(p) + (a_2 - za_0)\partial_z g(p),\ \forall g\ \in k[y,z].$$

Assim, a menos de multiplicação por X, que é sempre não nula em U_0, temos

$$d_p\phi(D) = (a_1 - ya_0)(p)\partial_y|_p + (a_2 - za_0)(p)\partial_z|_p \in T_{\phi(p)}\mathbb{P}^2.$$

Mais geralmente, dados F_0, F_1, F_2 polinômios homogêneos de mesmo grau, considere o campo vetorial $\mathcal{X}$ em $\mathbb{C}^3$ definido por $\mathcal{X} = F_0\partial_X + F_1\partial_Y + F_2\partial_Z$ tal que, em cada ponto $p \in \mathbb{C}^3$, $\mathcal{X}_p := \mathcal{X}(p) = F_0(p)\partial_X|_p + F_1(p)\partial_Y|_p + F_2(p)\partial_Z|_p$. Pelo Exemplo (14), mostramos que a menos de multiplicação por uma constante não nula,

$$d_p\phi(D)(\mathcal{X}_p) = (f_1 - yf_0)(p)\partial_y|_p + (f_2 - zf_0)(p)\partial_z|_p, \tag{4.5}$$

onde $f_i = F_i(1,y,z)$ para cada $i \in \{0,1,2\}$.

Isso motiva a próxima definição.

Definição 4.2. Uma forma global de um campo vetorial $\mathcal{X}$ em $\mathbb{P}^2$, de grau d, é uma expressão da forma

$$\mathcal{X} = F_0\frac{\partial}{\partial X} + F_1\frac{\partial}{\partial Y} + F_2\frac{\partial}{\partial Z}, \tag{4.6}$$

onde $F_0, F_1, F_2 \in k[X,Y,Z]$, quando não nulos, são homogêneos de grau d.

Pelo Exemplo 14, o campo vetorial $\mathcal{X}$ dado em (4.6) tem a expressão local em U_0:

$$\mathcal{X}_{U_0} = (f_1 - yf_0)\frac{\partial}{\partial y} + (f_2 - zf_0)\frac{\partial}{\partial z}, \tag{4.7}$$

onde $y = \frac{Y}{X}$ e $z = \frac{Z}{X}$ são coordenadas locais em U_0 e $f_i(y,z) = F_i(1,y,z)$.

Trocando U_0 por U_1 ou U_2 no Exemplo 14, temos expressões locais para o campo $\mathcal{X}$ nos abertos U_1 e U_2. A saber, no aberto U_1 a expressão de $\mathcal{X}$ é

$$\mathcal{X}_{U_1} = (f_0 - xf_1)\frac{\partial}{\partial x} + (f_2 - zf_1)\frac{\partial}{\partial z}, \tag{4.8}$$

onde $x = \frac{X}{Y}$ e $z = \frac{Z}{Y}$ são coordenadas locais em U_1 e $f_i(x,z) = F_i(x,1,z)$. Já no aberto U_2, a expressão de $\mathcal{X}$ é

$$\mathcal{X}_{U_2} = (f_0 - xf_2)\frac{\partial}{\partial x} + (f_1 - yf_2)\frac{\partial}{\partial y}, \tag{4.9}$$

onde $x = \frac{X}{Z}$ e $y = \frac{Y}{Z}$ são coordenadas locais em U_2 e $f_i(x,y) = F_i(x,y,1)$.

Exemplo 15. O campo vetorial $\mathcal{R} = X\frac{\partial}{\partial X} + Y\frac{\partial}{\partial Y} + Z\frac{\partial}{\partial Z}$ em $\mathbb{P}^2$ tem expressões locais $\mathcal{X}_{U_i}$ nulas, para $i = 0, 1, 2$, isto é, $\mathcal{R}$ é o campo nulo em $\mathbb{P}^2$. De fato,

$$\mathcal{R}_{U_0} = (y - y)\frac{\partial}{\partial y} + (z - z)\frac{\partial}{\partial z} = 0 \tag{4.10}$$

Analogamente, mostra-se que $\mathcal{R}_{U_1} = 0$ e $\mathcal{R}_{U_2} = 0$.

Definição 4.3. Chamamos o campo $\mathcal{R} = X\frac{\partial}{\partial X} + Y\frac{\partial}{\partial Y} + Z\frac{\partial}{\partial Z}$ em $\mathbb{P}^2$ de campo radial ou campo de Euler.

Um campo vetorial em $\mathbb{P}^2$ não possui uma única forma global. De fato, se um campo $\mathcal{X}$ tem uma forma global

$$\mathcal{X} = F_0\frac{\partial}{\partial X} + F_1\frac{\partial}{\partial Y} + F_2\frac{\partial}{\partial Z},$$

onde os polinômios $F_i's$ não nulos são homogêneos de grau d, então para qualquer polinômio homogêneo G de grau $d - 1$ temos que $\mathcal{X}' = \mathcal{X} + G\mathcal{R}$ é uma forma global de $\mathcal{X}$, uma vez que $\mathcal{R}$ é o campo nulo. Nesse caso, dizemos que $\mathcal{X}$ e $\mathcal{X}'$ diferem por um múltiplo do campo radial e que $\mathcal{X}$ e $\mathcal{X}'$ são representantes do mesmo campo vetorial.

Também é verdade que se $\mathcal{X} = F_0\partial_X + F_1\partial_Y + F_2\partial_Z$ e $\mathcal{X}' = G_0\partial_X + G_1\partial_Y + G_2\partial_Z$ são campos vetoriais de grau d em $\mathbb{C}^3$ que representam o mesmo campo vetorial em $\mathbb{P}^2$, então $\mathcal{X} - \mathcal{X}'$ é múltiplo do campo radial.

De fato, as formas locais em U_0 de $\mathcal{X}$ e $\mathcal{X}'$ são respectivamente

$$\mathcal{X}_{U_0} = \left(F_1\left(1, \frac{Y}{X}, \frac{Z}{X}\right) - \frac{Y}{X}F_0\left(1, \frac{Y}{X}, \frac{Z}{X}\right)\right)\frac{\partial}{\partial y} + \left(F_2\left(1, \frac{Y}{X}, \frac{Z}{X}\right) - \frac{Z}{X}F_0\left(1, \frac{Y}{X}, \frac{Z}{X}\right)\right)\frac{\partial}{\partial z},$$

$$\mathcal{X}'_{U_0} = \left(G_1\left(1, \frac{Y}{X}, \frac{Z}{X}\right) - \frac{Y}{X}G_0\left(1, \frac{Y}{X}, \frac{Z}{X}\right)\right)\frac{\partial}{\partial y} + \left(G_2\left(1, \frac{Y}{X}, \frac{Z}{X}\right) - \frac{Z}{X}G_0\left(1, \frac{Y}{X}, \frac{Z}{X}\right)\right)\frac{\partial}{\partial z},$$

e, sendo o mesmo campo vetorial em $\mathbb{P}^2$, temos as igualdades

$$\left(F_1\left(1, \frac{Y}{X}, \frac{Z}{X}\right) - \frac{Y}{X}F_0\left(1, \frac{Y}{X}, \frac{Z}{X}\right)\right) = \left(G_1\left(1, \frac{Y}{X}, \frac{Z}{X}\right) - \frac{Y}{X}G_0\left(1, \frac{Y}{X}, \frac{Z}{X}\right)\right), \tag{4.11}$$

$$\left(F_2\left(1, \frac{Y}{X}, \frac{Z}{X}\right) - \frac{Z}{X}F_0\left(1, \frac{Y}{X}, \frac{Z}{X}\right)\right) = \left(G_2\left(1, \frac{Y}{X}, \frac{Z}{X}\right) - \frac{Z}{X}G_0\left(1, \frac{Y}{X}, \frac{Z}{X}\right)\right). \tag{4.12}$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade (4.11) por X^{d+1}, obtemos a igualdade $XF_1 - YF_0 = XG_1 - YG_0$, ou ainda $X(F_1 - G_1) = Y(F_0 - G_0)$. Daí, $X|(F_0 - G_0)$, isto é, existe um polinômio homogêneo H de grau $d - 1$ tal que $F_0 - G_0 = XH$. Logo, $X(F_1 - G_1) = XYH$, ou seja, $F_1 - G_1 = YH$. Finalmente, utilizando a igualdade (4.12) temos $F_2 - G_2 = ZH$, de donde segue que $\mathcal{X} = \mathcal{X}' + H\mathcal{R}$.

Nosso objetivo agora é definir singularidades de um campo de vetores $\mathcal{X}$ em $\mathbb{P}^2$, mas para isso vamos precisar do lema a seguir.

Lema 4.1. Considere um ponto $p = (X : Y : Z) \in U_i \cap U_j$ e o campo vetorial de grau d

$$\mathcal{X} = F_0 \frac{\partial}{\partial X} + F_1 \frac{\partial}{\partial Y} + F_2 \frac{\partial}{\partial Z}.$$

Se p anula a expressão local do campo $\mathcal{X}$ em U_i ele também anula a expressão local de $\mathcal{X}$ em U_j.

Demonstração. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $p \in U_0 \cap U_1$ e que p anula a expressão local de $\mathcal{X}$ em U_0, isto é,

$$\begin{cases} F_1(1, y, z) - yF_0\,(1, y, z) = 0 \\ F_2\,(1, y, z) - zF_0\,(1, y, z) = 0, \end{cases} \tag{4.13}$$

onde $y = Y/X$ e $z = Z/X$. Vejamos que p anula a expressão local de $\mathcal{X}$ em U_1.

Multiplicando a primeira e a segunda equação de (4.13) por X^{d+1}/Y^{d+1}, temos

$$\begin{cases} \frac{X}{Y} F_1\left(\frac{X}{Y}, 1, \frac{Z}{Y}\right) - F_0\left(\frac{X}{Y}, 1, \frac{Z}{Y}\right) = 0 \\ \frac{X}{Y} F_2\left(\frac{X}{Y}, 1, \frac{Z}{Y}\right) - \frac{Z}{X}\frac{X}{Y} F_0\left(\frac{X}{Y}, 1, \frac{Z}{Y}\right) = 0. \end{cases} \tag{4.14}$$

Isolando F_0 na primeira equação de (4.1) e substituindo na segunda temos

$$\begin{array}{l} \frac{X}{Y} F_2\left(\frac{X}{Y}, 1, \frac{Z}{Y}\right) - \frac{Z}{X}\frac{X}{Y}\frac{X}{Y} F_1\left(\frac{X}{Y}, 1, \frac{Z}{Y}\right) = 0 \Rightarrow \\ F_2\left(\frac{X}{Y}, 1, \frac{Z}{Y}\right) - \frac{Z}{Y} F_1\left(\frac{X}{Y}, 1, \frac{Z}{Y}\right) = 0. \end{array} \tag{4.15}$$

De (4.1) e (4.15) temos as expressões

$$\begin{cases} F_0\left(\frac{X}{Y}, 1, \frac{Z}{Y}\right) - \frac{X}{Y} F_1\left(\frac{X}{Y}, 1, \frac{Z}{Y}\right) = 0 \\ F_2\left(\frac{X}{Y}, 1, \frac{Z}{Y}\right) - \frac{Z}{Y} F_1\left(\frac{X}{Y}, 1, \frac{Z}{Y}\right) = 0, \end{cases}$$

que mostram que p anula a expressão local (4.8) de $\mathcal{X}$ em U_1. $\square$

Definição 4.4. Um ponto $p \in U_i$ é dito uma singularidade do campo $\mathcal{X}$ quando p anula a expressão local de $\mathcal{X}$ em U_i.

Exemplo 16. Considere o campo de vetores em $\mathbb{P}^2$ dado globalmente por

$$\mathcal{X} = X^2Y \frac{\partial}{\partial X} + YZ^2 \frac{\partial}{\partial Y} + X^3 \frac{\partial}{\partial Z},$$

cujas expressões locais são

$$\mathcal{X}_{U_0} = (yz^2 - y^2)\frac{\partial}{\partial y} + (1 - yz)\frac{\partial}{\partial z},$$

$$\mathcal{X}_{U_1} = (x^2 - xz^2)\frac{\partial}{\partial x} + (x^3 - z^3)\frac{\partial}{\partial z},$$

$$\mathcal{X}_{U_2} = (x^2y - x^4)\frac{\partial}{\partial x} + (y - x^3y)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Em U_0, temos três singularidades $(1 : 1 : 1), (1 : \xi : \xi^2)$ e $(1 : \xi^2, \xi)$, onde ξ é a raiz cúbica primitiva da unidade. Estas singularidades são também singularidade em U_1 e U_2. Olhando para a expressão de $\mathcal{X}$ em U_1 encontramos a singularidade $(0 : 1 : 0)$ e em U_2 a singularidade $(0 : 0 : 1)$. Desta forma, o campo $\mathcal{X}$ apresenta cinco singularidades.

4.2 1-FORMAS EM $\mathbb{P}^2$

Nesta seção apresentaremos um estudo das 1-formas diferenciais $\mathbb{P}^2$ como fizemos para os campos vetoriais na seção anterior. Mostraremos a relação entre campos e 1-formas em $\mathbb{P}^2$ e usaremos esta relação para obtermos a expressão global de um campo a partir de uma expressão local.

Definição 4.5. Uma 1-forma em $\mathbb{P}^2$ é uma aplicação ω que associa cada ponto $p \in \mathbb{P}^2$ um funcional linear em $T_p\mathbb{P}^2$, $\omega(p) : T_p\mathbb{P}^2 \to k$.

Segue da definição que uma 1-forma ω em $\mathbb{P}^2$ é dada localmente em U_0 por um par de funções $a_1(y,z), a_2(y,z)$, isto é,

$$\omega = a_1 dy + a_2 dz, \tag{4.16}$$

onde $y = Y/X$ e $z = Z/X$ são coordenadas locais e em cada p, $\{d_p y, d_p z\}$ é a base dual de $\{\partial_y|_p, \partial_z|_p\}$, ou seja, $d_p y(\partial_y|_p) = 1$, $d_p z(\partial_z|_p) = 1$ e $d_p y(\partial_z|_p) = d_p z(\partial_y|_p) = 0$.

Se a_1 e a_2 são polinômios, dizemos que a 1-forma é polinomial.

As 1-formas consideradas neste trabalho serão sempre polinomiais.

É natural perguntarmos se é possível, assim como fizemos para os campos vetoriais, dar uma descrição global, em algum sentido, da 1-forma ω. A resposta é sim como veremos a seguir.

Consideremos novamente a função dada em (4.2) do aberto U de $\mathbb{C}^3$ no aberto U_0 de $\mathbb{P}^2$. Dela obtemos o diagrama abaixo que associa a cada funcional linear $d_{\phi(p)}f : T_{\phi(p)}\mathbb{P}^2 \to k$, onde $f \in k[y,z]$, um funcional linear $d_{\phi(p)}f \circ d_p\phi : T_p\mathbb{C}^3 \to k$.

$$\begin{tikzcd}
T_p\mathbb{C}^3 \arrow[r, "d_p\phi"] \arrow[dr] & T_{\phi(p)}\mathbb{P}^2 \arrow[d, "d_{\phi(p)}f"] \\
& k
\end{tikzcd}$$

Com o objetivo de descrever em coordenadas o funcional $d_{\phi(p)}f \circ d_p$, para uma $f \in k[x,y]$ qualquer, analisemos primeiramente os casos em que $f(x,y) = x$ ou $f(x,y) = y$.

Observação 5. Nas mesmas hipóteses de (4.2), sejam $y = Y/X$ e $z = Z/X$ as coordenadas locais em U_0. Afirmamos que os funcionais $d_{\phi(p)}y \circ d_p\phi, d_{\phi(p)}z \circ d_p\phi \in (T_p\mathbb{C}^3)^*$ são dados por:

$$d_{\phi(p)}y \circ d_p\phi = \frac{1}{X}d_pY - \frac{Y}{X^2}d_pX \quad \text{e} \quad d_{\phi(p)}z \circ d_p\phi = \frac{1}{X}d_pZ - \frac{Z}{X^2}d_pX.$$

De fato, sejam $\partial_X = \partial/\partial_X$, $\partial_Y = \partial/\partial_Y$ e $\partial_Z = \partial/\partial_Z$ as derivações que, quando calculadas em $p \in U$, formam uma base para $T_p\mathbb{C}^3$. Segue da expressão (4.4) que

$$d_p\phi(\partial_X) := \partial_X \circ \phi^* = -\frac{Y}{X^2}\partial_y - \frac{Z}{X^2}\partial_z,$$

$$d_p\phi(\partial_Y) := \partial_Y \circ \phi^* = \frac{1}{X}\partial_y,$$

$$d_p\phi(\partial_Z) := \partial_Z \circ \phi^* = \frac{1}{X}\partial_z.$$

Logo,

$$d_{\phi(p)}y(\partial_X \circ \phi^*) = d_{\phi(p)}y\left(-\frac{Y}{X^2}\partial_y - \frac{Z}{X^2}\partial_z\right) = -\frac{Y}{X^2},$$

$$d_{\phi(p)}y(\partial_Y \circ \phi^*) = d_{\phi(p)}y\left(\frac{1}{X}\partial_y\right) = \frac{1}{X},$$

$$d_{\phi(p)}y(\partial_Z \circ \phi^*) = d_{\phi(p)}y\left(\frac{1}{X}\partial_z\right) = 0.$$

Então, para um vetor $D = a_0\partial_X\big|_p + a_1\partial_Y\big|_p + a_2\partial_Z\big|_p \in T_p\mathbb{C}^3 \cong T_pU$,

$$(d_{\phi(p)}y \circ d_p\phi)(D) = d_{\phi(p)}y(D \circ \phi^*) = -a_o\frac{Y}{X^2} + a_1\frac{1}{X} = \left(\frac{1}{X}d_pY - \frac{Y}{X^2}d_pX\right)(D),$$

já que $d_pX(D) = a_0,\ \ d_pY(D) = a_1 \quad \text{e } d_pZ(D) = a_2$. Logo,

$$(d_{\phi(p)}y \circ d_p\phi) = \left(\frac{1}{X}d_pY - \frac{Y}{X^2}d_pX\right).$$

De maneira análoga conseguimos a segunda igualdade.

Exemplo 17. Seja ω uma 1-forma polinomial em $\mathbb{P}^2$, dada localmente por $\omega = a_1dy+a_2dz$, onde $d = \max\{\text{grau}(a_i)|i = 1, 2\}$. Dado um ponto $p = (X, Y, Z)$ tal que $X \neq 0$, temos pela Observação 5 que

$$\begin{aligned}
\omega(\phi(p)) \circ d_p\phi &= a_1\left(\tfrac{Y}{X}, \tfrac{Z}{X}\right) d_{\phi(p)}y \circ d_p\phi + a_2\left(\tfrac{Y}{X}, \tfrac{Z}{X}\right) d_{\phi(p)}z \circ d_p\phi = \\
&= a_1\left(\tfrac{Y}{X}, \tfrac{Z}{X}\right)\left(\tfrac{1}{X}d_pY - \tfrac{Y}{X^2}d_pX\right) + a_2\left(\tfrac{Y}{X}, \tfrac{Z}{X}\right)\left(\tfrac{1}{X}d_pZ - \tfrac{Z}{X^2}d_pX\right) = \\
&= \left[-\tfrac{Y}{X^2}a_1\left(\tfrac{Y}{X}, \tfrac{Z}{X}\right) - \tfrac{Z}{X^2}a_2\left(\tfrac{Y}{X}, \tfrac{Z}{X}\right)\right] d_pX + \tfrac{1}{X}a_1\left(\tfrac{Y}{X}, \tfrac{Z}{X}\right) d_pY + \tfrac{1}{X}a_2\left(\tfrac{Y}{X}, \tfrac{Z}{X}\right) d_pZ.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\omega(\phi(p)) \circ d_p\phi = \frac{A_0(p)}{X^{d+2}}d_pX + \frac{A_1(p)}{X^{d+2}}d_pY + \frac{A_2(p)}{X^{d+2}}d_pZ \tag{4.17}$$

onde A_0, A_1, A_2 são os polinômios homogêneos de grau $d + 1$ dados por

$$A_0 = X^d\left(-Ya_1\left(\frac{Y}{X}, \frac{Z}{X}\right) - Za_2\left(\frac{Y}{X}, \frac{Z}{X}\right)\right),$$

$$A_1 = X^{d+1}a_1\left(\frac{Y}{X}, \frac{Z}{X}\right),$$

$$A_2 = X^{d+1}a_2\left(\frac{Y}{X}, \frac{Z}{X}\right).$$

Um cálculo direto mostra que $XA_0 + YA_1 + ZA_2 = 0$.

Observe ainda que se $a_{1d}(y,z)$ e $a_{2d}(y,z)$ são componentes homogêneas de grau d de $a_1(y,z)$ e $a_2(y,z)$, quando $ya_{1d}+za_{2d}=0$ teremos que X é um fator comum de A_0, A_1, A_2. Neste caso, simplificando a expressão (4.17) teremos

$$\omega(\phi(p))\circ d_p\phi = \frac{B_0(p)}{X^{d+1}}d_pX + \frac{B_1(p)}{X^{d+1}}d_pY + \frac{B_2(p)}{X^{d+1}}d_pZ,$$

onde B_0, B_1, B_2 são os polinômios homogêneos de grau d dados por

$$B_0 = X^{d-1}\left(-Ya_1\left(\frac{Y}{X},\frac{Z}{X}\right) - Za_2\left(\frac{Y}{X},\frac{Z}{X}\right)\right),$$

$$B_1 = X^d a_1\left(\frac{Y}{X},\frac{Z}{X}\right),$$

$$B_2 = X^d a_2\left(\frac{Y}{X},\frac{Z}{X}\right).$$

e ainda teremos $XB_0+YB_1+ZB_2=0$.

Exemplo 18. Como no exemplo anterior, podemos mostrar que se a ω for dada localmente em U_1 por $\omega = a_1dx + a_2dz$, $d=\max\{\text{grau}(a_i)|i=1,2\}$ e $p=(X,Y,Z)$ for um ponto tal que $Y\neq 0$, então

$$\omega(\phi(p))\circ d_p\phi = \frac{A_0(p)}{Y^{d+2}}d_pX + \frac{A_1(p)}{Y^{d+2}}d_pY + \frac{A_2(p)}{Y^{d+2}}d_pZ \tag{4.18}$$

onde A_0, A_1, A_2 são os polinômios homogêneos de grau $d+1$ dados por

$$A_0 = Y^{d+1}a_1\left(\frac{X}{Y},\frac{Z}{Y}\right),$$

$$A_1 = Y^d\left(-Xa_1\left(\frac{X}{Y},\frac{Z}{Y}\right) - Za_2\left(\frac{X}{Y},\frac{Z}{Y}\right)\right),$$

$$A_2 = Y^{d+1}a_2\left(\frac{X}{Y},\frac{Z}{Y}\right).$$

Para ω dada localmente em U_2 por $\omega = a_1dx + a_2dy$, $d=\max\{\text{ grau}(a_i)|i=1,2\}$ e $p=(X,Y,Z)$ um ponto tal que $Z\neq 0$, teremos

$$\omega(\phi(p))\circ d_p\phi = \frac{A_0(p)}{X^{d+2}}d_pX + \frac{A_1(p)}{Z^{d+2}}d_pY + \frac{A_2(p)}{Z^{d+2}}d_pZ \tag{4.19}$$

onde A_0, A_1, A_2 são os polinômios homogêneos de grau $d+1$ dados por

$$A_0 = Z^{d+1}a_1\left(\frac{X}{Z},\frac{Y}{Z}\right),$$

$$A_1 = Z^{d+1}a_2\left(\frac{X}{Z},\frac{Y}{Z}\right).$$

$$A_2 = Z^d\left(-Xa_1\left(\frac{X}{Z},\frac{Y}{Z}\right) - Ya_2\left(\frac{X}{Z},\frac{Y}{Z}\right)\right),$$

Os Exemplos 17 e 18 mostram que podemos, a partir de uma 1-forma dada localmente em $\mathbb{P}^2$, definir uma 1-forma em $\mathbb{C}^3$, o que motiva as duas próximas definições.

Definição 4.6. Seja ω uma 1-forma polinomial em $\mathbb{P}^2$ dada localmente em U_0 por

$$\omega = a_1 dy + a_2 dz$$

e seja $d = \max\{\text{grau}(a_i) | i = 1, 2\}$. O grau da 1-forma é dado por

$$s = \begin{cases} d, & \text{se} \quad ya_{1d} + za_{2d} \neq 0 \\ d-1, & \text{se} \quad ya_{1d} + za_{2d} = 0 \end{cases}$$

onde a_{1d} e a_{2d} são as componentes homogêneas de grau d de a_1 e a_2, respectivamente.

Definição 4.7. Uma forma global de ω em $\mathbb{P}^2$ é uma expressão

$$\Omega = A_0 dX + A_1 dY + A_2 dZ, \tag{4.20}$$

onde A_0, A_1, A_2 são os polinômios homogêneos de grau $s+1$ dados por

$$A_0 = X^s \left(-Ya_1 \left(\frac{Y}{X}, \frac{Z}{X} \right) - Za_2 \left(\frac{Y}{X}, \frac{Z}{X} \right) \right),$$

$$A_1 = X^{s+1} a_1 \left(\frac{Y}{X}, \frac{Z}{X} \right), \tag{4.21}$$
$$A_2 = X^{s+1} a_2 \left(\frac{Y}{X}, \frac{Z}{X} \right).$$

Observação 6. As definições semelhantes à Definição 4.7 podem ser feitas a partir da expressões locais de 1-forma em $\mathbb{P}^2$ nos abertos U_1 e U_2.

Observação 7. Dada a expressão global de uma 1-forma em $\mathbb{P}^2$,

$$\Omega = A_0 dX + A_1 dY + A_2 dZ,$$

com $XA_0 + YA_1 + ZA_2 = 0$, as suas expressões locais nos abertos U_0, U_1, U_2 são, respectivamente,

$$\Omega_{U_0} = a_1 dy + a_2 dz,$$

onde $a_1 = A_1(1, y, z)$ e $a_2 = A_2(1, y, z)$,

$$\Omega_{U_1} = b_0 dx + b_2 dz,$$

onde $b_0 = A_0(x, 1, z)$ e $b_2 = A_2(x, 1, z)$,

$$\Omega_{U_2} = c_0 dx + c_1 dy,$$

onde $c_0 = A_0(x, y, 1)$ e $c_1 = A_1(x, y, 1)$.

Exemplo 19. Consideremos a 1-forma dada em U_0 por $\omega = z^2dy + ydz$. Como $s = 2$ temos que

$$A_0 = X^2\left(-Y\left(\frac{Z}{X}\right)^2 - Z\frac{Y}{X}\right) = -YZ^2 - XYZ,$$

$$A_1 = X^3\left(\frac{Z}{X}\right)^2 = XZ^2,$$

$$A_2 = X^3\frac{Y}{X} = X^2Y.$$

Logo a expressao global da 1-forma é

$$\Omega = (-YZ^2 - XYZ)dX + XZ^2dY + X^2YdZ.$$

No processo de voltar para a expressão local de Ω em U_0, temos $a_1(y,z) = A_1(1,y,z) = z^2$ e $a_2(y,z) = A_2(1,y,z) = y$, ou seja, $\Omega_{U_0} = \omega$. Em U_1, temos

$$b_0(x,z) = A_0(x,1,z) = -z^2 - xz$$

e $b_2(x,z) = A_2(x,1,z) = x^2$, donde segue que

$$\Omega_{U_1} = (-z^2 - xz)dx + x^2dz.$$

Em U_2, temos $c_0(x,y) = A_0(x,y,1) = -y - xy$, $c_1(x,y) = A_1(x,y,1) = x$ e obtendo

$$\Omega_{U_2} = (-y - xy)dx + xdy.$$

Observação 8. Seja ω uma 1-forma em $\mathbb{P}^2$ definida em U_0 por $\omega = ady + bdz$. Para cada $p \in U_0$, $\omega(p) : T_p\mathbb{P}^2 \to k$ é um funcional linear cujo núcleo é gerado por $\mathcal{X}_p = -b\frac{\partial}{\partial y}|_p + a\frac{\partial}{\partial z}|_p \in T_p\mathbb{P}^2$, isto é, $\ker(\omega(p)) = \{\lambda\mathcal{X}_p; \lambda \in k\}$. Podemos então dizer que ω define em U_0 um campo de vetores escrito localmente como $\mathcal{X} = \left(-b\frac{\partial}{\partial y} + a\frac{\partial}{\partial z}\right)$.

Definição 4.8. Uma folheação de grau d em $\mathbb{P}^2$ é, a menos de multiplicação por escalar, uma expressão da forma

$$\Omega = A_0dX + A_1dY + A_2dZ,$$

onde A_0, A_1, A_2 são polinômios, quando não nulos, homogêneos de grau $d+1$, satisfazendo a condição

$$XA_0 + YA_1 + ZA_2 = 0.$$

Diremos que uma folheação em $\mathbb{P}^2$ é induzida pela 1-forma Ω e por um campo de vetores $\mathcal{X}$ de grau d quando o núcleo de Ω conter o campo $\mathcal{X}$.

Observação 9. O termo folheação está relacionado com a decomposição de uma variedade, por exemplo o plano complexo, em uma união disjunta de subvariedades que se comportam (pelo menos localmente) como soluções de uma equação diferencial. Como equações diferenciais estão relacionadas com campos vetoriais que por sua vez se relacionam com 1-formas diferenciais, os três conceitos serão usados de forma equivalente.

Definição 4.9. Um ponto $p \in \mathbb{P}^2$ é dito uma singularidade da folheação induzida pela 1-forma $\Omega = A_0 dX + A_1 dY + A_2 dZ$ quando $A_0(p) = A_1(p) = A_2(p) = 0$. Denotaremos o conjunto de todas as singularidades de Ω por $\mathrm{Sing}(\Omega)$. Quando $\mathrm{Sing}(\Omega)$ for um conjunto finito, diremos que a folheação é saturada.

Observação 10. Se $\omega = a_1 dy + a_2 dz$ é a forma local de $\Omega = A_0 dX + A_1 dY + A_2 dZ$ em U_0, não podemos garantir que $\mathrm{Sing}(\omega)$ e $\mathrm{Sing}(\Omega)$ sejam iguais. Os dois conjuntos coincidem se, e somente se, $\mathrm{Sing}(\Omega)$ não intercepta a reta no infinito $L_\infty = \mathcal{Z}(Z)$. De fato, se nenhuma das singularidades de Ω pertence a L_∞, uma dada singularidade $p = (1 : x : y)$ de ω é tal que $A_1(p) = 0$ e $A_2(p) = 0$. Como $X = 1$ e

$$A_1 = X^{d+1} a_1 \left(\frac{Y}{X}, \frac{Z}{X} \right),$$

$$A_2 = X^{d+1} a_2 \left(\frac{Y}{X}, \frac{Z}{X} \right),$$

segue que $a_1(p) = 0$ e $a_2(p) = 0$. Por outro lado, se $p = (1 : y : z)$ é tal que $a_1(p) = 0$ e $a_2(p) = 0$, então das relações acima temos $A_1(p) = 0$ e $A_2(p) = 0$. Como vale a relação $XA_0 + YA_1 + ZA_2 = 0$ e $p \notin L_\infty$, temos $A_0(p) = 0$. Assim, $p \in \mathrm{Sing}(\Omega)$.

4.3 RELAÇÃO ENTRE CAMPOS DE VETORES E 1-FORMAS

Nesta seção apresentaremos a relação entre campos de vetores e 1-formas em $\mathbb{P}^2$ que induzem a mesma folheação de $\mathbb{P}^2$.

Considere um campo de vetores em $\mathbb{P}^2$ dado globalmente por

$$\mathcal{X} = F_0 \frac{\partial}{\partial X} + F_1 \frac{\partial}{\partial Y} + F_2 \frac{\partial}{\partial Z},$$

onde os $F_i's$, quando não nulos, homogêneos de grau d. Por (4.7), a expressão local de $\mathcal{X}$ em U_0 é dada por

$$\mathcal{X} = (f_1 - y f_0) \frac{\partial}{\partial y} + (f_2 - z f_0) \frac{\partial}{\partial z}.$$

Pela Observação 8, a expressão local de uma 1-forma em U_0, que induz a mesma folheação que $\mathcal{X}$, é

$$\omega = -(f_2 - z f_0) dy + (f_1 - y f_0) dz.$$

A expressão global da 1-forma acima é

$$\Omega = A_0 dX + A_1 dY + A_2 dZ,$$

onde, pelas equações (4.21), A_0, A_1, A_2 são dados por

$$A_0 = YF_2 - ZF_1,$$
$$A_1 = -XF_2 + ZF_0,$$
$$A_2 = XF_1 - YF_0.$$

Ou seja, a expressão global de Ω que define a mesma folheação que o campo $\mathcal{X}$ é

$$\Omega = (YF_2 - ZF_1)dX + (-XF_2 + ZF_0)dY + (XF_1 - YF_0)dZ.$$

Uma maneira simplificada de determinar a 1-forma Ω associada ao campo de vetores $\mathcal{X} = F_0\partial_0 + F_1\partial_1 + F_2\partial_2$ é ver que ela dada pelo determinante da matriz

$$\Omega = \begin{vmatrix} dX & dY & dZ \\ X & Y & Z \\ F_0 & F_1 & F_2 \end{vmatrix}.$$

Reciprocamente, dada uma 1-forma $\Omega = A_0dX + A_1dY + A_2dZ$, podemos reverter o processo e encontrar polinômios homogêneos de mesmo grau, F_0, F_1, F_2, tais que o campo $\mathcal{X} = F_0\dfrac{\partial}{\partial X} + F_1\dfrac{\partial}{\partial Y} + F_2\dfrac{\partial}{\partial Z}$ e Ω induzem a mesma folheação de $\mathbb{P}^2$. Isto será possível pelo resultado dado a seguir.

Proposição 4.1. Se $A_0, A_1, A_2 \in k[X,Y,Z]$ são polinômios homogêneos de grau $d+1$ satisfazendo $XA_0 + YA_1 + ZA_2 = 0$, então existem polinômios F_0, F_1, F_2 homogêneos de grau d tais que

$$\begin{cases} A_0 = YF_2 - ZF_1, \\ A_1 = ZF_0 - XF_2, \\ A_2 = XF_1 - YF_0. \end{cases}$$

Demonstração.

$$XA_0 = -YA_1 - ZA_2 \tag{4.22}$$

e os $A_i's$ possuem grau $d+1$, X^{d+1} não divide nenhum monômio de A_0, caso contrário XA_0 teria um monômio divisível por X^{d+2}. Logo, todos os monômios de A_0 possuem fator Y ou Z e podemos então escrever $A_0 = YF_2 - F_1Z$, para algum par de polinômios F_1, F_2, ambos homogêneos de grau d. Substituindo A_0 em (4.22), temos

$$X(YF_2 - F_1Z) = -A_1Y - A_2Z. \tag{4.23}$$

Agrupando os termos em Y e Z na equação (4.23),

$$Y(XF_2 + A_1) = Z(XF_1 - A_2). \tag{4.24}$$

Portanto, $Y|(XF_1 - A_2)$ e $Z|(XF_2 + A_1)$, isto é, existem polinômios G_3 e G_4, ambos de grau d, tais que

$$\begin{cases} XF_1 - A_2 = YG_3, \\ XF_2 + A_1 = ZG_4. \end{cases} \tag{4.25}$$

Substituindo as equações (4.25) em (4.24), obtemos $YZG_4 = ZYG_3$ e, consequentemente, $G_3 = G_4$. Escrevendo $G_3 = G_4 = F_0$, surge as relações

$$\begin{cases} A_2 = XF_1 - YF_0, \\ A_1 = ZF_0 - XF_2. \end{cases} \tag{4.26}$$

Substituindo (4.26) em $XA_0 = -YA_1 - ZA_2$ concluímos que

$$A_0 = YF_2 - ZF_1.$$

□

Exemplo 20. Consideremos o campo de vetores

$$\mathcal{X} = Y\frac{\partial}{\partial X} + (X+Y)\frac{\partial}{\partial Y} + (X+Y+Z)\frac{\partial}{\partial Z}.$$

A expressão local de $\mathcal{X}$ em U_0 é dada por

$$\mathcal{X}_{U_0} = (1+y+y^2)\frac{\partial}{\partial y} + (1+y+z-yz)\frac{\partial}{\partial z}$$

e a 1- forma associada à $\mathcal{X}_{U_0}$ é dada por

$$\omega = (yz - y - z - 1)dy + (1 + y - y^2)dz.$$

Usando as relações (4.21), temos que a expressão global da 1-forma é

$$\Omega = (XY - XZ + Y^2)dX + (YZ - XY - XZ - X^2)dY + (X^2 + XY - Y^2)dZ.$$

Exemplo 21. Tomemos a 1-forma dada globalmente por

$$\Omega = 2YZdX - XZdY - XYdZ.$$

Vamos obter polinômios homogêneos F_0, F_1F_2 de grau 1 tais que

$$\begin{cases} A_0 = YF_2 - ZF_1, \\ A_1 = ZF_0 - XF_2, \\ A_2 = XF_1 - YF_0. \end{cases}$$

A Proposição 4.1, além de garantir a existência de tais polinômios, fornece um método para encontrá-los. Seguindo a sua demonstração, podemos deduzir que

$$A_0 = (2Z).Y - 0.Z,$$

ou seja, $F_1 = 0$ e $F_2 = 2Z$. O polinômio F_0 é tal que

$$\begin{cases} XF_1 - A_2 = YF_0, \\ XF_2 + A_1 = ZF_0. \end{cases}$$

Substituindo F_1 e F_2 no sistema acima, obtemos

$$\begin{cases} XY = YF_0, \\ 2XZ - XZ = ZF_0. \end{cases}$$

Donde concluímos que $F_0 = X$. Assim, um representante do campo vetorial que induz a mesma folheação que a 1-forma Ω é $\mathcal{X} = X\dfrac{\partial}{\partial X} + 2Z\dfrac{\partial}{\partial Z}$.

Poderíamos também escrever

$$A_0 = (Z).Y - (-Y).Z,$$

isto é, tomar $F_1 = -Y$ e $F_2 = Z$. Neste caso, $F_0 = 0$. Obteríamos assim, um outro campo representado por $\mathcal{X}' = -Y\dfrac{\partial}{\partial Y} + Z\dfrac{\partial}{\partial Z}$. Apesar de representações diferentes, $\mathcal{X}$ e $\mathcal{X}'$ representam o mesmo campo de vetores em $\mathbb{P}^2$ já que $\mathcal{X} = \mathcal{X}' + \mathcal{R}$, onde $\mathcal{R}$ é o campo radial.

Sejam $\Omega = A_0dX + A_1dY + A_2dZ$ e $\mathcal{X} = F_0\partial_X + F_1\partial_Y + F_2\partial_Z$ induzindo a mesma folheação de $\mathbb{P}^2$. Seja p uma singularidade de Ω. Por simplicidade, suponhamos que $p \in U_0$. Então p anula a expressão local de Ω em U_0, que é $\omega = a_1dy + a_2dz$, onde $a_j = A_j(1, y, z)$. Como a forma local de $\mathcal{X}$ é $\mathcal{X}_{U_0} = -a_2\frac{\partial}{\partial y} + a_1\frac{\partial}{\partial z}$, segue que p é uma singularidade de $\mathcal{X}$. Reciprocamente, se $p \in U_0$ é singularidade do campo $\mathcal{X}$, então p anula sua expressão local em U_0 e também anula $\omega = a_1dy + a_2dz$, a forma local de Ω em U_0. Como $A_1(p) = 0 = A_2(p), X(p) \neq 0$ e $A_0X + A_1Y + A_2Z = 0$, conseguimos $A_0(p) = 0$. Estas considerações mostram que as singularidades de $\mathcal{X}$ e de Ω são as mesmas.

Lembrando as relações

$$\begin{cases} A_0 = YF_2 - ZF_1, \\ A_1 = ZF_0 - XF_2, \\ A_2 = XF_1 - YF_0, \end{cases} \tag{4.27}$$

temos que as singularidades da folheação são dadas pelos zeros comuns dos menores 2×2 da matriz

$$\begin{pmatrix} X & Y & Z \\ F_0 & F_1 & F_2 \end{pmatrix}.$$

4.4 CURVAS INVARIANTES

Definição 4.10. Sejam $C = \mathcal{Z}(F)$ uma curva irredutível em $\mathbb{P}^2$ e $\mathcal{X}$ um campo vetorial de $\mathbb{P}^2$ de grau d. Dizemos que C é invariante por $\mathcal{X}$, ou ainda que C é solução de $\mathcal{X}$, se $\mathcal{X}(p) \in T_pC$ para todo $p \in C\backslash(\mathrm{Sing}(C) \cup \mathrm{Sing}(\mathcal{X}))$.

Se C for redutível, diremos que C é invariante por $\mathcal{X}$ se cada componente irredutível de C for invariante por $\mathcal{X}$.

Definição 4.11. Uma curva C invariante por um campo de vetores $\mathcal{X}$ é também chamada curva invariante da folheação $\mathcal{F}$ induzida por $\mathcal{X}$ ou uma folha da folheação $\mathcal{F}$.

Proposição 4.2. Uma curva projetiva plana reduzida $C = \mathcal{Z}(F)$ de grau m é invariante por uma folheação $\mathcal{F}$ induzida pelo campo de vetores $\mathcal{X}$ de $\mathbb{P}^2$ e de grau d se, e somente se, $\mathcal{X}(F) = HF$ para algum polinômio homogêneo H de grau $d-1$.

Demonstração. Suponhamos $\mathcal{X}$ dado por $\mathcal{X} = F_0\frac{\partial}{\partial X} + F_1\frac{\partial}{\partial Y} + F_2\frac{\partial}{\partial Z}$, onde F_0, F_1, F_2 são polinômios homogêneos de grau d. Se $\mathcal{X}(F) = HF$ para algum polinômio H, temos para $p \in C\backslash(\mathrm{Sing}(C) \cup \mathrm{Sing}(\mathcal{X}))$ que

$$\mathcal{X}(F)(p) = F_0(p)\frac{\partial F}{\partial X}(p) + F_1(p)\frac{\partial F}{\partial Y}(p) + F_2(p)\frac{\partial F}{\partial Z}(p) = H(p)F(p) = 0$$

Logo, $(F_0(p) : F_1(p) : F_2(p)) \in T_pC$ e portanto C é invariante por $\mathcal{X}$. Reciprocamente, suponha C invariante por $\mathcal{X}$, então $\mathcal{X}(p) \in T_pC$ para todo $p \in C\backslash(\mathrm{Sing}(C) \cup \mathrm{Sing}(\mathcal{X}))$, isto é, $\mathcal{X}(F)(p) = 0$, para todo $p \in C\backslash(\mathrm{Sing}(C) \cup \mathrm{Sing}(\mathcal{X}))$. Portanto, o polinômio $\mathcal{X}(F)$ se anula em C. Pelo Teorema dos Zeros de Hilbert (Teorema 2.2), segue que $\mathcal{X}(F) \in \sqrt{\langle F\rangle} = \langle F\rangle$ pois F é reduzido. Assim, existe um polinômio H tal que $\mathcal{X}(F) = HF$. Como $\mathcal{X}(F)$ e F são polinômios homogêneos, H também é homogêneo. Comparando os graus na igualdade $\mathcal{X}(F) = HF$, obtemos que o grau de H é $d-1$. □

Exemplo 22. A folheação de $\mathbb{P}^2$ de grau zero induzida pelo campo vetorial

$$\mathcal{X} = \lambda_0\frac{\partial}{\partial X} + \lambda_1\frac{\partial}{\partial Y} + \lambda_2\frac{\partial}{\partial Z}$$

é tal que toda reta de $\mathbb{P}^2$ passando por $(\lambda_0 : \lambda_1 : \lambda_2)$ é invariante. De fato, se uma reta ℓ passa por $(\lambda_0 : \lambda_1 : \lambda_2)$, então ℓ é dada por $F(X, Y, Z) = a_0X + a_1Y + a_2Z = 0$, onde $a_0\lambda_0 + a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 = 0$. Como $\mathcal{X}(F) = a_0\lambda_0 + a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 = 0 = 0.F$, segue a afirmação.

Temos ainda que se uma reta de $\mathbb{P}^2$ não passa por $(\lambda_0 : \lambda_1 : \lambda_2)$, ela não pode ser invariante pela folheação.

Exemplo 23. A curva plana projetiva C definida por $XZ^2 = Y^3$ é invariante pela folheação definida pelo campo de vetores

$$\mathcal{X} = -2XZ\frac{\partial}{\partial Y} - 3Y^2\frac{\partial}{\partial Z}.$$

De fato, $\mathcal{X}(F) = -2XZ(-3Y^2) - 3Y^2(2XZ) = 0$.

Exemplo 24. Para que a reta no infinito $L_\infty := \mathcal{Z}(X)$ seja invariante por uma folheação de grau d definida por $\mathcal{X} = F_0\frac{\partial}{\partial X} + F_1\frac{\partial}{\partial Y} + F_2\frac{\partial}{\partial Z}$, devemos ter $\mathcal{X}(X) = F_0 = HX$ para algum H homogêneo de grau $d-1$. Logo, para construirmos campos de vetores cuja reta $X = 0$ é invariante devemos escolher polinômios homogêneos H, de grau $d-1$, e F_1, F_2, ambos de grau d.

Vamos estender a noção de curva invariante para 1-formas em $\mathbb{P}^2$.

Definição 4.12. Sejam Ω uma 1-forma em $\mathbb{P}^2$ e C uma curva plana projetiva. Dizemos que C é invariante por Ω quando C for invariante por um campo vetorial $\mathcal{X}$ de $\mathbb{P}^2$ que induz a mesma folheação em que Ω.

Proposição 4.3. Uma curva $C \subset \mathbb{P}^2$ definida pelo polinômio homogêneo reduzido F é invariante por uma folheação de $\mathbb{P}^2$, definida pela 1-forma Ω, se e somente se existe uma 2-forma η tal que

$$\Omega \wedge dF = F\eta.$$

Demonstração. A curva $C = \mathcal{Z}(F)$ é invariante pela folheação se para todo $p \in C \backslash (\mathrm{Sing}(C) \cup \mathrm{Sing}(\Omega))$, $\mathcal{X}(p) \in T_pC$. Mas $\mathcal{X}(p) \in \ker(\Omega(p))$, para todo p. De acordo com a Observação 3 temos $T_pC = \ker(d_pF)$. Assim, como os espaços vetoriais $\ker(\Omega(p))$ e $\ker(d_pF)$ tem dimensão um, então $\ker(\Omega(p)) = \ker(d_pF)$, para todo $p \in C$. Pela Proposição 3.6, temos $\Omega(p) \wedge d_pF = 0$. Se

$$\Omega \wedge dF = B_{01}dX \wedge dY + B_{02}dX \wedge dZ + B_{12}dY \wedge dZ,$$

temos $B_{ij}(p) = 0, 0 \leq i < j \leq 2$, para todo $p \in C$. Pelo Teorema dos Zeros de Hilbert (2.2), $B_{ij} = C_{ij}F$ e

$$\Omega \wedge dF = F(C_{01}(dX \wedge dY) + C_{02}(dX \wedge dZ) + C_{12}(dY \wedge dZ)).$$

$\square$

Observação 11. Se o campo $\mathcal{X}$ e a 1-forma Ω induzem a mesma folheção em $\mathbb{P}^2$, então uma curva C, definida por um polinômio livre de quadrados F, é invariante por $\mathcal{X}$ se e somente se é invariante por Ω, ou seja, $\mathcal{X}(F) = HF$ para algum polinômio homogêneo H, se e somente $\Omega \wedge dF = F\eta$, para alguma 2-forma η.

De fato, $\mathcal{X} = F_0\dfrac{\partial}{\partial X} + F_1\dfrac{\partial}{\partial Y} + F_2\dfrac{\partial}{\partial Z}$ e $\Omega = A_0dX + A_1dY + A_2dZ$ induzem a mesma folheação em $\mathbb{P}^2$ se e somente se

$$\begin{cases} A_0 = YF_2 - ZF_1 \\ A_1 = -XF_2 + ZF_0 \\ A_2 = XF_1 - YF_0. \end{cases}$$

Além disso,

$$\mathcal{X}(F) = F_0\frac{\partial F}{\partial X} + F_1\frac{\partial F}{\partial Y} + F_2\frac{\partial F}{\partial Z} \quad \text{e}$$

$$\Omega \wedge dF = \left(A_0\frac{\partial F}{\partial Y} - A_1\frac{\partial F}{\partial X}\right) dX \wedge dY + \left(A_0\frac{\partial F}{\partial Z} - A_2\frac{\partial F}{\partial X}\right) dX \wedge dZ + \left(A_1\frac{\partial F}{\partial Z} - A_2\frac{\partial F}{\partial Y}\right) dY \wedge dZ$$

$$= mF(F_2\, dX\wedge dY - F_1\, dX\wedge dZ + F_0\, dY\wedge dZ) - Z\left(F_0\frac{\partial F}{\partial X}+F_1\frac{\partial F}{\partial Y}+F_2\frac{\partial F}{\partial Z}\right) dX\wedge dY +$$

$$+Y\left(F_0\frac{\partial F}{\partial X}+F_1\frac{\partial F}{\partial Y}+F_2\frac{\partial F}{\partial Z}\right) dX\wedge dZ - X\left(F_0\frac{\partial F}{\partial X}+F_1\frac{\partial F}{\partial Y}+F_2\frac{\partial F}{\partial Z}\right) dY\wedge dZ.$$

Na última igualdade usamos a fórmula de Euler $m\,F = X\dfrac{\partial F}{\partial X}+Y\dfrac{\partial F}{\partial Y}+Z\dfrac{\partial F}{\partial Z}$, onde m é o grau de F. Logo,

$$\mathcal{X}(F) = F_0\frac{\partial F}{\partial X}+F_1\frac{\partial F}{\partial Y}+F_2\frac{\partial F}{\partial Z} = FH \Rightarrow F \left|\left(F_0\frac{\partial F}{\partial Y}+F_1\frac{\partial F}{\partial Y}+F_2\frac{\partial F}{\partial Z}\right)\right. \Rightarrow \Omega\wedge dF = F\eta.$$

Reciprocamente,

$$\Omega\wedge dF = F\eta \Rightarrow \begin{cases} F|X\left(F_0\frac{\partial F}{\partial X}+F_1\frac{\partial F}{\partial Y}+F_2\frac{\partial F}{\partial Z}\right) \\ F|Y\left(F_0\frac{\partial F}{\partial X}+F_1\frac{\partial F}{\partial Y}+F_2\frac{\partial F}{\partial Z}\right) \\ F|Z\left(F_0\frac{\partial F}{\partial X}+F_1\frac{\partial F}{\partial Y}+F_2\frac{\partial F}{\partial Z}\right) \end{cases} \Rightarrow F\left|\left(F_0\frac{\partial F}{\partial Y}+F_1\frac{\partial F}{\partial Y}+F_2\frac{\partial F}{\partial Z}\right)\right. .$$

5 NOÇÕES SOBRE ÁLGEBRAS DE LIE

Neste capítulo apresentamos conceitos e resultados de álgebras de Lie que serão utilizados no próximo capítulo.

5.1 DERIVADAS DE LIE

Seja U um subconjunto aberto e não vazio de $\mathbb{C}^2$. Considere uma função $f : U \to \mathbb{C}^2$ e a equação diferencial $\dot{x} = f(x)$.

Ao longo deste capítulo identificaremos a equação diferencial $\dot{x} = f(x)$ com o campo vetorial

$$\mathcal{X}_f = a\frac{\partial}{\partial x_1} + b\frac{\partial}{\partial x_2},$$

onde e x_1, x_2 as coordenadas em $\mathbb{C}^2$ e a, b são as coordenadas de f. Em alguns momentos, por um abuso de linguagem, diremos que este é o campo f.

Dada uma função $\phi : U \to \mathbb{C}$, seja $L_f(\phi)$ a derivada de Lie de ϕ em relação ao campo $\mathcal{X}_f$ definida por

$$L_f(\phi)(x) = \mathcal{X}_f(\phi)(x) = a(x)\frac{\partial\phi(x)}{\partial x_1} + b(x)\frac{\partial\phi(x)}{\partial x_2} := D\phi(x)f(x).$$

Uma conta simples mostra que L_f é uma $\mathbb{C}$-derivação nos conjunto das funções definidas em U, ou seja, se ψ, ϕ são funções complexas definidas em U e $k \in \mathbb{C}$ então:

(a) $L_f(\phi + k\psi) = L_f(\phi) + kL_f(\psi)$,

(b) $L_f(\phi\psi) = L_f(\phi)\psi + L_f(\psi)\phi$.

Definição 5.1. Uma função ψ é chamada integral primeira de $\dot{x} = f(x)$ se

$$L_f(\psi) = 0.$$

Definição 5.2. Uma função ψ é dita semi-invariante por $\dot{x} = f(x)$ se existe uma função analítica μ em U tal que

$$L_f(\psi) = \mu\psi.$$

O conjunto de zeros de uma função semi-invariante, bem como qualquer curva de nível de uma integral primeira, é uma curva invariante por $\dot{x} = f(x)$.

Sejam f e g são duas funções definidas em U. O comutador de L_f e L_g, definido por

$$[L_f, L_g] = L_f L_g - L_g L_f,$$

é também uma derivação.

Observação 12. O comutador de duas derivações L_f e L_g é igual a $L_{[f,g]}$, onde $[f, g]$ é a função definida por

$$[\,f,\, g\,](x) = Dg(x)f(x) - Df(x)g(x).$$

Definição 5.3. Um campo vetorial definido pela função f é dito livre de divergência se

$$\mathrm{div}(f) := \mathrm{tr}Df = \frac{\partial a}{\partial x_1} + \frac{\partial b}{\partial x_2} = 0.$$

Observação 13. Se ψ é uma função definida em U, então

$$\mathrm{div}(\psi f) = L_f(\psi) + \mathrm{div}(f)\psi.$$

Logo, ψf é livre de divergência se e somente se $L_f(\psi) + \mathrm{div}(f)\psi = 0$, ou seja, se e somente se ψ é semi-invariante por $\dot{x} = f(x)$.

Definição 5.4. Uma função $\psi \neq 0$ definida em U é dita um fator integrante de $\dot{x} = f(x)$ se $L_f(\psi) + \mathrm{div}(f)\psi = 0$.

Proposição 5.1. Seja g um campo vetorial definido em U tal que $[g, f] = \lambda f$, para alguma função escalar λ, então $1/\det(g, f)$ é um fator de integrante para f, desde que o denominador não seja identicamente nulo.

Demonstração. Veja [28] ou o Teorema 2.48 em [19]. □

Neste capítulo vamos considerar f polinomial.

Teorema 5.2. *Considere a equação diferencial $\dot{x} = f(x)$, onde f é uma função polinomial em $\mathbb{C}^2$.*

(i) Se existir uma integral primeira elementar sobre $\mathbb{C}(x_1, x_2)$, então a equação admite um fator integrante algébrico.

(ii) Se a equação admite um fator integrante algébrico, então ela também admite um fator integrante da forma

$$(\varphi_1^{d_1} \ldots \varphi_r^{d_r})^{-1},$$

onde os φ_i são polinômios irredutíveis (e semi-invariantes) e d_i são números racionais. (Incluindo a possibilidade de $r = 0$, com fator integrante 1.)

Demonstração. Veja [21]. □

5.2 CONJUNTOS INVARIANTES E FATORES DE INTEGRAÇÃO

Nesta seção, investigaremos conjuntos invariantes e fatores integrantes da equação diferencial analítica $\dot{x} = f(x)$ na vizinhança de um ponto em $\mathbb{C}^2$, que consideraremos sendo a origem $0 = (0, 0)$.

Observação 14. As funções (germes de) analíticas em 0 formam uma álgebra isomorfa à álgebra $\mathbb{C}[[x_1, x_2]]_c$ das séries de potências em duas variáveis com domínio de convergência em um aberto não vazio.

Os elementos invertíveis em $\mathbb{C}[[x_1, x_2]]_c$ são as séries com termo constante diferente de zero.

Denotaremos o corpo quociente de $\mathbb{C}[[x_1, x_2]]_c$ por $\mathbb{C}((x_1, x_2))_c$ e nos referiremos a seus elementos como funções localmente meromorfas.

Vamos introduzir a noção de função semi-invariante neste contexto.

Definição 5.5. Uma função não invertível $\phi \in \mathbb{C}[[x_1, x_2]]_c$ é dita semi-invariante por f se $L_f(\phi) = \lambda\phi$, para algum $\lambda \in \mathbb{C}[[x_1, x_2]]_c$.

A mesma definição acima é válida para a álgebra das séries formais.

Observação 15. Se ϕ é um semi-invariante por f, com $L_f(\phi) = \lambda\phi$, o mesmo acontece com $\phi \exp(\mu)$ (μ arbitrário). De fato,

$$\begin{aligned} L_f(\phi \exp(\mu)) &= L_f(\phi) \exp(\mu) + L_f(\exp(\mu))\phi \\ &= \phi\lambda \exp(\mu) + \exp(\mu)\, L_f(\mu)\phi \\ &= (\lambda + L_f(\mu))\phi \exp(\mu). \end{aligned}$$

Antes de darmos continuidade, precisamos estabelecer algumas definições e provar um resultado que será muito útil no que segue.

Definição 5.6. Sejam $\mathbb{V}$ um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo F algebricaente fechado e T um operador linear sobre $\mathbb{V}$. Dizemos que T é semi-simples se as raízes de seu polinômio característico sobre F são todas distintas.

Definição 5.7. Sejam $\mathbb{V}$ um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo F e T um operador linear sobre $\mathbb{V}$. Dizemos que T é nilpotente se existe $m \in \mathbb{Z}$, $m > 0$, tal que $T^m = 0$.

Proposição 5.3. Sejam $\mathbb{V}$ um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo F algebricamente fechado e $T \in End(\mathbb{V})$. Valem as seguintes afirmações:

a) existe um único par $(T_s, T_n) \in End(V) \times End(V)$, tal que $T = T_s + T_n$, T_s é semi-simples, T_n é nilpotente e $T_sT_n = T_nT_s$.

b) existem polinômios $p(t)$ e $q(t)$ em uma variável, sem termo constante, tais que $T_s = p(T)$ e $T_n = q(T)$. Logo, T_n e T_s comutam com qualquer endomorfismo que comuta com T.

c) se $\mathbb{W}_2 \subset \mathbb{W}_1$ são subespaços de $\mathbb{V}$ e a imagem de $\mathbb{W}_2$ por T está contida em $\mathbb{W}_1$, então a imagem de $\mathbb{W}_2$ por T_s e T_n também está contida em $\mathbb{W}_1$.

Demonstração. Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ os autovalores distintos de T e $m_1, m_2, \ldots, m_k$ suas multiplicidades. Então o polinômio característico de T é

$$p_T(t) = \prod_i (t - \lambda_i)^{m_i}.$$

Sejam $\mathbb{V}_i = \ker(T - \lambda_i I)^{m_i}$, então $\mathbb{V} = \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{V}_k$ e $T(\mathbb{V}_i) \subseteq \mathbb{V}_i$, para todo i.

O polinômio característico de $T|_{\mathbb{V}_i}$ é $(t - \lambda_i I)^{m_i}$ e, pelo Teorema Chinês dos restos, existe polinômio $p(t)$ satisfazendo

$$\begin{cases} p(t) & \equiv & \lambda_1 & \mod (t - \lambda_1)^{m_1} \\ p(t) & \equiv & \lambda_2 & \mod (t - \lambda_2)^{m_2} \\ & \vdots & & \\ p(t) & \equiv & \lambda_k & \mod (t - \lambda_k)^{m_k} \\ p(t) & \equiv & 0 & \mod t. \end{cases}$$

Seja $q(t) = t - p(t)$, então como $p(t) \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ t)$, segue que $p(t)$ e $q(t)$ não tem termo constante.

Seja $T_s = p(T)$ e $T_n = q(T)$, temos que T_s e T_n comutam, pois eles são polinômios em T. Além disso, eles comutam com todos os automorfismos que comutam com T.

Todo subespaço invariante por T será invariante também por T_n e T_s. Logo, $\mathbb{V}_i$ é invariante por T_n e T_s.

Das equações do sistema acima obtemos que existem polinômios $s_i(t)$ tais que $p(t) - \lambda_i = s_i(t)(t - \lambda_i)^{m_i}$. Portanto, para cada i obtemos que

$$(T_s - \lambda_i I)|_{\mathbb{V}_i} = s_i(T)(T - \lambda_i I)^{m_i}|_{\mathbb{V}_i} = 0.$$

Logo, T_s é diagonalizável em $\mathbb{V}_i$, com autovalor λ_i.

Seja $m = max\,\{m_1, m_2, \ldots, m_k\}$. Como $T_n = T - T_s = (T - \lambda_i I) - (T_s - \lambda_i I)$ obtemos, para cada i, que

$$T_n^m|_{\mathbb{V}_i} = [(T - \lambda_i I) - (T_s - \lambda_i I)]^m|_{\mathbb{V}_i} = 0.$$

Portanto, $T_n^m = 0$. Como $p(t)$ e $q(t)$ não tem termo constante, é fácil ver que $p(T)|_{\mathbb{W}_2} \subseteq \mathbb{W}_1$ e $q(T)|_{\mathbb{W}_2} \subseteq \mathbb{W}_1$.

Agora vamos provar a unicidade. Seja $T = S + N$ uma outra decomposição de T. Então $T_s + T_n = S + N$, ou ainda, $T_s - S = N - T_n$. Como T_n e N são nilpotentes, segue que $T_n - N$ é nilpotente. Da mesma forma, $T_s - S$ é semi-simples. Portanto, $(T_s - S)^m = 0$, para algum $m > 0$. Logo, zero é o único autovalor de $T_s - S$, ou seja, $T_s = S$ e, consequentemente, $T_n = N$. □

Observação 16. Seja T um operador linear sobre um espaço vetorial (sobre um corpo algebricamente fechado) $\mathbb{V}$ de dimensão finita. Suponha que $T = D + N$, onde D é um operador semi-simples e N um operador nilpotente. Então $L_T = L_N + L_D$ é a decomposição de L_T como soma de operador semi-simples e um nilpotente.

Voltemos ao estudo da equação $\dot{x} = f(x)$. Suponhamos que $f(0) = 0$ e defina $B := Df(0)$. Sejam $B = B_s + B_n$ a decomposição de B em partes semi-simples e nilpotente e α_1, α_2 os autovalores de B.

Para a prova do Teorema a seguir veja [1], [2] e [26].

Teorema 5.4. *Suponha que $B_s =$ diag(α_1, α_2), com α_1 e α_2 não ambos nulos. Então existe uma série de potências formal $\Psi = id + \cdots$ que preserva as soluções de $\dot{x} = f(x)$ para $\dot{x} = \tilde{f}(x)$, com $\tilde{f} = B + \cdots$ sendo uma série de potências formal e satisfazendo a relação $[B_s, \tilde{f}] = 0$.*

Suponha que $B_s \neq 0$, ou seja, um dos autovalores de B deve ser não nulo.

Lema 5.1. Seja $B_s = \mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2)$, com $\alpha_1 \neq 0$. Seja $\tilde{f}$ a forma normal de f, isto é, $[B_s, \tilde{f}] = 0$. Se α_2/α_1 não é um número racional, então $\tilde{f} = B = B_s$.

Demonstração. Veja [2]. □

Lema 5.2. Seja B a transformação linear em $\mathbb{C}^d$, com decomposição $B = B_s + B_n$ em parte semi-simples e nilpotente. Seja $f^{(j)}$ um campo vetorial polinomial em $\mathbb{C}^d$ que é homogêneo de grau j ($j \geq 2$) e suponha que o campo vetorial $f = B + \sum_j f^{(j)}$ esteja na forma normal, ou seja, $[B_s, f] = 0$.

Se $\phi = \sum_{j \geq r} \phi_j$ (com $\phi_r \neq 0$) e $\lambda = \sum_{i \geq 0} \lambda_i$ satisfazem $L_f(\phi) = \lambda\phi$, então existe uma série formal invertível β tal que $\phi^* = \beta\phi = \sum_{j \geq r} \phi_j^*$ satisfaz $L_f(\phi^*) = \lambda^*\phi^*$, com $L_{B_s}(\lambda^*) = 0$. Além disso, $L_{B_s}(\phi^*) = \lambda_0\phi^*$.

Demonstração. Iniciamos observando que do fato de $[B_s, f] = 0$, segue que $[B_s, f^{(j)}] = 0$, para todo $j \geq 2$. Portanto, $[L_{B_s}, L_{f^j}] = L_{B_s}L_f - L_fL_{B_s} = [L_{B_s}, L_f] = L_{[B_s, f]} = L_{[0]} = 0$, ou seja, $L_{B_s}L_{f^{(j)}} = L_{f^{(j)}}L_{B_s}$, para todo $j \geq 2$.

Além disso, como $BB_s = B_sB$, segue que $[B, B_s] = 0$ e, consequentemente, $L_BL_{B_s} = L_{B_s}L_B$.

Por último, usaremos também que $L_B = L_{B_s} + L_{B_n}$ é a decomposição de L_B em parte semi-simples e nilpotente.

Da semi-invariância de ϕ, isto é, da igualdade $L_f(\phi) = \lambda\phi$ obtemos

$$\sum_{j\geq r} L_B(\phi_j) + \sum_{j\geq r}\sum_{i\geq 2} L_{f^{(i)}}(\phi_j) = \lambda \sum_{j\geq r}\phi_j.$$

Comparando os dois lados desta igualdade concluímos que

$$L_B(\phi_{r+j}) + L_{f^{(2)}}(\phi_{r+j-1}) + \cdots + L_{f^{(j+1)}}(\phi_r) = \lambda_0\phi_{r+j} + \lambda_1\phi_{r+j-1} + \cdots + \lambda_j\phi_r, \quad (5.1)$$

para todo $j > 0$ e $L_B(\phi_r) = \lambda_0\phi_r$.

Note que $L_{B_s}(\lambda_0) = 0$. Agora assuma que $L_{B_s}(\lambda_j) = 0$ para todo $j < k$. Defina $\tilde{\phi}_0 := (1+\beta_k)\phi$, onde β_k é um polinômio homogêneo de grau k. Então,

$$\tilde{\phi}_0 = \phi_r + \cdots + \phi_{r+k-1} + (\phi_{r+k} + \beta_k\phi_r) + (\phi_{r+k+1} + \beta_k\phi_{r+1}) + \cdots$$

e

$$L_f(\tilde{\phi}_0) = \phi\, L_f(1+\beta_k) + (1+\beta_k)\, L_f(\phi) = \phi\, L_f(\beta_k) + (1+\beta_k)\lambda\phi =$$
$$= \phi\, L_f(\beta_k) + \lambda\tilde{\phi}_0 = \frac{\tilde{\phi}}{1+\beta_k}L_f(\beta_k) + \lambda\tilde{\phi}_0 = \tilde{\phi}_0\left(\frac{1}{1+\beta_k}L_f(\beta_k) + \lambda\right).$$

Como $(1+\beta_k)^{-1} = 1 - \beta_k +$ termos de grau maior que k, segue que

$$L_f(\tilde{\phi}_0) = \tilde{\phi}_0\,(\lambda + (1-\beta_k+\cdots)L_f(\beta_k)) = \tilde{\phi}_0(\lambda + L_f(\beta_k) - L_f(\beta_k)\beta_k + \cdots) = \tilde{\phi}_0(\lambda + L_B(\beta_k) + \cdots).$$

Logo, se

$$\tilde{\lambda} := \lambda + L_B(\beta_k) + \cdots = \lambda_0 + \cdots + \lambda_{k-1} + (\lambda_k + L_B(\beta_k)) + \cdots,$$

então $L_f(\tilde{\phi}_0) = \tilde{\lambda}\,\tilde{\phi}_0$.

Afirmamos que podemos escolher β_k de modo que $L_{B_s}(\lambda_k + L_B(\beta_k)) = 0$.

De fato, seja $\mathscr{L}_k$ o conjunto de todas as funções polinomiais homogêneas de grau k. Uma conta simples mostra que as funções definidas por monômios homogêneos de grau k são autovetores de $L_{B_s}|_{\mathscr{L}_k}$. Portanto, $\mathscr{L}_k = \ker(L_{B_s}|_{\mathscr{L}_k}) \oplus \mathrm{im}(L_{B_s}|_{\mathscr{L}_k})$. Além disso, $L_B|_{\mathscr{L}_k}$ restrito à imagem é invertível (ver Observação 17). Logo, existem $\lambda_k' \in \mathscr{L}_k$ e $\lambda_k^0 \in \ker(L_{B_s})$ tais que $\lambda_k = L_{B_s}(\lambda_k') + \lambda_k^0$. Além disso, existe $-\beta_k \in \mathscr{L}_k$ para o qual $L_B(-\beta_k) = L_{B_s}(\lambda_k')$. Portanto, $\lambda_k + L_B(\beta_k) \in \mathrm{Ker}(L_{B_s})$.

Continuando este processo, suponha que temos definido

$$\tilde{\phi}_{n-1} = (1+\beta_k)\ldots(1+\beta_{k+l})\phi,$$

tal que $L_f(\tilde{\phi}_{n-1}) = \tilde{\lambda}_{n-1}(\tilde{\phi}_{n-1})$, $\tilde{\lambda}_{n-1} = \lambda_0 + \cdots + \lambda_{k+l} + \lambda_{k+l+1} + \cdots$, $L_{B_s}(\lambda_j) = 0$, para todo $j = 0, \ldots, k+l$ e $L_{B_s}(\lambda_{k+l+1}) \neq 0$. Daí, procedendo da mesma forma que fizemos anteriormente, podemos escolher $\beta_{k+l+1} \in \mathscr{L}_{k+l+1}$ tal que, para $\tilde{\phi}_n = (1 + \beta_{k+l+1})\tilde{\phi}_{n-1}$, $L_f(\tilde{\phi}_n) = \tilde{\lambda}_n\tilde{\phi}_n$,

$$\tilde{\lambda}_n = \lambda_0 + \cdots + \lambda_{k+l} + (\lambda_{k+l+1} + L_B(\beta_{k+l+1})) + \cdots$$

e $L_{B_s}(\lambda_{k+l+1} + L_B(\beta_{k+l+1})) = 0$.

Para mostrarmos a segunda afirmação do Lema, isto é, que $L_{B_s}(\phi^*) = \lambda_0\phi^*$, assuma que $L_{B_s}(\phi^*_{r+j}) = \lambda_0\phi^*_{r+j}$, para todo $j < k$. Por (5.1), usando ϕ^* ao invés de ϕ e λ^* ao invés de λ, temos

$$L_B(\phi^*_{r+k}) - \lambda_0\phi^*_{r+k} = -(L_{f^{(2)}}(\phi^*_{r+k-1}) + \cdots + L_{f^{(k+1)}}(\phi^*_r)) + \lambda^*_1\phi^*_{r+k-1} + \cdots + \lambda^*_k\phi^*_r =: \psi$$

Vamos ver que $L_{B_s}(\psi) = \lambda_0\psi$. De fato,

$$L_{B_s}(\psi) = L_{B_s}(-(L_{f^{(2)}}(\phi^*_{r+k-1}) + \cdots + L_{f^{(k+1)}}(\phi^*_r)) + \lambda^*_1\phi^*_{r+k-1} + \cdots + \lambda^*_k\phi^*_r) =$$

$$= -(L_{f^{(2)}}L_{B_s}(\phi^*_{r+k-1}) + \cdots + L_{f^{(k+1)}}L_{B_s}(\phi^*_r)) + L_{B_s}(\lambda^*_1\phi^*_{r+k-1}) + \cdots + L_{B_s}(\lambda^*_k\phi^*_r) =$$

$$= -(L_{f^{(2)}}(\lambda_0\phi^*_{r+k-1}) + \cdots + L_{f^{(k+1)}}(\lambda_0\phi^*_r)) + L_{B_s}(\lambda^*_1)\phi^*_{r+k-1} +$$

$$+ L_{B_s}(\phi^*_{r+k-1})\lambda^*_1 + \cdots + L_{B_s}(\lambda^*_k)\phi^*_r + L_{B_s}(\phi^*_r)\lambda^*_k =$$

$$= -(L_{f^{(2)}}(\lambda_0)\phi^*_{r+k-1} + L_{f^{(2)}}(\phi^*_{r+k-1})\lambda_0 + \cdots + L_{f^{(k+1)}}(\lambda_0)\phi^*_r +$$

$$+ L_{f^{(k+1)}}(\phi^*_r)\lambda_0) + \lambda_0\phi^*_{r+k-1}\lambda^*_1 + \cdots + \lambda_0\phi^*_r\lambda^*_k =$$

$$= \lambda_0[-(L_{f^{(2)}}(\phi^*_{r+k-1}) + \cdots + L_{f^{(k+1)}}(\phi^*_r)) + \lambda^*_1\phi^*_{r+k-1} + \cdots + \lambda^*_k\phi^*_r] = \lambda_0\psi.$$

Da relação,

$$L_{B_s}(L_B(\phi^*_{r+k}) - \lambda_0\phi^*_{r+k}) = \lambda_0(L_B(\phi^*_{r+k}) - \lambda_0\phi^*_{r+k}),$$

obtemos que

$$L_B(L_{B_s}(\phi^*_{r+k}) - \lambda_0\phi^*_{r+k}) = \lambda_0(L_{B_s}(\phi^*_{r+k}) - \lambda_0\phi^*_{r+k})$$

donde segue que $L_{B_s}(\phi^*_{r+k}) - \lambda_0\phi^*_{r+k}$ é um autovetor de L_B associado ao autovalor λ_0. Portanto, $L_{B_s}(\phi^*_{r+k}) - \lambda_0\phi^*_{r+k}$ é também um autovetor de L_{B_s} associado ao autovalor λ_0.

Como $L_{B_s}|_{\mathscr{L}_k}$ é diagonalizável podemos escrever $\mathscr{L}_k = \mathbb{W}_{\lambda_0} \oplus \mathbb{W}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{W}_{\lambda_l}$, onde $\mathbb{W}_{\lambda_i}$ é o autoespaço de $L_{B_s}|_{\mathscr{L}_k}$ associado ao autovalor λ_i. Escrevendo $\phi^*_{r+k} = u_0 + u_1 + \cdots + u_l$, com $u_i \in \mathbb{W}_{\lambda_i}$, teremos

$$L_{B_s}(\phi^*_{r+k}) - \lambda_0\phi^*_{r+k} = L_{B_s}(u_0) + \cdots + L_{B_s}(u_l) - \lambda_0u_0 - \cdots - \lambda_0u_l =$$

$$= (L_{B_s}(u_1) - \lambda_0u_1) + \cdots + (L_{B_s}(u_l) - \lambda_0u_l) \in \mathbb{W}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{W}_{\lambda_l}.$$

Logo,

$$L_{B_s}(\phi^*_{r+k}) - \lambda_0\phi^*_{r+k} \in \mathbb{W}_{\lambda_0} \cap (\mathbb{W}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{W}_{\lambda_l}) = \{0\},$$

ou seja, $L_{B_s}(\phi^*_{r+k}) = \lambda_0\phi^*_{r+k}$. □

Teorema 5.5. *Seja* $B_s = diag(\alpha_1, \alpha_2)$*, com* $\alpha_1 \neq 0$*. Suponha que* $f = B + \sum_j f^{(j)}$ *é um campo de vetores de uma série de potências formal na forma normal.*

Se $\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}$ *não é um numero racional, então* x_1 *e* x_2 *são, exceto pela multiplicação por séries de potências invertíveis, as únicas funções irredutíveis que são semi-invariantes por* f *em* $\mathbb{C}[[x_1, x_2]]$*.*

Demonstração. Seja ϕ uma função semi-invariante por f. Pelo Lema 5.2, podemos assumir que $L_{B_s}(\phi) = \lambda_0\, \phi$, para algum $\lambda_0 \in \mathbb{C}$. Como B_s é semi-simples, isto é, B_s é diagonalizável, exceto por uma mudança de base em $\mathbb{C}^2$, se necessário, podemos supor que $B_s(x_i) = \alpha_i x_i$, com $i = 1, 2$. Daí,

$$L_{B_s}(x_1^{i_1} x_2^{i_2}) = i_1 x_1^{i_1 - 1} x_2^{i_2} \alpha_1 x_1 + i_2 x_2^{i_2 - 1} x_1^{i_1} \alpha_2 x_2 = (i_1 \alpha_1 + i_2 \alpha_2) x_1^{i_1} x_2^{i_2}.$$

Escrevendo ϕ na forma $\phi = \sum_{i,j} a_{ij}\, x_1^i\, x_2^j$, com $a_{ij} \in \mathbb{C}$, teremos

$$L_{B_s}(\phi) = \sum_{i,j} a_{ij} (i\alpha_1 + j\alpha_2)\, x_1^i\, x_2^j = \lambda_0\, \phi.$$

Portanto, $\lambda_0 = i\,\alpha_1 + j\,\alpha_2$ para todos os pares (i, j) tais que $a_{ij} \neq 0$. Suponha que existam pelo menos dois pares $(i, j) \neq (k, l)$ tais que

$$i\alpha_1 + j\alpha_2 = k\alpha_1 + l\alpha_2 = \lambda_0.$$

Sem perda de generalidade, podemos supor $l \neq j$. Então teremos que $\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} = \dfrac{i-k}{l-j}$ é racional. O que um absurdo. Logo, ϕ deve ser um monômio. Portanto, as únicas funções irredutíveis semi-invariantes por f em $\mathbb{C}[[x_1, x_2]]$ são x_1 e x_2. □

Observação 17. Seja $\mathscr{L}_k$ o conjunto de todas as funções polinomiais homogêneas de grau k. Considere a decomposição $B = B_s + B_n$ e a restrição do operador L_{B_s} a $\mathscr{L}_k$. Uma conta simples mostra que as funções definidas por monômios homogêneos de grau k são autovetores de $L_{B_s}|_{\mathscr{L}_k}$.

Denotemos por $\mathbb{W}$ o espaço vetorial gerado pelos autovetores de $L_{B_s}|_{\mathscr{L}_k}$ associados aos autovalores não nulos e $\mathbb{W}_0$ o espaço vetorial gerado pelos autovetores de $L_{B_s}|_{\mathscr{L}_k}$ associados ao autovalor zero. Como $L_{B_s}|_{\mathscr{L}_k}$ é um operador semi-simples, segue que $\mathbb{W}$ é a imagem de $L_{B_s}|_{\mathscr{L}_k}$. Portanto, $\mathscr{L}_k = \mathrm{im}(L_{B_s}|_{\mathscr{L}_k}) \oplus \ker(L_{B_s}|_{\mathscr{L}_k})$.

Queremos provar que $L_B|_{\mathbb{W}}$ é invertível. Seja $\varphi \in \mathbb{W} \setminus \{0\}$ tal que $L_B(\varphi) = 0$. Então φ é um autovetor de L_B associado ao autovalor 0. Como $\varphi \in \mathscr{L}_k$ e $L_{B_s} = p(L_B)$, onde $p(t)$ é polinômio sem termo constante (veja Proposição 5.3), segue $\varphi \in \mathbb{W}_0$. O que é um absurdo, pois $\mathbb{W}_0 \cap \mathbb{W} = \{0\}$. Logo, $L_B|_{\mathbb{W}}$ é injetiva. Como estamos em um espaço de dimensão finita segue que $L_B|_{\mathbb{W}}$ é invertível.

Também temos que $L_{B_s}|_{\mathbb{W}}$ é invertível. Basta ver que se $\varphi \in \mathbb{W}$ e $L_{B_s}(\varphi) = 0$, então $\varphi \in \mathbb{W} \cap \mathbb{W}_0 = \{0\}$. Logo, $L_{B_s}|_{\mathbb{W}}$ é injetiva. Como $\mathbb{W}$ tem dimensão finita, segue que $L_{B_s}|_{\mathbb{W}}$ é sobrejetiva.

6 SOLUÇÕES DE CAMPOS DE VETORES

Este capítulo contém um estudo do algoritmo apresentado por S. C. Coutinho e L. Menasché Schechter em [7] que nos permite testar se um dado campo vetorial plano (com coeficientes racionais) tem ou não curvas algébricas invariantes.

6.1 HIPÓTESES E RESULTADOS

Vamos iniciar com um campo em $\mathbb{P}^2$ dado localmente em U_2 por

$$D_{a,b} = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y},$$

onde $x = X/Z$ e $y = Y/Z$ são as coordenadas locais em U_2 e a, b são polinômios que satisfazem as seguintes condições:

(H1) $a, b \in \mathbb{Q}[x, y]$.

(H2) $\deg(a) = \deg(b) = n \geq 2$.

(H3) O polinômio $ya_n - xb_n$ é não nulo e irredutível sobre $\mathbb{Q}$, onde a_n e b_n denotam as componentes homogêneas de grau n dos polinômios a e b, respectivamente.

Como consequência das hipóteses acima obtemos as seguintes afirmações:

(H4) x não divide a_n.

Caso contrário teríamos que $a_n = x\tilde{a}_n$ e, portanto, $ya_n - xb_n$ poderia ser reescrito como $yx\tilde{a}_n - xb_n = x(y\tilde{a}_n - b_n)$ o que contradiz o hipótese (H3) acima.

(H5) $\text{mdc}_{\mathbb{Q}[x,y]}(a_n, b_n) = 1$.

Suponha que $\text{mdc}(a, b) \neq 1$, isto é, existe $h(x, y) \in \mathbb{Q}[x, y]$ tal que

$$h(x, y)|a(x, y) \;\; e \;\; h(x, y)|b(x, y) \;\; com \; \deg(h) \geq 1$$

daí, $a(x, y) = h(x, y)p(x, y)$ e $b(x, y) = h(x, y)q(x, y)$ com $p(x, y), q(x, y) \in \mathbb{Q}[x, y]$ e $s = \deg(h(x, y))$ tal que $1 \leq s \leq n$, assim

$$ya(x, y) - xb(x, y) = h(x, y)[yp(x, y) - xq(x, y)]$$

Consequentemente $ya_n(x, y) - xb_n(x, y) = h_s(x, y)[yp_{n-s}(x, y) - xq_{n-s}(x, y)]$, mas como $ya_n(x, y) - xb(x, y)$ é irredutível e $s \geq 1$ temos que $yp_{n-s}(x, y) - xq_{n-s}(x, y)$ é invertível em $\mathbb{Q}[x, y]$. Portanto $yp_{n-s}(x, y) - xq_{n-s}(x, y) = d_0 \in \mathbb{Q}$; $d_0 \neq 0$ o que seria uma contradição pois o polinômio $yp_{n-s}(x, y) - xq_{n-s}(x, y) = d_0$ é homogêneo de grau $n - s + 1 \geq 1$. Então, $\text{mdc}_{\mathbb{Q}[x,y]}(a, b) = 1$.

Observação 18. Se $\text{mdc}_{\mathbb{Q}[x,y]}(a,b) = 1$ então $\text{mdc}_{\mathbb{C}[x,y]}(a,b) = 1$.

Vimos no Capítulo 4, Observação 8, que o campo $D_{a,b}$ e a 1-forma $\omega_{a,b} = bdx - ady$ definem localmente a mesma folheação $\mathcal{F}_{a,b}$ em $\mathbb{P}^2$. Usando as relações dadas no Exemplo (18) temos que a forma global de $\omega_{a,b}$ é

$$\Omega_{a,b} = ZBdX - ZAdY + (YA - XB)dZ \tag{6.1}$$

onde

$$A(X,Y,Z) = Z^n b\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right),$$
$$B(X,Y,Z) = -Z^n a\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right).$$

Observação 19. De agora em diante, vamos omitir os subscritos a menos que precisemos chamar atenção para a dependência de D, Ω ou $\mathcal{F}$ nos coeficientes a e b.

Observamos ainda que, sob as hipóteses acima, o grau da folheação $\mathcal{F}$ é n.

Lembremos que pela Definição 4.9 um ponto $P = (X_0 : Y_0 : Z_0) \in \mathbb{P}^2$ é uma singularidade de $\mathcal{F}$ se P é um zero comum dos polinômios que definem Ω. Por (6.1) isto quer dizer que

$$a(x_0,y_0) = b(x_0,y_0) = 0 \quad \text{ou} \quad Z_0 = Y_0\, A(X_0,Y_0,Z_0) - X_0\, B(X_0,Y_0,Z_0) = 0,$$

onde $x_0 = X_0/Z_0$ e $y_0 = Y_0/Z_0$. Entretanto, como

$$A(X,Y,Z) = Z^n a_0 + Z^{n-1} a_1\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) Z + \cdots + a_n\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) Z^n$$

e

$$B(X,Y,Z) = Z^n b_0 + Z^{n-1} b_1\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) Z + \cdots + b_n\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) Z^n$$

vemos que as singularidades satisfazem

$$a(x_0,y_0) = b(x_0,y_0) = 0 \quad \text{ou} \quad Z_0 = Y_0\, a_n(X_0,Y_0) - X_0\, b_n(X_0,Y_0) = 0,$$

onde $x_0 = X_0/Z_0$ e $y_0 = Y_0/Z_0$.

Em particular, como $\text{mdc}(a,b) = 1$, pelo Teorema de Bézout, temos que $\mathcal{F}$ tem um número finito de singularidades.

Denotaremos o conjunto de todas as singularidades de $\mathcal{F}$ por $\text{Sing}(\mathcal{F})$. Além disso, denotamos por $\text{Sing}(D) = \text{Sing}(\mathcal{F}) \cap U_2$.

Seja $\bar{C}$ uma curva reduzida em $\mathbb{P}^2$, isto é, $\bar{C}$ é o conjunto de zeros de um polinômio homogêneo $F(X,Y,Z) \in \mathbb{C}[X,Y,Z]$ livre de quadrados.

Pela Proposição 4.3 dizemos que $\bar{C}$ é invariante por $\mathcal{F}$ se existe uma 2-forma polinomial Θ tal que

$$\Omega \wedge dF = F\Theta \tag{6.2}$$

Definição 6.1. Uma curva irredutível $\bar{C}$ invariante por $\mathcal{F}$ é chamada uma solução algébrica de $\mathcal{F}$.

Exemplo 25. A reta L_∞ definida por $Z = 0$ é invariante pela folheação $\mathcal{F}$ definida por $\Omega = ZBdX - ZAdY + (YA - XB)dZ$.

De fato, basta observar que

$$\Omega \wedge dZ = [ZBdX - ZAdY + (YA - XB)dZ] \wedge dZ = Z(BdX \wedge dZ - AdY \wedge dZ).$$

Lema 6.1. Se $F \neq Z$, e $f(x,y) = F(x,y,1)$ é a desomogeneização de F em relação a Z, então a condição (6.2) é equivalente a

$$D(f) = gf. \tag{6.3}$$

para algum polinômio $g \in \mathbb{C}[x,y]$.

Demonstração. Segue da Observação 11 que $\Omega \wedge dF = F\Theta$ é equivalente a $\mathcal{X}(F) = FH$ para algum polinômio $H \in \mathbb{C}[X,Y,Z]$. Mas $\mathcal{X}(F) = FH$ implica

$$F_0(x,y,1)\frac{\partial F}{\partial X}(x,y,1) + F_1(x,y,1)\frac{\partial F}{\partial Y}(x,y,1) + F_2(x,y,1)\frac{\partial F}{\partial Z}(x,y,1) = f(x,y)h(x,y),$$

onde $h(x,y) = H(x,y,1)$. Como, $\frac{\partial F}{\partial X}(x,y,1) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial F}{\partial Y}(x,y,1) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ e, pela fórmula de Euler,

$$\frac{\partial F}{\partial Z}(x,y,1) = mF(x,y,1) - x\frac{\partial F}{\partial X}(x,y,1) - y\frac{\partial F}{\partial Y}(x,y,1)$$

temos

$$(F_0(x,y,1) - xF_2(x,y,1))\frac{\partial F}{\partial X}(x,y,1) + (F_1(x,y,1) - yF_2(x,y,1))\frac{\partial F}{\partial Y}(x,y,1) =$$

$$= f(x,y)(mF_2(x,y,1) - h(x,y)) \Rightarrow D(f) = f(x,y)g(x,y),$$

onde $g(x,y) = mF_2(x,y,1) - h(x,y)$. □

Uma recíproca do Lema anterior é válida, isto é, se um polinômio livre de quadrados $f \in \mathbb{C}[x,y]$ satisfaz (6.3), então sua homogeneização $F(X,Y,Z) = Z^{grau(f)}f(X/Z,Y/Z)$ com respeito a variável Z é uma curva algébrica invariante de Ω. Neste caso, também dizemos que f é invariante sob Ω.

Portanto, uma curva C do plano afim $\mathbb{C}^2$ é invariante por D se e somente se sua projetivização $\bar{C} \subset \mathbb{P}^2$ é invariante sob Ω.

A seguinte Proposição afirma que se uma 1-forma com coeficientes racionais tem uma curva algébrica invariante (com coeficientes complexos) então ela tem uma curva algébrica invariante (não necessariamente a mesma) com coeficientes racionais.

Proposição 6.1. Se Ω tem uma curva algébrica invariante além da reta no infinito L_∞, então existe $F \in \mathbb{Q}[x, y, z]$, $F \neq z$, tal que $\bar{C} = \mathcal{Z}(F)$ é também uma curva algébrica invariante por Ω.

Demonstração. Ver [6] ou [17]. □

Assim, para provar que uma 1-forma Ω, com coeficientes racionais, não possui curvas algébricas invariantes em $\mathbb{P}^2 \backslash L_\infty$, basta considerar o caso especial em que as soluções são definidas por um polinômio de $\mathbb{Q}[X, Y, Z]$. Portanto, vamos assumir no restante deste capítulo que todas as curvas são definidas sobre $\mathbb{Q}$.

Lema 6.2. Se $\bar{C}$ é uma curva algébrica projetiva reduzida invariante por $\mathcal{F}$, que não tem L_∞ como uma de seus componentes irredutíveis, então

$$\emptyset \neq \bar{C} \cap L_\infty = \mathrm{Sing}(\mathcal{F}) \cap L_\infty$$

é um conjunto de $n + 1$ elementos.

Demonstração. Pelo Teorema de Bézout, temos que $\bar{C} \cap L_\infty \neq \emptyset$,

Além disso, como L_∞ não é uma componente de $\bar{C}$, segue que elas podem se interceptar apenas em pontos singulares de $\mathcal{F}$.

Agora suponha que $\bar{C} = \mathcal{Z}(F)$, onde F é um polinômio homogêneo com coeficientes racionais. Como L_∞ não é uma componente de $\bar{C}$, segue que $F(X, Y, 0)$ é um polinômio não nulo. Sabemos também que as singularidades de $\mathcal{F}$ em L_∞ satisfazem $Ya_n - Xb_n = 0$. Logo,

$$\bar{C} \cap L_\infty = \mathcal{Z}(F(X, Y, 0)) \subseteq \mathrm{Sing}(\mathcal{F}) \cap L_\infty = \mathcal{Z}(Ya_n - Xb_n) \tag{6.4}$$

e, consequentemente,

$$\sqrt{\langle Ya_n - Xb_n \rangle} = \mathcal{I}(\mathcal{Z}(Ya_n - Xb_n)) \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{Z}(F(X, Y, 0))) = \sqrt{\langle F(X, Y, 0) \rangle}. \tag{6.5}$$

Donde obtemos que existe $s \in \mathbb{Z}$, $s > 0$, tal que

$$F(X, Y, 0) | (Ya_n - Xb_n)^s, \text{ em } \mathbb{C}[X, Y]. \tag{6.6}$$

Como $\bar{C} \cap L_\infty \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$, concluímos que $\mathrm{mdc}(F(X, Y, 0), Ya_n - Xb_n) \neq 1$. Entretanto, como, por hipótese, $Ya_n - Xb_n$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$ e $F(X, Y, 0)$ tem coeficientes racionais, segue que

$$Ya_n - Xb_n | F(X, Y, 0). \tag{6.7}$$

Usando as relações (6.6) e (6.7) obtemos que $Ya_n - Xb_n$ e $F(X, Y, 0)$ tem as mesmas componentes irredutíveis. Logo, vale a igualdade em (6.5) e, consequentemente, em (6.4).

Além disso, como $Ya_n - Xb_n$ tem grau $n+1$ e é separável em $\mathbb{Q}[x,y]$, ou seja, não tem raízes múltiplas, segue que o conjunto $\mathrm{Sing}(\mathcal{F}) \cap L_\infty$ tem exatamente $n+1$ pontos distintos. $\square$

O jacobiano de $\mathcal{F}$ em um ponto $p \in \mathrm{Sing}(D)$ é a matriz

$$J(p) = \begin{bmatrix} \partial a/\partial x & \partial a/\partial y \\ \partial b/\partial x & \partial b/\partial y \end{bmatrix}$$

Dizemos que $\mathcal{F}$ é **não-degenerado** em p se $\det(J(p)) \neq 0$. Neste caso, os autovalores λ_1 e λ_2 de $J(p)$ são ambos diferentes de zero, e os quocientes λ_1/λ_2,λ_2/λ_1 são ditos expoentes característicos de $\mathcal{F}$ em p.

Observação 20. Seja $S \subset \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$. O conjunto de todos os números complexos que são expoentes característicos de $\mathcal{F}$ nos pontos de S será denotado por $\mathrm{Exp}_{\mathcal{F}}(S)$.

Um resultado muito importante neste trabalho é o seguinte:

Proposição 6.2. Seja $\bar{C} \neq L_\infty$ uma curva algébrica reduzida projetiva que é invariante por $\mathcal{F}$. Se

$$\mathrm{Exp}_{\mathcal{F}}(\mathrm{Sing}(\mathcal{F}) \cap L_\infty) \cap \mathbb{Q} = \emptyset$$

então $\bar{C}$ é não singular em todos seus pontos no infinito e $\deg(\bar{C}) = n+1$.

Demonstração. Suponha que $\bar{C} = \mathcal{Z}(F)$, onde $F \in \mathbb{Q}[X,Y,Z]$ é um polinômio homogêneo livre de quadrados. Como $F \neq Z$, o polinômio ZF define uma curva algébrica invariante por $\mathcal{F}$.

Pela hipótese, para cada ponto $p \in \mathrm{Sing}(\mathcal{F}) \cap L_\infty$, o expoente característico λ_1/λ_2 não é um número racional. Logo, pelo Teorema 5.5, localmente, as únicas curvas semiinvariantes irredutíveis da folheação são x e y.

Como $Z \nmid F$ e F é livre de quadrados segue que, localmente, $F = x$ e $Z = y$ (ou $F = y$ e $Z = x$). Logo, L_∞ e $\bar{C}$ são transversais, ou seja, a multiplicidade de interseção de $\bar{C}$ e L_∞ em cada ponto de sua interseção é 1.

Usando o Teorema de Bézout e o Lema 6.2 temos que

$$\deg(\bar{C}) = \deg(\bar{C})\deg(L_\infty) = \sum_{p \in \bar{C} \cap L_\infty} m_p(p) = n+1.$$

$\square$

Uma aplicação importante dos expoentes característicos de $\mathcal{F}$ diz respeito ao índice de Camacho-Sad do um campo de vetores.

Seja p uma singularidade não degenerada de $\mathcal{F}$ e sejam λ_1 e λ_2 os autovalores do jacobiano de $\mathcal{F}$ em p. Assuma que $\lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. Se C é o germe da curva holomorfa, suave em p e invariante por $\mathcal{F}$, então o índice de Camacho-Sad (ou CS) de C em p é

$$CS_{\mathcal{F}}(C,p) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \tag{6.8}$$

onde o vetor tangente à C em p é um autovetor de λ_2 em relação ao jacobiano de $\mathcal{F}$ em p.

Teorema 6.3. *(Camacho-Sad) Seja $\bar{C}$ uma curva algébrica suave de $\mathbb{P}^2$ invariante por $\mathcal{F}$. A soma dos CS-índices de $\bar{C}$ sobre todas as singularidades de $\mathcal{F}$ contidas em $\bar{C}$ é igual ao deg$(\bar{C})^2$.*

Demonstração. Ver [3], Capítulo V, páginas 151-156. □

Lema 6.3. (Lema de Darboux). Sejam A, A', B, B', C e C' polinômios homogêneos nas variáveis X, Y e Z de graus l, l', m, m', n e n' respectivamente, tais que as curvas $A = 0, B = 0, C = 0$ e as curvas $A' = 0, B' = 0, C' = 0$ não tem componente em comum duas a duas. Então

$$\sum_P I(P, A \cap B \cap C) + \sum_P I\left(P, A' \cap B' \cap C'\right) \geqslant \frac{lmn + l'm'n'}{\lambda},$$

onde $\lambda = l + l' = m + m' = n + n'$. Além disso, se as curvas acima não tem solução em comum, a desigualdade se torna uma igualdade.

Demonstração. A prova deste resultado pode ser encontrada em [5]. □

Proposição 6.4. (Proposição de Darboux). Seja $\mathcal{X} = F_0\frac{\partial}{\partial z_0} + F_1\frac{\partial}{\partial z_1} + F_2\frac{\partial}{\partial z_2}$ um campo de vetores em $\mathbb{P}^2$ grau m. O número de pontos singulares de $\mathcal{X}$, contando multiplicidades é dado por

$$\sum_P I\left(P, (z_2F_1 - z_1F_2) \cap (z_0F_2 - z_2F_0) \cap (z_1F_0 - z_0F_1)\right) = m^2 + m + 1.$$

Além disso, se as $m^2 + m + 1$ singularidades são distintas então elas são todas não-degeneradas.

Demonstração. Observemos que $X(ZF_1 - YF_2) + Y(XF_2 - ZF_0) + Z(YF_0 - XF_1) = 0$. Logo, se tomarmos $A = ZF_1 - YF_2, B = XF_2 - ZF_0, C = YF_0 - XF_1, A' = X, B' = Y$ e $C' = Z$ teremos que as curvas homogêneas A, B, C de graus $m + 1$ e as curvas A', B', C' de graus 1 satisfazem as hipóteses do Lema 6.3. Além disso, as curvas A', B' e C' não tem pontos em comum, isto é,

$$\sum_P (P, (A' \cap B' \cap C') = 0.$$

Portanto,

$$\sum_P I(P, A\cap B\cap C) + \sum_P I\left(P, A'\cap B'\cap C'\right) = \frac{(m+1)^3+1}{m+2}$$
$$= \frac{(m+2)\left[(m+1)^2 - m - 1 + 1)\right]}{m+2}$$
$$= m^2+m+1.$$

□

Definição 6.2. Um ponto $P\in\mathbb{P}^2$ é chamado um ponto de inflexão de uma curva C definida por um polinômio homogêneo $F(X,Y,Z)\in\mathbb{C}[X,Y,Z]$ se as duas condições seguintes são satisfeitas:

(a) P é um ponto não singular de C.

(b) se G é a tangente à C em P e $\mu_P(F,G)$ é o índice de intereseção de F e G em P, então $\mu_P(F,G)\geq 2$.

Para determinarmos condições sobre as quais um ponto P é um ponto de inflexão usaremos H_F, o determinante da matriz hessiana de F. É possível mostrar que

$$H_F = \det\begin{pmatrix} F_{XX} & F_{YX} & F_{ZX}\\ F_{XY} & F_{YY} & F_{ZY}\\ F_{XZ} & F_{YZ} & F_{ZZ}\end{pmatrix} = X^2\det\begin{pmatrix} n(n-1)F & (n-1)F_Y & (n-1)F_Z\\ (n-1)F_Y & F_{YY} & F_{YZ}\\ (n-1)F_Z & F_{YZ} & F_{ZZ}\end{pmatrix}.$$

Lema 6.4. Seja C uma curva projetiva plana reduzida definida pelo polinômio homogêneo $F(X,Y,Z)\in\mathbb{C}[X,Y,Z]$ de grau $n\geq 3$. Então, F divide H_F se e somente se F é uma união de retas.

Demonstração. Sejam P um ponto não singular de $\bar{C}$, G a tangente a $\bar{C}$ em P e $f(x,y) = F(1,x,y)$ o polinômio que define a curva afim C associada a $\bar{C}$. Sem perda de generalidade podemos supor $P=(1:0:0)$ e $G=Z$. Sendo assim $H_F(P)=\Delta(0,0)$ onde

$$\Delta(x,y) = \det\begin{pmatrix} n(n-1)f & (n-1)f_x & (n-1)f_y\\ (n-1)f_x & f_{xx} & f_{xy}\\ (n-1)f_y & f_{xy} & f_{yy}\end{pmatrix} = .$$
$$= n(n-1)f(f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2) - (n-1)^2(f_x^2 f_{yy} + f_y^2 f_{xx} - 2f_xf_yf_{xy}).$$

Suponha que $Z\nmid F$. Então,

$$F(X,Y,Z) = a_n(X,Y) + a_{n-1}(X,Y)Z + a_{n-2}(X,Y)Z^2 + \cdots + a_0(X,Y)Z^n,$$

com $a_i(X,Y)\in\mathbb{C}[X,Y]$ sendo polinômio homogêneo de grau i, para todo $i\in\{0,1,\cdots,n\}$, e $a_n(X,Y)\neq 0$. Escrevendo $a_n(X,Y) = a_{n0}X^n + a_{n1}X^{n-1}Y + \cdots + a_{nn}Y^n$ e usando que $F(1,0,0)=0$ concluímos que $a_{n0}=0$. Além disso, temos

$$f(x,y) = a_n(1,x) + a_{n-1}(1,x)y + a_{n-2}(1,x)y^2 + \cdots + a_0(1,x)y^n.$$

Como Z é a tangente a $\bar{C}$ em P concluímos que y é o termo de grau 1 de $f(x,y)$, ou seja,

$$a_{n-1}(X,Y) = a_{(n-1)0}X^n + a_{(n-1)1}X^{n-1}Y + \cdots + a_{(n-1)n}Y^n,$$

com $a_{(n-1)0} \neq 0$ e $a_{n1} = 0$. Logo, podemos escrever

$$f(x,y) = x^\mu \phi(x) + y\,\psi(x,y) \tag{6.9}$$

onde $\mu \in \mathbb{N}$, $\mu \geq 2$, $\phi(x) \in \mathbb{C}[x]$ é tal que $\phi(0) \neq 0$ e $\psi(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ é tal que $\psi(0,0) \neq 0$. De fato, $x^\mu \phi(x) = a_n(1,x)$ e $y\,\psi(x,y) = a_{n-1}(1,x)y + a_{n-2}(1,x)y^2 + \cdots + a_0(1,x)y^n$.

Usando (6.9), obtemos

$$f_x = \mu x^{\mu-1}\phi + x^\mu \phi' + y\,\psi_x \tag{6.10}$$
$$f_{xx} = \mu(\mu-1)x^{\mu-2}\phi + 2\mu x^{\mu-1}\phi' + x^\mu \phi'' + y\,\psi_{xx} \tag{6.11}$$
$$f_y = \psi + y\,\psi_y \tag{6.12}$$
$$f_{yy} = 2\psi_y + y\,\psi_{yy} \tag{6.13}$$
$$f_{xy} = \psi_x + y\,\psi_{xy} \tag{6.14}$$

Queremos determinar a imagem de Δ no anel local de F em P, ou seja, em $\mathcal{O}_{F,P} \cong \mathbb{C}[x,y]_{\langle x,y\rangle}/\langle f\rangle$. Observe que ϕ e ψ são invertíveis em $\mathcal{O}_{F,P}$ e que, por (6.9),

$$y\,\psi(x,y) = x^\mu \phi(x) \in \mathcal{O}_{F,P} \cong \mathbb{C}[x,y]_{\langle x,y\rangle}/\langle f\rangle.$$

Logo, substituindo $y = \dfrac{\phi(x)}{\psi(x,y)}x^\mu$ nas equações (6.10), (6.11), (6.12), (6.13) e (6.14) concluímos que $f_y^2 f_{xx}$ tem grau menor que $f_x^2 f_{yy}$ e que $f_x f_y f_{xy}$. Portanto,

$$\begin{aligned} \Delta = \;& -(n-1)^2(f_x^2 f_{yy} + f_y^2 f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy}) \\ & = -(n-1)^2(\psi^2 \mu(\mu-1)\phi x^{\mu-2} + \text{ termos de grau maior}) \neq 0 \end{aligned}$$

em $\mathcal{O}_{F,P} \cong \mathbb{C}[x,y]_{\langle x,y\rangle}/\langle f\rangle$.

Até agora temos que se existir um ponto não singular P de C tal que a reta tangente não divide F então $H_F \not\equiv 0 \bmod (F)$.

Veremos a seguir que este é o caso de curvas que não são união de retas, ou seja, veremos que se C não for uma união de retas, então existe um ponto não singular $P \in C$ tal que a reta tangente neste ponto não divide F. Para isto, suponha que $F = F_1F_2\ldots F_r \in \mathbb{C}[X,Y,Z]$ com $F_1,\ldots,F_r$ irredutíveis e F_1 de grau maior que 1. Seja $P \in C$ um ponto não singular de C tal que $F_1(P) = 0$. Afirmamos que G, a reta tangente a C em P, que é também a reta tangente à curva definida por $F_1 = 0$ em P, não divide F. De fato, como P é um ponto não singular de C e $F_1(P) = 0$ então $F_j(P) \neq 0$, para todo $j = 2,\ldots,r$. Logo, $G|F$ implicaria $G|F_1$, mas F_1 é irredutível e de grau maior que 1. Com isto, podemos concluir que se $H_F \equiv 0 \bmod (F)$, então F é união de retas.

Por outro lado, suponha que $F = F_1F_2\dots F_r \in \mathbb{C}[X,Y,Z]$ com $F_1,\dots,F_r$ polinômios irredutíveis e F_i de grau 1, para todo $i \in \{1,2,\dots,r\}$. Sem perda de generalidade podemos supor $F_1 = X$ e $F = XH$, onde $H = F_2\dots F_r$. Então,

$$H_F = X^2 \det \begin{pmatrix} n(n-1)F & (n-1)F_Y & (n-1)F_Z \\ (n-1)F_Y & F_{YY} & F_{YZ} \\ (n-1)F_Z & F_{YZ} & F_{ZZ} \end{pmatrix} =$$

$$= X^2(n-1) \det \begin{pmatrix} (1+n-1)F & F_Y & F_Z \\ (n-1)F_Y & F_{YY} & F_{YZ} \\ (n-1)F_Z & F_{YZ} & F_{ZZ} \end{pmatrix} =$$

$$= X^2(n-1)F(F_{YY}F_{ZZ} - F_{YZ}^2) + X^2(n-1) \det \begin{pmatrix} (n-1)F & F_Y & F_Z \\ (n-1)F_Y & F_{YY} & F_{YZ} \\ (n-1)F_Z & F_{YZ} & F_{ZZ} \end{pmatrix} =$$

$$= X^2(n-1)F(F_{YY}F_{ZZ} - F_{YZ}^2) + X^2(n-1)^2 \det \begin{pmatrix} F & F_Y & F_Z \\ F_Y & F_{YY} & F_{YZ} \\ F_Z & F_{YZ} & F_{ZZ} \end{pmatrix} =$$

$$= X^2(n-1)F(F_{YY}F_{ZZ} - F_{YZ}^2) + X^2(n-1)^2 \det \begin{pmatrix} XH & XH_Y & XH_Z \\ XH_Y & XH_{YY} & XH_{YZ} \\ XH_Z & XH_{YZ} & XH_{ZZ} \end{pmatrix} =$$

$$= X^2(n-1)F(F_{YY}F_{ZZ} - F_{YZ}^2) +$$

$$+ X^5\frac{(n-1)^2}{(n-2)^2} \det \begin{pmatrix} (n-2)^2H & (n-2)H_Y & (n-2)H_Z \\ (n-2)H_Y & H_{YY} & H_{YZ} \\ (n-2)H_Z & H_{YZ} & H_{ZZ} \end{pmatrix} =$$

$$= X^2(n-1)F(F_{YY}F_{ZZ} - F_{YZ}^2) - X^5\frac{(n-1)^2}{(n-2)^2}H(H_{YY}H_{ZZ} - H_{YZ}^2) +$$

$$+ X^5\frac{(n-1)^2}{(n-2)^2} \det \begin{pmatrix} (n-1)(n-2)H & (n-2)H_Y & (n-2)H_Z \\ (n-2)H_Y & H_{YY} & H_{YZ} \\ (n-2)H_Z & H_{YZ} & H_{ZZ} \end{pmatrix} =$$

$$= X^2(n-1)F(F_{YY}F_{ZZ} - F_{YZ}^2) - X^4\frac{(n-1)^2}{(n-2)^2}F(H_{YY}H_{ZZ} - H_{YZ}^2) + X^5\frac{(n-1)^2}{(n-2)^2}H_H =$$

$$= F[X^2(n-1)(F_{YY}F_{ZZ} - F_{YZ}^2) - X^4\frac{(n-1)^2}{(n-2)^2}(H_{YY}H_{ZZ} - H_{YZ}^2)] + X^5\frac{(n-1)^2}{(n-2)^2}H_H.$$

Por indução, podemos assumir que $H_H \equiv 0 \bmod (H)$, e portanto, $H_F \equiv 0 \bmod (F)$.

□

Seja C uma curva algébrica de $\mathbb{C}^2$ definida por um polinômio irredutível não constante $f \in \mathbb{C}[x,y]$. Um **ponto suave** p de C é um ponto de inflexão se a multiplicidade de interseção de C com a reta tangente a C em p for maior que 2. Um cálculo feito na prova do Lema 6.4 mostra que essa condição é equivalente ao anulamento em p do polinômio

$$h_f = f_{xx}f_y^2 - 2f_xf_yf_{xy} + f_x^2f_{yy}.$$

Definição 6.3. A curva estática correspondente à derivação $D_{a,b}$ é a curva de $\mathbb{C}^2$ definida pelo polinômio

$$\mathcal{E}_{a,b} = bD(a) - aD(b).$$

Proposição 6.5. Seja C uma curva algébrica invariante de $D_{a,b}$ definida por um polinômio não constante $f \in \mathbb{C}[x,y]$. Se f é um fator de $\mathcal{E}_{a,b}$ então C é a união de retas.

Demonstração. Já que todo fator de f é invariante por $D = D_{a,b}$ e divide $\mathcal{E}_{a,b}$, podemos assumir, sem perda de generalidade, que f é um polinômio irredutível em $\mathbb{C}[x,y]$. Seja p um ponto suave de C que não seja um ponto singular de D. Desde que f é invariante por D, segue que

$$D(f)|_p = D^2(f)|_p = 0.$$

De fato, como $D(f) = \lambda f$, então $D(f)(p) = \lambda(p)f(p)$, e

$$D^2(f)(p) = D(\lambda f)(p) = f(p)D(\lambda)(p) + \lambda(p)D(f)(p) = 0.$$

Portanto, temos que

$$0 = D(f)(p) = \left(a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y}\right)(p) = a(p)f_x(p) + b(p)f_y(p) \tag{6.15}$$

e

$$\begin{aligned}
D^2(f)(p) &= D\left(\left(a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y}\right)(p)\right)\\
&= a(p)\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y}\right)(p) + b(p)\frac{\partial}{\partial y}\left(a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y}\right)(p) =\\
&= a(p)\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}(p) + a^2(p)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) + a(p)\frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(p) + a(p)b(p)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(p) +\\
&+ b(p)\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(p) + b(p)a(p)\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(p) + b(p)\frac{\partial b}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}(p) + b^2(p)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p) =\\
&= \left(a\frac{\partial a}{\partial x} + b\frac{\partial a}{\partial y}\right)(p)\frac{\partial f}{\partial x}(p) + \left(a\frac{\partial b}{\partial x} + b\frac{\partial b}{\partial y}\right)(p)\frac{\partial f}{\partial y}(p) +\\
&+ a(p)\left(a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)(p) + b(p)\left(a\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} + b\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)(p) =\\
&= \left(D(a)f_x + D(b)f_y\right)(p) + \left(aD(f_x) + bD(f_y)\right)(p).
\end{aligned}$$

As hipóteses em p implicam que $a(p) \neq 0$ ou $b(p) \neq 0$. Vamos assumir, sem perda de generalidade, que $a(p) \neq 0$.

Temos que

$$\mathcal{E}_{a,b}(p)f_y(p) = b(p)D(a)(p)f_y(p) - a(p)D(b)(p)f_y(p). \tag{6.16}$$

Agora, por (6.15), temos $f_x(p) = \dfrac{-b(p)f_y(p)}{a(p)}$. Logo, substituindo esta igualdade em (6.16) obtemos

$$-\mathcal{E}_{a,b}f_y|_p = a(p)(D(a)f_x + D(b)f_y)|_p,$$

que por sua vez é zero porque f divide $\mathcal{E}_{a,b}$. Portanto,

$$0 = D^2(f)|_p = (aD(f_x) + bD(f_y))|_p.$$

Usando a definição de h_f e (6.15) obtemos

$$\begin{aligned}
a(p)^2h_f(p) &= a(p)^2f_{xx}(p)f_y(p)^2 - 2a(p)^2f_x(p)f_y(p)f_{xy}(p) + a(p)^2f_x(p)^2f_{yy}(p)\\
&= a(p)^2f_{xx}(p)f_y(p)^2 + 2a(p)^2\frac{b(p)f_y(p)}{a(p)}f_y(p)f_{xy}(p) + a(p)^2\frac{b(p)^2f_y(p)^2}{a(p)^2}f_{yy}(p)\\
&= a(p)^2f_{xx}(p)f_y(p)^2 + 2a(p)b(p)f_y(p)^2f_{xy}(p) + b(p)^2f_y(p)^2f_{yy}(p)\\
&= f_y(p)^2\left(a(p)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) + a(p)b(p)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + b(p)a(p)\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(p) + b(p)^2f_{yy}(p)\right)\\
&= f_y(p)^2\left(a(p)\left(a(p)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) + b(p)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right) + b(p)\left(a(p)\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(p) + b(p)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p)\right)\right)\\
&= f_y(p)^2\left(a(p)D(f_x)(p) + b(p)D(f_y)(p)\right)\\
&= f_y(p)^2\left(aD(f_x) + bD(f_y)\right)|_p.
\end{aligned}$$

Donde segue que $h_f(p) = 0$. Em particular, f e h_f se anulam em todos os pontos suaves de C, que não são pontos singulares de D. Como esses pontos são um número infinito, o Teorema de Bézout garante que f e h_f tem uma componente comum. No entanto, f é irredutível e, portanto, deve dividir h_f. Assim, por (6.4), f é uma reta.

□

6.2 SINGULARIDADES NO INFINITO

Começamos com um estudo das singularidades da folheação $\mathcal{F}$ no infinito, ou seja, em $\mathcal{Z}(Z)$. Relembramos que tais singularidades satisfazem a relação $Ya_n - Xb_n = 0$.

Seja $P = (X_0 : Y_0 : 0)$ uma singularidade de $\mathcal{F}$. Se $X_0 = 0$, então $P = (0 : 1 : 0)$ e $a_n(0,1) = 0$. Se escrevemos

$$a_n(X,Y) = a_{n0}Y^n + a_{n1}XY^{n-1} + \cdots + a_{nn}X^n,$$

então a condição $a_n(0,1) = 0$ implicaria que $X|a_n$ e consequentemente $X|Ya_n - Xb_n$. O que contradiz a hipótese (H3) sobre D.

Logo, as singularidades de $\mathcal{F}$ no infinito são da forma $(1 : Y : 0)$. Usando novamente a hipótese (H3) sobre D, concluímos que existem $n+1$ singularidades distintas de $\mathcal{F}$ no infinito.

Para estudarmos a folheação em $\mathbb{P}^2 \setminus U_2$, precisamos da sua expressão em U_0 e (ou em U_2). Pela Observação 7, no conjunto aberto U_0, a 1-forma Ω é dada por

$$\Omega_{U_0} = -z\hat{a}(y,z)dy + (y\hat{a} - \hat{b})dz, \tag{6.17}$$

com $y = \frac{Y}{X}$, $z = \frac{Z}{X}$ e $\hat{a} = A(1,y,z)$ *e* $\hat{b} = B(1,y,z)$.

Pela Observação 8, a folheação $\mathcal{F}$ é também gerada pelo campo de vetores

$$\mathcal{X}_0 = (y\hat{a} - \hat{b})\frac{\partial}{\partial y} + z\hat{a}\frac{\partial}{\partial z}. \tag{6.18}$$

Observe que,

$$\hat{a}(y,z) = z^n a_0 + z^{n-1}a_1(1,y) + z^{n-2}a_2(1,y) + \cdots + za_{n-1}(1,y) + a_n(1,y) \quad \text{e}$$

$$\hat{b}(y,z) = z^n b_0 + z^{n-1}b_1(1,y) + z^{n-2}b_2(1,y) + \cdots + zb_{n-1}(1,y) + b_n(1,y).$$

Logo,

$$\frac{\partial \hat{a}}{\partial y}(y,z) = z^{n-1}\frac{\partial a_1(1,y)}{\partial y} + z^{n-2}\frac{\partial a_2(1,y)}{\partial y} + \cdots + z\frac{\partial a_{n-1}(1,y)}{\partial y} + \frac{\partial a_n(1,y)}{\partial y},$$

$$\hat{a}(y,0) = a_n(1,y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \hat{a}}{\partial y}(y,0) = \frac{\partial a_n(1,y)}{\partial y}.$$

Da mesma forma, obtemos

$$\hat{b}(y,0) = b_n(1,y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \hat{b}}{\partial y}(y,0) = \frac{\partial b_n(1,y)}{\partial y}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{\partial(y\hat{a} - \hat{b})}{\partial y}(y,0) &= \hat{a}(y,0) + y\frac{\partial \hat{a}}{\partial y}(y,0) - \frac{\partial \hat{b}}{\partial y}(y,0)\\ &= a_n(1,y) + y\frac{\partial a_n(1,y)}{\partial y} - \frac{\partial b_n(1,y)}{\partial y},\end{aligned}$$

enquanto

$$\frac{\partial(z\hat{a})}{\partial y}(y,0) = 0 \;\; e \;\; \frac{\partial(z\hat{a})}{\partial z}(y,0) = \hat{a}(y,0) = a_n(1,y).$$

Destas relações obtemos que o jacobiano de Ω_{U_0} em $(0,y)$ é

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial(y\hat{a} - \hat{b})}{\partial y}(y,0) & \frac{\partial(y\hat{a} - \hat{b})}{\partial z}(y,0) \\ 0 & \frac{\partial(z\hat{a})}{\partial z}(y,0) \end{bmatrix}.$$

Logo, seus autovalores são iguais a

$$\lambda_1 = \frac{\partial(y\hat{a} - \hat{b})}{\partial y}(y, 0) = a_n(1, y) + y\frac{\partial a_n}{\partial y}(1, y) - \frac{\partial b_n}{\partial y}(1, y) \quad \text{e} \quad \lambda_2 = a_n(1, y).$$

Definindo a função $\phi(y) = ya_n(1, y) - b_n(1, y)$ obtemos que $\lambda_1 = \dfrac{d\phi}{dy}(y)$.

Considere também a função

$$\psi(y, t) = \phi'(y) - ta_n(1, y).$$

Se para alguma singularidade $(1 : y : 0)$ de Ω no infinito o quociente $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$, está definido, então $\psi\left(y, \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) = 0$. Portanto, os zeros comuns de $\phi(y)$ e $\psi(y, t)$ em $\mathbb{C}^2$ determinam as singularidades de Ω no infinito e um de seus expoentes característicos, quando $\lambda_2 \neq 0$. Baseado nisso, passamos a considerar a resultante

$$\rho_1(t) = R_{\phi,\psi}(t)$$

que é um polinômio de grau $n + 1$ na variável t .

Denotaremos por $(-1)q_n$ o quociente entre o coeficiente de grau n e o coeficiente líder de ρ_1. Sendo assim, q_n é a soma das raízes de ρ_1 (ver Relações de Girard em [9]).

Proposição 6.6. Seja $\bar{C} \neq L_\infty \subset \mathbb{P}^2$ uma curva algébrica invariante por $\mathcal{F}$. Se ρ_1 não tem raízes racionais e $\mathrm{Sing}(\mathcal{F}) \cap \bar{C} \subset L_\infty$, então $q_n = (n + 1)^2$.

Demonstração. Como $\mathrm{mdc}(a_n, b_n) = 1$, se $(1 : y : 0)$ é uma singularidade de $\mathcal{F}$ no infinito, então $a_n(1, y) \neq 0$. Agora, como ρ não tem raízes racionais segue, da Proposição 6.2, que $\bar{C}$ é não singular em todos seus pontos no infinito e tem grau $n + 1$. Então, pela fórmula (6.8) obtemos

$$CS_{\mathcal{F}}(\bar{C}, (1 : y_0 : 0)) = \frac{\phi'(y_0)}{a_n(1, y_0)},$$

para todas as raízes y_0 de $\phi(y)$. Aplicando o Teorema 6.3 concluímos que

$$\sum_{\{y_0:\phi(y_0)=0\}} \frac{\phi'(y_0)}{a_n(1, y_0)} = \sum_{\{y_0:\phi(y_0)=0\}} CS_{\mathcal{F}}(\bar{C}, (1 : y_0 : 0)) = \deg(\bar{C})^2 = (n + 1)^2.$$

Mas o lado esquerdo corresponde à soma das raízes de ρ_1, que é igual a q_n. Portanto, $q_n = (n + 1)^2$. □

O corolário a seguir é uma consequência imediata da proposição.

Corolário 6.7. *Seja $\bar{C} \neq L_\infty \subset \mathbb{P}^2$ uma curva algébrica invariante por $\mathcal{F}$. Se ρ_1 não tem raízes racionais e $q_n \neq (n + 1)^2$, então Sing$(\mathcal{F}) \cap \bar{C} \cap U_2 \neq \emptyset$.*

6.3 SINGULARIDADES FINITAS

Nesta seção, vamos estudar as singularidades de $\mathcal{F}$ que pertencem ao conjunto aberto U_2.

Consideremos agora o polinômio

$$\rho_2(x) = R_{a,b}(x) \in \mathbb{Q}[x].$$

Como $\mathrm{mdc}(a, b) = 1$ temos que $\rho_2(x)$ tem grau n^2.

Se $\rho_2(x)$ for irredutível em $\mathbb{Q}$, segue do Teorema 3.7.25, página 257 de [14], que o ideal $\langle a, b\rangle$ de $\mathbb{Q}[x, y]$ pode ser gerado por $\rho_2(x)$ e por um polinômio da forma $y - g(x)$, onde $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$. Como $\mathrm{Sing}(D) = \mathcal{Z}(a, b)$, segue as singularidades de D podem ser escritas na forma $(x_0, g(x_0))$, com x_0 sendo uma raiz de $\rho_2(x)$.

Definição 6.4. Sejam L o corpo de fatoração de $\rho_2(x)$ sobre $\mathbb{Q}$ e G o grupo de Galois de L sobre $\mathbb{Q}$, isto é, G é formado por todos os automorfismos de L que fixam $\mathbb{Q}$.

Sejam x_0 e x_1 duas raízes distintas de $\rho_2(x)$. Se $\rho_2(x)$ é irredutível, segue da Proposição 11.4, página 126, de [24], que existe um elemento de G que leva x_0 em x_1, ou seja, G age transitivamente sobre as raízes de $\rho_2(x)$.

Para cada automorfismo $\sigma \in G$ e para cada raiz x_0 de $\rho_2(x)$, temos que $(x_0, g(x_0))$ é uma singularidade de D. Defina

$$\sigma((x_0, g(x_0))) := (\sigma(x_0), g(\sigma(x_0))).$$

Então, como os coeficientes de $\rho_2(x)$ são racionais, segue que $\sigma(x_0)$ também é uma raiz de $\rho_2(x)$. Logo, $\sigma(x_0, g(x_0))$ também é uma singularidade de D. Portanto, temos definido uma ação de G no conjunto das singularidades de D. Além disso, esta ação também é transitiva.

A próxima proposição relaciona as singularidades de D e das curvas algébricas invariantes por $\mathcal{F}$ com coeficientes racionais.

Proposição 6.8. Seja $C = \mathcal{Z}(f)$ uma curva algébrica invariante por D, onde $f(x, y) \in \mathbb{Q}[x, y]$. Suponha que:

(1) $\rho_1(t)$ não possui raízes racionais;

(2) $q_n \neq (n + 1)^2$;

(3) $\rho_2(x)$ é irredutível de grau n^2 sobre $\mathbb{Q}$.

Então C é uma curva singular de $\mathbb{C}^2$ e $\mathrm{Sing}(D) = \mathrm{Sing}(C)$.

Demonstração. Denotaremos por $\bar{C}$ a curva plana projetiva definida pelo polinômio $F(X,Y,Z) = Z^{\deg(f)}f(\frac{X}{Z},\frac{Y}{Z})$. Suponha, em primeiro lugar, que C seja uma curva não singular. Pela hipótese (H1) e pela Proposição 6.2, obtemos que a curva $\bar{C}$ é não singular no infinito e tem grau $n+1$.

Agora, por (1), (2) e Corolário 6.7, existe um ponto $p \in \mathbb{P}^2 \backslash L_\infty$ tal que p é uma singularidade de D e $f(p) = 0$. Como $f(x,y)$ tem coeficientes racionais, segue que $f(\sigma(p)) = 0$ para todo $\sigma \in G$. Além disso, usando o fato de que G age transitivamente em $\mathrm{Sing}(D)$, concluímos que todas as singularidade de D são zeros de f, ou seja, $\mathrm{Sing}(D) \subset C$. Portanto, $\overline{C}$ é uma curva não singular de $\mathbb{P}^2$ que contém $\mathrm{Sing}(\mathcal{F})$.

Segue da Proposição 4.1, página 126, de [13], que existe um polinômio homogêneo H e uma 1-forma Θ tais que

$$\Omega = HdF + F\Theta. \tag{6.19}$$

Levando em conta que F e Ω possuem grau $n+1$, vemos que

$$n + 1 = \deg(H) + \deg(F) = \deg(H) + n.$$

Logo, H é um polinômio de grau 1. Como $\mathrm{Sing}(\mathcal{F}) \subseteq \overline{C}$, então usando a equação (6.19), segue que a 1-forma HdF se anula em toda singularidade de Ω. Usando que $\overline{C}$ é uma curva não singular, ou seja, $dF(p) \neq 0$ em todo $p \in \overline{C}$, concluímos que $H(p) = 0$ para todo $p \in \mathrm{Sing}(\Omega)$.

No entanto, por definição, todas as singularidades de $\mathcal{F}$ também são zeros de zA. Como A tem o grau n, segue do Teorema de Bézout e da Proposição 6.4 que

$$n^2 + n + 1 \leq \deg(zA)\deg(H) = \deg(A) + 1 = n + 1,$$

o que é uma contradição. Portanto, C deve ser singular em algum ponto p de $\mathrm{Sing}(\mathcal{F})$, ou seja, $\nabla f(p) = 0$, para algum $p \in \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$.

Como f tem coeficientes racionais, segue que as suas derivadas parciais também tem coeficientes racionais e, portanto,

$$\nabla f(\sigma(p)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)(\sigma(p)) = \left(\sigma\left(\frac{\partial f}{\partial x}(p)\right), \sigma\left(\frac{\partial f}{\partial y}(p)\right)\right) = 0,$$

para todo $\sigma \in G$. Como G age transitivamente no conjunto $\mathrm{Sing}(D)$, segue que C é singular em todas as singularidades de D. □

A apresentamos agora o principal resultado desta seção.

Teorema 6.9. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação dada localmente por um campo vetorial $D_{a,b}$ que satisfaz as condições iniciais. Suponha que*

(1) $\rho_1(t)$ não possui raízes racionais;

(2) $q_n \neq (n+1)^2$*;*

(3) $\rho_2(x)$ *é irredutível de grau* n^2 *sobre* $\mathbb{Q}$.

Se $C = \mathcal{Z}(f)$ *é uma curva algébrica invariante por* D*, onde* $f(x,y) \in \mathbb{Q}[x,y]$*, então* f *é um polinômio de grau* $n+1$ *que divide*

$$\mathcal{E}_{a,b} = bD(a) - aD(b).$$

Demonstração. Como $\rho_2(x)$ é irredutível de grau n^2, segue que $\#\mathcal{Z}(a) \cap \mathcal{Z}(b) = n^2$, ou seja, as curvas $\mathcal{Z}(a)$ e $\mathcal{Z}(b)$ interceptam-se transversalmente em n^2 pontos distintos. Além disso, da Proposição 6.8, segue que todos esses pontos pertencem a C. Como isso vale para qualquer curva algébrica, com coeficientes racionais, invariante por D, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $f(x,y)$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$. Portanto, pelo Teorema de Noether (veja o Capítulo 5, Seção 5, Prop.1 em [10]), segue que existem polinômios G_1 e G_2 tais que

$$F = G_1A + G_2B,$$

onde F é a homogeneização de f em relação a variável Z.

Entretanto, segue da Proposição 6.2 que $\deg(F) = n+1$. Logo, G_1 e G_2 são polinômios de grau 1. Considere que

$$G_1 = \alpha_1X + \alpha_2Y + \alpha_3Z \ \text{ e } \ G_2 = \beta_1X + \beta_2Y + \beta_3Z.$$

Usando o fato que a e b tem grau n, a hipótese (1) desta Proposição, o Lema 6.2 e a Proposição 6.2, concluímos que

$$m := \#(\mathrm{Sing}(\mathcal{F}) \cup L_\infty) = n+1 \geq 3.$$

Denotando por $p_j = (1 : y_j : 0)$, para $1 \leq j \leq m$, os m pontos de $\mathcal{F} \cap L_\infty$, temos, pelo Lema 6.2, que

$$0 = F(p_j) = (\alpha_1 + \alpha_2y_j)A(1,y_j,0) + (\beta_1 + \beta_2y_j)B(1,y_j,0).$$

Donde segue que

$$(\alpha_1 + \alpha_2y_j)a_n(1,y_j) + (\beta_1 + \beta_2y_j)b_n(1,y_j) = 0. \tag{6.20}$$

Como p_j é uma singularidade no infinito de $\mathcal{F}$, segue que

$$b_n(1,y_j) - y_ja_n(1,y_j) = 0 \tag{6.21}$$

Portanto, a relação (6.20) pode ser reescrita como

$$a_n(1,y_j)[\alpha_1 + (\alpha_2 + \beta_1)y_j + \beta_2y_j^2] = 0.$$

No entanto, $a_n(1, y_j) \neq 0$ por (6.21) e pelo fato de $\mathrm{mdc}(a_n, b_n) = 1$. Consequentemente,

$$\alpha_1 + (\alpha_2 + \beta_1)y_j + \beta_2 y_j^2 = 0,$$

para $1 \leq j \leq m$. Este é um sistema de equações lineares nas variáveis $\alpha_1, (\alpha_2 + \beta_1)$ e β_2. Visto que $m \geq 3$, a matriz deste sistema contém um menor 3×3 que podemos supor ser da forma

$$\begin{bmatrix} 1 & y_1 & y_1^2 \\ 1 & y_2 & y_2^2 \\ 1 & y_3 & y_3^2 \end{bmatrix}.$$

Como o determinante deste menor é

$$(y_3 - y_1)(y_3 - y_2)(y_2 - y_1) \neq 0,$$

pois $y_i \neq y_j$, segue que

$$\alpha_1 = \alpha_2 + \beta_1 = \beta_2 = 0$$

e

$$F = (\alpha_2 Y + \alpha_3 Z)A + (-\alpha_2 X + \beta_3 Z)B. \tag{6.22}$$

No entanto, F não pode ser divisível por Z, o que implica que $\alpha_2 \neq 0$. Dividindo f por α_2, podemos assumir que $\alpha_2 = 1$ e desomogeneizando (6.22) em relação a Z, encontramos que

$$f = (y + \alpha_3)a + (-x + \beta_3)b \tag{6.23}$$

é uma solução de D. Já que f, a e b tem coeficientes racionais e $\mathrm{mdc}(a, b) = 1$, segue que $\alpha_3, \beta_3 \in \mathbb{Q}$. De fato, usando a equação (6.23) e o fato de f, a e b terem coeficientes racionais, concluímos que $\alpha_3 a + \beta_3 b$ tem coeficientes racionais. Logo, $\alpha_3 a_n + \beta_3 b_n \in \mathbb{Q}[x, y]$, onde a_n e b_n são os termos homogêneos de grau n de a e b, respectivamente. Se

$$a_n = a_{n0}x^n + a_{n1}x^{n-1}y + \cdots + a_{nn}y^n$$

e

$$b_n = b_{n0}x^n + b_{n1}x^{n-1}y + \cdots + b_{nn}y^n,$$

onde a_{ni} e b_{ni} são números racionais para todo $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, então

$$\alpha_3 a_{ni} + \beta_3 b_{ni} = \gamma_i,$$

onde $\gamma_i \in \mathbb{Q}$, com $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Estas equações formam um sistema linear nas variáveis α_3 e β_3. Observemos que não pode ocorrer de todos os menores de ordem 2 da matriz do sistema ter determinante 0, pois neste caso a_n e b_n não seriam primos entre si. Logo, existe um menor de ordem 2 cujo determinante é diferente de zero. Podemos supor, sem perda de generalidade, que

$$d = \det \begin{bmatrix} a_{ni} & b_{ni} \\ a_{nj} & b_{nj} \end{bmatrix} \neq 0.$$

Então $\alpha_3 = d^{-1}(b_{nj}\gamma_i - b_{ni}\gamma_j) \in \mathbb{Q}$ e $\beta_3 = d^{-1}(a_{nj}\gamma_i - a_{ni}\gamma_j) \in \mathbb{Q}$.

Logo,

$$\begin{aligned} D(f) &= D((y+\alpha_3)a + (-x+\beta_3)b) \\ &= aD(y+\alpha_3) + (y+\alpha_3)D(a) + bD(-x+\beta_3) + (-x+\beta_3)D(b) \\ &= ba + (y+\alpha_3)D(a) - ab + (-x+\beta_3)D(b) \\ &= (y+\alpha_3)D(a) + (-x+\beta_3)D(b). \end{aligned}$$

Multiplicando a relação acima por a e usando (6.23), obtemos

$$aD(f) = (f + (x-\beta_3)b)D(a) - (x-\beta_3)aD(b).$$

Como $D(f)$ é um múltiplo de f, concluímos que

$$f|(x-\beta_3)(bD(a) - aD(b)).$$

No entanto, f é irredutível sobre $\mathbb{Q}$ e de grau $n+1 > 1$. Em particular, f não pode dividir $x - \beta_3$. Portanto, $f|bD(a) - aD(b)$. □

O teorema a seguir nos dá uma condição (um algoritmo) para a não existência de curvas invariantes pelo campo $D_{a,b}$.

Teorema 6.10. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação dada localmente por um campo vetorial $D_{a,b}$ que satisfaz as condições iniciais. Suponha que*

(1) $\rho_1(t)$ não possui raízes racionais;

(2) $q_n \neq (n+1)^2$;

(3) $\rho_2(x)$ é irredutível de grau n^2 sobre $\mathbb{Q}$.

Então D não possui curvas algébricas reduzidas invariantes em $\mathbb{C}^2$.

Demonstração. Seja $C = \mathcal{Z}(f)$, onde $f \in \mathbb{Q}[x,y]$, uma curva algébrica reduzida invariante por D. Segue do Teorema 6.9 que f tem grau $n+1$ e divide $\mathcal{E}_{a,b}$. Assim, pela Proposição 6.5, f é um produto de $n+1$ polinômios lineares distintos. Vamos denotar por Λ o conjunto formado pelos $n+1$ fatores distintos de f.

Pela Proposição 6.2, em coordenadas locais, dois elementos distintos de Λ não podem se interceptar no infinito. Portanto, quaisquer duas retas de Λ devem ter uma interseção em $\mathbb{C}^2$.

Seja $\bar{G}$ o grupo formado por todos os automorfismos do fecho algébrico de $\mathbb{Q}$ que fixam $\mathbb{Q}$. Pela Proposição 8.11, página 487 de [18], temos que todo automorfismo de G é a restrição à L de um elemento de $\bar{G}$. Portanto, assim como no caso do grupo G, temos que

$\bar{G}$ age transitivamente em Sing(D), ou seja, dadas duas singularidades de D existe um elemento de $\bar{G}$ que leva uma tal singularidade na outra. Além disso, se $\sigma \in \bar{G}$, então

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} \lambda = f = f^{\sigma} = \prod_{\lambda \in \Lambda} \lambda^{\sigma}.$$

Desta forma, podemos supor que σ também age em Λ.

Já que os elementos de Λ são curvas algébricas invariantes por D, segue que a interseção de quaisquer dois deles deve ocorrer em uma singularidade de D.

Suponha que algum $p \in \text{Sing}(D)$ esteja na interseção de exatamente k, com $k \geq 2$, retas de Λ, ou seja,

$$\{p\} = \lambda_1 \cap ... \cap \lambda_k.$$

Consequentemente,

$$\{\sigma(p)\} = \lambda_1^{\sigma} \cap ... \cap \lambda_k^{\sigma},$$

para todo $\sigma \in \bar{G}$. Como a ação de $\bar{G}$ em Sing(D) é transitiva, segue-se que o número de retas em Λ que se cruzam em uma singularidade de D é exatamente k para todos os $p \in \text{Sing}(D)$.

Fixe uma reta $\lambda \in \Lambda$. Cada reta $\lambda' \in \Lambda \backslash \{\lambda\}$ intersecta λ em exatamente um ponto singular de D. Então podemos contar os n elementos de $\Lambda \backslash \{\lambda\}$ em termos dos pontos de $\lambda \cap \text{Sing}(D)$. De fato, se ℓ é o número de singularidades de D que pertencem a λ, e levando em conta que exatamente k retas (incluindo λ) passam por cada singularidade, conseguimos mostrar que $n = (k-1)\ell$. Em particular, isso implica que cada reta em Λ contém o mesmo número de singularidades de D, a saber ℓ.

Por outro lado, cada singularidade de D pertence a exatamente k retas de Λ. Então, multiplicando o número ℓ de singularidades por reta pelo número $n+1$ de retas, estamos contando cada uma das n^2 singularidades k vezes. Logo,

$$kn^2 = \ell(n+1). \tag{6.24}$$

Substituindo $n = (k-1)\ell$ na equação (6.24), obtemos $k(k-1)^2\ell = n+1$. Donde segue que $k-1$ divide $n+1$ e n. Logo, $k-1|\text{mdc}(n, n+1) = 1$ e $k = 2$. Com o mesmo argumento prova-se que $\ell = 1$.

Logo,$n = (k-1)\ell = 1$, o que contradiz a hipótese de que o grau de D é maior que 2. $\square$

REFERÊNCIAS

[1] BIBIKOV, YU N. **Local Theory of Analytic Ordinary Differential Equations**, Lecture Notes in Mathematics, 130 (2000), 633-649.

[2] BRUNO, A. D. **Local Methods in Nonlinear Differential Equations**, Springer-Verlag Berlin/New York, 1989.

[3] CAMACHO, C. AND SAD, P. **Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields**, Ann. of Math. (2) 115 (1982), no. 3, 579-595.

[4] CAMACHO, C. AND LINS NETO, A. **Teoria Geométrica das Folheações.**, Rio de Janeiro: IMPA, 1979.

[5] CHAVARRIGA, J., LLIBRE, J. AND MOULIN, J. O. **On a result of Darboux**, preprint.

[6] COUTINHO, S. C. AND SCHECHTER, L. M. **Algebraic solutions of holomorphic foliations**: an algorithmic approach, Journal of Symbolic Computation 41 (2006), 603-618.

[7] COUTINHO, S. C. AND SCHECHTER, L. M. **Algebraic solutions of plane vector fields**. J. Pure Appl. Algebra, 213 (1) (2009), pp. 144-153.

[8] DARBOUX, G. **Mémorie sur les équations différentielles algébriques du I ordre et du premier degré, Bull**. des Sc. Math (Mélanges)(1878), 60-96,123-144,151-200.

[9] DOMINGUES, H. H. E IEZZI, G. **Àlgebra Moderna** 4 ed.reform. São Paulo; Atual,2003.

[10] FULTON, W. **Algebraic curves: an introduction to algebraic geometry**, W. A. Benjamin, 1969.

[11] GONÇALVES, A. **Introdução à Álgebra**, Rio de Janeiro: IMPA, 1979.

[12] HUMPHREYS, J. E., **Introduction to Lie Algebras and Representation Theory**, Springer- Verlag, New York, Hiedelberg, Berlin, 1970.

[13] JOUANOLOU, J. P. **Equations de Pfaff algebriques**, Lect. Notes in Math., vol. 708, Springer- Verlag, Heidelberg, 1979.

[14] KREUZER, M. AND ROBBIANO, L. **Computational commutative algebra. 1**, Springer- Verlag, Berlin, 2000.

[15] KUNZ, E. **Introduction to plane algebraic curves**. *Birkhäuser* Boston Inc, Boston, MA, 2005, Translated from the 1991 German edition by Richard G. Belshoff.

[16] LINS NETO, A., SAD, P. AND SCÁRDUA, B. **On topological rigidity of projective foliations**, Bull. Soc. math. France 126 (1998), 381-406.

[17] MAN, Y. K. AND MACCALLUM, M. A. H. **A rational approach to the Prelle-Singer algorithm**, J. Symb. Computation 24 (1997), 31-43.

[18] NATHAN, J. **Basic Algebra**, 2nd ed. San Francisco: W.H. Freeman, 1985-1989.

[19] OLVER, P. J, **Applications of Lie Groups to Differential Equations**, Springer-Verlag. Berlin/New York, 1986

[20] PEREIRA, J. V. **Vector fields, invariant varieties and linear systems**, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 51 (2001), no. 5, 1385-1405.

[21] PRELLE, M. J. AND SINGER, M. F. **Elementary first integrals of differential equations**, Trans. Amer. Math. Soc. 279 (1983), 215-229

[22] SHAFAREVICH, I. R. **Basic Algebraic Geometry 1**, New York: Springer, 1994

[23] SPRINGER, T. A. **Linear Algebraic Groups**,Boston; Basel; Stuttgart: Birkhauser, 1980.

[24] STEWART, I. **Galois Theory**; Chapman e Hall ,1945.

[25] VAINSENCHER, I. **Introdução às Curvas Algébricas Planas**, Rio de Janeiro: IMPA, 1979.

[26] WALCHER, S. **On differential equations in normal form**, Math Annal 291 (1991), 293-314.

[27] WALCHER, S. **On the Poincaré problem**, J. Diff. Equations 166 (2000), 51-78.

[28] WALCHER, S. **Plane polynomial vector fields with prescribed invariant curves**, Proc. Roy. Soc.Edinburgh 130 (2000), 633-649.

.