

Universidade Federal de Juiz de Fora
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Rodrigo Barbosa Moreira

Estudo das propriedades de variação total para dois métodos de elementos finitos: Runge-Kutta Galerkin descontínuo e misto-híbrido

Juiz de Fora
2020

Rodrigo Barbosa Moreira

Estudo das propriedades de variação total para dois métodos de elementos finitos: Runge-Kutta Galerkin descontínuo e misto-híbrido

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Matemática Aplicada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Grigori Chapiro

Coorientador: Thiago de Oliveira Quinelato

Juiz de Fora

2020

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da
UFJF com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Moreira, Rodrigo Barbosa.

Estudo das propriedades de variação total para dois métodos de elementos finitos: Runge-Kutta Galerkin descontínuo e misto-híbrido / Rodrigo Barbosa Moreira. – 2020.

89 f. : il.

Orientador: Grigori Chapiro

Coorientador: Thiago de Oliveira Quinelato

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2020.

1. TVD. 2. Estabilidade. 3. Convecção. 4. Método SSP-RKDG.
5. Método DMH1. I. Chapiro, Grigori, orient. II. Quinelato, Thiago de Oliveira, coorient. III. Título.

Rodrigo Barbosa Moreira

Estudo das propriedades de variação total para dois métodos de elementos finitos: Runge-Kutta Galerkin descontínuo e misto-híbrido

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Matemática Aplicada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

Dr. Grigori Chapiro - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Dr. Thiago de Oliveira Quinelato - Coorientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Dr. Rafael Alves Bonfim de Queiroz
Universidade Federal de Juiz de Fora

Dr. Maicon Ribeiro Correa
Universidade Estadual de Campinas

AGRADECIMENTOS

Agradeço inicialmente à minha família, em especial ao meu pai Raimundo, a minha irmã, aos meus avós, e, principalmente, a minha mãe Diulina, que deu total apoio às minhas escolhas e, diante de todas as dificuldades existentes, não mediu esforços para que o meu objetivo de seguir na carreira acadêmica tornasse possível. Venho a agradecer também aos meus colegas e amigos que o mestrado presenteou-me, pela compreensão, solidariedade e pelo excelente convívio durante esta etapa de formação.

A todos os professores que contribuíram para o meu crescimento profissional e como cidadão, durante toda a minha caminhada até este momento, oferecendo-me uma das coisas mais importantes que se pode ter, o Conhecimento.

Ao meu orientador Grigori Chapiro, por ter aceitado compartilhar comigo seu tempo e seus conhecimentos, além dos inúmeros conselhos concedidos, que certamente levarei para toda a minha vida. Ao meu coorientador Thiago Quinelato, por ter oferecido suporte e ensinamentos que contribuíram de maneira substancial para a elaboração deste trabalho de dissertação, sempre com muita paciência e destreza.

Aos membros da banca por aceitarem o convite e dedicarem parte de seus respectivos tempos à leitura deste trabalho.

Finalizo agradecendo a Deus pela saúde, força e proteção concedida, não só a mim, mas a todas as pessoas importantes na minha vida. Presenteando-me com a honra de viver momentos incríveis e felizes. Dando-me sabedoria para superar as inúmeras dificuldades e, ao mesmo tempo, aprender com elas. Afinal, a vida é um constante aprendizado.

Este trabalho foi realizado em associação com o projeto de P&D registrado como ANP 20715-9, *Modelagem matemática e computacional de injeção de espuma usada em recuperação avançada de petróleo* (Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF / Shell Brasil / ANP). Modelagem computacional e matemática da injeção de espuma como uma técnica de recuperação avançada aplicada aos reservatórios de pré-sal do Brasil, apoiado pela Shell Brasil sobre o ANP P&D como *Compromisso de Investimentos com Pesquisa e Desenvolvimento*. Este projeto foi realizado em parceria com a Petrobras.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

“Se, a princípio, a ideia não é absurda, então não há esperança para ela.”

Albert Einstein

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo estudar as propriedades *Total Variation Diminishing* (TVD), *Total Variation Diminishing in the Means* (TVDM) e *Total Variation Bounded in the Means* (TVBM) de um método *Strong-Stability-Preserving Runge-Kutta Discontinuous Galerkin* (SSP-RKDG) desenvolvido para resolver problemas diferenciais com natureza convectiva escritos na forma de leis de conservação. São investigadas também as propriedades TVD e *Total Variation Bounded* (TVB) de um método de elementos finitos misto e híbrido construído para resolver problemas de convecção e difusão. A motivação para este estudo é a verificação da adequação dos métodos à simulação da injeção de espuma para a recuperação avançada de petróleo. Foram estudadas as propriedades de estabilidade e convergência dos esquemas, concluindo a necessidade da implementação de limitadores de fluxo nas soluções aproximadas para que o método SSP-RKDG satisfaça as propriedades TVD, TVDM e/ou TVBM. A investigação do método SSP-RKDG foi substancialmente desenvolvida a partir dos trabalhos [16] e [25]. É apresentada uma estrutura geral do método, passando pela discretização espacial via método de Galerkin Descontínuo e pela utilização de métodos explícitos e estáveis SSP Runge-Kutta para o tratamento da variável temporal. Algumas demonstrações de resultados que garantem propriedades de estabilidade dos métodos com e sem limitadores de fluxo são feitas de maneira detalhada. Para o método misto híbrido, o estudo teve como norte os trabalhos [55] e [30]. A análise para este método esteve voltada à verificação da propriedade de estabilidade de casos específicos.

Palavras-chave: TVD. Estabilidade. Convecção. Método SSP-RKDG. Método DMH1.

ABSTRACT

The present work aims to study the properties *Total Variation Diminishing* (TVD), *Total Variation Diminishing in the Means* (TVDM) and *Total Variation Bounded in the Means* (TVBM) of a *Strong-Stability-Preserving Runge-Kutta Discontinuous Galerkin* (SSP-RKDG) method developed to solve differential problems with a convective nature written in the form of conservation laws. The TVD and *Total Variation Bounded* (TVB) properties of a mixed and hybrid finite element method built to solve convection and diffusion problems are also investigated. The motivation for this study is to verify the adequacy of the methods to the simulation of foam injection for enhanced oil recovery. The stability and convergence properties of the schemes were studied, concluding that it is necessary to implement flux limiters in the approximate solutions so that the SSP-RKDG method satisfies the TVD, TVDM and/or TVBM properties. The investigation on the SSP-RKDG method was substantially developed from the works [16] and [25]. A general structure of the method is presented, going through the spatial discretization via the Discontinuous Galerkin method and the use of explicit and stable SSP Runge-Kutta methods for the treatment of the temporal variable; some demonstrations of results are made in detail in order to guarantee stability properties of the methods with and without flux limiters. For the mixed and hybrid method, the study was based on the works [55] and [30]. The analysis for this method was aimed to verify the stability property in specific cases.

Keywords: TVD. Stability. Convection. SSP-RKDG method. DMH1 method.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	PRELIMINARES	12
2.1	DEFINIÇÕES E RESULTADOS BÁSICOS	12
2.2	SOLUÇÕES FRACAS DE UMA LEI DE CONSERVAÇÃO	13
2.2.1	Soluções fracas	14
2.2.2	Condição de Salto	15
2.2.3	Condições de Entropia	16
2.2.3.1	<i>Par Entropia</i>	17
3	MÉTODO SSP-RKDG	19
3.1	DISCRETIZAÇÃO DO ESPAÇO	20
3.1.1	Fluxos numéricos	21
3.1.2	Diagonalização da matriz de massa	23
3.1.3	Análise da estabilidade e convergência: caso linear	26
3.1.4	Análise da estabilidade e convergência: caso não-linear	29
3.1.4.1	<i>Problema parabólico associado</i>	33
3.1.4.2	<i>Caso contínuo</i>	34
3.1.4.3	<i>Caso discreto</i>	36
3.2	DISCRETIZAÇÃO DO TEMPO	41
3.2.1	Algoritmo SSP Runge-Kutta	42
3.2.2	Análise da estabilidade	42
3.2.3	Análise da convergência	46
3.2.3.1	<i>Polinômios constantes por parte</i>	46
3.2.3.2	<i>Caso geral: Aproximação por polinômios de graus quaisquer</i>	48
4	ESTUDO DAS PROPRIEDADES TVD, TVDM E TVBM	51
4.1	LIMITADOR DE FLUXO	51
4.2	CONSTRUÇÃO DO LIMITADOR DE FLUXO	52
4.2.1	Alteração pela função minmod	59
4.2.2	Alteração pela função minmod modificada	62
5	ESTUDO DA ESTABILIDADE DE UMA FORMULAÇÃO MISTA HÍBRIDA	64
5.1	CONSTRUÇÃO DO MÉTODO DMH1	64
5.2	ANÁLISE DA ESTABILIDADE	67
5.2.1	Aproximação da integração por trapézios	68

5.2.1.1	<i>Análise da propriedade TVD</i>	72
5.2.2	Caso sem as aproximações	75
5.2.2.1	<i>Ideias para o estudo da propriedade TVB</i>	78
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	82
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	84

1 INTRODUÇÃO

Problemas de interesse prático nos quais a convecção exerce um papel importante aparecem em variadas aplicações, como dinâmica de fluidos newtonianos [3, 12, 13] e não-newtonianos (comportamento de espumas em meios porosos) [42, 63], recuperação avançada de petróleo [3, 11, 42, 63], transporte de contaminantes em aquíferos [27], dinâmica populacional [61, 62], modelagem de águas rasas [54], previsão do tempo [59], oceanografia [53], dinâmica de gases [23], fluxos viscoelásticos [29], turbulentos [39], granulares [36], compressíveis [5] e incompressíveis [21], aeroacústica [52], turbomáquinas (bombas e compressores centrífugos, turbina hidráulica, etc.) [6], simulações de dispositivos semicondutores [15], magneto-hidrodinâmica [60], eletromagnetismo [4], entre diversas outras. Por esse motivo, criar métodos robustos, precisos e eficientes para resolver numericamente esses tipos de problemas tornou-se uma atividade de considerável importância e, como esperado, atraiu o interesse de muitos pesquisadores [22].

A modelagem destes fenômenos é complexa por diversas causas. A solução exata de problemas em que a convecção é o fenômeno dominante pode desenvolver descontinuidades em tempo finito. Esse tipo de solução pode exibir uma estrutura muito complexa perto das descontinuidades [22]. Ao construir métodos numéricos para essas aplicações, deve-se garantir que as descontinuidades da solução aproximada sejam fisicamente corretas. Busca-se assegurar que o aparecimento de uma descontinuidade na solução aproximada não produza oscilações espúrias que prejudiquem a qualidade da aproximação. Enquanto assegura isso, o método deve permanecer suficientemente preciso perto dessa descontinuidade para capturar a estrutura rica da solução exata [22]. Essas complicações passaram a ser contornadas com o uso de esquemas de diferenças e volumes finitos de alta resolução por meio de fluxos numéricos e limitadores de fluxo adequadamente definidos [8, 51]. Os métodos de Galerkin Descontínuo, ou simplesmente “DG”, do inglês *Discontinuous Galerkin*, admitem soluções aproximadas descontínuas, fazendo com que eles possam ser usados na solução de problemas com natureza predominantemente convectiva [16, 22, 24, 25]. Alguns esquemas DG, desenvolvidos para a resolução deste tipo de problema, também incorporam em sua estrutura as ideias de fluxos numéricos e limitadores de fluxo, por exemplo, o método proposto em [25]. Com isso, são capazes de capturar descontinuidades sem produzir oscilações espúrias perto delas [22].

Um dos esquemas DG que obteve sucesso na solução de problemas convectivos foi o *Strong-Stability-Preserving Runge-Kutta Discontinuous Galerkin* (SSP-RKDG) [35]. Também conhecido como *Total Variation Diminishing Runge-Kutta Discontinuous Galerkin* (TVD-RKDG) [16, 25], apresenta as seguintes vantagens principais sobre os métodos clássicos de volumes, diferenças e elementos finitos [22]:

- São altamente paralelizáveis. Como as aproximações são descontínuas, a matriz de massa é diagonal por blocos. O tamanho dos blocos é igual ao número de graus de liberdade dentro dos elementos correspondentes, portanto, cada bloco pode ser invertido independentemente dos demais;
- Permite refinar a malha sem levar em conta as restrições de continuidade típicas dos métodos de elementos finitos conformes;
- Podem possuir precisão de alta ordem, tanto no espaço quanto no tempo. A discretização descontínua do espaço possibilita uma aproximação de alta ordem, mesmo na presença de descontinuidades. No tempo, a discretização é feita por esquemas de integração do tipo Runge-Kutta, os quais podem garantir precisão de alta ordem.

Apesar das vantagens citadas, alguns problemas também são encontrados [22, 25]:

- Em ordens superiores, exigem um tratamento especial em sua construção para evitar oscilações próximas de descontinuidades, como o uso de limitadores de fluxo;
- Sua estabilidade, em muitos casos, fica limitada por uma condição CFL mais restrita que as necessárias para os métodos clássicos.

O método foi apresentado em [25] e revisado em [16]. Ele tem como objetivo resolver numericamente Equações Diferenciais Parciais (EDPs) hiperbólicas não lineares com convecção dominante. Como o próprio nome sugere, o método é obtido realizando a combinação de um método Runge-Kutta que preserva a estabilidade forte e um esquema DG, sendo o segundo usado para a discretização espacial e o primeiro para resolver o sistema de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) resultante. O seu potencial está na junção das propriedades dos esquemas DG, como aproximações por funções descontínuas, com a dos métodos *Strong-Stability-Preserving Runge-Kutta* (SSP-RK), por exemplo, estabilidade e capacidade de atingir alta ordem. Uma investigação numérica do método SSP-RKDG bastante interessante pode ser encontrada em [57] e [58].

Um dos principais objetivos deste trabalho é estudar as propriedades de estabilidade do método SSP-RKDG, via resultados de *Total Variation Diminishing* (TVD), *Total Variation Diminishing in the Means* (TVDM) e *Total Variation Bounded in the Means* (TVBM) [25, 28, 56]. Baseadas nos trabalhos [16], [19], [25] e [43], são analisadas também algumas propriedades de convergência.

Outro objetivo que inspirou o estudo desenvolvido foi a busca pelo entendimento dos argumentos utilizados em [25] para mostrar as propriedades de estabilidade, via resultados de TVD, TVDM e TVBM, para aplicá-los a um método *Dual Mixed and Hybrid* apresentado em [55] e [30], chamado pelos autores de DMH1. Este método também

apresenta aproximação por funções descontínuas e, portanto, possui algumas características comuns aos métodos DG, por exemplo, facilidade de paralelização e possibilidade de refinamentos adaptativos da malha.

Nos trabalhos [55] e [30] os autores propõem o estudo da estabilidade do método DMH1 através da técnica de variação limitada usando integração reduzida. Notamos que esta abordagem apresenta algumas limitações. Nesta dissertação propomos algumas ideias e desenvolvemos alguns cálculos que podem ser utilizados para a investigação da propriedade *Total Variation Bounded* (TVB), quando desconsideradas as aproximações mencionadas. Embora os resultados ainda não foram concluídos, acreditamos que este é o caminho para a verificação da estabilidade.

A principal motivação para o estudo dos métodos SSP-RKDG e DMH1 é a sua aplicação aos modelos de injeção de espuma em meios porosos para a recuperação avançada de petróleo apresentados em [3, 42, 63], que possuem termos convectivos não-lineares dominantes. Espera-se que esses métodos convirjam para a solução de entropia e consigam capturar os choques e as propriedades complexas existentes perto das descontinuidades, sem produzir oscilações indesejáveis.

O trabalho está organizado da maneira a seguir. O Capítulo 2 destina-se às definições e a alguns resultados básicos da análise funcional. Nele são expostas também algumas noções sobre soluções fracas de uma lei de conservação. No Capítulo 3 é apresentada a construção do método SSP-RKDG e são analisadas as propriedades de estabilidade e convergência para casos particulares. O Capítulo 4 é destinado ao estudo analítico das propriedades TVD, TVDM e TVBM, usadas para mostrar a estabilidade do esquema após a utilização de limitadores de fluxo na solução aproximada. No Capítulo 5 apresentamos de forma resumida a construção das formulações do método DMH1 e damos início ao estudo das propriedades de estabilidade via resultados de TVD e TVB. Por fim, no Capítulo 6, são feitas algumas considerações a respeito das investigações realizadas e projetados alguns trabalhos que podem ser desenvolvidos futuramente.

2 PRELIMINARES

Na primeira seção deste capítulo, apresentamos algumas definições e resultados básicos da análise funcional. Em seguida, expomos brevemente a noção de soluções fracas para a solução analítica de leis de conservação.

2.1 DEFINIÇÕES E RESULTADOS BÁSICOS

Para a construção dos métodos estudados neste trabalho é necessária a consideração de alguns dos espaços de Lebesgue e Sobolev, além dos espaços de polinômios quebrados [28, pág. 12]. Desta forma, destinamos esta seção à revisão de conceitos e definições relativas a tais espaços.

Observação 2.1. Salvo exceções mencionadas, será usado $\Omega = (a, b)$, com a, b números reais e $a < b$.

Definição 2.2. Seja p tal que $1 \leq p < \infty$. Definimos o espaço de Lebesgue $L^p(\Omega)$ como

$$L^p(\Omega) := \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid v \text{ mensurável com } \|v\|_{L^p(\Omega)} < \infty\},$$

em que a medida é induzida pela norma:

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Define-se também o espaço de Lebesgue

$$L^\infty(\Omega) := \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid v \text{ mensurável e } \|v\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty\},$$

com a medida induzida pela norma:

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} := \inf\{M > 0 \text{ tal que } |v(x)| \leq M \text{ q.t.p. } x \in \Omega\}.$$

Definição 2.3. Seja $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $\phi \not\equiv 0$. O *suporte* de ϕ , denotado por $\text{supp}(\phi)$, é o fecho do conjunto dos pontos de Ω em que ϕ é não nula, isto é,

$$\text{supp}(\phi) = \overline{\{x \in \Omega \mid \phi(x) \neq 0\}}.$$

Além disso, dizemos que ϕ tem *suporte compacto* quando $\text{supp}(\phi)$ for compacto.

Definição 2.4 (σ -derivada fraca). Seja v uma função no espaço de Lebesgue $L^2(\Omega)$. Dizemos que v é fracamente diferenciável se existir uma função $w \in L^2(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} w \varphi dx = (-1)^\sigma \int_{\Omega} v D^\sigma \varphi dx,$$

para algum $\sigma \in \mathbb{N}$, e todas as funções $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, isto é, para todas as funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto definidas em Ω . Neste caso a função w é denominada uma σ -derivada fraca de v e recebe a notação $D^\sigma v$.

Usando essa noção de diferenciação podemos definir os espaços de Sobolev.

Definição 2.5. Sejam $1 \leq p < \infty$ e $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dá-se o nome de espaço de Sobolev ao seguinte conjunto:

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) \mid D^\sigma u \in L^p \text{ e } \sigma \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \sigma \leq k\}.$$

Definição 2.6 (Espaço de Hilbert). Um espaço com produto interno \mathcal{H} completo na norma induzida pelo produto interno é dito espaço de Hilbert.

Observação 2.7. Os espaços de Sobolev $W^{k,2}(\Omega)$, com $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, são espaços de Hilbert. Usaremos a notação usual $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$.

Outros espaços bastante usados na construção de métodos de elementos finitos descontínuos são os espaços de polinômios quebrados. As definições expostas abaixo baseiam-se na apresentação feita em [28].

Definição 2.8 (Espaço de polinômios). Sejam $k \geq 0$, $A^k := \{0, 1, \dots, k\}$ e I um intervalo de \mathbb{R} . Define-se o espaço de polinômios em I com grau até k como:

$$\mathbb{P}^k(I) := \left\{ p : I \ni x \mapsto p(x) \in \mathbb{R} \mid \exists (\gamma_\alpha)_{\alpha \in A^k} \in \mathbb{R}^{k+1} \text{ tal que } p(x) = \sum_{\alpha \in A^k} \gamma_\alpha x^\alpha \right\}.$$

Para apresentarmos o conceito de espaços de polinômios quebrados em $L^2(\Omega)$ vamos considerar uma partição \mathcal{T}_h arbitrária do domínio Ω .

Definição 2.9 (Espaço de polinômios quebrados). Definimos por espaço de polinômios quebrados o seguinte conjunto:

$$\mathbb{P}^k(\mathcal{T}_h) := \{v \in L^2(\Omega) \mid v|_{I_i} \in \mathbb{P}^k(I_i), \forall I_i \in \mathcal{T}_h\}.$$

Definição 2.10 (Espaço de Sobolev quebrado). Dados um elemento $I_i \in \mathcal{T}_h$, $m \geq 0$ inteiro e $1 \leq p \leq \infty$, definem-se os espaços de Sobolev quebrados como:

$$W^{m,p}(\mathcal{T}_h) := \{v \in L^2(\Omega) \mid v|_{I_i} \in W^{m,p}(I_i), \forall I_i \in \mathcal{T}_h\}.$$

No caso particular em que $p = 2$, denota-se

$$H^m(\mathcal{T}_h) := W^{m,2}(\mathcal{T}_h).$$

2.2 SOLUÇÕES FRACAS DE UMA LEI DE CONSERVAÇÃO

As leis de conservação constituem uma classe especial das Equações Diferenciais Parciais (EDPs) na forma de divergência. Essas equações são usadas para descrever vários fenômenos que surgem em diversos campos da Física e Matemática [46, 47, 54]. Elas foram

estudadas pela primeira vez no século XIX, em consequência do estudo da dinâmica dos gases [46]. A forma geral dessa equação é dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial f}{\partial x}(u(x, t)) = 0, \quad (2.1)$$

em que $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ caracteriza as variáveis de estado no ponto x , instante t e f é o fluxo dessas variáveis [46, pág. 1].

A depender da definição do fluxo f a Equação (2.1) recebe nomes especiais, por exemplo:

(a) Equação de Advecção Linear - Equação do Transporte.

A equação de advecção linear ou transporte é o exemplo mais simples da lei de conservação escalar. A função de fluxo assume a forma

$$f(u) = \alpha u, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

(b) Equação de Burgers - Equação invíscida de Burgers.

Para a equação de Burgers

$$f(u) = \frac{u^2}{2}.$$

(c) Equação de Buckley-Leverett.

Um exemplo de equação de Buckley-Leverett é dado por:

$$f(u) = \frac{u^2}{u^2 + \alpha(1-u)^2},$$

em que α é uma constante.

2.2.1 Soluções fracas

Soluções suaves ou clássicas para a Equação (2.1) podem não existir. No entanto, esses modelos surgem na Física, então espera-se que exista alguma forma de solução. Além disso, por definição, a solução forte de uma equação diferencial parcial deve possuir derivadas parciais em todo ponto (para que seja possível substituí-las na equação em cada ponto a fim de verificar se ela realmente é uma solução). Neste contexto surge a noção de soluções fracas, oriundas de uma formulação equivalente da equação diferencial que não envolva o cálculo de derivadas explícitas [7, pág. 60]. Para motivar a definição deste tipo de soluções, considere o seguinte Problema de Cauchy ou de Valor Inicial (PVI):

$$\left| \begin{array}{l} \text{Encontrar } u(x, t) \text{ tal que} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial f}{\partial x}(u(x, t)) = 0 \quad \text{em } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Definição 2.11. Quando a condição inicial é constante por partes, digamos

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} u^L & \text{se } x < 0, \\ u^R & \text{se } x \geq 0, \end{cases}$$

o PVI dado em (2.2) é dito *Problema de Riemann*.

Assumindo que existam soluções para o Problema (2.2), multiplicando ambos os lados da primeira equação de (2.2) por uma função suave com suporte compacto $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$, comumente chamada de função teste, e integrando por partes sobre o domínio, obtém-se [46, pág. 27]:

$$\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} (u\varphi_t + f(u)\varphi_x) dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\varphi(x, 0) dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+). \quad (2.3)$$

Definição 2.12. (Solução fraca [46, pág. 28]). Uma função $u \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ é uma *solução fraca* de (2.2) se a identidade (2.3) for válida.

As soluções fracas não são necessariamente diferenciáveis, nem mesmo contínuas. Quando existem, as descontinuidades aparecem na natureza como ondas de choque.

2.2.2 Condição de Salto

As ondas de choque em soluções fracas não podem ser curvas arbitrárias no semi-plano xt ($\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$): elas devem satisfazer certas condições. Suponha que a solução fraca u é suave em duas regiões distintas, separadas por uma onda de choque $x = g(t)$, conforme ilustrado na Figura 1. Assuma que u é continuamente diferenciável longe de $g(t)$ e que as regiões são dadas por R_1 para $x > g(t)$ e R_2 para $x < g(t)$ e que os limites laterais de u e de suas derivadas parciais de primeira ordem existem e são finitos quando $x \rightarrow g(t)^-$ e $x \rightarrow g(t)^+$. Então, escolhendo $a < g(t)$, $b > g(t)$ e considerando a forma integral da equação (2.1) [7, pág. 64], obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx &= F(a, t, u(a, t)) - F(b, t, u(b, t)) \\ \frac{d}{dt} \int_a^{g(t)} u(x, t) dx + \frac{d}{dt} \int_{g(t)}^b u(x, t) dx &= F(a, t, u(a, t)) - F(b, t, u(b, t)), \end{aligned} \quad (2.4)$$

em que $F(\theta, t, u(\theta, t)) \equiv f(u(\theta, t))$, com $\theta \in \{a, b\}$.

Pela regra de Leibniz, pode-se escrever as duas integrais do primeiro membro de (2.4) como

$$\frac{d}{dt} \int_a^{g(t)} u(x, t) dx = \int_a^{g(t)} \frac{d}{dt} u(x, t) dx + u(g(t)^-, t)g'(t), \quad (2.5)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{g(t)}^b u(x, t) dx = \int_{g(t)}^b \frac{d}{dt} u(x, t) dx - u(g(t)^+, t)g'(t). \quad (2.6)$$

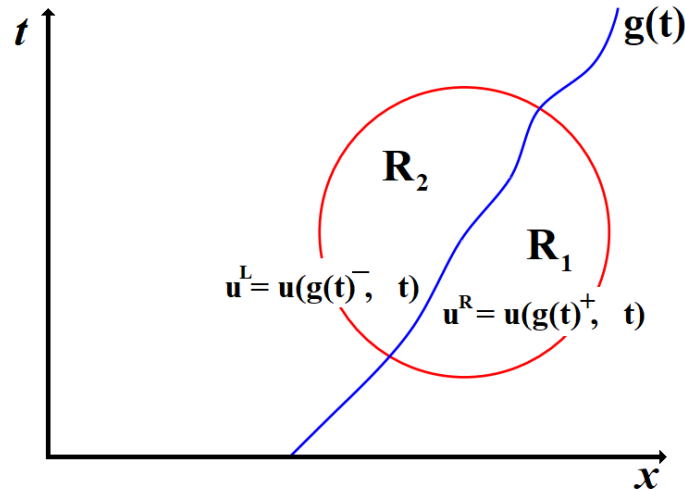


Figura 1 – Regiões de choque.

Substituindo (2.5) e (2.6) em (2.4)

$$\begin{aligned} \int_a^{g(t)} \frac{d}{dt} u(x, t) dx + \int_{g(t)}^b \frac{d}{dt} u(x, t) dx + [u(g(t)^-, t) - u(g(t)^+, t)] g'(t) = \\ = F(a, t, u(a, t)) - F(b, t, u(b, t)). \end{aligned}$$

Sendo assim, considerando os limites $a \rightarrow g(t)^-$ e $b \rightarrow g(t)^+$

$$[u(g(t)^-, t) - u(g(t)^+, t)] g'(t) = F(g(t)^-, t, u(g(t)^-, t)) - F(g(t)^+, t, u(g(t)^+, t)).$$

Portanto, denotando $u^R = u(g(t)^+, t)$ e $u^L = u(g(t)^-, t)$, obtemos a relação

$$g'(t) \llbracket u \rrbracket = \llbracket F(u) \rrbracket, \quad (2.7)$$

em que $\llbracket u \rrbracket = u^R - u^L$ e $\llbracket F(u) \rrbracket = F(g(t)^+, t, u^R) - F(g(t)^-, t, u^L)$.

Definição 2.13. (Condição Rankine-Hugoniot [7, pág. 65]). A igualdade dada em (2.7) é chamada de condição de Rankine-Hugoniot ou simplesmente condição RH. Além disso, $s = g'(t)$ é denominada velocidade de propagação da onda de choque.

2.2.3 Condições de Entropia

Soluções fracas para o PVI apresentado em (2.2) podem não ser únicas, sendo necessária uma condição adicional para determinar uma solução fisicamente relevante [38]. Esta condição está relacionada às propriedades físicas do problema. Ela é chamada *condição de entropia* e a solução fraca que a satisfaz é denominada *solução de entropia* ou simplesmente *solução entrópica*.

Definição 2.14. Seja u uma solução fraca de (2.2) e considere u^L e u^R como os valores correspondentes à esquerda e à direita de um choque. Então u é chamada de solução de entropia se satisfizer algum dos seguintes critérios:

- Condição de entropia de Lax [46, pág. 36]:

A velocidade de choque fornecida pela condição de salto Rankine-Hugoniot satisfaz

$$f'(u^L) > s > f'(u^R).$$

Se f é convexa, $f''(u) \geq 0, \forall u \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, então a condição se reduz a $u^L > u^R$.

- Condição de entropia de Oleinik [46, pág. 36]:

Para funções de fluxo não convexas, uma noção diferente de entropia é dada por

$$\frac{f(u) - f(u^L)}{u - u^L} \geq s \geq \frac{f(u) - f(u^R)}{u - u^R},$$

para todo u entre u^L e u^R .

A condição de Oleinik implica a condição de Lax, mas o contrário não é necessariamente verdade. Mais ainda, a condição de Lax é equivalente a condição de Oleinik se, e somente se, f for estritamente convexa, ou seja, $f'' > 0$.

2.2.3.1 Par Entropia

Um outro critério para seleção de solução entrópica é desenvolvido considerando uma equação diferencial parabólica escrita na forma de um perfil viscoso [48, pág. 29].

Definição 2.15. (Solução viscosa [48, pág. 29]). Dizemos que u é uma solução viscosa para (2.1) se ela pode ser obtida como o limite de soluções para a família de equações

$$\frac{\partial u^\epsilon}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}(u^\epsilon) = \epsilon \frac{\partial^2 u^\epsilon}{\partial x^2}, \quad (2.8)$$

quando $\epsilon \rightarrow 0$.

Perceba que (2.8) é uma perturbação de (2.1). Essa modificação transforma a lei de conservação em uma equação de convecção-difusão. Tais equações são semelhantes à equação do calor e possuem soluções suaves, infinitamente diferenciáveis [48, pág. 29].

Definição 2.16. (Par entropia [48, pág. 29]). Sejam $\mathcal{U} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função estritamente convexa e $\mathcal{F} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$\mathcal{F}(u) = \int_0^u f'(s)\mathcal{U}'(s) ds \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}'(u) = \mathcal{U}'(u)f'(u),$$

em que a função f é a função de fluxo. A função \mathcal{U} é chamada de *função de entropia* e a função correspondente \mathcal{F} é chamada de *fluxo de entropia*. Além disso, o par $(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ é denominado *par entropia*.

Usando os mesmos argumentos que [48, pág. 29], isto é, multiplicando (2.8) por $\mathcal{U}'(u^\epsilon)$, usando a Definição 2.16 e a regra da cadeia, obtém-se

$$\mathcal{U}'(u^\epsilon) \frac{\partial u^\epsilon}{\partial t} + \mathcal{U}'(u^\epsilon) \frac{\partial f}{\partial x}(u^\epsilon) = \epsilon \mathcal{U}'(u^\epsilon) \frac{\partial^2 u^\epsilon}{\partial x^2} \quad (2.9)$$

$$\mathcal{U}'(u^\epsilon) \frac{\partial u^\epsilon}{\partial t} + \mathcal{U}'(u^\epsilon) f'(u^\epsilon) \frac{\partial u^\epsilon}{\partial x} = \epsilon \mathcal{U}'(u^\epsilon) \frac{\partial^2 u^\epsilon}{\partial x^2}$$

$$\mathcal{U}'(u^\epsilon) \frac{\partial u^\epsilon}{\partial t} + \mathcal{F}'(u^\epsilon) \frac{\partial u^\epsilon}{\partial x} = \epsilon \mathcal{U}'(u^\epsilon) \frac{\partial^2 u^\epsilon}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t}(u^\epsilon) + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}(u^\epsilon) = \epsilon \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial x^2}(u^\epsilon) - \epsilon \mathcal{U}''(u^\epsilon) \left(\frac{\partial u^\epsilon}{\partial x} \right)^2. \quad (2.10)$$

Como \mathcal{U} é uma função convexa, tem-se $\mathcal{U}'' \geq 0$. Sendo assim, de (2.10),

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t}(u^\epsilon) + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}(u^\epsilon) \leq \epsilon \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial x^2}(u^\epsilon). \quad (2.11)$$

Com isso, pode ser demonstrado que $u = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u^\epsilon$ existe e é uma solução fraca de (2.1) [7, pág. 74]. Então, de (2.11),

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t}(u) + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}(u) \leq 0. \quad (2.12)$$

A desigualdade (2.12) recebe o nome de desigualdade de entropia.

Definição 2.17. Uma função $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ é uma solução entrópica de (2.2) se satisfizer as seguintes condições:

- (i) u é uma solução fraca de (2.2);
- (ii) u satisfaz a desigualdade de entropia (2.12) para todo par entropia $(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Qualquer função convexa \mathcal{U} pode ser usada como uma função de entropia para o problema (2.2). Em particular podem-se usar as funções entrópicas de Kruzkov.

Definição 2.18. (Pares entropia de Kruzkov [48, pág. 29]). Seja $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$. Define-se por *função entrópica de Kruzkov* a seguinte função:

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(u) = |u - c|,$$

para alguma constante $c \in \mathbb{R}$, e o seu fluxo de entropia como

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(u) = \text{sign}(u - c)(f(u) - f(c)).$$

Além disso, diz-se que uma função u satisfaz a condição de entropia de Kruzkov se ela cumpre:

$$\frac{\partial}{\partial t} |u - c| + \frac{\partial}{\partial x} (\text{sign}(u - c)(f(u) - f(c))) \leq 0.$$

Lema 2.19. Uma função $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ é uma solução de entropia de (2.2) se, e somente se, satisfizer a condição de entropia de Kruzkov.

Demonstração. Uma prova para este resultado pode ser observada em [48, pág. 30]. \square

3 MÉTODO SSP-RKDG

Neste capítulo detalhamos a construção de um método RKDG elaborado para resolver uma EDP hiperbólica não linear escrita na forma de uma lei de conservação com variável espacial unidimensional. O principal objetivo do capítulo é apresentar um estudo das propriedades de estabilidade e convergência dos esquemas propostos. Para isso utilizaremos resultados que foram substancialmente baseados nos trabalhos [16, 24, 25].

O problema estudado pode ser apresentado da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } u : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial f}{\partial x}(u(x, t)) = 0 \quad \text{em } \Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad \forall x \in \Omega, \\ \text{com condições de contorno periódicas.} \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Uma solução do Problema (3.1) pode apresentar descontinuidades através de curvas que a separam em regiões suaves por partes, como visto no Capítulo 2. Essas descontinuidades se desenvolvem mesmo para condições iniciais regulares. Sendo assim, é desejável obter um método capaz de encontrar uma solução com tais propriedades, ou seja, que consiga capturar as regiões de choque sem produzir oscilações indesejáveis e manter a ordem de aproximação desejada nas partes suaves longe das descontinuidades.

O estudo desenvolvido neste trabalho está restrito ao caso em que as condições de contorno são periódicas. Um estudo de casos mais gerais podem ser desenvolvidos adicionando algumas hipóteses sobre as condições de contorno não-periódicas, por exemplo, uma limitação na norma L^2 .

Com o pensamento voltado para a busca de um método que atenda essas exigências iremos fazer o tratamento do problema pelos seguintes procedimentos: primeiro uma discretização da componente espacial x via método de Galerkin Descontínuo que implicará na montagem de um sistema de EDOs em termos da variável temporal t ; depois, a resolução desse sistema usando um método de Runge-Kutta.

Observação 3.1. Daqui em diante sempre que tivermos uma função qualquer $g : \overset{\circ}{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $\overset{\circ}{\Omega}$ aberto, serão usadas sem distinção as seguintes notações para derivada (sentido clássico):

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \quad \text{e} \quad \partial_x g(x, t).$$

3.1 DISCRETIZAÇÃO DO ESPAÇO

Definição 3.2. A partição do intervalo Ω é dada por $\{x_{j+1/2}\}_{j=0}^N$ e pelos subintervalos $I_j = (x_{j-1/2}, x_{j+1/2})$ em que $j = 1, \dots, N$ e $a = x_{1/2}, b = x_{N+1/2}$. Além disso, será definido $\Delta x_j = x_{j+1/2} - x_{j-1/2}$, também para cada $j = 1, \dots, N$ e usada a notação $\Delta x = \max_{1 \leq j \leq N} \Delta x_j$.

Definição 3.3. Seja $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Usaremos $u_{j+1/2}^+$ e $u_{j+1/2}^-$, $j \in \{0, \dots, N\}$, para denotar os limites de u à direita e à esquerda do ponto $x_{j+1/2}$, respectivamente. Em outras palavras, para um dado $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno

$$u_{j+1/2}^+ = u(x_{j+1/2}^+) = \begin{cases} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u(x_{j+1/2} + \epsilon) & \text{se } j < N, \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u(x_{1/2} + \epsilon) & \text{se } j = N, \end{cases}$$

$$u_{j+1/2}^- = u(x_{j+1/2}^-) = \begin{cases} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u(x_{j+1/2} - \epsilon) & \text{se } j > 0, \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u(x_{N+1/2} - \epsilon) & \text{se } j = 0. \end{cases}$$

Além disso, definimos o *salto* de u no ponto $x_{j+1/2}$, para $j \in \{0, \dots, N\}$, como

$$[[u_{j+1/2}]] := u(x_{j+1/2}^+) - u(x_{j+1/2}^-).$$

Partindo do Problema (3.1), multiplicando a primeira equação por uma função infinitamente diferenciável, com suporte compacto $v(x)$ sobre I_j e integrando, também sobre cada subintervalo de Ω , pode-se obter:

$$\int_{I_j} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t)v(x) dx + \int_{I_j} \frac{\partial f}{\partial x}(u(x, t))v(x) dx = 0.$$

O que, pela propriedade de integral por partes, implica em:

$$\int_{I_j} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t)v(x) dx + f(u(x, t))v(x)|_{I_j} - \int_{I_j} f(u(x, t)) \frac{\partial v}{\partial x}(x) dx = 0.$$

Desta forma,

$$\int_{I_j} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t)v(x) dx - \int_{I_j} f(u(x, t)) \frac{\partial v}{\partial x}(x) dx + f(u(x_{j+1/2}^-, t))v(x_{j+1/2}^-) - f(u(x_{j-1/2}^+, t))v(x_{j-1/2}^+) = 0.$$

A ideia básica do método de Galerkin Descontínuo para o Problema (3.1) é realizar a aproximação $u_h(t)$ de $u(t)$ com $t \in (0, T)$ e substituir $v(x)$ por $v_h(x)$. As funções $u_h(x)$ e $v_h(x)$ são contínuas por partes e pertencem a algum espaço de polinômios quebrados (Definição 2.9. O espaço considerado neste trabalho será:

$$\mathcal{V}_h = \mathcal{V}_h^k \equiv \{v \in L^2(\Omega) \mid v|_{I_j} \in \mathbb{P}^k(I_j), \quad j = 1, \dots, N\}, \quad (3.2)$$

em que $\mathbb{P}^k(I_j)$ denota o espaço dos polinômios em I_j de grau menor ou igual a k .

Ao realizar a substituição das funções $v(x)$ por um elemento do espaço \mathcal{V}_h (espaço das funções testes) e a solução exata $u(x, t)$ pela solução aproximada $u_h(x, t)$ deve-se ter cuidado, pois a função $u_h(x, t)$ pode ser descontínua em algum ponto $x_{j+1/2}$, ou seja, $u_h(x_{j+1/2}^-, t) \neq u_h(x_{j+1/2}^+, t)$. Sendo assim, seguindo a ideia frequentemente usada em métodos de volumes finitos, o fluxo $f(u_h(x_{j+1/2}, t))$ deve ser aproximado, nesses pontos, por uma *função de fluxo numérico* dada por [10, pág. 6]:

$$f(u_h(x_{j+1/2}, t)) \approx \hat{f}(u_h(x_{j+1/2}^-, t), u_h(x_{j+1/2}^+, t)).$$

Observação 3.4. Neste trabalho serão usadas sem distinção as denominações *função de fluxo numérico* e *fluxo numérico* para \hat{f} .

Na Seção 3.1.1 são evidenciadas algumas condições que o fluxo numérico deve atender para que o método obtenha estabilidade e alguns exemplos deste tipo de fluxo.

Por simplicidade iremos assumir que a função $u_0(x)$ dada em Problema (3.1) pertence ao espaço \mathcal{V}_h^k . Desta forma, usando a notação $\hat{f}_{j\pm 1/2}(t) = \hat{f}(u_h(x_{j\pm 1/2}^-, t), u_h(x_{j\pm 1/2}^+, t))$, a solução aproximada u_h dada pela discretização espacial DG é determinada resolvendo o seguinte problema:

$$\left| \begin{array}{l} \text{Encontrar } u_h(x, t) \text{ tal que para todos } t \in (0, T), j = 1, \dots, N \text{ e } v_h(x) \in \mathcal{V}_h^k : \\ \int_{I_j} \partial_t u_h(x, t) v_h(x) dx - \int_{I_j} f(u_h(x, t)) \partial_x v_h(x) dx \\ \quad + \hat{f}_{j+1/2}(t) v_h(x_{j+1/2}^-) - \hat{f}_{j-1/2}(t) v_h(x_{j-1/2}^+) = 0, \\ u_h(x, 0) = u_0(x), \\ \text{com condições de contorno periódicas e } \hat{f} \text{ ainda a ser determinado.} \end{array} \right. \quad (3.3)$$

3.1.1 Fluxos numéricos

Para concluir a Formulação (3.3), deve-se escolher de maneira adequada o fluxo numérico \hat{f} . Essa escolha é o aspecto mais delicado e crucial da definição dos métodos de Galerkin Descontínuo para leis de conservação, pois pode afetar sua consistência e estabilidade [18]. Desta forma, destinamos esta subseção ao detalhamento deste conceito.

Definição 3.5. Dados uma discretização do espaço como a da Definição 3.2 e $t_1, t_2 \in (0, T)$, com $t_2 > t_1$, dizemos que o esquema é *monótono* se, para todo $j = 1, \dots, N$, $u_{j+1}(t_1) \geq u_j(t_1)$ (equiv. $u_{j+1}(t_1) \leq u_j(t_1)$), então $u_{j+1}(t_2) \geq u_j(t_2)$ (equiv. $u_{j+1}(t_2) \leq u_j(t_2)$);

O método RKDG estudado neste trabalho é construído por meio de perturbações de esquemas monótonos. A justificativa para o uso desta estratégia está no fato de os esquemas monótonos serem precisos em ordens mais baixas (primeira ordem), bastante

estáveis e convergirem para a solução de entropia [16, pág. 162]. Mais especificamente, pretende-se verificar que no caso em que $k = 0$ na definição do espaço \mathcal{V}_h^k dada em (3.2), ou seja, quando a solução aproximada u_h for constante por partes, a discretização da componente espacial pelo método DG gera um esquema monótono e para as ordens mais altas, o esquema satisfaz as mesmas condições de estabilidade que os esquemas monótonos.

Definição 3.6. Dados $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, dizemos que um fluxo numérico \hat{f} é:

- (i) *monótono*, se $\hat{f}(a, b)$ for não-decrescente em a e não-crescente em b ;
- (ii) *consistente*, se para a função de fluxo f for satisfeito $\hat{f}(a, a) = f(a)$;
- (iii) *localmente Lipschitz*, se existirem constantes positivas C_1 e C_2 tais que

$$|\hat{f}(c, d) - \hat{f}(a, b)| \leq C_1|c - a| + C_2|d - b|.$$

Exemplo 3.7. Alguns dos fluxos numéricos mais conhecidos que cumprem as propriedades definidas acima são [16, pág. 163]:

1. O fluxo de Godunov:

$$\hat{f}^G(a, b) = \begin{cases} \min_{a \leq u \leq b} f(u), & \text{se } a < b, \\ \max_{a \geq u \geq b} f(u), & \text{se } a \geq b; \end{cases}$$

2. O fluxo de Engquist-Osher:

$$\hat{f}^{EO}(a, b) = \int_0^b \min(f'(s), 0) ds + \int_0^a \max(f'(s), 0) ds + f(0);$$

3. O fluxo de Lax-Friedrichs:

$$\hat{f}^{LF}(a, b) = \frac{1}{2}[f(a) + f(b) - C(b - a)],$$

$$C = \max_{\inf u^0(x) \leq s \leq \sup u^0(x)} |f'(s)|;$$

4. O fluxo Local de Lax-Friedrichs:

$$\hat{f}^{LLF}(a, b) = \frac{1}{2}[f(a) + f(b) - C(b - a)],$$

$$C = \max_{\min(a, b) \leq s \leq \max(a, b)} |f'(s)|;$$

5. O fluxo de Roe com “entropia fixa”:

$$\hat{f}^R(a, b) = \begin{cases} f(a), & \text{se } f'(u) \geq 0 \text{ para } u \in [\min(a, b), \max(a, b)], \\ f(b), & \text{se } f'(u) \leq 0 \text{ para } u \in [\min(a, b), \max(a, b)], \\ \hat{f}^{LLF}(a, b), & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

em que u é a mesma função do Problema (3.1).

Dos fluxos numéricos apresentados no Exemplo 3.7, o de Godunov \hat{f}^G é o que apresenta menor quantidade de difusão artificial [16, pág. 164].

Apesar do destaque dado aos fluxos numéricos e da apresentação de alguns dos mais usados no Exemplo 3.7, segundo [16, pág. 164] as experiências numéricas sugerem que, à medida que o grau k aumenta, sua escolha vai diminuindo o impacto na qualidade das aproximações de u_h , ou seja, quanto maior a ordem do método menor a influência desempenhada pelo fluxo numérico.

Para o estudo desenvolvido neste trabalho será usado o fluxo numérico de Engquist-Osher. Apesar de não desenvolvermos análises com outros tipos de fluxos numéricos, acreditamos que um estudo semelhante possa ser desenvolvido sem muitos problemas.

3.1.2 Diagonalização da matriz de massa

Para o estudo desenvolvido neste trabalho serão considerados os polinômios de Legendre como funções de base locais para compor o espaço \mathcal{V}_h^k . Esses polinômios serão denotados por P_ℓ e são comumente usados, pois possuem a propriedade de ortogonalidade [16, pág. 164], isto é, dados os polinômios $P_\ell(x)$ e $P_{\ell'}(x)$,

$$(P_\ell(x), P_{\ell'}(x)) = \int_{-1}^1 P_\ell(x)P_{\ell'}(x) dx = \left(\frac{2}{2\ell+1}\right) \delta_{\ell\ell'} \quad (3.4)$$

em que

$$\delta_{\ell\ell'} = \begin{cases} 0, & \text{se } \ell \neq \ell', \\ 1, & \text{se } \ell = \ell'. \end{cases}$$

Desta forma, podemos definir, em cada I_j , os polinômios de Legendre como

$$P_1(x) = 1; \quad P_2(x) = \xi_j; \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(3\xi_j^2 - 1); \quad \dots$$

em que

$$\xi_j = \frac{2(x - x_j)}{\Delta x_j}.$$

Lema 3.8. *A escolha dos polinômios de Legendre fornece à formulação dada em (3.3) uma matriz, resultante da discretização, diagonal.*

Demonstração. As ideias para essa demonstração foram desenvolvidas a partir de [16, pág. 164]. Ela inicia-se utilizando os polinômios de Legendre (3.4), para todo $x \in I_j$, da seguinte forma:

$$\varphi_\ell^{(j)}(x) = P_\ell\left(\frac{2(x - x_j)}{\Delta x_j}\right), \quad \text{com } \ell = 0, \dots, k, \quad (3.5)$$

no intuito de expressar a solução aproximada u_h e a função teste v_h , ambas em I_j como:

$$u_h(x, t) := \sum_{\ell=0}^k u_j^{(\ell)}(t) \varphi_\ell^{(j)}(x); \quad v_h := \varphi_\ell^{(j)}(x) \quad \forall \ell = 0, \dots, k.$$

A condição inicial pode ser escrita como:

$$u_0(x) = u_h(x, 0) = \sum_{i=0}^k u_j^{(i)}(0) \varphi_i^{(j)}(x) \quad \text{em } I_j.$$

Então, multiplicando ambos os lados pela função $\varphi_\ell^{(j)}(x)$ e integrando em I_j ,

$$\begin{aligned} \int_{I_j} \left(\sum_{i=0}^k u_j^{(i)}(0) \varphi_i^{(j)}(x) \right) \varphi_\ell^{(j)}(x) dx &= \sum_{i=0}^k u_j^{(i)}(0) \int_{I_j} \varphi_i^{(j)}(x) \varphi_\ell^{(j)}(x) dx \\ &= u_j^{(\ell)}(0) \left(\frac{\Delta x_j}{2\ell + 1} \right). \end{aligned}$$

Sendo assim,

$$u_j^{(\ell)}(0) = \frac{2\ell + 1}{\Delta x_j} \int_{I_j} u_0(x) \varphi_\ell^{(j)}(x) dx.$$

Logo, a Formulação (3.3) pode ser reescrita como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall j = 1, \dots, N \quad \text{e} \quad \ell = 0, \dots, k : \\ \int_{I_j} \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{i=0}^k u_j^{(i)}(t) \varphi_i^{(j)}(x) \right) \varphi_\ell^{(j)}(x) dx - \int_{I_j} f(u_h) \frac{d}{dx} \varphi_\ell^{(j)}(x) dx \\ \quad + \hat{f}_{j+1/2}(t) \varphi_\ell^{(j)}(x_{j+1/2}^-) - \hat{f}_{j-1/2}(t) \varphi_\ell^{(j)}(x_{j-1/2}^+) = 0 \\ u_j^{(\ell)}(0) = \frac{2\ell + 1}{\Delta x_j} \int_{I_j} u_0(x) \varphi_\ell^{(j)}(x) dx. \end{array} \right. \quad (3.6)$$

Por (3.4) tem-se

$$(\varphi_i^{(j)}(x), \varphi_\ell^{(j)}(x)) = \int_{I_j} \varphi_i^{(j)}(x) \varphi_\ell^{(j)}(x) dx = \left(\frac{\Delta x_j}{2i + 1} \right) \delta_{i\ell} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq \ell; \\ \left(\frac{\Delta x_j}{2\ell + 1} \right) & \text{se } i = \ell. \end{cases}$$

A partir deste resultado, o primeiro termo da primeira igualdade de (3.6) resulta em:

$$\begin{aligned} \int_{I_j} \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{i=0}^k u_j^{(i)}(t) \varphi_i^{(j)}(x) \right) \varphi_\ell^{(j)}(x) dx &= \sum_{i=0}^k \frac{\partial}{\partial t} u_j^{(i)}(t) \int_{I_j} \varphi_i^{(j)}(x) \varphi_\ell^{(j)}(x) dx \\ &= \frac{\partial}{\partial t} u_j^{(\ell)}(t) \left(\frac{\Delta x_j}{2\ell + 1} \right). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Além disso, por (3.5) e os terceiro e quarto termos da primeira igualdade de (3.6) segue que

$$\begin{aligned} \hat{f}_{j+1/2}(t)\varphi_\ell^{(j)}(x_{j+1/2}^-) - \hat{f}_{j-1/2}(t)\varphi_\ell^{(j)}(x_{j-1/2}^+) = \\ \hat{f}_{j+1/2}(t)P_\ell\left(\frac{2(x_{j+1/2}^- - x_j)}{\Delta x_j}\right) - \hat{f}_{j-1/2}(t)P_\ell\left(\frac{2(x_{j-1/2}^+ - x_j)}{\Delta x_j}\right), \end{aligned}$$

o que implica em

$$\hat{f}_{j+1/2}(t)\varphi_\ell^{(j)}(x_{j+1/2}^-) - \hat{f}_{j-1/2}(t)\varphi_\ell^{(j)}(x_{j-1/2}^+) = \hat{f}_{j+1/2}(t)P_\ell(1) - \hat{f}_{j-1/2}(t)P_\ell(-1).$$

Pelas propriedades dos polinômios de Legendre [16, pág. 164], tem-se

$$P_\ell(1) = 1, \quad P_\ell(-1) = (-1)^\ell.$$

Logo,

$$\hat{f}_{j+1/2}(t)\varphi_\ell^{(j)}(x_{j+1/2}^-) - \hat{f}_{j-1/2}(t)\varphi_\ell^{(j)}(x_{j-1/2}^+) = \hat{f}_{j+1/2}(t) - (-1)^\ell \hat{f}_{j-1/2}(t). \quad (3.8)$$

Utilizando (3.7) e (3.8), a Formulação (3.3) pode ser reescrita como

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall j = 1, \dots, N \quad \text{e} \quad \ell = 0, \dots, k : \\ \left(\frac{1}{2\ell + 1} \right) \frac{\partial}{\partial t} u_j^{(\ell)}(t) - \frac{1}{\Delta x_j} \int_{I_j} f(u_h) \frac{d}{dx} \varphi_\ell^{(j)}(x) dx \\ \quad + \frac{1}{\Delta x_j} \left\{ \hat{f}_{j+1/2}(t) - (-1)^\ell \hat{f}_{j-1/2}(t) \right\} = 0, \\ u_j^{(\ell)}(0) = \frac{2\ell + 1}{\Delta x_j} \int_{I_j} u_0(x) \varphi_\ell^{(j)}(x) dx. \end{array} \right. \quad (3.9)$$

Escrevendo (3.9) na forma matricial, isto é,

$$\begin{cases} B_t = D^{-1} \tilde{L}(D) = L(B) \\ B(0) = B_0, \end{cases}$$

em que

$$B = [B_1, \dots, B_N]^T, \quad \text{com} \quad B_j = [u_j^{(0)}, \dots, u_j^{(k)}]^T, \quad (3.10)$$

$$D = \text{diag}(D_1, \dots, D_N), \quad \text{em que} \quad D_j \in \mathbb{R}^{(k+1) \times (k+1)}, \quad \text{com} \quad (3.11)$$

$$D_j = \int_{I_j} \varphi_\ell^{(j)}(x) \varphi_\ell^{(j)}(x) dx = \left(\frac{\Delta x_j}{2\ell + 1} \right), \quad (3.12)$$

$$\tilde{L}(D) = \frac{1}{\Delta x_j} \int_{I_j} f(u_h) \frac{d}{dx} \varphi_\ell^{(j)}(x) dx - \frac{1}{\Delta x_j} \left\{ \hat{f}_{j+1/2}(t) - (-1)^\ell \hat{f}_{j-1/2}(t) \right\}, \quad (3.13)$$

$$L(B) = \frac{2\ell + 1}{\Delta x_j} \int_{I_j} f(u_h) \frac{d}{dx} \varphi_\ell^{(j)}(x) dx - \frac{2\ell + 1}{\Delta x_j} \left\{ \hat{f}_{j+1/2}(t) - (-1)^\ell \hat{f}_{j-1/2}(t) \right\} \quad (3.14)$$

e

$$B(0) = [B(0)_1, \dots, B(0)_N]^T, \text{ com } B(0)_j = [u_j(0)^{(0)}, \dots, u_j(0)^{(k)}]^T, \quad (3.15)$$

$$B_0 = \frac{2\ell + 1}{\Delta x_j} \int_{I_j} u_0(x) \varphi_\ell^{(j)}(x) dx. \quad (3.16)$$

Portanto, de (3.11) e (3.12) segue que a matriz D é diagonal. \square

Note que os resultados apresentados na demonstração do Lema 3.8 evidenciam que após ser realizada a discretização do espaço é possível escrever o Problema (3.1) como um sistema de EDOs em termos dos graus de liberdade [16, pág. 165], isto é:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} u_h = L_h(u_h), & \text{em } (0, T) \\ u_h(t = 0) = u_{0h}, \end{cases}$$

em que

$$\frac{d}{dt} u_h = B_t, L_h(u_h) = L(B), u_h(t = 0) = B(0) \text{ e } u_{0h} = B_0.$$

Observação 3.9. Perceba que o operador $L_h(u_h)$ é uma aproximação do termo $-\partial_x f(u)$ fornecida pela discretização DG da componente espacial.

Observação 3.10. Escolhendo uma base local diferente, a matriz de massa pode deixar de ser diagonal, mas manterá a ordem $k + 1$. Além disso, ao invertê-la, sempre é possível escrever as equações para os graus de liberdade da solução aproximada u_h como um sistema de EDOs, assim como apresentado acima [16, pág. 165].

3.1.3 Análise da estabilidade e convergência: caso linear

Nesta seção será demonstrada uma propriedade de estabilidade e serão apresentados alguns teoremas de convergência para o caso linear, isto é, quando a função de fluxo é dada por $f(u) = \alpha u$, com α constante.

Observação 3.11. No caso linear todos os fluxos numéricos exibidos no Exemplo 3.7 coincidem [16, pág. 165]. Mais que isso, são dados por:

$$\hat{f}(a, b) = \frac{\alpha}{2}(a + b) - \frac{|\alpha|}{2}(b - a). \quad (3.17)$$

Pela Observação 3.11 para mostrar a estabilidade do método basta verificar o caso em que o fluxo numérico é dado como em (3.17). O próximo resultado estabelece a estabilidade na norma L^2 em termos dos saltos da solução aproximada u_h nos pontos $\{x_{j+1/2}\}_{j=0}^{N-1}$ da partição.

Proposição 3.12. (*Estabilidade L^2 [16, pág. 165]*). *Seja u_h a solução da Formulação (3.3), com $f(u) = \alpha u$, α constante e com um fluxo numérico \hat{f} monótono e consistente. Sob tais condições, a desigualdade*

$$\|u_h(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \Theta_T(u_h) \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

é válida, com

$$\Theta_T(u_h) = |\alpha| \int_0^T \sum_{j=0}^{N-1} \llbracket u_h(t) \rrbracket_{j+1/2}^2 dx.$$

Demonstração. A demonstração desse resultado foi baseada nas ideias exibidas em [10, pág. 13]. Feita esta consideração, partindo de $f(u) = \alpha u$, pela primeira equação de (3.3) temos, em cada I_j , para $v_h \in \mathcal{V}_h^k$,

$$\int_{I_j} \partial_t u_h v_h dx - \int_{I_j} \alpha u_h \partial_x v_h dx + \hat{f}_{j+1/2}(t) v_h(x_{j+1/2}^-) - \hat{f}_{j-1/2}(t) v_h(x_{j-1/2}^+) = 0. \quad (3.18)$$

Tomando $v_h = u_h$ segue dos dois primeiros termos de (3.18) que

$$\int_{I_j} \partial_t u_h u_h dx = \int_{I_j} \frac{d}{dt} \left(\frac{u_h^2}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{I_j} u_h^2 dx \quad (3.19)$$

e

$$\int_{I_j} \alpha u_h \partial_x u_h dx = \alpha \int_{I_j} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_h^2}{2} \right) dx = \frac{\alpha}{2} \int_{I_j} \frac{\partial}{\partial x} (u_h^2) dx = \frac{\alpha}{2} u_h^2 \Big|_{I_j}. \quad (3.20)$$

Logo, substituindo os resultados de (3.19) e (3.20) em (3.18), obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{I_j} u_h^2 dx - \frac{\alpha}{2} [u_h^2(x_{j+1/2}^-, t) - u_h^2(x_{j-1/2}^+, t)] \\ + \hat{f}_{j+1/2}(t) u_h(x_{j+1/2}^-) - \hat{f}_{j-1/2}(t) u_h(x_{j-1/2}^+) = 0. \end{aligned}$$

Realizando o somatório em j :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} u_h^2(x_{1/2}^+, t) - \hat{f}_{1/2}(t) u_h(x_{1/2}^+, t) + \sum_{j=1}^{N-1} \left[\frac{\alpha}{2} \llbracket u_h(t) \rrbracket_{j+1/2}^2 \right. \\ \left. - \hat{f}_{j+1/2}(t) \llbracket u_h(t) \rrbracket_{j+1/2} \right] - \frac{\alpha}{2} u_h^2(x_{N+1/2}^-, t) + \hat{f}_{N+1/2}(t) u_h(x_{N+1/2}^-, t) = 0. \quad (3.21) \end{aligned}$$

Assim, por (3.17) temos:

$$\begin{aligned} \hat{f}_{j+1/2}(t) &= \frac{\alpha}{2} [u_h(x_{j+1/2}^-, t) + u_h(x_{j+1/2}^+, t)] - \frac{|\alpha|}{2} [u_h(x_{j+1/2}^+, t) - u_h(x_{j+1/2}^-, t)] \\ &= \frac{\alpha}{2} [u_h(x_{j+1/2}^-, t) + u_h(x_{j+1/2}^+, t)] - \frac{|\alpha|}{2} \llbracket u_h(t) \rrbracket_{j+1/2}. \quad (3.22) \end{aligned}$$

Desta forma, fazendo algumas manipulações algébricas podemos escrever, a partir de (3.22),

$$\frac{\alpha}{2} \llbracket u_h(t) \rrbracket_{j+1/2}^2 - \hat{f}_{j+1/2}(t) \llbracket u_h(t) \rrbracket_{j+1/2} = \frac{|\alpha|}{2} \llbracket u_h(t) \rrbracket_{j+1/2}^2, \quad j = 1, \dots, N-1. \quad (3.23)$$

Aqui o fluxo numérico é definido nos extremos do domínio, isto é, em $x_{1/2}$ e $x_{N+1/2}$, por:

$$\hat{f}_{1/2}(t) = \hat{f}_{N+1/2}(t) = \hat{f}(u_h(x_{N+1/2}^-, t), u_h(x_{1/2}^+, t)),$$

isso devido à hipótese de as condições de contorno serem periódicas.

Como, por hipótese, a condição de contorno é periódica, segue

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{2} u_h^2(x_{1/2}^+, t) - \hat{f}_{1/2}(t) u_h(x_{1/2}^+, t) - \frac{\alpha}{2} u_h^2(x_{N+1/2}^-, t) + \hat{f}_{N+1/2}(t) u_h(x_{N+1/2}^-, t) = \\ & \frac{|\alpha|}{2} \llbracket u_h(t) \rrbracket_{1/2}^2. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Desta forma, obtém-se, de (3.21), (3.23) e (3.24),

$$\frac{d}{dt} \|u_h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{j=0}^{N-1} |\alpha| \llbracket u_h(t) \rrbracket_{j+1/2}^2 = 0.$$

Logo, integrando em t de 0 a T ,

$$\frac{1}{2} \|u_h(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \|u_h(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{|\alpha|}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \int_0^T \llbracket u_h(t) \rrbracket_{j+1/2}^2 dt = 0.$$

Portanto,

$$\|u_h(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \Theta_T(u_h) = \|u_h(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

com

$$\Theta_T(u_h) = |\alpha| \sum_{j=0}^{N-1} \int_0^T \llbracket u_h(t) \rrbracket_{j+1/2}^2 dt,$$

o que encerra a demonstração. \square

A Proposição 3.12 garante ainda que $\|u_h(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2$, pois $\Theta_T(u_h) \geq 0$.

Os resultados a seguir estabelecem controles sobre os erros na aproximação da solução exata u .

Teorema 3.13. *Sejam $u_h \in \mathcal{V}_h^k$ a solução da Formulação (3.3), com $f(u) = \alpha u$, α constante e \hat{f} um fluxo numérico monótono e consistente. Além disso, suponha que a condição inicial u_0 pertença a $H^{k+1}(\Omega)$. Então temos*

$$\|u(T) - u_h(T)\|_{L^2(\Omega)} \leq C |u_0|_{H^{k+1}(\Omega)} (\Delta x)^{k+1/2},$$

em que C depende apenas de k , $|\alpha|$ e T .

Demonstração. O Teorema 3.13 é um caso particular de um resultado demonstrado em [41]. Para uma prova detalhada desse caso específico veja [16, pág. 193]. \square

Teorema 3.14. *Sejam $u_h \in \mathcal{V}_h^k$ a solução da Formulação (3.3), com $f(u) = \alpha u$, α constante e \hat{f} um fluxo numérico monótono e consistente. Além disso, suponha que a condição inicial u_0 pertença a $H^{k+2}(\Omega)$. Então temos*

$$\|u(T) - u_h(T)\|_{L^2(\Omega)} \leq C|u_0|_{H^{k+2}(\Omega)}(\Delta x)^{k+1},$$

em que C depende apenas de k , $|\alpha|$ e T .

Demonstração. O Teorema 3.14 é uma simplificação de um resultado mais amplo provado em [45]. Uma demonstração desse caso particular é apresentada em [16, pág. 197]. \square

Em síntese, os Teoremas 3.13 e 3.14 estabelecem critérios para a convergência do método, visto que fazendo Δx tender a zero, isto é, refinando a partição, a solução aproximada u_h se aproxima cada vez mais da solução exata u .

A partir dos resultados desta seção é possível concluir que a discretização do espaço pelo método de Galerkin Descontínuo, sob certas hipóteses nas condições iniciais, resulta em um esquema estável e convergente de ordem $k + 1$, pelo menos para o caso linear. Sendo assim, é natural a investigação das mesmas propriedades para o caso não linear. Com esse pensamento, a próxima subseção é totalmente dedicada à análise da estabilidade do método para o caso em que a função de fluxo f é não-linear.

3.1.4 Análise da estabilidade e convergência: caso não-linear

Assim como feito na Seção 3.1.3, nesta seção serão apresentados alguns resultados de estabilidade e convergência do método DG, porém, para o caso não-linear. Mostraremos a prova de um teorema que garante uma condição de entropia como (2.12) e, a partir dela, a estabilidade na norma L^2 . Além disso, exporemos resultados que garantem a convergência do método escrevendo um problema parabólico associado a (3.1), usando argumentos semelhantes aos feitos na Seção 2.2.3, e mostrando que a sua solução coincide com a solução entrópica do Problema (3.1). Para tais investigações, serão utilizados os conceitos de solução entrópica e desigualdade de entropia apresentados no Capítulo 2.

Teorema 3.15 (Estabilidade L^2). *Sejam u_h a solução da Formulação (3.3) e \hat{f} um fluxo numérico monótono e consistente. Então o esquema DG é estável na norma $L^2(\Omega)$, no seguinte sentido:*

$$\|u_h(T)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_h(0)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Para a prova do Teorema 3.15 será utilizada uma desigualdade de entropia celular apresentada na forma de teorema, logo abaixo. Tal teorema foi baseado em [40] e garante que a solução aproximada u_h é a solução fraca fisicamente relevante, pois satisfaz uma

condição de entropia do tipo:

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t}(u_h) + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}(u_h) \leq 0,$$

em que a função convexa \mathcal{U} é dada por:

$$\mathcal{U}(u_h) = \frac{u_h^2}{2},$$

com fluxo de entropia correspondente:

$$\mathcal{F}(u_h)(x, t) = \int_0^{u_h(x, t)} f'(s) \mathcal{U}'(s) ds$$

o que implica em

$$\mathcal{F}(u_h)(x, t) = u_h(x, t) f(u_h(x, t)) - \int_0^{u_h(x, t)} f(s) ds.$$

Teorema 3.16 (Desigualdade de entropia celular). *Sejam u_h a solução da Formulação (3.3) e \hat{f} um fluxo numérico monótono e consistente. Sob estas condições, u_h satisfaz a seguinte desigualdade de entropia em I_j , para $j = 1, \dots, N$ e $t \in (0, T)$:*

$$\frac{d}{dt} \int_{I_j} \mathcal{U}(u_h) dx + \mathcal{F}_{j+1/2}(t) - \mathcal{F}_{j-1/2}(t) \leq 0,$$

com a função de entropia dada por:

$$\mathcal{U}(u_h) = \frac{u_h^2}{2}; \tag{3.25}$$

e fluxo de entropia correspondente:

$$\mathcal{F}_{j\pm 1/2}(t) = \hat{f}_{j\pm 1/2}(t) u_h(x_{j\pm 1/2}^-, t) - \int_0^{u_h(x_{j\pm 1/2}^-, t)} f(s) ds.$$

Demonstração. A demonstração exibida neste trabalho foi substancialmente baseada nas ideias apresentadas em [40]. Feita esta ressalva, pela primeira equação de (3.3), fazendo $v_h = u_h$, temos, em cada I_j ,

$$\int_{I_j} \partial_t u_h u_h dx - \int_{I_j} f(u_h) \partial_x u_h dx + \hat{f}_{j+1/2}(t) u_h(x_{j+1/2}^-) - \hat{f}_{j-1/2}(t) u_h(x_{j-1/2}^+) = 0. \tag{3.26}$$

Do primeiro termo de (3.26), usando a regra da cadeia, segue

$$\int_{I_j} \partial_t u_h u_h dx = \int_{I_j} \frac{d}{dt} \left(\frac{u_h^2}{2} \right) dx = \frac{d}{dt} \int_{I_j} \mathcal{U}(u_h) dx. \tag{3.27}$$

Defina $\tilde{\mathcal{F}} = \tilde{\mathcal{F}}(u_h)$ como:

$$\tilde{\mathcal{F}}(u_h)(x, t) = \int_0^{u_h(x, t)} f(s) ds \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathcal{F}}'(u_h) = f(u_h). \tag{3.28}$$

Agora, a partir do segundo termo de (3.26) e por (3.28)

$$- \int_{I_j} f(u_h) \partial_x u_h \, dx = - \int_{I_j} \tilde{\mathcal{F}}'(u_h) \partial_x u_h \, dx = -\tilde{\mathcal{F}}(u_h(x_{j+1/2}^-, t)) + \tilde{\mathcal{F}}(u_h(x_{j-1/2}^+, t)). \quad (3.29)$$

Logo, por (3.27) e (3.29) pode-se escrever (3.26) como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{I_j} \mathcal{U}(u_h) \, dx - \tilde{\mathcal{F}}(u_h(x_{j+1/2}^-, t)) + \tilde{\mathcal{F}}(u_h(x_{j-1/2}^+, t)) \\ + \hat{f}_{j+1/2}(t) u_h(x_{j+1/2}^-, t) - \hat{f}_{j-1/2}(t) u_h(x_{j-1/2}^+, t) = 0. \end{aligned}$$

Somando e subtraindo $\hat{f}_{j-1/2}(t) u_h(x_{j-1/2}^-, t) + \tilde{\mathcal{F}}(u_h(x_{j+1/2}^-, t))$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{I_j} \mathcal{U}(u_h) \, dx + \hat{f}_{j+1/2}(t) u_h(x_{j+1/2}^-, t) - \tilde{\mathcal{F}}(u_h(x_{j+1/2}^-, t)) - \hat{f}_{j-1/2}(t) u_h(x_{j-1/2}^-, t) \\ + \tilde{\mathcal{F}}(u_h(x_{j-1/2}^-, t)) - \tilde{\mathcal{F}}(u_h(x_{j-1/2}^-, t)) + \hat{f}_{j-1/2}(t) u_h(x_{j-1/2}^-, t) \\ + \tilde{\mathcal{F}}(u_h(x_{j-1/2}^+, t)) - \hat{f}_{j-1/2}(t) u_h(x_{j-1/2}^+, t) = 0. \end{aligned}$$

Sendo assim, pode-se reescrever (3.26) como

$$\frac{d}{dt} \int_{I_j} \mathcal{U}(u_h) \, dx + \mathcal{F}_{j+1/2} - \mathcal{F}_{j-1/2} + \Theta_{j-1/2} = 0, \quad (3.30)$$

em que

$$\mathcal{F}_{j\pm 1/2} = \hat{f}_{j\pm 1/2}(t) u_h(x_{j\pm 1/2}^-, t) - \tilde{\mathcal{F}}(u_h(x_{j\pm 1/2}^-, t)), \quad j = 1, \dots, N.$$

e

$$\begin{aligned} \Theta_{j-1/2} = -\tilde{\mathcal{F}}(u_h(x_{j-1/2}^-, t)) + \hat{f}_{j-1/2}(t) u_h(x_{j-1/2}^-, t) \\ + \tilde{\mathcal{F}}(u_h(x_{j-1/2}^+, t)) - \hat{f}_{j-1/2}(t) u_h(x_{j-1/2}^+, t), \quad j = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Para simplificar a notação, considere $u_h^+ = u_h(x_{j-1/2}^+, t)$ e $u_h^- = u_h(x_{j-1/2}^-, t)$. Sendo assim, para o caso em que $u_h^+ \geq u_h^-$, $\Theta_{j-1/2}$ pode ser expressado como

$$\begin{aligned} \Theta_{j-1/2} &= \tilde{\mathcal{F}}(u_h^+) - \tilde{\mathcal{F}}(u_h^-) + \hat{f}_{j-1/2}(t) u_h^- - \hat{f}_{j-1/2}(t) u_h^+ \\ &= \int_{u_h^-}^{u_h^+} f(s) \, ds - \hat{f}(u_h^-, u_h^+) (u_h^+ - u_h^-) \\ &= \int_{u_h^-}^{u_h^+} \hat{f}(s, s) \, ds - \int_{u_h^-}^{u_h^+} \hat{f}(u_h^-, u_h^+) \, ds \\ &= \int_{u_h^-}^{u_h^+} \hat{f}(s, s) \, ds - \int_{u_h^-}^{u_h^+} \hat{f}(u_h^-, s) \, ds \\ &\quad + \int_{u_h^-}^{u_h^+} \hat{f}(u_h^-, s) \, ds - \int_{u_h^-}^{u_h^+} \hat{f}(u_h^-, u_h^+) \, ds \\ &= \int_{u_h^-}^{u_h^+} [\hat{f}(s, s) - \hat{f}(u_h^-, s)] \, ds + \int_{u_h^-}^{u_h^+} [\hat{f}(u_h^-, s) - \hat{f}(u_h^-, u_h^+)] \, ds. \end{aligned}$$

Logo, pela monotonicidade do fluxo numérico

$$f(s) = \hat{f}(s, s) \geq \hat{f}(u_h^-, s) \geq \hat{f}(u_h^-, u_h^+), \quad \forall s \in [u_h^-, u_h^+].$$

Desta forma, $\Theta_{j-1/2} \geq 0$, visto que $\hat{f}(u_h, u_h) - \hat{f}(u_h^-, u_h) \geq 0$ e $\hat{f}(u_h^-, u_h) - \hat{f}(u_h^-, u_h^+) \geq 0$. O caso em que $u_h^+ \leq u_h^-$ segue de maneira análoga.

Portanto, de (3.30) segue que

$$\frac{d}{dt} \int_{I_j} \mathcal{U}(u_h) dx + \mathcal{F}_{j+1/2}(t) - \mathcal{F}_{j-1/2}(t) \leq 0$$

e a demonstração é concluída. \square

Com o resultado do Teorema 3.16 apresentamos uma prova para o Teorema 3.15, também baseada nas ideias apresentadas em [40].

Demonstração. (Teorema 3.15):

A partir da desigualdade de entropia dada pelo Teorema 3.16, realizando o somatório em j , de 1 até N , tem-se

$$\sum_{j=1}^N \frac{d}{dt} \int_{I_j} \mathcal{U}(u_h) dx + \sum_{j=1}^N [\mathcal{F}_{j+1/2}(t) - \mathcal{F}_{j-1/2}(t)] \leq 0.$$

Então, como os fluxos se anulam em $x_{j+1/2}$, $j = 1, \dots, N-1$ e pela definição de \mathcal{U} (3.25), obtém-se

$$\sum_{j=1}^N \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{I_j} u_h^2 dx + \mathcal{F}_{N+1/2}(t) - \mathcal{F}_{1/2}(t) \leq 0.$$

Além disso, como por hipótese a condição de contorno é periódica, pode-se definir

$$\mathcal{F}_{1/2}(t) = \mathcal{F}_{N+1/2}(t) = \mathcal{F}_{N+1/2}(u_h(x_{N+1/2}^-, t), u_h(x_{1/2}^+, t)).$$

Assim,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^N \int_{I_j} u_h^2 dx \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 0. \quad (3.31)$$

Integrando (3.31) em t de 0 a T ,

$$\frac{1}{2} \|u_h(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \|u_h(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 0.$$

Portanto, segue que

$$\|u_h(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u_h(0)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os membros da equação

$$\|u_h(T)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_h(0)\|_{L^2(\Omega)},$$

como queríamos demonstrar. \square

3.1.4.1 Problema parabólico associado

A convergência do esquema (3.3) será garantida considerando um problema parabólico associado a (3.1). A forma como tal problema encontra-se escrito neste trabalho pode ser encontrada em [38] e sua construção consiste basicamente na inserção de um termo difusivo na primeira equação de (3.1).

Definição 3.17. Damos o nome de *problema parabólico associado ao Problema (3.1)* ou simplesmente *problema associado* ao seguinte problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } w : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R} \text{ suficientemente regular, tal que} \\ \frac{\partial}{\partial t} w(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} f(w(x, t)) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu(w(x, t)) \frac{\partial}{\partial x} w(x, t) \right), \quad \text{em } \Omega \times (0, T), \\ w(x, 0) = u_0(x), \quad \forall x \in \Omega, \\ \text{com condições de contorno periódicas,} \end{array} \right. \quad (3.32)$$

em que a função ν é estritamente positiva.

Antes de iniciarmos a análise, baseado em [17], apresentamos algumas definições que serão úteis para o estudo desenvolvido na sequência.

Definição 3.18 (Espaços BV). Chamamos de espaço de *variação limitada* ou em inglês *Bounded Variation* (BV), o seguinte espaço:

$$BV(\Omega) = \{w \in L^1(\Omega) \mid |w|_{TV} < \infty\}$$

em que

$$|w|_{TV} = \sup_{\substack{v \in C_0^\infty(\Omega) \\ \|v\|_{L^\infty(\Omega)}=1}} \int_{\Omega} w \frac{d}{dx} v \, dx.$$

A seminorma $|w|_{TV(\Omega)}$ define a *variação total* (caso contínuo) da função w . De uma maneira bastante parecida podemos definir a variação total para funções pertencentes aos espaços \mathcal{V}_h^k . Para isso, exibimos uma definição que será útil à simplificação de algumas notações na sequência.

Definição 3.19 (Operadores de diferenças). Dada uma função ϕ arbitrária, denote $\phi_j = \phi_j(t) = \phi(x_j, t)$ e defina:

$$\begin{cases} \Delta_+ \phi_j = \phi_{j+1} - \phi_j, \\ \Delta_- \phi_j = \phi_j - \phi_{j-1}. \end{cases}$$

Definição 3.20 (Variação total). Seja \mathcal{T}_h a partição de Ω dada pela Definição 3.2. Considerando que as condições de contorno são periódicas,

$$\zeta_j := \begin{cases} \zeta_{j+N}, & j \leq 0 \\ \zeta_{j-N}, & j > N \end{cases},$$

para $\zeta_j = u_j = u_j(t)$, $t \in (0, T)$. A *variação total* de $u_h = u_h(t)$, denotada por $TV(u_h)$ do inglês *total variation*, é definida como

$$TV(u_h) = |u_h|_{TV(\Omega)} := \sum_{j=1}^N |u_{j+1} - u_j| = \sum_{j=1}^N |\Delta_+ u_j|.$$

O conceito de variação total, principalmente a versão discreta, é frequentemente usado no contexto de resoluções numéricas de EDPs [37].

Dividimos a análise em duas situações: primeiro para o problema contínuo e depois para a forma discreta (restringindo-nos ao caso em que as funções de base locais são constantes por partes, ou seja, pertencem a \mathcal{V}_h^0). Além disso, serão utilizados conceitos de par entropia e solução entrópica definidos no Capítulo 2. O objetivo é mostrar que a solução do Problema (3.32), $w(x, t)$, converge para a solução entrópica $u(x, t)$ do Problema (3.1) quando o termo difusivo do problema associado, $(\nu(w(x, t))w_x(x, t))_x$, tende a zero.

3.1.4.2 Caso contínuo

A ferramenta utilizada para mostrar que a solução do Problema (3.32) converge para a solução do Problema (3.1) quando ν tende a zero foi um resultado apresentado em [43]. Para o seu uso deve existir uma condição de entropia para o Problema (3.32) (ver Seção 2.2.3) e uma limitação uniforme para w_x na norma L^1 , isto é, $\|w_x\|_{L^1(\Omega)} \leq \|(u_0)_x\|_{L^1(\Omega)}$, $\forall t \in (0, T)$. Os próximos dois teoremas têm como objetivo mostrar que tais exigências são satisfeitas.

Teorema 3.21 (Condição de entropia para w). *A solução w do Problema (3.32) satisfaz a condição de entropia de Kruzkov vista na Definição 2.18 quando $\nu \rightarrow 0$, isto é,*

$$\frac{\partial}{\partial t} |w - c| + \frac{\partial}{\partial x} (\text{sign}(w - c)(f(w) - f(c))) \leq 0$$

ou equivalentemente

$$\mathcal{U}(w - c)_t + \mathcal{F}(w, c)_x \leq 0 \quad \text{em } \Omega \times (0, T),$$

em que

$$\mathcal{U}(w) = |w - c| \quad \text{e} \quad \mathcal{F}(u) = \text{sign}(u - c)(f(u) - f(c)).$$

Demonstração. A prova deste resultado segue de maneira análoga ao feito em (2.9)-(2.12) substituindo o termo difusivo de (2.8) pelo de (3.32) e considerando a função de entropia como $\mathcal{U}(w) = |w - c|$ (função entrópica de Kruzkov) e o fluxo de entropia associado. \square

Teorema 3.22 (Limitação uniforme). *Seja $w \in W^{1,1}(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega) \cap BV(\Omega)$ a solução do Problema (3.32). A derivada w_x cumpre a seguinte limitação uniforme:*

$$\|w_x\|_{L^1(\Omega)} \leq \|(u_0)_x\|_{L^1(\Omega)}, \quad \forall t \in (0, T).$$

Demonstração. Para demonstrar este resultado a estratégia será multiplicar a primeira equação do problema (3.32) pela função $-(\mathcal{U}'(w_x))_x$, em que $\mathcal{U}(\cdot)$ é a função entrópica de Kruzkov e integrar em Ω , ou seja,

$$\int_{\Omega} -(\mathcal{U}'(w_x))_x w_t dx + \int_{\Omega} -(\mathcal{U}'(w_x))_x f(w)_x dx = \int_{\Omega} -(\mathcal{U}'(w_x))_x (\nu(w)w_x)_x dx.$$

Tais ideias foram apresentadas em [16, pág. 167].

Utilizando a hipótese de a condição de contorno ser periódica, podemos usar integração por partes para escrever

$$\int_{\Omega} \mathcal{U}'(w_x)w_{xt} dx - \int_{\Omega} (\mathcal{U}'(w_x))_x f(w)_x dx = - \int_{\Omega} (\mathcal{U}'(w_x))_x (\nu(w)w_x)_x dx. \quad (3.33)$$

Como $\mathcal{U}(\cdot)$ é a função entrópica de Kruzkov, o primeiro termo de (3.33) pode ser escrito como

$$\int_{\Omega} \mathcal{U}'(w_x)w_{xt} dx = \int_{\Omega} (\mathcal{U}(w_x))_t dx = \int_{\Omega} \frac{d\mathcal{U}}{dt}(w_x) dx = \int_{\Omega} \frac{d}{dt}|w_x| dx.$$

Usando a regra da cadeia no segundo termo de (3.33) segue

$$\int_{\Omega} (\mathcal{U}'(w_x))_x f(w)_x dx = \int_{\Omega} \mathcal{U}''(w_x)w_{xx}f'(w)w_x dx. \quad (3.34)$$

Por definição \mathcal{U}'' é a “função” δ de Dirac. Sendo assim, a expressão dada por (3.34), para w_x não identicamente nula, resulta em:

$$\int_{\Omega} \mathcal{U}''(w_x)w_{xx}f'(w)w_x dx = 0, \quad \text{se } w_x \neq 0, \text{ pois, } \mathcal{U}''(w_x) = 0. \quad (3.35)$$

Do contrário, isto é, para $w_x \equiv 0$ é imediato que

$$\int_{\Omega} \mathcal{U}''(w_x)w_{xx}f'(w)w_x dx = 0. \quad (3.36)$$

Novamente pela regra da cadeia e também pela diferenciação do produto de funções, a partir do terceiro termo de (3.33) tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\mathcal{U}'(w_x))_x (\nu(w)w_x)_x dx &= \int_{\Omega} \mathcal{U}''(w_x)w_{xx}(\nu'(w)(w_x)^2 + \nu(w)w_{xx}) dx \\ &= \int_{\Omega} \mathcal{U}''(w_x)w_{xx}\nu'(w)(w_x)^2 dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \mathcal{U}''(w_x)\nu(w)(w_{xx})^2 dx. \end{aligned}$$

Pelos mesmos argumentos utilizados em (3.35) e (3.36),

$$\int_{\Omega} \mathcal{U}''(w_x)w_{xx}\nu'(w)(w_x)^2 dx = 0.$$

Logo, (3.33) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{d}{dt}|w_x| dx &= - \int_{\Omega} \mathcal{U}''(w_x)\nu(w)(w_{xx})^2 dx \\ \frac{d}{dt}\|w_x\|_{L^1(\Omega)} &= - \int_{\Omega} \mathcal{U}''(w_x)\nu(x)(w_{xx})^2 dx. \end{aligned}$$

Sendo assim, como a função \mathcal{U} é convexa, e $\nu(w) > 0$, tem-se

$$- \int_{\Omega} \mathcal{U}''(w_x) \nu(x) (w_{xx})^2 dx \leq 0.$$

Então,

$$\frac{d}{dt} \|w_x\|_{L^1(\Omega)} \leq 0.$$

Integrando em $(0, t)$, segue que

$$\|w_x\|_{L^1(\Omega)} \leq \|(w_0)_x\|_{L^1(\Omega)} = \|(u_0)_x\|_{L^1(\Omega)}, \quad \forall t \in (0, T).$$

Portanto, o resultado é verificado. \square

Quando a função u_0 tem descontinuidades, o mesmo resultado do Teorema 3.22 é obtido, desde que $\|(u_0)\|_{L^1(\Omega)}$ seja substituído por $|u_0|_{T\bar{V}(\Omega)}$; estas duas quantidades coincidem se u_0 apresenta mais regularidade, por exemplo, $u_0 \in W^{1,1}(\Omega)$ [16, pág. 167].

Os Teoremas 3.21 e 3.22, juntos à Definição 3.18 garantem a estimativa de erro obtida em [43], que encontra-se escrita na forma de teorema, logo abaixo.

Teorema 3.23. *Sejam $u(t) = u(\cdot, t)$ e $w(t) = w(\cdot, t)$ soluções dos Problemas (3.1) e (3.32), respectivamente, ambas pertencentes a $BV(\Omega)$, com $t \in [0, T]$. Se $u_0 \in BV(\Omega)$, então vale a seguinte estimativa:*

$$\|u(T) - w(T)\|_{L^1(\Omega)} \leq C |u_0|_{T\bar{V}(\Omega)} \sqrt{8T} \|\nu\|_*,$$

em que C é uma constante positiva e

$$\|\nu\|_* = \sup_{\substack{t \in [0, T] \\ x \in \Omega}} \tilde{\nu}(u(x^-, t), u(x^+, t)),$$

com

$$\tilde{\nu}(r, s) = \frac{1}{s - r} \int_r^s \nu(c) dc.$$

Demonstração. Uma demonstração para este teorema pode ser encontrada em [43]. \square

3.1.4.3 Caso discreto

Para realizar uma análise baseada no caso contínuo, será utilizado o fluxo numérico de Engquist-Osher empregado no caso mais simples do método DG, ou seja, o que usa uma solução aproximada por polinômios constantes por partes. Tal caso é obtido quando $k = 0$ na Formulação (3.9) vista na demonstração do Teorema (3.8), isto é,

$$\begin{cases} \forall j = 1, \dots, N : \\ \partial_t u_j + \left\{ \hat{f}(u_j, u_{j+1}) - \hat{f}(u_{j-1}, u_j) \right\} / \Delta x_j = 0, \\ u_j(0) = \frac{1}{\Delta x_j} \int_{I_j} u_0(x) dx. \end{cases} \quad (3.37)$$

Observação 3.24. Por simplicidade de notação, suprimimos o índice (0).

Teorema 3.25 (Condição de entropia celular). *A solução $u_j(t)$, $\forall t \in (0, T)$ e $j = 1, \dots, N$ do problema (3.37) com $\hat{f} = \hat{f}^{EO}$ satisfaz uma condição de entropia do tipo:*

$$\partial_t \mathcal{U}(u_j - c) + \{\mathcal{F}(u_j, u_{j+1}; c) - \mathcal{F}(u_{j-1}, u_j; c)\} / \Delta x_j \leq 0,$$

em que \mathcal{U} é a função entrópica de Kruzkov vista na Definição 2.18 e

$$\mathcal{F}(a, b; c) = \mathcal{F}^+(a, c) + \mathcal{F}^-(b, c) = \int_a^c f^-(\rho) \mathcal{U}'(\rho - c) d\rho + \int_b^c f^+(\rho) \mathcal{U}'(\rho - c) d\rho.$$

com

$$\mathcal{F}^\pm(a, c) = \int_c^a f^\pm(\rho) \mathcal{U}'(\rho - c) d\rho$$

e

$$f^+(a) = \int_0^a \max(f'(s), 0) ds \quad e \quad f^-(b) = \int_0^b \min(f'(s), 0) ds.$$

Demonstração. A demonstração deste teorema é baseada nas ideias apresentadas em [16, pág. 168].

Multiplicando a equação (3.37) por $\mathcal{U}'(u_j - c)$, em que $\mathcal{U}(\cdot)$ denota a função entrópica de Kruzkov, assim como foi feito no caso contínuo, obtém-se

$$\partial_t u_j \mathcal{U}'(u_j - c) + \mathcal{U}'(u_j - c) \{\hat{f}(u_j, u_{j+1}) - \hat{f}(u_{j-1}, u_j)\} / \Delta x_j = 0$$

ou ainda,

$$\partial_t \mathcal{U}(u_j - c) + \mathcal{U}'(u_j - c) \{\hat{f}(u_j, u_{j+1}) - \hat{f}(u_{j-1}, u_j)\} / \Delta x_j = 0. \quad (3.38)$$

Reescreveremos o fluxo numérico de Engquist-Osher da seguinte forma:

$$\hat{f}^{EO}(a, b) = f^+(a) + f^-(b).$$

Note que está sendo considerada uma normalização de f de modo a tornar $f(0) = 0$. Para mais detalhes a respeito deste argumento, ver [50].

Assim, pode-se reescrever (3.38) como

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{U}(u_j - c) + \mathcal{U}'(u_j - c) \{f^+(u_j) + f^-(u_{j+1}) - f^+(u_{j-1}) - f^-(u_j)\} / \Delta x_j &= 0 \\ \partial_t \mathcal{U}(u_j - c) + \mathcal{U}'(u_j - c) \{f^+(u_j) - f^+(u_{j-1})\} / \Delta x_j & \\ + \mathcal{U}'(u_j - c) \{f^-(u_{j+1}) - f^-(u_j)\} / \Delta x_j &= 0 \end{aligned} \quad (3.39)$$

e, então, definir

$$ST_j = \mathcal{U}'(u_j - c) \{f^+(u_j) - f^+(u_{j-1})\} + \mathcal{U}'(u_j - c) \{f^-(u_{j+1}) - f^-(u_j)\}.$$

Usando a identidade dada em [16, pág. 168]:

$$\mathcal{U}'(a-c)(f^\pm(a) - f^\pm(b)) = \mathcal{F}^\pm(a, c) - \mathcal{F}^\pm(b, c) + \int_a^b (f^\pm(b) - f^\pm(\rho))\mathcal{U}''(\rho - x) d\rho$$

com

$$\mathcal{F}^\pm(a, c) = \int_c^a f^\pm(\rho)\mathcal{U}'(\rho - c) d\rho,$$

obtem-se

$$\begin{aligned} ST_j &= \mathcal{F}^+(u_j, c) - \mathcal{F}^+(u_{j-1}, c) + \int_{u_j}^{u_{j-1}} (f^+(u_{j-1}) - f^+(\rho))\mathcal{U}''(\rho - x) d\rho \\ &\quad + \mathcal{F}^-(u_{j+1}, c) - \mathcal{F}^-(u_j, c) - \int_{u_j}^{u_{j+1}} (f^-(u_{j+1}) - f^-(\rho))\mathcal{U}''(\rho - x) d\rho \\ &= \mathcal{F}(u_j, u_{j+1}; c) - \mathcal{F}(u_{j-1}, u_j; c) + \Theta_{diss, j} \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(a, b; c) &= \mathcal{F}^+(a, c) + \mathcal{F}^-(b, c), \\ \Theta_{diss, j} &= \int_{u_j}^{u_{j-1}} (f^+(u_{j-1}) - f^+(\rho))\mathcal{U}''(\rho - x) d\rho \\ &\quad - \int_{u_j}^{u_{j+1}} (f^-(u_{j+1}) - f^-(\rho))\mathcal{U}''(\rho - x) d\rho. \end{aligned}$$

Sendo assim, podemos escrever (3.39) como:

$$\partial_t \mathcal{U}(u_j - c) + \{\mathcal{F}(u_j, u_{j+1}; c) - \mathcal{F}(u_{j-1}, u_j; c)\} / \Delta x_j + \Theta_{diss, j} / \Delta x_j = 0.$$

Como por hipótese $\mathcal{U}''(\cdot) \geq 0$ (convexidade da função $\mathcal{U}(\cdot)$) e pela definição do fluxo de Engquist-Osher f^+ é não-decrescente e f^- é não-crescente segue que $\Theta_{diss, j} \geq 0$ e, portanto, a desigualdade de entropia é satisfeita, isto é,

$$\partial_t \mathcal{U}(u_j - c) + \{\mathcal{F}(u_j, u_{j+1}; c) - \mathcal{F}(u_{j-1}, u_j; c)\} / \Delta x_j \leq 0.$$

□

Teorema 3.26. *Seja $u_h(\cdot, t) \in \mathcal{V}_h^0$, $t \in (0, T)$, a função definida por*

$$u_h(x, t) = \sum_{j=1}^N u_j(t) \chi_{I_j}(x), \quad \text{com} \quad \chi_{I_j}(x) = \begin{cases} 1, & x \in I_j, \\ 0, & x \notin I_j, \end{cases}$$

em que $u_j(t)$ é a solução da Formulação (3.37), com fluxo numérico $\hat{f} = \hat{f}^{EO}$ e $\chi_{I_j} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ a função característica sobre I_j . Sob estas condições, $u_h(t)$ cumpre a seguinte limitação uniforme:

$$|u_h(t)|_{TV(\Omega)} \leq |u_0|_{TV(\Omega)}, \quad \forall t \in (0, T).$$

Demonstração. Para exibir uma prova deste resultado, a partir das ideias apresentadas em [16, pág. 169], será usado o mesmo argumento do caso contínuo de multiplicar a primeira equação de (3.37) pela função $-(\mathcal{U}'(u_x))_x$. Porém, de maneira aproximada (forma discreta), ou seja, em cada I_j ,

$$-(\mathcal{U}'(u_x))_x \approx \mathcal{D}_j = -\frac{1}{\Delta x_j} \left\{ \mathcal{U}' \left(\frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x_{j+1/2}} \right) - \mathcal{U}' \left(\frac{u_j - u_{j-1}}{\Delta x_{j-1/2}} \right) \right\}, \quad (3.40)$$

em que $\Delta x_{j+1/2} = (\Delta x_j + \Delta x_{j+1})/2$. Com isso a seguinte expressão é obtida:

$$\mathcal{D}_j \frac{du_j}{dt} + \mathcal{D}_j \left\{ \hat{f}(u_j, u_{j+1}) - \hat{f}(u_{j-1}, u_j) \right\} / \Delta x_j = 0. \quad (3.41)$$

Multiplicando (3.41) por Δx_j , tem-se

$$\mathcal{D}_j \Delta x_j \frac{du_j}{dt} + \mathcal{D}_j \left\{ \hat{f}(u_j, u_{j+1}) - \hat{f}(u_{j-1}, u_j) \right\} = 0. \quad (3.42)$$

Substituindo (3.40) no primeiro termo da equação (3.42)

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_j \Delta x_j \frac{du_j}{dt} &= -\frac{1}{\Delta x_j} \left\{ \mathcal{U}' \left(\frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x_{j+1/2}} \right) - \mathcal{U}' \left(\frac{u_j - u_{j-1}}{\Delta x_{j-1/2}} \right) \right\} \Delta x_j \frac{du_j}{dt} \\ &= \left\{ -\mathcal{U}' \left(\frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x_{j+1/2}} \right) + \mathcal{U}' \left(\frac{u_j - u_{j-1}}{\Delta x_{j-1/2}} \right) \right\} \frac{du_j}{dt}. \end{aligned}$$

Como, por definição, $\mathcal{U}'(\cdot) = \text{sign}(\cdot)$, segue que $\mathcal{U}'(a/b) = \text{sign}(a/b) = \text{sign}(a) = \mathcal{U}'(a)$, desde que $b > 0$. Logo,

$$\begin{aligned} \left\{ -\mathcal{U}' \left(\frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x_{j+1/2}} \right) + \mathcal{U}' \left(\frac{u_j - u_{j-1}}{\Delta x_{j-1/2}} \right) \right\} \frac{du_j}{dt} &= \\ &= [-\mathcal{U}'(u_{j+1} - u_j) + \mathcal{U}'(u_j - u_{j-1})] \frac{du_j}{dt}. \end{aligned}$$

Desta forma, realizando a soma em j de 1 até N e usando a hipótese de as condições de contorno serem periódicas,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \left\{ -\mathcal{U}' \left(\frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x_{j+1/2}} \right) + \mathcal{U}' \left(\frac{u_j - u_{j-1}}{\Delta x_{j-1/2}} \right) \right\} \frac{du_j}{dt} &= \\ \mathcal{U}'(u_2 - u_1) \left(\frac{du_2}{dt} - \frac{du_1}{dt} \right) + \mathcal{U}'(u_3 - u_2) \left(\frac{du_3}{dt} - \frac{du_2}{dt} \right) + \dots & \\ + \mathcal{U}'(u_N - u_{N-1}) \left(\frac{du_N}{dt} - \frac{du_{N-1}}{dt} \right). & \end{aligned}$$

Logo, pela regra da cadeia e pela definição da função $\mathcal{U}(\cdot)$,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \left\{ -\mathcal{U}' \left(\frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x_{j+1/2}} \right) + \mathcal{U}' \left(\frac{u_j - u_{j-1}}{\Delta x_{j-1/2}} \right) \right\} \frac{d}{dt} u_j &= \sum_{j=1}^N \frac{d}{dt} \mathcal{U}(u_{j+1} - u_j) \\ &= \sum_{j=1}^N \frac{d}{dt} |u_{j+1} - u_j|. \end{aligned}$$

Assim, de (3.42),

$$\sum_{j=1}^N \frac{d}{dt} |u_{j+1} - u_j| + \sum_{j=1}^N \mathcal{D}_j \left\{ \hat{f}(u_j, u_{j+1}) - \hat{f}(u_{j-1}, u_j) \right\} = 0,$$

ou ainda,

$$\frac{d}{dt} |u_h|_{TV(\Omega)} + \sum_{j=1}^N \mathcal{D}_j \left\{ \hat{f}(u_j, u_{j+1}) - \hat{f}(u_{j-1}, u_j) \right\} = 0, \quad (3.43)$$

em que

$$|u_h|_{TV(\Omega)} = \sum_{j=1}^N |u_{j+1} - u_j|.$$

Para completar a demonstração, o segundo termo de (3.43) necessariamente deve ser não-negativo. Sendo assim, note que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_j \left\{ \hat{f}(u_j, u_{j+1}) - \hat{f}(u_{j-1}, u_j) \right\} &= \mathcal{D}_j \left\{ f^+(u_j) + f^-(u_{j+1}) - f^+(u_{j-1}) - f^-(u_j) \right\} \\ &= \mathcal{D}_j \left\{ f^+(u_j) - f^+(u_{j-1}) + f^-(u_{j+1}) - f^-(u_j) \right\} \\ &= \mathcal{D}_j \left\{ f^+(u_j) - f^+(u_{j-1}) \right\} \\ &\quad + \mathcal{D}_j \left\{ f^-(u_{j+1}) - f^-(u_j) \right\} \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

pelas definições de \mathcal{D}_j , f^+ e $-f^-$.

Portanto, conclui-se que

$$|u_h|_{TV(\Omega)} \leq |u_h(0)|_{TV(\Omega)} \leq |u_0|_{TV(\Omega)}.$$

□

A partir deste resultado a estimativa de erro, apresentada em [43], pode ser comprovada pelo seguinte teorema:

Teorema 3.27. *Sejam $u_h(t) = u_h(\cdot, t) \in \mathcal{V}_h^k$ e $u(t) = u(\cdot, t) \in BV(\Omega)$ as soluções aproximada e exata do Problema (3.1), respectivamente, $t \in [0, T]$. Se $u_h(0) \in \mathcal{V}_h^k$, $u_0 \in BV(\Omega)$ e Δx for o mesmo da Definição 3.2, então*

$$\|u(T) - u_h(T)\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u_0 - u_h(0)\|_{L^1(\Omega)} + C|u_0|_{TV(\Omega)} \sqrt{T \Delta x}.$$

Demonstração. Uma prova para este resultado pode ser vista em [43].

□

3.2 DISCRETIZAÇÃO DO TEMPO

Começamos esta seção relembando que com a discretização do espaço, conseguimos escrever o Formulação (3.3) em um sistema de EDOs, dado por:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u_h = L_h(u_h, t), & \text{com } t \in (0, T) \\ u_h(t = 0) = u_{0h}, \end{cases} \quad (3.44)$$

em que, a partir das definições apresentadas em (3.10)-(3.16),

$$\frac{d}{dt}u_h = B_t, L_h(u_h) = L(B), u_h(t = 0) = B(0) \text{ e } u_{0h} = B_0.$$

Um método bastante usado para resolver sistemas de EDOs é o *Runge-Kutta* (RK). Neste trabalho, seguindo as ideias de [16], vamos considerar esquemas deste tipo. Para apresentar o método RK que iremos trabalhar, será considerada a partição $\{t^n\}_{n=0}^M$ do intervalo $[0, T]$ e passos definidos por $\Delta t^n = t^{n+1} - t^n$, para $n = 0, \dots, M - 1$. Além das definições de estabilidade forte¹ e esquemas TVD.

Definição 3.28. (Estabilidade forte [35]). Dizemos que uma sequência y^n é *fortemente estável* em uma dada norma $\|\cdot\|$ se $\|y^{n+1}\| \leq \|y^n\|$, $\forall n$. Uma definição análoga pode ser apresentada se substituirmos a norma $\|\cdot\|$ por uma semi-norma $|\cdot|$.

Exemplo 3.29. Por definição, no método de “Euler Avançado” ou “Euler Explícito” a estabilidade forte é determinada por:

$$\|u_h^{n+1}\| = \|u_h^n + \Delta t^n L_h(u_h^n)\| \leq \|u_h^n\|, \quad \forall n \in \{0, \dots, M - 1\}.$$

Definição 3.30. Dadas uma discretização do espaço como a da Definição 3.2 e do tempo como a definida acima, dizemos que, para todos $j = 1, \dots, N$ e $n = 0, \dots, M - 1$ um esquema *preserva monotonicidade*, se $u_{j+1}^n \geq u_j^n$ (equiv. $u_{j+1}^n \leq u_j^n$), então $u_{j+1}^{n+1} \geq u_j^{n+1}$ (equiv. $u_{j+1}^{n+1} \leq u_j^{n+1}$).

Definição 3.31. Dizemos que um esquema é TVD (*Total Variation Diminishing*) se

$$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n).$$

O método Runge-Kutta utilizado neste trabalho será o SSP-RK² explícito, abreviação de *Strong Stability Preserving Runge-Kutta*, que foi introduzido em [33]. Em [37] foi

¹ A noção de estabilidade forte usada neste trabalho baseia-se em [35] e refere-se ao fato de que não há crescimento temporal, ou seja, $\|u_h^{n+1}\| \leq \|u_h^n\|$, em oposição à noção geral de estabilidade, que permite um crescimento temporal limitado, $\|u_h^n\| \leq \alpha \|u_h^0\|$, em que α é uma constante arbitrária, possivelmente $\alpha > 1$.

² Os métodos SSP-RK originalmente eram chamados de *Total Variation Diminishing Runge-Kutta* (TVD-RK), como pode ser visto em [33]. Contudo, mais tarde tais métodos passaram a ser tratados como SSP-RK, por exemplo, em [35]. Essa mudança está ligada ao fato de os esquemas TVD-RK possuírem a propriedade de Preservação de Estabilidade Forte (termo do inglês *Strong Stability Preserving* – SSP), como afirma [35].

mostrado que esquemas monótonos são TVD, ver Definição 3.5. Mais detalhes a respeito deste método podem ser encontrados nos trabalhos [44] e [32].

3.2.1 Algoritmo SSP Runge-Kutta

O algoritmo do método Runge-Kutta que utilizaremos foi desenvolvido a partir das ideias apresentadas em [16, pág. 172] e [35]. Antes de apresentá-lo chamamos atenção para uma questão relevante que diz respeito à estabilidade. Para problemas com soluções suaves, geralmente uma análise de estabilidade linear é adequada, enquanto, para problemas com soluções descontínuas é necessária uma medida mais forte de estabilidade [35]. A ideia é supor que a discretização do tempo pelo método de Euler Explícito de primeira ordem seja fortemente estável sob uma certa norma quando o intervalo de tempo é adequadamente restrito e, em seguida, tentar encontrar uma discretização de tempo de ordem superior (RK) que mantém a estabilidade forte pela mesma norma, talvez sob uma restrição de tempo diferente [35]. Neste sentido alguns parâmetros necessários à construção de tais métodos são apresentados na Tabela 1. Eles encontram-se distribuídos no formato das Tabelas de Butcher [9].

Tabela 1 – Parâmetros para método SSP-RK até ordem 3 [16, pág. 171].

Parâmetros de discretização Runge-Kutta					
Ordem	α_{il}			β_{il}	
1	1			1	
2	1			1	
	1/2	1/2		0	1/2
3	1			1	
	3/4	1/4		0	1/4
	1/3	0	2/3	0	0 2/3

Perceba que na Tabela 1, $\alpha_{il}, \beta_{il} \geq 0$ e $\max\{\beta_{il}/\alpha_{il}\} = 1$. Essa escolha garante a propriedade de estabilidade forte [16, pág. 171]. Mais detalhes acerca desta afirmativa serão abordados mais adiante.

Os métodos SSP-RK são particularmente interessantes, pois garantem a manutenção das propriedades de estabilidade não-linear obtidas pela discretização da componente espacial; em outras palavras, eles não “estragam” o tratamento dado pela semi-discretização realizada em um primeiro estágio.

O Algoritmo 1 descreve a aplicação do método SSP-RK ao Problema 3.44.

3.2.2 Análise da estabilidade

Para desenvolvermos uma análise da estabilidade carecemos de algumas definições.

Algoritmo 1: MÉTODO SSP-RK

Entrada: $u_{0h}, \alpha_{il}, \beta_{il}, L(\cdot), M, \kappa, \Delta t$
Saída: $\{u_h^n\}_{n=1}^M$

```

1 início
2    $u_h^0 \leftarrow u_{0h}$ 
3   para  $n = 0, \dots, M - 1$  faça
4      $u_h^{(0)} \leftarrow u_h^n$ 
5     para  $i = 1, \dots, \kappa$  faça
6        $u_h^{(i)} \leftarrow 0$ 
7       para  $l = 0, \dots, i - 1$  faça
8          $w_h^{(il)} \leftarrow u_h^{(l)} + \frac{\beta_{il}}{\alpha_{il}} \Delta t^n L_h(u_h^{(l)})$ 
9          $u_h^{(i)} \leftarrow u_h^{(i)} + \alpha_{il} w_h^{(il)}$ 
10      fim
11    fim
12     $u_h^{n+1} \leftarrow u_h^{(\kappa)}$ 
13  fim
14 fim

```

Definição 3.32. (*Condição CFL*). O número *Courant-Friedrichs-Lewy* (CFL) ou *Courant* é um limitante superior para o passo em um esquema numérico estável [26]³. Denotaremos esse número por C_{CFL} e apresentamos a *Condição CFL* como:

$$\eta \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq C_{\text{CFL}} \quad \text{com} \quad \eta = \max_u |f'(u)|.$$

Definição 3.33. (*Condição CFL Modificada*). Chamaremos de *Condição CFL Modificada* a seguinte desigualdade:

$$\Delta t_R \leq c \Delta t = \Delta t_c \leq \frac{\Delta x}{\eta} C_{\text{CFL}}, \quad c = \min_{i,l} \frac{\alpha_{il}}{\beta_{il}}.$$

em que Δt_R indica um novo tamanho do passo no tempo e c é uma constante positiva.

Pela Tabela 1 todos os valores de α_{il} e β_{il} são não negativos com a soma dos α_{il} 's igual a um. Essa escolha não é por acaso, ela implica em uma resultado apresentado em [16, pág. 172] que garante a estabilidade forte do método SSP-RK. Antes de enunciá-lo perceba que os estágios intermediários $u^{(i)}$ dados pelo Algoritmo 1, equivalem a combinações convexas do método de Euler Explícito, com Δt substituído por Δt_c .

³ A Condição CFL foi originalmente apresentada no artigo dos autores R. Courant, K. Friedrichs e H. Lewy, publicado na revista *Mathematische Annalen* no ano de 1928. Este artigo foi republicado em 1967, com a permissão dos autores, em uma versão na língua inglesa, que é justamente a Referência [26], utilizada neste trabalho.

Teorema 3.34. (*Estabilidade [16, pág. 172]*). Seja u_h^n a solução aproximada do Problema (3.44) pelo método SSP-RK de κ etapas dado no Algoritmo 1. Se a solução obtida para o mesmo problema adotando $\kappa = 1$ (Euler Explícito) com passo de tempo constante

$$\delta_0 := \max_{0 \leq n < M} |\Delta t^n \max\{\beta_{il}/\alpha_{il}\}|,$$

onde Δt^n , α_{il} e β_{il} são os parâmetros utilizados no Algoritmo 1 para encontrar u_h^n , for fortemente estável e os coeficientes α_{il} forem não negativos e satisfizerem

$$\sum_{l=0}^{i-1} \alpha_{il} = 1, \quad i = 1, \dots, \kappa,$$

então o esquema numérico descrito no Algoritmo 1 é fortemente estável, isto é,

$$|u_h^{n+1}| \leq |u_h^n|, \quad \forall n \geq 0$$

e, ainda, possui uma propriedade de estabilidade dada por:

$$|u_h^n| \leq |u_h^0|, \quad \forall n \geq 0.$$

Demonstração. As ideias para a demonstração deste resultado foram obtidas de [16, pág. 172]. Sendo assim, provaremos primeiro uma desigualdade que será de grande utilidade.

Do Algoritmo 1, tem-se

$$u_h^{(i)} = \sum_{l=0}^{i-1} \alpha_{il} w_h^{(il)}, \quad i \in \{1, \dots, \kappa\}. \quad (3.45)$$

Além disso, como por hipótese $\alpha_{il} \geq 0$, aplicando a função valor absoluto em ambos os lados de (3.45) e usando a desigualdade triangular,

$$|u_h^{(i)}| \leq \sum_{l=0}^{i-1} \alpha_{il} |w_h^{(il)}|, \quad i \in \{1, \dots, \kappa\}.$$

Logo, pela estabilidade forte do método SSP-RK para um passo no tempo dado por δ_0 ,

$$|u_h^{(i)}| \leq \sum_{l=0}^{i-1} \alpha_{il} |u_h^{(l)}| \leq \max_{0 \leq l \leq i-1} |u_h^{(l)}|, \quad i \in \{1, \dots, \kappa\}. \quad (3.46)$$

Agora, usando indução em i mostremos que $|u_h^{(i)}| \leq |u_h^{(0)}|$ para $i = 0, \dots, \kappa$.

Para $i = 0$ é imediato que $|u_h^{(i)}| \leq |u_h^{(0)}|$.

Para $i = 1$, de (3.46) obtém-se,

$$|u_h^{(1)}| \leq \max_{0 \leq l \leq 0} |u_h^{(l)}| \Rightarrow |u_h^{(1)}| \leq |u_h^{(0)}|.$$

Suponha, agora, que a desigualdade seja válida para $i \in \{0, \dots, r\}$, $r < \kappa$, isto é,

$$|u_h^{(i)}| \leq |u_h^{(0)}|. \quad (3.47)$$

Então, provemos que a desigualdade também é válida para $i = r + 1$, ou seja,

$$|u_h^{(r+1)}| \leq |u_h^{(0)}|.$$

Para isso note que a partir da desigualdade (3.46) e da hipótese de indução (3.47),

$$|u_h^{(r+1)}| \leq \max_{0 \leq l \leq r} |u_h^{(l)}| \stackrel{(3.47)}{\leq} \max_{0 \leq l \leq r} |u_h^{(0)}| = |u_h^{(0)}|.$$

Logo, $|u_h^{(i)}| \leq |u_h^{(0)}|$ é válida para todo $i = 0, \dots, \kappa$.

Portanto, usando este resultado e o Algoritmo 1,

$$\begin{aligned} |u_h^{(i)}| &\leq |u_h^{(0)}|, & \forall i = 0, \dots, \kappa, \\ |u_h^{(\kappa+1)}| &\leq |u_h^{(0)}| & \forall \kappa \geq 0, \\ |u_h^{n+1}| &\leq |u_h^n|, & \forall n \geq 0. \end{aligned}$$

Portanto, por um simples processo de indução segue que $|u_h^n| \leq |u_h^0|$, o que completa a demonstração do teorema. \square

O Teorema 3.34 é uma poderosa ferramenta de análise da propriedade de estabilidade dos métodos SSP-RK, pois ele nos permite determinar se um método de múltiplos estágios é estável a partir da estabilidade do método de um único estágio (Euler Explícito) [16, pág. 173]. Contudo, deve-se ter cuidado com a sua aplicação, por exemplo, para o caso em que $f(u) = \alpha u$, [14] prova que, se as soluções aproximadas são lineares por partes ($k = 1$), o método SSP-RK de primeira ordem com um único passo (Euler Explícito) é incondicionalmente instável na norma $L^2(\Omega)$ para qualquer tamanho da razão $\Delta t/\Delta x$. Já em [24] foi provado que se considerado um esquema SSP-RK de segunda ordem com dois passos, existe a propriedade de estabilidade, também, na norma $L^2(\Omega)$, mas de forma restrita à seguinte condição CFL:

$$\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq C_{CFL} = \frac{1}{3}.$$

Este resultado evidencia que uma dedução da estabilidade de forma completa, isto é, para um método SSP-RK de qualquer ordem e com vários estágios, a partir de um único passo (Euler Explícito) nem sempre é possível.

Em [16, pág. 173], Cockburn afirma que em suas experiências numéricas, quando o polinômio de grau k é usado, um esquema SSP-RK de ordem $k + 1$ deve ser usado para garantir a estabilidade. Mais ainda, nesse caso, a condição CFL necessária à estabilidade na norma $L^2(\Omega)$ fica determinada por:

$$\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq C_{CFL} = \frac{1}{2k + 1}.$$

3.2.3 Análise da convergência

Esta seção tem por objetivo apresentar resultados que exploram o impacto da discretização do tempo pelos esquemas SSP-RK nas propriedades de convergência do método SSP-RKDG. Por simplicidade iremos tratar o caso mais simples que é o método SSP-RK de primeira ordem com um passo. Iniciamos expondo alguns resultados que comprovam a estabilidade e convergência para o caso em que as funções de base locais são polinômios constantes por partes ($\ell = 0$) e finalizamos exibindo algumas ideias que podem ser utilizadas na análise do caso geral.

3.2.3.1 Polinômios constantes por parte

Seguindo as ideias de [16, pág. 174] usando o método SSP-RK de primeira ordem com um passo (Euler Explícito) para o avanço no tempo em (3.37) segue que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall j = 1, \dots, N \text{ e } n = 0, \dots, M - 1 : \\ (u_j^{n+1} - u_j^n)/\Delta t + \{ \hat{f}(u_j^n, u_{j+1}^n) - \hat{f}(u_{j-1}^n, u_j^n) \} / \Delta x_j = 0, \\ u_j(0) = \frac{1}{\Delta x_j} \int_{I_j} u_0(x) dx, \\ \text{com o fluxo numérico de Engquist-Osher.} \end{array} \right. \quad (3.48)$$

Segundo os Teoremas 3.25 e 3.26, para provar a convergência do método deve-se obter uma desigualdade de entropia e uma limitação uniforme para a variação total de u_h . Sendo assim, os dois resultados a seguir objetivam garantir essas duas condições.

Teorema 3.35. *Considere \mathcal{U} como a função entrópica de Kruzkov e*

$$\mathcal{F}(a, b; c) = \mathcal{F}^+(a, c) + \mathcal{F}^-(b, c) = \int_a^c f^-(\rho) \mathcal{U}'(\rho - c) d\rho + \int_b^c f^+(\rho) \mathcal{U}'(\rho - c) d\rho.$$

com

$$\mathcal{F}^\pm(a, c) = \int_c^a f^\pm(\rho) \mathcal{U}'(\rho - c) d\rho$$

em que f^\pm são dadas pelo fluxo numérico de Engquist-Osher. Temos

$$\{ \mathcal{U}(u_j^{n+1} - c) - \mathcal{U}(u_j^n - c) \} / \Delta t + \{ \mathcal{F}(u_j^n, u_{j+1}^n; c) - \mathcal{F}(u_{j-1}^n, u_j^n; c) \} / \Delta x_j + \Theta_{diss,j}^n / \Delta t = 0,$$

em que

$$\begin{aligned} \Theta_{diss,j}^n &= \int_{u_j^{n+1}}^{u_j^n} (p_j(u_j^n) - p_j(\rho)) \mathcal{U}''(\rho - x) d\rho + \frac{\Delta t}{\Delta x_j} \int_{u_j^{n+1}}^{u_{j-1}^n} (f^+(u_{j-1}^n) - f^+(\rho)) \mathcal{U}''(\rho - x) d\rho \\ &+ \frac{\Delta t}{\Delta x_j} \int_{u_j^{n+1}}^{u_{j+1}^n} (f^-(u_{j+1}^n) - f^-(\rho)) \mathcal{U}''(\rho - x) d\rho, \end{aligned}$$

e

$$p_j(w) = w - \frac{\Delta t}{\Delta x_j} (f^+(w) - f^-(w)).$$

Além disso, se a seguinte condição CFL for atendida

$$\max_{1 \leq j \leq N} \frac{\Delta t}{\Delta x_j} |f'| \leq 1, \quad (3.49)$$

então $\Theta_{diss,j} \geq 0$ e a seguinte desigualdade de entropia é válida:

$$\{\mathcal{U}(u_j^{n+1} - c) - \mathcal{U}(u_j^n - c)\}/\Delta t + \{\mathcal{F}(u_j^n, u_{j+1}; c) - \mathcal{F}(u_{j-1}, u_j; c)\}/\Delta x_j \leq 0.$$

Demonstração. Uma prova deste resultado é apresentada em [20]. \square

Observação 3.36. Perceba que, se a condição CFL (3.49) for satisfeita, p_j é não-decrescente. Como f^+ e $-f^-$ também são não-decrescentes, $\Theta_{diss,j} \geq 0$ [16, pág. 175].

Teorema 3.37. *Seja*

$$u_h^n = \sum_{j=1}^N \bar{u}_j^n \chi_{I_j}, \quad \text{com} \quad \chi_{I_j}(x) = \begin{cases} 1, & x \in I_j, \\ 0, & x \notin I_j, \end{cases}$$

em que \bar{u}_j^n é a solução de (3.48). Então

$$|u_h^{n+1}|_{TV(\Omega)} - |u_h^n|_{TV(\Omega)} + \Theta_{TV}^n = 0,$$

em que

$$\begin{aligned} \Theta_{TV}^n &= \sum_{1 \leq j \leq N} (\mathcal{U}_{j+1/2}^n - \mathcal{U}_{j+1/2}^{n+1}) (p_{j+1/2}(u_{j+1}^n) - p_{j+1/2}(u_{j+1}^{n+1})) \\ &\quad + \sum_{1 \leq j \leq N} \frac{\Delta t}{\Delta x_j} (\mathcal{U}_{j-1/2}^n - \mathcal{U}_{j+1/2}^{n+1}) (f^+(u_j^n) - f^+(u_{j-1}^n)) \\ &\quad - \sum_{1 \leq j \leq N} \frac{\Delta t}{\Delta x_j} (\mathcal{U}_{j+1/2}^{n+1} - \mathcal{U}_{j-1/2}^n) (f^-(u_{j+1}^n) - f^-(u_j^n)), \end{aligned}$$

$$\mathcal{U}_{i+1/2}^m = \mathcal{U}' \left(\frac{u_{i+1}^m - u_i^m}{\Delta_{i+1/2}} \right) \quad \text{e} \quad p_{j+1/2}(w) = s - \frac{\Delta t}{\Delta x_{j+1}} f^+(w) + \frac{\Delta t}{\Delta x_j} f^-(w).$$

Além disso, suponha que seja satisfeita a seguinte condição CFL:

$$\max_{1 \leq n_j \leq N} \frac{\Delta t}{\Delta x_j} |f'| \leq 1. \quad (3.50)$$

Então $\Theta_{TV}^n \geq 0$ e teremos

$$|u_h^n|_{TV(\Omega)} \leq |u_0|_{TV(\Omega)}.$$

Demonstração. Uma prova para esse resultado pode ser obtida procedendo com os mesmos argumentos utilizados para demonstrar o Teorema 3.26. \square

Portanto, a partir dos Teoremas 3.35 e 3.37 a seguinte estimativa de erro, apresentada em [43], pode ser comprovada:

Teorema 3.38. *Sejam $u_h(t) = u_h(\cdot, t) \in \mathcal{V}_h^k$ e $u(t) = u(\cdot, t) \in BV(\Omega)$ as soluções aproximada e exata do Problema (3.1), respectivamente, com $t \in [0, T]$. Se $u_h(0) \in \mathcal{V}_h^k$, $u_0 \in BV(\Omega)$, Δx for o mesmo da Definição 3.2 e a condição CFL (3.50) for atendida, então*

$$\|u(T) - u_h(T)\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u_0 - u_h(0)\|_{L^1(\Omega)} + C |u_0|_{TV(\Omega)} \sqrt{T\Delta x}.$$

Demonstração. Uma prova para este teorema é apresentada em [43]. \square

3.2.3.2 Caso geral: Aproximação por polinômios de graus quaisquer

A análise do caso geral é feita para as funções de base locais com polinômios quebrados ($\mathbb{P}^k(\mathcal{T}_h)$), com $k \geq 0$ qualquer. Nesta seção iremos apenas apresentar algumas ideias que podem ser usadas para a análise da estabilidade. Para tal apresentação, carecemos de algumas definições.

Definição 3.39. Seja $u_h(x, t)$ a solução do Problema (3.3). Definimos a média de $u_h(x, t)$ no elemento I_j por:

$$\bar{u}_j(t) = \frac{1}{\Delta x_j} \int_{I_j} u_h(x, t) dx.$$

Além disso, será considerado

$$\bar{u}_h(t) = \left\{ \bar{u}_h(t) \in \mathcal{V}_h^0 \mid \bar{u}_h(t)|_{I_j} = \bar{u}_j(t) \right\}.$$

Definição 3.40. A *Total Variation in the Means* (TVM) ou em português, *variação total nas médias* de u_h é definida por:

$$TVM(u_h) = \sum_{j=1}^{N-1} |\bar{u}_{j+1} - \bar{u}_j|.$$

Baseado na análise dos casos anteriores, para que a aproximação obtida pelo método RKDG para o Problema (3.44) seja estável no caso geral, uma desigualdade de entropia celular e uma limitação uniforme da solução discreta u_h na seminorma da variação total devem ser satisfeitas. O que será feito para verificar essas condições é reescrever a Formulação (3.3) de uma maneira conveniente e aplicar o Teorema 3.42. Para isso, perceba que pela Definição 3.39,

$$\Delta x_j \bar{u}_h|_{I_j} = \Delta x_j \bar{u}_j = \int_{I_j} u_h dx. \quad (3.51)$$

Desta forma, obtém-se

$$\int_{I_j} \frac{\partial u_h}{\partial t} dx = \frac{d}{dt} \int_{I_j} u_h dx \stackrel{(3.51)}{=} \frac{d}{dt} (\Delta x_j \bar{u}_j) = \Delta x_j \frac{d\bar{u}_j}{dt}. \quad (3.52)$$

Voltando à Formulação (3.3), tomando $v_h = 1$ e usando (3.52), podemos reescrevê-la, em cada elemento, como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall j = 1, \dots, N : \\ \frac{d\bar{u}_j}{dt} + \left\{ \hat{f}(u_{j+1/2}^-, u_{j+1/2}^+) - \hat{f}(u_{j-1/2}^-, u_{j-1/2}^+) \right\} / \Delta x_j = 0, \quad t \in (0, T). \end{array} \right. \quad (3.53)$$

Considerando uma discretização do tempo pelo método de Euler Explícito dada por $u_h^{n+1} = u_h^n + \delta L_h(u_h^n)$ temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall j = 1, \dots, N \text{ e } n = 0, \dots, M-1 : \\ (\bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_j^n) / \Delta t + \left\{ \hat{f}(u_{j+1/2}^{-,n}, u_{j+1/2}^{+,n}) - \hat{f}(u_{j-1/2}^{-,n}, u_{j-1/2}^{+,n}) \right\} / \Delta x_j = 0. \end{array} \right. \quad (3.54)$$

Observação 3.41. Os termos $u_{j\pm 1/2}^{\pm, n}$ denotam as funções $u_{j\pm 1/2}^{\pm}$ no tempo n .

Teorema 3.42. *Seja*

$$u_h^n = \sum_{j=1}^N \bar{u}_j^n \chi_{I_j}, \quad \text{com} \quad \chi_{I_j}(x) = \begin{cases} 1, & x \in I_j, \\ 0, & x \notin I_j, \end{cases}$$

em que \bar{u}_j^n é a solução de (3.54). Então

$$|\bar{u}_h^{n+1}|_{TV(\Omega)} - |\bar{u}_h^n|_{TV(\Omega)} + \Theta_{TVM} = 0,$$

em que

$$\begin{aligned} \Theta_{TVM} &= \sum_{j=1}^N (\mathcal{U}'_{j+1/2} - \mathcal{U}'_{j+1/2}) (p_{j+1/2}(u_h|_{I_{j+1}}) - p_{j+1/2}(u_h|_{I_j})) \\ &\quad + \sum_{j=1}^N \frac{\delta}{\Delta x_j} (\mathcal{U}'_{j-1/2} - \mathcal{U}'_{j+1/2}) (f^+(u_{j+1/2}^-) - f^-(u_{j-1/2}^-)) \\ &\quad - \sum_{j=1}^N \frac{\delta}{\Delta x_j} (\mathcal{U}'_{j+1/2} - \mathcal{U}'_{j-1/2}) (f^-(u_{j+1/2}^+) - f^-(u_{j-1/2}^+)) \end{aligned}$$

com

$$\mathcal{U}'_{i+1/2} = \mathcal{U}' \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x_{i+1/2}} \right)$$

e

$$p_{j+1/2}(u_h|_{I_m}) = \bar{u}_m - \frac{\delta}{\Delta x_{j-1}} f^+(u_{m-1/2}^-) + \frac{\delta}{\Delta x_j} f^-(u_{m-1/2}^+).$$

Demonstração. A prova deste resultado segue as ideias da demonstração exibida para o Teorema 3.26. \square

A partir do Teorema 3.42, a ideia para mostrar desigualdade de entropia e uma limitação uniforme da solução discreta u_h na variação total é restringir-se à tarefa de estudar sob quais condições a variação total nas médias não aumenta para uma discretização no tempo pelo método SSP-RK de primeira ordem. Para isso, a solução discreta deve atender (consulte [16, pág. 176] para obter mais detalhes):

$$\text{sign}(\bar{u}_{j+1} - \bar{u}_j) = \text{sign}(p_{j+1/2}(u_h|_{I_{j+1}}) - p_{j+1/2}(u_h|_{I_j})), \quad (3.55)$$

$$\text{sign}(\bar{u}_j - \bar{u}_{j-1}) = \text{sign}(u_{j+1/2}^- - u_{j-1/2}^-), \quad (3.56)$$

$$\text{sign}(\bar{u}_{j+1} - \bar{u}_j) = \text{sign}(u_{j+1/2}^+ - u_{j-1/2}^+). \quad (3.57)$$

Não existe garantia alguma de que a solução numérica satisfaça as condições (3.55)-(3.57). Portanto, é necessário aplicá-las por meio de um limitador de fluxo. Esse limitador altera a solução numérica de um elemento fazendo com que as condições (3.55)-(3.57) sejam satisfeitas, preservando a média da solução no elemento e, sempre que possível, a precisão do método.

No próximo capítulo, seguindo as ideias apresentadas em [25], estudamos critérios para que a incorporação de um limitador de fluxo à Formulação (3.54) satisfaça a propriedade de estabilidade via resultados de TVD, TVDM e/ou TVBM. Além disso, ele deve cumprir as condições (3.55), (3.56) e (3.57) necessárias ao Teorema 3.42.

4 ESTUDO DAS PROPRIEDADES TVD, TVDM E TVBM

O objetivo deste capítulo é estudar as propriedades TVD, TVDM e TVBM do método SSP-RKDG apresentado no Capítulo 3. Será considerado um limitador de fluxo que foi apresentado em [25] e verificados os critérios para que ele satisfaça as condições (3.55), (3.56) e (3.57) do Teorema 3.42. Nesta perspectiva serão usados o Lema de Harten [28, 38] e as funções minmod e minmod modificada [25].

4.1 LIMITADOR DE FLUXO

Para soluções que apresentam descontinuidades ou gradientes pronunciados, os esquemas DG de alta ordem ($k \geq 1$) podem produzir solução oscilatória [10, pág. 33]. Este problema está diretamente relacionado com o fenômeno de Gibbs [34] e à falta da propriedade TVD. Uma solução numérica oscilatória pode ter variação total maior do que a da condição inicial [10, pág. 33], causando a perda da estabilidade. Nos métodos de volumes finitos, por exemplo, este problema é solucionado reduzindo a inclinação da solução por meio da reconstrução dos fluxos por funções limitadoras de inclinação apropriadas, que os tornam esquemas TVD e, portanto, estáveis [10, pág. 33]. Podem ser utilizadas também técnicas de resolvidores Lagrangiano-Euleriano, como visto em [1] e [2]. Sugerido as ideias propostas por [16] e [25], vamos considerar limitadores de fluxo capazes de tornar os esquemas DG, com uma discretização no tempo por Euler Explícito, TVD. Como o objetivo é usar uma discretização do tempo com um esquema SSP-RK, será suficiente verificar tal propriedade para uma discretização pelo método de Euler Explícito. Os esquemas SSP-RK fornecerem automaticamente a propriedade TVD para versões do método SSP-RKDG de ordem superior [10, pág. 33].

O que será feito é, a partir da Formulação (3.54), considerar um limitador de fluxo. Para isso, note que de (3.54),

$$\begin{cases} \forall j = 1, \dots, N \text{ e } n = 0, \dots, M - 1 : \\ (\bar{w}_j^{n+1} - \bar{u}_j^n) / \Delta t + \{ \hat{f}(u_{j+1/2}^{-,n}, u_{j+1/2}^{+,n}) - \hat{f}(u_{j-1/2}^{-,n}, u_{j-1/2}^{+,n}) \} / \Delta x_j = 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

em que $w_h^{n+1} = u_h^n + \delta L_h(u_h^n)$. Assim, deve-se encontrar uma solução provisória w_h^{n+1} e utilizar um limitador de fluxo para corrigi-la, obtendo uma nova solução, dada por:

$$u_h^{n+1} = \Lambda \Pi_h(w_h^{n+1}). \quad (4.2)$$

Definição 4.1. Dizemos que o operador $\Lambda \Pi_h(\cdot)$ é um *limitador de fluxo*.

Um limitador de fluxo “ideal”, segundo [16, pág. 177], deve satisfazer as seguintes propriedades:

- (a) Manter a conservação de massa elemento por elemento, isto é, se o limitador estiver definido com (4.2), então $\bar{u}_j^{n+1} = \bar{w}_j^{n+1}$, $j = 1, \dots, N$.
- (b) Satisfazer as propriedades (3.55), (3.56) e (3.57). Esta condição afirma que, se o limitador for definido com (4.2), então

$$|\bar{w}_h|_{TV(\Omega)} \leq |\bar{u}_h|_{TV(\Omega)},$$

para valores suficientemente pequenos de δ , Teorema 3.42.

- (c) Não prejudicar a precisão do método.

Uma explicação do último item é dada a seguir.

Observação 4.2. Perceba que se a solução u_h é uma aproximação “muito boa” de uma solução suave u na vizinhança de um ponto x_0 , ela se comporta (assintoticamente quando Δx vai a zero) como uma linha reta se $u_x(x_0) \neq 0$. Se x_0 é um extremo isolado de u , então ele se comporta como uma parábola fornecida $u_{xx}(x_0) \neq 0$. Agora, se u_h é uma linha reta, satisfaz trivialmente as condições (3.55) e (3.56). No entanto, se u_h é uma parábola, as condições (3.55) e (3.57) nem sempre são satisfeitas. Isso mostra que é impossível construir o “limitador de fluxo ideal” com as condições (a), (b) e (c), em outras palavras, para impor a propriedade TVDM, precisamos abrir mão da precisão de alta ordem nos extremos locais. Este é um fenômeno muito conhecido para esquemas de diferenças finitas com a propriedade de TVD [16, pág. 178]. Isso significa que nem sempre é possível construir limitadores de fluxo que preservam a precisão de alta ordem, principalmente em extremos locais.

4.2 CONSTRUÇÃO DO LIMITADOR DE FLUXO

Usando as ideias apresentadas em [25], definimos

$$u_j^{(\ell)} = u_j^{(\ell)}(t) = \frac{1}{\Delta x_j^{\ell+1}} \int_{I_j} u(x, t) v_\ell^{(j)}(x) dx, \quad \ell = 0, 1, \dots, k, \quad (4.3)$$

em que $v_\ell^{(j)}(x) \in \mathcal{V}_h^k$ são os polinômios de Legendre definidos na Seção 3.1.2.

Observação 4.3. Perceba que de (4.3), se $\ell = 0$, então

$$u_j^{(0)} = \frac{1}{\Delta x_j} \int_{I_j} u(x, t) dx = \bar{u}_j, \quad (4.4)$$

ou seja, $u_j^{(0)}$ é a média da função u em I_j .

Considerando a ordem do esquema DG, pode-se escrever:

- 1ª ordem ($k = 0$):

$$u_{j+1/2}^- = u_{j-1/2}^+ = u_j^{(0)}.$$

- 2ª ordem ($k = 1$):

$$\begin{cases} u_{j+1/2}^- = u_j^{(0)} + 6u_j^{(1)}, \\ u_{j-1/2}^+ = u_j^{(0)} - 6u_j^{(1)}. \end{cases}$$

- 3ª ordem ($k = 2$):

$$\begin{cases} u_{j+1/2}^- = u_j^{(0)} + 6u_j^{(1)} + 30u_j^{(2)}, \\ u_{j-1/2}^+ = u_j^{(0)} - 6u_j^{(1)} + 30u_j^{(2)}, \end{cases}$$

e assim por diante. Além disso, definimos também

$$\begin{cases} \tilde{u}_j = u_{j+1/2}^- - u_j^{(0)}, \\ \tilde{u}_j = u_j^{(0)} - u_{j-1/2}^+, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_{j+1/2}^- = u_j^{(0)} + \tilde{u}_j, \\ u_{j-1/2}^+ = u_j^{(0)} - \tilde{u}_j. \end{cases} \quad (4.5)$$

A partir de (3.53), considerando a Definição 3.19 e a Observação 4.3,

$$\begin{cases} \forall j = 1, \dots, N : \\ \frac{du_j^{(0)}}{dt} = -\frac{1}{\Delta x_j} \Delta_- \hat{f}(u_j^{(0)} + \tilde{u}_j, u_{j+1}^{(0)} - \tilde{u}_{j+1}). \end{cases} \quad (4.6)$$

De (4.1), usando o método de Euler Explícito, obtém-se:

$$(u_j^{(0)})^{n+1} = (u_j^{(0)})^n - \frac{\Delta t}{\Delta x_j} \Delta_- \hat{f} \left\{ (u_j^{(0)} + \tilde{u}_j)^n, (u_{j+1}^{(0)} - \tilde{u}_{j+1})^n \right\}. \quad (4.7)$$

O resultado do Teorema 4.5 estabelece alguns critérios para garantir que o esquema dado por (4.7) seja TVD. Enunciaremos o teorema e para a sua demonstração iremos fazer uso do Lema de Harten, em uma versão apresentada em [28, pág. 110].

Lema 4.4 (Lema de Harten). *Suponha que um esquema numérico possa ser escrito como:*

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \lambda \{ C_{j+1/2} \Delta_+ u_j^n - D_{j-1/2} \Delta_- u_j^n \}, \quad (4.8)$$

em que $u_j^n = u(x_j, t^n)$, $\lambda = \Delta t / \Delta x$ e $\Delta_{\pm} u_j^n$ dados pela Definição (3.19).

Seja $\Omega = (a, b)$. Assim, teremos $\{u_j\}_{j=1}^N$, $\{C_{j+1/2}\}_{j=0}^{N-1}$ e $\{D_{j-1/2}\}_{j=0}^{N-1}$ reais. Assuma que as condições de contorno são periódicas. Se $C_{j+1/2}, D_{j-1/2} \geq 0$ e $\lambda(C_{j+1/2} + D_{j+1/2}) \leq 1$ para $j = 1, \dots, N$, então o esquema é TVD.

Demonstração. (i) A demonstração deste resultado é baseada nas ideias apresentadas em [37] e adaptadas por [28, pág. 110]. Pela hipótese de condições de contorno periódicas:

$$\zeta := \begin{cases} \zeta_{j+N}, & j \leq 0 \\ \zeta_{j-N}, & j > N \end{cases},$$

para $\zeta = u^n, u^{n+1}, C$ ou D .

De (4.8), para $j = 1, \dots, N$,

$$u_{j+1}^{n+1} = u_{j+1}^n + \lambda \{C_{j+3/2} \Delta_+ u_{j+1}^n - D_{j+1/2} \Delta_- u_{j+1}^n\}. \quad (4.9)$$

Subtraindo (4.8) de (4.9), obtém-se, para $j = 1, \dots, N$,

$$\begin{aligned} u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1} &= \Delta_+ u_j^{n+1} = u_{j+1}^n - u_j^n + \lambda C_{j+3/2} \Delta_+ u_{j+1}^n - \lambda D_{j+1/2} \Delta_- u_{j+1}^n \\ &\quad - \lambda C_{j+1/2} \Delta_+ u_j^n + \lambda D_{j-1/2} \Delta_- u_j^n \\ &= \Delta_+ u_j^n + \lambda C_{j+3/2} \Delta_+ u_{j+1}^n - \lambda D_{j+1/2} \Delta_- u_{j+1}^n \\ &\quad - \lambda C_{j+1/2} \Delta_+ u_j^n + \lambda D_{j-1/2} \Delta_- u_j^n. \end{aligned}$$

Pela definição do operador de diferenças (Definição 3.19),

$$\begin{aligned} \Delta_+ u_j^{n+1} &= \Delta_+ u_j^n + \lambda C_{j+3/2} \Delta_+ u_{j+1}^n - \lambda D_{j+1/2} \Delta_+ u_j^n \\ &\quad - \lambda C_{j+1/2} \Delta_+ u_j^n + \lambda D_{j-1/2} \Delta_+ u_{j-1}^n \\ &= \left(1 - \lambda C_{j+1/2} - \lambda D_{j+1/2}\right) \Delta_+ u_j^n + \lambda C_{j+3/2} \Delta_+ u_{j+1}^n \\ &\quad + \lambda D_{j-1/2} \Delta_+ u_{j-1}^n. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Tomando o valor absoluto em ambos os membros de (4.10) e usando a desigualdade triangular, obtém-se

$$\begin{aligned} \left| \Delta_+ u_j^{n+1} \right| &\leq \left[1 - \lambda(C_{j+1/2} + D_{j+1/2}) \right] \left| \Delta_+ u_j^n \right| \\ &\quad + \left| \lambda C_{j+3/2} \Delta_+ u_{j+1}^n \right| + \left| \lambda D_{j-1/2} \Delta_+ u_{j-1}^n \right|. \end{aligned}$$

Como por hipótese os coeficientes $C_{j+1/2}, D_{j+1/2}$ e $\lambda(C_{j+1/2} + D_{j+1/2}) \leq 1$, para todo $j \in \{1, \dots, N\}$, tem-se

$$\begin{aligned} \left| \Delta_+ u_j^{n+1} \right| &\leq \left[1 - \lambda(C_{j+1/2} + D_{j+1/2}) \right] \left| \Delta_+ u_j^n \right| \\ &\quad + \lambda C_{j+3/2} \left| \Delta_+ u_{j+1}^n \right| + \lambda D_{j-1/2} \left| \Delta_+ u_{j-1}^n \right|. \end{aligned}$$

Realizando o somatório em j de 1 até N , tem-se

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \left| \Delta_+ u_j^{n+1} \right| &\leq \sum_{j=1}^N \left| \Delta_+ u_j^n \right| - \sum_{j=1}^N \lambda C_{j+1/2} \left| \Delta_+ u_j^n \right| - \sum_{j=1}^N \lambda D_{j+1/2} \left| \Delta_+ u_j^n \right| \\ &\quad + \sum_{j=1}^N \lambda C_{j+3/2} \left| \Delta_+ u_{j+1}^n \right| + \sum_{j=1}^N \lambda D_{j-1/2} \left| \Delta_+ u_{j-1}^n \right|, \end{aligned}$$

o que implica em

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{N-1} |\Delta_+ u_j^{n+1}| &\leq \sum_{j=0}^{N-1} |\Delta_+ u_j^n| + \lambda D_{1/2} |\Delta_+ u_0^n| - \lambda C_{3/2} |\Delta_+ u_1^n| \\ &\quad + \lambda C_{N+3/2} |\Delta_+ u_{N+1}^n| - \lambda D_{N+1/2} |\Delta_+ u_N^n|. \end{aligned}$$

Usando a periodicidade da condição de contorno, tem-se

$$\sum_{j=1}^N |\Delta_+ u_j^{n+1}| \leq \sum_{j=1}^N |\Delta_+ u_j^n|.$$

Portanto, pela definição de variação total,

$$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n)$$

e o esquema (4.8) é TVD. \square

Teorema 4.5 (TVDM [25]). *Sejam θ uma constante, $\Delta_+ u_j^{(0)}$, $\Delta_+ \tilde{u}_j$ e $\Delta_+ \tilde{\tilde{u}}_j$ dados pela Definição 3.19, pela Observação 4.4 e por (4.5). Suponha*

$$-\theta \leq \frac{\Delta_+ \tilde{\tilde{u}}_j}{\Delta_+ u_j^{(0)}} \leq 1, \quad -\theta \leq -\frac{\Delta_+ \tilde{u}_j}{\Delta_+ u_j^{(0)}} \leq 1, \quad \forall t \in (0, T). \quad (4.11)$$

Então,

(i) o esquema dado por (4.6) é TVD para todo $\theta \geq 0$;

(ii) o esquema (4.7) é TVD sob a restrição CFL

$$\lambda (h_1^n - h_2^n) \leq \frac{1}{1 + \theta}, \quad (4.12)$$

em que

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad \Delta x = \max_{1 \leq j \leq N} \Delta x_j, \\ h_1^n &= \frac{\hat{f} \left\{ \left(u_j^{(0)} + \tilde{u}_j \right)^n, \left(u_j^{(0)} - \tilde{u}_j \right)^n \right\} - \hat{f} \left\{ \left(u_{j-1}^{(0)} + \tilde{u}_{j-1} \right)^n, \left(u_j^{(0)} - \tilde{u}_j \right)^n \right\}}{\left(u_j^{(0)} + \tilde{u}_j \right)^n - \left(u_{j-1}^{(0)} + \tilde{u}_{j-1} \right)^n} \end{aligned}$$

e

$$h_2^n = \frac{\hat{f} \left\{ \left(u_j^{(0)} + \tilde{u}_j \right)^n, \left(u_{j+1}^{(0)} - \tilde{u}_{j+1} \right)^n \right\} - \hat{f} \left\{ \left(u_j^{(0)} + \tilde{u}_j \right)^n, \left(u_j^{(0)} - \tilde{u}_j \right)^n \right\}}{\left(u_{j+1}^{(0)} - \tilde{u}_{j+1} \right)^n - \left(u_j^{(0)} - \tilde{u}_j \right)^n}.$$

Demonstração. (Teorema 4.5). (i) Usando a definição do operador de diferenças,

$$\begin{aligned}
& \Delta_- \hat{f} \left(u_j^{(0)} + \tilde{u}_j, u_{j+1}^{(0)} - \tilde{u}_{j+1} \right) = \\
& = \hat{f} \left(u_j^{(0)} + \tilde{u}_j, u_{j+1}^{(0)} - \tilde{u}_{j+1} \right) - \hat{f} \left(u_{j-1}^{(0)} + \tilde{u}_{j-1}, u_j^{(0)} - \tilde{u}_j \right) \\
& = \underbrace{\hat{f} \left(u_j^{(0)} + \tilde{u}_j, u_{j+1}^{(0)} - \tilde{u}_{j+1} \right) - \hat{f} \left(u_j^{(0)} + \tilde{u}_j, u_j^{(0)} - \tilde{u}_j \right)}_{\textcircled{1}} \\
& \quad + \underbrace{\hat{f} \left(u_j^{(0)} + \tilde{u}_j, u_j^{(0)} - \tilde{u}_j \right) - \hat{f} \left(u_{j-1}^{(0)} + \tilde{u}_{j-1}, u_j^{(0)} - \tilde{u}_j \right)}_{\textcircled{2}}.
\end{aligned}$$

De $\textcircled{1}$, pode-se definir

$$C_{j+1/2} := \frac{\hat{f} \left(u_j^{(0)} + \tilde{u}_j, u_{j+1}^{(0)} - \tilde{u}_{j+1} \right) - \hat{f} \left(u_j^{(0)} + \tilde{u}_j, u_j^{(0)} - \tilde{u}_j \right)}{\Delta_+ u_j^{(0)}}.$$

Assim, usando algumas manipulações algébricas,

$$\begin{aligned}
C_{j+1/2} &= \frac{\hat{f} \left(u_j^{(0)} + \tilde{u}_j, u_{j+1}^{(0)} - \tilde{u}_{j+1} \right) - \hat{f} \left(u_j^{(0)} + \tilde{u}_j, u_j^{(0)} - \tilde{u}_j \right)}{\Delta_+ u_j^{(0)}} \\
&\quad \times \left(\frac{\Delta_+ u_j^{(0)} - \Delta_+ \tilde{u}_j}{\Delta_+ u_j^{(0)} - \Delta_+ \tilde{u}_j} \right),
\end{aligned}$$

o que implica em

$$C_{j+1/2} = \frac{\hat{f} \left(u_j^{(0)} + \tilde{u}_j, u_{j+1}^{(0)} - \tilde{u}_{j+1} \right) - \hat{f} \left(u_j^{(0)} + \tilde{u}_j, u_j^{(0)} - \tilde{u}_j \right)}{\Delta_+ u_j^{(0)} - \Delta_+ \tilde{u}_j} \left(1 - \frac{\Delta_+ \tilde{u}_j}{\Delta_+ u_j^{(0)}} \right),$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
C_{j+1/2} &= \frac{\hat{f} \left(u_j^{(0)} + \tilde{u}_j, u_{j+1}^{(0)} - \tilde{u}_{j+1} \right) - \hat{f} \left(u_j^{(0)} + \tilde{u}_j, u_j^{(0)} - \tilde{u}_j \right)}{\left(u_{j+1}^{(0)} - u_j^{(0)} \right) - \left(\tilde{u}_{j+1} - \tilde{u}_j \right)} \left(1 - \frac{\Delta_+ \tilde{u}_j}{\Delta_+ u_j^{(0)}} \right) \\
&= \frac{\hat{f} \left(u_j^{(0)} + \tilde{u}_j, u_{j+1}^{(0)} - \tilde{u}_{j+1} \right) - \hat{f} \left(u_j^{(0)} + \tilde{u}_j, u_j^{(0)} - \tilde{u}_j \right)}{\left(u_{j+1}^{(0)} - \tilde{u}_{j+1} \right) - \left(u_j^{(0)} - \tilde{u}_j \right)} \left(1 - \frac{\Delta_+ \tilde{u}_j}{\Delta_+ u_j^{(0)}} \right). \quad (4.13)
\end{aligned}$$

Desta forma, fazendo

$$-h_2 := - \frac{\hat{f} \left(u_j^{(0)} + \tilde{u}_j, u_{j+1}^{(0)} - \tilde{u}_{j+1} \right) - \hat{f} \left(u_j^{(0)} + \tilde{u}_j, u_j^{(0)} - \tilde{u}_j \right)}{\left(u_{j+1}^{(0)} - \tilde{u}_{j+1} \right) - \left(u_j^{(0)} - \tilde{u}_j \right)} \quad (4.14)$$

obtém-se

$$C_{j+1/2} = -h_2 \left(1 - \frac{\Delta_+ \tilde{u}_j}{\Delta_+ u_j^{(0)}} \right).$$

Logo, como o fluxo numérico \hat{f} considerado é monótono, ele é não-crescente na segunda. Sendo assim,

$$h_2 = \frac{\hat{f}(u_j^{(0)} + \tilde{u}_j, u_{j+1}^{(0)} - \tilde{u}_{j+1}) - \hat{f}(u_j^{(0)} + \tilde{u}_j, u_j^{(0)} - \tilde{u}_j)}{(u_{j+1}^{(0)} - \tilde{u}_{j+1}) - (u_j^{(0)} - \tilde{u}_j)} \leq 0,$$

o que implica em $-h_2 \geq 0$. Além disso, pela hipótese que $\frac{\Delta_+ \tilde{u}_j}{\Delta_+ u_j^{(0)}} \leq 1$ em (4.11), tem-se

$$C_{j+1/2} \geq 0.$$

Agora por ②, é possível definir

$$D_{j-1/2} := \frac{\hat{f}(u_j^{(0)} + \tilde{u}_j, u_j^{(0)} - \tilde{u}_j) - \hat{f}(u_{j-1}^{(0)} + \tilde{u}_{j-1}, u_j^{(0)} - \tilde{u}_j)}{\Delta_- u_j^{(0)}}.$$

Com isso,

$$\begin{aligned} D_{j-1/2} &= \frac{\hat{f}(u_j^{(0)} + \tilde{u}_j, u_j^{(0)} - \tilde{u}_j) - \hat{f}(u_{j-1}^{(0)} + \tilde{u}_{j-1}, u_j^{(0)} - \tilde{u}_j)}{\Delta_- u_j^{(0)}} \\ &\quad \times \left(\frac{\Delta_- u_j^{(0)} + \Delta_- \tilde{u}_j}{\Delta_- u_j^{(0)} + \Delta_- \tilde{u}_j} \right) \\ &= \frac{\hat{f}(u_j^{(0)} + \tilde{u}_j, u_j^{(0)} - \tilde{u}_j) - \hat{f}(u_{j-1}^{(0)} + \tilde{u}_{j-1}, u_j^{(0)} - \tilde{u}_j)}{\Delta_- u_j^{(0)} + \Delta_- \tilde{u}_j} \left(1 + \frac{\Delta_- \tilde{u}_j}{\Delta_- u_j^{(0)}} \right) \\ &= \frac{\hat{f}(u_j^{(0)} + \tilde{u}_j, u_j^{(0)} - \tilde{u}_j) - \hat{f}(u_{j-1}^{(0)} + \tilde{u}_{j-1}, u_j^{(0)} - \tilde{u}_j)}{(u_j^{(0)} - u_{j-1}^{(0)}) + (\tilde{u}_j - \tilde{u}_{j-1})} \left(1 + \frac{\Delta_- \tilde{u}_j}{\Delta_- u_j^{(0)}} \right), \end{aligned}$$

que resulta em

$$D_{j-1/2} = \frac{\hat{f}(u_j^{(0)} + \tilde{u}_j, u_j^{(0)} - \tilde{u}_j) - \hat{f}(u_{j-1}^{(0)} + \tilde{u}_{j-1}, u_j^{(0)} - \tilde{u}_j)}{(u_j^{(0)} + \tilde{u}_j) - (u_{j-1}^{(0)} + \tilde{u}_{j-1})} \left(1 + \frac{\Delta_- \tilde{u}_j}{\Delta_- u_j^{(0)}} \right). \quad (4.15)$$

Logo, denotando

$$h_1 := \frac{\hat{f}(u_j^{(0)} + \tilde{u}_j, u_j^{(0)} - \tilde{u}_j) - \hat{f}(u_{j-1}^{(0)} + \tilde{u}_{j-1}, u_j^{(0)} - \tilde{u}_j)}{(u_j^{(0)} + \tilde{u}_j) - (u_{j-1}^{(0)} + \tilde{u}_{j-1})} \quad (4.16)$$

obtem-se

$$D_{j-1/2} = h_1 \left(1 + \frac{\Delta_- \tilde{u}_j}{\Delta_- u_j^{(0)}} \right).$$

Assim, a hipótese do fluxo numérico \hat{f} se monótono implica que ele é não-decrescente na primeira, isto é,

$$\frac{\hat{f}\left(u_j^{(0)} + \tilde{u}_j, u_j^{(0)} - \tilde{u}_j\right) - \hat{f}\left(u_{j-1}^{(0)} + \tilde{u}_{j-1}, u_j^{(0)} - \tilde{u}_j\right)}{\left(u_j^{(0)} + \tilde{u}_j\right) - \left(u_{j-1}^{(0)} + \tilde{u}_{j-1}\right)} \geq 0.$$

Então, $h_1 \geq 0$ e por (4.11),

$$D_{j-1/2} \geq 0.$$

Logo, pode-se escrever

$$\begin{aligned} \Delta_- \hat{f}\left(u_j^{(0)} + \tilde{u}_j, u_{j+1}^{(0)} - \tilde{u}_{j+1}\right) &= -C_{j+1/2} \Delta_+ u_j^{(0)} + D_{j-1/2} \Delta_- u_j^{(0)}, \\ \Delta_+ \hat{f}\left(u_{j-1}^{(0)} + \tilde{u}_{j-1}, u_j^{(0)} - \tilde{u}_j\right) &= -C_{j+1/2} \Delta_+ u_j^{(0)} + D_{j-1/2} \Delta_- u_j^{(0)}. \end{aligned}$$

Portanto, por [50] segue que o esquema (4.6) é TVD.

(ii) Considerando $\Delta x = \max_{1 \leq j \leq N} \Delta x_j$ em (4.7) é possível escrever:

$$\left(u_j^{(0)}\right)^{n+1} = \left(u_j^{(0)}\right)^n - \lambda \Delta_- \hat{f}\left\{\left(u_j^{(0)} + \tilde{u}_j\right)^n, \left(u_{j+1}^{(0)} - \tilde{u}_{j+1}\right)^n\right\}, \quad (4.17)$$

em que

$$\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}.$$

Usando um raciocínio análogo ao desenvolvido para obter os resultados apresentados em (4.13), (4.14), (4.15) e (4.16) pode-se escrever (4.17) como:

$$\begin{aligned} \lambda \Delta_- \hat{f}\left\{\left(u_j^{(0)} + \tilde{u}_j\right)^n, \left(u_{j+1}^{(0)} - \tilde{u}_{j+1}\right)^n\right\} &= \\ = \lambda \left\{C_{j+1/2}^n \Delta_+ u_j^{(0),n} - D_{j-1/2}^n \Delta_- u_j^{(0),n}\right\}, \end{aligned}$$

com,

$$\begin{aligned} C_{j+1/2}^n &= -h_2^n \left(1 - \frac{\Delta_+ \left(\tilde{u}_j\right)^n}{\Delta_+ u_j^{(0),n}}\right), \\ D_{j-1/2}^n &= h_1^n \left(1 + \frac{\Delta_- \left(\tilde{u}_j\right)^n}{\Delta_- u_j^{(0),n}}\right), \end{aligned}$$

em que

$$h_1^n = \frac{\hat{f}\left\{\left(u_j^{(0)} + \tilde{u}_j\right)^n, \left(u_j^{(0)} - \tilde{u}_j\right)^n\right\} - \hat{f}\left\{\left(u_{j-1}^{(0)} + \tilde{u}_{j-1}\right)^n, \left(u_j^{(0)} - \tilde{u}_j\right)^n\right\}}{\left(u_j^{(0)} + \tilde{u}_j\right)^n - \left(u_{j-1}^{(0)} + \tilde{u}_{j-1}\right)^n}$$

e

$$h_2^n = \frac{\hat{f}\left\{\left(u_j^{(0)} + \tilde{u}_j\right)^n, \left(u_{j+1}^{(0)} - \tilde{u}_{j+1}\right)^n\right\} - \hat{f}\left\{\left(u_j^{(0)} + \tilde{u}_j\right)^n, \left(u_j^{(0)} - \tilde{u}_j\right)^n\right\}}{\left(u_{j+1}^{(0)} - \tilde{u}_{j+1}\right)^n - \left(u_j^{(0)} - \tilde{u}_j\right)^n}.$$

Sem perda de generalidade,

$$D_{j+1/2}^n = h_1^n \left(1 + \frac{\Delta_+ (\tilde{u}_j)^n}{\Delta_+ u_j^{(0),n}} \right).$$

Usando monotonicidade do fluxo numérico, $h_1^n, -h_2^n \geq 0$. Desta forma, de (4.11),

$$\begin{cases} 0 \leq C_{j+1/2}^n \leq -h_2^n, \\ 0 \leq D_{j+1/2}^n \leq h_1^n \end{cases} \Rightarrow C_{j+1/2}^n + D_{j+1/2}^n \leq h_1^n - h_2^n \quad (4.18)$$

Logo, por (4.18) e pela hipótese (4.12), obtém-se

$$\lambda(C_{j+1/2}^n + D_{j+1/2}^n) \leq \lambda(h_1^n - h_2^n) \leq \frac{1}{1+\theta} \leq 1, \quad \forall \theta \geq 0. \quad (4.19)$$

Portanto, como (4.18) e (4.19) são as hipóteses do Lema 4.4, o esquema (4.7) é TVD, desde que a restrição CFL dada por (4.12) seja satisfeita. \square

Observação 4.6. Pela Definição 3.40, concluímos que o Teorema 4.5 define as condições para que o esquema seja TVDM, isto é, seja TVD sobre as médias.

A partir do Teorema 4.5 o trabalho necessário para mostrar que o esquema (4.7) é TVD passa a ser o de modificar \tilde{u}_j e $\tilde{\tilde{u}}_j$ para atender a hipótese (4.11). Assim, usando as ideias apresentadas por [25], vamos considerar as funções minmod e minmod modificada.

4.2.1 Alteração pela função minmod

Definição 4.7 (Função minmod). Sejam $\{a_i\}_{i=1}^n$ reais. A função minmod é denotada por $m(a_1, a_2, \dots, a_n)$ e definida como:

$$m(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{cases} s \min_{1 \leq i \leq n} |a_i|, & \text{se } \text{sign}(a_1) = \text{sign}(a_2) = \dots = \text{sign}(a_n) = s, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A Definição 4.7 é usada por [25] para modificar \tilde{u}_j e $\tilde{\tilde{u}}_j$:

$$\begin{cases} \tilde{u}_j^{(\text{mod})} = m(\tilde{u}_j, \Delta_+ u_j^{(0)}, \Delta_- u_j^{(0)}), \\ \tilde{\tilde{u}}_j^{(\text{mod})} = m(\tilde{\tilde{u}}_j, \Delta_+ u_j^{(0)}, \Delta_- u_j^{(0)}). \end{cases} \quad (4.20)$$

Como visto anteriormente, a construção de um limitador baseia-se na procura por condições simples e suficientes na função u_h que impliquem as condições (3.55), (3.56) e (3.57). Essas condições também podem ser declaradas em termos da função minmod pelo seguinte resultado [16, pág. 178].

Teorema 4.8. *Seja \hat{f} um fluxo numérico monótono, consistente e localmente Lipschitz. Suponha que a seguinte condição CFL seja atendida:*

$$\delta \left(\frac{|f^+|_{Lip}}{\Delta x_{j+1}} + \frac{|f^-|_{Lip}}{\Delta x_j} \right) \leq \frac{1}{2}, \quad j = 1, \dots, N,$$

com

$$|f^\pm|_{Lip} = \sup_{a \neq b} \frac{|f^\pm(a) - f^\pm(b)|}{|a - b|}.$$

Se m for a função minmod (Definição 4.7) e satisfaz:

$$\begin{cases} u_{j+1/2}^- - u_j^{(0)} = m(u_{j+1/2}^-, u_j^{(0)}, \Delta_+ u_j^{(0)}, \Delta_- u_j^{(0)}), \\ u_j^{(0)} - u_{j-1/2}^+ = m(u_j^{(0)}, u_{j-1/2}^+, \Delta_+ u_j^{(0)}, \Delta_- u_j^{(0)}), \end{cases}$$

então, as condições (3.55), (3.56) e (3.57) são satisfeitas.

Demonstração. Uma prova para este resultado pode ser encontrada em [16, pág. 179]. \square

Suprimindo os índices n relativos a discretização do tempo e considerando $\Delta x = \max_{1 \leq j \leq N} \Delta x_j$, $f^+ = h_1$, $f^- = h_2$, $\theta = 1$, a partir dos Teoremas 4.5 e 4.8, segue que as condições (3.55), (3.56) e (3.57) são satisfeitas para a modificação realizada pela função minmod definida em (4.20).

Por (4.20), $u_{j+1/2}^{\pm(\text{mod})}$ podem ser reescritos como:

$$\begin{cases} u_{j+1/2}^{-(\text{mod})} = u_j^{(0)} + \tilde{u}_j^{(\text{mod})}, \\ u_{j-1/2}^{+(\text{mod})} = u_j^{(0)} - \tilde{u}_j^{(\text{mod})}. \end{cases}$$

Desta forma, obtem-se o seguinte esquema modificado:

$$\left(u_j^{(0)} \right)^{n+1} = \left(u_j^{(0)} \right)^n - \frac{\Delta t}{\Delta x_j} \Delta_- \hat{f} \left\{ \left(u_{j+1/2}^{-(\text{mod})} \right)^n, \left(u_{j-1/2}^{+(\text{mod})} \right)^n \right\}.$$

O Teorema 4.9 mostra que o limitador construído preserva a precisão do método longe dos pontos críticos.

Teorema 4.9. *Em regiões suaves, longe de pontos críticos, a função minmod não causa nenhuma modificação no esquema (4.7), isto é, $\tilde{u}_j^{(\text{mod})} = \tilde{u}_j$ e $\tilde{u}_j^{(\text{mod})} = \tilde{u}_j$.*

Demonstração. Primeiro provemos que $\tilde{u}_j^{(\text{mod})} = \tilde{u}_j$. Como por hipótese a função u é suave nas regiões longe dos pontos críticos, $u_{j+1/2}^- = u(x_{j+1/2}^-)$ e podemos usar a expansão de Taylor. Sendo assim,

$$\begin{aligned} u_{j+1/2}^- &= u(x_j) + u_x(x_j)(x_{j+1/2}^- - x_j) + \mathcal{O}((x_{j+1/2}^- - x_j)^2) \\ &= u(x_j) + u_x(x_j) \left(\frac{\Delta x_j}{2} \right) + \mathcal{O}(\Delta x^2). \end{aligned} \tag{4.21}$$

Além disso, sabemos que

$$u_j^{(0)} = \frac{1}{\Delta x_j} \int_{I_j} u(x) dx.$$

Fazendo a expansão de Taylor em x_j da função u ,

$$u_j^{(0)} = \frac{1}{\Delta x_j} \int_{I_j} \left[u(x_j) + u_x(x_j)(x - x_j) + \mathcal{O}((x - x_j)^2) \right] dx,$$

o que resulta em,

$$u_j^{(0)} = \frac{1}{\Delta x_j} \int_{I_j} u(x_j) dx + \frac{1}{\Delta x_j} \int_{I_j} [u_x(x_j)(x - x_j)] dx + \mathcal{O}(\Delta x^2). \quad (4.22)$$

Logo, pelos dois primeiros termos do lado direito de (4.22),

$$\frac{1}{\Delta x_j} \int_{I_j} u(x_j) dx = \frac{u(x_j)}{\Delta x_j} \int_{I_j} dx = \frac{u(x_j)}{\Delta x_j} \Delta x_j = u(x_j)$$

e

$$\frac{1}{\Delta x_j} \int_{I_j} [u_x(x_j)(x - x_j)] dx = \frac{u_x(x_j)}{\Delta x_j} \int_{I_j} (x - x_j) dx = 0.$$

Desta forma,

$$u_j^{(0)} = u(x_j) + \mathcal{O}(\Delta x^2). \quad (4.23)$$

Sendo assim, por (4.21) e (4.23)

$$\begin{aligned} \tilde{u}_j &= u_{j+1/2}^- - u_j^{(0)} = u(x_j) + u_x(x_j) \left(\frac{\Delta x_j}{2} \right) - u(x_j) + \mathcal{O}(\Delta x^2) \\ &= u_x(x_j) \left(\frac{\Delta x_j}{2} \right) + \mathcal{O}(\Delta x^2). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Agora, veja que por (4.23) e usando novamente a expansão de Taylor

$$\begin{aligned} \Delta_+ u_j^{(0)} &= u_{j+1}^{(0)} - u_j^{(0)} = u(x_{j+1}) - u(x_j) + \mathcal{O}(\Delta x^2) \\ &= u(x_j) + u_x(x_j)(x_{j+1} - x_j) - u(x_j) + \mathcal{O}(\Delta x^2) \\ &= u_x(x_j) \left(\frac{\Delta x_j + \Delta x_{j+1}}{2} \right) + \mathcal{O}(\Delta x^2). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Além disso, também temos

$$\begin{aligned} \Delta_- u_j^{(0)} &= u_{j-1}^{(0)} - u_j^{(0)} = u(x_{j-1}) - u(x_j) \\ &= u(x_j) + u_x(x_j)(x_{j-1} - x_j) - u(x_j) + \mathcal{O}(\Delta x^2) \\ &= u_x(x_j) \left(\frac{\Delta x_j + \Delta x_{j-1}}{2} \right) + \mathcal{O}(\Delta x^2). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Portanto, de (4.24), (4.25) e (4.26) \tilde{u}_j , $\Delta_+ u_j^{(0)}$ e $\Delta_- u_j^{(0)}$ tem o mesmo sinal e $\tilde{u}_j \leq \Delta_+ u_j^{(0)}, \Delta_- u_j^{(0)}$. Com isso, a função minmod retorna sempre o primeiro argumento, isto é, \tilde{u}_j , o que implica em $\tilde{u}_j^{(\text{mod})} = \tilde{u}_j$.

Agora, usando um raciocínio semelhante mostraremos que $\tilde{u}_j^{(\text{mod})} = \tilde{u}_j$. De início, como a função u é suave nesta região, $u_{j-1/2}^+ = u(x_{j-1/2}^+)$. Sendo assim, usando a expansão de Taylor da função $u(x)$ no ponto x_j ,

$$\begin{aligned} u_{j-1/2}^+ &= u(x_j) + u_x(x_j)(x_{j-1/2} - x_j) + \mathcal{O}(\Delta x^2) \\ &= u(x_j) - u_x(x_j) \left(\frac{\Delta x_j}{2} \right) + \mathcal{O}(\Delta x^2). \end{aligned} \quad (4.27)$$

De (4.23) e (4.27),

$$\begin{aligned} \tilde{u}_j &= u_j^{(0)} - u_{j-1/2}^+ = u(x_j) - \left[u(x_j) - u_x(x_j) \left(\frac{\Delta x_j}{2} \right) \right] + \mathcal{O}(\Delta x^2) \\ &= u_x(x_j) \left(\frac{\Delta x_j}{2} \right) + \mathcal{O}(\Delta x^2). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Logo, de (4.25), (4.26) e (4.28) \tilde{u}_j , $\Delta_+ u_j^{(0)}$ e $\Delta_- u_j^{(0)}$ tem o mesmo sinal e $\tilde{u}_j \leq \Delta_+ u_j^{(0)}, \Delta_- u_j^{(0)}$. Portanto, a função minmod retorna sempre o primeiro argumento, ou seja, \tilde{u}_j , o que resulta em $\tilde{u}_j^{(\text{mod})} = \tilde{u}_j$. \square

Um dos principais problemas apresentados pelos esquemas TVD é a degeneração para primeira ordem em pontos críticos [49]. Para superar esta dificuldade, a ideia apresentada por [25], baseada em [56], é modificar a função minmod para não alterar a precisão do esquema (4.7) em regiões suaves.

4.2.2 Alteração pela função minmod modificada

Definição 4.10. Sejam M e $\{a_i\}_{i=1}^n$ reais, com $M \geq 0$. A função minmod modificada é denotada por $\tilde{m}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ é definida como:

$$\tilde{m}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{cases} a_1, & \text{se } |a_1| \leq M(\Delta x)^2, \\ m(a_1, a_2, \dots, a_n) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A Definição 4.10 é usada por [25] para modificar \tilde{u}_j e $\tilde{\tilde{u}}_j$:

$$\begin{cases} \tilde{u}_j^{(\text{mod},2)} = \tilde{m}(\tilde{u}_j, \Delta_+ u_j^{(0)}, \Delta_- u_j^{(0)}), \\ \tilde{\tilde{u}}_j^{(\text{mod},2)} = \tilde{m}(\tilde{\tilde{u}}_j, \Delta_+ u_j^{(0)}, \Delta_- u_j^{(0)}). \end{cases} \quad (4.29)$$

O lema a seguir foi apresentado em [25] e caracteriza M para que a alteração feita por (4.29) não afete a precisão da aproximação em regiões suaves.

Lema 4.11. *Seja $\omega \in \Omega$ uma região em que $u \in C^2(\Omega)$ e $|u_{xx}| \leq M_2$. Se*

$$M = \frac{2}{3}M_2, \quad (4.30)$$

ou

$$M = \frac{2}{9}(3 + 10M_2)M_2 \left[\frac{(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2 + |\Delta_+ u_j^{(0)}| + |\Delta_- u_j^{(0)}|} \right], \quad (4.31)$$

então o limitador dado pela função minmod modificada por (4.29) não afeta a precisão da aproximação em ω .

Demonstração. Uma demonstração para este resultado pode ser encontrada em [25]. \square

Segundo [25] considerar M dada por (4.31) é melhor que (4.30), pois, apesar de seu tamanho ser muito pequeno distante dos pontos críticos, é suficiente para recuperar a precisão perdida com a função minmod sem modificação.

Todas as condições de estabilidade não linear consideradas até agora são muito fortes, pois implicam na preservação da monotonicidade. Às vezes não é possível demonstrar tais condições, como no caso do limitador construído em (4.29). A próxima definição estabelece um critério de estabilidade mais fraco.

Definição 4.12 (TVB). Dizemos que um esquema é *Total Variation Bounded* (TVB) ou de variação total limitada se

$$TV(u^n) \leq K, \quad \forall n.$$

em que K é uma constante positiva dependente apenas da condição inicial. Quando a variação total é limitada nas médias (\bar{u}_j) , dizemos que o esquema é *Total Variation Bounded in the Means* (TVBM).

De imediato é possível ver que TVD implica TVB. Contudo a recíproca nem sempre é verdadeira [56].

O resultado a seguir estabelece condições para que o esquema (4.7), com o limitador de fluxo construído a partir da função minmod modificada, seja TVBM e, portanto, estável.

Teorema 4.13 (TVBM [25]). *As conclusões do Teorema 4.5 também são válidas, caso m (Definição 4.7) seja substituído por \tilde{m} (Definição 4.10) e TVD substituído por TVB.*

Demonstração. Uma demonstração detalhada deste resultado pode ser vista em [56]. \square

No capítulo a seguir, usando as ideias estudadas até aqui, investigamos as propriedades TVD e TVB, para um método de elementos finitos misto e híbrido proposto para resolver problemas com termos convectivos e difusivos.

5 ESTUDO DA ESTABILIDADE DE UMA FORMULAÇÃO MISTA HÍBRIDA

Neste capítulo estudamos as propriedades de estabilidade para um método misto e híbrido apresentado em [55] e [30]. Baseado nas ideias expostas pelos autores, detalhamos a construção do método. Investigamos as propriedades de estabilidade via resultados de TVD e TVB. Para o caso linear, com condições de contorno periódicas e de primeira ordem, provamos a propriedade TVD, levando em consideração algumas aproximações realizadas em [55] e [30]. Destacamos a inviabilidade do tipo de aproximações usadas pelos autores. Concluimos o capítulo exibindo algumas ideias e alguns cálculos ainda não finalizados, que acreditamos funcionar, para mostrar a propriedade TVB do método, quando desconsideradas as aproximações referidas. Essas propostas também são para o caso linear, com condições de contorno periódicas e de primeira ordem. Até onde sabemos, esta é a primeira vez que esse tipo de investigação é feita.

5.1 CONSTRUÇÃO DO MÉTODO DMH1

Em [55] foi apresentado um método, então chamado pelo autor de DMH1 (*Dual Mixed and Hybrid*), desenvolvido para resolver problemas com convecção e difusão. Em [30] é abordado o caso escalar e em [31] é apresentado o caso multidimensional. Para a construção do método consideramos uma EDP parabólica cujo domínio é o mesmo do Problema (3.1), isto é, $\Omega \times (0, T)$. Definimos o problema como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } u(x, t) \text{ tal que} \\ \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \quad \text{em } \Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{em } \Omega, \\ \text{com condições de contorno periódicas,} \end{array} \right. \quad (5.1)$$

em que ν é uma constante positiva.

O processo de construção do método DMH1 dá-se pela reescrita do Problema (5.1) ao introduzir duas variáveis auxiliares p e \hat{p} :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } u(x, t), p(x, t) \text{ e } \hat{p}(x, t), \text{ tal que} \\ \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} = 0 \quad \text{em } \Omega \times (0, T), \\ p = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{em } \Omega \times (0, T), \\ \hat{p} = f(u) \quad \text{em } \Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{em } \Omega, \\ \text{com condições de contorno periódicas.} \end{array} \right. \quad (5.2)$$

Para a hibridização da Formulação (5.2) são necessárias as definições de uma partição do domínio e de alguns espaços. A partição considerada será a mesma da Definição

3.2. Além disso, será definido $h_j = \Delta x_j = x_{j+1/2} - x_{j-1/2}$, para cada $j = 1, \dots, N$ e usada a notação $h = \Delta x = \max_{1 \leq j \leq N} \Delta x_j$. Para o tempo será definido um passo $\Delta t = T/M$, resultando nos instantes de tempo $t^n = n\Delta t$, com $n = 1, 2, \dots, M$.

Os espaços utilizados são definidos como:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \{\mu : \{x_{1/2}, x_{3/2}, \dots, x_{N+1/2}\} \rightarrow \mathbb{R}\}, \\ \bar{\mathcal{M}} &= \{\mu \in \mathcal{M} \mid \mu_{1/2} = \mu_{N+1/2}\}, \\ \tilde{\mathcal{V}} &= L^2(\Omega), \\ \mathcal{Q} &= \{q \in L^2(\Omega), q|_{I_j} \in H^1(I_j), j = 1, \dots, N\}. \end{aligned}$$

A hibridização da formulação é feita por meio de um relaxamento da continuidade de p e \hat{p} através da inserção dos multiplicadores de Lagrange λ e $\hat{\lambda}$. Para λ , a ideia é partir de

$$p = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{em } \Omega \times (0, T)$$

e fazer, para cada $t \in (0, T)$,

$$p - \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(p - \frac{\partial u}{\partial x}, q \right) = 0, \quad \forall q \in \mathcal{Q}.$$

Sendo assim, para $q \in \mathcal{Q}$,

$$(p, q) - \left(q, \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0.$$

Por definição, para cada I_j , $j = 1, \dots, N$:

$$\int_{I_j} pq \, dx - \int_{I_j} q \frac{\partial u}{\partial x} \, dx = 0.$$

Realizando o somatório em j ,

$$\sum_{j=1}^N \int_{I_j} pq \, dx - \sum_{j=1}^N \int_{I_j} q \frac{\partial u}{\partial x} \, dx = 0.$$

Integrando por partes,

$$\sum_{j=1}^N \int_{I_j} pq \, dx + \sum_{j=1}^N \int_{I_j} u \frac{dq}{dx} \, dx - \sum_{j=1}^N (u(x_{j+1/2}^-)q(x_{j+1/2}^-) - u(x_{j-1/2}^+)q(x_{j-1/2}^+)) = 0.$$

Observação 5.1. Os termos $q(x_{j+1/2}^\pm)$ definem os traços da função q à esquerda e à direita, respectivamente, do nó $x_{j+1/2}$. Definimos o traço como o limite lateral em cada nó, ou seja, $q(x_{j+1/2}^\pm) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} q(x_{j+1/2} \pm \epsilon)$.

Associando $\lambda_{j+1/2}$ ao traço de u em $j + 1/2$, para $j = 0, \dots, N$, e

$$u \approx \bar{u} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} u \, dt, \quad (5.3)$$

obtém-se, para todo $q \in \mathcal{Q}$,

$$\sum_{j=1}^N \int_{I_j} pq \, dx = - \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \bar{u} \frac{dq}{dx} \, dx + \sum_{j=1}^N (\lambda_{j+1/2} q(x_{j+1/2}^-) - \lambda_{j-1/2} q(x_{j-1/2}^+)).$$

A inserção do multiplicador $\hat{\lambda}$ é feita a partir da igualdade [55, pág. 21]

$$\hat{p} = f(u) \quad \text{em } \Omega \times (0, T).$$

Para tanto, note que $\forall \hat{q} \in \mathcal{Q}$,

$$\begin{aligned} (\hat{p} - f(u), \hat{q}) &= 0, \\ (\hat{p}, \hat{q}) &= (f(u), \hat{q}). \end{aligned}$$

Logo, em cada subintervalo de Ω , tem-se:

$$\int_{I_j} \hat{p} \hat{q} \, dx = \int_{I_j} f(u) \hat{q} \, dx.$$

Desta forma, considerando

$$f(u) \approx \bar{f}(u) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u) \, dt, \quad (5.4)$$

realizando o somatório em j e somando um termo auxiliar, tem-se:

$$\sum_{j=1}^N \int_{I_j} \hat{p} \hat{q} \, dx = \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \bar{f}(u) \hat{q} \, dx + \sum_{j=1}^N (\hat{\lambda}_{j+1/2} \hat{q}(x_{j+1/2}^-) - \hat{\lambda}_{j-1/2} \hat{q}(x_{j-1/2}^+)).$$

Assim, a continuidade dos fluxos p_h e \hat{p}_h fica determinada por:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^N (p(x_{j+1/2}^+) - p(x_{j+1/2}^-)) \mu = 0 & \forall \mu \in \bar{\mathcal{M}}, \\ \sum_{j=1}^N (\hat{p}(x_{j+1/2}^+) - \hat{p}(x_{j+1/2}^-)) \hat{\mu} = 0 & \forall \hat{\mu} \in \bar{\mathcal{M}}. \end{cases}$$

A formulação DMH1 consiste no seguinte problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Dado } \nu, \text{ encontrar } (u, p, \hat{p}, \lambda, \hat{\lambda}) \in \tilde{\mathcal{V}} \times \mathcal{Q}^2 \times \bar{\mathcal{M}}^2 \text{ tal que} \\ \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \frac{du}{dt} v \, dx - \nu \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \frac{dp}{dx} v \, dx + \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \frac{d\hat{p}}{dx} v \, dx = 0 \quad \forall v \in \tilde{\mathcal{V}}, \\ \sum_{j=1}^N \int_{I_j} pq \, dx = - \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \bar{u} \frac{dq}{dx} \, dx + \sum_{j=1}^N (\lambda_{j+1/2} q(x_{j+1/2}^-) - \lambda_{j-1/2} q(x_{j-1/2}^+)) \quad \forall q \in \mathcal{Q}, \\ \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \hat{p} \hat{q} \, dx = \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \bar{f}(u) \hat{q} \, dx + \sum_{j=1}^N (\hat{\lambda}_{j+1/2} \hat{q}(x_{j+1/2}^-) - \hat{\lambda}_{j-1/2} \hat{q}(x_{j-1/2}^+)) \quad \forall \hat{q} \in \mathcal{Q}, \\ \sum_{j=1}^N (p(x_{j+1/2}^+) - p(x_{j+1/2}^-)) \mu = 0 \quad \forall \mu \in \bar{\mathcal{M}}, \\ \sum_{j=1}^N (\hat{p}(x_{j+1/2}^+) - \hat{p}(x_{j+1/2}^-)) \hat{\mu} = 0 \quad \forall \hat{\mu} \in \bar{\mathcal{M}}, \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{em } \Omega, \\ \text{com condições de contorno periódicas.} \end{array} \right. \quad (5.5)$$

Para a discretização espacial serão usados alguns espaços de dimensão finita. Eles obedecem a relação $\tilde{\mathcal{V}}_h \subset \tilde{\mathcal{V}}$, $\mathcal{Q}_h \subset \mathcal{Q}$ e $\bar{\mathcal{M}}_h \subset \bar{\mathcal{M}}$, e são definidos por:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{V}}_h &= \{v_h \in L^2(\Omega); v_h|_{I_j} \in \mathbb{P}^0(I_j), 1 \leq j \leq N\}, \\ \mathcal{Q}_h &= \{q_h \in X \subset L^2(\Omega); q_h|_{I_j} \in \mathbb{P}^1(I_j), 1 \leq j \leq N\}, \\ \bar{\mathcal{M}}_h &= \{\mu : \{x_{1/2}, x_{3/2}, \dots, x_{N+1/2}\} \rightarrow \mathbb{R} \mid \mu_{1/2} = \mu_{N+1/2}\},\end{aligned}$$

em que $\mathbb{P}^k(I_j)$ denota o espaço dos polinômios de grau até k , ($k \in \{0, 1\}$) definidos sobre o elemento I_j .

Portanto, definindo $u^n := u(\cdot, t^n)$ pode-se, a partir de uma discretização do tempo e da discretização no espaço de (5.5) apresentar a formulação DMH1 na forma discreta pelo seguinte problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Dados } \nu \text{ e } u^n, \text{ para cada } n = 0, \dots, M-1, \text{ encontrar } (u_h^{n+1}, p_h, \hat{p}_h, \lambda, \hat{\lambda}) \in \tilde{\mathcal{V}}_h \times \mathcal{Q}_h^2 \\ \times \bar{\mathcal{M}}_h^2 \text{ tal que} \\ \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t} v_h \, dx - \nu \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \frac{dp_h}{dx} v_h \, dx + \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \frac{d\hat{p}_h}{dx} v_h \, dx = 0 \quad \forall v_h \in \tilde{\mathcal{V}}_h, \\ \sum_{j=1}^N \int_{I_j} p_h q_h \, dx = - \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \bar{u}_h \frac{dq_h}{dx} \, dx \\ \quad + \sum_{j=1}^N (\lambda_{j+1/2} q_h(x_{j+1/2}^-) - \lambda_{j-1/2} q_h(x_{j-1/2}^+)) \quad \forall q_h \in \mathcal{Q}_h, \\ \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \hat{p}_h \hat{q}_h \, dx = \sum_{j=1}^N \int_{I_j} \bar{f}(u_h) \hat{q}_h \, dx \\ \quad + \sum_{j=1}^N (\hat{\lambda}_{j+1/2} \hat{q}_h(x_{j+1/2}^-) - \hat{\lambda}_{j-1/2} \hat{q}_h(x_{j-1/2}^+)) \quad \forall \hat{q}_h \in \mathcal{Q}_h, \\ \sum_{j=1}^N (p_h(x_{j+1/2}^+) - p_h(x_{j+1/2}^-)) \mu = 0 \quad \forall \mu \in \bar{\mathcal{M}}_h, \\ \sum_{j=1}^N (\hat{p}_h(x_{j+1/2}^+) - \hat{p}_h(x_{j+1/2}^-)) \hat{\mu} = 0 \quad \forall \hat{\mu} \in \bar{\mathcal{M}}_h, \\ u_h(x, 0) = u_{h0}(x) \quad \text{em } \Omega, \\ \text{com condições de contorno periódicas.} \end{array} \right. \quad (5.6)$$

Observação 5.2. Os termos que não estão com índice são avaliados em t^{n+1} , exceto \bar{u}_h e $\bar{f}(u_h)$, que são médias no tempo e foram definidas em (5.3) e (5.4), respectivamente.

5.2 ANÁLISE DA ESTABILIDADE

O que será feito, a partir de agora, é reescrever a Formulação (5.6) de uma maneira que possibilite a aplicação de resultados como, por exemplo, o Lema de Harten Modificado, enunciado e demonstrado mais adiante, para a verificação da propriedade TVD ou TVB do método. A estratégia para esta reescrita é tomar as funções de variação q_h e \hat{q}_h de

forma conveniente e considerar as funções p_h e \hat{p}_h como combinação linear de funções lineares, definidas a seguir.

Definição 5.3 (Funções lineares). Definiremos as funções lineares em cada elemento I_j , como:

$$\psi_{j-1/2} = \psi^{j-1/2}(x) := \frac{x_{j+1/2} - x}{h_j} \quad \text{e} \quad \psi_{j+1/2} = \psi^{j+1/2}(x) := \frac{x - x_{j-1/2}}{h_j}.$$

5.2.1 Aproximação da integração por trapézios

Em [55] e [30] são feitas algumas aproximações pelo método de integração do trapézio de termos envolvendo as funções de base dadas pela Definição 5.3, que apresentam os seguintes resultados:

$$\begin{cases} \int_{I_j} \psi^{j-1/2}(x) dx = \int_{I_j} \psi^{j+1/2}(x) dx = \frac{h_j}{2}; \\ \int_{I_j} \psi^{j-1/2}(x) \psi^{j+1/2}(x) dx = 0; \\ \int_{I_j} (\psi^{j-1/2}(x))^2 dx = \int_{I_j} (\psi^{j+1/2}(x))^2 dx = \frac{h_j}{2}. \end{cases} \quad (5.7)$$

A primeira aproximação, como se trata de uma função linear, não oferece problemas. Porém, as demais tratam-se de funções cujo o método utilizado apresenta soluções aproximadas muito diferentes das soluções exatas, que deveriam ser:

$$\begin{cases} \int_{I_j} \psi^{j-1/2}(x) \psi^{j+1/2}(x) dx = \frac{h_j}{6}; \\ \int_{I_j} (\psi^{j-1/2}(x))^2 dx = \int_{I_j} (\psi^{j+1/2}(x))^2 dx = \frac{h_j}{3}. \end{cases}$$

Essa forma de aproximação desacopla o sistema de uma maneira bastante favorável a análise, como comentado em [30]. Desta forma, seguimos os cálculos considerando os resultados apresentados em (5.7) e mais adiante apresentamos ideias que podem ser aplicados ao sistema sem estas aproximações.

Escrevendo $p_h = \gamma_{j-1/2} \psi_{j-1/2} + \gamma_{j+1/2} \psi_{j+1/2}$, da segunda equação de (5.6), tomando $q_h = \psi_{j-1/2} \chi_{I_j}(x)$, em que

$$\chi_{I_j}(x) = \begin{cases} 1, & x \in I_j, \\ 0, & x \notin I_j, \end{cases}$$

tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{I_j} (\gamma_{j-1/2} \psi_{j-1/2} + \gamma_{j+1/2} \psi_{j+1/2}) \psi_{j-1/2} dx = \\ - \int_{I_j} \bar{u}_h \frac{d\psi_{j-1/2}}{dx} dx + \lambda_{j+1/2}(x_{j+1/2}^-) \psi_{j-1/2} - \lambda_{j-1/2} \psi_{j-1/2}(x_{j-1/2}^+). \end{aligned}$$

Assim,

$$\gamma_{j-1/2} \int_{I_j} \psi_{j-1/2}^2 dx + \gamma_{j+1/2} \int_{I_j} \psi_{j+1/2} \psi_{j-1/2} dx = \frac{1}{h_j} \int_{I_j} \bar{u}_h dx - \lambda_{j-1/2}.$$

Desta forma, usando as definições de (5.7),

$$\gamma_{j-1/2} \frac{h_j}{2} = \bar{u}_j - \lambda_{j-1/2}. \quad (5.8)$$

A partir de um raciocínio análogo, considerando $q_h = \psi_{j+1/2} \chi_{I_j}(x)$, obtém-se

$$\gamma_{j+1/2} \frac{h_j}{2} = \lambda_{j+1/2} - \bar{u}_j. \quad (5.9)$$

Logo, de (5.8) e (5.9), temos:

$$\begin{cases} \gamma_{j-1/2} = \frac{2}{h_j} (\bar{u}_j - \lambda_{j-1/2}), \\ \gamma_{j+1/2} = \frac{2}{h_j} (\lambda_{j+1/2} - \bar{u}_j). \end{cases} \quad (5.10)$$

Usando a continuidade imposta pela quarta equação do sistema (5.6):

$$\begin{cases} \gamma_{j-1/2} = \frac{2}{h_j} (\bar{u}_j - \lambda_{j-1/2}), \\ \gamma_{j-1/2} = \frac{2}{h_{j-1}} (\lambda_{j-1/2} - \bar{u}_{j-1}). \end{cases} \quad (5.11)$$

De (5.11),

$$\begin{aligned} \frac{2}{h_j} (\bar{u}_j - \lambda_{j-1/2}) &= \frac{2}{h_{j-1}} (\lambda_{j-1/2} - \bar{u}_{j-1}), \\ \left(\frac{2}{h_{j-1}} + \frac{2}{h_j} \right) \lambda_{j-1/2} &= \frac{2}{h_{j-1}} \bar{u}_{j-1} + \frac{2}{h_j} \bar{u}_j. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Assim, pela terceira equação de (5.6), tomando $\hat{p}_h = \hat{\gamma}_{j-1/2} \psi_{j-1/2} + \hat{\gamma}_{j+1/2} \psi_{j+1/2}$ e $\hat{q}_h = \psi_{j-1/2} \chi_{I_j}(x)$, obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{I_j} (\hat{\gamma}_{j-1/2} \psi_{j-1/2} + \hat{\gamma}_{j+1/2} \psi_{j+1/2}) \psi_{j-1/2} dx &= \\ \int_{I_j} \bar{f}(u_h) \psi_{j-1/2} dx &+ (\hat{\lambda}_{j+1/2} \psi_{j-1/2} - \hat{\lambda}_{j-1/2} \psi_{j-1/2}). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Usando algumas manipulações algébricas, a Definição 5.3 e uma regra de quadratura trapezoidal na segunda integral de (5.13)

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_{j-1/2} \int_{I_j} \psi_{j-1/2}^2 dx + \hat{\gamma}_{j+1/2} \int_{I_j} \psi_{j+1/2} \psi_{j-1/2} dx &= \bar{f}(u_j) \frac{h_j}{2} - \hat{\lambda}_{j-1/2} \\ \hat{\gamma}_{j-1/2} \frac{h_j}{2} &= \bar{f}(u_j) \frac{h_j}{2} - \hat{\lambda}_{j-1/2} \\ \hat{\gamma}_{j-1/2} &= \bar{f}(u_j) - \frac{2}{h_j} \hat{\lambda}_{j-1/2}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Com um raciocínio análogo, considerando $\hat{q}_h = \psi_{j+1/2}\chi_{I_j}(x)$, é possível obter

$$\hat{\gamma}_{j+1/2} = \bar{f}(u_j) + \frac{2}{h_j}\hat{\lambda}_{j+1/2}. \quad (5.15)$$

Logo, de (5.14) e (5.15), usando a restrição de continuidade imposta pela quinta equação de (5.6), segue que

$$\begin{cases} \hat{\gamma}_{j-1/2} = \bar{f}(u_j) - \frac{2}{h_j}\hat{\lambda}_{j-1/2}, \\ \hat{\gamma}_{j-1/2} = \bar{f}(u_{j-1}) + \frac{2}{h_{j-1}}\hat{\lambda}_{j-1/2}. \end{cases} \quad (5.16)$$

De (5.16),

$$\begin{aligned} \bar{f}(u_j) - \frac{2}{h_j}\lambda_{j-1/2} &= \bar{f}(u_{j-1}) - \frac{2}{h_{j-1}}\hat{\lambda}_{j-1/2}, \\ \bar{f}(u_j) - \bar{f}(u_{j-1}) &= \left(\frac{2}{h_{j-1}} + \frac{2}{h_j}\right)\hat{\lambda}_{j-1/2}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Agora, como $p_h(x) = \gamma_{j-1/2}\psi^{j-1/2}(x) + \gamma_{j+1/2}\psi^{j+1/2}(x)$, por (5.10) e pela Definição 5.3, tem-se

$$\begin{aligned} p_h(x) &= \frac{2}{h_j}(\bar{u}_j - \lambda_{j-1/2})\left(\frac{x_{j+1/2} - x}{h_j}\right) + \frac{2}{h_j}(\lambda_{j+1/2} - \bar{u}_j)\left(\frac{x - x_{j-1/2}}{h_j}\right) \\ &= \frac{2}{h_j^2}(\bar{u}_j - \lambda_{j-1/2})(x_{j+1/2} - x) + \frac{2}{h_j^2}(\lambda_{j+1/2} - \bar{u}_j)(x - x_{j-1/2}). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Sendo assim, derivando ambos os membros de (5.18),

$$\begin{aligned} \frac{dp_h}{dx}(x) &= -\frac{2}{h_j^2}(\bar{u}_j - \lambda_{j-1/2}) + \frac{2}{h_j^2}(\lambda_{j+1/2} - \bar{u}_j) \\ &= 2\frac{\lambda_{j+1/2} - 2\bar{u}_j + \lambda_{j-1/2}}{h_j^2}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Agora, pelo fato de $\hat{p}_h(x) = \hat{\gamma}_{j-1/2}\psi^{j-1/2}(x) + \hat{\gamma}_{j+1/2}\psi^{j+1/2}(x)$, por (5.16) e pela Definição 5.3, tem-se

$$\hat{p}_h(x) = \left[\bar{f}(u_j) - \frac{2}{h_j}\hat{\lambda}_{j-1/2}\right]\left(\frac{x_{j+1/2} - x}{h_j}\right) + \left[\bar{f}(u_j) + \frac{2}{h_j}\hat{\lambda}_{j+1/2}\right]\left(\frac{x - x_{j-1/2}}{h_j}\right). \quad (5.20)$$

Assim, derivando ambos os lados de (5.20),

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{p}_h}{dx} &= -\frac{1}{h_j}\left[\bar{f}(u_j) - \frac{2}{h_j}\hat{\lambda}_{j-1/2}\right] + \frac{1}{h_j}\left[\bar{f}(u_j) + \frac{2}{h_j}\hat{\lambda}_{j+1/2}\right] \\ &= 2\frac{\hat{\lambda}_{j+1/2} + \hat{\lambda}_{j-1/2}}{h_j^2}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Retornando a primeira equação de (5.6), tomando $q_h \equiv \chi_{I_j}(x)$ e considerando os resultados apresentados em (5.19), (5.21), segue que

$$\int_{I_j} \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t} dx - \nu \int_{I_j} 2 \frac{\lambda_{j+1/2} - 2\bar{u}_j + \lambda_{j-1/2}}{h_j^2} dx + \int_{I_j} 2 \frac{\hat{\lambda}_{j+1/2} + \hat{\lambda}_{j-1/2}}{h_j^2} dx = 0.$$

Calculando as integrais,

$$\left(\frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t} \right) h_j - 2\nu \left(\frac{\lambda_{j+1/2} - 2\bar{u}_j + \lambda_{j-1/2}}{h_j^2} \right) h_j + 2 \left(\frac{\hat{\lambda}_{j+1/2} + \hat{\lambda}_{j-1/2}}{h_j^2} \right) h_j = 0.$$

Desta forma,

$$\frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t} - 2\nu \frac{\lambda_{j+1/2} - 2\bar{u}_j + \lambda_{j-1/2}}{h_j^2} + 2 \frac{\hat{\lambda}_{j+1/2} + \hat{\lambda}_{j-1/2}}{h_j^2} = 0. \quad (5.22)$$

Portanto, a partir dos resultados obtidos em (5.12), (5.17) e (5.22), a Formulação (5.6) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - 2\nu \frac{\lambda_{j+1/2} - 2\bar{u}_j + \lambda_{j-1/2}}{h_j^2} + 2 \frac{(\hat{\lambda}_{j+1/2} - \hat{\lambda}_{j-1/2})}{h_j^2} = 0, \\ \left(\frac{2}{h_{j-1}} - \frac{2}{h_j} \right) \lambda_{j-1/2} = \frac{2}{h_{j-1}} \bar{u}_{j-1} + \frac{2}{h_j} \bar{u}_j, \\ \left(\frac{2}{h_{j-1}} + \frac{2}{h_j} \right) \hat{\lambda}_{j-1/2} = \bar{f}(u_j) - \bar{f}(u_{j-1}). \end{cases} \quad (5.23)$$

Para efeitos de simplificação dos cálculos, será considerada uma partição do espaço uniforme, isto é, $h = \Delta x = \Delta x_j$, $j = \{1, \dots, N\}$. Desta forma, para todos $n = 0, \dots, M - 1$ e $j = 1, \dots, N$, pode-se escrever a Formulação (5.23) da seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - 2\nu \frac{\lambda_{j+1/2} - 2\bar{u}_j + \lambda_{j-1/2}}{h^2} + 2 \frac{(\hat{\lambda}_{j+1/2} - \hat{\lambda}_{j-1/2})}{h^2} = 0, \\ \frac{2}{h} \lambda_{j-1/2} = \frac{1}{h} \bar{u}_{j-1} + \frac{1}{h} \bar{u}_j, \\ \frac{4}{h} \hat{\lambda}_{j-1/2} = \bar{f}(u_j) - \bar{f}(u_{j-1}). \end{cases} \quad (5.24)$$

De (5.24), substituindo a segunda e a terceira equação na primeira, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{2\nu}{h^2} \left[\frac{1}{2} (\bar{u}_{j+1} + \bar{u}_j) - 2\bar{u}_j + \frac{1}{2} (\bar{u}_j + \bar{u}_{j-1}) \right] \\ + \frac{2}{h^2} \left[\frac{h}{4} (\bar{f}(u_{j+1}) - \bar{f}(u_j)) + \frac{h}{4} (\bar{f}(u_j) - \bar{f}(u_{j-1})) \right] = 0. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{\nu}{h^2} [\bar{u}_{j+1} - 2\bar{u}_j + \bar{u}_{j-1}] \\ + \frac{1}{2h} [\bar{f}(u_{j+1}) - \bar{f}(u_j) + \bar{f}(u_j) - \bar{f}(u_{j-1})] = 0. \end{aligned}$$

Agora, usando as definições dadas em (5.3) e (5.4), calculando as integrais das médias no tempo dada por \bar{u} e $\bar{f}(u)$, pela regra do trapézio, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} &= \frac{\nu}{2h^2} [u_{j+1}^{n+1} + u_{j+1}^n - 2u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_{j-1}^{n+1} + u_{j-1}^n] \\ &\quad - \frac{1}{4h} [f(u_{j+1}^{n+1}) + f(u_{j+1}^n) - f(u_j^{n+1}) - f(u_j^n) \\ &\quad + f(u_j^{n+1}) + f(u_j^n) - f(u_{j-1}^{n+1}) - f(u_{j-1}^n)] = 0. \end{aligned} \quad (5.25)$$

5.2.1.1 Análise da propriedade TVD

Nesta seção analisaremos a estabilidade do esquema numérico para o caso linear, isto é, o caso em que $f(u) = \alpha u$, com α constante. Sendo assim de (5.25), segue que para todos $n = 0, \dots, M-1$ e $j = 1, \dots, N$,

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} &= \frac{\nu}{2h^2} [u_{j+1}^{n+1} + u_{j+1}^n - 2u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_{j-1}^{n+1} + u_{j-1}^n] \\ &\quad - \frac{\alpha}{4h} [u_{j+1}^{n+1} + u_{j+1}^n - u_j^{n+1} - u_j^n + u_j^{n+1} + u_j^n - u_{j-1}^{n+1} - u_{j-1}^n] = 0. \end{aligned}$$

Mais ainda,

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} &= \left(\frac{\nu}{2h^2} - \frac{\alpha}{4h} \right) (u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}) - \left(\frac{\nu}{2h^2} + \frac{\alpha}{4h} \right) (u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) \\ &\quad + \left(\frac{\nu}{2h^2} - \frac{\alpha}{4h} \right) (u_{j+1}^n - u_j^n) - \left(\frac{\nu}{2h^2} + \frac{\alpha}{4h} \right) (u_j^n - u_{j-1}^n). \end{aligned} \quad (5.26)$$

O próximo teorema foi inspirado no Lema de Harten para os casos explícito e implícito, que podem ser vistos em [28, pág. 110] e [35], respectivamente. Ele distingue-se dos resultados expostos em [28, pág. 110] e [35], por apresentar, no lado direito, termos que depende do passo de tempo atual e anterior, isto é, u^{n+1} e u^n .

Definição 5.4. Seja \mathcal{T}_h uma partição de $\Omega = \mathbb{R}$ dada por $\{x_{j+1/2}\}_{j=-\infty}^{\infty}$ e pelos subintervalos $I_j = (x_{j-1/2}, x_{j+1/2})$ em que $j \in \mathbb{Z}$. A *variação total* de $u_h = u_h(t)$, denotada por $TV_{\infty}(u_h)$ do inglês *total variation*, é definida como

$$TV_{\infty}(u_h) = |u_h|_{TV(\Omega)} := \sum_{j=-\infty}^{\infty} |u_{j+1} - u_j| = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\Delta_+ u_j|.$$

Além disso, dados $t_1, t_2 \in (0, T)$ com $t_2 > t_1$ e $TV_{\infty}(u(t_2)) \leq TV_{\infty}(u(t_1))$ dizemos que a variação total é limitada, ou seja, que é TVD (*Total Variation Diminishing*).

Teorema 5.5 (Lema de Harten Modificado). *Suponha que um esquema numérico possa ser escrito como:*

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n + C_{j+1/2}(u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}) - D_{j-1/2}(u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) \\ &\quad + C_{j+1/2}(u_{j+1}^n - u_j^n) - D_{j-1/2}(u_j^n - u_{j-1}^n), \end{aligned} \quad (5.27)$$

em que $u_j^n = u(x_j, t^n)$, com x_j e t^n pontos da partição de Ω e $[0, T]$, respectivamente.

- (i) Seja $\Omega = \mathbb{R}$. Assim, teremos $\{u_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$, $\{C_{j+1/2}\}_{j=-\infty}^{\infty}$ e $\{D_{j-1/2}\}_{j=-\infty}^{\infty}$ reais. Se $C_{j+1/2}, D_{j-1/2} \geq 0$ e $C_{j+1/2} + D_{j+1/2} \leq 1$, para todo j , então o esquema é TVD.
- (ii) Seja $\Omega = (a, b)$. Assim, teremos $\{u_j\}_{j=1}^N$, $\{C_{j+1/2}\}_{j=1}^N$ e $\{D_{j-1/2}\}_{j=1}^N$ reais. Assuma que as condições de contorno são periódicas. Se $C_{j+1/2}, D_{j-1/2} \geq 0$ e $C_{j+1/2} + D_{j+1/2} \leq 1$, para $j \in \{1, \dots, N\}$, então o esquema é TVD.

Demonstração. (i) Para $\{u_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$, de (5.27),

$$\begin{aligned} u_{j+1}^{n+1} &= u_{j+1}^n + C_{j+3/2}(u_{j+2}^{n+1} - u_{j+1}^{n+1}) - D_{j+1/2}(u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}) \\ &\quad + C_{j+3/2}(u_{j+2}^n - u_{j+1}^n) - D_{j+1/2}(u_{j+1}^n - u_j^n). \end{aligned} \quad (5.28)$$

Subtraindo (5.27) de (5.28), obtém-se

$$\begin{aligned} u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1} &= u_{j+1}^n - u_j^n + C_{j+3/2}(u_{j+2}^{n+1} - u_{j+1}^{n+1}) - D_{j+1/2}(u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}) \\ &\quad + C_{j+3/2}(u_{j+2}^n - u_{j+1}^n) - D_{j+1/2}(u_{j+1}^n - u_j^n) \\ &\quad - C_{j+1/2}(u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}) + D_{j-1/2}(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) \\ &\quad - C_{j+1/2}(u_{j+1}^n - u_j^n) + D_{j-1/2}(u_j^n - u_{j-1}^n). \end{aligned} \quad (5.29)$$

Usando a definição de operadores de diferenças (Definição 3.19),

$$\begin{aligned} \Delta_+ u_j^{n+1} &= \Delta_+ u_j^n + C_{j+3/2} \Delta_+ u_{j+1}^{n+1} - D_{j+1/2} \Delta_+ u_j^{n+1} + C_{j+3/2} \Delta_+ u_{j+1}^n \\ &\quad - D_{j+1/2} \Delta_+ u_j^n - C_{j+1/2} \Delta_+ u_j^{n+1} + D_{j-1/2} \Delta_+ u_{j-1}^{n+1} \\ &\quad - C_{j+1/2} \Delta_+ u_j^n + D_{j-1/2} \Delta_+ u_{j-1}^n. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Então,

$$\begin{aligned} [1 + C_{j+1/2} + D_{j+1/2}] \Delta_+ u_j^{n+1} &= C_{j+3/2} \Delta_+ u_{j+1}^{n+1} + D_{j-1/2} \Delta_+ u_{j-1}^{n+1} \\ &\quad + (1 - C_{j+1/2} - D_{j+1/2}) \Delta_+ u_j^n \\ &\quad + C_{j+3/2} \Delta_+ u_{j+1}^n + D_{j-1/2} \Delta_+ u_{j-1}^n. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Aplicando a função valor absoluto, a desigualdade triangular e as hipóteses de que $C_{j+1/2} \geq 0, D_{j-1/2} \geq 1$ e $C_{j+1/2} + D_{j+1/2} \leq 1$ em (5.31), segue que

$$\begin{aligned} [1 + C_{j+1/2} + D_{j+1/2}] |\Delta_+ u_j^{n+1}| &\leq C_{j+3/2} |\Delta_+ u_{j+1}^{n+1}| + D_{j-1/2} |\Delta_+ u_{j-1}^{n+1}| \\ &\quad + (1 - C_{j+1/2} - D_{j+1/2}) |\Delta_+ u_j^n| \\ &\quad + C_{j+3/2} |\Delta_+ u_{j+1}^n| + D_{j-1/2} |\Delta_+ u_{j-1}^n|, \end{aligned} \quad (5.32)$$

o que implica em

$$\begin{aligned} |\Delta_+ u_j^{n+1}| &\leq |\Delta_+ u_j^n| + C_{j+3/2} |\Delta_+ u_{j+1}^{n+1}| + D_{j-1/2} |\Delta_+ u_{j-1}^{n+1}| \\ &\quad - C_{j+1/2} |\Delta_+ u_j^{n+1}| - D_{j+1/2} |\Delta_+ u_j^{n+1}| \\ &\quad + C_{j+3/2} |\Delta_+ u_{j+1}^n| + D_{j-1/2} |\Delta_+ u_{j-1}^n| \\ &\quad - C_{j+1/2} |\Delta_+ u_j^n| - D_{j+1/2} |\Delta_+ u_j^n|. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Logo, realizando o somatório em j de $-\infty$ até ∞ , todos os termos do lado direito da desigualdade (5.33) se anulam, exceto o primeiro, o que resulta em

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\Delta_+ u_j^{n+1}| \leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\Delta_+ u_j^n|.$$

Portanto,

$$TV_\infty(u^{n+1}) \leq TV_\infty(u^n)$$

e o esquema (5.27) é TVD.

(ii) Para $\{u_j\}_{j=1}^N$, perceba que as expressões dadas por (5.27), (5.28) e (5.29) continuam válidas, para $j = 1, \dots, N$, usando a hipótese de condições de contorno periódicas:

$$\xi_j := \begin{cases} \xi_{j+N}, & j \leq 0 \\ \xi_{j-N}, & j > N \end{cases},$$

para $\xi_j = u_j^n, u_j^{n+1}, C$ ou D .

De maneira análoga ao que foi feito de (5.30) a (5.32), é possível mostrar que (5.33) é satisfeita para $j = 1, \dots, N$. Realizando o somatório em j de 1 até N , tem-se

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N |\Delta_+ u_j^{n+1}| &\leq \sum_{j=1}^N |\Delta_+ u_j^n| + D_{1/2} |\Delta_+ u_0^{n+1}| - C_{3/2} |\Delta_+ u_1^{n+1}| \\ &\quad + C_{N+3/2} |\Delta_+ u_{N+1}^{n+1}| - D_{N+1/2} |\Delta_+ u_N^{n+1}| \\ &\quad + D_{1/2} |\Delta_+ u_0^n| - C_{3/2} |\Delta_+ u_1^n| \\ &\quad + C_{N+3/2} |\Delta_+ u_{N+1}^n| - D_{N+1/2} |\Delta_+ u_N^n|. \end{aligned}$$

Usando a periodicidade da condição de contorno, tem-se

$$\sum_{j=1}^N |\Delta_+ u_j^{n+1}| \leq \sum_{j=1}^N |\Delta_+ u_j^n|.$$

Portanto, pela definição de variação total,

$$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n)$$

e o esquema (5.27) com $\{u_j\}_{j=1}^N$ é TVD. □

Teorema 5.6. *Considere o esquema apresentado em (5.26) com condições de contorno periódicas. Se*

$$h \leq \frac{2\nu}{\alpha} \quad e \quad \Delta t \leq \frac{h^2}{\nu}, \quad (5.34)$$

o que implica em

$$\Delta t \leq \frac{4\nu}{\alpha^2},$$

então o esquema é TVD.

Demonstração. De (5.26), temos

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} = u_j^n &+ \left[\frac{\Delta t(2\nu - \alpha h)}{4h^2} \right] (u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}) - \left[\frac{\Delta t(2\nu + \alpha h)}{4h^2} \right] (u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) \\ &+ \left[\frac{\Delta t(2\nu - \alpha h)}{4h^2} \right] (u_{j+1}^n - u_j^n) - \left[\frac{\Delta t(2\nu + \alpha h)}{4h^2} \right] (u_j^n - u_{j-1}^n). \end{aligned}$$

Definam os valores de $C_{j+1/2}$ e $D_{j-1/2}$, como:

$$C_{j+1/2} := \frac{\Delta t(2\nu - \alpha h)}{4h^2} \text{ e } D_{j-1/2} := \frac{\Delta t(2\nu + \alpha h)}{4h^2}.$$

Dividiremos a prova em dois casos; primeiro para $\alpha > 0$ e depois $\alpha < 0$.

No caso $\alpha > 0$ é imediato que $D_{j-1/2} \geq 0$. Além disso, pela primeira desigualdade de (5.34),

$$h \leq \frac{2\nu}{\alpha} \Rightarrow 2\nu - \alpha h \geq 0 \Rightarrow C_{j+1/2} \geq 0.$$

Pela segunda desigualdade de (5.34) temos

$$\Delta t \leq \frac{h^2}{\nu} \Rightarrow \frac{4\nu\Delta t}{4h^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{\Delta t(2\nu - \alpha h)}{4h^2} + \frac{\Delta t(2\nu + \alpha h)}{4h^2} \leq 1.$$

Desta forma, $C_{j+1/2} + D_{j-1/2} \leq 1$ e como $D_{j-1/2} = D_{j+1/2}$, segue que $C_{j+1/2} + D_{j+1/2} \leq 1$.

Para o caso em que $\alpha < 0$, de maneira completamente análoga, pode-se mostrar que $C_{j+1/2} \geq 0$, $D_{j-1/2} \geq 0$ e $C_{j+1/2} + D_{j+1/2} \leq 1$, portanto, pelo Teorema 5.5 o esquema (5.26) é TVD. \square

5.2.2 Caso sem as aproximações

A partir da Definição 5.3, tem-se:

$$\begin{cases} \int_{I_j} \psi^{j-1/2}(x) dx = \int_{I_j} \psi^{j+1/2}(x) dx = \frac{h_j}{2}; \\ \int_{I_j} \psi^{j-1/2}(x)\psi^{j+1/2}(x) dx = \frac{h_j}{6}; \\ \int_{I_j} (\psi^{j-1/2}(x))^2 dx = \int_{I_j} (\psi^{j+1/2}(x))^2 dx = \frac{h_j}{3}. \end{cases} \quad (5.35)$$

Considerando $p_h = \gamma_{j-1/2}\psi_{j-1/2} + \gamma_{j+1/2}\psi_{j+1/2}$, da segunda equação de (5.6), tomando $q_h = \psi_{j-1/2}\chi_{I_j}(x)$, em que

$$\chi_{I_j}(x) = \begin{cases} 1, & x \in I_j, \\ 0, & x \notin I_j, \end{cases}$$

tem-se:

$$\int_{I_j} (\gamma_{j-1/2}\psi_{j-1/2} + \gamma_{j+1/2}\psi_{j+1/2})\psi_{j-1/2} dx = - \int_{I_j} \bar{u}_h \frac{d\psi_{j-1/2}}{dx} dx + \lambda_{j+1/2}(x_{j+1/2}^-)\psi_{j-1/2} - \lambda_{j-1/2}\psi_{j-1/2}(x_{j-1/2}^+).$$

Sendo assim,

$$\gamma_{j-1/2} \int_{I_j} \psi_{j-1/2}^2 dx + \gamma_{j+1/2} \int_{I_j} \psi_{j+1/2}\psi_{j-1/2} dx = \frac{1}{h_j} \int_{I_j} \bar{u}_h dx - \lambda_{j-1/2}. \quad (5.36)$$

Por (5.35),

$$\gamma_{j-1/2} \frac{h_j}{3} + \gamma_{j+1/2} \frac{h_j}{6} = \bar{u}_j - \lambda_{j-1/2}. \quad (5.37)$$

A partir de um raciocínio análogo, considerando $q_h = \psi_{j+1/2}\chi_{I_j}(x)$, obtém-se

$$\gamma_{j-1/2} \frac{h_j}{6} + \gamma_{j+1/2} \frac{h_j}{3} = \lambda_{j+1/2} - \bar{u}_j. \quad (5.38)$$

Logo, de (5.36) e (5.37),

$$\begin{cases} \gamma_{j+1/2} = \frac{4}{h_j}\lambda_{j+1/2} + \frac{2}{h_j}\lambda_{j-1/2} - \frac{6}{h_j}\bar{u}_j, \\ \gamma_{j-1/2} = -\frac{2}{h_j}\lambda_{j+1/2} - \frac{4}{h_j}\lambda_{j-1/2} + \frac{6}{h_j}\bar{u}_j. \end{cases} \quad (5.39)$$

Usando a continuidade imposta a p pela quarta equação do sistema (5.6):

$$\begin{cases} \gamma_{j-1/2} = \frac{4}{h_{j-1}}\lambda_{j-1/2} + \frac{2}{h_{j-1}}\lambda_{j-3/2} - \frac{6}{h_{j-1}}\bar{u}_{j-1}, \\ \gamma_{j-1/2} = -\frac{2}{h_j}\lambda_{j+1/2} - \frac{4}{h_j}\lambda_{j-1/2} + \frac{6}{h_j}\bar{u}_j, \end{cases}$$

o que resulta em,

$$\frac{2}{h_{j-1}}\lambda_{j-3/2} + \left(\frac{2}{h_j} + \frac{4}{h_{j-1}}\right)\lambda_{j-1/2} + \frac{2}{h_j}\lambda_{j+1/2} = \frac{6}{h_j}\bar{u}_j + \frac{6}{h_{j-1}}\bar{u}_{j-1}. \quad (5.40)$$

Agora, pela terceira equação de (5.6), tomando $\hat{p}_h = \hat{\gamma}_{j-1/2}\psi_{j-1/2} + \hat{\gamma}_{j+1/2}\psi_{j+1/2}$ e $\hat{q}_h = \psi_{j-1/2}\chi_{I_j}(x)$,

$$\int_{I_j} (\hat{\gamma}_{j-1/2}\psi_{j-1/2} + \hat{\gamma}_{j+1/2}\psi_{j+1/2})\psi_{j-1/2} dx = \int_{I_j} \bar{f}(u_h)\psi_{j-1/2} dx + (\hat{\lambda}_{j+1/2}\psi_{j-1/2} - \hat{\lambda}_{j-1/2}\psi_{j-1/2}). \quad (5.41)$$

Resolvendo a segunda integral de (5.41) e usando a Definição 5.3,

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_{j-1/2} \int_{I_j} \psi_{j-1/2}^2 dx + \hat{\gamma}_{j+1/2} \int_{I_j} \psi_{j+1/2}\psi_{j-1/2} dx &= \bar{f}(u_j) \frac{h_j}{2} - \hat{\lambda}_{j-1/2} \\ \hat{\gamma}_{j-1/2} \frac{h_j}{3} + \hat{\gamma}_{j+1/2} \frac{h_j}{6} &= \bar{f}(u_j) \frac{h_j}{2} - \hat{\lambda}_{j-1/2}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Com um raciocínio análogo, considerando $\hat{q}_h = \psi_{j+1/2}\chi_{I_j}(x)$, é possível obter

$$\hat{\gamma}_{j-1/2}\frac{h_j}{6} + \hat{\gamma}_{j+1/2}\frac{h_j}{3} = \bar{f}(u_j)\frac{h_j}{2} + \hat{\lambda}_{j+1/2}. \quad (5.43)$$

De (5.42) e (5.43), segue que

$$\begin{cases} \hat{\gamma}_{j+1/2} = \bar{f}(u_j) + \frac{2}{h_j}\hat{\lambda}_{j-1/2} + \frac{4}{h_j}\hat{\lambda}_{j+1/2}, \\ \hat{\gamma}_{j-1/2} = \bar{f}(u_j) - \frac{4}{h_j}\hat{\lambda}_{j-1/2} - \frac{2}{h_j}\hat{\lambda}_{j+1/2}. \end{cases} \quad (5.44)$$

Usando a continuidade imposta a \hat{p} pela quinta equação do sistema (5.6):

$$\begin{cases} \hat{\gamma}_{j-1/2} = \bar{f}(u_{j-1}) + \frac{2}{h_{j-1}}\hat{\lambda}_{j-3/2} + \frac{4}{h_{j-1}}\hat{\lambda}_{j-1/2}, \\ \hat{\gamma}_{j-1/2} = \bar{f}(u_j) - \frac{4}{h_j}\hat{\lambda}_{j-1/2} - \frac{2}{h_j}\hat{\lambda}_{j+1/2}. \end{cases}$$

Assim, obtém-se:

$$\frac{2}{h_{j-1}}\hat{\lambda}_{j-1/2} + \left(\frac{4}{h_j} + \frac{4}{h_{j-1}}\right)\hat{\lambda}_{j-1/2} + \frac{2}{h_j}\hat{\lambda}_{j+1/2} = \bar{f}(u_j) - \bar{f}(u_{j-1}). \quad (5.45)$$

Como $p_h = \gamma_{j-1/2}\psi_{j-1/2} + \gamma_{j+1/2}\psi_{j+1/2}$ e $\hat{p}_h = \hat{\gamma}_{j-1/2}\psi_{j-1/2} + \hat{\gamma}_{j+1/2}\psi_{j+1/2}$, pela Definição 5.3 e os resultados apresentados em (5.39), (5.44), tem-se

$$p_h(x) = \frac{\lambda_{j+1/2} - \lambda_{j-1/2}}{h_j} + 6\frac{\lambda_{j+1/2} - 2\bar{u}_j + \lambda_{j-1/2}}{h_j^2}(x - x_j), \quad (5.46)$$

$$\hat{p}_h(x) = \bar{f}(u_j) + \frac{\hat{\lambda}_{j+1/2} - \hat{\lambda}_{j-1/2}}{h_j} + 6\frac{\hat{\lambda}_{j+1/2} + \hat{\lambda}_{j-1/2}}{h_j^2}(x - x_j). \quad (5.47)$$

Derivando ambos os lados de (5.46), (5.47), substituindo na primeira equação de (5.6) e tomando $q_h \equiv \chi_{I_j}(x)$, segue que

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - 6\nu\frac{\lambda_{j+1/2} - 2\bar{u}_j + \lambda_{j-1/2}}{h_j^2} + 6\frac{(\hat{\lambda}_{j+1/2} - \hat{\lambda}_{j-1/2})}{h_j^2} = 0. \quad (5.48)$$

Portanto, por (5.48), (5.40) e (5.45), tem-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - 6\nu\frac{\lambda_{j+1/2} - 2\bar{u}_j + \lambda_{j-1/2}}{h_j^2} + 6\frac{(\hat{\lambda}_{j+1/2} - \hat{\lambda}_{j-1/2})}{h_j^2} = 0, \\ \frac{2}{h_{j-1}}\lambda_{j-3/2} + \left(\frac{2}{h_j} + \frac{4}{h_{j-1}}\right)\lambda_{j-1/2} + \frac{2}{h_j}\lambda_{j+1/2} = \frac{6}{h_j}\bar{u}_j + \frac{6}{h_{j-1}}\bar{u}_{j-1}, \\ \frac{2}{h_{j-1}}\hat{\lambda}_{j-3/2} + \left(\frac{4}{h_j} + \frac{4}{h_{j-1}}\right)\hat{\lambda}_{j-1/2} + \frac{2}{h_j}\hat{\lambda}_{j+1/2} = \bar{f}(u_j) - \bar{f}(u_{j-1}). \end{cases} \quad (5.49)$$

5.2.2.1 Ideias para o estudo da propriedade TVB

Para a apresentação das ideias que possivelmente podem ser utilizadas na análise da estabilidade do esquema (5.49), não iremos considerar as aproximações feitas em (5.3) e (5.4), ou seja, ao invés de tomar a média no tempo \bar{u} , $\bar{f}(u)$, vamos considerar u e $f(u)$. Essa alteração implica na formulação (5.6) as mesmas igualdades trocando \bar{u}_h por u_h^{n+1} e $\bar{f}(u_h)$ por $f(u_h^{n+1})$. Todos os cálculos realizados na Seção 5.2.2 continuam válidos quando feita a mesma alteração anterior.

Considerando a partição espacial como uniforme, isto é, $h = \Delta x = \Delta x_j$, $j = \{1, \dots, N\}$, e as equações da Formulação (5.49), podemos escrever o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= \left(\frac{h^2}{h^2 + 12\nu\Delta t} \right) u_j^n + \left(\frac{6\nu\Delta t}{h^2 + 12\nu\Delta t} \right) \lambda_{j+1/2}^{n+1} + \left(\frac{6\nu\Delta t}{h^2 + 12\nu\Delta t} \right) \lambda_{j-1/2}^{n+1} \\ &\quad - \left(\frac{6\Delta t}{h^2 + 12\nu\Delta t} \right) \hat{\lambda}_{j+1/2}^{n+1} - \left(\frac{6\Delta t}{h^2 + 12\nu\Delta t} \right) \hat{\lambda}_{j-1/2}^{n+1}, \end{aligned} \quad (5.50)$$

$$\begin{aligned} u_{j-1}^{n+1} &= \left(\frac{h^2}{h^2 + 12\nu\Delta t} \right) u_{j-1}^n + \left(\frac{6\nu\Delta t}{h^2 + 12\nu\Delta t} \right) \lambda_{j-1/2}^{n+1} + \left(\frac{6\nu\Delta t}{h^2 + 12\nu\Delta t} \right) \lambda_{j-3/2}^{n+1} \\ &\quad - \left(\frac{6\Delta t}{h^2 + 12\nu\Delta t} \right) \hat{\lambda}_{j-1/2}^{n+1} - \left(\frac{6\Delta t}{h^2 + 12\nu\Delta t} \right) \hat{\lambda}_{j-3/2}^{n+1}, \end{aligned} \quad (5.51)$$

$$u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1} = \frac{1}{3} \lambda_{j-3/2}^{n+1} + \frac{4}{3} \lambda_{j-1/2}^{n+1} + \frac{1}{3} \lambda_{j+1/2}^{n+1}, \quad (5.52)$$

$$u_j^n + u_{j-1}^n = \frac{1}{3} \lambda_{j-3/2}^n + \frac{4}{3} \lambda_{j-1/2}^n + \frac{1}{3} \lambda_{j+1/2}^n, \quad (5.53)$$

$$u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1} = \left(\frac{2}{\alpha h} \right) \hat{\lambda}_{j-3/2}^{n+1} + \left(\frac{8}{\alpha h} \right) \hat{\lambda}_{j-1/2}^{n+1} + \left(\frac{2}{\alpha h} \right) \hat{\lambda}_{j+1/2}^{n+1}, \quad (5.54)$$

$$u_j^n - u_{j-1}^n = \left(\frac{2}{\alpha h} \right) \hat{\lambda}_{j-3/2}^n + \left(\frac{8}{\alpha h} \right) \hat{\lambda}_{j-1/2}^n + \left(\frac{2}{\alpha h} \right) \hat{\lambda}_{j+1/2}^n. \quad (5.55)$$

Iremos estudar o caso em que $f(u) = \alpha u$, com α constante.

Subtraindo (5.51) de (5.50) é possível obter:

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1} &= \left(\frac{h^2}{h^2 + 12\nu\Delta t} \right) (u_j^n - u_{j-1}^n) + \left(\frac{6\nu\Delta t}{h^2 + 12\nu\Delta t} \right) (\lambda_{j+1/2}^{n+1} - \lambda_{j-3/2}^{n+1}) \\ &\quad - \left(\frac{6\Delta t}{h^2 + 12\nu\Delta t} \right) (\hat{\lambda}_{j+1/2}^{n+1} - \hat{\lambda}_{j-3/2}^{n+1}). \end{aligned} \quad (5.56)$$

Assim, aplicando a função valor absoluto em ambos os lados de (5.56) e usando a desigualdade triangular,

$$\begin{aligned} |u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}| &\leq \left(\frac{h^2}{h^2 + 12\nu\Delta t} \right) |u_j^n - u_{j-1}^n| + \left(\frac{6\nu\Delta t}{h^2 + 12\nu\Delta t} \right) |\lambda_{j+1/2}^{n+1} - \lambda_{j-3/2}^{n+1}| \\ &\quad + \left(\frac{6\Delta t}{h^2 + 12\nu\Delta t} \right) |\hat{\lambda}_{j+1/2}^{n+1} - \hat{\lambda}_{j-3/2}^{n+1}|. \end{aligned}$$

Realizando o somatório em j de 1 até N ,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N |u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}| &\leq \left(\frac{h^2}{h^2 + 12\nu\Delta t} \right) \sum_{j=1}^N |u_j^n - u_{j-1}^n| + \left(\frac{6\nu\Delta t}{h^2 + 12\nu\Delta t} \right) \sum_{j=1}^N |\lambda_{j+1/2}^{n+1} - \lambda_{j-3/2}^{n+1}| \\ &\quad + \left(\frac{6\Delta t}{h^2 + 12\nu\Delta t} \right) \sum_{j=1}^N |\hat{\lambda}_{j+1/2}^{n+1} - \hat{\lambda}_{j-3/2}^{n+1}|. \end{aligned}$$

Como $12\nu\Delta t > 0$, segue que,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N |u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}| &\leq \sum_{j=1}^N |u_j^n - u_{j-1}^n| + \left(\frac{6\nu\Delta t}{h^2 + 12\nu\Delta t} \right) \sum_{j=1}^N |\lambda_{j+1/2}^{n+1} - \lambda_{j-3/2}^{n+1}| \\ &\quad + \left(\frac{6\Delta t}{h^2 + 12\nu\Delta t} \right) \sum_{j=1}^N |\hat{\lambda}_{j+1/2}^{n+1} - \hat{\lambda}_{j-3/2}^{n+1}|. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Logo, de (5.57), se conseguirmos mostrar que as variações totais em λ e $\hat{\lambda}$ são limitadas, então:

$$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n) + K_1 \quad \Rightarrow \quad TV(u^{n+1}) \leq K, \quad (5.58)$$

em que K_1, K são constantes, ou seja, o esquema (5.49) é TVB.

Portanto, vamos apresentar as ideias que podem ser utilizadas para mostrar que tais variações são limitadas. Para isso, perceba que de (5.56), usando (5.54) e (5.55),

$$\begin{aligned} (h^2 + 12\nu\Delta t - 3\alpha h\Delta t)\hat{\lambda}_{j-3/2}^{n+1} + (4h^2 + 48\nu\Delta t)\hat{\lambda}_{j-1/2}^{n+1} + (h^2 + 12\nu\Delta t + 3\alpha h\Delta t)\hat{\lambda}_{j+1/2}^{n+1} \\ + (3\alpha h\Delta t)\lambda_{j-3/2}^{n+1} - (3\alpha h\Delta t)\lambda_{j+1/2}^{n+1} = (h^2)\hat{\lambda}_{j-3/2}^n + (4h^2)\hat{\lambda}_{j-1/2}^n + (h^2)\hat{\lambda}_{j+1/2}^n. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Agora, somando (5.50), (5.51) e usando (5.52), (5.53), segue que

$$\begin{aligned} (h^2 + 6\nu\Delta t)\lambda_{j-3/2}^{n+1} + (4h^2 + 36\nu\Delta t)\lambda_{j-1/2}^{n+1} + (h^2 + 6\nu\Delta t)\lambda_{j+1/2}^{n+1} + (6\Delta t)\hat{\lambda}_{j-3/2}^{n+1} \\ + (12\Delta t)\hat{\lambda}_{j-1/2}^{n+1} + (6\Delta t)\hat{\lambda}_{j+1/2}^{n+1} = (h^2)\lambda_{j-3/2}^n + (4h^2)\lambda_{j-1/2}^n + (h^2)\lambda_{j+1/2}^n. \end{aligned} \quad (5.60)$$

Logo, de (5.59) e (5.60), podemos escrever a seguinte equação matricial:

$$\mathbf{A}\Lambda_{j-3/2}^{n+1} + \mathbf{B}\Lambda_{j-1/2}^{n+1} + \mathbf{C}\Lambda_{j+1/2}^{n+1} = \mathbf{D}\Lambda_{j-3/2}^n + \mathbf{E}\Lambda_{j-1/2}^n + \mathbf{F}\Lambda_{j+1/2}^n, \quad (5.61)$$

em que

$$\Lambda_{j-3/2}^{n+1} = \begin{bmatrix} \hat{\lambda}_{j-3/2}^{n+1} \\ \lambda_{j-3/2}^{n+1} \end{bmatrix}, \quad \Lambda_{j-1/2}^{n+1} = \begin{bmatrix} \hat{\lambda}_{j-1/2}^{n+1} \\ \lambda_{j-1/2}^{n+1} \end{bmatrix}, \quad \Lambda_{j+1/2}^{n+1} = \begin{bmatrix} \hat{\lambda}_{j+1/2}^{n+1} \\ \lambda_{j+1/2}^{n+1} \end{bmatrix},$$

$$\Lambda_{j-3/2}^n = \begin{bmatrix} \hat{\lambda}_{j-3/2}^n \\ \lambda_{j-3/2}^n \end{bmatrix}, \quad \Lambda_{j-1/2}^n = \begin{bmatrix} \hat{\lambda}_{j-1/2}^n \\ \lambda_{j-1/2}^n \end{bmatrix}, \quad \Lambda_{j+1/2}^n = \begin{bmatrix} \hat{\lambda}_{j+1/2}^n \\ \lambda_{j+1/2}^n \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} h^2 + 12\nu\Delta t - 3\alpha h\Delta t & 3\alpha h\Delta t \\ 6\Delta t & h^2 + 6\nu\Delta t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4h^2 + 48\nu\Delta t & 0 \\ 12\Delta t & 4h^2 + 36\nu\Delta t \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} h^2 + 12\nu\Delta t + 3\alpha h\Delta t & -3\alpha h\Delta t \\ 6\Delta t & h^2 + 6\nu\Delta t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} h^2 & 0 \\ 0 & h^2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 4h^2 & 0 \\ 0 & 4h^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} h^2 & 0 \\ 0 & h^2 \end{bmatrix}.$$

Note que podemos escrever $\mathbf{B} = -\mathbf{A} + \mathbf{X} - \mathbf{C}$ e $\mathbf{E} = -\mathbf{D} + \mathbf{Y} - \mathbf{F}$, com

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 6h^2 + 72\nu\Delta t & 0 \\ 24\Delta t & 6h^2 + 48\nu\Delta t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 6h^2 & 0 \\ 0 & 6h^2 \end{bmatrix}.$$

Logo, por (5.61),

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}(\Lambda_{j-3/2}^{n+1} - \Lambda_{j-1/2}^{n+1}) + \mathbf{X}\Lambda_{j-1/2}^{n+1} - \mathbf{C}(\Lambda_{j-1/2}^{n+1} - \Lambda_{j+1/2}^{n+1}) = \\ & \mathbf{D}(\Lambda_{j-3/2}^n - \Lambda_{j-1/2}^n) + \mathbf{Y}\Lambda_{j-1/2}^n - \mathbf{F}(\Lambda_{j-1/2}^n - \Lambda_{j+1/2}^n), \end{aligned}$$

o que implica em,

$$\begin{aligned} \mathbf{X}\Lambda_{j-1/2}^{n+1} &= \mathbf{Y}\Lambda_{j-1/2}^n - \mathbf{C}(\Lambda_{j+1/2}^{n+1} - \Lambda_{j-1/2}^{n+1}) + \mathbf{A}(\Lambda_{j-1/2}^{n+1} - \Lambda_{j-3/2}^{n+1}) \\ &+ \mathbf{F}(\Lambda_{j+1/2}^n - \Lambda_{j-1/2}^n) - \mathbf{D}(\Lambda_{j-1/2}^n - \Lambda_{j-3/2}^n). \end{aligned} \quad (5.62)$$

Como $\det(\mathbf{Y}) = 36h^4 > 0$, existe \mathbf{Y}^{-1} . Sendo assim, multiplicando a esquerda de ambos os lados de (5.62) por \mathbf{Y}^{-1} ,

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{X}\Lambda_{j-1/2}^{n+1} &= \Lambda_{j-1/2}^n - \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{C}(\Lambda_{j+1/2}^{n+1} - \Lambda_{j-1/2}^{n+1}) + \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{A}(\Lambda_{j-1/2}^{n+1} - \Lambda_{j-3/2}^{n+1}) \\ &+ \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{F}(\Lambda_{j+1/2}^n - \Lambda_{j-1/2}^n) - \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{D}(\Lambda_{j-1/2}^n - \Lambda_{j-3/2}^n). \end{aligned}$$

A definição a seguir estabelece a variação total de vetores em \mathbb{R}^2 .

Definição 5.7. Seja \mathcal{T}_h a partição de Ω dada pela Definição 3.2. Considerando a definição do espaço $\bar{\mathcal{M}}_h$, a variação total de $\Lambda \in \mathbb{R}^2$, denotada por $TV_{\mathbb{R}^2}(\Lambda)$, é definida da seguinte forma:

$$TV_{\mathbb{R}^2}(\Lambda) := \sum_{j=1}^N \|\Lambda_{j+1/2} - \Lambda_{j-1/2}\|,$$

em que $\|\cdot\|$ é uma norma em \mathbb{R}^2 .

A partir da Definição 5.7, a ideia é usar os argumentos do Lema de Harten Modificado (Teorema 5.5) em uma versão matricial para mostrar que

$$TV_{\mathbb{R}^2}(\Lambda^{n+1}) \leq TV_{\mathbb{R}^2}(\Lambda^n).$$

Conseguindo mostrar, esse resultado a variação total em Λ estaria limitada, o que implicaria nas variações em λ e $\hat{\lambda}$ serem limitadas e, portanto, por (5.58) o método DMH1 seria TVB.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foram apresentadas a estrutura geral e as propriedades de estabilidade de um método SSP-RKDG usado para resolver EDPs hiperbólicas, escalares, escritas na forma conservativa. Baseados em [16], [19], [25] e [43], apresentamos também alguns resultados de convergência. A análise desenvolvida foi dividida em três etapas. Na primeira, investigamos as propriedades de estabilidade na norma L^2 e convergência nas normas L^2 (caso linear), L^1 e na seminorma TV (caso não-linear), para uma discretização espacial feita pelo método DG. Na segunda, ao agregar um esquema SSP-RK para resolver o sistema de EDOs resultante da discretização do espaço, exploramos novamente as mesmas propriedades, porém novos ingredientes foram levados em consideração, por exemplo, o conceito de preservação da estabilidade e a condição CFL. Nesta etapa as análises ficaram restritas a alguns casos particulares. Na terceira e última, incorporam-se às formulações limitadores de fluxo e a estabilidade foi investigada por meio de resultados de TVD, TVDM e TVBM, de uma forma geral.

A classe dos esquemas DG usada para a discretização do espaço apresentada no Capítulo 3 permitiu a construção de esquemas semidiscretos baseados em espaços polinomiais locais de grau qualquer. O conjunto de métodos explícitos e estáveis SSP-RK escolhido para resolver o sistema de EDOs resultante da discretização espacial relacionou-se diretamente com a estabilidade espaço-tempo do SSP-RKDG. A combinação deles dá indícios de que o método possa ser altamente paralelizável, capaz de lidar facilmente com estratégias de adaptabilidade da malha e possível de atingir alta ordem de aproximação. Algumas limitações também foram notadas, por exemplo, a necessidade de uma condição CFL mais restritiva que a de esquemas clássicos e da implementação de limitadores de fluxo para obter estabilidade em ordens superiores.

Baseados nas ideias de [25], usamos o Lema de Harten e exibimos uma demonstração da propriedade TVDM para o método SSP-RKDG com o limitador de fluxo. Evidenciamos um resultado, apresentado em [25], com condições que, apesar de causarem a perda da propriedade TVDM, mantêm a TVBM e, portanto, a estabilidade. Além disso, usando as ideias de [25], exibimos provas para dois resultados que mostram a manutenção da precisão do método SSP-RKDG em regiões suaves longe das descontinuidades, quando usados os limitadores de fluxo construídos a partir das funções *minmod* e *minmod modificada*.

Usando as ideias desenvolvidas para estudar o método SSP-RKDG, demos início ao estudo das propriedades TVD e TVB para um método de elementos finitos misto e híbrido. Conseguimos mostrar a propriedade TVD para um caso específico, usando algumas aproximações propostas em [55] e [30]. Porém, vimos que as formas de aproximar os termos integrais não são viáveis. Propomos, então, alguns caminhos que podem ser seguidos

para mostrar a propriedade TVB do método quando desconsideradas estas aproximações realizadas pelos autores.

Em síntese, o SSP-RKDG com os limitadores de fluxo possui características interessantes, como estabilidade e convergência para a solução entrópica, sem a produção de oscilações espúrias e com boa resolução de gradientes abruptos. Em nosso ponto de vista o método pode ser aplicado a alguns dos modelos de injeção de espumas para a recuperação avançada de petróleo, como os apresentados em [3, 42, 63]. Neste sentido, é pretensão para trabalhos futuros aplicar o método a esses modelos.

No que diz respeito ao método DMH1, acreditamos que uma análise mais aprofundada das propriedades TVD e TVB pode ser desenvolvida, sendo objetivo futuro um estudo voltado a essa investigação.

O principal aprendizado fornecido pelo estudo desenvolvido neste trabalho foi a descoberta de boas ferramentas para análise de propriedades TVD, TVDM, TVB e TVBM, por exemplo, o Lema de Harten e suas extensões.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] E. Abreu e J. Pérez. “A fast, robust, and simple Lagrangian–Eulerian solver for balance laws and applications”. Em: *Computers & Mathematics with Applications* 77.9 (2018), pp. 2310–2336. DOI: 10.1016/j.camwa.2018.12.019.
- [2] E. Abreu, J. Pérez e A. Santo. “A conservative Lagrangian-Eulerian finite volume approximation method for balance law problems”. Em: *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics* 6.1 (2018). DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0296.
- [3] E. Ashoori, D. Marchesin e W. R. Rossen. “Roles of transient and local equilibrium foam behavior in porous media: Traveling wave”. Em: *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects* 377.1–3 (2011), pp. 228–242. DOI: 10.1016/j.colsurfa.2010.12.042.
- [4] H. Bao, L. Kang, S. D. Campbell e D. H. Werner. “Discontinuous Galerkin time domain analysis of electromagnetic scattering from dispersive periodic nanostructures at oblique incidence”. Em: *Optics Express* 27.9 (2019), pp. 13116–13128. DOI: 10.1364/OE.27.013116.
- [5] F. Bassi e S. Rebay. “A High-Order Accurate Discontinuous Finite Element Method for the Numerical Solution of the Compressible Navier-Stokes Equations”. Em: *Journal of Computational Physics* 131.2 (1997), pp. 267–279. DOI: 10.1006/jcph.1996.5572.
- [6] F. Bassi, S. Rebay, G. Mariotti, S. Pedinotti e M. Savini. “A high-order accurate discontinuous finite element method for inviscid and viscous turbomachinery flows”. Em: *2nd European Conference on Turbomachinery Fluid Dynamics and Thermodynamics*. Ed. por R. Decuipere e G. Dibelus. Antwerpen: Technologisch Instituut, 1997, pp. 99–108.
- [7] R. J. Biezuner. *Equações Diferenciais Parciais I/II*. Notas de Aula. Acessado em 18 de Dezembro de 2019. 2010. URL: <http://arquivoescolar.org/bitstream/arquivo-e/151/1/edp.pdf>.
- [8] M. Breuß e D. Dietrich. “On the optimization of flux limiter schemes for hyperbolic conservation laws”. Em: *Numerical Methods for Partial Differential Equations* 29.3 (2012), pp. 884–896. DOI: 10.1002/num.21736.
- [9] J. C. Butcher. “Integration Processes Based on Radau Quadrature Formulas”. Em: *Mathematics of Computation* 18.86 (1964), pp. 233–244. DOI: 10.1090/s0025-5718-1964-0165693-1.

- [10] P. Chandrashekar. *Discontinuous Galerkin Method*. Notas de Aula. Acessado em 25 de Dezembro de 2019. 2016. URL: <http://cpraveen.github.io/teaching/ncmatmw2016.html>.
- [11] G. Chapiro e J. Bruining. “Combustion enhance recovery of shale gas”. Em: *Journal of Petroleum Science and Engineering* 127 (2015), pp. 179–189. DOI: 10.1016/j.petrol.2015.01.036.
- [12] G. Chapiro, A. A. Mailybaev, A. J. de Souza, D. Marchesin e J. Bruining. “Asymptotic approximation of long-time solution for low-temperature filtration combustion”. Em: *Computational Geosciences* 16.3 (2012), pp. 799–808. DOI: 10.1007/s10596-012-9288-0.
- [13] G. Chapiro, D. Marchesin e S. Schecter. “Combustion waves and Riemann solutions in light porous foam”. Em: *Journal of Hyperbolic Differential Equations* 11.2 (2014), pp. 295–328. DOI: 10.1142/S021989161450009X.
- [14] G. Chavent e B. Cockburn. “The local projection P^0 - P^1 -discontinuous-Galerkin finite element method for scalar conservation laws”. Em: *Modélisation mathématique et analyse numérique* 23.4 (1989), pp. 565–592.
- [15] Z. Chen, B. Cockburn, J. W. Jerome e C.-W. Shu. “Mixed-RKDG Finite Element Methods for the 2-D Hydrodynamic Model for Semiconductor Device Simulation”. Em: *VLSI Design* 3.2 (1995), pp. 145–158. DOI: 10.1155/1995/47065.
- [16] B. Cockburn. “An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection-Dominated Problems”. Em: *Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations*. Ed. por A. Quarteroni. Vol. 1697. Berlin: Springer, 1998, pp. 150–268.
- [17] B. Cockburn. “Continuous dependence and error estimation for viscosity methods”. Em: *Acta Numerica* (2003), pp. 127–180. DOI: 10.1017/S0962492902000107.
- [18] B. Cockburn. “Discontinuous Galerkin methods”. Em: *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 83.11 (2003), pp. 731–754. DOI: 10.1002/zamm.200310088.
- [19] B. Cockburn. *The quasi-monotone schemes for scalar conservation laws I, IMA Preprint Series, 263*. Minneapolis: University of Minnesota, 1986.
- [20] B. Cockburn e P. -A. Gremaud. “A Priori Error Estimates for Numerical Methods for Scalar Conservation Laws. Part I: The General Approach”. Em: *Mathematics of Computation* 65.214 (1996), pp. 533–573. DOI: 10.2307/2153601.
- [21] B. Cockburn, G. Kanschat e D. Schoetzau. “Local discontinuous Galerkin methods for the Oseen equations”. Em: *Mathematics of Computation* 73.246 (2004), pp. 569–594. DOI: 10.1090/s0025-5718-03-01552-7.

- [22] B. Cockburn, G. E. Karniadakis e C.-W. Shu. “The Development of Discontinuous Galerkin Methods”. Em: *Discontinuous Galerkin Methods. Theory, Computation and Applications*. Ed. por B. Cockburn, G. E. Karniadakis e C.-W. Shu. Vol. 11. Berlin: Springer-Verlag, 2000, pp. 3–50.
- [23] B. Cockburn e C.-W. Shu. “The Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Method for Conservation Laws V: Multidimensional Systems”. Em: *Journal of Computational Physics* 141.2 (1998), pp. 199–224. DOI: 10.1006/jcph.1998.5892.
- [24] B. Cockburn e C.-W. Shu. “The Runge-Kutta local projection P^1 -discontinuous-Galerkin finite element method for scalar conservation laws”. Em: *Modélisation mathématique et analyse numérique* 25.3 (1991), pp. 337–361. DOI: 10.1051/m2an/1991250303371.
- [25] B. Cockburn e C.-W. Shu. “TVB Runge-Kutta Local Projection Discontinuous Galerkin Finite Element Method for Conservation Laws II: General Framework”. Em: *Mathematics of Computation* 52.186 (1989), pp. 411–435. DOI: 10.2307/2008474.
- [26] R. Courant, K. Friedrichs e H. Lewy. “On the Partial Difference Equations of Mathematical Physics”. Em: *IBM Journal of Research and Development* 11.2 (1967), pp. 215–234. DOI: 10.1147/rd.112.0215.
- [27] C. Dawson e V. Aizinger. “Local discontinuous Galerkin methods for problems in contaminant transport”. Em: *Discontinuous Galerkin Methods. Theory, Computation and Applications*. Ed. por B. Cockburn, G. Karnadakis e C.-W. Shu. Vol. 11. Berlin: Springer Verlag, 2000, pp. 309–314.
- [28] D. A. Di Pietro e A. Ern. *Mathematical Aspects of Discontinuous Galerkin Methods*. Berlin: Springer-Verlag, 2012.
- [29] M. Fortin e A. Fortin. “A new approach for the FEM simulation of viscoelastic flows”. Em: *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 32.3 (1989), pp. 295–310. DOI: 10.1016/0377-0257(89)85012-8.
- [30] M. Fortin e A. Serghini Mounim. “Mixed and hybrid finite element methods for convection-diffusion equations and their relationships with finite volume”. Em: *CALCOLO* 42.1 (2005), pp. 1–30. DOI: 10.1007/s10092-005-0090-4.
- [31] M. Fortin e A. Serghini Mounim. “Mixed and hybrid finite element methods for convection-diffusion problems and their relationships with finite volume: the multi-dimensional case”. Em: *Journal of Mathematics Research* 9.1 (2017). DOI: 10.5539/jmr.v9n1p68.
- [32] E. Godlewski e P. -A. Raviart. *Hyperbolic Systems of Conservation Laws*. Paris: Ellipses, 1991.

- [33] S. K. Godunov. “A difference scheme for numerical computation of discontinuous solutions of fluid dynamics”. Em: *Mat. Sb.* 47.3 (1959), pp. 271–306.
- [34] D. Gottlieb e C.-W. Shu. “On the Gibbs phenomenon and its resolution”. Em: *SIAM Review* 39.4 (1997), pp. 644–668. DOI: 10.1137/S0036144596301390.
- [35] S. Gottlieb, C.-W. Shu e E. Tadmor. “Strong Stability-Preserving High-Order Time Discretization Methods”. Em: *SIAM Review* 43.1 (2001), pp. 89–112. DOI: 10.1137/s003614450036757x.
- [36] P. A. Gremaud e J. Mattheus. “Simulation of gravity flow of granular materials in silos”. Em: *Discontinuous Galerkin Methods. Theory, Computation and Applications*. Ed. por B. Cockburn, G. Karnadakis e C.-W. Shu. Vol. 11. Berlin: Springer Verlag, 2000, pp. 125–134.
- [37] A. Harten. “High resolution schemes for hyperbolic conservation laws”. Em: *Journal of Computational Physics* 49.3 (1983), pp. 357–393. DOI: 10.1016/0021-9991(83)90136-5.
- [38] A. Harten, J. M. Hyman, P. D. Lax e B. Keyfitz. “On finite-difference approximations and entropy conditions for shocks”. Em: *Communications on Pure and Applied Mathematics* 29.3 (1976), pp. 297–322. DOI: 10.1002/cpa.3160290305.
- [39] T. Houba, A. Dasgupta, S. Gopalakrishnan, R. Gosse e S. Roy. “Supersonic turbulent flow simulation using a scalable parallel modal discontinuous Galerkin numerical method”. Em: *Scientific Reports* 9.1 (2019). DOI: 10.1038/s41598-019-50546-w.
- [40] G. Jiang e C.-W. Shu. “On a Cell Entropy Inequality for Discontinuous Galerkin Methods”. Em: *Mathematics of Computation* 62.206 (1994), pp. 531–538. DOI: 10.2307/2153521.
- [41] C. Johnson e J. Pitkäranta. “An analysis of the discontinuous Galerkin method for a scalar hyperbolic equation”. Em: *Mathematics of Computation* 46.173 (1986), pp. 1–26. DOI: 10.2307/2008211.
- [42] S. I. Kam. “Improved mechanistic foam simulation with foam catastrophe theory”. Em: *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects* 318.1 (2008), pp. 62–77. ISSN: 0927-7757. DOI: 10.1016/j.colsurfa.2007.12.017.
- [43] N. N. Kuznetsov. “Accuracy of some approximate methods for computing the weak solutions of a first-order quasi-linear equation”. Em: *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics* 16.6 (1976), pp. 105–119. DOI: 10.1016/0041-5553(76)90046-x.
- [44] P. LeSaint e P.A. Raviart. “Front Tracking, Oil Reservoirs, Engineering Scale Problems and Mass Conservation”. Em: *Multidimensional Hyperbolic Problems and Computations*. Ed. por J. Glimm e A. J. Majda. Vol. 29. Nova York: Springer, 1991, pp. 123–139.

- [45] P. LeSaint e P.A. Raviart. “On a finite element method for solving the neutron transport equation”. Em: *Mathematical aspects of finite elements in partial differential equations*. Ed. por C. de Boor. Massachusetts: Academic Press, 1974, pp. 89–145.
- [46] R. J. LeVeque. *Numerical Methods for Conservation Laws*. 2^a ed. Basel: Birkhauser-Verlag, 1992.
- [47] S. Meguerdijian e B. Jha. “Towards a Discontinuous Galerkin Thermohydro-mechanical Simulator for Heavy Oil Recovery”. Em: *Society of Petroleum Engineers* (2018), pp. 1–7. DOI: 10.2118/190073-ms.
- [48] S. Mishra, U. S. Fjordholm e R. Abgrall. *Numerical methods for conservation laws and related equations*. Notas de Aula. Acessado em 23 de Dezembro de 2019. 2014. URL: https://www.uio.no/studier/emner/matnat/math/MAT-IN9240/h17/pensumliste/numcl_notes.pdf.
- [49] S. Osher e S. Chakravarthy. “High Resolution Schemes and the Entropy Condition”. Em: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 21.5 (1984), pp. 955–984. DOI: 10.1137/0721060.
- [50] S. Osher e R. Sanders. “Numerical approximations to nonlinear conservation laws with locally varying time and space grids”. Em: *Mathematics of Computation* 41.164 (1983), pp. 321–336. DOI: 10.1090/s0025-5718-1983-0717689-8.
- [51] S. V. Patankar. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. Series in Computational Methods in Mechanics and Thermal Science*. 1^a ed. Boca Raton: CRC Press, 1980.
- [52] R. D. R. Rinaldi, A. Iob e R. Arina. “An efficient discontinuous Galerkin method for aeroacoustic propagation”. Em: *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 69.9 (2012), pp. 1473–1495. DOI: 10.1002/flid.2647.
- [53] H. Salehipour e W. R. Peltier. “A higher order discontinuous Galerkin, global shallow water model: Global ocean tides and aquaplanet benchmarks”. Em: *Ocean Modelling* 69 (2013), pp. 93–107. DOI: 10.1016/j.ocemod.2013.06.001.
- [54] D. Schwanenberg, R. Liem e J. Köngeter. “A Discontinuous Galerkin Method for the Shallow Water Equations with Source Terms”. Em: *Discontinuous Galerkin Methods* (2000), pp. 419–424. DOI: 10.1007/978-3-642-59721_42.
- [55] A. Serghini Mounim. “Méthode d’éléments finis mixtes: application aux équations de convection-diffusion et de Navier-Stokes”. Tese de doutorado. Québec: Université Laval, 2000.
- [56] C.-W. Shu. “TVB Uniformly High-Order Schemes for Conservation Laws”. Em: *Mathematics of Computation* 49.179 (1987), pp. 105–121. DOI: 10.1090/s0025-5718-1987-0890256-5.

- [57] F. A. G. Silva. “Métodos de Galerkin descontínuo de mais alta ordem para leis de conservação hiperbólicas”. Tese de doutorado. Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 2019.
- [58] F. A. G. Silva. “Um estudo de métodos de Galerkin descontínuo de alta ordem para problemas hiperbólicos”. Dissertação de mestrado. Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 2015, p. 94.
- [59] G. Tumolo e L. Bonaventura. “A semi-implicit, semi-Lagrangian discontinuous Galerkin framework for adaptive numerical weather prediction”. Em: *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 141.692 (2015), pp. 2582–2601. DOI: 10.1002/qj.2544.
- [60] T. C. Warburton e G. E. Karniadakis. “A Discontinuous Galerkin Method for the Viscous MHD Equations”. Em: *Journal of Computational Physics* 152.2 (1999), pp. 608–641. DOI: 10.1006/jcph.1999.6248.
- [61] W. M. S. Yamashita, S. S. Das e G. Chapiro. “Numerical modeling of mosquito population dynamics of *Aedes aegypti*”. Em: *Parasites & Vector* 11.1 (2018). DOI: 10.1186/s13071-018-2829-1.
- [62] W. M. S. Yamashita, L. T. Takahashi e G. Chapiro. “Traveling wave solutions for the dispersive models describing population dynamics of *Aedes aegypti*”. Em: *Mathematics and Computers in Simulation* 146 (2018), pp. 90–99. DOI: 10.1016/j.matcom.2017.10.012.
- [63] P. L. J. Zitha, D. X. Du, M. Uijttenhout e Q. P. Nguyen. “Numerical analysis of a new stochastic bubble population foam model”. Em: *SPE/DOE Symposium on Improved oil recovery*. Society of Petroleum Engineers. 2006.