

Universidade Federal de Juiz de Fora  
Instituto de Ciências Exatas  
Programa de Pós-Graduação em Matemática

**Pablo César Rojas Oviedo**

**Aplicações de geometria de Riemann no estudo de movimento geodésico no  
espaço-tempo de Schwarzschild**

Juiz de Fora

2019

Pablo César Rojas Oviedo

Aplicações de geometria de Riemann no estudo de movimento geodésico no  
espaço-tempo de Schwarzschild

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Matemática Aplicada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Alexei Deriglazov

Juiz de Fora

2019

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Rojas Oviedo, Pablo César.

Aplicações de geometria de Riemann no estudo de movimento geodésico  
no espaço-tempo de Schwarzschild / Pablo César Rojas Oviedo. – 2019.  
68 f. : il.

Orientador: Alexei Deriglazov

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto  
de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2019.

1. Geometria de Riemann. 2. Relatividade Geral. 3. Espaço-tempo  
Schwarzschild. 4. Movimento Geodésico. I. Alexei Deriglazov. II. Aplicações  
de geometria de Riemann no estudo de movimento geodésico no espaço-  
tempo de Schwarzschild.

Pablo César Rojas Oviedo

Aplicações de geometria de Riemann no estudo de movimento geodésico no  
espaço-tempo de Schwarzschild

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Matemática Aplicada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Alexei Deriglazov - Orientador  
Universidade Federal de Juiz de Fora

---

Prof. Dr. Thales Costa Soares  
Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais

---

Prof. Dr. Andrey Pupasov Maksimov  
Universidade Federal de Juiz de Fora

## AGRADECIMENTOS

À minha mãe Guillermina Oviedo e ao meu pai Pío Rojas, por sempre me ajudarem e me apoiarem para alcançar meus objetivos.

À meu orientador Alexei Deriglazov por sua paciência, por acreditar em mim, por me ajudar com meu pequeno conhecimento em Física e compartilhar seus conhecimentos.

Aos professores Thales, Andrey, Emanuel e Walberto por terem aceitado fazer parte da banca e pelas contribuições importantes através dos comentários pertinentes e sugestões de correção valiosas.

Aos meus amigos Daniel, Palloma. Foi pouco tempo, mas foi divertido sair e conversar com vocês.

Aos meus amigos e colegas do mestrado: Danilo, Nelson, Marco, Mario Alberth, Mario, Rosmery, Heber, Rodrigo Bittencourt, Camilo, Giovana, Marcelo, Guilherme, Mariana, Mariane, Rodrigo, Ítalo, Marcony, Yvonne, muito obrigado pela sua amizade e tempo compartilhado.

Ao corpo docente do Departamento de Matemática. Em especial, aos professores Grigori, Leonardo e Sandro pelo conselho e por acreditar em mim.

À UFJF pela oportunidade de estudar numa instituição pública de qualidade em Brasil.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

“Eu consigo calcular o movimento dos corpos celestiais, mas não a loucura das pessoas.”

Isaac Newton.

## RESUMO

O Formalismo matemático da Relatividade Geral está baseado no espaço abstrato de quatro dimensões enquanto os resultados das medidas feitas num laboratório são apresentadas por meio das quantidades tridimensionais.

Neste trabalho, apresentamos uma discussão detalhada da relação entre as quantidades quatro e tridimensionais usadas na Relatividade Geral. Aplicamos o formalismo resultante para estudar o movimento radial no espaço-tempo de Schwarzschild e corrigir alguns resultados conhecidos na literatura. Em particular, mostramos que a "repulsão" no campo de Schwarzschild não pode acelerar uma partícula de saída e, portanto, representa um efeito coordenado puro. Em outras palavras, a repulsão não pode ser detectada nem pelo observador local nem pelo distante. Os resultados deste trabalho foram publicados recentemente em revista: *Astroparticle Physics*, 2019, vol. 107, p. 35-37.

Palavras-chave: Geometria de Riemann. Relatividade Geral. Espaço-tempo Schwarzschild. Movimento Geodésico.

## ABSTRACT

In this work, we present a detailed discussion of the relation between four and three-dimensional quantities used in the description of geodesic motion in General Relativity. We apply the resulting formalism to study radial motion in Schwarzschild space-time, and correct some results known in the literature. In particular, we show that "repulsion" in the Schwarzschild field can not accelerate an outgoing particle, and thus represents pure coordinate effect. In other words, the repulsion can not be detected neither by local nor by distant observer. Results of this work were recently published in *Astroparticle Physics*, 2019, vol. 107, p. 35-37.

Key-words: Riemannian Geometry. General Relativity. Schwarzschild space-time. Geodesic Motion.



## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Na RG com curva parametrizada $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^3$ de partícula em movimento no campo gravitacional esta associada uma geodésica $\gamma \in M^{(1,3)}$ . (Para melhor visualização, os eixos $x^3$ e $y^3$ não são apontados no desenho). . . . .	11
Figura 2 – Derivada covariante na direção de $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ . . . . .	14
Figura 3 – Interpretação geométrica de símbolos de Christoffel e de segunda forma fundamental. . . . .	15
Figura 4 – Definição de eventos simultâneos. A linha vertical representa a linha mundial do relógio do laboratório. Os pontos $y_{(1)}^0$ e $y_{(2)}^0$ têm um intervalo nulo com $x^\mu$ . Então, o ponto médio $y^0$ representa o evento simultâneo com $x^\mu$ . . . . .	41
Figura 5 – Tempo e distância entre os eventos $x^\mu$ e $x^\mu + dx^\mu$ . A equação (3.12) determina o evento $A$ (no ponto espacial $\mathbf{x}$ ) simultâneo com o $x^\mu + dx^\mu$ . Portanto, o intervalo de tempo entre $x^\mu$ e $x^\mu + dx^\mu$ coincide com o intervalo entre $x^\mu$ e $A$ , e é dado pela equação (3.13). A distância entre $x^\mu$ e $x^\mu + dx^\mu$ coincide com a distância entre $x^\mu + dx^\mu$ e $A$ , esta última é dada em (3.14). . . . .	42
Figura 6 – O problema variacional é formulado em uma classe de curvas com os mesmos pontos inicial e final . . . . .	51

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbf{V}$	Vetores são destacados em negrito.
$RG$	Relatividade Geral.
$M^{(1,3)}$	Variedade de Lorentz (ou seja, variedade de Riemann com métrica de assinatura $(-, +, +, +)$ ).
$\Gamma_{ab}^c$	Símbolos de Christoffel.
$g_{\mu\nu}$	Tensor métrico.
$R_{mab}^c$	Tensor de curvatura (ou tensor de Riemann).
$G_{ij}$	Tensor de Einstein.
$G$	Constante de gravitação universal.
$T_{ij}$	Tensor de energia-momento.
$\square^2$	D'Alembertiano.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>DEFINIÇÕES BÁSICAS . . . . .</b>	<b>13</b>
2.1	DERIVADA COVARIANTE . . . . .	13
2.2	DERIVADA COVARIANTE EM COORDENADA LOCAIS . . . . .	15
2.3	CURVA GEODÉSICA . . . . .	16
2.4	TENSOR DE CURVATURA . . . . .	18
2.5	EQUAÇÕES DE CAMPO GRAVITACIONAL DE EINSTEIN . . . . .	20
2.6	A MÉTRICA ISOTRÓPICA ESTÁTICA GERAL . . . . .	21
2.7	SOLUÇÃO DE SCHWARZSCHILD . . . . .	25
2.8	A MÉTRICA DE KERR . . . . .	29
2.8.1	Como remover la singularidad em $\Delta = 0$ . . . . .	30
2.8.2	A métrica nas coordenadas de Kerr-Schild . . . . .	34
<b>3</b>	<b>RELAÇÕES ENTRE QUANTIDADES BÁSICAS QUATRO E TRI-DIMENSIONAIS EM RG . . . . .</b>	<b>39</b>
<b>4</b>	<b>ACELERAÇÃO TRI-DIMENSIONAL NA RG . . . . .</b>	<b>43</b>
<b>5</b>	<b>MOVIMENTO RADIAL EM MÉTRICA DE SCHWARZS- CHILD . . . . .</b>	<b>50</b>
5.1	MOVIMENTO RADIAL PARA MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD EM FORMA ISOTRÓPICA E HARMÔNICA. . . . .	59
5.2	RESULTADOS SOBRE A ACELERAÇÃO TRIDIMENSIONAL . . . . .	63
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS . . . . .</b>	<b>66</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>67</b>

## 1 INTRODUÇÃO

De acordo com a Relatividade Especial [1, 2], intervalos temporais e espaciais, medidos pelos observadores inerciais em movimento relativo, geralmente são diferentes. Na presença de gravitação, a situação se complica mais ainda: os relógios e réguas do laboratório, colocado em um campo gravitacional, são afetados pelo campo. Esta influência deve ser levada em conta na discussão de qualquer problema dinâmico, e representa um assunto bastante complicado. Para discutir este assunto, apresentaremos abaixo alguns comentários sobre a estrutura da teoria atual de gravitação.

Em 1915, Albert Einstein mostrou como a geometria Riemanniana de uma variedade quatro-dimensional pode ser usada para descrição de um campo gravitacional e seus efeitos sobre movimento de partículas, dando assim origem à teoria Geral da Relatividade (RG). Vamos resumir os pontos básicos desta construção, especificando o sistema físico sob investigação no Item A), e a construção matemática associada no Item B).

- A) *Set-up* experimental: considere movimento de uma partícula (digamos Terra) na presença de gravitação (do Sol). A trajetória dela em coordenadas cartesianas é uma curva parametrizada com vetor de posição  $\mathbf{y}(T) = (y^1(T), y^2(T), y^3(T)) \in \mathbb{R}^3$ , onde  $T$  é tempo medido pelo relógio do Laboratório. Analisando o movimento, podemos encontrar/construir várias características dele: distância  $\Delta l$  percorrida durante um intervalo do tempo  $\Delta T$ , valores de velocidade  $v$ , de aceleração  $a$ , vetores correspondentes  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{a}$ , etc.
- B) *Set-up* matemática: de acordo com RG, com este sistema vamos associar espaço de Riemann de quatro dimensões  $\mathbb{M}^{(1,3)}$ , com coordenadas, digamos,  $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ . Pontos desta variedade são chamados eventos. Toda informação sobre o campo gravitacional está codificada em métrica de variedade. A métrica, por sua vez, está determinada através das equações de Einstein, a partir dessas equações é possível encontrá-la quais permitam encontrar dela em função de distribuição de massas-geradoras do campo sob investigação. A primeira solução exata destas equações foi encontrada pelo K. Schwarzschild em 1916. A métrica encontrada descreve o campo gravitacional de um corpo em repouso, com simetria esférica, na região suficientemente distante do centro desse corpo.

Com uma partícula em movimento no campo gravitacional do item A) está associada uma geodésica  $\gamma$  de espaço de Riemann, veja Fig. 1.

Ainda não podemos usar essa construção nas aplicações, pois nela falta a relação entre quantidades geométricas de espaço abstrato de quatro dimensões, e as quantidades tridimensionais medidas pelo observador. Por exemplo, não foi dito qual é a relação explícita entre  $\gamma$  e  $\mathbf{y}(T)$ .

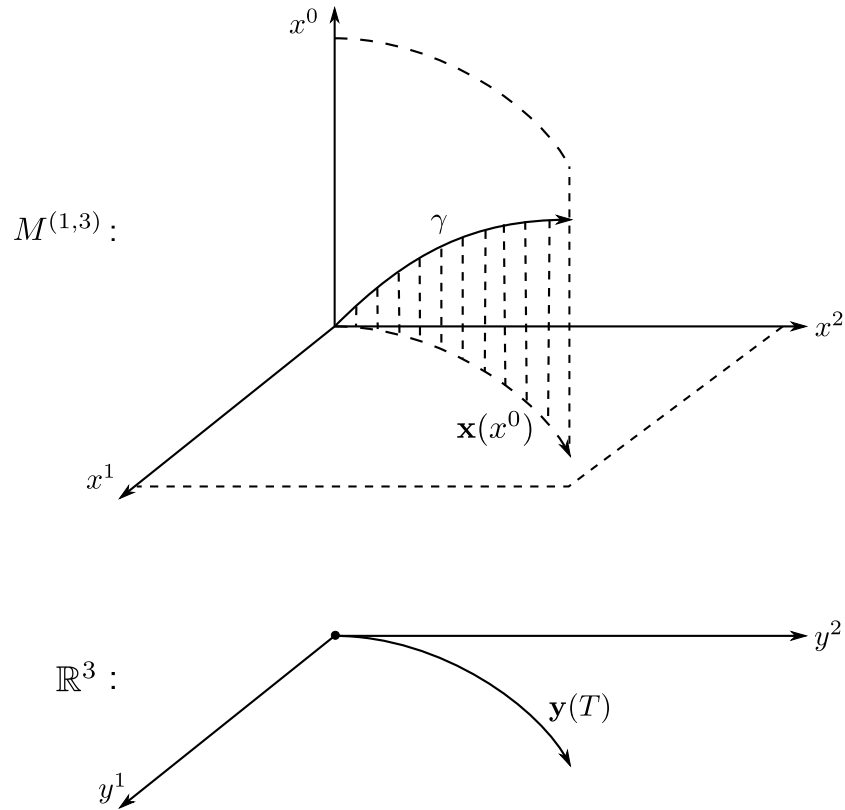


Figura 1 – Na RG com curva parametrizada  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^3$  de partícula em movimento no campo gravitacional esta associada uma geodésica  $\gamma \in M^{(1,3)}$ . (Para melhor visualização, os eixos  $x^3$  e  $y^3$  não são apontados no desenho).

Além disso, uma geodésica  $\gamma$  em geometria diferencial é por definição um conjunto de pontos, e portanto não implica nenhuma evolução definitiva de uma partícula ao longo dela. Ou seja, no Item B) acima até que noção do tempo não está mencionado! Enquanto no Item A) temos uma curva parametrizada: as três funções de tempo  $y^i(T)$ . O ponto de partida para discussão de relações em falta pode ser o seguinte: dados dois eventos próximos sobre uma geodésica,  $x^\mu$  e  $x^\mu + \Delta x^\mu$ , qual é a distancia percorrida pela partícula, e qual é o tempo de movimento, (ambas quantidades medidas em Laboratório). Ou seja, precisamos das fórmulas para  $\Delta T$  e  $\Delta l$  como funções de  $\Delta x^\mu$ . Estabelecendo uma resposta, podemos em seguida discutir as quantidades compostas desses: velocidade, aceleração, energia etc. Historicamente, tais relações não foram formuladas na construção inicial de RG.

Uma certa confusão por causa disso começou na literatura desde início de RG, e continua até os dias de hoje. Análise da relação entre as quantidades quatro e tridimensionais foi iniciado em 1916 nos trabalhos de J. Droste [3] (aluno do doutorado do H. Lorentz), D. Hilbert [4], Laue [5], Bauer [6]. A primeira tentativa foi como se segue. Seja  $x^\mu(\tau)$  é uma curva parametrizada que representa a geodésica:  $\gamma = \text{Imagen } x^\mu(\tau)$ . Excluindo o parâmetro, obtemos três funções  $x^i(x^0)$ . Então temos aplicação natural de

projeção entre geodésicas de  $M^{(1,3)}$  e curvas de  $\mathbb{R}^3$ :

$$\gamma \in M^{(1,3)} \rightarrow \mathbf{x}(x^0) \in \mathbb{R}^3. \quad (1.1)$$

Droste e outros assumiram<sup>1</sup>

$$y^i(T) = x^i(x^0/c), \quad (1.2)$$

ou seja, trajetória de partícula do item A) foi identificada com a projeção de geodésica definida em (1.1). Os cálculos, baseados nessa identificação, implicam em uma conclusão surpreendente: uma partícula, quando se afasta do centro do campo, aumenta sua velocidade. Ou seja, a gravitação, no lugar de ser uma força atrativa, acaba de ser uma força repulsiva! Então ficou claro, que a identificação direta (1.2) é errada. Seguindo das pesquisas históricas de Spallicci [7, 8], este resultado foi corrigido somente em 1936 pelo P. Drumaux, que usou a expressão moderna<sup>2</sup> no lugar de (1.2). Isto mostra com clareza, que a relação entre quantidades quatro e tridimensionais não é uma questão de acordo, mas deve ser estabelecida a partir de análise detalhada do formalismo de RG. No caso de campo arbitrário, esta análise consta no livro de Landau Lifshitz [2] (a primeira edição do livro saiu em 1956), onde  $\Delta T$ ,  $\Delta l$  e  $\mathbf{v}$  em termos de  $\Delta x^\mu$  foram apresentadas. São essas as fórmulas que expressam quantitativamente a influência do campo sobre as réguas e relógios. Em base disso, a aceleração tridimensional foi apresentada nos artigos [9, 10]. Deve-se notar, que o uso inadequado deste formalismo pode resultar nas conclusões erradas. Por exemplo, McGruder [11] menciona 21 trabalhos deste tipo publicados nos últimos 15 anos.

O Objetivo principal deste trabalho é descrever as relações entre quantidades básicas quatro e tridimensionais da RG, aplicar o formalismo resultante, e corrigir alguns resultados na literatura, especialmente no artigo recente [11]. De acordo com isto, o trabalho presente está organizado como se segue. O Capítulo 2 contém resumo das noções básicas de geometria diferencial e relatividade geral, das quais iremos usar nos capítulos seguintes. No Capítulo 3 descrevemos a relação entre  $\Delta T$ ,  $\Delta l$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\Delta x^\mu$  na RG. No Capítulo 4 descrevemos a definição de três-aceleração na RG. No Capítulo 5 vamos aplicar este formalismo para o estudo de movimento geodésico no espaço-tempo de Schwarzschild, e corrigir os resultados do trabalho [11]. Resultados deste capítulo foram recentemente publicados em [12]. Resultados e conclusões da dissertação são resumidos no Capítulo 6.

<sup>1</sup> Por  $c$  foi denotada velocidade de luz, então  $x^0/c$  tem dimensão do tempo.

<sup>2</sup> Deve-se notar que Drumaux, apesar de chegar na resposta final certa, deu interpretação errada da sua fórmula básica. Nós vamos corrigir isto no Paragrafo 5.1.

## 2 DEFINIÇÕES BÁSICAS

Nos sessões 2.1-2.4 vamos descrever alguns noções de geometria diferencial no exemplo simples de uma superfície  $S$  imersa no espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^3$ . No entanto, deve-se notar que todas as fórmulas finais escritas em coordenadas locais valem sem modificações para uma variedade arbitraria, e vão ser usadas abaixo no caso de espaço de nosso interesse: variedade de Lorentz quatro-dimensional.

### 2.1 DERIVADA COVARIANTE

Vamos precisar a derivada covariante para escrever equação de geodésica no seção 2.3 e para discussão de tensor de curvatura no seção 2.4.

**Definição 2.1** Dizemos, que temos campo vetorial sobre uma superfície  $S$ , se em cada ponto  $r$  de  $S$  está dado vetor tangente  $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ . Se  $\mathbf{r}(t)$  uma curva, nós definimos o campo ao longo da curva como a restrição:  $\mathbf{V}(t) == \mathbf{V}(\mathbf{r}(t))$ .

Exemplos:

1. Seja  $\mathbf{r}(\xi^a)$ -parametrização de  $S$ , então  $\mathbf{r}'_1(\xi^a) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^1}$  - campo de vetores tangentes as curvas coordenadas  $\mathbf{r}(\xi^1)$ .
2. Seja  $\mathbf{r}(\xi^a)$ -parametrização de  $S$ , e  $v^1(\xi^a)$ ,  $v^2(\xi^a)$  funções diferenciáveis, então é definido  $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}'_b(\xi^a)v^b(\xi^a)$  - campo vetorial.
3. Se  $\xi^a(t)$  uma curva no plano de coordenadas, então é definido  $\mathbf{W}(t) = \mathbf{r}'_b(\xi^a(t))v^b(t)$  - campo vetorial ao longo de curva  $\mathbf{r}(\xi^a(t))$  de  $S$ , enquanto  $\mathbf{V}(t) = \mathbf{r}'_b(\xi^a(t))\frac{d\xi^b}{dt}$  é campo de vetores tangentes a curva  $\mathbf{r}(\xi^a(t))$  de  $S$ .
4. Dada curva  $\mathbf{r}(t) \in S$ ,  $\mathbf{V}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$  é campo de vetores dela.

**Definição 2.2** Seja  $\mathbf{V}(t)$  campo vetorial ao longo da curva  $\mathbf{r}(t)$  de  $S$ . Derivada covariante na direção de  $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$  (ou ao longo da curva  $\mathbf{r}(t)$ ) é o campo vetorial, veja Figura 2 :

$$D\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} \Big|_S, \quad (2.1)$$

onde  $|_S$  quer dizer projeção no plano tangente a  $S$ .

**Definição 2.3**  $\mathbf{V}(t)$  é paralelo ao longo de  $\mathbf{r}(t)$ , se  $D\mathbf{V}(t) = 0$  para todo  $t$ .

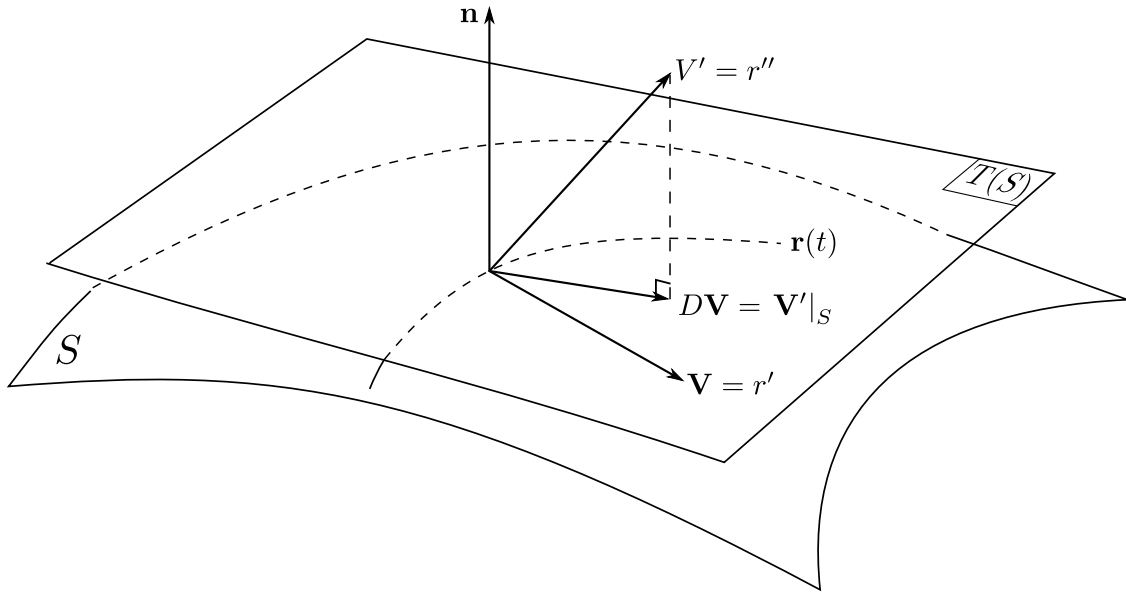


Figura 2 – Derivada covariante na direção de  $\frac{dx}{dt}$ .

Se  $S$  é um plano, derivada covariante coincide com derivada padrão, e da definição 2.2 se reduz ao definição comum de campo paralelo no plano.

por definição de derivado covariante, temos que:

$$D\mathbf{V} = \left. \frac{d\mathbf{V}}{dt} \right|_S = 0 \iff \frac{d\mathbf{V}}{dt} \perp T(S).$$

**Afirmção 2.1** *Produto escalar dos campos paralelos é mesmo em todos pontos:  $(\mathbf{V}(t), \mathbf{W}(t)) = \text{const}$ . Como consequência, vetores de um campo paralelo tem mesmo comprimento, e angulo entre vetores de dois campos paralelos é mesmo em todos pontos de curva.*

De fato:

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{V}(t), \mathbf{W}(t)) = \left( \frac{d}{dt} \mathbf{V}(t), \mathbf{W}(t) \right) + \left( \mathbf{V}(t), \frac{d}{dt} \mathbf{W}(t) \right),$$

como  $\frac{d}{dt} \mathbf{V}(t) \perp T(S)$ ,  $\frac{d}{dt} \mathbf{W}(t) \perp T(S)$  e  $\mathbf{V}(t) \in T(S)$ ,  $\mathbf{W} \in T(S)$  então  $\left( \frac{d}{dt} \mathbf{V}(t), \mathbf{W}(t) \right) = 0$  e  $\left( \mathbf{V}(t), \frac{d}{dt} \mathbf{W}(t) \right) = 0$ . substituindo na equação anterior, obtemos

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{V}(t), \mathbf{W}(t)) = 0.$$

$$\therefore (\mathbf{V}(t), \mathbf{W}(t)) = \text{const}$$

Derivada covariante pode ser usada para introduzir noção de transporte paralelo ao longo de curva. Dada curva com  $\mathbf{r}(t)$  com  $\mathbf{r}(0) = r_0$  e vetor  $\mathbf{V}_0$  no ponto  $\mathbf{r}_0$ , podemos



buscar um campo  $\mathbf{V}(\mathbf{r}(t))$  que é paralelo,  $D\mathbf{V} = 0$ , que obedece a condição  $\mathbf{V}(\mathbf{r}(0)) = \mathbf{V}_0$ . Vetores resultantes são chamados resultado de transporte paralelo de  $\mathbf{V}_0$  ao longo de curva.

Afirmção (2.1) implica, que transporte paralelo preserva produto escalar de vetores transportados, em particular, comprimento deles e ângulo entre eles.

## 2.2 DERIVADA COVARIANTE EM COORDENADA LOCAIS

Seja o campo  $\mathbf{V}(r)$  que pertence a uma superfície  $S$ . Em coordenadas locais tem-se  $\mathbf{V} = \mathbf{r}'_a(\xi^b)v^a(\xi^b)$ . Se  $r(t) = r(\xi^b(t))$  uma curva com representante  $\xi^b(t)$ , substituindo  $\xi^b(t)$  na expressão de  $\mathbf{V}$ , obtemos campo vetorial ao longo de  $r(t)$ ,

$$\mathbf{V}(t) = \mathbf{r}'_a(\xi^b)\Big|_{\xi^b(t)} v^a(\xi^b(t)). \quad (2.2)$$

Substituindo vetor desta forma na expressão para derivada covariante, obtemos expressão para ela em coordenadas locais.

Vamos calcular derivadas  $\frac{\partial \mathbf{r}'_a}{\partial \xi^b}$ , que representam taxa de variação de vetores  $\mathbf{r}'_a$  na direção de curvas coordenadas  $\xi^b$ . A derivada  $\frac{\partial \mathbf{r}'_a}{\partial \xi^b}$  é um vetor de  $\mathbb{R}^{\neq}$ , então pode ser escrito na base  $\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2$  e  $\mathbf{n} = \frac{[\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2]}{\|[\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2]\|}$ , veja Figura 3:

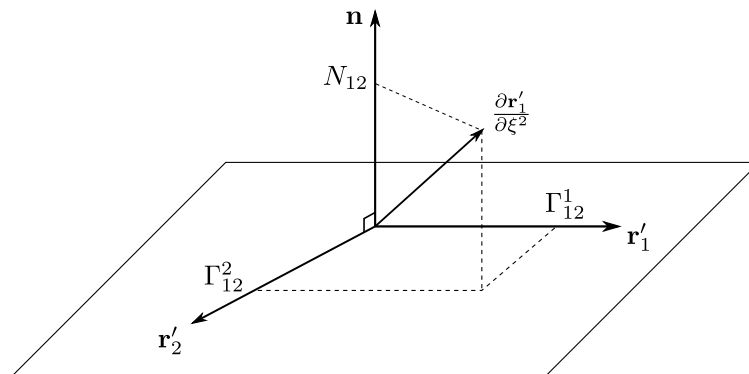


Figura 3 – Interpretação geométrica de símbolos de Christoffel e de segunda forma fundamental.

$$\frac{\partial \mathbf{r}'_a}{\partial \xi^b} = \Gamma^c_{ab} \mathbf{r}'_c + N_{ab} \mathbf{n}. \quad (2.3)$$

Equação (2.3) são conhecidas como equações de Gauss-Weingarten. Então, como  $\Gamma^c_{ab} = \Gamma^c_{ba}$  esta grandeza admite até 6 componentes independentes. Eles determinam a regra de transporte paralelo sobre  $S$ .

Substituindo vetor (2.2) na expressão de derivada covariante, obtemos a equação derivada covariante em coordenadas locais:

$$\begin{aligned}
D\mathbf{V} &= \left. \frac{d}{dt} (v^a \mathbf{r}'_a) \right|_S \\
&= \left. \left( \frac{dv^a}{dt} \mathbf{r}'_a + \frac{\partial \mathbf{r}'_a}{\partial \xi^b} \frac{d\xi^b}{dt} v^a \right) \right|_S \\
&= \left. \left[ \left( \frac{dv^a}{dt} \mathbf{r}'_a + \frac{\partial \mathbf{r}'_a}{\partial \xi^b} \frac{d\xi^b}{dt} v^a \right) \mathbf{r}'_c + N_{ab} v^a \frac{d\xi^b}{dt} \mathbf{n} \right] \right|_S \\
&= \left( \frac{dv^a}{dt} \mathbf{r}'_a + \frac{\partial \mathbf{r}'_a}{\partial \xi^b} \frac{d\xi^b}{dt} v^a \right) \mathbf{r}'_c .
\end{aligned} \tag{2.4}$$

então

$$D\mathbf{V} = \mathbf{r}'_a Dv^a, \quad \text{onde} \quad Dv^a = \frac{dv^a}{dt} + \Gamma_{bc}^a \frac{d\xi^b}{dt} v^c \tag{2.5}$$

$Dv^a$  representa derivada covariante em coordenadas locais. Então de acordo com (2.5), o campo  $\mathbf{a}$  e paralelo ao longo de  $r(\xi^a(t))$ :  $D\mathbf{V} = 0$ , se e somente se  $Dv^a = 0$ .

Se  $v^a(\xi^b)$  é campo no plano de coordenadas, e  $v^a(\xi^b(t))$  - restrição dele sobre uma curva  $\xi^b(t)$ , podemos escrever

$$Dv^a = \frac{d\xi^b}{dt} D_b v^a, \quad \text{onde} \quad D_b v^a = \frac{\partial v^a}{\partial \xi^b} + \Gamma_{bc}^a v^c . \tag{2.6}$$

$D_b v^a$  é chamada derivada covariante na direção de curva coordenada  $\xi^b$ .

### 2.3 CURVA GEODÉSICA

Geodésica é uma curva (ou seja un conjunto de pontos) especial em variedade de Riemann. Podemos parametrizar dela de vario jeitos, obtendo assim infinitas curvas parametrizadas correspondentes. Todas elas obedecem de uma equação, chamada a equação geodésica. Nesta seção vamos encontrar esta equação.

No espaço Euclideano, as retas tangentes a curva geralmente não são paralelas. Elas são paralelas somente se a curva é uma reta. Vamos discutir curvas sobre superfície quais tem a mesma propriedade. No lugar de reta tangente podemos considerar vetores tangentes a curva, ja que todos eles ficam sobre a reta tangente. Vamos escolher para discussão o vetor tangente unitário:  $V(r_0) = V_0, |V_0| = 1$ .

**Definição 2.4** *Curva  $\gamma \subset S$  é geodésica se o vetor tangente  $\mathbf{V}_0$  permanece tangente no processo de transporte paralelo dele ao longo de  $\gamma$ .*

Definição de geodésica não menciona parametrização dela. Então:

1. Geodésica é uma curva, e não é uma curva parametrizada.
2. Podemos usar qualquer uma parametrização para encontrar a geodésica.

Assumindo uma parametrização  $t$ , seja  $\mathbf{V}_0$  é vetor tangente unitário num ponto de geodésica, e  $\mathbf{V}(t)$  é campo paralelo construído a partir de  $\mathbf{V}_0$ . Por definição, o campo  $\mathbf{V}(t)$  é proporcional ao campo tangente  $\mathbf{r}'(t)$  de geodésica em cada ponto.

Então temos a condição para  $\gamma = \text{Im } \mathbf{r}(t)$  ser geodésica:  $\alpha(t)\mathbf{V}(t) = \mathbf{r}'(t)$ . Como  $|\mathbf{V}(t)| = 1$ , temos  $|\alpha(t)| = |\mathbf{r}'(t)|$ , por tanto campo paralelo pode ser apresentado em termos de vetor tangente a geodésica:  $\mathbf{V} = \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|}$ . Então a condição para uma curva ser geodésica é:

$$\alpha(t)\mathbf{V}(t) = \mathbf{r}'(t) \quad \text{ou} \quad \mathbf{V} = \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|} . \quad (2.7)$$

Substituindo o vetor  $\mathbf{V}$  da equação (2.7) na equação de transporte paralelo  $D\mathbf{V}(t) = 0$ , obtemos equação de geodésica:

$$D \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|} = 0 . \quad (2.8)$$

Em coordenada locais temos  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_a \dot{\xi}^a$ , também como  $|\mathbf{r}'| = \sqrt{\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \frac{\mathbf{r}}{dt}\right)} = \sqrt{g_{ab} \dot{\xi}^a \dot{\xi}^b} \equiv |\dot{\xi}|$ , então  $\frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|} = \mathbf{r}'_a \frac{\dot{\xi}^a}{|\dot{\xi}|}$ .

Observa-se que por construção, as coordenadas de campo paralelo são  $v^a = \frac{1}{|\dot{\xi}|} \dot{\xi}^a$ . Em efeito:

$$\begin{aligned} v^a &= g^{ab}(\mathbf{r}'_b, \mathbf{V}) = g^{ab} \left( \mathbf{r}'_b, \frac{1}{|\mathbf{r}'|} \mathbf{r}'_c \dot{\xi}^c \right) = \frac{1}{|\mathbf{r}'|} g^{ab}(\mathbf{r}'_b, \mathbf{r}'_c) \dot{\xi}^c \\ &= \frac{1}{|\dot{\xi}|} g^{ab} g_{bc} \dot{\xi}^c = \frac{1}{|\dot{\xi}|} \delta_c^a \dot{\xi}^c = \frac{1}{|\dot{\xi}|} \dot{\xi}^a . \end{aligned} \quad (2.9)$$

Substituindo  $\frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|} = \mathbf{r}'_a \frac{\dot{\xi}^a}{|\dot{\xi}|}$  na equação (2.8) e como  $D \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|} = D\mathbf{V} = \mathbf{r}'_a Dv^a$ , obtemos equação de geodésica em coordenadas locais

$$D \frac{\dot{\xi}^a}{|\dot{\xi}|} = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{\xi}^a}{|\dot{\xi}|} \right) + \frac{1}{|\dot{\xi}|} \Gamma_{bc}^a \dot{\xi}^b \dot{\xi}^c = 0 , \quad (2.10)$$

onde  $|\dot{\xi}| = \sqrt{g_{ab} \dot{\xi}^a \dot{\xi}^b}$ .

Se  $\xi^a(\tau)$  - geodésica em parametrização natural  $\tau$ ,  $|\dot{\xi}^a(\tau)| = 1$ , a equação (2.10) fica

$$D \dot{\xi}^a(\tau) = 0 , \quad (2.11)$$

e vai ser usada no Cap. 5. As equações (2.10) e (2.11) são equivalentes, veja [13].

## 2.4 TENSOR DE CURVATURA

Tensor de curvatura participa na construção de equações de Einstein, os determinam a métrica de espaço-tempo na RG.

Derivadas repetidas na direção de eixos coordenadas de um campo vetorial  $\mathbf{V}(x^1, x^2, x^3)$  no espaço Euclidiano são comutativas:  $\partial_i \partial_j \mathbf{V} - \partial_j \partial_i \mathbf{V} = 0$ .

Seja  $\mathbf{V}(r) = \mathbf{r}'_c(\xi^b)v^c(\xi^b)$  - campo tangente a superfície  $S$ . Vamos calcular derivadas covariantes dele na direção das curvas coordenadas. Isto é, na equação (2.4) vamos pegar  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial \xi^1}$  ou  $\frac{\partial}{\partial \xi^2}$ . Então as derivadas covariantes são  $D_1 \mathbf{V} \equiv \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \xi^1} \Big|_S$  e  $D_2 \mathbf{V} \equiv \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \xi^2} \Big|_S$ . Temos forma explícita das derivadas:

$$D_b \mathbf{V} = \mathbf{r}'_c D_b v^c, \quad D_b v^c = \partial_b v^c + \Gamma_{bn}^c v^n. \quad (2.12)$$

Derivada  $D_a$  de vetores  $D_1 \mathbf{V}$  e  $D_2 \mathbf{V}$  é:

$$\begin{aligned} D_a(D_b \mathbf{V}) &= \mathbf{r}'_c D_a [D_b v^c] \\ &= \mathbf{r}'_c \{ \partial_a (D_b v^c) + \Gamma_{an}^c (D_b v^n) \} \\ &= \partial_a (\partial_b v^c + \Gamma_{bn}^c v^n) + \Gamma_{an}^c (\partial_b v^n + \Gamma_{bm}^n v^m) \\ &= \mathbf{r}'_c \{ \partial_a \partial_b v^c + (\partial_a \Gamma_{bn}^c) v^n + \Gamma_{vn}^c \partial_a v^n + \Gamma_{an}^c \partial_b v^n + \Gamma_{an}^c \Gamma_{bm}^n v^m \}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

então temos analogamente,

$$D_b(D_a \mathbf{V}) = \mathbf{r}'_c \{ \partial_b \partial_a v^c + (\partial_b \Gamma_{an}^c) v^n + \Gamma_{an}^c \partial_b v^n + \Gamma_{an}^c \partial_a v^n + \Gamma_{bn}^c \Gamma_{am}^n v^m \}, \quad (2.14)$$

subtraindo a equação (2.13) pela equação (2.14)

$$\begin{aligned} D_a(D_b \mathbf{V}) - D_b(D_a \mathbf{V}) &= \mathbf{r}'_c \{ (\partial_a \Gamma_{bn}^c) v^m - (\partial_b \Gamma_{am}^c) v^m + \Gamma_{an}^c \Gamma_{bm}^n v^m - \Gamma_{bn}^c \Gamma_{am}^n v^m \} \\ &= \mathbf{r}'_c \{ (\partial_a \Gamma_{bm}^c + \Gamma_{an}^c \Gamma_{bm}^n) - (\partial_b \Gamma_{am}^c + \Gamma_{bn}^c \Gamma_{am}^n) \} v^m \\ &= \mathbf{r}'_c R_{mab}^c v^m, \end{aligned} \quad (2.15)$$

onde

$$R_{mab}^c(\xi^k) = \partial_a \Gamma_{bm}^c + \Gamma_{an}^c \Gamma_{bm}^n - (\partial_b \Gamma_{am}^c + \Gamma_{bn}^c \Gamma_{am}^n) \quad (2.16)$$

é chamado *tensor de curvatura* (ou *tensor de Riemann*) de superfície em coordenadas locais  $\xi^a$ . Ele é conjunto de  $2^4 = 16$  funções de  $\xi^k$  construídas das componentes de métrica e derivadas dela. De acordo com (2.16), comutador das derivadas covariantes (com  $a \neq b$ )

na direção de curvas coordenadas geralmente não é nulo, mas é proporcional de tensor de curvatura.

Introduzimos a notação especial para o tensor de curvatura com todos os indexes colocados embaixo com uso de métrica  $g_{nc}$

$$\begin{aligned} R_{nmab} &= g_{nc} R_{mab}^c \\ &= g_{nc} \left[ \partial_a \Gamma_{bm}^c + \Gamma_{ak}^c \Gamma_{bm}^k - \left( \partial_b \Gamma_{am}^c + \Gamma_{bk}^c \Gamma_{am}^k \right) \right] \end{aligned} \quad (2.17)$$

vamos definir  $\Gamma_{nac} = g_{nb} \Gamma_{ac}^b$ , então

$$\begin{aligned} \Gamma_{nac} &= g_{nb} \Gamma_{ac}^b \\ &= \frac{1}{2} g_{nb} g^{be} (\partial_a g_{ec} + \partial_c g_{ae} - \partial_e g_{ac}) \\ &= \frac{1}{2} \delta_n^e (\partial_a g_{ec} + \partial_c g_{ae} - \partial_e g_{ac}) \\ &= \frac{1}{2} (\partial_a g_{nc} + \partial_c g_{an} - \partial_n g_{ac}) . \end{aligned} \quad (2.18)$$

Também como  $\Gamma_{ac}^b = \Gamma_{ca}^b$  então  $\Gamma_{nac} = \Gamma_{nca}$ .

Da equação (2.18) e que  $g_{cn} = g_{nc}$  temos a identidade:

$$\partial_a g_{nc} \equiv \Gamma_{nac} + \Gamma_{can} . \quad (2.19)$$

Usando a equação (2.19),  $\Gamma_{bm}^c = \Gamma_{mb}^c$  e a derivada do produto

$$\begin{aligned} g_{nc} \partial_a \Gamma_{bm}^c &= \partial_a (g_{nc} \Gamma_{mb}^c) - (\partial_a g_{nc}) \Gamma_{bm}^c \\ &= \partial_a (g_{nc} \Gamma_{mb}^c) - (\Gamma_{nac} + \Gamma_{can}) \Gamma_{bm}^c \\ &= \partial_a \Gamma_{nmb} - \Gamma_{nac} \Gamma_{bm}^c - \Gamma_{can} \Gamma_{bm}^c . \end{aligned} \quad (2.20)$$

Também temos

$$\Gamma_{can} \Gamma_{mb}^c = g_{ck} \Gamma_{na}^k \Gamma_{mb}^c = \Gamma_{na}^k (g_{kc} \Gamma_{mb}^c) = \Gamma_{na}^k \Gamma_{kmb} = \Gamma_{na}^c \Gamma_{cmb} . \quad (2.21)$$

Substituindo (2.20) na equação (2.17) e usando (2.21), obtemos a expressão equivalente:

$$\begin{aligned} R_{nmab} &= g_{nc} \partial_a \Gamma_{bm}^c + g_{nc} \Gamma_{ak}^c \Gamma_{bm}^k - \left( g_{nc} \partial_b \Gamma_{am}^c + g_{nc} \Gamma_{bk}^c \Gamma_{am}^k \right) \\ &= \partial_a \Gamma_{nmb} - \Gamma_{nac} \Gamma_{bm}^c - \Gamma_{can} \Gamma_{bm}^c + \Gamma_{nak} \Gamma_{bm}^k \\ &\quad - \left( \partial_b \Gamma_{nma} - \Gamma_{nbc} \Gamma_{am}^c - \Gamma_{cbn} \Gamma_{am}^c + \Gamma_{nbk} \Gamma_{am}^k \right) \\ &= \partial_a \Gamma_{nmb} - \Gamma_{can} \Gamma_{bm}^c - (\partial_b \Gamma_{nma} - \Gamma_{cbn} \Gamma_{am}^c) \\ &= \partial_a \Gamma_{nmb} - \Gamma_{cna} \Gamma_{mb}^c - (\partial_b \Gamma_{nma} - \Gamma_{cnb} \Gamma_{ma}^c) \\ &= \partial_a \Gamma_{nmb} - \Gamma_{na}^c \Gamma_{cmb} - (\partial_b \Gamma_{nma} - \Gamma_{nb}^c \Gamma_{cma}^c) \\ &= \partial_a \Gamma_{nmb} + \Gamma_{nb}^c \Gamma_{cma} - (\partial_b \Gamma_{nma} + \Gamma_{na}^c \Gamma_{cmb}) . \end{aligned} \quad (2.22)$$

Apresentamos algumas propriedades do tensor de curvatura.

1. Propriedades de simetria

$$R_{rmab} = R_{abnm}, \quad R_{nmab} = -R_{mnab}, \quad R_{nmab} = -R_{nmba}. \quad (2.23)$$

2. Regra de transformação no passagem  $\xi^a(\xi'^\beta)$  de um sistema para outro

$$R'_{\alpha\beta\gamma\sigma} = \frac{\partial\xi^a}{\partial\xi'^\alpha} \frac{\partial\xi^b}{\partial\xi'^\beta} \frac{\partial\xi^c}{\partial\xi'^\gamma} \frac{\partial\xi^d}{\partial\xi'^\sigma} R_{abcd}. \quad (2.24)$$

Contrações de tensor de curvatura com métrica inversa  $g^{ab}$  tem nomes próprios. *Tensor de Ricci*  $R_{mb}$ :

$$R_{mb} \equiv g^{na} R_{mnab}, \quad (2.25)$$

e regra de transformação do tensor de Ricci

$$R'_{\alpha\beta} = \frac{\partial\xi^a}{\partial\xi'^\alpha} \frac{\partial\xi^b}{\partial\xi'^\beta} R_{ab}. \quad (2.26)$$

*Curvatura escalar*  $R$  é função escalar seguinte:

$$R \equiv g^{mb} R_{mb} = g^{mb} g^{na} R_{mnab}, \quad (2.27)$$

e regra de transformação dele

$$R'(\xi'^c) = R(\xi^c). \quad (2.28)$$

## 2.5 EQUAÇÕES DE CAMPO GRAVITACIONAL DE EINSTEIN

As equações de Einstein são as equações fundamentais da teoria da relatividade geral. Eles relacionam o campo gravitacional com tensor de energia-momento, o ultimo representa distribuição das matérias-geradoras do campo [2]. Intuitivamente, quanto maior a concentração de matéria, maiores serão os componentes do tensor de curvatura de Ricci. As equações, postulados pelo Einstein são

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{ij}, \quad (2.29)$$

onde  $G$  é constante de gravitação universal e  $T_{ij}$  tensor de energia-momento. O tensor na parte esquerda desta equação é chamado tensor de Einstein

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R. \quad (2.30)$$

O tensor de energia-momento  $T_{ij}$  em vácuo pode ser calculado a partir da constante cosmológica  $\Lambda$  e dos componentes tensores métricos covariantes  $g_{ij}$ ,

$$T_{ij} = -\frac{\Lambda c^4}{8\pi G} g_{ij} \quad (2.31)$$

em que a constante cosmológica é equivalente a uma densidade de energia em um espaço de vácuo. De acordo com uma medição recente, a constante cosmológica  $\Lambda$  é da ordem de  $10^{-52}\text{m}^{-2}$  e proporcional à densidade de energia escura  $\rho$  com um fator de  $8\pi G$  usado na relatividade geral.

$$\Lambda = 8\pi G\rho. \quad (2.32)$$

No caso de uma densidade de energia positiva do espaço de vácuo ( $\Lambda > 0$ ), a pressão negativa relacionada causará uma expansão acelerada do universo.

## 2.6 A MÉTRICA ISOTRÓPICA ESTÁTICA GERAL

Por estático e isotrópico queremos dizer que deve ser possível encontrar um conjunto de coordenadas quasi-minkowskianas  $x^0 = ct, x^1, x^2, x^3$  tal que  $g_{\mu\nu}$  não dependa de  $t$ , quatro-intervalo dependa de  $\mathbf{x}$  e  $d\mathbf{x}$  somente através dos invariantes rotacionais  $d\mathbf{x}^2, \mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x}^2$ . Então

$$d\tau^2 = F(r)(dx^0)^2 - 2E(r)dx^0(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}) - D(r)(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2 - C(r)d\mathbf{x}^2, \quad (2.33)$$

onde  $F, E, D$  e  $C$  são funções desconhecidas de

$$r \equiv (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})^{\frac{1}{2}}.$$

Substituimos  $\mathbf{x}$  por coordenadas esféricas  $r, \theta, \varphi$ , definidas como

$$x^1 = r \sin \theta \cos \varphi; \quad x^2 = r \sin \theta \sin \varphi; \quad x^3 = r \cos \theta.$$

Calculando  $\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}$  e  $d\mathbf{x}^2$  temos

$$\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = r dr; \quad d\mathbf{x}^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

e substituindo na equação (2.33), ela torna-se

$$d\tau^2 = F(r)(dx^0)^2 - 2E(r)dx^0 dr - r^2 D(r)dr^2 - C(r) \left( dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right). \quad (2.34)$$

Definimos a nova coordenada temporal

$$x^{0'} = x^0 + \Phi(r),$$

com  $\Phi$  uma função de  $r$ . Isso nos permite eliminar o elemento fora da diagonal  $g_{0r}$  definindo  $\Phi$  a partir de equação:

$$\frac{d\Phi}{dr} = -\frac{rE(r)}{F(r)}.$$

Então a equação (2.34) pode ser escrita como

$$d\tau^2 = F(r)(dx^{0'})^2 - G(r)dr^2 - C(r)(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (2.35)$$

onde

$$G(r) = r^2 \left( D(r) + \frac{E^2(r)}{F(r)} \right).$$

Podemos redefinir o raio  $r$  e, portanto, impor uma relação adicional às funções  $F$ ,  $G$  e  $C$ . Por exemplo, suponha que definimos

$$r'^2 \equiv C(r)r^2$$

Então a equação (2.35) assume a seguinte forma chamada *forma padrão*:

$$d\tau^2 = B(r')(dx^{0'})^2 - A(r')dr'^2 - r'^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (2.36)$$

onde

$$\begin{aligned} B(r') &\equiv F(r) \\ A(r') &\equiv \left( 1 + \frac{G(r)}{C(r)} \right) \left( 1 + \frac{r}{2C(r)} \frac{dC(r)}{dr} \right)^{-2}. \end{aligned}$$

Alternativamente, podemos definir

$$r'' = \exp \int \left( 1 + \frac{G(r)}{C(r)} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{dr}{r},$$



e a equação (2.35) assume a forma chamada *forma isotrópica*

$$d\tau^2 = H(r'')(dx^{0'})^2 - J(r'') \left( dr''^2 + r''^2 d\theta^2 + r''^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right), \quad (2.37)$$

onde

$$\begin{aligned} H(r'') &\equiv F(r) \\ J(r'') &\equiv \frac{C(r)r^2}{r''^2}. \end{aligned}$$

Faremos a maior parte do nosso trabalho com uma métrica da forma padrão:

$$d\tau^2 = B(r)(dx^0)^2 - A(r)dr^2 - r^2 \left( d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 \right) \quad (2.38)$$

A métrica possui componentes diferentes de zero:

$$g_{rr} = A(r); \quad g_{\theta\theta} = r^2; \quad g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2 \theta; \quad g_{00} = -B(r) \quad (2.39)$$

com funções  $A(r)$  e  $B(r)$  que devem ser determinadas resolvendo as equações de campo.

Como  $g_{\mu\nu}$  é diagonal, é fácil escrever o inverso dos componentes diferentes de zero:

$$g^{rr} = A^{-1}(r); \quad g^{\theta\theta} = r^{-2}; \quad g^{\varphi\varphi} = r^{-2}(\sin \theta)^{-2}; \quad g^{00} = -B^{-1}(r) \quad (2.40)$$

Além disso, o determinante do tensor métrico é  $-g$ , onde

$$g = r^4 A(r) B(r) \sin^2 \theta, \quad (2.41)$$

então o elemento de volume invariante é

$$\sqrt{g} dr d\theta d\varphi = r^2 \sqrt{A(r)B(r)} \sin \theta dr d\theta d\varphi. \quad (2.42)$$

A conexão afim pode ser calculada a partir da fórmula usual:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_{\nu} g_{\rho\mu} + \partial_{\mu} g_{\rho\nu} - \partial_{\rho} g_{\mu\nu})$$

Cujos componentes não nulo são:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{rr}^r &= \frac{1}{2A(r)} \frac{dA(r)}{dr} & \Gamma_{\theta\theta}^r &= -\frac{r}{A(r)} \\
\Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -\frac{r \sin^2 \theta}{A(r)} & \Gamma_{00}^r &= \frac{1}{2A(r)} \frac{dB(r)}{dr} \\
\Gamma_{r\theta}^\theta &= \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r} & \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta \\
\Gamma_{\varphi r}^\varphi &= \Gamma_{r\varphi}^\varphi = \frac{1}{r} & \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi &= \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \cot \theta \\
\Gamma_{0r}^0 &= \Gamma_{r0}^0 = \frac{1}{2B(r)} \frac{dB(r)}{dr} & & 
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Também precisamos do tensor de Ricci. É dado por (2.25) e (2.16) como

$$R_{\mu\kappa} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda}{\partial x^\lambda} + \Gamma_{\mu\lambda}^\eta \Gamma_{\kappa\eta}^\lambda - \Gamma_{\mu\kappa}^\eta \Gamma_{\lambda\eta}^\lambda. \tag{2.44}$$

Inserindo em (2.44) os componentes da conexão afim calculados anteriormente, encontramos

$$R_{rr} = \frac{B''(r)}{2B(r)} - \frac{1}{4} \left( \frac{B'(r)}{B(r)} \right) \left( \frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) - \frac{1}{r} \left( \frac{A'(r)}{A(r)} \right) \tag{2.45}$$

$$R_{\theta\theta} = -1 + \frac{r}{2A(r)} \left( -\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) + \frac{1}{A(r)}$$

$$R_{\varphi\varphi} = \sin^2 \theta R_{\theta\theta}$$

$$R_{00} = -\frac{B''(r)}{2A(r)} + \frac{1}{4} \left( \frac{B'(r)}{A(r)} \right) \left( \frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) - \frac{1}{4} \left( \frac{B'(r)}{A(r)} \right)$$

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad \mu \neq \nu$$

(O primo " ' " agora significa diferenciação em relação ao  $r$ ). Os resultados que  $R_{r\theta}$ ,  $R_{r\varphi}$ ,  $R_{0\theta}$ ,  $R_{0\varphi}$  e  $R_{\theta\varphi}$  são nulos, e que  $R_{\varphi\varphi} = \sin^2 \theta R_{\theta\theta}$ , são conseqüências da invariância rotacional da métrica, enquanto o resultado que  $R_{r0}$  é nulo é porque nós configuramos nossos relógios para que a métrica seja invariante sob a transformação de inversão de tempo  $t \rightarrow -t$ .

Podemos facilmente usar os resultados (2.39) e (2.43) para a métrica e conexão afim em coordenadas padrão para construir coordenadas  $X_1, X_2, X_3, t$ . Nós definimos:

$$X_1 = R(r) \sin \theta \cos \varphi \quad X_2 = R(r) \sin \theta \sin \varphi \quad X_3 = R(r) \cos \theta \quad (2.46)$$

Um cálculo direto dá então

$$\begin{aligned} \square^2 X_i &\equiv g^{\mu\nu} \left[ \frac{\partial^2 X_i}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \frac{\partial X_i}{\partial x^\lambda} \right] \\ &\equiv \left( \frac{X_i}{AR} \right) \left[ \left( \frac{B'}{2B} + \frac{2}{r} - \frac{A'}{2A} \right) R' + R'' - \frac{2A}{r^2} R \right]. \end{aligned}$$

Além disso, a coordenada de tempo padrão  $t$  satisfaz

$$\square^2 t = 0.$$

Assim as coordenadas  $X_1, X_2, X_3, t$  são chamadas *harmônicas* se  $R(r)$  satisfizer a equação diferencial

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 B^{\frac{1}{2}} A^{-\frac{1}{2}} \frac{dR}{dr} \right) - 2A^{\frac{1}{2}} B^{\frac{1}{2}} R = 0; \quad (2.47)$$

Nestas coordenadas harmônicas, (2.38) torna-se

$$d\tau^2 = B(dx^0)^2 - \frac{r^2}{R^2} d\mathbf{X}^2 - \left[ \frac{A}{R^2 R'^2} - \frac{r^2}{R^4} \right] (\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X})^2. \quad (2.48)$$

## 2.7 SOLUÇÃO DE SCHWARZSCHILD

A métrica de Schwarzschild é uma solução exata das equações de Einstein do campo gravitacional que corresponde ao campo gerado por uma massa esférica (estrela, por exemplo). Sob certas condições também descreve um tipo de buraco negro. A solução de Schwarzschild tem o nome do físico alemão Karl Schwarzschild (1873-1916), que encontrou a solução exata em 1916, pouco mais de um mês após a publicação da teoria da relatividade geral de Einstein. Foi a primeira solução exata das equações de campo de Einstein além da solução trivial de espaço plano.

Estudo de movimento geodésico no campo de Schwarzschild vai ser o nosso objetivo principal no Capítulo 5.

Aplicamos as equações de campo de Einstein à métrica isotrópica estática geral. Usamos a forma padrão discutido na seção anterior, isto é,

$$d\tau^2 = B(r)(dx^0)^2 - A(r)dr^2 - r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 . \quad (2.49)$$

As equações de campo numa região vazia de matéria são:

$$R_{\mu\nu} = 0 . \quad (2.50)$$

Os componentes do tensor de Ricci são dados para essa métrica por meio da equação (2.45). Observamos que será suficiente estabelecer  $R_{rr}$ ,  $R_{\theta\theta}$  e  $R_{00}$  iguais a zero. Também vemos que:

$$\frac{R_{rr}}{A} + \frac{R_{00}}{B} = -\frac{1}{rA} \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) \quad (2.51)$$

então (2.50) exige que  $\frac{B'}{B} = -\frac{A'}{A}$ , ou

$$A(r)B(r) = \text{const} . \quad (2.52)$$

Além disso, impomos a condição limite em  $A$  e  $B$  quando  $r \rightarrow \infty$ , o tensor métrico deve aproximar o tensor de Minkowski em coordenadas esféricas, isto é,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} B(r) = 1 , \quad (2.53)$$

de (2.52) e (2.53), temos então

$$A(r) = \frac{1}{B(r)} . \quad (2.54)$$

Usando (2.54) em (2.45), encontramos

$$R_{\theta\theta} = -1 + B'(r)r + B(r) , \quad (2.55)$$

$$R_{rr} = \frac{B''(r)}{2B(r)} + \frac{B'(r)}{rB(r)} = \frac{R'_{\theta\theta}(r)}{2rB(r)} . \quad (2.56)$$

Usando que  $R_{\theta\theta} = 0$ , temos

$$\frac{d}{dr}(rB(r)) = rB'(r) + B(r) = 1 . \quad (2.57)$$

A solução é

$$rB(r) = r + \text{const} . \quad (2.58)$$

Para fixar a constante de integração, lembramos que a grandes distâncias de uma massa central  $M$ , o componente  $g_{00} = -B$  deve se aproximar à  $-1 - 2\phi$ , onde  $\phi$  é o potencial newtoniano  $-\frac{MG}{rc^2}$ . (veja a Seção 3.4 [1]). Assim disto, constante de integração é  $-\frac{2MG}{c^2}$ , e nossa solução final é

$$B(r) = \left(1 - \frac{2MG}{rc^2}\right) , \quad (2.59)$$

$$A(r) = \left(1 - \frac{2MG}{rc^2}\right)^{-1} . \quad (2.60)$$

A métrica completa é dada por

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) (dx^0)^2 - \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 , \quad (2.61)$$

onde  $\alpha = \frac{2MG}{c^2}$ .

A solução de Schwarzschild é expressa na equação (2.61) em sua *forma padrão*. Podemos também expressar a *forma isotrópica* equivalente, introduzindo uma nova variável de raio

$$r = \rho \left(1 + \frac{MG}{2c^2\rho}\right)^2 , \quad (2.62)$$

daqui podemos calcular

$$\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) = 1 - \frac{\frac{2MG}{c^2}}{\rho \left(1 + \frac{MG}{2c^2\rho}\right)^2} = \frac{\rho \left[1 - \frac{MG}{c^2} + \left(\frac{MG}{2c^2\rho}\right)^2\right]}{\rho \left(1 + \frac{MG}{2c^2\rho}\right)^2} = \frac{\left(1 - \frac{MG}{2c^2\rho}\right)^2}{\left(1 + \frac{MG}{2c^2\rho}\right)^2} . \quad (2.63)$$

Também,

$$\begin{aligned} dr &= d\rho \left(1 + \frac{MG}{2c^2\rho}\right)^2 - 2\rho \left(1 + \frac{MG}{2c^2\rho}\right) \left(\frac{MG}{2c^2}\right) \left(\frac{1}{\rho^2}\right) d\rho \\ &= \left(1 + \frac{MG}{2c^2\rho}\right) \left(1 + \frac{MG}{2c^2\rho} - \frac{MG}{c^2\rho}\right) d\rho = \left(1 + \frac{MG}{2c^2\rho}\right) \left(1 - \frac{MG}{2c^2\rho}\right) d\rho . \end{aligned} \quad (2.64)$$

Então, substituindo as equações (2.62), (2.63) e (2.64) na equação (2.61),

$$\begin{aligned}
 -d\tau^2 = & -\frac{\left(1 - \frac{MG}{2c^2\rho}\right)}{\left(1 + \frac{MG}{2c^2\rho}\right)^2}(dx^0)^2 + \left[\frac{\left(1 - \frac{MG}{2c^2\rho}\right)^2}{\left(1 + \frac{MG}{2c^2\rho}\right)^2}\right]^{-1} \left[\left(1 + \frac{MG}{2c^2\rho}\right)\left(1 - \frac{MG}{2c^2\rho}\right)d\rho\right]^2 \\
 & + \left[\rho\left(1 + \frac{MG}{2c^2\rho}\right)^2\right]^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) .
 \end{aligned} \tag{2.65}$$

Daqui obtemos a métrica de Schwarzschild em *forma isotrópica*:

$$-d\tau^2 = -\frac{\left(1 - \frac{GM}{2c^2\rho}\right)^2}{\left(1 + \frac{MG}{2c^2\rho}\right)^2}(dx^0)^2 + \left(1 + \frac{MG}{2c^2\rho}\right)^4 [d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin\theta d\varphi^2] \tag{2.66}$$

Podemos também construir as seguintes coordenadas :

$$X_1 = R(r) \sin\theta \cos\varphi; \quad X_2 = R(r) \sin\theta \sin\varphi; \quad X_3 = R(r) \cos\theta; \quad t .$$

Estas coordenadas  $X_1, X_2, X_3, t$  são chamadas harmônicas se  $R(r)$  satisfizer a seguinte equação diferencial :

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 B^{\frac{1}{2}} A^{-\frac{1}{2}} \frac{dR}{dr} \right) - 2A^{\frac{1}{2}} B^{\frac{1}{2}} R = 0 , \tag{2.67}$$

dos quais, da solução de Schwarzschild temos

$$A(r) = \left(1 - \frac{2MG}{c^2 r}\right)^{-1}; \quad B(r) = \left(1 - \frac{2MG}{c^2 r}\right)$$

substituindo na equação (2.67),

$$\frac{d}{dr} \left[ r^2 \left(1 - \frac{2MG}{c^2 r}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{2MG}{c^2 r}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{dR}{dr} \right] - 2 \left(1 - \frac{2MG}{c^2 r}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{2MG}{c^2 r}\right)^{\frac{1}{2}} R = 0 .$$

Então

$$\frac{d}{dr} \left[ r^2 \left(1 - \frac{2MG}{c^2 r}\right) \frac{dR}{dr} \right] - 2R = 0 . \tag{2.68}$$

Uma solução da equação (2.68) é dada por

$$R = r - \frac{MG}{c^2}, \quad (2.69)$$

então  $dr = dR$ , e

$$\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) = 1 - \frac{\frac{2MG}{c^2}}{R + \frac{MG}{c^2}} = \frac{R - \frac{MG}{c^2}}{R + \frac{MG}{c^2}} = \frac{\left(1 - \frac{MG}{c^2 R}\right)}{\left(1 + \frac{MG}{c^2 R}\right)}. \quad (2.70)$$

Substituindo (2.70) na equação (2.61). Obtemos a métrica de Schwarzschild em *forma harmônica*:

$$-d\tau^2 = -\frac{\left(1 - \frac{MG}{c^2 R}\right)}{\left(1 + \frac{MG}{c^2 R}\right)}(dx^0)^2 + \frac{\left(1 + \frac{MG}{c^2 R}\right)}{\left(1 - \frac{MG}{c^2 R}\right)}dR^2 + \left(R + \frac{MG}{c^2}\right)^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2]. \quad (2.71)$$

## 2.8 A MÉTRICA DE KERR

Como um avanço para continuação da dissertação presente, nesta seção descrevemos a métrica de Kerr que corresponde a um corpo de rotação (ver [14]).

A forma explícita da métrica Kerr é a seguinte:

$$-d\tau^2 = -(dx^0)^2 + \Sigma \left( \frac{1}{\Delta} dr^2 + d\theta^2 \right) + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\varphi^2 + \frac{2Mr}{\Sigma} (dx^0 - a \sin^2 \theta d\varphi)^2, \quad (2.72)$$

onde

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2, \quad \Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta. \quad (2.73)$$

As coordenadas  $(x^0, r, \theta, \varphi)$ , em termos das quais a métrica tem a forma (2.72), são chamadas *coordenadas de Boyer-Lindquist*.

Desenvolvendo a equação (2.72):

$$\begin{aligned} -d\tau^2 &= -(dx^0)^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \frac{2Mr}{\Sigma} [(dx^0)^2 - 2a \sin^2 \theta dx^0 d\varphi + a^2 \sin^4 \theta d\varphi^2] \\ &\quad + \Sigma d\theta^2 + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\varphi^2 \\ &= -(dx^0)^2 + \frac{2Mr}{\Sigma} (dx^0)^2 - \frac{4Mar \sin^2 \theta}{\Sigma} dx^0 d\varphi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\varphi^2 \\ &\quad + \frac{2Mra^2 \sin^4 \theta}{\Sigma} d\varphi^2, \end{aligned} \quad (2.74)$$

obtemos uma forma equivalente da métrica kerr:

$$\begin{aligned}
 -d\tau^2 = & - \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right) (dx^0)^2 - \frac{4Mar \sin^2 \theta}{\Sigma} dx^0 d\varphi \\
 & + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \sin^2 \theta \left( r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2 r \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) d\varphi^2 .
 \end{aligned} \tag{2.75}$$

### 2.8.1 Como remover la singularidad em $\Delta = 0$

Para mostrar que  $\Delta = 0$  é uma singularidade de coordenadas, fazemos uma transformação de coordenadas que traz a métrica para uma forma que não é singular em  $\Delta = 0$ ; as novas coordenadas são chamadas de *coordenadas Kerr*. Procuramos uma família de geodésicas nulas e escolhemos um sistema de coordenadas de forma que as geodésicas nulas sejam linhas coordenadas no novo sistema.

A métrica Kerr admite duas famílias especiais de geodésicas nulas, denominadas *geodésicas nulas principais*, dadas por:

$$\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} = \left( \frac{dx^0}{d\lambda}, \frac{dr}{d\lambda}, \frac{d\theta}{d\lambda}, \frac{d\varphi}{d\lambda} \right) = \left( \frac{r^2 + a^2}{\Delta}, \pm 1, 0, \frac{a}{\Delta} \right) . \tag{2.76}$$

Onde o sinal mais (menos) corresponde a geodésicos de saída (entrada). Não provaremos explicitamente que (2.76) são geodésicas; nós só mostramos que eles são nulos, ou seja, que:

$$g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0 . \tag{2.77}$$

Isto é



$$\begin{aligned}
g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu &= -\left(\frac{r^2+a^2}{\Delta}\right)^2 + \Sigma\left[\frac{1}{\Delta}(\pm 1)^2 + (0)^2\right] + (r^2+a^2)\sin^2\theta\left(\frac{a}{\Delta}\right)^2 \\
&\quad + \frac{2Mr}{\Sigma}\left[\frac{r^2+a^2}{\Delta} - a\sin^2\theta\left(\frac{a}{\Delta}\right)\right] \\
&= -\left(\frac{r^2+a^2}{\Delta}\right)^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} + \frac{a^2}{\Delta^2}(r^2+a^2)\sin^2\theta + \frac{2Mr}{\Sigma}\left[\frac{r^2+a^2\cos^2\theta}{\Delta}\right]^2 \\
&= -\left(\frac{r^2+a^2}{\Delta}\right)^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} + \frac{a^2}{\Delta^2}(r^2+a^2)\sin^2\theta + \frac{2Mr\Sigma}{\Delta^2} \\
&= \frac{1}{\Delta^2}\left[-(r^2+a^2)^2 + \Sigma\Delta + a^2(r^2+a^2)\sin^2\theta + 2Mr\Sigma\right] \\
&= \frac{1}{\Delta^2}\left[-(r^2+a^2)(r^2+a^2-a^2\sin^2\theta) + \Sigma(r^2-2Mr+a^2+2Mr)\right] \\
&= \frac{1}{\Delta^2}\left[-(r^2+a^2)\Sigma + \Sigma(r^2+a^2)\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Conseqüentemente, o vetor tangente (2.76) é nulo.

Vamos considerar as geodésicas de entrada, e indicar o vetor tangente como  $l^\mu$ :

$$l^\mu = \left(\frac{r^2+a^2}{\Delta}, -1, 0, \frac{a}{\Delta}\right). \quad (2.78)$$

Vamos parametrizar a geodésica em termos de  $r$ :

$$\frac{dx^0}{dr} = \frac{\frac{dx^0}{d\lambda}}{\frac{dr}{d\lambda}} = \frac{r^2+a^2}{-1}, \quad \frac{d\varphi}{dr} = \frac{\frac{d\varphi}{d\lambda}}{\frac{dr}{d\lambda}} = \frac{a}{-1},$$

então:

$$\frac{dx^0}{dr} = -\frac{r^2+a^2}{\Delta}, \quad (2.79)$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{a}{\Delta}. \quad (2.80)$$

Integrando (2.79) em relação a  $r$ :

$$x^0 = \int \left(\frac{dx^0}{dr}\right) dr = -\int \left(\frac{r^2+a^2}{\Delta}\right) dr + p, \quad (2.81)$$

onde  $p$  é uma constante que não depende de  $r$  ( $\frac{dp}{dr} = 0$ ).

Integrando (2.80) em relação a  $r$ :

$$\varphi = \int \left( \frac{d\varphi}{dr} \right) dr = - \int \left( \frac{a}{\Delta} \right) dr + \bar{\varphi} , \quad (2.82)$$

onde  $\bar{\varphi}$  é uma constante que não depende de  $r$ , ( $\frac{d\bar{\varphi}}{dr} = 0$ ).

Queremos que essas geodésicas sejam linhas coordenadas de nosso novo sistema; assim, uma de nossas coordenadas é  $r$ , enquanto as outras são quantidades constantes ao longo de cada geodésica pertencente à família. Um deles é  $\theta$ ; as duas coordenadas restantes são obtidas das equações (2.81) e (2.82), estas são:

$$p = x^0 + \int \left( \frac{r^2 + a^2}{\Delta} \right) dr , \quad (2.83)$$

$$\bar{\varphi} = \varphi + \int \left( \frac{a}{\Delta} \right) dr , \quad (2.84)$$

e o vetor tangente da geodésica entrante principal nula (2.78), está nas novas coordenadas  $(p, r, \theta, \bar{\varphi})$ :

$$\begin{aligned} \frac{dp}{d\lambda} &= \frac{dp}{dr} \frac{dr}{d\lambda} = (0)(-1) = 0 \\ \frac{dr}{d\lambda} &= -1 \\ \frac{d\theta}{d\lambda} &= 0 \\ \frac{d\bar{\varphi}}{d\lambda} &= \frac{d\bar{\varphi}}{dr} \frac{dr}{d\lambda} = (0)(-1) = 0 \end{aligned}$$

então:

$$l^\mu = (0, -1, 0, 0) . \quad (2.85)$$

Podemos agora calcular o tensor métrico no sistema de coordenadas  $(p, r, \theta, \bar{\varphi})$ . Lembramos que, nas coordenadas de Boyer-Lindquist,

$$-d\tau^2 = -(dx^0)^2 + \Sigma \left( \frac{1}{\Delta} dr^2 + d\theta^2 \right) + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\varphi^2 + \frac{2Mr}{\Sigma} (dx^0 - a \sin^2 \theta d\varphi)^2 . \quad (2.86)$$

Da equação (2.83) e (2.84) temos:

$$dx^0 = dp - \left( \frac{r^2 + a^2}{\Delta} \right) dr , \quad d\varphi = d\bar{\varphi} - \left( \frac{a}{\Delta} \right) dr , \quad (2.87)$$

então:

$$-(dx^0)^2 = -dp^2 + 2\left(\frac{r^2 + a^2}{\Delta}\right) dr dp - \left(\frac{r^2 + a^2}{\Delta}\right)^2 dr^2, \quad (2.88)$$

$$\begin{aligned} (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\varphi^2 &= (r^2 + a^2) \sin^2 \theta \left(d\bar{\varphi} - \frac{a}{\Delta} dr\right)^2 \\ &= (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\bar{\varphi}^2 + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta \frac{a^2}{\Delta^2} dr^2 \\ &\quad - 2\frac{a}{\Delta} (r^2 + a^2) \sin^2 \theta dr d\bar{\varphi}, \end{aligned} \quad (2.89)$$

$$\begin{aligned} \frac{2Mr}{\Sigma} (dx^0 - a \sin^2 \theta d\varphi)^2 &= \frac{2Mr}{\Sigma} \left[ dp - \left(\frac{r^2 + a^2}{\Delta}\right) dr - a \sin^2 \theta d\bar{\varphi} + \frac{a^2 \sin^2 \theta}{\Delta} dr \right]^2 \\ &= \frac{2Mr}{\Sigma} \left[ dp - a \sin^2 \theta d\bar{\varphi} - \left(\frac{r^2 - a \cos^2 \theta}{\Delta}\right) dr \right]^2 \\ &= \frac{2Mr}{\Sigma} \left[ dp - a \sin^2 \theta d\bar{\varphi} - \frac{\Sigma}{\Delta} dr \right]^2 \\ &= \frac{2Mr}{\Sigma} dp^2 + \frac{2Mr}{\Sigma} a^2 \sin^4 \theta d\bar{\varphi}^2 + \frac{2Mr\Sigma}{\Delta^2} dr^2 \\ &\quad - \frac{4Mr}{\Sigma} a \sin^2 \theta dp d\bar{\varphi} - \frac{4Mr}{\Delta} dp dr \\ &\quad + \frac{4Mr}{\Delta} a \sin^2 \theta d\bar{\varphi} dr, \end{aligned} \quad (2.90)$$

$$\begin{aligned} -(r^2 + a^2)^2 + \Sigma\Delta + a^2 \sin^2 \theta (r^2 + a^2) + 2Mr\Sigma &= -(r^2 + a^2)^2 + \Sigma(r^2 + a^2) + a^2 \sin^2 \theta (r^2 + a^2) \\ &= (r^2 + a^2) \left[ -r^2 - a^2 + r^2 + a^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta \right] \\ &= (r^2 + a^2) \left[ -a^2 + a^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \right] \\ &= (r^2 + a^2)(0) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.91)$$

Substituindo as equações (2.88), (2.89), (2.90), (2.91) em Boyer-Lindquist, e usando  $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$ ,  $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ :

$$\begin{aligned}
-d\tau^2 &= -\left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right) dp^2 + \frac{2}{\Delta}(r^2 + a^2 - 2Mr)dpdr \\
&\quad + \frac{1}{\Delta^2} \left[-(r^2 + a^2)^2 + \Sigma\Delta + a^2 \sin^2 \theta(r^2 + a^2) + 2Mr\Sigma\right] dr^2 \\
&\quad + \sin^2 \theta \left[(r^2 + a^2) + \frac{2Mr}{\Sigma}a^2 \sin^2 \theta\right] d\bar{\varphi}^2 \\
&\quad - \frac{2a \sin^2 \theta}{\Delta} (r^2 + a^2 - 2Mr) d\bar{\varphi}dr - \frac{4Mr}{\Sigma}a \sin^2 \theta dpd\bar{\varphi} + \Sigma d\theta^2 \\
&= -\left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right) dp^2 + \frac{2}{\Delta}(\Delta)dpdr + \frac{1}{\Delta^2} (0) dr^2 + \sin^2 \theta \left[(r^2 + a^2) + \frac{2Mr}{\Sigma}a^2 \sin^2 \theta\right] d\bar{\varphi}^2 \\
&\quad - \frac{2a \sin^2 \theta}{\Delta}(\Delta)d\bar{\varphi}dr - \frac{4Mr}{\Sigma}a \sin^2 \theta dpd\bar{\varphi} + \Sigma d\theta^2 ,
\end{aligned}$$

então nós temos:

$$\begin{aligned}
-d\tau^2 &= -\left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right) dp^2 + 2dpdr + \sin^2 \theta \left[(r^2 + a^2) + \frac{2Mr}{\Sigma}a^2 \sin^2 \theta\right] d\bar{\varphi}^2 \\
&\quad - 2a \sin^2 \theta d\bar{\varphi}dr - \frac{4Mr}{\Sigma}a \sin^2 \theta dpd\bar{\varphi} + \Sigma d\theta^2 .
\end{aligned} \tag{2.92}$$

As coordenadas  $(p, r, \theta, \bar{\varphi})$  são as coordenadas de Kerr. Nestas coordenadas a métrica não é singular em  $\Delta = 0$ . Isso significa que, enquanto as coordenadas Boyer-Lindquist são definidas em todo o espaço-tempo, exceto as subvariedades  $\Delta = 0$  e  $\Sigma = 0$ , as coordenadas Kerr também podem ser definidas nessa subvariedade. Então, depois de alterar as coordenadas para o quadro de Kerr, estendemos variedade para incluir a subvariedade  $\Delta = 0$ .

Desenvolvimento da equação (2.92) temos

$$\begin{aligned}
-d\tau^2 &= -dp^2 + 2dpdr + \Sigma d\theta^2 + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\bar{\varphi}^2 - 2a \sin^2 \theta d\bar{\varphi}dr \\
&\quad + \frac{2Mr}{\Sigma} \left[dp^2 - 2a \sin^2 \theta dpd\bar{\varphi} + (a \sin^2 \theta d\bar{\varphi})^2\right] \\
&= -dp^2 + 2dpdr + \Sigma d\theta^2 + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\bar{\varphi}^2 - 2a \sin^2 \theta d\bar{\varphi}dr \\
&\quad + \frac{2Mr}{\Sigma} \left[dp - a \sin^2 \theta d\bar{\varphi}\right]^2 .
\end{aligned} \tag{2.93}$$

Nós definimos  $\bar{t} = p - r$ , então  $-dp^2 + 2dpdr = -d\bar{t}^2 + dr^2$  é cumprido. Substituindo isso na equação (2.93), temos:

$$\begin{aligned}
-d\tau^2 &= -d\bar{t}^2 + dr^2 + \Sigma d\theta^2 + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\bar{\varphi}^2 - 2a \sin^2 \theta d\bar{\varphi}dr \\
&\quad + \frac{2Mr}{\Sigma} (d\bar{t} + dr - a \sin^2 \theta d\bar{\varphi})^2 .
\end{aligned} \tag{2.94}$$

### 2.8.2 A métrica nas coordenadas de Kerr-Schild

Seja a métrica de Kerr em coordenadas  $(\bar{t}, r, \theta, \bar{\varphi})$ , dada pela equação (2.94):

$$\begin{aligned}
-d\tau^2 &= -d\bar{t}^2 + dr^2 + \Sigma d\theta^2 + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\bar{\varphi}^2 - 2a \sin^2 \theta d\bar{\varphi} dr \\
&\quad + \frac{2Mr}{\Sigma} (d\bar{t} + dr - a \sin^2 \theta d\bar{\varphi})^2 .
\end{aligned} \tag{2.95}$$

As coordenadas de Kerr-Schild  $(\bar{t}, x, y, z)$  são um quadro cartesiano definido por

$$\begin{aligned}
x &= \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \cos \left( \bar{\varphi} + \arctan \left( \frac{a}{r} \right) \right) , \\
y &= \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \sin \left( \bar{\varphi} + \arctan \left( \frac{a}{r} \right) \right) , \\
z &= r \cos \theta .
\end{aligned} \tag{2.96}$$

seja  $\alpha = \arctan \frac{a}{r}$ , temos

$$\begin{aligned}
\sqrt{r^2 + a^2} \cos(\bar{\varphi} + \alpha) &= r \cos \bar{\varphi} - a \sin \bar{\varphi} , \\
\sqrt{r^2 + a^2} \sin(\bar{\varphi} + \alpha) &= a \cos \bar{\varphi} + r \sin \bar{\varphi} .
\end{aligned} \tag{2.97}$$

Então, usando (2.97), podemos escrever (2.96) como

$$\begin{aligned}
x &= \sin \theta (r \cos \bar{\varphi} - a \sin \bar{\varphi}) , \\
y &= \sin \theta (r \sin \bar{\varphi} + a \cos \bar{\varphi}) , \\
z &= r \cos \theta .
\end{aligned} \tag{2.98}$$

Derivando, temos

$$\begin{aligned}
dx &= \cos \theta (r \cos \bar{\varphi} - a \sin \bar{\varphi}) d\theta + \sin \theta \cos \bar{\varphi} dr - \sin \theta (r \sin \bar{\varphi} + a \cos \bar{\varphi}) d\bar{\varphi} , \\
dy &= \cos \theta (r \sin \bar{\varphi} + a \cos \bar{\varphi}) d\theta + \sin \theta \sin \bar{\varphi} dr + \sin \theta (r \cos \bar{\varphi} - a \sin \bar{\varphi}) d\bar{\varphi} , \\
dz &= -r \sin \theta d\theta + \cos \theta dr .
\end{aligned} \tag{2.99}$$

Assim, temos as seguintes equações:

$$\begin{aligned}
dx^2 + dy^2 + dz^2 &= dr^2 + [r^2 \sin^2 \theta + (r^2 + a^2) \cos^2 \theta] d\theta^2 + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\bar{\varphi}^2 \\
&\quad - 2a \sin^2 \theta dr d\bar{\varphi} \\
&= dr^2 + \Sigma d\theta^2 + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\bar{\varphi}^2 - 2a \sin^2 \theta dr d\bar{\varphi} ,
\end{aligned} \tag{2.100}$$

$$\begin{aligned}
xdx + ydy &= x \left( \frac{\cos \theta}{\sin \theta} x d\theta + \sin \theta \cos \bar{\varphi} dr - y d\bar{\varphi} \right) + y \left( \frac{\cos \theta}{\sin \theta} y d\theta + \sin \theta \sin \bar{\varphi} dr + x d\bar{\varphi} \right) \\
&= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} (x^2 + y^2) d\theta + \sin \theta (x \cos \bar{\varphi} + y \sin \bar{\varphi}) dr \\
&= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\theta + \sin^2 \theta r dr \\
&= (r^2 + a^2) \sin \theta \cos \theta d\theta + r \sin^2 \theta dr ,
\end{aligned} \tag{2.101}$$

$$\begin{aligned}
ydx - xdy &= y \left( \frac{\cos \theta}{\sin \theta} x d\theta + \sin \theta \cos \bar{\varphi} dr - y d\bar{\varphi} \right) - x \left( \frac{\cos \theta}{\sin \theta} y d\theta + \sin \theta \sin \bar{\varphi} dr + x d\bar{\varphi} \right) \\
&= \sin \theta (y \cos \bar{\varphi} - x \sin \bar{\varphi}) dr - (x^2 + y^2) d\bar{\varphi} \\
&= \sin \theta (a \sin \theta) dr - (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\bar{\varphi} \\
&= a \sin^2 \theta dr - (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\bar{\varphi} ,
\end{aligned} \tag{2.102}$$

$$zdz = -r^2 \sin \theta \cos \theta d\theta + r \cos^2 \theta dr . \tag{2.103}$$

Entao de (2.101) e (2.102), temos

$$\begin{aligned}
r(xdx + ydy) + a(ydx - xdy) &= r(a^2 + a^2) \sin \theta \cos \theta d\theta + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta dr \\
&\quad - a(r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\bar{\varphi} .
\end{aligned} \tag{2.104}$$

Dividindo (2.104) entre  $r^2 + a^2$ ,

$$\frac{r(xdx + ydy) + a(ydx - xdy)}{r^2 + a^2} = r \sin \theta \cos \theta d\theta + \sin^2 \theta dr - a \sin^2 \theta d\bar{\varphi} . \tag{2.105}$$

Adicionando  $\frac{zdz}{r}$  à equação (2.105),

$$\frac{r(xdx + ydy) + a(ydx - xdy)}{r^2 + a^2} + \frac{zdz}{r} = dr - a \sin^2 \theta d\bar{\varphi} . \tag{2.106}$$

Também,

$$\frac{2Mr}{\Sigma} = \frac{2Mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} = \frac{2Mr^3}{r^4 + a^2 z^2} . \tag{2.107}$$

Substituindo (2.100), (2.106), (2.107) em (2.95) . A métrica nas coordenadas de Kerr-Schild é então

$$-d\tau^2 = -d\bar{t}^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{2Mr^3}{r^2 + a^2 z^2} \left[ d\bar{t} + \frac{r(xdx + ydy) + a(ydx - xdy)}{r^2 + a^2} + \frac{zdz}{r} \right]^2 . \tag{2.108}$$

A métrica tem a forma:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + H l_{\mu} l_{\nu} , \tag{2.109}$$

onde

$$H \equiv \frac{2Mr^3}{r^4 + a^2 z^2} , \tag{2.110}$$

e, nas coordenadas de Kerr-Schild,

$$l_\mu dx^\mu = d\bar{t} + \frac{r(xdx + ydy) + a(ydx - xdy)}{r^2 + a^2} + \frac{zdz}{r}, \quad (2.111)$$

enquanto em coordenadas de Kerr

$$l_\mu dx^\mu = d\bar{t} + dr - a \sin^2 \theta d\bar{\varphi} = dp - a \sin^2 \theta d\bar{\varphi}. \quad (2.112)$$

Por outro lado, usando a equação (5.6) para  $L = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$  na ação  $S[\xi] = \frac{m}{2} \int g_{\mu\nu} \dot{\xi}^\mu \dot{\xi}^\nu ds$  temos

$$\bullet \frac{\partial L}{\partial \bar{t}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{t}}} \right) = 0.$$

Então,

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{t}} + \frac{4Mr^3 a^2 z \dot{z}}{(r^2 + a^2 z^2)^2} \left[ \dot{\bar{t}} + \frac{r(x\dot{x} + y\dot{y}) + a(y\dot{x} - x\dot{y})}{r^2 + a^2} + \frac{z\dot{z}}{r} \right] \\ - \frac{2Mr^3}{r^2 + a^2 z^2} \left\{ \ddot{\bar{t}} + \frac{r[(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + x\ddot{x} + y\ddot{y}] + a(y\ddot{x} - x\ddot{y})}{r^2 + a^2} + \frac{(\dot{z})^2 + z\ddot{z}}{r} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (2.113)$$

Para  $(\bar{t}, x = 0, y = 0, z)$ , temos:

$$\ddot{\bar{t}} + \frac{4Mr^3 a^2 z \dot{z}}{(r^2 + a^2 z^2)^2} \left( \dot{\bar{t}} + \frac{z\dot{z}}{r} \right) - \frac{2Mr^3}{r^2 + a^2 z^2} \left( \ddot{\bar{t}} + \frac{(\dot{z})^2}{r} + \frac{z\ddot{z}}{r} \right) = 0. \quad (2.114)$$

$$\bullet \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0.$$

Então,

$$\begin{aligned} -2\ddot{x} \\ + \frac{8Mr^3}{(r^2 + a^2 z^2)(r^2 + a^2)} \left[ \dot{\bar{t}} + \frac{r(x\dot{x} + y\dot{y}) + a(y\dot{x} - x\dot{y})}{r^2 + a^2} + \frac{z\dot{z}}{r} \right] \left[ -a\dot{y} + \frac{a^2 z \dot{z}(rx + ay)}{r^2 + a^2 z^2} \right] \\ - \frac{4mr^3}{r^2 + a^2 z^2} \left[ \ddot{\bar{t}} + \frac{r[(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + x\ddot{x} + y\ddot{y}] + a(y\ddot{x} - x\ddot{y})}{r^2 + a^2} + \frac{(\dot{z})^2 + z\ddot{z}}{r} \right] \left( \frac{rx + ay}{r^2 + a^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.115)$$

Para  $(\bar{t}, x = 0, y = 0, z)$ , temos:

$$0 = 0.$$

$$\bullet \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = 0 .$$

Então,

$$\begin{aligned} & -2\ddot{y} \\ & + \frac{8Mr^3}{(r^2 + a^2z^2)(r^2 + a^2)} \left[ \dot{\bar{t}} + \frac{r(x\dot{x} + y\dot{y}) + a(y\dot{x} - x\dot{y})}{r^2 + a^2} + \frac{z\dot{z}}{r} \right] \left[ a\dot{x} + \frac{a^2z\dot{z}(ry - ax)}{r^2 + a^2z^2} \right] \\ & - \frac{4mr^3}{r^2 + a^2z^2} \left[ \ddot{\bar{t}} + \frac{r[(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + x\ddot{x} + y\ddot{y}] + a(y\ddot{x} - x\ddot{y})}{r^2 + a^2} + \frac{(\dot{z})^2 + z\ddot{z}}{r} \right] \left( \frac{ry - ax}{r^2 + a^2} \right) = 0 . \end{aligned} \quad (2.116)$$

Para  $(\bar{t}, x = 0, y = 0, z)$ , temos:

$$0 = 0 .$$

$$\bullet \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) = 0 .$$

Então,

$$\begin{aligned} & -2\ddot{z} + \frac{8Mr^3a^2z\dot{z}}{(r^2 + a^2z^2)^2} \left[ \dot{\bar{t}} + \frac{r(x\dot{x} + y\dot{y}) + a(y\dot{x} - x\dot{y})}{r^2 + a^2} + \frac{z\dot{z}}{r} \right] \left( \frac{z}{r} \right) \\ & - \frac{4Mr^3}{r^2 + a^2z^2} \left\{ \ddot{\bar{t}} + \frac{r[(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + x\ddot{x} + y\ddot{y}] + a[y\ddot{x} - x\ddot{y}]}{r^2 + a^2} + \frac{(\dot{z})^2 + z\ddot{z}}{r} \right\} \left( \frac{z}{r} \right) = 0 . \end{aligned} \quad (2.117)$$

Para  $(\bar{t}, x = 0, y = 0, z)$ , temos:

$$\ddot{z} - \frac{4Mr^3a^2z\dot{z}}{(r^2 + a^2z^2)^2} \left( \dot{\bar{t}} + \frac{z}{r}\dot{z} \right) \left( \frac{z}{r} \right) + \frac{2Mr^3}{r^2 + a^2z^2} \left( \ddot{\bar{t}} + \frac{(\dot{z})^2}{r} + \frac{z}{r}\ddot{z} \right) \left( \frac{z}{r} \right) = 0 \quad (2.118)$$

Assim, a partir das equações (2.114) e (2.118) podemos obter a seguinte equação:

$$\frac{z}{r}\ddot{\bar{t}} + \ddot{z} = 0 \quad (2.119)$$



### 3 RELAÇÕES ENTRE QUANTIDADES BÁSICAS QUATRO E TRIDIMENSIONAIS EM RG

Por construção de transformações de Lorentz, a velocidade da luz na relatividade especial é uma quantidade independente do observador. Na presença da gravidade, substituímos o espaço de Minkowski pelo variedade de Lorentz de quatro dimensões (ou seja, variedade de Riemann com métrica de assinatura  $(-1, +1, +1, +1)$ ),

$$\mathbf{M}^{(1,3)} = \{x^\mu, g_{\mu\nu}(x^\rho)\} . \quad (3.1)$$

Considere um observador que marca eventos usando as coordenadas (3.1) para descrever o movimento de uma partícula em um campo gravitacional com métrica  $g_{\mu\nu}$ . A definição formal das grandezas tridimensionais pode ser obtida representando o quatro-intervalo  $ds^2$  em forma diagonal por blocos 1 + 3.

$$\begin{aligned} -ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu &= g_{00}dx^0 dx^0 + g_{i0}dx^i dx^0 + g_{0j}dx^0 dx^j + g_{ij}dx^i dx^j \\ &= g_{00} \left[ (dx^0)^2 + 2\frac{g_{0i}}{g_{00}}dx^0 dx^i + \frac{g_{ij}}{g_{00}}dx^i dx^j \right] \\ &= g_{00} \left[ \left( dx^0 + \frac{g_{0i}}{g_{00}}dx^i \right)^2 - \left( \frac{g_{0i}}{g_{00}}dx^i \right)^2 + \frac{g_{ij}}{g_{00}}dx^i dx^j \right] \\ &= g_{00} \left[ \left( dx^0 + \frac{g_{0i}}{g_{00}}dx^i \right)^2 - \frac{(g_{0i}dx^i)(g_{0j}dx^j)}{g_{00}} + g_{ij}dx^i dx^j \right] \\ &= -c^2 \frac{(-g_{00})}{c^2} \left( dx^0 + \frac{g_{0i}}{g_{00}}dx^i \right)^2 + \left( g_{ij} - \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}} \right) dx^i dx^j \\ &= -c^2 \left[ \frac{\sqrt{-g_{00}}}{c} \left( dx^0 + \frac{g_{0i}}{g_{00}}dx^i \right) \right]^2 + \left( g_{ij} - \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}} \right) dx^i dx^j , \end{aligned}$$

isto sugere introduzir o intervalo de tempo infinitesimal e a distância da seguinte forma:

$$dt = \frac{\sqrt{-g_{00}}}{c} \left( dx^0 + \frac{g_{0i}}{g_{00}}dx^i \right) \equiv -\frac{g_{0\mu}dx^\mu}{c\sqrt{-g_{00}}} , \quad (3.2)$$

$$dl^2 = \left( g_{ij} - \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}} \right) dx^i dx^j \equiv \gamma_{ij}dx^i dx^j , \quad (3.3)$$

portanto, o fator de conversão entre acréscimo de coordenada  $\frac{dx^0}{c}$  e o tempo  $dt$  medido pelo relógio do laboratório é

$$\frac{dt}{dx^0} = \frac{\sqrt{-g_{00}}}{c} \left( 1 + \frac{g_{0i}}{g_{00}} \frac{dx^i}{dx^0} \right) . \quad (3.4)$$

Da equação (3.2) segue que o tempo de laboratório coincide com o acréscimo de coordenadas síncronas onde a métrica adquire a forma  $g_{00} = -1$  e  $g_{0i} = 0$ . Se a métrica não é desta forma, não podemos descrever a trajetória  $\mathbf{x}(t)$  usando o tempo  $t$  como um parâmetro global. Mas podemos descrevê-lo pela função  $\mathbf{x}(x^0)$  e, em seguida, determinar várias características diferenciais (como velocidade e aceleração) usando o fator de conversão (3.4). Deste jeito, velocidades tri-dimensional da partícula é

$$v^i = \left( \frac{dt}{dx^0} \right)^{-1} \frac{dx^i}{dx^0}, \quad (3.5)$$

$$\partial_t \equiv \left( \frac{dt}{dx^0} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial x^0}, \quad \frac{d}{dt} \equiv \left( \frac{dt}{dx^0} \right)^{-1} \frac{d}{dx^0}, \quad (3.6)$$

então, simbolicamente

$$v^i = \frac{dx^i}{dt}, \quad v = \frac{dl}{dt}. \quad (3.7)$$

As definições de  $\mathbf{v}$  e  $v$  são consistentes:  $v^2 = \left( \frac{dl}{dt} \right)^2 = \mathbf{v}^2 = v^i \gamma_{ij} v^j$ .

Geometria tridimensional é determinada pela métrica  $\gamma_{ij}(x^0, \mathbf{x})$ . Em particular, quadrado de comprimento de um vetor é dado por  $\mathbf{v} \gamma \mathbf{v} = v^i \gamma_{ij} v^j$ . Usando essa notação, o intervalo infinitesimal adquire a forma similar à relatividade especial

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2 = dt^2 (c^2 - \mathbf{v} \gamma \mathbf{v}). \quad (3.8)$$

Essa igualdade é válida em qualquer sistema de coordenadas  $x^\mu$ . Assim, uma partícula com a lei de propagação  $ds^2 = 0$  tem a velocidade  $\mathbf{v}^2 = c^2$ , e esta é uma declaração independente de coordenadas. O valor da constante  $c$ , introduzido acima manualmente, é fixado a partir do limite: a equação (3.2) implica  $dx^0 = c dt$  quando  $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$ .

Esses truques bastante formais são baseados [2] na análise de noção de simultaneidade na relatividade geral e no análise do limite. O quatro-intervalo da relatividade especial tem interpretação física direta em dois casos. Primeiro, para dois eventos que ocorrem no mesmo ponto, o quatro-intervalo é proporcional ao intervalo de tempo,  $dt = -\frac{ds}{c}$ . Em segundo lugar, para eventos simultâneos, o quatro-intervalo coincide com a distância,  $dl = ds$ . Assumindo que o mesmo se aplica à relatividade geral, vamos analisar o intervalo de tempo infinitesimal e a distância entre dois eventos com as coordenadas  $x^\mu$  e  $x^\mu + dx^\mu$ . A linha do mundo  $y^\mu = (y^0, \mathbf{y} = \text{constante})$  está associada ao relógio de laboratório colocado

no ponto espacial  $\mathbf{y}$ . Assim, o intervalo de tempo entre os eventos  $(y^0, \mathbf{y})$  e  $(y^0 + dy^0, \mathbf{y})$  medido pelo relógio é

$$dt = -\frac{ds}{c} = \frac{\sqrt{-g_{00}}}{c} dy^0. \quad (3.9)$$

Considere o evento  $x^\mu$  infinitesimalmente fechado para a linha do mundo ( $y^0, \mathbf{y} = \text{constante}$ ). Para encontrar o evento na linha do mundo que é simultâneo ao  $x^\mu$ , primeiro procuramos os eventos  $y_{(1)}^\mu$  e  $y_{(2)}^\mu$  que possuem intervalo nulo com  $x^\mu$ ,  $ds(x^\mu, y_{(a)}^\mu) = 0$ . A equação  $g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0$  com  $dx^\mu = x^\mu - y^\mu$  tem duas soluções  $dx_\pm^0 = \frac{g_{0i} dx^i}{-g_{00}} \pm \frac{\sqrt{dx^\gamma dx^\gamma}}{\sqrt{-g_{00}}}$ , então  $y_{(1)}^0 = x^0 - dx_+^0$  e  $y_{(2)}^0 = x^0 - dx_-^0$ . Em segundo lugar, calculamos o ponto médio

$$y^0 = \frac{1}{2}(y_{(1)}^0 + y_{(2)}^0) = x^0 + \frac{g_{0i} dx^i}{g_{00}}. \quad (3.10)$$

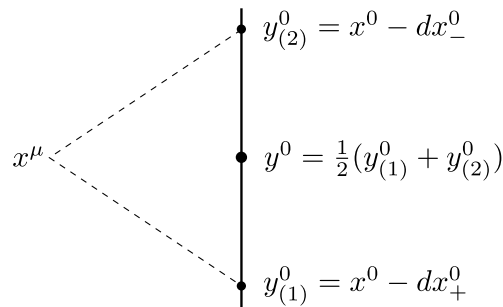


Figura 4 – Definição de eventos simultâneos. A linha vertical representa a linha mundial do relógio do laboratório. Os pontos  $y_{(1)}^0$  e  $y_{(2)}^0$  têm um intervalo nulo com  $x^\mu$ . Então, o ponto médio  $y^0$  representa o evento simultâneo com  $x^\mu$ .

Por definição, o evento  $(y^0, \mathbf{y})$  com a coordenada nula (3.10) é simultâneo ao evento  $(x^0, \mathbf{x})$ , veja a Figura 4. Desta forma sincronizamos os relógios nos pontos espaciais  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ . De acordo com (3.10), os eventos simultâneos possuem diferentes coordenadas nulas, e a diferença  $dx^0$  obedece à equação

$$dx^0 + \frac{g_{0i} dx^i}{g_{00}} = 0. \quad (3.11)$$

Considere uma partícula que se propaga de  $x^\mu$  para  $x^\mu + dx^\mu$ . Vamos calcular o intervalo de tempo e distância entre esses dois eventos. De acordo com equação (3.10), o evento

$$\left( x^0 + dx^0 + \frac{g_{0i} dx^i}{g_{00}}, \mathbf{x} \right), \quad (3.12)$$

no ponto espacial  $\mathbf{x}$  é simultâneo com  $x^\mu + dx^\mu$ , veja a Figura 5. A equação (3.12) determina o evento  $A$  (no ponto espacial  $\mathbf{x}$ ) simultâneo com  $x^\mu + dx^\mu$ . Então o intervalo de tempo

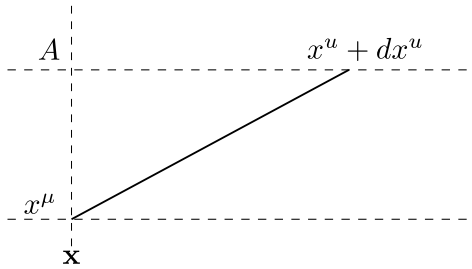


Figura 5 – Tempo e distância entre os eventos  $x^\mu$  e  $x^\mu + dx^\mu$ . A equação (3.12) determina o evento  $A$  (no ponto espacial  $\mathbf{x}$ ) simultâneo com o  $x^\mu + dx^\mu$ . Portanto, o intervalo de tempo entre  $x^\mu$  e  $x^\mu + dx^\mu$  coincide com o intervalo entre  $x^\mu$  e  $A$ , e é dado pela equação (3.13). A distância entre  $x^\mu$  e  $x^\mu + dx^\mu$  coincide com a distância entre  $x^\mu + dx^\mu$  e  $A$ , esta última é dada em (3.14).

entre  $x^\mu$  e  $x^\mu + dx^\mu$  coincide com o intervalo entre  $x^\mu$  e  $A$ . Distância entre  $x^\mu$  e  $x^\mu + dx^\mu$  coincide com a distância entre  $x^\mu + dx^\mu$  e  $A$ .

De acordo com (3.9) e (3.10), o intervalo de tempo entre os eventos  $x^\mu$  e (3.12) é

$$dt = \frac{\sqrt{-g_{00}}}{c} \left( dx^0 + \frac{g_{0i}}{g_{00}} dx^i \right). \quad (3.13)$$

Como os eventos  $x^\mu + dx^\mu$  e (3.12) são simultâneos, esta equação também dá o intervalo de tempo entre  $x^\mu$  e  $x^\mu + dx^\mu$ . Além disso, a diferença de coordenadas entre os eventos  $x^\mu + dx^\mu$  e (3.12) é  $dz^\mu = \left( -\frac{g_{0i} dx^i}{g_{00}}, dx^i \right)$ . Como são simultâneos, a distância entre eles é

$$dl^2 = -ds^2 = g_{\mu\nu} dz^\mu dz^\nu = \left( g_{ij} - \frac{g_{0i} g_{0j}}{g_{00}} \right) dx^i dx^j \equiv \gamma dx^i dx^j. \quad (3.14)$$

Como (3.12) ocorre no mesmo ponto espacial de  $x^\mu$ , esta equação também encontra a distância entre  $x^\mu$  e  $x^\mu + dx^\mu$ . As equações (3.13) e (3.14) coincidem com as definições formais apresentadas anteriormente, veja as equações (3.2) e (3.3).

#### 4 ACELERAÇÃO TRI-DIMENSIONAL NA RG

A partícula pontual na relatividade geral segue uma linha geodésica, e esperamos que durante sua evolução no campo gravitacional a partícula não consiga atingir a velocidade da luz. Isto implica que a aceleração longitudinal deve desaparecer quando a velocidade da partícula se aproxima de  $c$ . Para analisar isso, primeiro usamos a equação geodésica para obter a derivada  $\frac{dv^i}{dt}$  do vetor velocidade (3.5). Na relatividade geral é costume de trabalhar com equação de geodésica na parametrização natural:

$$\nabla_s \frac{dx^\mu}{ds} \equiv \frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0, \quad (4.1)$$

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = -1, \quad (4.2)$$

onde

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\alpha g_{\nu\beta} + \partial_\beta g_{\alpha\nu} - \partial_\nu g_{\alpha\beta}). \quad (4.3)$$

Ela não é apropriada para nós, pois nos estamos interessados no limite  $v \rightarrow c$  onde  $ds^2 \rightarrow 0$ , ou seja, perde sentido. Então nós reescrevemos (4.1) em parametrização arbitrária  $\tau$ .

De (4.2), multiplicando por  $\frac{ds^2}{d\tau^2}$  se tem,

$$-\frac{ds^2}{d\tau^2} = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu, \quad (4.4)$$

então

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{\sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}} = \frac{1}{\sqrt{-\dot{x}g\dot{x}}}, \quad (4.5)$$

onde  $\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$  e  $\dot{x}g\dot{x} = \dot{x}^\mu g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu$ .

Substituindo em (4.1), obtemos

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{dx^\mu}{ds} \right) + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0,$$

$$\frac{d\tau}{ds} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{d\tau}{ds} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{d\tau}{ds} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{d\tau}{ds} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{-\dot{x}g\dot{x}}} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{1}{\sqrt{-\dot{x}g\dot{x}}} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{1}{\sqrt{-\dot{x}g\dot{x}}} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{1}{\sqrt{-\dot{x}g\dot{x}}} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{-\dot{x}g\dot{x}}} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\dot{x}^\mu}{\sqrt{-\dot{x}g\dot{x}}} \right) = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{\dot{x}^\alpha}{\sqrt{-\dot{x}g\dot{x}}} \frac{\dot{x}^\beta}{\sqrt{-\dot{x}g\dot{x}}}, \quad (4.6)$$

onde  $\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ .

(4.6) é a equação de geodésica em parametrização arbitrária, compare com seção 2.3.

De acordo com discussão feita na introdução, vamos trabalhar com geodésica parametrizada:  $x^0 = \tau$ ,  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\tau)$ , ou seja  $x^0$  é considerado como o parâmetro. Então é suficiente substituir  $\tau$  por  $x^0$  na equação (4.6).

Vamos realizar alguns cálculos que nos levarão à definição de aceleração tridimensional:

Da equação (3.8), temos

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2 = dt^2(c^2 - \mathbf{v}\gamma\mathbf{v}),$$

então

$$\frac{ds}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \sqrt{c^2 - \mathbf{v}\gamma\mathbf{v}}, \quad (4.7)$$

igualando a equação (4.5) com (4.7)

$$\sqrt{-\dot{x}g\dot{x}} = \frac{ds}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \sqrt{c^2 - \mathbf{v}\gamma\mathbf{v}}, \quad (4.8)$$

logo para  $\tau = x^0$  em (4.8), tem se

$$\sqrt{-\dot{x}g\dot{x}} = \frac{dt}{dx^0} \sqrt{c^2 - \mathbf{v}\gamma\mathbf{v}}. \quad (4.9)$$

Substituindo a equação (4.9) em (4.6) obtemos

$$\frac{1}{\sqrt{c^2 - \mathbf{v}\gamma\mathbf{v}}} \left( \frac{dt}{dx^0} \right)^{-1} \frac{d}{dx^0} \left[ \frac{1}{\sqrt{c^2 - \mathbf{v}\gamma\mathbf{v}}} \left( \frac{dt}{dx^0} \right)^{-1} \frac{dx^i}{dx^0} \right]$$

$$+ \Gamma_{\alpha\beta}^i \frac{1}{\sqrt{c^2 - \mathbf{v}\gamma\mathbf{v}}} \left( \frac{dt}{dx^0} \right)^{-1} \frac{dx^\alpha}{dx^0} \frac{1}{\sqrt{c^2 - \mathbf{v}\gamma\mathbf{v}}} \left( \frac{dt}{dx^0} \right)^{-1} = 0. \quad (4.10)$$

Usando a equação (3.5) e  $v^i = \left(\frac{dt}{dx^0}\right)^{-1} \frac{dx^i}{dx^0}$ , temos

$$\frac{1}{\sqrt{c^2 - \mathbf{v}\gamma\mathbf{v}}} \left(\frac{dt}{dx^0}\right)^{-1} \frac{d}{dx^0} \left[ \frac{1}{\sqrt{c^2 - \mathbf{v}\gamma\mathbf{v}}} v^i \right] + \left(\frac{1}{\sqrt{c^2 - \mathbf{v}\gamma\mathbf{v}}}\right)^2 \Gamma_{\alpha\beta}^i v^\alpha v^\beta = 0$$

ou

$$\left(\frac{dt}{dx^0}\right)^{-1} \frac{d}{dx^0} \left[ \frac{v^i}{\sqrt{c^2 - \mathbf{v}\gamma\mathbf{v}}} \right] = -\frac{1}{\sqrt{c^2 - \mathbf{v}\gamma\mathbf{v}}} \Gamma_{\alpha\beta}^i v^\alpha v^\beta, \quad (4.11)$$

onde temos denotado

$$v^\mu = \left(\frac{dt}{dx^0}\right)^{-1} \frac{dx^\mu}{dx^0} = \left( \left(\frac{dt}{dx^0}\right)^{-1}, \mathbf{v} \right). \quad (4.12)$$

O cálculo direto da derivada da equação (4.11) nos leva à expressão

$$\left(\frac{dt}{dx^0}\right)^{-1} \left[ \frac{dv^i}{dx^0} \frac{1}{\sqrt{c^2 - \mathbf{v}\gamma\mathbf{v}}} + \frac{1}{2} \frac{v^i}{(c^2 - \mathbf{v}\gamma\mathbf{v})^{\frac{3}{2}}} \frac{d}{dx^0} (\mathbf{v}\gamma\mathbf{v}) \right] = -\frac{1}{\sqrt{c^2 - \mathbf{v}\gamma\mathbf{v}}} \Gamma_{\alpha\beta}^i v^\alpha v^\beta$$

$$\frac{1}{\sqrt{c^2 - \mathbf{v}\gamma\mathbf{v}}} \left(\frac{dt}{dx^0}\right)^{-1} \left[ \frac{dv^i}{dx^0} + \frac{1}{2} \frac{v^i}{(c^2 - \mathbf{v}\gamma\mathbf{v})} \frac{d}{dx^0} (\mathbf{v}\gamma\mathbf{v}) \right] = \frac{1}{\sqrt{c^2 - \mathbf{v}\gamma\mathbf{v}}} \Gamma_{\alpha\beta}^i v^\alpha v^\beta$$

então

$$\left(\frac{dt}{dx^0}\right)^{-1} \left[ \frac{dv^i}{dx^0} + \frac{1}{2} \frac{v^i}{(c^2 - \mathbf{v}\gamma\mathbf{v})} \frac{d}{dx^0} (\mathbf{v}\gamma\mathbf{v}) \right] = -\Gamma_{\alpha\beta}^i v^\alpha v^\beta. \quad (4.13)$$

Antes de desenvolver a equação (4.13), vamos fazer alguns cálculos necessários:

$$\begin{aligned} \partial_k \gamma_{mj} v^m v^j v^k &= \partial_k \gamma_{mj} v^m v^j v^k + \partial_m \gamma_{jk} v^j v^m v^k - \partial_m \gamma_{jk} v^j v^m v^k \\ &= \partial_k \gamma_{mj} v^m v^j v^k + \partial_j \gamma_{mk} v^m v^j v^k - \partial_m \gamma_{kj} v^m v^j v^k \\ &= (\partial_k \gamma_{mj} + \partial_j \gamma_{mk} - \partial_m \gamma_{kj}) v^m v^j v^k \\ &= \delta_m^n (\partial_k \gamma_{nj} + \partial_j \gamma_{nk} - \partial_n \gamma_{kj}) v^m v^j v^k \\ &= 2\gamma_{mp} \left\{ \frac{1}{2} \gamma^{pn} (\partial_k \gamma_{nj} + \partial_j \gamma_{nk} - \partial_n \gamma_{kj}) \right\} v^m v^j v^k \\ &= 2\gamma_{mp} \tilde{\Gamma}_{jk}^p v^m v^j v^k, \end{aligned} \quad (4.14)$$

onde os Símbolos de Christoffel tridimensionais  $\tilde{\Gamma}_{jk}^p(\gamma)$  são construídos a partir da métrica tridimensional  $\gamma_{ij}(x^0, x^k)$ , no qual  $x^0$  é considerado como um parâmetro,

$$\tilde{\Gamma}_{jk}^p(\gamma) = \frac{1}{2} \gamma^{pn} (\partial_j \gamma_{nk} + \partial_k \gamma_{nj} - \partial_n \gamma_{jk}) . \quad (4.15)$$

Usando a equação (4.14),  $\mathbf{v} \partial_t \gamma \mathbf{v} = v^m \frac{\partial m_j}{\partial t} v^j$  e  $(\mathbf{v} \gamma)_p = v^m \gamma_{mp}$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx^0} (\mathbf{v} \gamma \mathbf{v}) &= \frac{d}{dx^0} (v^m \gamma_{mj} v^j) \\ &= 2 \frac{dv^m}{dx^0} \gamma_{mj} v^j + v^m \frac{d\gamma_{mj}}{dx^0} v^j \\ &= 2 \frac{dv^m}{dx^0} \gamma_{mj} v^j + v^m \left( \frac{\partial \gamma_{mj}}{\partial x^0} + \frac{\partial \gamma_{mj}}{\partial x^k} \frac{dx^k}{dx^0} \right) v^j \\ &= 2 \frac{dv^m}{dx^0} \gamma_{mj} v^j + v^m \left( \partial_0 \gamma_{mj} \frac{dx^0}{dt} \right) \frac{dt}{dx^0} v^j + v^m \partial_k \gamma_{mj} \left[ \frac{dx^k}{dx^0} \left( \frac{dt}{dx^0} \right)^{-1} \right] \frac{dt}{dx^0} v^j \\ &= 2 \frac{dv^m}{dx^0} \gamma_{mj} v^j + \frac{dt}{dx^0} v^m \partial_t \gamma_{mj} v^j + \frac{dt}{dx^0} v^m \partial_k \gamma_{mj} v^k v^j \\ &= 2 \frac{dv^m}{dx^0} (\mathbf{v} \gamma)_m + \frac{dt}{dx^0} (\mathbf{v} \partial_t \gamma \mathbf{v}) + 2 \frac{dt}{dx^0} (\mathbf{v} \gamma)_p \tilde{\Gamma}_{jk}^p(\gamma) v^j v^k . \end{aligned} \quad (4.16)$$

Substituindo (4.16) em (4.13), obtemos

$$\left( \frac{dt}{dx^0} \right)^{-1} \left\{ \frac{dv^i}{dx^0} + \frac{1}{2} \frac{v^i}{(c^2 - \mathbf{v} \gamma \mathbf{v})} \left[ 2 \frac{dv^j}{dx^0} (\mathbf{v} \gamma)_j + \frac{dt}{dx^0} (\mathbf{v} \partial_t \gamma \mathbf{v}) + 2 \frac{dt}{dx^0} (\mathbf{v} \gamma)_p \tilde{\Gamma}_{jk}^p(\gamma) v^j v^k \right] \right\} = -\Gamma_{\alpha\beta}^i(g) v^\alpha v^\beta$$

$$\left( \frac{dt}{dx^0} \right)^{-1} \left\{ \left[ \delta_j^i + \frac{v^i (\mathbf{v} \gamma)_j}{c^2 - \mathbf{v} \gamma \mathbf{v}} \right] \frac{dv_j}{dx^0} + \frac{1}{2} \frac{dt}{dx^0} \frac{v^i (\mathbf{v} \partial_t \gamma \mathbf{v})}{(c^2 - \mathbf{v} \gamma \mathbf{v})} + \frac{dt}{dx^0} \frac{v^i (\mathbf{v} \gamma)_p}{(c^2 - \mathbf{v} \gamma \mathbf{v})} \tilde{\Gamma}_{jk}^p(\gamma) v^j v^k \right\} = -\Gamma_{\alpha\beta}^i(g) v^\alpha v^\beta$$

$$\left( \frac{dt}{dx^0} \right)^{-1} M_j^i \frac{dv^j}{dx^0} + \frac{1}{2} \frac{v^i (\mathbf{v} \partial_t \gamma \mathbf{v})}{(c^2 - \mathbf{v} \gamma \mathbf{v})} + \frac{v^i (\mathbf{v} \gamma)_p}{c^2 - \mathbf{v} \gamma \mathbf{v}} \tilde{\Gamma}_{jk}^p(\gamma) v^j v^k = -\Gamma_{\alpha\beta}^i(g) v^\alpha v^\beta , \quad (4.17)$$

onde:

$$M_j^i = \delta_j^i - \frac{v^i (\mathbf{v} \gamma)_j}{c^2 - \mathbf{v} \gamma \mathbf{v}} , \quad (4.18)$$



e a matriz inversa é dada por

$$\widetilde{M}_j^i = \delta_j^i - \frac{v^i(\mathbf{v}\boldsymbol{\gamma})_j}{c^2}. \quad (4.19)$$

Ela atende as seguintes propriedades

$$\widetilde{M}_j^i v^j = \frac{c^2 - \mathbf{v}\boldsymbol{\gamma}\mathbf{v}}{c^2} v^i, \quad (\mathbf{v}\boldsymbol{\gamma})_i \widetilde{M}_j^i = \frac{c^2 - \mathbf{v}\boldsymbol{\gamma}\mathbf{v}}{c^2} (\mathbf{v}\boldsymbol{\gamma})_j. \quad (4.20)$$

Multiplicando (4.17) pelo inverso de  $M_j^i$  (4.19), temos

$$\left(\frac{dt}{dx^0}\right)^{-1} \widetilde{M}_l^i M_j^l \frac{dv^j}{dx^0} = -\frac{1}{2} \widetilde{M}_l^i v^l \frac{\mathbf{v}\partial_t \boldsymbol{\gamma}\mathbf{v}}{c^2 \mathbf{v}\boldsymbol{\gamma}\mathbf{v}} - \widetilde{M}_l^i v^l \frac{(\mathbf{v}\boldsymbol{\gamma})_p}{c^2 - \mathbf{v}\boldsymbol{\gamma}\mathbf{v}} \widetilde{\Gamma}_{jk}^p(\boldsymbol{\gamma}) v^j v^k - \widetilde{M}_l^i \Gamma_{\alpha\beta}^l(g) v^\alpha v^\beta$$

$$\left(\frac{dt}{dx^0}\right)^{-1} \delta_j^i \frac{dv^j}{dx^0} = -\frac{1}{2} \frac{(c^2 - \mathbf{v}\boldsymbol{\gamma}\mathbf{v})}{c^2} v^i \frac{\mathbf{v}\partial_t \boldsymbol{\gamma}\mathbf{v}}{c^2 - \mathbf{v}\boldsymbol{\gamma}\mathbf{v}} - \frac{(c^2 - \mathbf{v}\boldsymbol{\gamma}\mathbf{v})}{c^2} v^i \frac{(\mathbf{v}\boldsymbol{\gamma})_p}{c^2 - \mathbf{v}\boldsymbol{\gamma}\mathbf{v}} \widetilde{\Gamma}_{jk}^p(\boldsymbol{\gamma}) v^j v^k - \widetilde{M}_j^i \Gamma_{\alpha\beta}^j(g) v^\alpha v^\beta.$$

Com isso conseguimos desenvolver a equação (4.13), temos a seguinte equação:

$$\left(\frac{dt}{dx^0}\right)^{-1} \frac{dv^i}{dx^0} = -\frac{v^i}{2c^2} (\mathbf{v}\partial_t \boldsymbol{\gamma}\mathbf{v}) - \frac{v^i}{c^2} (\mathbf{v}\boldsymbol{\gamma})_p \widetilde{\Gamma}_{jk}^p(\boldsymbol{\gamma}) v^j v^k - \widetilde{M}_j^i \Gamma_{\alpha\beta}^j v^\alpha v^\beta. \quad (4.21)$$

Nós temos  $g^{ij} \gamma_{jk} = \delta_k^i$ , então a métrica inversa de  $\gamma_{ij}$  é  $\gamma^{ij} = g^{ij}$ . Note que  $\widetilde{M}_j^i v^j \xrightarrow{|\mathbf{v}| \rightarrow c} 0$ , que está no limite a matriz  $\widetilde{M}$  se transforma no projetor no plano ortogonal a  $\mathbf{v}$ .

Se projetarmos a derivada (4.21) na direção do movimento, obtemos a expressão

$$(\mathbf{v}\boldsymbol{\gamma} \frac{d\mathbf{v}}{dt}) = -\frac{\mathbf{v}\boldsymbol{\gamma}\mathbf{v}}{2c^2} (\mathbf{v}\partial_t \boldsymbol{\gamma}\mathbf{v}) - \frac{\mathbf{v}\boldsymbol{\gamma}\mathbf{v}}{c^2} (\mathbf{v}\boldsymbol{\gamma})_p \widetilde{\Gamma}_{jk}^p(\boldsymbol{\gamma}) v^j v^k - \frac{\sqrt{c^2 - \mathbf{v}\boldsymbol{\gamma}\mathbf{v}}}{c^2} (\mathbf{v}\boldsymbol{\gamma})_j \Gamma_{\mu\nu}^j(g) v^\mu v^\nu. \quad (4.22)$$

Devido ao primeiro e segundo termo da parte direita da equação (4.22), esta expressão não é cancelada quando  $\mathbf{v}\boldsymbol{\gamma}\mathbf{v} \rightarrow c^2$ . Observe que isso ainda é válido para a métrica estacionária,  $g_{\mu\nu}(\mathbf{x})$  ou mesmo para a métrica estática,  $g_{00} = 1$ ,  $g_{0i} = 0$ . A razão é que a derivada  $\frac{dvi}{dt}$  em nossa geometria tridimensional consiste em três contribuições: taxa de variação do campo vetorial  $\mathbf{v}$ , variação da base no passo de  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$  e variação da métrica  $\gamma_{ij}$

durante o intervalo de tempo  $dt$ . Excluindo as duas últimas contribuições, obtemos a taxa de variação da velocidade, que é a aceleração tridimensional

$$a^i = \left( \frac{dt}{dx^0} \right)^{-1} \frac{dv^i}{dx^0} + \tilde{\Gamma}_{jk}^i v^j v^k + \frac{1}{2} (\mathbf{v} \partial_t \gamma \gamma^{-1})^i \equiv \nabla_t v^i + \frac{1}{2} (\mathbf{v} \partial_t \gamma \gamma^{-1})^i. \quad (4.23)$$

Substituindo  $\left( \frac{dt}{dx^0} \right)^{-1} \frac{dv^i}{dx^0}$  da equação (4.21) em (4.23), obtemos aceleração tridimensional da partícula que se move ao longo da linha geodésica (4.6)

$$\begin{aligned} a^i &= -\frac{v^i}{2c^2} (\mathbf{v} \partial_t \gamma \mathbf{v}) - \frac{v^i}{c^2} (\mathbf{v} \gamma)_j \tilde{\Gamma}_{kl}^j(\gamma) v^k v^l - \tilde{M}_j^i \Gamma_{\alpha\beta}^j(g) v^\alpha v^\beta + \tilde{\Gamma}_{kl}^i(\gamma) v^k v^l + \frac{1}{2} (\mathbf{v} \partial_t \gamma \gamma^{-1})^i \\ &= \left[ \delta_j^i - \frac{v^i (\mathbf{v} \gamma)_j}{c^2 - \mathbf{v} \gamma \mathbf{v}} \tilde{\Gamma}_{kl}^j(\gamma) v^k v^l \right] - \tilde{M}_j^i \Gamma_{\alpha\beta}^j(g) v^\alpha v^\beta + \frac{1}{2} \left[ \delta_j^i - \frac{v^i (\mathbf{v} \gamma)_j}{c^2 - \mathbf{v} \gamma \mathbf{v}} \right] (\mathbf{v} \partial_t \gamma \gamma^{-1})^j \\ &= \tilde{M}_j^i \left[ \frac{1}{2} (\mathbf{v} \partial_t \gamma \gamma^{-1})^j - \Gamma_{\alpha\beta}^j(g) v^\alpha v^\beta + \tilde{\Gamma}_{kl}^j(\gamma) v^k v^l \right]. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Esta é a segunda lei de Newton para o movimento geodésico. Multiplicando isso com  $(\mathbf{v} \gamma)_i$ , obtemos a aceleração longitudinal

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \gamma \mathbf{a} &= (\mathbf{v} \gamma)_i \tilde{M}_j^i \left\{ \frac{1}{2} (\gamma^{-1} \partial_t \gamma \mathbf{v})^j - \Gamma_{\mu\nu}^j(g) v^\mu v^\nu + \tilde{\Gamma}_{kl}^j(\gamma) v^k v^l \right\} \\ &= \left( 1 - \frac{\mathbf{v} \gamma \mathbf{v}}{c^2} \right) \left\{ \frac{1}{2} (\mathbf{v} \partial_t \gamma \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \gamma)_j \left[ -\Gamma_{\mu\nu}^j(g) v^\mu v^\nu + \tilde{\Gamma}_{kl}^j(\gamma) v^k v^l \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Isso implica que  $\mathbf{v} \gamma \mathbf{a} \rightarrow 0$  quando  $\mathbf{v} \gamma \mathbf{v} \rightarrow c^2$ .

Vamos confirmar que  $c$  é o único ponto especial da função (4.25). Usando equações (4.3), (4.15), (3.3) juntamente com as identidades

$$\gamma_{ij} g^{jk} = \delta_i^k, \quad \gamma_{ij} g^{j0} = -\frac{g_{0i}}{g_{00}}, \quad (4.26)$$

podemos apresentar o lado direito da Eq. (4.25) em termos de métrica inicial como segue

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \gamma \mathbf{a} &\equiv \frac{c^2 - \mathbf{v} \gamma \mathbf{v}}{2c\sqrt{-g_{00}}} \left\{ \frac{c}{\sqrt{-g_{00}}} \left[ \left( \frac{dt}{dx^0} \right)^{-1} \partial_0 g_{00} + v^k \partial_k g_{00} \right] - \partial_0 g_{00} \left( \frac{dt}{dx^0} \right)^{-2} \right. \\ &\quad \left. - 2\partial_0 g_{0k} \left( \frac{dt}{dx^0} \right)^{-1} v^k - \partial_0 g_{kl} v^k v^l \right\} \\ &\equiv \frac{c^2 - \mathbf{v} \gamma \mathbf{v}}{2c\sqrt{-g_{00}}} \left\{ \frac{c}{\sqrt{-g_{00}}} v^\mu \partial_\mu g_{00} - \partial_0 g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu \right\}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

A quantidade  $v^\mu$  foi definida em (4.12). Excluindo  $v^0$  de acordo com esta expressão, obtemos

$$\mathbf{v}\gamma\mathbf{a} = \frac{c^2 - \mathbf{v}\gamma\mathbf{v}}{2\sqrt{-g_{00}}} \left\{ \frac{v^k \partial_k g_{00}}{\sqrt{-g_{00}}} - 2\partial_0 \left( \frac{g_{0i}}{\sqrt{-g_{00}}} \right) v^i - \frac{1}{c} \partial_0 \gamma_{ij} v^i v^j \right\}. \quad (4.28)$$

Para a métrica estacionária,  $g_{\mu\nu}(x^k)$ , a equação (4.28) adquire uma forma especialmente simples

$$\mathbf{v}\gamma\mathbf{a} = -(c^2 - \mathbf{v}\gamma\mathbf{v}) \frac{v^k \partial_k g_{00}}{2g_{00}}, \quad (4.29)$$

isso mostra que a aceleração longitudinal tem apenas um ponto especial,  $\mathbf{v}\gamma\mathbf{a} \rightarrow 0$  como  $\mathbf{v}\gamma\mathbf{v} \rightarrow c^2$ . Portanto, a partícula sem spin no campo gravitacional estacionário não pode superar a velocidade da luz. Então, o mesmo é verdadeiro no caso geral (4.27), pelo menos para a métrica que é suficientemente lenta e variada no tempo.

## 5 MOVIMENTO RADIAL EM MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD

O análogo da primeira lei de Newton na teoria da relatividade postula que quando nenhuma força atua sobre as partículas, elas se movem ao longo da geodésica do espaço-tempo, isto é, nas linhas mais retas possíveis ou de curvatura mínima. A equação de geodésica em termos do tempo próprio é

$$\ddot{x}^m + \Gamma_{\mu\nu}^m \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0, \quad (5.1)$$

onde  $x^\mu(s)$  são equações paramétricas de trajetória em quatro dimensões e  $\dot{x}^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{ds}$ .

Isto implica que  $\frac{d}{ds}(g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu) = 0$ , ou seja essa quantidade é um número ao longo de cada trajetória

$$g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = -c_1, \quad c_1 \geq 0. \quad (5.2)$$

Poderíamos usar (5.1) para encontrar forma explícita das equações substituindo a métrica de Schwarzschild nelas. No entanto, tecnicamente é mais fácil e rápido de encontrar delas usando o princípio de ação mínima, ou seja, a partir de um problema variacional. Vamos descrever o formalismo relevante.

**Definição 5.1** *Considere um conjunto de funções  $F = \{\xi^a(t), \xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n\}$ . O funcional  $S$  é uma regra que associa um número real a qualquer função do conjunto, isto é*

$$S : F \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{ou} \quad S : \xi^a(t) \rightarrow S[\xi^a(t)] \in \mathbb{R} \quad (5.3)$$

*Os colchetes retos são usados para distinguir os funcionais das funções.*

Considere a classe de curvas unindo dois pontos fixos  $\xi_1, \xi_2$  em um intervalo de tempo  $[t_1, t_2]$ :  $\xi^a(t_1) = \xi_1^a, \xi^a(t_2) = \xi_2^a$ .

Dadas as funções  $\xi^a$  e  $\eta^a$ , nós definimos  $\delta\xi^a(t) \equiv \eta^a(t) - \xi^a(t)$ . Por construção  $\delta\xi^a(t)|_{t_1}^{t_2} = 0$ .

**Definição 5.2** *Dada a trajetória  $\xi^a(t), t \in [t_1, t_2]$ , o funcional chamado ação Lagrangiana é definida pela regra*

$$S[\xi] = \int_{t_1}^{t_2} L(\xi, \dot{\xi}, t) dt \quad (5.4)$$

**Definição 5.3** *Varição  $\delta S[\xi^a]$  de funcional no ponto  $\xi^a(t)$  é*

$$\delta S[\xi^a] \equiv \left. \frac{d}{d\lambda} S(\lambda) \right|_{\lambda=0} = \left. \frac{d}{d\lambda} S[\xi^a(t) + \lambda \delta\xi^a(t)] \right|_{\lambda=0} \quad (5.5)$$

onde  $S : \mathbb{R}[\lambda] \rightarrow \mathbb{R}; \lambda \rightarrow S(\lambda) = S[\xi^a(t) + \lambda \delta\xi^a(t)]$

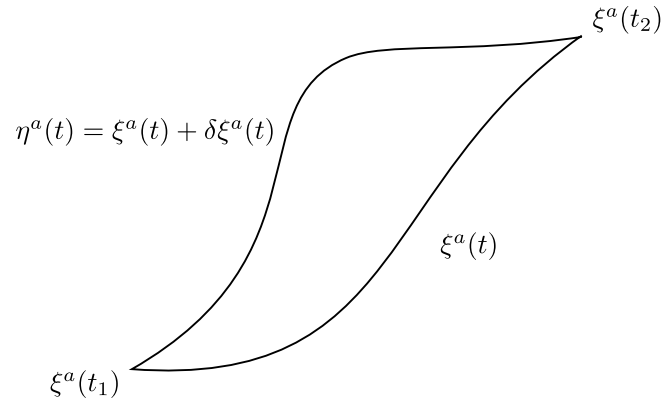


Figura 6 – O problema variacional é formulado em uma classe de curvas com os mesmos pontos inicial e final

**Afirmção 5.1** Se  $\xi^a(t)$  representa o mínimo de funcional, então  $\delta S[\xi^a(t)] = 0$  para todo  $\delta\xi^a(t)$ .

**Demonstração.** Como

$$\begin{aligned} S[\xi^a(t)] &\leq S[\xi^a(t) + \lambda\delta\xi^a(t)], \quad \lambda \in [0, 1] \\ S[\xi^a(t)] &\leq S[\eta^a(t)], \quad \forall \eta^a(t) \\ S(0) &\leq S(\lambda), \quad \forall \lambda \in [0, 1] \end{aligned}$$

Daqui o funcional  $S$  tem o mínimo em 0  $S$ , isto é  $\left. \frac{dS(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = 0$ , então

$$\delta S[\xi^a] = \left. \frac{dS(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = 0.$$

Com o que é demonstrado que  $\delta S[\xi^a] = 0$ . ■

Considere ação Lagrangiana da equação (5.4). Vamos calcular variação dele:

$$\delta S[\xi] = \left. \frac{d}{d\lambda} S[\xi^a + \lambda\delta\xi^a] \right|_{\lambda=0}$$

$$\delta S[\xi] = \left. \frac{d}{d\lambda} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} L(\xi^a + \lambda\delta\xi^a, \dot{\xi}^a + \lambda\delta\dot{\xi}^a) dt \right\} \right|_{\lambda=0}$$

então pela régua da cadeia e  $\lambda = 0$

$$\delta S[\xi] = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial \xi^a} \delta\xi^a + \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^a} (\delta\dot{\xi}^a) \right) dt$$

integrando por partes

$$\delta S[\xi] = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \xi^a} \delta\xi^a dt + \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^a} \delta\xi^a \right|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left[ \delta\xi^a \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^a} \right) \right] dt$$

como  $\delta\xi^a|_{t_1}^{t_2} = 0$  e da Afirmação (5.1)

$$0 = \delta S[\xi] = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial L}{\partial \xi^a} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^a} \right) \right] \delta \xi^a dt$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^a} \right) - \frac{\partial L}{\partial \xi^a} = 0 \quad (5.6)$$

Este sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem é conhecido como **equações de Lagrange** ou equações de Euler-Lagrange.

Vamos confirmar que o funcional

$$S[\xi] = \frac{m}{2} \int g_{\mu\nu} \dot{\xi}^\mu \dot{\xi}^\nu ds \quad (5.7)$$

implica equações de geodésica. Substituindo  $L = g_{\mu\nu} \dot{\xi}^\mu \dot{\xi}^\nu$  nas equações de Lagrange (5.6), obtemos

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^a} = \frac{\partial}{\partial \dot{\xi}^a} (g_{\mu\nu} \dot{\xi}^\mu \dot{\xi}^\nu) = g_{\mu\nu} \left( \frac{\partial \dot{\xi}^\mu}{\partial \dot{\xi}^a} \dot{\xi}^\nu + \dot{\xi}^\mu \frac{\partial \dot{\xi}^\nu}{\partial \dot{\xi}^a} \right) = g_{\mu\nu} (\delta_a^\mu \dot{\xi}^\nu + \dot{\xi}^\mu \delta_a^\nu) = g_{a\nu} \dot{\xi}^\nu + g_{\mu a} \dot{\xi}^\mu$$

então

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^a} \right) &= \frac{d}{ds} (g_{a\nu} \dot{\xi}^\nu + g_{\mu a} \dot{\xi}^\mu) = \partial_\rho g_{a\nu} \dot{\xi}^\rho \dot{\xi}^\nu + g_{a\nu} \ddot{\xi}^\nu + \partial_\rho g_{\mu a} \dot{\xi}^\rho \dot{\xi}^\mu + g_{\mu a} \ddot{\xi}^\mu \\ &= 2g_{ua} \ddot{\xi}^\mu + \partial_\mu g_{a\nu} \dot{\xi}^\mu \dot{\xi}^\nu + \partial_\nu g_{\mu a} \dot{\xi}^\nu \dot{\xi}^\mu \end{aligned}$$

também

$$\frac{\partial L}{\partial \xi^a} = \frac{\partial}{\partial \xi^a} (g_{\mu\nu} \dot{\xi}^\mu \dot{\xi}^\nu) = \partial_a (g_{\mu\nu}) \dot{\xi}^\mu \dot{\xi}^\nu$$

Substituindo essas expressões na equação de Lagrange, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^a} \right) - \frac{\partial L}{\partial \xi^a} &= 0 \\ 2g_{ua} \ddot{\xi}^\mu + \partial_\mu g_{a\nu} \dot{\xi}^\mu \dot{\xi}^\nu + \partial_\nu g_{\mu a} \dot{\xi}^\nu \dot{\xi}^\mu - \partial_a (g_{\mu\nu}) \dot{\xi}^\mu \dot{\xi}^\nu &= 0 \\ 2g_{ua} \ddot{\xi}^\mu + (\partial_\mu g_{a\nu} + \partial_\nu g_{\mu a} - \partial_a g_{\mu\nu}) \dot{\xi}^\mu \dot{\xi}^\nu &= 0 \\ g_{\mu a} g^{am} \ddot{\xi}^\mu + \frac{1}{2} g^{am} (\partial_\mu g_{a\nu} + \partial_\nu g_{\mu a} - \partial_a g_{\mu\nu}) \dot{\xi}^\mu \dot{\xi}^\nu &= 0 \\ \delta_\mu^m \ddot{\xi}^\mu + \Gamma_{\mu\nu}^m \dot{\xi}^\mu \dot{\xi}^\nu &= 0 \end{aligned}$$

ou seja, as equações de geodésica:

$$\ddot{\xi}^m + \Gamma_{\mu\nu}^m \dot{\xi}^\mu \dot{\xi}^\nu = 0 . \quad (5.8)$$

Vamos calcular as equações da geodésica para a métrica de Schwarzschild usando as equações de Euler-Lagrange. Lembrando que a métrica de Schwarzschild em coordenadas  $x^0 = ct$ ,  $x^1 = r$ ,  $x^2 = \theta$ ,  $x^3 = \varphi$  é dada por

$$-ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = - \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) (dx^0)^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)} + r^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2] , \quad (5.9)$$

onde  $\alpha = \frac{2MG}{c^2}$  .

Então para a função de Lagrange  $L = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$  substituindo na equação (5.6), obtemos as seguintes equações:

- $\frac{\partial L}{\partial x^0} - \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^0} \right) = 0$

então

$$\frac{d}{ds} \left[ \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) \dot{x}^0 \right] = 0 , \quad (5.10)$$

que é uma derivada total e pode ser integrado. Daqui temos

$$\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) \dot{x}^0 = c_2 , \quad (5.11)$$

onde  $c_2 > 0$  , assumindo a parametrização  $\frac{dx^0}{ds} > 0, \forall s$  .

- $\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = 0$

então

$$\ddot{r} + \frac{\alpha(r - \alpha)}{2r^3} (\dot{x}^0)^2 - \frac{\alpha}{2r(r - \alpha)} (\dot{r})^2 - (r - \alpha) [(\dot{\theta})^2 + \sin^2 \theta (\dot{\varphi})^2] = 0 . \quad (5.12)$$

- $\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = 0$

então

$$\ddot{\theta} + 2 \left( \frac{\dot{r}}{r} \right) \dot{\theta} - \sin \theta \cos \theta (\dot{\varphi})^2 = 0 . \quad (5.13)$$

- $\frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = 0$

então

$$\ddot{\varphi} + 2 \left[ \frac{\dot{r}}{r} + (ctg\theta)\dot{\theta} \right] \dot{\varphi} = 0 . \quad (5.14)$$

A partir daqui, a análise será feita para o movimento radial, isto é:  $x^0 = ct$ ,  $x^1 = r$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\varphi = 0$ .

Então, podemos obter as equações das geodésicas da métrica de Schwarzschild em movimento radial  $(x^0(s), r(s), \frac{\pi}{2}, 0)$  das equações (5.11), (5.12), (5.13) e (5.14). Assim obtemos as equações (5.15) e (5.16):

$$\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) \dot{x}^0 = c_2, \quad c_2 > 0, \quad (5.15)$$

$$\ddot{r} = \frac{\alpha}{2r^2} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1} (\dot{r})^2 - \frac{\alpha}{2r^2} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) (\dot{x}^0)^2 . \quad (5.16)$$

Também de  $g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = -c_1$  (equação (5.2)), e da métrica de Schwarzschild, temos

$$-\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) (dx^0)^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)} + r^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2] = -c_1 .$$

e pelo movimento radial  $(x^0(s), r(s), \frac{\pi}{2}, 0)$ , temos

$$(\dot{x}^0)^2 - \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-2} (\dot{r})^2 = c_1 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1}, \quad c_1 > 0 . \quad (5.17)$$

A equação (5.16) é uma consequência das equações (5.15) e (5.17). De fato, derivando a equação (5.15) e multiplicando com  $\dot{x}^0$  temos

$$-\alpha \frac{\dot{r}}{r^2} (\dot{x}^0)^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) \dot{x}^0 \ddot{x}^0, \quad (5.18)$$

multiplicando a equação (5.17) com  $\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)$  y derivando,

$$\frac{d}{ds} \left[ -\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) (\dot{x}^0)^2 + \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1} (\dot{r})^2 \right] = \frac{d}{ds} [-c_1],$$

$$-\alpha \frac{\dot{r}}{r^2} (\dot{x}^0)^2 - 2 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) \dot{x}^0 \ddot{x}^0 - \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-2} \alpha \frac{(\dot{r})^3}{r^2} + 2 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1} \dot{r} \ddot{r} = 0,$$

e substituindo na equação (5.18)



$$\alpha \frac{\dot{r}}{r^2} (\dot{x}^0)^2 - \frac{\alpha}{r^2} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-2} (\dot{r})^3 + 2 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1} \dot{r} \ddot{r} = 0,$$

a partir daqui temos que equação (5.16) é uma consequência de (5.15) e (5.17)

$$\ddot{r} = \frac{\alpha}{2r^2} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1} (\dot{r})^2 - \frac{\alpha}{2r^2} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) (\dot{x}^0)^2.$$

Então, agora vamos mostrar que pelas equações (5.15), (5.16) e (5.17) podemos obter a equação (3) de Mc.GruderIII [11].

Seja  $x^0 = x^0(s)$ ,  $r = r(s)$  equações paramétricas da linha geodésica. podemos definir as equações da linha geodésica na forma de uma nova parametrização:  $R$ , onde

$$r(s) = R(x^0(s)) \quad (5.19)$$

então, derivando, obtemos:

$$\dot{r}(s) = \frac{dR}{dx^0} \dot{x}^0 \quad (5.20)$$

e

$$\ddot{r}(s) = \frac{d^2R}{dx^{02}} (\dot{x}^0)^2 + \frac{dR}{dx^0} \ddot{x}^0. \quad (5.21)$$

Por outro lado, derivando (5.15) temos

$$\ddot{x}^0 = -\alpha \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1} \frac{\dot{r}}{r^2} \dot{x}^0, \quad (5.22)$$

então substituindo (5.22) e (5.20) na equação (5.21)

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= \frac{d^2R}{dx^{02}} (\dot{x}^0)^2 + \frac{dR}{dx^0} \left[ -\alpha \frac{\dot{r}}{r^2} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1} \dot{x}^0 \right] \\ \ddot{r} &= \frac{d^2R}{dx^{02}} (\dot{x}^0)^2 - \frac{\alpha}{r^2} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dR}{dx^0}\right)^2 (\dot{x}^0)^2 \\ \ddot{r} &= (\dot{x}^0)^2 \left[ \frac{d^2R}{dx^{02}} - \frac{\alpha}{r^2} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dR}{dx^0}\right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Substituindo (5.20) e (5.23) em (5.16), temos

$$\frac{\alpha}{2r^2} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dR}{dx^0}\right)^2 (\dot{x}^0)^2 - \frac{\alpha}{2r^2} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) (\dot{x}^0)^2 = (\dot{x}^0)^2 \left[ \frac{d^2R}{dx^{02}} - \frac{\alpha}{r^2} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dR}{dx^0}\right)^2 \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2r^2} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dR}{dx^0}\right)^2 - \frac{\alpha}{2r^2} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) &= \frac{d^2R}{dx^{02}} - \frac{\alpha}{r^2} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dR}{dx^0}\right)^2 \\ \frac{3\alpha}{2r^2} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dR}{dx^0}\right)^2 - \frac{\alpha}{2r^2} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) &= \frac{d^2R}{dx^{02}} \\ \frac{d^2R}{dx^{02}} &= -\frac{\alpha}{2r^2} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) + \frac{3\alpha}{2r^2} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dR}{dx^0}\right)^2. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Como  $r(s) = R(x^0) = R(ct)$ , então

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dR}{dx^0} \frac{dx^0}{dt} = \left(\frac{dR}{dx^0}\right) c \quad \text{ou} \quad \frac{dR}{dx^0} = \frac{1}{c} \frac{dr}{dt}, \quad (5.25)$$

e derivando,

$$\frac{d^2r}{dt^2} = c \left(\frac{d^2R}{dx^{02}} \frac{dx^0}{dt}\right) = c^2 \frac{d^2R}{dx^{02}} \quad \text{ou} \quad \frac{d^2R}{dx^{02}} = \frac{1}{c^2} \frac{d^2r}{dt^2}. \quad (5.26)$$

Substituindo (5.25) e (5.26) em (5.24), nós excluimos o parâmetro  $s$ , daqui temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{d^2r}{dt^2} &= -\frac{\alpha}{2r^2} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) + \frac{3\alpha}{2r^2} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1} \left(\frac{1}{c} \frac{dr}{dt}\right)^2 \\ \frac{d^2r}{dt^2} &= -\frac{\alpha}{2r^2} \left[ c^2 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) - 3 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Equação (5.27) é a equação (3) obtida em McGruder III [11]. A quantidade de  $\frac{d^2r}{dt^2}$  torna-se positiva acima da velocidade crítica não-normalizada<sup>1</sup>,  $\frac{dr}{dt} > \frac{c}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)$ , daí o termo "repulsão gravitacional".

Resolvendo a equação (5.17) em relação a  $\dot{x}^0$ , usando (5.20), (5.25) e  $r(s) = R(x^0) = R(ct)$ , temos

$$\begin{aligned} (\dot{x}^0)^2 - \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-2} \left(\frac{dR}{dx^0} \dot{x}^0\right)^2 &= c_1 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1} \\ (\dot{x}^0)^2 \left[ 1 - \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-2} \left(\frac{dR}{dx^0}\right)^2 \right] &= c_1 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1} \end{aligned}$$

<sup>1</sup> As noções de velocidade/aceleração não-renormalizadas e semi-renormalizadas foram amplamente discutidas em [7, 15–17].

$$\begin{aligned}
(\dot{x}^0)^2 & \left[ \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) - \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1} \left(\frac{1}{c^2}\right) \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \right] = c_1 \\
\dot{x}^0 & = \sqrt{c_1} \frac{c}{\sqrt{\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) c^2 - \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2}} = \sqrt{c_1} \frac{c}{\sqrt{-g_{00}c^2 - g_{rr} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2}} \\
& = \sqrt{c_1} \frac{c}{\sqrt{-g_{00}} \sqrt{c^2 + \frac{g_{rr}}{g_{00}} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2}}. \tag{5.28}
\end{aligned}$$

Substituindo  $\dot{x}^0$  de (5.28) em (5.15), obtemos

$$\frac{c_2}{\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)} = \sqrt{c_1} \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}} \sqrt{c^2 - \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2}}. \tag{5.29}$$

Da equação (5.29) e de acordo com [2, pág.250, Eq.(88.9)], temos

$$E \equiv \frac{mc^3 c_2}{\sqrt{c_1}} = \frac{mc^3 \sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}}}{\sqrt{c^2 - \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2}}, \tag{5.30}$$

onde  $E$  é energia total da partícula no campo gravitacional.

Se, substituirmos  $\dot{x}^0$  de (5.15) em (5.17) e usando  $\frac{c_1}{c_2^2} = \frac{m^2 c^2}{E^2}$ , obtemos uma expressão equivalente para a energia total (5.30):

$$\begin{aligned}
(\dot{x}^0)^2 - \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-2} \dot{r}^2 & = c_1 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1} \\
(\dot{x}^0)^2 \left[ 1 - \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-2} \left(\frac{dR}{dx^0}\right)^2 \right] & = c_1 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1} \\
c_2^2 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-2} \left[ 1 - \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-2} \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \right] & = c_1 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1} \\
\frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 & = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^2 - \frac{c_1}{c_2^2} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^3 \\
\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-3} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - c^2 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1} & = -c^2 \left(\frac{mc^2}{E}\right)^2. \tag{5.31}
\end{aligned}$$

Equação (5.31) é a equação (5) obtida em McGruder III [11].

Considere o laboratório  $O_r$  fixado no ponto  $r > \alpha$  e outro laboratório  $O_\infty$  fixado no ponto  $r_\infty$  na região assintótica onde podemos aproximar a métrica de Schwarzschild pela métrica de Minkowsky:  $g_{\mu\nu}(r_\infty) \rightarrow \eta_{\mu\nu} = (-1, +1, +1, +1)$ . No laboratório  $O_r$  temos uma partícula saindo com magnitude de velocidade  $V$ , chegando ao laboratório  $O_\infty$  com magnitude  $V_\infty$ .

De acordo com a lei de conservação de energia  $E(r) = E(r_\infty)$ , e usando a equação (5.31), temos:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-3} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - c^2 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1} &= \left\{ \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-3} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - c^2 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1} \right\} \Big|_{r_\infty} \\ &= \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \Big|_{r_\infty} - c^2. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Já que no laboratório  $O_\infty$  nós temos a métrica Minkowski, a distância e o intervalo de tempo coincidem com as diferenciais de coordenadas  $dr$  e  $dt$ , daqui nós temos

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \Big|_{r_\infty} = V_\infty^2. \quad (5.33)$$

De acordo com o Capítulo 3 (equações (3.2) e (3.3)), a distância  $dl$  e o intervalo de tempo  $dT$  estão relacionados aos diferenciais de coordenadas da seguinte forma:

$$dT = \sqrt{-g_{00}} dt = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{\frac{1}{2}} dt \quad (5.34)$$

$$(dl)^2 = g_{rr}(dr)^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1} (dr)^2 \quad (5.35)$$

Então, a relação entre magnitude de velocidade  $V$  e  $\frac{dr}{dt}$  é:

$$V = \frac{dl}{dT} = \frac{\sqrt{g_{rr}}}{\sqrt{-g_{00}}} \frac{dr}{dt} = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1} \left| \frac{dr}{dt} \right|. \quad (5.36)$$

O vetor velocidade é:

$$\mathbf{V} = \frac{dr}{dT} = \frac{dt}{dT} \frac{dr}{dt} = \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}} \frac{dr}{dt} = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{dr}{dt}. \quad (5.37)$$

Então, a magnitude da velocidade pode ser escrita como:

$$V = \sqrt{g_{rr} \mathbf{V} \mathbf{V}} = \sqrt{g_{rr}} |\mathbf{V}| \quad (5.38)$$

Usando as equações (5.33) e (5.36) na equação (5.32), obtemos a seguinte relação entre as velocidades inicial e final:

$$\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1} (V^2 - c^2) = (V_\infty)^2 - c^2, \quad (5.39)$$

então

$$V_\infty^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1} \left[V^2 - c^2 \frac{\alpha}{r}\right]. \quad (5.40)$$

Como  $r > \alpha$  então  $\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1} > 0$  e usando a equação (5.40), temos

$$c^2 > V^2 \geq c^2 \frac{\alpha}{r},$$

isto implica que as partículas de saída com velocidade inicial  $V^2 < \frac{\alpha}{r} c^2$  não podem chegar ao laboratório  $O_\infty$ .

Como  $r > r - \alpha > 0$  então  $\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1} > 1$ .

De (5.39),  $V^2 - c^2 < 0$  e  $\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1} > 1$ , temos:

$$\frac{V_\infty^2 - c^2}{V^2 - c^2} = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1} > 1, \quad (5.41)$$

então

$$V_\infty^2 < V^2. \quad (5.42)$$

Assim, partículas com velocidade inicial  $\frac{\alpha}{r} c^2 < V^2 < c^2$  chegarão ao laboratório  $O_\infty$  com a velocidade  $V_\infty^2 < V^2$ . Daí a repulsão gravitacional implícita pela equação (5.27) não pode acelerar uma partícula de saída, e representa um efeito coordenado puro. Não pode ser detectado nem pelo observador local nem pelo distante.

## 5.1 MOVIMENTO RADIAL PARA MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD EM FORMA ISOTRÓPICA E HARMÔNICA.

Nesta seção, apresentamos alguns cálculos feitos para a métrica de Schwarzschild em forma isotrópica e harmônica que nos servirá em trabalhos futuros.

Vamos calcular as equações da geodésica para a métrica de Schwarzschild em forma isotrópica usando as equações de Euler-Lagrange. A métrica de Schwarzschild em forma isotrópica  $\left(r = \rho \left(1 + \frac{MG}{2c^2\rho}\right)^2\right)$  é

$$-d\tau^2 = -\frac{\left(1 - \frac{GM}{2c^2\rho}\right)^2}{\left(1 + \frac{MG}{2c^2\rho}\right)^2}(dx^0)^2 + \left(1 + \frac{MG}{2c^2\rho}\right)^4 \left[d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2\theta d\phi^2\right]. \quad (5.43)$$

Então para a função de Lagrange  $L = g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu$  em (5.43), substituindo na equação de Euler-Lagrange (5.6), obtemos as seguintes equações da geodésica:

- $\frac{\partial L}{\partial x^0} - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^0}\right) = 0.$

Então

$$\frac{\left(1 - \frac{MG}{2c^2\rho}\right)^2}{\left(1 + \frac{MG}{2c^2\rho}\right)^2} \dot{x}^0 = c_2, \quad c_2 > 0. \quad (5.44)$$

Para movimento radial  $(x^0, \rho, \frac{\pi}{2}, 0)$  a equação é cumprida.

- $\frac{\partial L}{\partial \rho} - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}}\right) = 0.$

Então

$$\begin{aligned} & -2 \left(\frac{MG}{c^2\rho^2}\right) \frac{\left(1 - \frac{MG}{2c^2\rho}\right)}{\left(1 + \frac{MG}{2c^2\rho}\right)^3} (x^0)^2 + 4 \left(\frac{MG}{2c^2\rho^2}\right) \left(1 + \frac{MG}{2c^2\rho}\right)^3 (\dot{\rho})^2 \\ & + \left[2\rho \left(1 + \frac{MG}{2c^2\rho}\right)^4 - 4\frac{MG}{2c^2} \left(1 + \frac{MG}{2c^2\rho}\right)^3\right] [(\dot{\theta})^2 + \sin^2\theta(\dot{\phi})^2] - 2 \left(1 + \frac{MG}{2c^2\rho}\right)^4 \ddot{\rho} = 0. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Para movimento radial  $(x^0, \rho, \frac{\pi}{2}, 0)$  temos,

$$\ddot{\rho} = - \left(\frac{-MG}{c^2\rho^2}\right) \frac{\left(1 - \frac{MG}{2c^2\rho}\right)}{\left(1 + \frac{MG}{2c^2\rho}\right)^7} (x^0)^2 + \left(\frac{MG}{c^2\rho^2}\right) \left(1 + \frac{MG}{2c^2\rho}\right)^{-1} (\dot{\rho})^2. \quad (5.46)$$

- $\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = 0 .$

Então

$$\frac{2MG}{c^2} \left( 1 + \frac{MG}{2c^2\rho} \right)^3 \dot{\rho}\dot{\theta} + \left( 1 + \frac{MG}{2c^2\rho} \right)^4 \left[ \rho^2 \sin \theta \cos \theta (\dot{\varphi})^2 - 2\rho\dot{\rho}\dot{\theta} - \rho^2\ddot{\theta} \right] = 0 . \quad (5.47)$$

Para movimento radial  $(x^0, \rho, \frac{\pi}{2}, 0)$  , temos

$$0 = 0 .$$

- $\frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = 0 .$

Então

$$\begin{aligned} & - \frac{2MG}{c^2} \left( 1 + \frac{MG}{2c^2\rho} \right)^3 \sin^2 \theta \dot{\rho}\dot{\varphi} \\ & + \left( 1 + \frac{MG}{2c^2\rho} \right)^4 \left[ 2\rho \sin^2 \theta \dot{\rho}\dot{\varphi} + 2\rho^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta}\dot{\varphi} + \rho^2 \sin^2 \theta \ddot{\varphi} \right] = 0 . \end{aligned} \quad (5.48)$$

Para movimento radial  $(x^0, \rho, \frac{\pi}{2}, 0)$  , temos

$$0 = 0 .$$

Da métrica Schwarzschild na forma isotrópica e da equação (5.2), temos:

$$(x^0)^2 - \frac{\left( 1 + \frac{MG}{2c^2\rho} \right)^6}{\left( 1 - \frac{MG}{2c^2\rho} \right)^2} (\dot{\rho})^2 = c_1 \frac{\left( 1 + \frac{MG}{2c^2\rho} \right)^2}{\left( 1 - \frac{MG}{2c^2\rho} \right)^2}, \quad c_1 > 0 \quad (5.49)$$

Então, das equações (5.44), (5.46), (5.49) , obtemos as equações (5.50) e (5.51) :

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{MG}{c^2\rho^2} \left\{ -c^2 \frac{\left( 1 - \frac{MG}{2c^2\rho} \right)}{\left( 1 + \frac{MG}{2c^2\rho} \right)^7} + \left( 1 + \frac{MG}{2c^2\rho} \right)^{-1} \left[ 1 + 2 \left( 1 - \frac{MG}{2c^2\rho} \right)^{-1} \right] \left( \frac{d\rho}{dt} \right)^2 \right\}, \quad (5.50)$$

$$\left( \frac{d\rho}{dt} \right)^2 = c^2 \frac{\left( 1 - \frac{MG}{2c^2\rho} \right)^2}{\left( 1 + \frac{MG}{2c^2\rho} \right)^6} - \frac{m^2 c^4}{E^2} \frac{\left( 1 - \frac{MG}{2c^2\rho} \right)^4}{\left( 1 + \frac{MG}{2c^2\rho} \right)^8}, \quad (5.51)$$

onde  $E$  é energia total da partícula no campo gravitacional.

Agora, para a métrica de Schwarzschild em forma harmônica  $\left(R = r - \frac{MG}{c^2}\right)$ , isto é

$$-d\tau^2 = -\frac{\left(1 - \frac{MG}{c^2 R}\right)}{\left(1 + \frac{MG}{c^2 R}\right)}(dx^0)^2 + \frac{\left(1 + \frac{MG}{c^2 R}\right)}{\left(1 - \frac{MG}{c^2 R}\right)}dR^2 + \left(R + \frac{MG}{c^2}\right)^2 [d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2], \quad (5.52)$$

vamos calcular as equações de sua geodésica usando as equações de Euler-Lagrange (5.6), isto é:

- $\frac{\partial L}{\partial x^0} - \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^0} \right) = 0.$

Então

$$\frac{\left(1 - \frac{MG}{c^2 R}\right)}{\left(1 + \frac{MG}{c^2 R}\right)} \dot{x}^0 = c_2, \quad c_2 > 0. \quad (5.53)$$

Para movimento radial  $\left(x^0, R, \frac{\pi}{2}, 0\right)$  a equação é cumprida.

- $\frac{\partial L}{\partial R} - \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{R}} \right) = 0.$

Então para movimento radial  $\left(x^0, R, \frac{\pi}{2}, 0\right)$  temos,

$$\ddot{R} = -\frac{\left(\frac{MG}{c^2 R^2}\right)}{\left(1 + \frac{MG}{c^2 R}\right)^3} (\dot{x}^0)^2 + \frac{MG}{c^2 R^2} \left(1 - \frac{MG}{c^2 R}\right)^{-1} \left(1 + \frac{MG}{c^2 R}\right)^{-1} (\dot{R})^2. \quad (5.54)$$

- $\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = 0.$

Então para movimento radial  $\left(x^0, R, \frac{\pi}{2}, 0\right)$ , temos

$$0 = 0.$$

- $\frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = 0.$

Então para movimento radial  $\left(x^0, R, \frac{\pi}{2}, 0\right)$ , temos

$$0 = 0.$$



Da métrica Schwarzschild na forma harmônica e da equação (5.2),  $g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = -c_1$ ,  $c_1 > 0$ , temos:

$$(\dot{x}^0)^2 - \frac{\left(1 + \frac{MG}{c^2 R}\right)^2}{\left(1 - \frac{MG}{c^2 R}\right)^2} (\dot{R})^2 = c_1 \frac{\left(1 + \frac{MG}{c^2 R}\right)}{\left(1 - \frac{MG}{c^2 R}\right)}, \quad c_1 > 0. \quad (5.55)$$

Então, das equações (5.53), (5.54), (5.55), obtemos as equações (5.56) e (5.57) :

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = \frac{MG}{R^2} \left\{ \frac{\left(1 - \frac{MG}{c^2 R}\right)}{\left(1 + \frac{MG}{c^2 R}\right)^3} + 3 \left(1 - \frac{MG}{c^2 R}\right)^{-1} \left(1 + \frac{MG}{c^2 R}\right)^{-1} \left(\frac{dR}{dt}\right)^2 \right\}, \quad (5.56)$$

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = c^2 \frac{\left(1 - \frac{MG}{c^2 R}\right)^2}{\left(1 + \frac{MG}{c^2 R}\right)^2} - \frac{m^2 c^4 \left(1 - \frac{MG}{c^2 R}\right)^3}{E^2 \left(1 + \frac{MG}{c^2 R}\right)^3}, \quad (5.57)$$

onde  $E$  é energia total da partícula no campo gravitacional.

## 5.2 RESULTADOS SOBRE A ACELERAÇÃO TRIDIMENSIONAL

1. No espaço euclidiano com coordenadas curvilíneas, o valor diferente de zero  $\frac{d^2 r}{dt^2}$  não tem significado de aceleração. Por exemplo, considere uma partícula em coordenadas curvilíneas que se move com velocidade constante:  $\frac{d^2 x^i}{dt^2} = 0$  ( $a^i = 0$ ), vamos pegar as coordenadas  $x^1 = r^2 \sin \theta \cos \varphi$ ,  $x^2 = r^2 \sin \theta \sin \varphi$ ,  $x^3 = r^2 \cos \theta$ . Então, derivando duas vezes obtemos o sistema:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{1}{r} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{r}{2} \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{r}{2} \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{4}{r} \frac{d\theta}{dt} \frac{dr}{dt} + \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{4}{r} \frac{d\varphi}{dt} \frac{dr}{dt} - 2 \tan \theta \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\theta}{dt},$$

então, para  $(r(t), \theta = \frac{\pi}{2}, \varphi = 0)$ , mas temos

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{1}{r} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \neq 0$$

2. Considere a transformação  $r = r(r')$ , substituindo na equação (5.27), temos

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{dr'^2} \left( \frac{dr'}{dt} \right)^2 + \frac{dr}{dr'} \frac{d^2 r'}{dt^2} &= -\frac{\alpha}{2r^2} \left\{ c^2 \left( 1 - \frac{\alpha}{r} \right) - 3 \left( 1 - \frac{\alpha}{r} \right)^{-1} \left( \frac{dr}{dr'} \right)^2 \left( \frac{dr'}{dt} \right)^2 \right\} \\ \frac{dr}{dr'} \frac{d^2 r'}{dt^2} &= -\frac{\alpha}{2r^2} \left\{ c^2 \left( 1 - \frac{\alpha}{r} \right) - 3 \left( 1 - \frac{\alpha}{r} \right)^{-1} \left( \frac{dr}{dr'} \right)^2 \left( \frac{dr'}{dt} \right)^2 \right\} - \frac{d^2 r}{dr'^2} \left( \frac{dr'}{dt} \right)^2 \frac{\alpha}{2r^2} \frac{2r^2}{\alpha} \\ \frac{d^2 r'}{dt^2} &= -\frac{\alpha}{dr'^2} \frac{dr'}{dr} \left\{ c^2 \left( 1 - \frac{\alpha}{r} \right) + \left[ \frac{2r^2}{\alpha} \frac{d^2 r}{dr'^2} - 3 \left( 1 - \frac{\alpha}{r} \right)^{-1} \left( \frac{dr}{dr'} \right)^2 \right] \left( \frac{dr'}{dt} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (5.58)$$

Então, da equação (5.58), temos que  $\frac{d^2 r}{dt^2}$  dado na equação (5.27) não é covariante.

3. Como a relatividade geral é uma teoria relativista, esperamos que a partícula em um campo gravitacional não consigam alcançar a velocidade da luz. Como consequência, a dependência da aceleração da velocidade é uma propriedade inevitável de uma teoria relativista: a três-aceleração na direção da velocidade é zero quando  $V \rightarrow c$ . Novamente, não é o caso de  $\frac{d^2 r}{dt^2}$  dado por (5.27).

Em um campo gravitacional arbitrário, as propriedades mencionadas acima são satisfeitas pela três-aceleração que é apresentada na equação (4.23) do Capítulo (4), lembre-se que esta equação é:

$$a^i = \left( \frac{dt}{dx^0} \right)^{-1} \frac{dv^i}{dx^0} + \tilde{\Gamma}_{jk}^i(\gamma) v^j v^k + \frac{1}{2} (v \partial_t \gamma \gamma^{-1})^i \equiv \nabla_t v^i + \frac{1}{2} (v \partial_t \gamma \gamma^{-1})^i. \quad (5.59)$$

Então, da equação (5.59) podemos obter o vetor de aceleração unidimensional:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= D_T \mathbf{V} = \frac{dt}{dT} \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \Gamma_{rr}^r(g_{rr}) \mathbf{V} \mathbf{V} \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}} \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}} \frac{dr}{dt} \right] + \left[ \frac{1}{2} g^{rr} \partial_r g_{rr} \right] \left[ \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}} \frac{dr}{dt} \right]^2 \\ &= \left( 1 - \frac{\alpha}{r} \right)^{-1} \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{\alpha}{r^2} \left( 1 - \frac{\alpha}{r} \right)^{-2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2. \end{aligned} \quad (5.60)$$

A magnitude deste vetor é:

$$a = \sqrt{g_{rr} \mathbf{a} \mathbf{a}}, \quad (5.61)$$

que coincide com  $\frac{dV}{dT} = \frac{d^2l}{dT^2}$ .

Se substituirmos a equação (5.27) na equação de aceleração (5.60), obtemos a segunda lei de Newton para partículas que se movem ao longo de uma linha geodésica.

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1} \frac{d^2r}{dt^2} - \frac{\alpha}{r^2} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \\
&= -\frac{\alpha}{2r^2} \left[ c^2 - 3 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \right] - \frac{\alpha}{r^2} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \\
&= -\frac{\alpha}{2r^2} c^2 + \frac{\alpha}{2r^2} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \\
&= -\frac{\alpha}{2r^2} c^2 + \frac{\alpha}{2r^2} V^2 \\
&= -\frac{\alpha}{2r^2} c^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \\
&= -\frac{MG}{r^2} \left[1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2\right], \tag{5.62}
\end{aligned}$$

isto implica que  $\mathbf{a} \rightarrow 0$  quando  $V \rightarrow c$ . Então no limite de Newton, temos o seguinte resultado:  $\mathbf{a} = -\frac{MG}{r^2}$ . Assim, a equação (5.62) mostra que o campo de Schwarzschild produz uma força atrativa para qualquer velocidade  $V < c$ .

Em conclusão, especificamos estas expressões para o caso de uma partícula que alcança o infinito com velocidade zero. Se resolvermos (5.39) em relação a  $V(r)$ , temos:

$$1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) \left[1 - \left(\frac{V_\infty}{c}\right)^2\right] \tag{5.63}$$

e substituindo em (5.62):

$$\mathbf{a} = -\frac{MG}{r^2} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) \left[1 - \left(\frac{V_\infty}{c}\right)^2\right] \xrightarrow{V_\infty=0} \mathbf{a} = \frac{MG}{r^2} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right). \tag{5.64}$$

Então magnitude da aceleração é:

$$a = \sqrt{g_{rr}} |\mathbf{a}| = \frac{MG}{r^2} \sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}} \left[1 - \left(\frac{V_\infty}{c}\right)^2\right] \xrightarrow{V_\infty=0} a = \frac{MG}{r^2} \sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}}. \tag{5.65}$$

O sinal de aceleração (5.62) muda para o oposto quando  $r < \alpha$ . Mas nossas definições básicas (5.34) e (5.35) para  $dl$  e  $dT$  são válidas somente na região  $r > \alpha$ , então as expressões (5.62), (5.64), (5.65) não podem ser aplicadas dentro do horizonte.

## 6 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho nós analisamos as relações entre as quantidades quatro e tridimensionais usadas na descrição de campo gravitacional RG. Para intervalos temporais e espaciais as relações são (3.2), (3.3). Estas fórmulas representam, em forma quantitativa, como os relógios e réguas de Laboratório são afetadas pelo campo gravitacional. Em base dessas fórmulas, definimos em seguida algumas quantidades compostas: valores de velocidade (3.7) e aceleração (dada como modulo de (4.23)) de uma partícula, e vetores tridimensionais de velocidade (3.5) e de aceleração (4.23).

Para mostrar a importância destas relações, nós aplicamos no estudo de movimento geodésico radial no campo de Schwarzschild. Escolhemos este problema entre os outros possíveis, pois na literatura tem artigos recentes com tratamento inadequado dele. Para ter certeza de que nossos resultados estão corretos, foram feitos dois cálculos independentes. No primeiro cálculo, nós usamos as leis de conservação, obtendo como resultado final a equação (5.39). No segundo calculo foram usadas as equações de movimento, ou seja, a aceleração tridimensional, obtendo a equação (5.62). Os dois cálculos deram os mesmos resultados finais. Em particular, foi mostrado que velocidade de uma partícula diminui, quando ela se afasta do centro do campo. Isto implica, infelizmente, que a existência dos raios cósmicos de alta energia não pode ser explicada seguindo as ideias sugeridas nos trabalhos recentes [11, 18, 19] .

Apesar disto, os cálculos feitos confirmaram, que a expressão (4.23) representa uma definição razoável para aceleração tri-dimensional na teoria de Relatividade Geral.

Um avanço para continuação desta pesquisa foi feito na Secção 2.8, onde nos descrevemos propriedades básicas de campo gravitacional de Kerr. Embora a literatura sobre o movimento geodésico no campo de Kerr é extensa, nós esperamos, que a aplicação de nosso formalismo poderia dar vários resultados novos.

## REFERÊNCIAS

- [1] WEINBERG, Steven. *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. New York: Wiley, 1973.
- [2] LANDAU, Lev Davidovich; LIFSHITZ, E. M. The classical theory of fields. *Course of theoretical physics-Pergamon International Library of Science, Technology, Engineering and Social Studies, Oxford: Pergamon Press, 1971, 3rd rev. engl. edition, 1971.*
- [3] DROSTE, Johannes. The field of a single centre in Einstein's theory of gravitation, and the motion of a particle in that field. *Ned. Acad. Wet., SA, 1917, vol. 19, p. 197.*
- [4] HILBERT, David. Die Grundlagen der Physik.(Zweite Mitteilung). *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse* , 1917, vol. 1917, p. 53-76.
- [5] LAUE, Max. Die Relativitätstheorie. Vol. 2: Die allgemeine Relativitätstheorie und Einsteins Lehre von der Schwerkraft. *Vieweg & Sohn (Braunschweig), 1921.*
- [6] BAUER, Hans. *Mathematic Einführung in De Gravitationstheorie Einsteins* . Biblio-Bazaar, LLC, 2009.
- [7] SPALLICCI, Alessandro. Free fall and self-force: an historical perspective. *arXiv preprint arXiv:1005.0611* , 2010.
- [8] SPALLICCI, Alessandro DAM; VAN PUTTEN, Maurice HPM. Gauge dependence and self-force from Galilean to Einsteinian free fall, compact stars falling into black holes, Hawking radiation and the Pisa tower at the general relativity centennial. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 2016, vol. 13, no 08, p. 1630014.
- [9] DERIGLAZOV, Alexei A.; RAMÍREZ, Walberto Guzmán. Recent progress on the description of relativistic spin: vector model of spinning particle and rotating body with gravimagnetic moment in General Relativity. *Advances in Mathematical Physics*, 2017, vol. 2017.
- [10] DERIGLAZOV, Alexei A.; RAMÍREZ, Walberto Guzmán. Mathisson–Papapetrou–Tulczyjew–Dixon equations in ultra-relativistic regime and gravimagnetic moment. *International Journal of Modern Physics D* , 2017, vol. 26, no 06, p. 1750047.
- [11] MCGRUDER III, Charles H. Acceleration of particles to high energy via gravitational repulsion in the Schwarzschild field. *Astroparticle Physics*, 2017, vol. 86, p. 18-20.
- [12] DERIGLAZOV, Alexei A.; RAMÍREZ, Walberto Guzmán; ROJAS, Pablo. Comment on “Acceleration of particles to high energy via gravitational repulsion in the Schwarzschild field” by CH McGruder III. *Astroparticle Physics*, 2019, vol. 107, p. 35-37.
- [13] DERIGLAZOV, Alexei A. *Notas de Geometria Diferencial Clássica (Curvas e Superfícies em  $\mathbb{R}^3$ )*. [http://www.ufjf.br/alexei\\_deriglazov/files/2016/11/Geometria\\_Diferencial\\_Stilo\\_17.pdf](http://www.ufjf.br/alexei_deriglazov/files/2016/11/Geometria_Diferencial_Stilo_17.pdf) ,2017.

- [14] FERRARI, V; GUALTIERI, L. *General Relativity*. [http://www.roma1.infn.it/teongrav/VALERIA/TEACHING/RELATIVITA\\_GENERALE/AA2013\\_14/dispense.pdf](http://www.roma1.infn.it/teongrav/VALERIA/TEACHING/RELATIVITA_GENERALE/AA2013_14/dispense.pdf).
- [15] THIRRING, Walter E. An alternative approach to the theory of gravitation. *Annals of Physics*, 1961, vol. 16, no 1, p. 96-117.
- [16] JAFFE, Jack; SHAPIRO, Irwin I. Lightlike behavior of particles in a Schwarzschild field. *Physical Review D*, 1972, vol. 6, no 2, p. 405.
- [17] CAVALLERI, G.; SPINELLI, G. Motion of particles entering a Schwarzschild field. *Lettere Al Nuovo Cimento* (1971–1985), 1973, vol. 6, no 1, p. 5-8.
- [18] BINI, Donato; CHICONE, Carmen; MASHHOON, Bahram. Relativistic tidal acceleration of astrophysical jets. *Physical Review D*, 2017, vol. 95, no 10, p. 104029.
- [19] GARIEL, J.; SANTOS, N. O.; WANG, Anzhong. Observable acceleration of jets by a Kerr black hole. *General Relativity and Gravitation*, 2017, vol. 49, no 3, p. 43.
- [20] DERIGLAZOV, Alexei A.; RAMÍREZ, Walberto Guzmán. Frame-dragging effect in the field of non rotating body due to unit gravimagnetic moment. *Physics Letters B*, 2018, vol. 779, p. 210-213.
- [21] DERIGLAZOV, Alexei. *Classical mechanics*. Springer International Publishing, 2016.
- [22] RAMÍREZ, Walberto Guzmán; DERIGLAZOV, Alexei A. Relativistic effects due to gravimagnetic moment of a rotating body. *Physical Review D*, 2017, vol. 96, no 12, p. 124013.
- [23] SPALLICCI, Alessandro DAM. Comment on “Acceleration of particles to high energy via gravitational repulsion in the Schwarzschild field”[Astropart. Phys. 86 (2017) 18–20]. *Astroparticle Physics*, 2017, vol. 94, p. 42-43.
- [24] DRUMAUX, Paul. Sur la force gravifique. *Ann. Soc. Sci. Bruxelles*, 1936, vol. 56, p. 5-14.
- [25] NGUYEN-SCHÄFER, Hung; SCHMIDT, Jan-Philip. *Tensor analysis and elementary differential geometry for physicists and engineers*. Springer, 2014.
- [26] FOSTER, James A.; NIGHTINGALE, J. David. *A short course in General Relativity*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [27] EDDINGTON, A. S. Gravitational deflection of high-speed particles. *Nature*, 1920, vol. 105, no 2628, p. 37.
- [28] C. de Jans, Mem. Acad. R. Belgique Cl. Sc. 7, 1 (1923).