Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Marco Antonio Milla Caballero

Existência de soluções para uma classe de problemas elípticos via Teorema de Linking

Juiz de Fora

2018

Marco Antonio Milla Caballero

Existência de soluções para uma classe de problemas elípticos via Teorema de Linking

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Análise, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Fábio Rodrigues Pereira

Juiz de Fora

2018

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Caballero, Marco Antonio Milla.
Existência de soluções para uma classe de problemas elípticos via Teorema de Linking / Marco Antonio Milla Caballero. – 2018.
103 f. : il.

Orientador: Fábio Rodrigues Pereira
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2018.

1. Equações Diferenciais. 2. Expoente Crítico. 3. Problema Semilinear. I. Pereira, Fábio Rodrigues, orient. II. Título.

Marco Antonio Milla Caballero

Existência de soluções para uma classe de problemas elípticos via Teorema de Linking

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Análise, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 27 de abril del 2018

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Fábio Rodrigues Pereira - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Luiz Fernando de Oliveira Faria
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Bruno Mendes Rodrigues
Universidade Federal de Ouro Preto

Dedico este trabalho aos meus pais María e Melitón; aos meus irmãos Cindy, Diego e Flor; aos meus sobrinhos Rodrigo e Camila e minha namorada Yolanda Débora que sempre me incentivaram, com seus conselhos e amor incondicional, a continuar perseverando para ser uma boa pessoa neste caminho que é a vida.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por cuidar de mim e por estar sempre ao meu lado em todos os momentos.

Aos meus pais, María e Melitón, por seu amor, por todos os sacrifícios que fizeram e ainda continuam a fazer por minha educação.

Aos meus irmãos, Cindy, Diego e Flor, bem como aos meus sobrinhos, Rodrigo e Camila por todo o amor, incentivo e apoio.

A minha namorada, Yolanda Débora, pelo seu apoio, amor, compreensão e por sempre me motivar.

Ao meu orientador, professor Fábio Rodrigues Pereira, pela amizade, por seus ensinamentos, pela paciência, por acreditar em mim, pela competência e grande dedicação para me orientar na realização deste trabalho.

Aos professores Luiz Fernando de Oliveira Faria e Bruno Mendes Rodrigues por terem aceito o convite para participar da minha banca e pelas contribuições importantes através dos comentários e sugestões valiosas.

Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do ICE - UFJF.

À coordenação do Mestrado em Matemática da UFJF juntamente com todos os professores do programa.

Aos meus amigos, Miguel, José, Andrea, Margarita, John, Eduardo e Ginette por tornar a minha estadia agradável cada vez que voltei a Lima.

Aos meus amigos do curso de Mestrado por todos os momentos, de estudo e diversão, compartilhados.

Ao meu amigo Pablo por me ajudar com as ilustrações.

À CAPES, pelo suporte financeiro, sem o qual este trabalho não seria possível.

“Nas questões matemáticas não se compreende a incerteza nem a dúvida, assim como tampouco se podem estabelecer distinções entre verdades médias e verdades de grau superior.”

(Hilbert)

RESUMO

Neste trabalho, estudamos a existência de solução para o problema semilinear elíptico com condição de fronteira de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = g(x,u) + |u|^{2^*-2}u & \text{em } \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ regular, $2^* = \frac{2n}{n-2}$ é o expoente crítico de Sobolev e $g(\cdot, s)$ tem crescimento subcrítico no infinito (isto é, $\lim\limits_{|s|\to\infty} \dfrac{g(\cdot,s)}{|s|^{2^*-1}} = 0$). Considerando os casos de não ressonância e o de ressonância em vizinhanças da origem, mostramos através de métodos variacionais a existência de pelo menos uma solução não trivial para o problema acima.

Palavras-chave: Equações Diferenciais. Expoente Crítico. Problema Semilinear.

ABSTRACT

In this work, we study the existence of solution for the semilinear elliptic problem with Dirichlet bundary condition

$$\begin{cases} -\Delta u = g(x,u) + |u|^{2^*-2}u & \text{em } \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ is a bounded domain with smooth boundary $\partial\Omega$, $2^* = \frac{2n}{n-2}$ is the critical Sobolev exponent and $g(\cdot, s)$ has subcritical growth at infinity (i.e. $\lim\limits_{|s|\to\infty} \dfrac{g(\cdot,s)}{|s|^{2^*-1}} = 0$). Considering the cases of non-resonance and resonance in neighborhoods of the origin, we show by variational methods the existence of at least one non-trivial solution to the above problem.

Key-words: Differential Equations. Critical Exponent. Semilinear Problem.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

PS	Palais-Smale
TPM	Teorema do Passo da Montanha

LISTA DE SÍMBOLOS

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$	Subconjunto aberto não-vazio e limitado.
$\partial\Omega$	Fronteira de Ω.
$\overline{\Omega}$	Fecho de Ω.
A^c	Complementar do conjunto A.
$med\,(A)$	Medida de Lebesgue de um subconjunto A de $\mathbb{R}^n$.
$B_R(x_0)$	Bola de raio R centrada no ponto x_0.
B_R	Bola de raio R centrado na origem.
∇u	$\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right)$.
Δu	$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.
$supp(f)$	Suporte da função f.
$D^\alpha u$	$\dfrac{\partial^{\lvert\alpha\rvert}}{\partial x_1^{\alpha_1}, \ldots, \partial x_n^{\alpha_n}} u\,, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.
$C(\Omega, \mathbb{R})$	Espaço das funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ contínuas em Ω.
$C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$	Espaço das funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ contínuas em $\overline{\Omega}$.
$\lVert \cdot \rVert_0$	Norma definida em $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$.
$C^1(\Omega, \mathbb{R})$	Espaço de todas as funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ que possuem derivadas contínuas em Ω.
$C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$	Espaço de todas as funções $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ que possuem derivadas contínuas em $\overline{\Omega}$.
$\lVert \cdot \rVert_{C^1}$	Norma definida em $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$.
$C_c^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$	Espaço de todas as funções $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ que possuem derivadas contínuas em $\overline{\Omega}$ com suporte compacto.
$C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$	Espaço das funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ infinitamente diferenciáveis com suporte compacto.
$L^p(\Omega)$	Espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$ com norma L^p finita $\lVert u \rVert_{L^p} = \lVert u \rVert_p = \left(\int_\Omega \lvert u \rvert^p dx\right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty.$

$L^\infty(\Omega)$ Espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$, onde $\text{supess}_{x\in\Omega}|u(x)| < \infty$ com norma

$$\|u\|_{L^\infty} = \|u\|_\infty = \inf\{C > 0 : |u(x)| \leq C \text{ quase sempre em } \Omega\}.$$

$W^{k,p}(\Omega)$ Espaços de Sobolev.

$H^k(\Omega)$ Espaço de Sobolev $W^{k,2}(\Omega)$.

$H_0^1(\Omega)$ Fecho de $C_c^\infty(\Omega)$ com respeito ao espaço $H^1(\Omega)$ com norma dada por

$$\|u\|_{H^1} = \left[\int_\Omega (|\nabla u|^2 + |u|^2)dx\right]^{\frac{1}{2}}.$$

A norma considerada em $H_0^1(\Omega)$ é dada por $\|u\|_{H_0^1} = \left[\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}$.

$H^{-1}(\Omega)$ Espaço dual topológico de $H_0^1(\Omega)$.

$U \hookrightarrow V$ Imersão contínua de U em V.

$U \overset{c}{\hookrightarrow} V$ Imersão compacta de U em V.

$p^* = \dfrac{np}{n-p}$ Expoente crítico de Sobolev com respeito à imersão de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$.

X^* Espaço dual topológico de X.

$\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ Produto interno definido em X.

$\to$ Convergência forte.

$\rightharpoonup$ Convergência fraca.

q.t.p. Quase todo ponto (a menos de um conjunto de medida de Lebesgue nula).

$x \approx y$ Se x está suficientemente próximo de y $(x, y \in \mathbb{R})$.

$f = O(g)$ Significa que existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq C|g(x)|$, $\forall\, x$ suficientemente próximo de x_0.

$f = o(g)$ Significa que $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Esta dissertação tem como objetivo expor o trabalho de F. Gazzola e B. Ruf [11], o qual será estudado ao longo deste trabalho. Estudamos a existência de solução para o problema elíptico com condição de fronteira de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = g(x,u) + |u|^{2^*-2}u & \text{em } \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ regular, $2^* = \frac{2n}{n-2}$ é o expoente crítico de Sobolev, e $g(\cdot,s)$ tem crescimento subcrítico no infinito (isto é, $\lim\limits_{|s|\to\infty} \dfrac{g(\cdot,s)}{|s|^{2^*-1}} = 0$).

Vamos considerar a seguinte hipótese sobre o termo subcrítico g:

$g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função Carathéodory tal que para cada $\varepsilon > 0$, existe $a_\varepsilon \in L^{\frac{2n}{n+2}}(\Omega)$ satisfazendo:

(i) $$|g(x,s)| \leq a_\varepsilon(x) + \varepsilon\,|s|^{\frac{n+2}{n-2}}, \text{ para } x \in \Omega \text{ q.t.p e } \forall s \in \mathbb{R}.$$

Para a primitiva $G(x,s) = \displaystyle\int_0^s g(x,t)dt$, assumiremos que:

(ii) $$G(x,s) \geq 0, \quad \text{para } x \in \Omega \text{ q.t.p e } \forall s \in \mathbb{R}.$$

No caso em que o problema é não-ressonante, assumiremos ainda que:

Existem $k \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$, $\sigma > 0$, e $\mu \in (\lambda_k, \lambda_{k+1})$ tais que

(iii) $$\frac{1}{2}(\lambda_k + \sigma)s^2 \leq G(x,s) \leq \frac{1}{2}\mu s^2, \quad \text{para } x \in \Omega \text{ q.t.p e } \forall\,|s| \leq \delta.$$

(iv) $$G(x,s) \geq \frac{1}{2}(\lambda_k + \sigma)s^2 - \frac{1}{2^*}\,|s|^{2^*}, \quad \text{para } x \in \Omega \text{ q.t.p e } \forall s \neq 0.$$

Quando a dimensão é igual a $n = 3$ (ou seja, em $\mathbb{R}^3$), precisamos de uma condição de crescimento no infinito:

Iremos supor que existe um subconjunto aberto e não vazio $\Omega_0 \subset \Omega$, tal que

(v) $$\lim_{s\to+\infty} \frac{G(x,s)}{s^4} = +\infty \quad \text{uniformemente em relação a } x \in \Omega_0.$$

No caso em que o problema é ressonante, além de (i) e (ii), suporemos que:

Existem $k \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ e $\mu \in (\lambda_k, \lambda_{k+1})$ tais que

(vi) $$\frac{1}{2}\lambda_k s^2 \leq G(x,s) \leq \frac{1}{2}\mu s^2, \quad \text{para } x \in \Omega \text{ q.t.p e } \forall\,|s| \leq \delta$$

e existe $\sigma \in (0, 1/2^*)$ tal que

(vii) $$G(x,s) \geq \frac{1}{2}\lambda_k s^2 - (\frac{1}{2^*} - \sigma)\,|s|^{2^*}, \quad \text{para } x \in \Omega \text{ q.t.p e } \forall s \in \mathbb{R}.$$

Além disso, exigimos que existe um subconjunto aberto e não vazio $\Omega_0 \subset \Omega$, tal que

$(viii)$ $$\lim_{s\to+\infty} \frac{G(x,s)}{s^{8n/(n^2-4)}} = +\infty \text{ uniformemente em relação a } x \in \Omega_0.$$

Nós mostraremos neste thabalho os seguintes resultados:

Teorema 5.1. Assuma as hipóteses (i) - (iv) se $n \geq 4$ (ou (i) - (v) se $n = 3$). Então a equação (1.1) admite uma solução não trivial.

Teorema 6.1. Assuma as hipóteses (i), (ii), (vi) - $(viii)$. Então a equação (1.1) admite uma solução não trivial.

Em 1983 foi apresentado o trabalho pioneiro de Brezis e Nirenberg [7], que faz um estudo do seguinte problema crítico

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + |u|^{2^*-2} u & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.2}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ regular e λ é uma constante real. Os autores provaram que o funcional associado ao problema (1.2) satisfaz a condição (PS) no intervalo $(0, \frac{S^{n/2}}{n})$, mas falha em satisfazê-lo no nível $\frac{S^{n/2}}{n}$ (veja [9] para uma prova alternativa) e que o problema (1.2) possui uma solução quando $n \geq 4$ e $0 < \lambda < \lambda_1$, onde λ_1 é o primeiro autovalor do operador $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ ou quando $n = 3$, $\Omega = B_1(0)$ e $\frac{\lambda_1}{4} < \lambda < \lambda_1$.

Note que o problema (1.1) envolve o caso crítico, o que torna mais delicada as técnicas variacionais empregadas, pois neste caso temos que a imersão de Sobolev de $H_0^1(\Omega)$ em $L^{2^*}(\Omega)$ não é compacta. Isto implica que o funcional de Euler-Lagrange associado ao problema (1.1) não satisfaz a condição de Palais-Smale [14] (condição (PS)).

Para contornarmos esta perda de compacidade e provarmos resultados de existência para o problema (1.1), construímos níveis minimax para o funcional energia associado ao problema (1.1), de modo que, estes níveis pertencem ao intervalo $(0, \frac{S^{n/2}}{n})$, onde S denota a melhor constante de Sobolev da imersão de $H_0^1(\Omega)$ em $L^{2^*}(\Omega)$. Esta estratégia foi proposta por Brezis e Nirenberg [7] e será usada neste trabalho.

A principal ferramenta utilizada em nosso trabalho é o denominado Teorema do Passo da Montanha Generalizado (ou Teorema de Linking), cujas idéias foram introduzidas por Ambrosetti e Rabinowitz [2].

Este trabalho está organizado da seguinte forma:

Iniciamos o Capítulo 2 apresentando as definições e os resultados usados nesta dissertação, indicando as referências bibliográficas onde as demonstrações podem ser encontradas.

No Capítulo 3 é realizada a formulação do problema (1.1), enunciando-se as hipóteses gerais que são admitidas no decorrer do trabalho.

No Capítulo 4 descrevemos a caracterização variacional do problema, a qual é baseada nas condições geométricas do Teorema de Linking.

No Capítulo 5 provamos a existência de pelo menos uma solução não trivial para o problema no caso de não ressonância perto da origem.

No Capítulo 6 mostramos a existência de pelo menos uma solução não trivial para o problema no caso de ressonância em uma vizinhança da origem.

No Apêndice A apresentamos a Teoria do Grau, que foi usada para provar o Teorema de Linking.

2 CONCEITOS PRELIMINARES

Este capítulo pretende apresentar as definições e os resultados que serão utilizados ao longo deste trabalho. Muitos desses resultados não serão mostrados, mas a referência bibliográfica será indicada onde o leitor interessado pode consultar.

2.1 FUNÇÕES DIFERENCIÁVEIS E FUNCIONAIS

Nesta seção descreveremos as definições da diferencial de Gateaux e Fréchet e alguns resultados sobre funcionais e teoremas sobre espaços reflexivos.

Definição 2.1. Seja $F : U \subset V \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função, onde U é um aberto em $V \subset \mathbb{R}^n$. O limite

$$\lim_{t \to 0} \frac{|F(u_0 + th) - F(u_0)|}{t},$$

se existir, será chamado derivada de Gateaux de F em u_0 na direção $h \in V$ e será denotada por $\langle F'(u_0), h \rangle$.

Definição 2.2. Seja $F : U \subset V \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função, onde U é um aberto em $V \subset \mathbb{R}^n$. F é diferenciável em $u_0 \in U$ no sentido de Fréchet (ou Fréchet diferenciável em $u_0 \in U$), se existir uma aplicação linear contínua $T : V \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{|F(u_0 + h) - F(u_0) - T(h)|}{\|h\|} = 0.$$

Dizemos que a função $F \in C^1(U, \mathbb{R})$ se a derivada de Fréchet F' existe e é contínua sobre U.

Teorema 2.1. *Seja $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ onde E é um subconjunto aberto de um espaço vetorial normado X. Se o funcional φ possui uma derivada de Gateaux contínua em E, então $\varphi \in C^1(E, \mathbb{R})$.*

Demonstração. Ver [[19] Proposition 1.3]. □

Teorema 2.2. *Sejam $(X, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado e $(x_m) \subset X$ uma seqüência, então valem as seguintes afirmações :*

(i) $x_m \rightharpoonup x \Leftrightarrow f(x_m) \to f(x)$ *para todo* $f \in X^*$.

(ii) *Se* $x_m \to x$, *então* $x_m \rightharpoonup x$.

(iii) *Se* $x_m \rightharpoonup x$, *então* (x_m) *é limitada na topologia da norma e além disso,* $\|x\| \leq \liminf_{m \to \infty} \|x_m\|$.

(iv) *Se* $x_m \rightharpoonup x$ *e* $f_m \to f$ *em* X^* *(isto é,* $\|f_m - f\|_{X^*} \to 0$*), então* $\langle f_m, x_m \rangle \to \langle f, x \rangle$.

Demonstração. Ver [[5] Proposition 3.13]. □

Teorema 2.3. *Se E é um espaço reflexivo, então toda seqüência limitada em E possui uma subseqüência fracamente convergente.*

Demonstração. Ver [[3] Teorema 5.25]. □

Teorema 2.4. *Todo espaço de Hilbert é reflexivo.*

Demonstração. Ver [[3] Corolário 6.13]. □

2.2 ESPAÇOS CLÁSSICOS

Nesta seção, daremos a definição dos espaços $L^p(\Omega)$ e apresentaremos algumas das suas propriedades mais importantes.

Definição 2.3. Seja Ω um conjunto mensurável. Seja $1 \leq p < \infty$. Definimos o espaço $L^p(\Omega)$ como sendo o espaço das (classes de equivalência de) funções reais p-integráveis no sentido de Lebesgue, isto é,

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \ \text{ mensurável } \ : \ \int_\Omega |u|^p \, dx < \infty \right\},$$

dotado da norma

$$\|u\|_{L^p} = \|u\|_p = \left(\int_\Omega |u|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Definição 2.4. Seja Ω um conjunto mensurável. Definimos o espaço $L^\infty(\Omega)$ como sendo o espaço das (classes de equivalência de) funções reais mensuráveis limitadas, isto é,

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \ \text{ mensurável } \ : \ \sup_{x \in \Omega} |u(x)| < \infty \right\},$$

dotado da norma

$$\|u\|_{L^\infty} = \|u\|_\infty = \inf \{ C > 0 \ : |u(x)| \leq C \ \text{ quase sempre em } \Omega \}.$$

Teorema 2.5 (Desigualdade de Hölder)**.** *Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, com $0 < p < \infty$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Então*

$$fg \in L^1(\Omega) \ \ e \ \ \int_\Omega |fg| dx \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Demonstração. Ver [[5] Theorem 4.6]. □

Teorema 2.6. *Sejam (u_m) uma seqüência em $L^p(\Omega)$ e $u \in L^p(\Omega)$ tais que $u_m \to u$. Então existe uma subsequência (u_{m_k}) de (u_m) e existe $h \in L^p(\Omega)$ tais que* *(i)* $u_{m_k} \to u$, *q.t.p em* Ω;

(ii) $|u_{m_k}| \leq h$, *para todo* $k \in \mathbb{N}$ *e q.t.p em* Ω.

Demonstração. Ver [[5] Theorem 4.9]. □

Teorema 2.7 (Teorema da convergência dominada de Lebesgue)**.** *Seja* (f_m) *uma seqüência de funções em* $L^1(\Omega)$, *satisfazendo:*

(a) $f_m \to f$ *q.t.p em* Ω;

(b) existe $g \in L^1(\Omega)$ *tal que* $|f_m| \leq g$ *para todo* $m \in \mathbb{N}$ *e q.t.p em* Ω.

Então $f \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\int_\Omega f_m dx \to \int_\Omega f dx.$$

Demonstração. Ver [[5] Theorem 4.2]. □

Teorema 2.8. *Sejam* (f_m) *uma seqüência de funções em* $L^p(\Omega)$, $f \in L^p(\Omega)$ *e* $g \in L^{p'}(\Omega)$ *tais que* $f_m \rightharpoonup f$ *em* $L^p(\Omega)$ *e* $f_m \to f$ *q.t.p em* Ω, *com* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. *Então*

$$\int_\Omega f_m g dx \to \int_\Omega f g dx.$$

Demonstração. Ver [12]. □

Lema 2.1 (Brézis-Lieb, primeira versão)**.** *Sejam* Ω *um subconjunto aberto de* $\mathbb{R}^n$ *e* $(u_m) \subset L^p$ *uma seqüência de funções, com* $1 < p < \infty$. *Se*

(a) (u_m) *é limitada em* $L^p(\Omega)$;

(b) $u_m \to u$ *q.t.p em* Ω.

Então

$$u_m \rightharpoonup u \text{ em } L^p(\Omega).$$

Demonstração. Ver [[5], [18]]. □

Lema 2.2 (Brézis-Lieb, segunda versão)**.** *Sejam* $1 \leq p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *e* (f_m) *uma seqüência limitada de funções em* $L^p(\Omega)$ *que converge em quase todo ponto para* f, *então*

$$f \in L^p(\Omega) \quad e \quad \lim_{m\to\infty} (\|f_m\|_{L^p}^p - \|f - f_m\|_{L^p}^p) = \|f\|_{L^p}^p.$$

Demonstração. Ver [[1] Lemma 11.9, [19] Lemma 1.32]. □

Lema 2.3 (Brézis-Lieb, mais geral)**.** *Sejam* $1 \leq p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *e* $j : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *é uma função contínua com* $j(0) = 0$ *que satisfaz a seguinte hipotese: para cada* $\varepsilon > 0$ *suficientemente pequeno, existem duas funções contínuas,* φ_ε *e* ψ_ε *não negativas tais que*

$$|j(a+b) - j(a)| \leq \varepsilon\varphi_\varepsilon(a) + \psi_\varepsilon(b), \text{ para todo } a, b \in \mathbb{C}.$$

Seja $f_m = f + g_m$ *uma seqüência de funções em* $L^p(\Omega)$ *tais que*

(a) $g_m \to 0$ *q.t.p em* Ω*;*

(b) $j(f) \in L^1$*;*

(c) $\int_\Omega \varphi_\varepsilon(g_m(x))dx \leq C < \infty$*, para alguma constante* C *independente de* ε *e* m*;*

(d) $\int_\Omega \psi_\varepsilon(f(x))dx < \infty$*, para todo* $\varepsilon > 0$*.*

Então $\lim_{m\to\infty} \int [j(f+g_m) - j(g_m) - j(f)]dx = 0$*, quando* $m \to \infty$*.*

Demonstração. Ver [20]. □

2.3 ESPAÇOS DE SOBOLEV

Nesta seção, apresentamos os espaços de Sobolev e alguns dos principais teoremas, como os teoremas de imersão contínua e compacta.

Definição 2.5. Dizemos que um comjunto A está compactamente contido em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, e denotamos por $A \subset\subset \Omega$ se $A \subset \bar{A} \subset \Omega$ e $\bar{A}$ é compacto como subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

De agora em diante, consideramos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto não-vazio, salvo indicação em contrário, e $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função.

Definição 2.6. O conjunto $\overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}$ é chamado *Suporte* da função u. Denotamos este conjunto por $supp(u)$.

Definição 2.7. Definimos por $C_c^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$, cujas derivadas parciais de todas as ordens são contínuas e cujo suporte é um conjunto compacto contido em Ω.

Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto não vazio. A função definida por

$$1_K(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in K \\ \\ 0 & \text{se} \quad x \notin K \end{cases}$$

é chamada a função caracteristica de K.

Definição 2.8. Seja $1 \leq p \leq \infty$. Uma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ pertence a $L^p_{loc}(\Omega)$ se $u \cdot 1_K \in L^p(\Omega)$, para todo compacto $K \subset \Omega$.

Definição 2.9. Seja um vetor $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, onde α_i é um inteiro não negativo, então α é chamado um multi-índice de ordem $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$. Dado um multi-índice α definimos

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Definição 2.10. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, α um multi-indice e $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$. Dizemos que v é a α-ésima derivada fraca de u em Ω, e escrevemos $D^\alpha u = v$, se

$$\int_\Omega u(x) \cdot D^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v(x) \cdot \varphi(x) dx, \quad \forall\, \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Definição 2.11. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $1 \leq p \leq \infty$ e $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Definimos o espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, como sendo o espaço das funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que qualquer derivada fraca de u, até a ordem k, é uma função do $L^p(\Omega)$, isto é,

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \text{ para todo multi-índice } \alpha \text{ com } |\alpha| \leq k\}.$$

Observação 2.1. Observe que se $u \in W^{k,p}(\Omega)$ então $u \in L^p(\Omega)$; assim toda função de $u \in W^{k,p}(\Omega)$ pertence ao conjunto $L^1_{loc}(\Omega)$.

Observação 2.2. Uma outra observação importante é que valem as seguintes inclusões

$$C_c^\infty(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega).$$

Observação 2.3. Se $k = 0$, para cada p tal que $1 \leq p \leq \infty$, temos que

$$W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega). \tag{2.1}$$

Além disso, para cada p, se $k_1 \leq k_2$ então $W^{k_2,p}(\Omega) \subset W^{k_1,p}(\Omega)$.

Observação 2.4. O espaço $W^{k,p}(\Omega)$ torna-se um espaço normado introduzindo a seguinte norma

$$\|u\|_{W^{k,p}} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \right)^{1/p}, \qquad \text{se } 1 \leq p < \infty. \tag{2.2}$$

$$\|u\|_{W^{k,p}} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty}, \qquad \text{se } p = \infty. \tag{2.3}$$

Observação 2.5. Duas normas para o espaço $W^{k,p}(\Omega)$, equivalentes a (2.2), são

$$|u|_{W^{k,p}} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p} \quad \text{e} \quad |||u|||_{W^{k,p}} := \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p}.$$

Teorema 2.9. *O espaço $W^{k,p}(\Omega)$ com a norma $\|\cdot\|_{W^{k,p}}$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Ver [[10] Teorema 4.9]. $\square$

Observação 2.6. Quando $p = 2$, vamos denotar $W^{k,p}(\Omega)$ simplesmente por $H^k(\Omega)$, isto é, $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$. Em particular, se $k = 1$, temos

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \quad : \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \text{ para } i = 1, ..., n \right\}.$$

Também de (2.1), temos que $H^0(\Omega) = W^{0,2}(\Omega) = L^2(\Omega)$.

Observação 2.7. Para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ com $p = 2$, o espaço $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, munido do produto interno:

$$\langle u, v \rangle_{W^{k,2}} = \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}, \quad \forall\, u, v \in W^{k,2}(\Omega).$$

Definição 2.12. Sejam $(u_m)_{m \in \mathbf{N}}$ uma seqüência em $W^{k,p}(\Omega)$ e $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Dizemos que $(u_m)_{m \in \mathbf{N}}$ converge para u em $W^{k,p}(\Omega)$, denotado por $u_m \to u$ em $W^{k,p}(\Omega)$, se

$$\lim_{m \to \infty} \|u_m - u\|_{W^{k,p}} = 0.$$

Definição 2.13. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $1 \leq p \leq \infty$ e $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. O espaço $W_0^{k,p}(\Omega)$ é definido como sendo o fecho de $C_c^\infty(\Omega)$ na norma $\|\cdot\|_{W^{k,p}}$ (em $W^{k,p}(\Omega)$), isto é,

$$W_0^{k,p}(\Omega) := \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{k,p}}}.$$

Analogamente, o espaço $H_0^k(\Omega)$ é o fecho de $C_c^\infty(\Omega)$ em $H^k(\Omega)$.

De acordo com a definição, $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ se, e somente se, existe uma seqüência $(u_m)_{m \in \mathbf{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$ tal que $u_m \to u$ em $W_0^{k,p}(\Omega)$.

Notamos que, para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $W_0^{k,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma induzida de $W^{k,p}(\Omega)$. Também nota-se que, se $p = 2$, $H_0^k(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com a norma induzida de $H^k(\Omega)$.

Uma norma para $W_0^{k,p}(\Omega)$ equivalente à norma dada em (2.2) pode ser definido por

$$\|u\|_{W_0^{k,p}} := \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha| = k} |D^\alpha u|^p \right)^{1/p}.$$

Definição 2.14. Sejam X e Y dois espaços vetoriais normados com $X \subseteq Y$. Dizemos que X está imerso continuamente em Y se existe $C > 0$ tal que

$$\|x\|_Y \leq C\, \|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

Nesse caso, escrevemos $X \hookrightarrow Y$.

Observe que dizer que a imersão de X em Y é contínua é equivalente a dizer que a aplicação identidade $i : X \longrightarrow Y$ dada por $i(x) = x,\ \ x \in X$, é contínua.

Lembremos que, se X e Y são espaços vetoriais normados, dizemos que um operador linear $T : X \longrightarrow Y$ é compacto quando T é contínuo e T leva conjuntos limitados em conjuntos relativamente compactos, isto é, se $A \subseteq X$ é limitado então $\overline{T(A)} \subseteq Y$ é compacto.

Definição 2.15. Sejam X e Y dois espaços vetoriais normados com $X \hookrightarrow Y$. Dizemos que a imersão de X em Y é compacta se a aplicação identidade $i : X \longrightarrow Y$ for compacta. Nesse caso dizemos que X está imerso compactamente em Y e escrevemos $X \overset{c}{\hookrightarrow} Y$.

Uma maneira equivalente de definir uma imersão compacta é dizer que X está imerso compactamente em Y se toda seqüência $(x_m) \subset X$ limitada possui subseqüência convergente em Y.

Teorema 2.10. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe C^1 e $1 \leq p \leq \infty$. Então as seguintes imersões são contínuas:*

(i) Se $1 \leq p < n$, então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$, onde $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$.

(ii) Se $p = n$, então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)\ \ \forall q \in [p, +\infty)$.

(iii) Se $p > n$, então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Demonstração. Ver [[5] Corollary 9.14]. □

Teorema 2.11. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado com fronteira suave, então*

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

$$\textit{com} \quad 1 \leq q \leq 2^* = \begin{cases} \dfrac{2n}{n-2} & \textit{se} \quad n \geq 3; \\[2ex] \infty & \textit{se} \quad n = 1, 2. \end{cases}$$

Demonstração. Ver [[5] Remark 20]. □

Teorema 2.12 (Rellich-Kondrachov)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto limitado de classe $C^1(\Omega)$, $n \geq 2$. Então as seguintes imersões são compactas.*

(i) Se $p < n$, então $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)\ \forall\ q \in [1, p^*[$, onde $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$.

(ii) *Se* $p = n$, *então* $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)\ \forall\, q \in [1, +\infty[$.

(iii) *Se* $p > n$, *então* $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C\left(\overline{\Omega}\right)$.

Demonstração. Ver [[5] Theorem 9.16]. □

Observação 2.8. Se $2 = p < n$, pelo Teorema 2.12, temos que

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega),\ \forall\, q \in [1, 2^*[\text{ com } 2^* = \frac{2n}{n-2}.$$

Analogamente, se $p = 2 = n$, pelo Teorema 2.12, temos que

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega),\ \forall\, q \in [1, +\infty[.$$

Mais explicitamente, temos o seguinte teorema:

Teorema 2.13. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um domínio limitado. Então*

(i) *Se* $n > 2$, *então* $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *para todo* $1 \leq q \leq 2^*$; *a imersão é compacta se* $1 \leq q < 2^*$.

(ii) *Se* $n = 2$, *então* $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *para todo* $1 \leq q < \infty$.

(iii) *Se* $n < 2$, *então* $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\Omega)$, *onde* $\alpha = 1 - n/2$.

Demonstração. Ver [[1] Theorem 1.6]. □

Observação 2.9. Em particular para $q = 2$, pelo Teorema 2.13, se $n > 2$ temos que,

$$H_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega).$$

Observação 2.10. Como qualquer espaço de Hilbert é reflexivo, então $H_0^1(\Omega)$ é reflexivo. Lembramos também que qualquer seqüência limitada num espaço reflexivo admite uma subseqüência fracamente convergente.

Teorema 2.14 (Sobolev, Gagliardo, Nirenberg)**.** *Seja* $1 \leq p < n$, *então* $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ *onde* $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$ *e existe uma constante* $C = C(p, n)$ *tal que*

$$\|u\|_{L^{p^*}} \leq C \|\nabla u\|_{L^p},\ \forall\, u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração. Ver [[5] Theorem 9.9]. □

Corolário 2.15. *No Teorema 2.14 pode-se trocar* $\mathbb{R}^n$ *por* Ω *(aberto qualquer), então o teorema é válido para todo* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração. Ver [[5] Remark 20]. □

Teorema 2.16 (Desigualdade de Poincaré). *Sejam Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^n$ e $p \in [1, \infty[$. Então existe uma constante $C = C(p, \Omega) > 0$ tal que*

$$\|u\|_{L^p} \leq C \|\nabla u\|_{W^{1,P}}, \ \forall \ u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração. Ver [13]. □

2.4 MÉTODOS MINIMAX

Nesta seção, apresentamos as definições necessárias e o Lema de Deformação para provar os teoremas do método minimax, como o Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz e o Teorema de Linking (Enlace).

Definição 2.16. Sejam X um espaço de Banach e $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$. Dizemos que $c \in \mathbb{R}$ é um valor crítico de ϕ se existe $u \in X$ com $\phi'(u) = 0$ e $\phi(u) = c$. O conjunto de todos os pontos críticos no nível c será designado por

$$K_c = \{u \in X \ : \ \phi'(u) = 0 \ \text{ e } \ \phi(u) = c\},$$

e denotaremos por ϕ^c o conjunto de todos os pontos em níveis menores ou iguais a c, isto é,

$$\phi^c = \{u \in X \ : \ \phi(u) \leq c\}.$$

Definição 2.17. Dado $(X, \|\cdot\|)$ um espaço normado, e seja $S \subset X$ com $\alpha > 0$, designamos por S_α a vizinhança fechada de S definida por

$$S_\alpha = \{u \in X \ : \ d(u, S) \leq \alpha\},$$

onde $d(u, S) = \inf\{\|u - v\| \ : \ v \in S\}$.

Lema 2.4 (Lema de Deformação). *Sejam $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach e $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$. Suponha que $S \subset X$, $c \in \mathbb{R}$, $4\beta > \alpha$ e $\epsilon, \delta > 0$ são tais que*

$$\|\phi'(u)\| \geq \frac{4\epsilon}{\delta}, \ \ \forall u \in \phi^{-1}\left(\left[c - 2\epsilon\left(\frac{4\beta}{\alpha} - 1\right), c + 2\epsilon\left(\frac{4\beta}{\alpha} - 1\right)\right]\right) \cap S_{2\delta}.$$

Então, existe $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ tal que $\forall u \in X$ e $t \in [0,1]$, tem-se:

(1) $\eta(0, u) = u$;

(2) $\eta(t, u) = u$, *se* $u \notin \phi^{-1}\left(\left[c - 2\epsilon\left(\frac{4\beta}{\alpha} - 1\right), c + 2\epsilon\left(\frac{4\beta}{\alpha} - 1\right)\right]\right) \cap S_{2\delta}$;

(3) $\eta(1, \phi^{c+\epsilon((4\beta/\alpha)-1)} \cap S) \subset \phi^{c-\epsilon} \cap S_\delta$*;*

(4) $\eta(1, \cdot) : X \longrightarrow X$ *é um homeomorfismo.*

Demonstração. Ver [[12] Lemme 7.4, [19] Lemma 2.3]. □

Definição 2.18. Sejam X um espaço de Banach e $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$. Dizemos que uma seqüência $(u_m) \subset X$ é chamada de seqüência de Palais-Smale para ϕ, se $\phi(u_m)$ é limitada e $\phi'(u_m) \to 0$ em X^*.

Definição 2.19. [Condição de Palais-Smale] Sejam X um espaço de Banach e $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$. Dizemos que o funcional ϕ satisfaz a condição (PS), se qualquer seqüência de Palais-Smale possui uma subseqüência convergente em X.

Definição 2.20. Sejam X um espaço de Banach e $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$. Dizemos que uma seqüência $(u_m) \subset X$ é chamada de seqüência de Palais-Smale para ϕ no nível c, se $\phi(u_m) \to c$ e $\phi'(u_m) \to 0$ em X^*.

Definição 2.21. [Condição de Palais-Smale no nível c] Sejam X um espaço de Banach e $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$. Dizemos que o funcional ϕ satisfaz a condição $(PS)_c$, se qualquer seqüência de Palais-Smale no nível c possui uma subseqüência convergente em X.

Se no Lema 2.4 consideramos $\alpha = 2$ e $\beta = 1$, temos o seguinte teorema:

Teorema 2.17. *Sejam* $(X, \|\cdot\|)$ *um espaço de Banach e* $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$*. Suponha que* ϕ *satisfaz a condição Palais-Smale* (PS)*. Se* $c \in \mathbb{R}$ *não é um valor crítico de* ϕ*, então para todo* $\epsilon > 0$ *suficientemente pequeno, existe* $\eta \in C([0, 1] \times X, X)$ *tal que, para qualquer* $u \in X$ *e* $t \in [0, 1]$*, tem-se:*

(1) $\eta(0, u) = u$*;*

(2) $\eta(t, u) = u$*, se* $u \notin \phi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon])$*;*

(3) $\eta(1, \phi^{c+\epsilon}) \subset \phi^{c-\epsilon}$*;*

(4) $\eta(1, \cdot) : X \longrightarrow X$ *é um homeomorfismo.*

Demonstração. Devem existir constantes positivas ϑ e ν tais que, se $u \in \phi^{-1}([c-2\vartheta, c+2\vartheta])$, temos que $\|\phi'(u)\| \geq \nu$, pois, caso contrário, existe uma seqüência (u_m) com

$$\phi(u_m) \to c \quad \text{e} \quad \phi'(u_m) \to 0, \quad \text{quando} \quad m \to +\infty. \tag{2.4}$$

Pela hipótese, ϕ satisfaz a condição Palais-Smale (PS), então existe uma subseqüência $(u_{m_k}) \subset (u_m)$ tal que $u_{m_k} \to u$ em X.

Desde que $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$, segue que

$$\phi(u_{m_k}) \to \phi(u), \tag{2.5}$$

e

$$\phi'(u_{m_k}) \to \phi'(u). \tag{2.6}$$

De (2.4), (2.5) e (2.6), pela unicidade do limite, temos que

$$\phi(u) = c \quad \text{e} \quad \phi'(u) = 0,$$

assim, c é um valor crítico de ϕ, que é uma contradição com a hipótese, logo mostramos que existem constantes positivas ϑ e ν tais que, se $u \in \phi^{-1}([c - 2\vartheta, c + 2\vartheta])$, temos que $\|\phi'(u)\| \geq \nu$.

Logo, considerando $S = X$, $\epsilon \in (0, \vartheta]$ fixado e $\delta = \dfrac{4\epsilon}{\nu}$, isto é, $\nu = \dfrac{4\epsilon}{\delta}$, pelo Lema 2.4 segue o resultado. $\square$

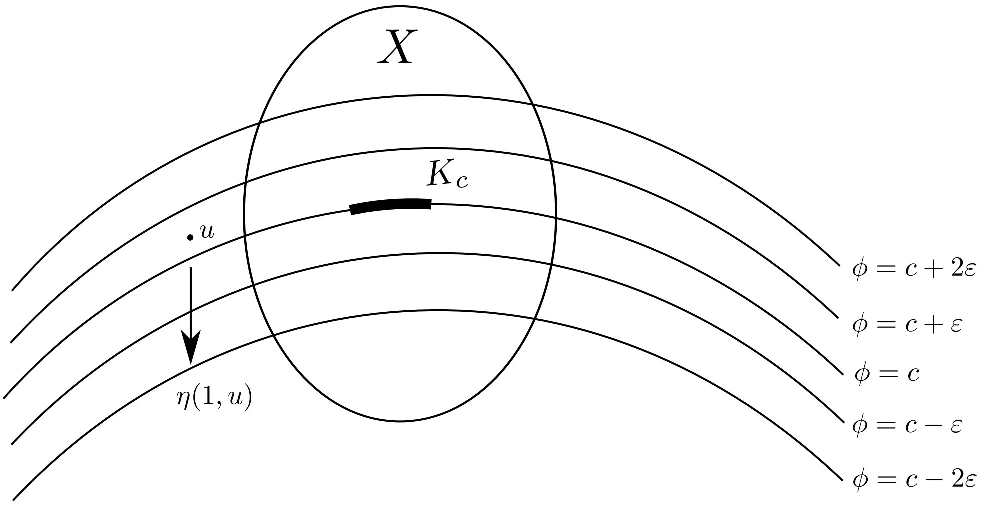

Figura 1 – Homeomorfismo $\eta(1, \cdot)$ no Lema de Deformação para $\alpha = 2$ e $\beta = 1$.

Agora estamos em condições de provar um teorema devido a Ambrosetti-Rabinowitz, denominado Teorema do Passo da Montanha (TPM).

Teorema 2.18 (Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz)**.** *Sejam* $(X, \|\cdot\|)$ *um espaço de Banach e* $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ *satisfazendo a condição Palais-Smale* (PS)*. Suponha que* $\phi(0) = 0$ *e que as seguintes condições sejam satisfeitas:*

(1) existem constantes $\rho, \alpha > 0$ *tais que* $\phi\Big|_{\partial B_\rho} \geq \alpha$ *e*

(2) existe um elemento $e \in X \backslash \overline{B}_\rho$ *tal que* $\phi(e) \leq 0$.

Então, ϕ possui um valor crítico $c \geq \alpha$, com

$$c = \inf_{g\in\Gamma} \max_{u\in g([0,1])} \phi(u),$$

onde $\Gamma = \{g \in C([0,1], X) \ \ : \ \ g(0) = 0 \ , \ g(1) = e\}$.

Demonstração. Afirmamos que $c = \inf_{g\in\Gamma} \max_{u\in g([0,1])} \phi(u)$ está bem definido. De fato, seja $g \in \Gamma$, como $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $g \in C([0,1], X)$, temos que $\phi \circ g \in C([0,1], \mathbb{R})$. Desde que $\phi \circ g$ é uma aplicação contínua no compacto $[0,1]$, então $\phi \circ g$ possui máximo em $[0,1]$, isto é, existe $\max_{t\in[0,1]} (\phi \circ g)(t) = \max_{u\in g([0,1])} \phi(u)$.

Para cada $g \in \Gamma$, definimos

$$h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad h(t) = \|g(t)\|.$$

Vemos que h é uma composição de funções contínuas, assim h é contínua. Além disso, desde que $e \in X \backslash \overline{B}_\rho$, temos que

$$h(1) = \|g(1)\| = \|e\| > \rho,$$

e

$$h(0) = \|g(0)\| = \|0\| = 0 < \rho.$$

Logo, como $h \in C([0,1], \mathbb{R})$ e $h(0) < \rho < h(1)$, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $t_0 \in (0,1)$ tal que $h(t_0) = \|g(t_0)\| = \rho$, ou seja, $g(t_0) \in \partial B_\rho$.

Da hipótese (1) segue que, $\phi(g(t_0)) \geq \alpha$, e como $g \in \Gamma$ é arbitrário, temos que

$$\phi(g(t_0)) \geq \alpha, \ \forall \ g \in \Gamma.$$

Logo,

$$\max_{t\in[0,1]} \phi(g(t) \geq \alpha, \ \ \forall g \in \Gamma. \tag{2.7}$$

Portanto, o conjunto $A := \left\{ \max_{t\in[0,1]} \phi(g(t) \ \ : \ \ g \in \Gamma \right\}$ é limitado inferiormente em $\mathbb{R}$. Assim, pelo Postulado de Dedekind, existe o ínfimo de A, portanto $c = \inf_{g\in\Gamma} \max_{u\in g([0,1])} \phi(u)$ está bem definido.

De (2.7), como α é uma cota inferior para A, pela definição de c, segue que $c \geq \alpha$.

Agora vamos provar que c é um valor crítico para ϕ. Suponha por contradição que c não é um valor crítico de ϕ. Então, pelo Teorema 2.17 (caso particular do Lema de Deformação), temos que dado $0 < \epsilon < \dfrac{1}{2}(c - \alpha)$, com $c \neq \alpha$, existe $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ tal que para qualquer $u \in X$ e $t \in [0,1]$ tem-se:

(i) $\eta(t,u)=u,$ se $u \notin \phi^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\epsilon])$, e

(ii) $\eta((1,\phi^{c+\epsilon}))\subset \phi^{c-\epsilon}$.

Além disso, pela definição de c, existe $g\in\Gamma$ tal que

$$\max_{t\in[0,1]}\phi(g(t))<c+\epsilon. \tag{2.8}$$

Considere $\tilde{h}=\eta(1,g(t))$. Desde que $\eta\in C([0,1]\times X,X)$ e $g\in C([0,1],X)$, segue que $\tilde{h}\in C([0,1],X)$.

Pela hipótese (2) e pela escolha de ϵ, temos $\phi(e)\leq 0<\alpha<c-2\epsilon$, logo $\phi(e)\notin[c-2\epsilon,c+2\epsilon]$, o que implica $e\notin\phi^{-1}([c-2\epsilon,c+2\epsilon])$. Analogamente, desde que $\phi(0)=0<\alpha<c-2\epsilon$, tem-se $\phi(0)\notin[c-2\epsilon,c+2\epsilon]$, isto é, $0\notin\phi^{-1}([c-2\epsilon,c+2\epsilon])$.

Assim, de (i), temos que

$$\tilde{h}(0)=\eta(1,g(0))=\eta(1,0)=0,$$

e

$$\tilde{h}(1)=\eta(1,g(1))=\eta(1,e)=e,$$

donde concluímos que $\tilde{h}\in\Gamma$. De (2.8), segue que

$$\phi(g(t))\leq\max_{t\in[0,1]}\phi(g(t))<c+\epsilon,$$

o que implica $g(t)\in\phi^{c+\epsilon},\ \ \forall\, t\in[0,1]$.

Assim, de (ii), temos que

$$\tilde{h}(t)=\eta(1,g(t))\in\phi^{c-\epsilon},\ \ \forall\, t\in[0,1];$$

isto é,

$$\phi(\tilde{h}(t))\leq c-\epsilon,\quad \forall\, t\in[0,1].$$

Logo,

$$\max_{t\in[0,1]}\phi(\tilde{h}(t))\leq c-\epsilon.$$

Como $c=\inf\limits_{g\in\Gamma}\max\limits_{t\in[0,1]}\phi(g(t))$, e desde que $\tilde{h}\in\Gamma$, segue que

$$c\leq\max_{t\in[0,1]}\phi(\tilde{h}(t))\leq c-\epsilon.$$

Assim,

$$c\leq c-\epsilon,$$

o que é um absurdo. Portanto, c é um valor crítico para ϕ. $\square$

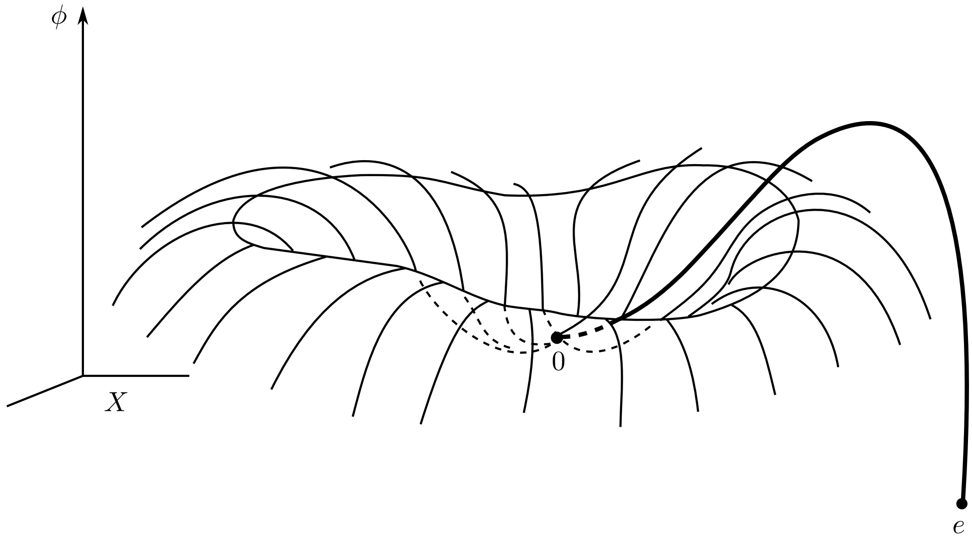

Figura 2 – Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz.

Teorema 2.19. *Sejam $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach, $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$, $e \in X$ e $\rho > 0$ tais que $\|e\| > \rho$ e*

$$b = \inf_{\|u\|=\rho} \phi(u) > \phi(0) \geq \phi(e).$$

Se ϕ satisfaz a condição $(PS)_c$ com

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} \phi(\gamma(t)),$$

onde $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X) \ : \ \gamma(0) = 0 \ , \ \gamma(1) = e\}$.

Então c é um valor crítico de ϕ.

Demonstração. Ver [[19] Theorem 2.10]. $\square$

Definição 2.22. Sejam V um espaço de Banach, S um subconjunto fechado em V e Q uma subvariedade de V com fronteira ∂Q. Dizemos que S e ∂Q “link”(ou se enlaçam) se:

(1) $S \cap \partial Q = \emptyset$;

(2) Para qualquer aplicação $h \in C(V, V)$ tal que $h|_{\partial Q} = id$, então $h(Q) \cap S \neq \emptyset$.

Exemplo 2.1. Sejam V_1 e V_2 subespaços fechados de V tais que $V = V_1 \oplus V_2$, onde $dim\, V_2 < +\infty$. Logo, para $S = V_1$, $Q = B_R \cap V_2$ com fronteira $\partial Q = \{u \in V_2 \ : \ \|u\| = R\}$, temos que S e ∂Q se enlaçam.

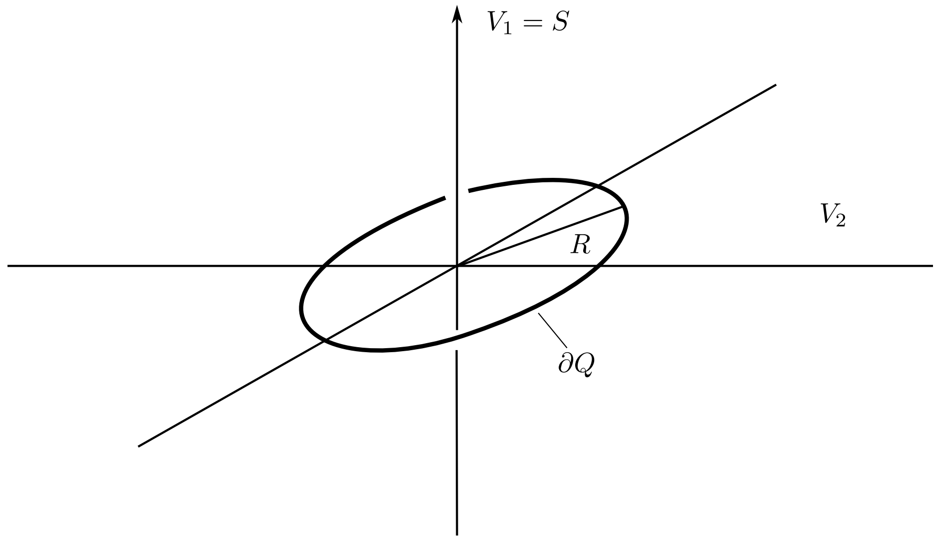

Figura 3 – No Exemplo 2.1, S e ∂Q se enlaçam.

Exemplo 2.2. Sejam V_1 e V_2 subespaços fechados de V tais que $V = V_1 \oplus V_2$, com $dim\, V_2 < +\infty$. Considere $e \in V_1$ com $\|e\| = 1$. Suponha $0 < \rho < R_1$, $0 < R_2$. Se $T = \{te\ :\ 0 \leq t \leq R_1\}$ e $S_\rho = \{u \in V\ :\ \|u\| = \rho\}$. Definindo

$$S = V_1 \cap S_\rho \quad \text{e} \quad Q = \{u + v\ :\ u \in V_2 \cap B_{R_2},\ v \in T\}$$

com fronteira

$$\partial Q = \{u + v \in Q\ :\ (\|u\| = R_2 \text{ e } v \in T) \text{ ou } (\|v\| = 0,\ \|v\| = R_1 \text{ e } u \in V_2 \cap B_{R_2})\}.$$

Logo, S e ∂Q se enlaçam.

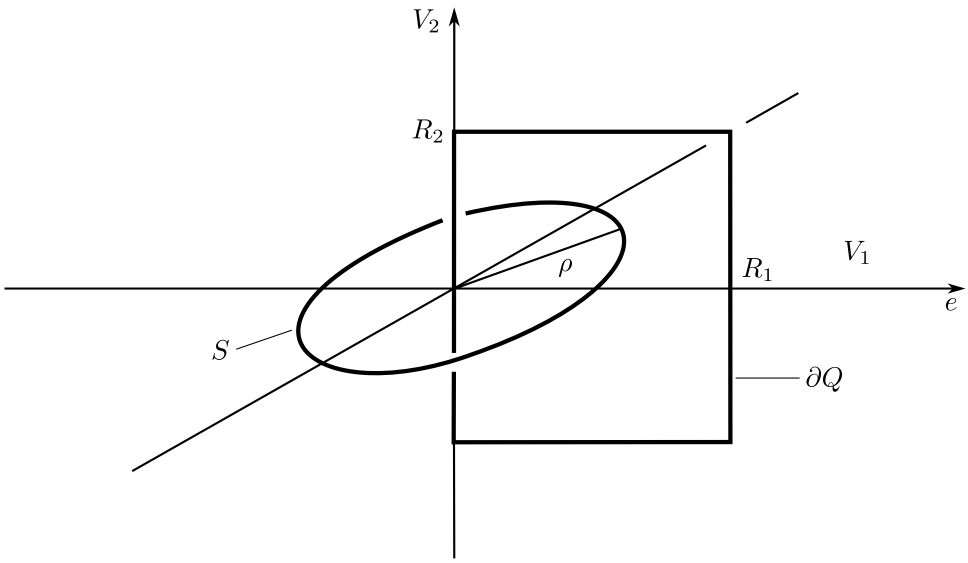

Figura 4 – No Exemplo 2.2, S e ∂Q se enlaçam.

Agora estamos em condições de provar uma versão mais geral do Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz, denominado Teorema do Passo da Montanha Generalizado (ou Teorema de Linking).

Teorema 2.20 (Teorema de Linking ou Enlace)**.** *Seja* $(E, \|\cdot\|)$ *um espaço de Banach com* $E = V \oplus W$*, onde* V *é um espaço de dimensão finita. Considere* $\phi \in C^1(E, \mathbb{R})$ *um funcional que satisfaz a condição Palais-Smale* (PS) *e as seguintes condições:*

(1) existem constantes $\rho, \alpha > 0$ *tais que* $\phi\Big|_{\partial B_\rho \cap W} \geq \alpha$*,*

(2) existem $e \in (\partial B_1) \cap W$ *e uma constante real* $R > \rho$ *tais que* $\phi\Big|_{\partial Q} \leq 0$*, onde* $Q = (B_R \cap V) \oplus \{re \ : \ 0 < r < R\}$*.*

Então, ϕ *possui um valor crítico* $c \geq \alpha$*, caracterizado por*

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in \overline{Q}} \phi(\gamma(u)),$$

onde $\Gamma = \{\gamma \in C(\overline{Q}, E) \ \ : \ \ \gamma = id \ \ em \ \ \partial Q\}$*.*

Demonstração. Seja $c = \inf\limits_{\gamma \in \Gamma} \max\limits_{u \in \overline{Q}} \phi(\gamma(u))$. Vamos provar que c está bem definido. De fato, sendo $\phi \in C^1(E, \mathbb{R})$ e $\gamma \in C(\overline{Q}, E)$, tem-se que $\phi \circ \gamma$ é uma função contínua e desde que $\overline{Q}$ é um conjunto compacto, então $\phi \circ \gamma$ possui máximo em $\overline{Q}$.

Agora, vamos provar que $c = \inf\limits_{\gamma \in \Gamma} \max\limits_{u \in \overline{Q}} \phi(\gamma(u)) \geq \alpha$.

Para cada $u \in \overline{Q}$, escrevemos $u = v + re$, onde $v \in \overline{B}_R \cap V$ e $0 \leq r \leq R$. Denote por P a projeção de E sobre V, isto é, $P : E \longrightarrow V$.

Para cada $\gamma \in \Gamma$ defina a função

$$\varphi : \overline{Q} \longrightarrow V \times \mathbb{R},$$

dada por

$$\varphi(v, r) = (P \circ \gamma(v + re), \|(id - P) \circ \gamma(v + re)\|).$$

Note que $\varphi \in C(\overline{Q}, V \times \mathbb{R})$, pois φ é composição de funções contínuas. Além disso, sendo $\gamma\Big|_{\partial Q} = id$ para $u \in \partial Q$, tem-se

$$\varphi(v, r) = (P(v + re), \|(id - P)(v + re)\|),$$

o que implica

$$\varphi(v, r) = (v, \|(v + re) - v\|),$$

de onde segue

$$\varphi(v,r) = (v, \|re\|).$$

Assim,

$$\varphi(v,r) = (v, |r|\, \|e\|),$$

e desde que $e \in \partial B_1 \cap W$, temos que

$$\varphi(v,r) = (v,r), \;\; \forall\, u \in \partial Q,$$

isto é, $\varphi = id$ em ∂Q. Em particular, pela condição (2) da hipótese, temos $\varphi(v,r) \neq (0,\rho)$, para cada $u \in \partial Q$ e $(0,\rho) \in Q$. De fato, sendo $0 < \rho < R$, temos que $(0,\rho) \notin \partial Q$, pois para que $(0,\rho) \in \partial Q$, deveríamos ter $\rho = 0$ ou $\rho = R$, mas isto não é possível. Por outro lado, desde que $0 \in \overline{B}_R \cap V$ e $0 < \rho < R$, segue que $(0,\rho) \in Q$.

Identificamos $V \times \mathbb{R}$ com $\mathbb{R}^n$ para algum $n \in \mathbb{N}$, obtemos que o Grau Brouwer $d(\varphi, Q, (0,\rho))$ está bem definido.

Logo, pelas propriedades de dependência da fronteira da teoria do Grau Topológico e da Normalização (ver Apêndice A), temos

$$d(\varphi, Q, (0,\rho)) = d(id, Q, (0,\rho)) = 1.$$

Então

$$d(\varphi, Q, (0,\rho)) \neq 0.$$

Logo, pela propriedade da existência (propriedade de Kronecker), existe $u_\gamma = v + re \in Q$ tal que $\varphi(v,r) = (0,\rho)$, isto é,

$$(P \circ \gamma(u_\gamma), \|(id - P) \circ \gamma(u_\gamma)\|) = (0,\rho).$$

Logo, como $P \circ \gamma(u_\gamma) = 0$, então $\gamma(u_\gamma) \in W$ e $\|\gamma(u_\gamma)\| = \rho$.

Como γ é arbitrário, temos para cada $\gamma \in \Gamma$, existe $u_\gamma \in Q$ tal que $\gamma(u_\gamma) \in \partial B_\rho \cap W$.

Logo, pela condição (1) da hipótese, obtemos a segunda desigualdade da abaixo

$$\max_{u \in \overline{Q}} \phi(\gamma(u)) \geq \phi(\gamma(u_\gamma)) \geq \alpha, \;\; \forall\, \gamma \in \Gamma.$$

Assim,

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in \overline{Q}} \phi(\gamma(u)) \geq \alpha.$$

Agora vamos provar que $c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in \overline{Q}} \phi(\gamma(u)) \geq \alpha$ é um valor crítico de ϕ. Suponha por contradição que c não é um valor crítico de ϕ. Logo, pelo Teorema 2.17 (caso particular do Lema de Deformação), para $\epsilon = \dfrac{1}{2}\left(c - \dfrac{\alpha}{2}\right)$, existe $\eta \in C([0,1] \times E, E)$ tal que para qualquer $u \in E$ e $t \in [0,1]$ tem-se:

(i) $\eta(t,u) = u$, se $u \notin \phi^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\epsilon])$, e

(ii) $\eta(1,\phi^{c+\epsilon}) \subset \phi^{c-\epsilon}$.

Como $c = \inf\limits_{\gamma\in\Gamma} \max\limits_{u\in\overline{Q}} \phi(\gamma(u)) \geq \alpha$, então existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $\max\limits_{u\in\overline{Q}} \phi(\gamma(u)) < c+\epsilon$, isto é,

$$\gamma(u) \in \phi^{c+\epsilon},\ \forall\, u \in \overline{Q}. \tag{2.9}$$

Defina a função contínua

$$h : \overline{Q} \longrightarrow E,$$

dada por

$$h(u) = \eta(1,\gamma(u)).$$

Como $\gamma\Big|_{\partial Q} = id$, então $h(u) = \eta(1,u)$, $\forall\, u \in \partial Q$. Logo, pela condição (2) da hipótese e pela escolha de ϵ, temos que

$$\phi(u) \leq 0 < \frac{\alpha}{2} = c - 2\epsilon,\ \forall\, u \in \partial Q.$$

Logo $u \notin \phi^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon])$.

Por (i), temos que

$$h(u) = \eta(1,u) = u,\ \forall\, u \in \partial Q,$$

de onde segue que $h \in \Gamma$.

Por outro lado, de (ii) e (2.9), temos que

$$h(u) = \eta(1,\gamma(u)) \in \phi^{c-\epsilon},\ \forall\, u \in \overline{Q},$$

ou seja,

$$\phi(h(u)) \leq c - \epsilon,\ \forall u \in \overline{Q}.$$

Logo

$$\max_{u\in\overline{Q}} \phi(h(u)) \leq c - \epsilon.$$

Como $h \in \Gamma$, tem-se que

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{u\in\overline{Q}} \phi(\gamma(u)) \leq \max_{u\in\overline{Q}} \phi(h(u)) \leq c - \epsilon.$$

Assim,

$$c \leq c - \epsilon,$$

o que é um absurdo. Portanto, c é um valor crítico para ϕ. $\square$

Teorema 2.21. *Sejam $(E, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach com $E = V \oplus W$, onde V é um espaço de dimensão finita e $\phi \in C^1(E,\mathbb{R})$. Além disso suponha que*

(1) *existem constantes* $\rho, \alpha > 0$ *tais que* $\phi\Big|_{\partial B_\rho \cap W} \geq \alpha$ *e*

(2) *existem* $e \in \partial B_1 \cap W$, $0 < \beta < \alpha$ *e uma constante real* $R > \rho$ *tais que* $\phi\Big|_{\partial Q} < \beta$, *onde* $Q = (B_R \cap V) \oplus \{re \ : \ 0 < r < R\}$.

Se ϕ *satisfaz a condição* $(PS)_c$ *com*

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in \overline{Q}} \phi(\gamma(u)),$$

onde $\Gamma = \{\gamma \in C(\overline{Q}, E) \ : \ \gamma = id \ \ em \ \ \partial Q\}$.

Então, ϕ *possui um valor crítico* $c \geq \alpha$.

Demonstração. Ver [[19] Theorem 2.12]. □

Em seguida, enunciamos uma versão do Teorema de Linking que não exige a condição Palais-Smale (PS) como uma das suas hipóteses, mas garante a existência de uma seqüência de Palais-Smale em um nível c.

Teorema 2.22. *Sejam* $(E, \|\cdot\|)$ *um espaço de banach com* $E = V \oplus W$, *onde* V *é um espaço de dimensão finita e* $\phi \in C^1(E, \mathbb{R})$. *Além disso suponha que*

(1) *existem constantes* $\rho, \alpha > 0$ *tais que* $\phi\Big|_{\partial B_\rho \cap W} \geq \alpha$ *e*

(2) *existem* $e \in \partial B_1 \cap W$ *e constantes positivas* R_1, $R_2 > \rho$ *tais que* $\phi\Big|_{\partial Q} \leq 0$, *onde* $Q = (B_{R_1} \cap V) \oplus \{re \ : \ 0 < r < R_2\}$.

Então, ϕ *possui uma sequência* $(PS)_c$, *onde* $c \geq \alpha$ *pode ser caracterizado como*

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in \overline{Q}} \phi(\gamma(u)),$$

onde $\Gamma = \{\gamma \in C(\overline{Q}, E) \ : \ \gamma = id \ \ em \ \ \partial Q\}$.

Demonstração. Ver [[15] Theorem 5.3, remark 5.5(iii), [19]]. □

3 A FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Consideramos o seguinte problema elíptico semilinear com condição de fronteira de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = g(x,u) + |u|^{2^*-2}u & \text{em } \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ regular, $2^* = \frac{2n}{n-2}$ é o expoente crítico de Sobolev, e $g(\cdot, s)$ tem crescimento subcrítico no infinito (isto é, $\lim\limits_{|s|\to\infty} \dfrac{g(\cdot,s)}{|s|^{2^*-1}} = 0$). Este problema foi estudado em [11].

Considere o espaço Hilbert $H_0^1(\Omega)$ dotado do produto escalar de Dirichlet dado por

$$\langle u, v\rangle_{H_0^1} = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx \quad \forall\ u, v \in H_0^1(\Omega),$$

e cuja norma é obtida pelo produto escalar, isto é,

$$\|u\|_{H_0^1}^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx.$$

Sejam λ_k para todo $k \in \mathbb{N}$, os autovalores do operador $-\Delta$ em relação ao problema homogêneo de Dirichlet em Ω. É conhecido que cada autovalor tem multiplicidade finita μ_k, e que $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_k \leq ...$ com $\lambda_k \to +\infty$, quando $k \to +\infty$. Denote por $\sigma(-\Delta) = \{\lambda_k\}$ o espectro do operador $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$.

Defina o funcional $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx - \int_\Omega G(x,u)dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega |u|^{2^*} dx, \tag{3.2}$$

onde $G(x,s) = \int_0^s g(x,t)dt$. Note que se g é uma função contínua, então temos que $J \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$, e assim, os pontos críticos do funcional J correspondem a soluções (fracas) da equação (3.1).

Faremos a seguinte suposição para o termo subcrítico g:

$g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função Carathéodory tal que para cada $\varepsilon > 0$, existe $a_\varepsilon \in L^{\frac{2n}{n+2}}(\Omega)$ satisfazendo:

$$|g(x,s)| \leq a_\varepsilon(x) + \varepsilon\, |s|^{\frac{n+2}{n-2}}, \text{ para } x \in \Omega \text{ q.t.p e } \forall s \in \mathbb{R}. \tag{3.3}$$

Outras hipóteses são impostas para a primitiva $G(x,s) = \displaystyle\int_0^s g(x,t)dt$.

Primeiro assumiremos que:

$$G(x,s) \geq 0, \quad \text{para } x \in \Omega \text{ q.t.p e } \forall s \in \mathbb{R}. \tag{3.4}$$

Observe que a perturbação de ordem inferior $g(x,u)$ pode mudar o sinal.

Para os outros pressupostos, distinguimos dois casos.

3.1 NÃO RESSONÂNCIA PERTO DA ORIGEM

Suponha que existem $k \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$, $\sigma > 0$, e $\mu \in (\lambda_k, \lambda_{k+1})$ tais que

$$\frac{1}{2}(\lambda_k + \sigma)s^2 \leq G(x,s) \leq \frac{1}{2}\mu s^2, \text{ para } x \in \Omega \text{ q.t.p e } \forall\, |s| \leq \delta. \tag{3.5}$$

Além disso, assumimos que

$$G(x,s) \geq \frac{1}{2}(\lambda_k + \sigma)s^2 - \frac{1}{2^*}\, |s|^{2^*}, \text{ para } x \in \Omega \text{ q.t.p e } \forall s \neq 0. \tag{3.6}$$

Como consequência de (3.3) e (3.5), temos que $g(x, 0) = 0$ para $x \in \Omega$ q.t.p e, portanto, $u \equiv 0$ é solução de (3.1).

No caso em que a dimensão é igual a $n = 3$ (ou seja, em $\mathbb{R}^3$), também precisamos de uma condição de crescimento no infinito:

Iremos supor que existe um subconjunto aberto e não vazio $\Omega_0 \subset \Omega$, tal que

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{G(x,s)}{s^4} = +\infty \text{ uniformemente em relação a } x \in \Omega_0. \tag{3.7}$$

O motivo da suposição adicional (3.7) no caso em que $n = 3$ ficará claro na prova do Lema 5.4. Uma condição semelhante é considerada em [7].

3.2 RESSONÂNCIA EM UMA VIZINHANÇA DA ORIGEM

Consideremos agora a situação em que $\frac{2G(x,s)}{s^2}$ é "possivelmente um autovalor" do Laplaciano em uma vizinhança de $s = 0$, isto é, suponha que existem $k \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ e $\mu \in (\lambda_k, \lambda_{k+1})$ tais que

$$\frac{1}{2}\lambda_k s^2 \leq G(x,s) \leq \frac{1}{2}\mu s^2, \text{ para } x \in \Omega \text{ q.t.p e } \forall\, |s| \leq \delta. \tag{3.8}$$

Assumimos também que existe $\sigma \in (0, 1/2^*)$ tal que

$$G(x,s) \geq \frac{1}{2}\lambda_k s^2 - (\frac{1}{2^*} - \sigma)\, |s|^{2^*}, \text{ para } x \in \Omega \text{ q.t.p e } \forall s \in \mathbb{R}; \tag{3.9}$$

além disso, exigimos que existe um subconjunto aberto e não vazio $\Omega_0 \subset \Omega$, tal que

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{G(x,s)}{s^{8n/(n^2-4)}} = +\infty \text{ uniformemente em relação a } x \in \Omega_0. \tag{3.10}$$

De agora em diante, enunciamos e demonstramos algumas proposições que serão úteis nos próximos capítulos.

Proposição 3.1. *Se e_i, e_j são autofunções, referentes a autovalores distintos λ_i, λ_j, do operador $-\Delta$ em relação ao problema homogêneo de Dirichlet em Ω, então*

$$\|e_i\|^2_{H_0^1} = \lambda_i \|e_i\|^2_{L^2} \quad e \quad \langle e_i, e_j\rangle_{H_0^1} = \langle e_i, e_j\rangle_{L^2} = 0.$$

Demonstração. Como e_i é autofunção do operador $-\Delta$, formalmente, temos que

$$-\Delta e_i = \lambda_i e_i,$$

e, assim,

$$\int_\Omega -\varphi \Delta e_i dx = \int_\Omega \lambda_i e_i \varphi dx, \quad \forall\, \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{3.11}$$

Mas, pela fórmula de Green (conseqüência do Teorema da Divergência),

$$\int_\Omega -\varphi \Delta e_i dx = \int_\Omega \nabla\varphi \nabla e_i dx, \tag{3.12}$$

pois $\varphi = 0$ em $\partial\Omega$. Logo, de (3.11) e (3.12), temos que

$$\int_\Omega \nabla\varphi \nabla e_i dx = \int_\Omega \lambda_i e_i \varphi dx, \quad \forall\, \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{3.13}$$

A igualdade dada em (3.13) é a definição precisa de autofunção no sentido fraco.

Como $e_i \in H_0^1(\Omega)$, para $\varphi = e_i$ na igualdade (3.13), temos que

$$\|e_i\|^2_{H_0^1} = \int_\Omega |\nabla e_i|^2 dx = \int_\Omega \lambda_i e_i^2 dx = \lambda_i \|e_i\|^2_{L^2}.$$

Além disso, utilizando $\varphi = e_j$ em (3.13) segue que

$$\langle e_i, e_j\rangle_{H_0^1} = \int_\Omega \nabla e_i \nabla e_j dx = \lambda_i \int_\Omega e_i e_j dx = \lambda_i \langle e_i, e_j\rangle_{L^2}. \tag{3.14}$$

De forma análoga, seguindo o mesmo procedimento para a autofunção e_j, obteremos que

$$\langle e_i, e_j\rangle_{H_0^1} = \lambda_j \langle e_i, e_j\rangle_{L^2}. \tag{3.15}$$

Logo, de (3.14) e (3.15), temos que

$$(\lambda_i - \lambda_j)\langle e_i, e_j\rangle_{L^2} = 0.$$

Mas, como $\lambda_i \neq \lambda_j$, concluímos que

$$\langle e_i, e_j\rangle_{H_0^1} = \langle e_i, e_j\rangle_{L^2} = 0$$

e consequentemente, as autofunções do Laplaciano com condições de fronteira de Dirichlet são ortogonais em $H_0^1(\Omega)$ e em $L^2(\Omega)$. $\square$

Proposição 3.2. *Suponha que a hipótese (3.3) seja válida e seja $(u_m) \subset H_0^1(\Omega)$ uma seqüência limitada em $H_0^1(\Omega)$ tal que $u_m \rightharpoonup 0$, quando $m \to +\infty$. Então,*

$$\int_\Omega g(x, u_m) u_m dx \to 0$$

e

$$\int_\Omega G(x, u_m) dx \to 0,$$

quando $m \to +\infty$.

Demonstração. Como a seqüência (u_m) é limitada em $H_0^1(\Omega)$, existe $k > 0$ tal que

$$\|u_m\|_{H_0^1} \leq k. \tag{3.16}$$

Dado $\varepsilon > 0$, pela hipótese (3.3), existe $a_\varepsilon \in L^{\frac{2n}{n+2}}(\Omega)$ tal que

$$|g(x,s)| \leq a_\varepsilon(x) + \varepsilon\,|s|^{\frac{n+2}{n-2}}, \quad \forall\, x \in \Omega \text{ q.t.p e } \forall\, s \in \mathbb{R}. \tag{3.17}$$

Utilizando (3.17), temos que

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega g(x,u_m)u_m dx\right| &\leq \int_\Omega \left(a_\varepsilon(x) + \varepsilon\,|u_m|^{\frac{n+2}{n-2}}\right)|u_m|\,dx \\ &= \int_\Omega \left(a_\varepsilon(x)\,|u_m| + \varepsilon\,|u_m|^{2^*}\right)dx. \end{aligned}$$

A última desigualdade garante que

$$\left|\int_\Omega g(x,u_m)u_m dx\right| \leq \int_\Omega a_\varepsilon(x)\,|u_m|\,dx + \varepsilon\,\|u_m\|_{L^{2^*}}^{2^*}. \tag{3.18}$$

Pelo Corolario 2.15, com $p = 2$, existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$\|u_m\|_{L^{2^*}} \leq C_1\,\|\nabla u_m\|_{L^2} = C_1\,\|u_m\|_{H_0^1}, \tag{3.19}$$

e por (3.16), existe uma constante $C_2 = kC_1 > 0$ tal que

$$\|u_m\|_{L^{2^*}} \leq C_2, \tag{3.20}$$

isto é, (u_m) também é limitada em $L^{2^*}(\Omega)$. Em (3.18), utilizando (3.20), obtemos que

$$\left|\int_\Omega g(x,u_m)u_m dx\right| \leq \int_\Omega a_\varepsilon(x)\,|u_m|\,dx + C\varepsilon,$$

onde $C = (C_2)^{2^*}$ é uma constante positiva.

Em vista da última desigualdade, para obter o primeiro resultado da Proposição, basta provar que

$$\int_\Omega a_\varepsilon(x)\,|u_m|\,dx \to 0, \quad \text{quando} \quad m \to +\infty.$$

Para isto, considere o funcional linear $T : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$T(u) = \int_\Omega a_\varepsilon(x) u dx.$$

Pela desigualdade de Hölder (Teorema 2.5), com $p = \frac{2n}{n+2}$ e $q = 2^*$, e pela imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ (Teorema 2.13), temos que

$$|T(u)| \leq \|a_\varepsilon\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}}\,\|u\|_{L^{2^*}} \leq K\,\|u\|_{H_0^1} < +\infty, \quad \forall\, u \in H_0^1(\Omega).$$

Portanto, T está bem definido e é um funcional linear limitado.

Assim, se mostrarmos que

$$|u_m| \rightharpoonup 0 \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega), \quad \text{quando} \quad m \to +\infty; \tag{3.21}$$

teremos pelo Teorema 2.2 que, $T(|u_m|) \to T(0) = 0$ e o resultado seguirá.

Para provar (3.21), note inicialmente que $\|u_m\|_{H_0^1} = \||u_m|\|_{H_0^1}$, e assim, $|u_m|$ também é uma seqüência limitada. Como $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, pelo Teorema 2.4, $H_0^1(\Omega)$ é reflexivo. Logo, pelo Teorema 2.3, existem uma subseqüência $(u_{m_k}) \subset (u_m)$, e $v \in H_0^1(\Omega)$ tais que

$$|u_{m_k}| \rightharpoonup v \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega).$$

Como por hipótese $u_m \rightharpoonup 0$ em $H_0^1(\Omega)$, então $u_{m_k} \rightharpoonup 0$ em $H_0^1(\Omega)$.

Renomeando (u_{m_k}) por (u_k), então

$$u_k \rightharpoonup 0 \quad \text{e} \quad |u_k| \rightharpoonup v \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega). \tag{3.22}$$

Como (u_k) é limitada em $H_0^1(\Omega)$, pelo Teorema 2.12 (Rellich-Kondrachov com $p = 2$), existem uma subseqüência $(u_{k_j}) \subset (u_k)$ e $w_1 \in H_0^1(\Omega)$ tais que

$$u_{k_j} \to w_1 \quad \text{em} \quad L^q(\Omega), \ \ \forall\, q < 2^*.$$

De forma análoga, como $|u_{k_j}|$ também é limitada, existem uma subseqüência $(u_{k_{j_i}}) \subset (u_{k_j})$ e $w_2 \in H_0^1(\Omega)$ tais que

$$|u_{k_{j_i}}| \to w_2 \quad \text{em} \quad L^q(\Omega), \ \ \forall\, q < 2^*.$$

Novamente, renomeando $(u_{k_{j_i}})$ por (u_i), obtemos que

$$u_i \to w_1 \quad \text{e} \quad |u_i| \to w_2 \quad \text{em} \quad L^q(\Omega), \ \ \forall\, q < 2^*. \tag{3.23}$$

Assim, por (3.23),

$$\||u_i| - |w_1|\|_{L^q} \leq \|u_i - w_1\|_{L^q} \to 0, \ \ \text{quando} \ \ i \to +\infty, \tag{3.24}$$

ou seja, $|u_i| \to |w_1|$ em $L^q(\Omega)$. Portanto, usando (3.23) novamente, pela unicidade do limite, temos que $w_2 = |w_1|$ e consequentemente

$$u_i \to w_1 \quad \text{e} \quad |u_i| \to |w_1| \quad \text{em} \quad L^q(\Omega), \ \ \forall\, q < 2^*. \tag{3.25}$$

De (3.22), temos que

$$u_i \rightharpoonup 0 \quad \text{e} \quad |u_i| \rightharpoonup v \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega). \tag{3.26}$$

Como $u_i \rightharpoonup 0$ em $H_0^1(\Omega)$, então

$$f(u_i) \to f(0), \quad \forall\, f \in H^{-1}(\Omega).$$

Como $H_0^1(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ para $q < 2^*$, segue que $(L^q(\Omega))^* \subset H^{-1}(\Omega)$ e, assim,

$$f(u_i) \to f(0), \quad \forall\, f \in (L^q(\Omega))^* \ \text{ com } \ q < 2^*,$$

isto é,

$$u_i \rightharpoonup 0 \quad \text{em} \quad L^q(\Omega), \quad \forall\, q < 2^*. \tag{3.27}$$

De (3.25) e (3.27), pela unicidade do limite fraco, concluímos que $w_1 = 0$.

Assim, de (3.25) e (3.26), obtemos

$$|u_i| \to 0 \quad \text{em} \quad L^q(\Omega), \ \ \forall\, q < 2^* \tag{3.28}$$

e

$$|u_i| \rightharpoonup v \quad \text{em} \ \ H_0^1(\Omega). \tag{3.29}$$

De forma análoga, seguindo o mesmo procedimento quando $|u_i| \rightharpoonup v$ em $H_0^1(\Omega)$, temos que

$$f(|u_i|) \to f(v), \quad \forall\, f \in (L^q(\Omega))^* \ \text{ com } \ q < 2^*,$$

logo,

$$|u_i| \rightharpoonup v \quad \text{em} \quad L^q(\Omega), \ \ \forall\, q < 2^*.$$

Por (3.28), segue que

$$|u_i| \rightharpoonup 0 \quad \text{em} \quad L^q(\Omega), \ \ \forall\, q < 2^*.$$

Logo, pela unicidade do limite fraco, concluímos que $v = 0$.

Portanto, por (3.29), segue que

$$|u_i| \rightharpoonup 0 \ \ \text{em} \ \ H_0^1(\Omega),$$

o que prova que

$$\int_\Omega g(x, u_m) u_m dx \to 0, \quad \text{quando} \ \ m \to +\infty.$$

Para provar que $\displaystyle\int_\Omega G(x, u_m) dx \to 0$, note que dado $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
|G(x,s)| &= \left| \int_0^s g(x,t) dt \right| \\
&\leq \int_0^s |g(x,t)|\, dt \\
&\leq \int_0^s \left(a_\varepsilon(x) + \varepsilon t^{\frac{n+2}{n-2}} \right) dx \\
&\leq a_\varepsilon(x)|s| + \varepsilon \frac{|s|^{2^*}}{2^*},
\end{aligned}$$

para algum $a_\varepsilon \in L^{\frac{2n}{n+2}}$.

Logo,

$$\int_\Omega |G(x,u_m)|\,dx \le \int_\Omega \left(a_\varepsilon(x)|u_m| + \varepsilon C|u_m|^{2^*}\right) dx,$$

onde o lado direito da desigualdade acima é o mesmo que em (3.18). Assim, repetindo o mesmo raciocínio, podemos estimar esse termo e concluir a proposição. □

Proposição 3.3. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e $f : \mathbb{R} \longrightarrow [0,+\infty)$ uma função contínua tal que $f(0) = 0$. Se $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ são funções mensuráveis tais que $med(supp\, u \cap supp\, v) = 0$, então*

$$\int_\Omega f(u+v)dx = \int_\Omega f(u)dx + \int_\Omega f(v)dx.$$

Demonstração. Como f é contínua e u, v são mensuráveis, então $f(u), f(v)$ e $f(u+v)$ também são mensuráveis. Considerando

$$A := supp\, u \cap supp\, v \quad \text{e} \quad B := \Omega \setminus (supp\, u \cup supp\, v),$$

temos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega f(u+v)dx = & \int_{supp\, u \setminus A} f(u+v)dx + \int_A f(u+v)dx \\ & + \int_{supp\, v \setminus A} f(u+v)dx + \int_B f(u+v)dx. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Como $v = 0$ em $supp\, u \setminus A$ e $med(A) = 0$, segue que

$$\int_{supp\, u \setminus A} f(u+v)dx = \int_{supp\, u \setminus A} f(u+0)dx = \int_{supp\, u} f(u)dx = \int_\Omega f(u)dx,$$

pois $f(u) = f(0) = 0$ em $(supp\, u)^c$. De forma análoga,

$$\int_{supp\, v \setminus A} f(u+v)dx = \int_\Omega f(v)dx.$$

Além disso, como $med(A) = 0$, segue que

$$\int_A f(u+v)dx = 0.$$

Como $u = v = 0$ em B, obtemos que

$$\int_B f(u+v)dx = \int_B f(0)dx = 0.$$

Portanto, substituindo em (3.30) concluímos que

$$\int_\Omega f(u+v)dx = \int_\Omega f(u)dx + \int_\Omega f(v)dx.$$

□

Proposição 3.4 (Integral de funções radiais)**.** *Seja* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função radial, isto é,* $f(x) = \rho(|x|)$ *para alguma função* $\rho : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*. Cometendo o abuso de notação escrevemos* $f(|x|) = \rho(|x|)$*. Então*

$$\int_{B_R} f(x)\, dx = C \int_0^R f(r)\, r^{n-1}\, dr,$$

onde B_R *é a bola de raio* R *centrada na origem e* C *é uma constante positiva.*

Demonstração. Utilizando coordenadas esféricas, obtemos que

$$\begin{aligned}\int_{B_R} f(x)\, dx &= \int_0^R \left(\int_{|w|=1} f(rw)\, r^{n-1}\, dw \right) dr \\ &= \int_0^R f(r)\, r^{n-1} \left(\int_{|w|=1} dw \right) dr \\ &= n w_n \int_0^R f(r)\, r^{n-1}\, dr \\ &= C \int_0^R f(r)\, r^{n-1}\, dr,\end{aligned}$$

onde $w \in S^{n-1}$ e w_n é o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^n$. $\square$

4 A CARACTERIZAÇÃO VARIACIONAL

As provas de nossos resultados envolvem técnicas variacionais como em [6], [7], [8], [9] e [16]. À medida que lidamos com quantidades infinitesimais usaremos os seguintes símbolos de Landau:

$$f(x) = o[g(x)] \quad \text{quando } x \to x_0, \quad \text{se } \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

e

$$f(x) = O[g(x)] \quad \text{quando } x \to x_0, \quad \text{se } \limsup_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} < +\infty.$$

Neste capítulo, descrevemos a caracterização variacional, a qual é baseada nas condições geométricas do Teorema de Linking. No procedimento variacional padrão a condição (PS) é crucial, assim necessitamos da seguinte definição

(1) Dizemos que a seqüência $(u_m) \subset H_0^1(\Omega)$ é chamada uma seqüência PS para o funcional J no nível c, se $J(u_m) \to c$ e $J'(u_m) \to 0$ em $H^{-1}(\Omega)$.

A falta de compacidade da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ é "transferida" para o funcional, o que nos leva a definir a seguinte condição de compacidade:

(2) Dizemos que o funcional J satisfaz a condição $(PS)_c$, se cada seqüência PS no nível c tiver uma subseqüência convergente em $H_0^1(\Omega)$.

A ideia é mostrar que o problema (3.1) possui pelo menos uma solução. Para isso, usaremos o Teorema de Linking sem a condição (PS) (Teorema 2.22).

Assim, consideremos a família de funções $u_\varepsilon^* : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$u_\varepsilon^*(x) := \frac{[n(n-2)\varepsilon^2]^{\frac{n-2}{4}}}{[\varepsilon^2 + |x|^2]^{\frac{n-2}{2}}} \qquad (\varepsilon > 0), \tag{4.1}$$

que satisfazem a equação

$$\begin{cases} -\Delta u = u\,|u|^{2^*-2} & \text{em } \mathbb{R}^n, \\ u(x) \to 0 & \text{quando } |x| \to +\infty. \end{cases} \tag{4.2}$$

Seja

$$S = \inf_{u \in H_0^1(\Omega),\, u \neq 0} \left\{ \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{(\displaystyle\int_\Omega |u|^{2^*} dx)^{2/2^*}} \right\},$$

onde S é a melhor constante de Sobolev da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ (ver [17]), e é atingida pela família de funções dadas em (4.1).

Cumpre-se que:

$$\|u_\varepsilon^*\|_{H_0^1}^2 = \|u_\varepsilon^*\|_{L^{2^*}}^{2^*} = S^{n/2} \quad \text{para todo } \varepsilon > 0 \quad (\text{ver [16]}). \tag{4.3}$$

Lema 4.1. *Suponha que a condição (3.3) seja verificada e seja* $(u_m) \subset H_0^1(\Omega)$ *uma seqüência* PS *para o funcional* J.

(i) Então existe $u \in H_0^1(\Omega)$ *tal que* $u_m \rightharpoonup u$ *(a menos de uma subseqüência de* (u_m)*) e* $J'(u) = 0$.

(ii) Além disso, se $J(u_m) \to c$ *com* $c \in (0, \frac{S^{n/2}}{n})$*, então* $u \not\equiv 0$ *e, portanto,* u *é uma solução não trivial de (3.1).*

Demonstração. **Prova do item (i):** Consideremos

$$f(x,s) = g(x,s) + |s|^{2^*-2}s \quad \text{e} \quad F(x,s) = \int_0^s f(x,t)dt.$$

Afirmação 1: Existem $\vartheta \in (0, \frac{1}{2})$ e $A \in L^1(\Omega)$ tais que

$$F(x,s) \leq \vartheta f(x,s)s + A(x) \quad \text{para } x \in \Omega \text{ q.t.p e } \forall\, s \in \mathbb{R}. \tag{4.4}$$

De fato, pelas definições de F e f, temos

$$\begin{aligned} F(x,s) &= \int_0^s f(x,t)dt \\ &= \int_0^s \left(g(x,t) + |t|^{2^*-2}t\right) dt. \end{aligned}$$

Agora, pela condição (3.3), para cada $\varepsilon > 0$, temos que

$$\begin{aligned} F(x,s) &\leq \int_0^s \left(a_\varepsilon(x) + \varepsilon|t|^{\frac{n+2}{n-2}} + |t|^{2^*-2}t\right) dt \\ &\leq \int_0^s \left(a_\varepsilon(x) + \varepsilon|t|^{2^*-1} + |t|^{2^*-1}\right) dt \\ &\leq |a_\varepsilon(x)||s| + (1+\varepsilon)\frac{|s|^{2^*}}{2^*}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

para $x \in \Omega$ q.t.p e $\forall\, s \in \mathbb{R}$.

Pela desigualdade de Young, com $p = \frac{2n}{n+2}$ e $q = 2^*$, temos

$$|a_\varepsilon(x)||s| = \frac{|a_\varepsilon(x)|}{\varepsilon}|\varepsilon s| \leq \frac{|a_\varepsilon(x)|^{\frac{2n}{n+2}}}{\varepsilon^{\frac{2n}{n+2}}p} + \frac{\varepsilon^{2^*}|s|^{2^*}}{2^*} = A_1(x) + \frac{\varepsilon^{2^*}|s|^{2^*}}{2^*}, \tag{4.6}$$

onde $A_1 = \dfrac{|a_\varepsilon(x)|^{\frac{2n}{n+2}}}{\varepsilon^{\frac{2n}{n+2}}p} \in L^1(\Omega)$, pois $a_\varepsilon \in L^{\frac{2n}{n+2}}(\Omega)$.

De (4.5) e (4.6), obtemos

$$F(x,s) \le A_1(x) + (1+\widetilde{\varepsilon})\frac{|s|^{2^*}}{2^*}, \tag{4.7}$$

onde $\widetilde{\varepsilon} = \varepsilon + \varepsilon^{2^*}$.

Por outro lado, como $f(x,s) = g(x,s) + |s|^{2^*-2}s$, da condição (3.3) e de (4.6), temos que

$$\begin{aligned}
|s|^{2^*} &= sf(x,s) - sg(x,s) \\
&\le sf(x,s) + |s||g(x,s)| \\
&\le sf(x,s) + |s|\left(|a_\varepsilon(x)| + \varepsilon|s|^{\frac{n+2}{n-2}}\right) \\
&= sf(x,s) + |s||a_\varepsilon(x)| + \varepsilon|s|^{2^*} \\
&\le sf(x,s) + A_1(x) + \frac{\varepsilon^{2^*}|s|^{2^*}}{2^*} + \varepsilon|s|^{2^*} \\
&= sf(x,s) + A_1(x) + \overline{\varepsilon}|s|^{2^*},
\end{aligned}$$

onde $\overline{\varepsilon} = \varepsilon + \dfrac{\varepsilon^{2^*}}{2^*}$.

Logo, para $0 < \overline{\varepsilon} < 1$,

$$(1-\overline{\varepsilon})|s|^{2^*} \le sf(x,s) + A_1(x).$$

Agora, aplicando a desigualdade acima em (4.7), obtemos

$$\begin{aligned}
F(x,s) &\le A_1(x) + \frac{(1+\widetilde{\varepsilon})}{2^*(1-\overline{\varepsilon})}\left(sf(x,s) + A_1(x)\right) \\
&= \vartheta(\varepsilon)\cdot f(x,s)s + A(x),
\end{aligned}$$

onde $A = \left(1 + \dfrac{(1+\widetilde{\varepsilon})}{2^*(1-\overline{\varepsilon})}\right)\cdot A_1 \in L^1(\Omega)$.

Portanto, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno fixado,

$$\frac{1}{2^*} < \vartheta(\varepsilon) := \vartheta < \frac{1}{2},$$

assim, a Afirmação 1 é verificada.

Afirmação 2: A seqüência PS é limitada em $H_0^1(\Omega)$. De fato, para cada $u \in H_0^1(\Omega)$, $J'(u) : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ é definido por

$$J'(u)(\varphi) = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx - \int_\Omega g(x,u)\varphi dx - \int_\Omega |u|^{2^*-2}u\varphi dx, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Seja $(u_m) \subset H_0^1(\Omega)$ uma seqüência PS para o funcional J. Assim, como $J'(u_m) \to 0$ em $H^{-1}(\Omega)$, dado $\varepsilon > 0$ existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m \ge m_0$, então

$$\sup_{\varphi \ne 0} \frac{|J'(u_m)(\varphi)|}{\|\varphi\|_{H_0^1}} = \|J'(u_m)\|_{H^{-1}} = \|J'(u_m) - 0\|_{H^{-1}} < \varepsilon.$$

Assim,

$$\frac{|J'(u_m)(\varphi)|}{\|\varphi\|_{H_0^1}} < \varepsilon.$$

Se $\|\varphi\|_{H_0^1} = 1$, temos que $|J'(u_m)(\varphi)| < \varepsilon$. Isto é, para $\|\varphi\|_{H_0^1} = 1$ e m suficientemente grande, temos

$$\left|\int_\Omega \nabla u_m \nabla \varphi dx - \int_\Omega g(x, u_m)\varphi dx - \int_\Omega |u_m|^{2^*-2} u_m \varphi dx\right| < \varepsilon. \tag{4.8}$$

(i) Se $u_m \equiv 0$ (É óbvio que (u_m) é limitada em $H_0^1(\Omega)$).

(ii) Se $u_m \not\equiv 0$, $\forall\, m \in \mathbb{N}$. Tomando $\varphi = \dfrac{u_m}{\|u_m\|_{H_0^1}}$ em (4.8), obtemos

$$\left|\frac{1}{\|u_m\|_{H_0^1}} \int_\Omega |\nabla u_m|^2 dx - \int_\Omega \frac{g(x, u_m)u_m + |u_m|^{2^*}}{\|u_m\|_{H_0^1}} dx\right| < \varepsilon,$$

ou seja,

$$\left|\|u_m\|_{H_0^1} - \frac{1}{\|u_m\|_{H_0^1}} \int_\Omega \left(g(x, u_m)u_m + |u_m|^{2^*}\right) dx\right| < \varepsilon.$$

A desigualdade acima implica que,

$$\int_\Omega \left(g(x, u_m)u_m + |u_m|^{2^*}\right) dx < \|u_m\|_{H_0^1}^2 + \varepsilon \|u_m\|_{H_0^1}. \tag{4.9}$$

Sendo $f(x, u_m) = g(x, u_m) + |u_m|^{2^*-2} u_m$, temos

$$f(x, u_m)u_m = g(x, u_m)u_m + |u_m|^{2^*}. \tag{4.10}$$

Como $-A(x) \geq -|A(x)|$ para todo $x \in \Omega$, utilizando (4.4) e (4.10), segue que

$$\frac{1}{\vartheta}\left(F(x, u_m) - |A(x)|\right) \leq \frac{1}{\vartheta}\left(F(x, u_m) - A(x)\right) \leq f(x, u_m)u_m = g(x, u_m)u_m + |u_m|^{2^*}.$$

Integrando a desigualdade acima,

$$\frac{1}{\vartheta}\int_\Omega \left(F(x, u_m) - |A(x)|\right) dx \leq \int_\Omega \left(g(x, u_m)u_m + |u_m|^{2^*}\right) dx. \tag{4.11}$$

De (4.9) e (4.11), temos que

$$\frac{1}{\vartheta}\int_\Omega \left(F(x, u_m) - |A(x)|\right) dx < \|u_m\|_{H_0^1}^2 + \varepsilon \|u_m\|_{H_0^1},$$

isto é,

$$\int_\Omega \left(F(x, u_m) - |A(x)|\right) dx \leq \vartheta \|u_m\|_{H_0^1}^2 + \vartheta\varepsilon \|u_m\|_{H_0^1}, \quad 0 < \vartheta < \frac{1}{2}. \tag{4.12}$$

Como

$$F(x, s) = \int_0^s f(x, t)dt = \int_0^s \left(g(x, t) + |t|^{2^*-2} t\right) dt = \int_0^s g(x, t)dt + \int_0^s |t|^{2^*-2} t dt,$$

então
$$F(x,s) = G(x,s) + \frac{1}{2^*}|s|^{2^*}.$$
Para $s = u_m$, integrando a igualdade acima, temos que
$$\int_\Omega F(x,u_m)dx = \int_\Omega G(x,u_m)dx + \frac{1}{2^*}\int_\Omega |u_m|^{2^*}dx = \int_\Omega G(x,u_m)dx + \frac{1}{2^*}\|u_m\|_{L^{2^*}}^{2^*}. \quad (4.13)$$
De (4.12) e (4.13), concluímos que
$$\int_\Omega G(x,u_m)dx + \frac{1}{2^*}\|u_m\|_{L^{2^*}}^{2^*} - \int_\Omega |A(x)|dx \leq \vartheta \|u_m\|_{H_0^1}^2 + \vartheta\varepsilon \|u_m\|_{H_0^1}, \quad 0 < \vartheta < \frac{1}{2},$$
isto é,
$$\int_\Omega G(x,u_m)dx + \frac{1}{2^*}\|u_m\|_{L^{2^*}}^{2^*} \leq \vartheta \|u_m\|_{H_0^1}^2 + \vartheta\varepsilon \|u_m\|_{H_0^1} + \int_\Omega |A(x)|dx, \quad 0 < \vartheta < \frac{1}{2}. \quad (4.14)$$
Além disso, como (u_m) é uma seqüência PS, $J(u_m)$ é limitada em $\mathbb{R}$, logo existe uma constante positiva K tal que
$$\frac{1}{2}\|u_m\|_{H_0^1}^2 - \int_\Omega G(x,u_m)dx - \frac{1}{2^*}\|u_m\|_{L^{2^*}}^{2^*} = J(u_m) \leq |J(u_m)| \leq K. \quad (4.15)$$
De (4.14) e (4.15), segue que
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|u_m\|_{H_0^1}^2 - \vartheta\|u_m\|_{H_0^1}^2 - \vartheta\varepsilon\|u_m\|_{H_0^1} - \int_\Omega |A(x)|dx &\leq \frac{1}{2}\|u_m\|_{H_0^1}^2 - \int_\Omega G(x,u_m)dx \\ &\quad - \frac{1}{2^*}\|u_m\|_{L^{2^*}}^{2^*} \leq K,\end{aligned}$$
com $0 < \vartheta < \frac{1}{2}$.

Assim,
$$\left(\frac{1}{2} - \vartheta\right)\|u_m\|_{H_0^1}^2 - \vartheta\varepsilon\|u_m\|_{H_0^1} - \int_\Omega |A(x)|dx \leq K, \quad 0 < \vartheta < \frac{1}{2}.$$
Logo,
$$a\|u_m\|_{H_0^1}^2 - b\|u_m\|_{H_0^1} - c \leq K,$$
com $a = \left(\frac{1}{2} - \vartheta\right) > 0$, $b = \vartheta\varepsilon > 0$ e $c = \int_\Omega |A(x)|dx \geq 0$.

Portanto, (u_m) é uma seqüência limitada em $H_0^1(\Omega)$.

Assim, o Teorema 2.3 garante a existência de uma subseqüência da seqüência (u_m), ainda denotada da mesma forma, e a existência de $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que
$$u_m \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega). \quad (4.16)$$
Afirmação 3: u é solução fraca para o problema (3.1). De fato, como (u_m) é uma seqüência PS, então para a subseqüência temos que

$$J'(u_m) \to 0 \ \text{ em } \ H^{-1}(\Omega),$$

isto é,

$$J'(u_m)(\varphi) \to 0, \quad \text{quando } m \to \infty, \ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Logo,

$$\int_\Omega \nabla u_m \nabla \varphi dx - \int_\Omega g(x, u_m)\varphi dx - \int_\Omega |u_m|^{2^*-2} u_m \varphi dx \to 0, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \tag{4.17}$$

quando $m \to \infty$.

Em (4.17) vamos calcular o limite quando $m \to +\infty$ em cada integral e mostrar que u é ponto crítico do funcional J.

Como $u_m \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$, pela definição da convergência fraca temos que

$$\langle u_m, \varphi \rangle_{H_0^1} \to \langle u, \varphi \rangle_{H_0^1}, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

isto é,

$$\langle u_m, \varphi \rangle_{H_0^1} = \int_\Omega \nabla u_m \nabla \varphi dx \to \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx = \langle u, \varphi \rangle_{H_0^1}, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{4.18}$$

Agora, vamos provar a convergência da seqüência $\displaystyle\int_\Omega g(x, u_m)\varphi dx$.

A limitação da seqüência PS garante que

$$u_m \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega),$$

logo, pelo Teorema 2.12, temos que

$$u_m \to u \ \text{ em } \ L^r(\Omega), \ \ 1 \leq r < 2^*$$

e pelo Teorema 2.6

$$u_m \to u \ \text{ q.t.p em } \ \Omega.$$

Assim, uma vez que g é uma função contínua (hipótese sobre g), temos que

$$g(x, u_m(x)) \to g(x, u(x)) \quad \text{q.t.p em } \Omega. \tag{4.19}$$

Definindo $f_m = g(x, u_m)\varphi$ e $f = g(x, u)\varphi$ para todo $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, por (4.19), temos que

$$f_m = g(x, u_m)\varphi \to f = g(x, u)\varphi \quad \text{q.t.p em } \Omega. \tag{4.20}$$

Como a função g possui crescimento subcrítico (hipótese (3.3)), segue que

$$|f_m| = |g(x, u_m)||\varphi| \leq |a_\varepsilon||\varphi| + \varepsilon|\varphi||u_m|^{2^*-1}, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{4.21}$$

Sejam $h_1 = |a_\varepsilon||\varphi|$ e $h_2 = |\varphi||u_m|^{2^*-1}$, $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.

Afirmamos que $h_1 = |a_\varepsilon||\varphi| \in L^1(\Omega)$, $\forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$. De fato, como $a_\varepsilon \in L^{\frac{2n}{n+2}}(\Omega)$ e $\varphi \in H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ (Teorema 2.13), pela desigualdade de Hölder (Teorema 2.5), segue que

$$\int_\Omega |h_1| dx = \int_\Omega |a_\varepsilon||\varphi| dx \leq \left(\int_\Omega |a_\varepsilon|^{\frac{2n}{n+2}} dx\right)^{\frac{n+2}{2n}} \left(\int_\Omega |\varphi|^{\frac{2n}{n-2}} dx\right)^{\frac{n-2}{2n}} < \infty.$$

Portanto,

$$h_1 = |a_\varepsilon||\varphi| \in L^1(\Omega), \ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{4.22}$$

Afirmamos também que $h_2 = |\varphi||u_m|^{2^*-1} \in L^1(\Omega)$, $\forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$. De fato, como $\varphi, u_m \in H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$, pela desigualdade de Hölder (Teorema 2.5), segue que

$$\int_\Omega |h_2| dx = \int_\Omega |\varphi||u_m|^{2^*-1} dx \leq \left(\int_\Omega |\varphi|^{2^*} dx\right)^{\frac{1}{2^*}} \left(\int_\Omega |u_m|^{2^*} dx\right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} < \infty.$$

Portanto,

$$h_2 = |\varphi||u_m|^{2^*-1} \in L^1(\Omega), \ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{4.23}$$

Seja $h := h_1 + \varepsilon h_2$. Por (4.22) e (4.23) concluímos que $h \in L^1(\Omega)$ e por (4.21) temos que $|f_m| \leq h$. Logo, por (4.20) e pelo Teorema 2.7 (convergência dominada de Lebesgue), segue que

$$\int_\Omega f_m dx \to \int_\Omega f dx,$$

isto é,

$$\int_\Omega g(x, u_m)\varphi dx \to \int_\Omega g(x, u)\varphi dx, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{4.24}$$

Finalmente, vamos provar a convergência da seqüência $\displaystyle\int_\Omega |u_m|^{2^*-2} u_m \varphi dx$.

Como (u_m) é limitada em $H_0^1(\Omega)$, usando a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ (Teorema 2.13), concluímos que

$$\|u_m\|_{L^{2^*}} \leq K_1 \|u_m\|_{H_0^1} \leq C. \tag{4.25}$$

Definindo $v_m = |u_m|^{2^*-2} u_m$, por (4.25), temos que

$$\int_\Omega |v_m|^{\frac{2^*}{2^*-1}} dx = \int_\Omega \left(|u_m|^{2^*-1}\right)^{\frac{2^*}{2^*-1}} dx = \int_\Omega |u_m|^{2^*} dx \leq (C)^{2^*}. \tag{4.26}$$

Assim,

$$(v_m) \text{ é limitada em } L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\Omega). \tag{4.27}$$

Como $v_m = |u_m|^{2^*-2} u_m$ e $u_m \to u$ q.t.p em Ω, então

$$v_m = |u_m|^{2^*-2} u_m \to |u|^{2^*-2} u \ \text{ q.t.p em } \Omega. \tag{4.28}$$

De (4.27) e (4.28), pelo Lema 2.1 (Brézis-Lieb, primeira versão), segue que

$$v_m = |u_m|^{2^*-2} u_m \rightharpoonup |u|^{2^*-2} u \ \text{ em } L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\Omega). \tag{4.29}$$

Uma vez que $\varphi \in H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ para $1 \leq r \leq 2^*$ (Teorema 2.13), então

$$\varphi \in L^{2^*}(\Omega). \tag{4.30}$$

Além disso, como

$$\frac{1}{\frac{2^*}{2^*-1}} + \frac{1}{2^*} = 1. \tag{4.31}$$

De (4.26), (4.28)-(4.31), pelo Teorema 2.8, segue que

$$\int_\Omega |u_m|^{2^*-2} u_m \varphi dx \to \int_\Omega |u|^{2^*-2} u \varphi dx, \quad \forall\, \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{4.32}$$

Logo, de (4.18), (4.24) e (4.32), tem-se

$$J'(u_m)(\varphi) \to J'(u)(\varphi), \quad \forall\, \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Mas, de (4.17), temos que

$$J'(u_m)(\varphi) \to 0, \quad \forall\, \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

Pela unicidade do limite, segue que

$$J'(u)(\varphi) = 0, \quad \forall\, \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

isto é,

$$J'(u) = 0.$$

Portanto, u é uma solução fraca do problema (3.1), provando assim, a Afirmação 3.

Prova do item(ii):

Afirmação 4: A solução u é não-nula se $J(u_m) \to c$, com $0 < c < \dfrac{1}{n} S^{n/2}$.

Suponha por contradição que $u \equiv 0$. Como $(u_m) \subset H_0^1(\Omega)$ é uma seqüência PS, temos que

$$J'(u_m)(\varphi) \to 0, \text{ quando } m \to \infty, \ \forall\, \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Assim,

$$J'(u_m)(\varphi) = o(1), \ \forall\, \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Para $\varphi = u_m$, tem-se

$$J'(u_m)(u_m) = o(1),$$

ou seja,

$$\begin{aligned} o(1) = J'(u_m)(u_m) &= \int_\Omega |\nabla u_m|^2\, dx - \int_\Omega g(x, u_m) u_m dx - \int_\Omega |u_m|^{2^*-2} u_m^2 dx \\ &= \|u_m\|_{H_0^1}^2 - \int_\Omega g(x, u_m) u_m dx - \|u_m\|_{L^{2^*}}^{2^*}. \end{aligned}$$

Pela hipótese (3.3), pela convergência $u_m \rightharpoonup u \equiv 0$ e pela limitação da seqüência $(u_m) \subset H_0^1(\Omega)$ todas as hipóteses da Proposição 3.2 são satisfeitas, logo $\displaystyle\int_\Omega g(x,u_m)u_m dx \to 0$, assim

$$\int_\Omega g(x,u_m)u_m dx = o(1).$$

Logo,

$$\|u_m\|_{H_0^1}^2 - \|u_m\|_{L^{2^*}}^{2^*} = o(1). \tag{4.33}$$

Pela definição de S, para todo $u \in H_0^1(\Omega)$ temos que $S\|u\|_{L^{2^*}}^2 \leq \|u\|_{H_0^1}^2$, logo

$$S^{2^*/2}\|u_m\|_{L^{2^*}}^{2^*} \leq \|u_m\|_{H_0^1}^{2^*}$$

e consequentemente

$$-\|u_m\|_{L^{2^*}}^{2^*} \geq -S^{-2^*/2}\|u_m\|_{H_0^1}^{2^*}. \tag{4.34}$$

Por (4.33) e pela estimativa (4.34), temos que

$$o(1) = \|u_m\|_{H_0^1}^2 - \|u_m\|_{L^{2^*}}^{2^*} \geq \|u_m\|_{H_0^1}^2 - S^{-2^*/2}\|u_m\|_{H_0^1}^{2^*}.$$

Isto é,

$$o(1) \geq \|u_m\|_{H_0^1}^2\left(1 - S^{-2^*/2}\|u_m\|_{H_0^1}^{2^*-2}\right). \tag{4.35}$$

Como a seqüência $(\|u_m\|_{H_0^1})$ é limitada em $\mathbb{R}$, possui subseqüência convergente, assim, seja

$$\lim_{m\to\infty}\|u_m\|_{H_0^1}^2 = k \geq 0.$$

1º caso: Se $k = 0$, então $\|u_m\|_{H_0^1}^2 \to 0$ e assim, $u_m \to 0$ em $H_0^1(\Omega)$. Como J é contínua, segue que $J(u_m) \to J(0) = 0$. Por outro lado, $J(u_m) \to c$ e consequentemente $c = 0$, o que é uma contradição com a hipótese da afirmação.

2º caso: Se $k > 0$, por (4.35), temos que

$$-o(1) \leq \|u_m\|_{H_0^1}^2\left(S^{-2^*/2}\|u_m\|_{H_0^1}^{2^*-2} - 1\right),$$

ou seja,

$$-o(1) \leq \|u_m\|_{H_0^1}^2\left(S^{-2^*/2}\left(\|u_m\|_{H_0^1}^2\right)^{\frac{2^*-2}{2}} - 1\right). \tag{4.36}$$

Passando a estimativa (4.36) ao limite quando $m \to +\infty$, concluímos que

$$0 \leq k\left(S^{-2^*/2}k^{\frac{2^*-2}{2}} - 1\right).$$

Portanto,

$$S^{-2^*/2}k^{\frac{2^*-2}{2}} - 1 \geq 0$$

e consequentemente

$$k \geq S^{n/2}.$$

Assim,

$$\|u_m\|^2_{H^1_0} \geq S^{n/2} + o(1). \tag{4.37}$$

Como

$$J(u_m) = \frac{1}{2}\|u_m\|^2_{H^1_0} - \int_\Omega G(x,u_m)dx - \frac{1}{2^*}\|u_m\|^{2^*}_{L^{2^*}},$$

pela Proposição 3.2, segue que $\int_\Omega G(x,u_m)dx \to 0$, então

$$J(u_m) = \frac{1}{2}\|u_m\|^2_{H^1_0} + o(1) - \frac{1}{2^*}\|u_m\|^{2^*}_{L^{2^*}}. \tag{4.38}$$

Por (4.38) e pela estimativa (4.33), temos que

$$\begin{aligned} J(u_m) &= \frac{1}{n}\|u_m\|^2_{H^1_0} + \frac{n-2}{2n}\|u_m\|^2_{H^1_0} + o(1) - \frac{n-2}{2n}\|u_m\|^{2^*}_{L^{2^*}} \\ &= \frac{1}{n}\|u_m\|^2_{H^1_0} + \frac{n-2}{2n}\left(\|u_m\|^2_{H^1_0} - \|u_m\|^{2^*}_{L^{2^*}}\right) + o(1) \\ &= \frac{1}{n}\|u_m\|^2_{H^1_0} + o(1). \end{aligned}$$

Agora, utilizando a estimativa (4.37) na última igualdade, obtemos

$$J(u_m) \geq \frac{1}{n}S^{n/2} + o(1). \tag{4.39}$$

Como $J(u_m) \to c$, passando a estimativa (4.39) ao limite quando $m \to +\infty$, segue que

$$c \geq \frac{1}{n}S^{n/2},$$

o que é um absurdo pela hipótese de que $c \in (0, \frac{S^{n/2}}{n})$.

Assim, $u \not\equiv 0$. Portanto, u é uma solução não trivial de (3.1). □

Pelo Lema 4.1, para provar a existência de uma solução para o problema (3.1) via Teorema de Linking de Rabinowitz sem a condição (PS), basta construir uma seqüência PS para J em um nível estritamente entre 0 e $\frac{S^{n/2}}{n}$.

Para isso, usaremos a técnica das autofunções aproximadas desenvolvida no trabalho de F. Gazzola e B. Ruf [11].

4.1 A DECOMPOSIÇÃO DO ESPAÇO $H^1_0(\Omega)$

Nesta seção, faremos uma escolha de uma decomposição para o espaço $H^1_0(\Omega)$ que será utilizado neste e nos próximos capítulos.

Fixado $k \in \mathbb{N}$, para cada $i \in \mathbb{N}$ denotemos por e_i a autofunção do operador $-\Delta$ em relação ao problema homogêneo de Dirichlet em Ω, normalizada em $L^2(\Omega)$ (isto é, $\|e_i\|_{L^2} = 1$, ver [4]), associada ao autovalor $\lambda_i \in \sigma(-\Delta)$. Seja $H^1_0(\Omega) = H^- \oplus H^+$, onde H^- é o espaço gerado pelas autofunções correspondentes aos autovalores $\lambda_1, ..., \lambda_k$, $H^+ := (H^-)^\perp$ e seja $P_k : H^1_0(\Omega) \longrightarrow H^-$ o operador projeção ortogonal.

Como nossa equação envolve uma não-linearidade que possui uma “interação” em certo sentido com autovalores de ordem superior, é necessário a decomposição do espaço $H_0^1(\Omega)$ na forma citada acima, ou seja, como soma direta entre dois subespaços: H^- e H^+.

Portanto, o trabalho de estimar o funcional J associado ao nosso problema (que envolve o expoente crítico de Sobolev) é em geral, muito árduo, devido ao fato de ser necessário obtermos estimativas para o termo $J(u+v)$, onde $u \in H^-$ e $v \in H^+$; com o objetivo não somente de mostrar as condições geométricas do TPM generalizado, mas também, de obter uma estimativa para o nível mini-max c.

Por essa razão, usaremos outra decomposição do espaço $H_0^1(\Omega)$, assim, definimos alguns conceitos abaixo:

Vamos supor, sem perda de generalidade, que $0 \in \Omega$, e tome $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de forma que $B_{2/m} \subset \Omega$, onde $B_{2/m}$ denota a bola de raio $2/m$ com centro na origem. Em relação às hipóteses (3.7) e (3.10) suponha também que $0 \in \Omega_0$, e tome $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de forma que $B_{2/m} \subset \Omega_0$.

Consideremos as funções $\zeta_m : \Omega \to \mathbb{R}$ definidas por

$$\zeta_m(x) := \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \in B_{1/m}, \\ m|x| - 1 & \text{se} \quad x \in A_m = B_{2/m} \backslash B_{1/m}, \\ 1 & \text{se} \quad x \in \Omega \backslash B_{2/m}. \end{cases}$$

Em seguida, defina as seguintes “autofunções aproximadas” $e_i^m := \zeta_m e_i$ para $i = 1, ..., k$ e o espaço

$$H_m^- := span\{e_i^m \ : \ i = 1, ..., k\}.$$

Primeiro, note que $e_i^m \in H_0^1(\Omega)$. Agora, iremos provar que as funções e_i^m convergem para as autofunções e_i, quando $m \to +\infty$, em seguida vamos estimar o erro dessa aproximação.

Lema 4.2. *Quando $m \to \infty$, temos que*

(i) $e_i^m \to e_i$ *em* $H_0^1(\Omega)$, *para* $i = 1, \ldots, k$, *e*

(ii) $$\max_{\{u \in H_m^- \ ; \ \|u\|_{L^2}^2 = \int_\Omega u^2 dx = 1\}} \|u\|_{H_0^1}^2 \leq \lambda_k + c_k m^{2-n}.$$

Demonstração. **Prova de (i):**

$$\begin{aligned} \|e_i^m - e_i\|_{H_0^1}^2 &= \int_\Omega |\nabla(\ e_i^m - e_i)|^2 \, dx \\ &= \int_\Omega |\nabla(\zeta_m e_i - e_i)|^2 \, dx \\ &= \int_\Omega |\zeta_m \nabla e_i + e_i \nabla \xi_m - \nabla e_i|^2 \, dx \\ &= \int_\Omega |e_i \nabla \zeta_m + (\zeta_m - 1) \nabla e_i|^2 \, dx. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|e_i^m - e_i\|^2_{H_0^1} = \int_\Omega |e_i|^2 \, |\nabla \zeta_m|^2 dx + 2\int_\Omega e_i(\zeta_m - 1)\nabla\zeta_m \nabla e_i dx + \int_\Omega (\zeta_m - 1)^2 |\nabla e_i|^2 dx.$$

Agora, pela definição da função ζ_m, segue que

$$\begin{aligned}\|e_i^m - e_i\|^2_{H_0^1} = &\int_{A_m} |e_i|^2 \, |\nabla \zeta_m|^2 dx + 2\int_{A_m} e_i(\zeta_m - 1)\nabla\zeta_m \nabla e_i dx \\ &+ \int_{B_{2/m}} (\zeta_m - 1)^2 |\nabla e_i|^2 dx,\end{aligned}$$

e assim,

$$\begin{aligned}\|e_i^m - e_i\|^2_{H_0^1} \le &\int_{A_m} |e_i|^2 \, |\nabla \zeta_m|^2 dx + 2\int_{A_m} |e_i| \, |(\zeta_m - 1)| \, |\nabla\zeta_m| \, |\nabla e_i| \, dx \\ &+ \int_{B_{2/m}} (\zeta_m - 1)^2 |\nabla e_i|^2 dx.\end{aligned} \tag{4.40}$$

Vamos estimar cada integral do lado direito da desigualdade (4.40).

(1º) Estimativa de $\displaystyle\int_{A_m} |e_i|^2 |\nabla\zeta_m|^2 dx$.

Em A_m temos que $|\nabla\zeta_m| = m$. Como $e_i \in C^\infty(\Omega)$, então e_i é limitada em $\overline{B}_{2/m}$, e portanto, segue que

$$|e_i| \le \|e_i\|_\infty.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_{A_m} |e_i|^2 |\nabla\zeta_m|^2 dx &= \int_{\overline{A}_m} |e_i|^2 |\nabla\zeta_m|^2 dx \\ &\le m^2 \|e_i\|^2_\infty \int_{\overline{A}_m} 1 dx \\ &= m^2 \|e_i\|^2_\infty med(\overline{A}_m) \\ &= m^2 \|e_i\|^2_\infty \Big(med(B_{2/m}) - med(B_{1/m}) \Big) \\ &\le m^2 \|e_i\|^2_\infty med(B_{2/m}) \\ &= m^2 \|e_i\|^2_\infty \left(\omega_n \left(\frac{2}{m} \right)^n \right) \\ &= C_1 \|e_i\|^2_\infty m^{2-n},\end{aligned}$$

onde ω_n denota o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^n$ e $C_1 = 2^n \omega_n$.

(2º) Estimativa de $\displaystyle 2\int_{A_m} |e_i| \, |(\zeta_m - 1)| \, |\nabla\zeta_m| \, |\nabla e_i| \, dx$.

Sobre A_m temos que $|\nabla\zeta_m| = m$ e $|(\zeta_m - 1)| \le 1$. Além disso, considerando que $e_i \in C^\infty(\Omega)$, então $|\nabla e_i| \in C^\infty(\Omega)$. Logo e_i e $|\nabla e_i|$ são limitadas em $\overline{B}_{2/m}$, assim

$$|e_i| \leq \|e_i\|_\infty,$$
$$|\nabla e_i| \leq \|\nabla e_i\|_\infty.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
2\int_{A_m} |e_i|\,|(\zeta_m - 1)|\,|\nabla \zeta_m|\,|\nabla e_i|\,dx &= 2\int_{\overline{A}_m} |e_i|\,|(\zeta_m - 1)|\,|\nabla \zeta_m|\,|\nabla e_i|\,dx \\
&\leq 2m\|e_i\|_\infty \|\nabla e_i\|_\infty \int_{\overline{A}_m} 1dx \\
&= 2m\|e_i\|_\infty \|\nabla e_i\|_\infty med(\overline{A}_m) \\
&= 2m\|e_i\|_\infty \|\nabla e_i\|_\infty \Big(med(B_{2/m}) - med(B_{1/m})\Big) \\
&\leq 2m\|e_i\|_\infty \|\nabla e_i\|_\infty med(B_{2/m}) \\
&= 2m\|e_i\|_\infty \|\nabla e_i\|_\infty \left(\omega_n \left(\frac{2}{m}\right)^n\right) \\
&= C_2\|e_i\|_\infty \|\nabla e_i\|_\infty m^{1-n},
\end{aligned}$$

onde ω_n denota o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^n$ e $C_2 = 2^{n+1}\omega_n$.
(3º) Estimativa de $\displaystyle\int_{B_{2/m}} (\zeta_m - 1)^2 |\nabla e_i|^2 dx$.

Como $(\zeta_m - 1)^2 \leq 1$ e $e_i \in C^\infty(\Omega)$, então $|\nabla e_i| \in C^\infty(\Omega)$. Assim $|\nabla e_i|$ é limitada em $\overline{B}_{2/m}$, e portanto, segue que

$$|\nabla e_i| \leq \|\nabla e_i\|_\infty.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_{B_{2/m}} (\zeta_m - 1)^2 |\nabla e_i|^2 dx &= \int_{\overline{B}_{2/m}} (\zeta_m - 1)^2 |\nabla e_i|^2 dx \\
&\leq \int_{\overline{B}_{2/m}} |\nabla e_i|^2 dx \\
&\leq \|\nabla e_i\|_\infty^2 \int_{\overline{B}_{2/m}} 1dx \\
&= \|\nabla e_i\|_\infty^2 med(B_{2/m}) \\
&= \|\nabla e_i\|_\infty^2 \left(\omega_n \left(\frac{2}{m}\right)^n\right) \\
&= C_3 \|\nabla e_i\|_\infty^2 m^{-n},
\end{aligned}$$

onde ω_n denota o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^n$ e $C_3 = 2^n\omega_n$.
Substituindo as estimativas em (4.40), obtemos que

$$\|e_i^m - e_i\|_{H_0^1}^2 \leq C_1\|e_i\|_\infty^2 m^{2-n} + C_2\|e_i\|_\infty \|\nabla e_i\|_\infty m^{1-n} + C_3\|\nabla e_i\|_\infty^2 m^{-n},$$

onde C_1, C_2 e C_3 são constantes positivas independentes de e_i.
Então,

$$\|e_i^m - e_i\|_{H_0^1}^2 \to 0 \text{ quando } m \to \infty,$$

isto é,

$$e_i^m \to e_i \text{ em } H_0^1(\Omega) \text{ quando } m \to \infty.$$

Prova de (ii):

Denote por $\partial B = \{u \in H_0^1(\Omega) : \|u\|_{L^2}^2 = \int_\Omega u^2 dx = 1\}$, e seja $v \in H^- \cap \partial B$, isto é, $v = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j e_j$, com $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j^2 = 1$. Note que, definindo $v_m := \zeta_m v$; então,

$$v_m := \zeta_m v = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \zeta_m e_j = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j e_j^m,$$

isto é, $v_m \in H_m^-$.

Para cada $v \in H^- \cap \partial B$, seja $a_m(v) := \|v_m\|_{L^2}^{-1}$, de modo que $a_m(v)v_m \in \partial B$, pois $\int_\Omega (a_m(v)v_m)^2 dx = \int_\Omega \|v_m\|_{L^2}^{-2} v_m^2 dx = \|v_m\|_{L^2}^{-2} \int_\Omega v_m^2 dx = \|v_m\|_{L^2}^{-2} \|v_m\|_{L^2}^2 = 1.$

Primeiro vamos provar que

$$1 \le a_m(v) \le 1 + C\|v\|_\infty^2 m^{-n}, \text{ onde } C \text{ é uma constante positiva.}$$

Como $a_m(v)v_m \in \partial B$, temos

$$1 = \int_\Omega a_m^2(v) v_m^2 dx = \int_{\Omega \setminus B_{2/m}} a_m^2(v) v_m^2 dx + \int_{A_m} a_m^2(v) v_m^2 dx + \int_{B_{1/m}} a_m^2(v) v_m^2 dx.$$

Mas, como $v_m = \zeta_m v = v$ em $\Omega \setminus B_{2/m}$, $v_m = \zeta_m v = 0$ em $B_{1/m}$, e $a_m(v) := \|v_m\|_{L^2}^{-1}$, temos que

$$\begin{aligned} 1 &= a_m^2(v) \left(\int_{\Omega \setminus B_{2/m}} v^2 dx + \int_{A_m} \zeta_m^2 v^2 dx \right) \\ &= a_m^2(v) \left(\int_\Omega v^2 dx - \int_{B_{2/m}} v^2 dx + \int_{A_m} \zeta_m^2 v^2 dx \right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$1 = a_m^2(v) \left(1 - \int_{B_{2/m}} v^2 dx + \int_{A_m} \zeta_m^2 v^2 dx \right), \tag{4.41}$$

pois, $v \in H^- \cap \partial B$.

Agora, como $0 \le \zeta_m^2 \le 1$, $\forall x \in A_m$, então

$$\int_{A_m} \zeta_m^2 v^2 dx \le \int_{A_m} v^2 dx.$$

Por outro lado, como $A_m \subset B_{2/m}$, temos que

$$\int_{A_m} v^2 dx \le \int_{B_{2/m}} v^2 dx,$$

o que implica

$$\int_{A_m} \zeta_m^2 v^2 dx \leq \int_{B_{2/m}} v^2 dx.$$

Então,

$$1 - \int_{B_{2/m}} v^2 dx + \int_{A_m} \zeta_m^2 v^2 dx \leq 1.$$

Assim,

$$a_m^2(v)\left(1 - \int_{B_{2/m}} v^2 dx + \int_{A_m} \zeta_m^2 v^2 dx\right) \leq a_m^2(v).$$

De (4.41) e da desigualdade acima, temos

$$1 = a_m^2(v)\left(1 - \int_{B_{2/m}} v^2 dx + \int_{A_m} \zeta_m^2 v^2 dx\right) \leq a_m^2(v). \tag{4.42}$$

De forma análoga, como $-1 \leq -\zeta_m^2 \leq 0$, $\forall x \in A_m$, segue que,

$$-\int_{A_m} \zeta_m^2 v^2 dx \leq 0.$$

Logo,

$$\int_{B_{2/m}} v^2 dx - \int_{A_m} \zeta_m^2 v^2 dx \leq \int_{B_{2/m}} v^2 dx. \tag{4.43}$$

Como $v = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j e_j$, e considerando que $e_j \in C^\infty(\Omega)$, então v é limitada em $\overline{B}_{2/m}$. Assim, existe uma constante $k_1 > 0$ tal que $|v(x)| \leq k_1$, para todo $x \in \overline{B}_{2/m}$. Logo $|v(x)| \leq \|v\|_\infty$, o que implica

$$\int_{\overline{B}_{2/m}} v^2 dx \leq \|v\|_\infty^2 \int_{\overline{B}_{2/m}} 1 dx.$$

Então,

$$\begin{aligned} \int_{\overline{B}_{2/m}} v^2 dx &\leq \|v\|_\infty^2 \, med(B_{2/m}) \\ &= \|v\|_\infty^2 \left(\omega_n \left(\frac{2}{m}\right)^n\right) \\ &= C \|v\|_\infty^2 \, m^{-n}, \end{aligned}$$

onde ω_n denota o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^n$ e $C = 2^n \omega_n$.

Mas,

$$\int_{B_{2/m}} v^2 dx = \int_{\overline{B}_{2/m}} v^2 dx,$$

o que implica

$$\int_{B_{2/m}} v^2 dx \leq C \|v\|_\infty^2 \, m^{-n}.$$

Substituindo a estimativa acima em (4.43), obtemos que

$$\int_{B_{2/m}} v^2 dx - \int_{A_m} \zeta_m^2 v^2 dx \leq C \|v\|_\infty^2 m^{-n}.$$

Logo,

$$1 - \int_{B_{2/m}} v^2 dx + \int_{A_m} \zeta_m^2 v^2 dx \geq 1 - C \|v\|_\infty^2 m^{-n}.$$

Assim,

$$a_m^2(v)\left(1 - \int_{B_{2/m}} v^2 dx + \int_{A_m} \zeta_m^2 v^2 dx\right) \geq a_m^2(v)\left(1 - C \|v\|_\infty^2 m^{-n}\right).$$

De (4.41) e da desigualdade acima, segue que

$$1 = a_m^2(v)\left(1 - \int_{B_{2/m}} v^2 dx + \int_{A_m} \zeta_m^2 v^2 dx\right) \geq a_m^2(v)\left(1 - C \|v\|_\infty^2 m^{-n}\right). \tag{4.44}$$

De (4.42) e (4.44), temos que

$$a_m^2(v)\left(1 - C \|v\|_\infty^2 m^{-n}\right) \leq 1 \leq a_m^2(v). \tag{4.45}$$

Logo, de (4.45) concluímos que

$$1 \leq a_m(v) \leq 1 + C\|v\|_\infty^2 m^{-n}, \text{ onde } C \text{ é uma constante positiva.} \tag{4.46}$$

Agora, considere $\overline{u}_m \in H_m^- \cap \partial B$ tal que $\|\overline{u}_m\|_{H_0^1}^2 = \max_{u \in H_m^- \cap \partial B} \|u\|_{H_0^1}^2$; isso é possível porque o conjunto $(H_m^- \cap \partial B) \subset H_m^-$, $dim\ H_m^- < \infty$, e $H_m^- \cap \partial B$ é fechado e limitado. Além disso, como a norma (em $H_0^1(\Omega)$) é contínua, então o máximo de uma função contínua no conjunto $H_m^- \cap \partial B$ é atingido.

Então,

$$\overline{u}_m = a_m(\overline{u}) \sum_{j=1}^{k} \overline{\alpha}_j e_j^m = a_m(\overline{u}) \zeta_m \sum_{j=1}^{k} \overline{\alpha}_j e_j = a_m(\overline{u}) \zeta_m \overline{u}, \text{ com } \overline{u} \in H^- \cap \partial B.$$

Por (4.46), segue que

$$\|\overline{u}_m\|_{H_0^1}^2 = a_m^2(\overline{u}) \int_\Omega |\nabla(\zeta_m \overline{u})|^2 dx \leq \left(1 + C\|\overline{u}\|_\infty^2 m^{-n}\right)^2 \int_\Omega |\overline{u}\nabla\zeta_m + \zeta_m \nabla\overline{u}|^2 dx. \tag{4.47}$$

Estimando a integral do lado direito de (4.47), temos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\overline{u}\nabla\zeta_m + \zeta_m\nabla\overline{u}|^2 dx &= \int_\Omega \left(\overline{u}^2|\nabla\zeta_m|^2 + 2\overline{u}\zeta_m\nabla\zeta_m\nabla\overline{u} + \zeta_m^2|\nabla\overline{u}|^2\right) dx \\ &= \int_\Omega |\overline{u}|^2|\nabla\zeta_m|^2 dx + 2\int_\Omega \overline{u}\zeta_m\nabla\zeta_m\nabla\overline{u} dx + \int_\Omega |\zeta_m|^2|\nabla\overline{u}|^2 dx. \end{aligned}$$

Pela definição da função ζ_m, segue que

$$\int_\Omega |\overline{u}\nabla\zeta_m + \zeta_m\nabla\overline{u}|^2 dx = \int_{A_m} |\overline{u}|^2|\nabla\zeta_m|^2 dx + 2\int_{A_m} \overline{u}\zeta_m\nabla\zeta_m\nabla\overline{u}dx + \int_\Omega |\zeta_m|^2|\nabla\overline{u}|^2 dx.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\overline{u}\nabla\zeta_m + \zeta_m\nabla\overline{u}|^2 dx \leq& \int_{A_m} |\overline{u}|^2|\nabla\zeta_m|^2 dx + 2\int_{A_m} |\overline{u}||\zeta_m||\nabla\zeta_m||\nabla\overline{u}|dx \\ &+ \int_\Omega |\zeta_m|^2|\nabla\overline{u}|^2 dx. \end{aligned} \tag{4.48}$$

Vamos estimar cada integral do lado direito da desigualdade (4.48).

(1º) Estimativa de $\displaystyle\int_{A_m} |\overline{u}|^2|\nabla\zeta_m|^2 dx.$

Como em A_m temos que $|\nabla\zeta_m| = m$, uma vez que $\overline{u} = \sum_{j=1}^{k} \overline{\alpha} e_j^m \in C^\infty(\Omega)$, e análogamente como nas estimativas para a prova da primeira parte do lema, segue que

$$\begin{aligned}\int_{A_m} |\overline{u}|^2|\nabla\zeta_m|^2 dx &= \int_{\overline{A}_m} |\overline{u}|^2|\nabla\zeta_m|^2 dx \\ &= m^2 \int_{\overline{A}_m} |\overline{u}|^2 dx \\ &\leq m^2 \|\overline{u}\|_\infty^2 \int_{\overline{A}_m} 1dx \\ &= m^2 \|\overline{u}\|_\infty^2 \, med(\overline{A}_m) \\ &\leq m^2 \|\overline{u}\|_\infty^2 \, med(B_{2/m}) \\ &= m^2 \|\overline{u}\|_\infty^2 \left(w_n \left(\frac{2}{m}\right)^n\right) \\ &= c_1 \|\overline{u}\|_\infty^2 \, m^{2-n},\end{aligned}$$

onde c_1 é uma constante positiva.

(2º) Estimativa de $\displaystyle 2\int_{A_m} |\overline{u}||\zeta_m||\nabla\zeta_m||\nabla\overline{u}|dx.$

Como em A_m temos que $|\nabla\zeta_m| = m$, $|\zeta_m| \leq 1$ em Ω, e $\overline{u} = \sum_{j=1}^{k} \overline{\alpha} e_j^m \in C^\infty(\Omega)$. Então,

$$\begin{aligned}2\int_{A_m} |\overline{u}||\zeta_m||\nabla\zeta_m||\nabla\overline{u}|dx &\leq 2\int_{\overline{A}_m} |\overline{u}||\zeta_m||\nabla\zeta_m||\nabla\overline{u}|dx \\ &\leq 2m \int_{\overline{A}_m} |\overline{u}||\nabla\overline{u}|dx \\ &\leq 2m \|\overline{u}\|_\infty \|\nabla\overline{u}\|_\infty \int_{\overline{A}_m} 1dx \\ &= 2m \|\overline{u}\|_\infty \|\nabla\overline{u}\|_\infty \, med(\overline{A}_m) \\ &\leq 2m \|\overline{u}\|_\infty \|\nabla\overline{u}\|_\infty \, med(B_{2/m}) \\ &= 2m \|\overline{u}\|_\infty \|\nabla\overline{u}\|_\infty \left(w_n \left(\frac{2}{m}\right)^n\right) \\ &= c_2 \|\overline{u}\|_\infty \|\nabla\overline{u}\|_\infty \, m^{1-n},\end{aligned}$$

onde c_2 é uma constante positiva.

(3º) Estimativa de $\displaystyle\int_\Omega |\zeta_m|^2|\nabla\overline{u}|^2dx$.

Como $|\zeta_m|\leq 1$ em Ω, temos que

$$\int_\Omega |\zeta_m|^2|\nabla\overline{u}|^2dx \leq \int_\Omega |\nabla\overline{u}|^2dx = \|\overline{u}\|^2_{H^1_0}.$$

Substituindo as estimativas em (4.48), obtemos que

$$\int_\Omega |\overline{u}\nabla\zeta_m+\zeta_m\nabla\overline{u}|^2dx \leq c_1\left\|\overline{u}\right\|^2_\infty m^{2-n}+c_2\left\|\overline{u}\right\|_\infty\left\|\nabla\overline{u}\right\|_\infty m^{1-n}+\|\overline{u}\|^2_{H^1_0}, \tag{4.49}$$

onde c_1 e c_2 são constantes positivas.

Utilizando a estimativa (4.49) em (4.47), temos que

$$\|\overline{u}_m\|^2_{H^1_0}\leq\left(1+C\|\overline{u}\|^2_\infty m^{-n}\right)^2\left(c_1\left\|\overline{u}\right\|^2_\infty m^{2-n}+c_2\left\|\overline{u}\right\|_\infty\left\|\nabla\overline{u}\right\|_\infty m^{1-n}+\|\overline{u}\|^2_{H^1_0}\right). \tag{4.50}$$

Como

$$\left(1+C\|\overline{u}\|^2_\infty m^{-n}\right)^2 = 1+2C\|\overline{u}\|^2_\infty m^{-n}+C^2\|\overline{u}\|^4_\infty m^{-2n}. \tag{4.51}$$

Para m suficientemente grande, temos

$$C^2\frac{\|\overline{u}\|^4_\infty}{m^{2n}}\leq C^2\frac{\|\overline{u}\|^2_\infty}{m^n}.$$

De (4.51), utilizando a estimativa acima, segue que

$$\begin{aligned}\left(1+C\|\overline{u}\|^2_\infty m^{-n}\right)^2 &\leq 1+2C\|\overline{u}\|^2_\infty m^{-n}+C^2\|\overline{u}\|^2_\infty m^{-n}\\ &= 1+c_3\|\overline{u}\|^2_\infty m^{-n},\end{aligned}$$

onde $c_3=2C+C^2$.

Substituindo a estimativa acima em (4.50), obtemos que

$$\|\overline{u}_m\|^2_{H^1_0}\leq\left(1+c_3\|\overline{u}\|^2_\infty m^{-n}\right)\left(c_1\left\|\overline{u}\right\|^2_\infty m^{2-n}+c_2\left\|\overline{u}\right\|_\infty\left\|\nabla\overline{u}\right\|_\infty m^{1-n}+\|\overline{u}\|^2_{H^1_0}\right).$$

Assim,

$$\begin{aligned}\|\overline{u}_m\|^2_{H^1_0}\leq{}& c_1\left\|\overline{u}\right\|^2_\infty m^{2-n}+c_2\left\|\overline{u}\right\|_\infty\left\|\nabla\overline{u}\right\|_\infty m^{1-n}+\|\overline{u}\|^2_{H^1_0}+c_1c_3\left\|\overline{u}\right\|^4_\infty m^{2-2n}\\ &+c_2c_3\left\|\overline{u}\right\|^3_\infty\left\|\nabla\overline{u}\right\|_\infty m^{1-2n}+c_3\left\|\overline{u}\right\|^2_{H^1_0}\|\overline{u}\|^2_\infty m^{-n}.\end{aligned} \tag{4.52}$$

Para m suficientemente grande, temos as seguintes desigualdades:

$$\frac{\|\overline{u}\|^4_\infty}{m^{2n-2}}\leq\frac{\|\overline{u}\|^2_\infty}{m^{n-2}},$$

$$\frac{\|\overline{u}\|^3_\infty}{m^{2n-1}}\leq\frac{\|\overline{u}\|_\infty}{m^{n-1}},$$

$$\frac{\|\overline{u}\|^2_\infty}{m^{n}}\leq\frac{\|\overline{u}\|^2_\infty}{m^{n-2}}.$$

Substituindo as estimativas acima na desigualdade (4.52), temos que

$$\begin{aligned}\|\overline{u}_m\|_{H_0^1}^2 \leq c_1 \|\overline{u}\|_\infty^2 m^{2-n} + c_2 \|\overline{u}\|_\infty \|\nabla \overline{u}\|_\infty m^{1-n} + \|\overline{u}\|_{H_0^1}^2 + c_1c_3 \|\overline{u}\|_\infty^2 m^{2-n} \\ + c_2c_3 \|\overline{u}\|_\infty \|\nabla \overline{u}\|_\infty m^{1-n} + c_3 \|\overline{u}\|_{H_0^1}^2 \|\overline{u}\|_\infty^2 m^{2-n}. \end{aligned} \tag{4.53}$$

Na estimativa (4.53) chamando de c cada vez que colocamos em evidência termos similares, obtemos

$$\|\overline{u}_m\|_{H_0^1}^2 \leq c \|\overline{u}\|_\infty^2 m^{2-n} + c \|\overline{u}\|_\infty \|\nabla \overline{u}\|_\infty m^{1-n} + \|\overline{u}\|_{H_0^1}^2 + c_3 \|\overline{u}\|_{H_0^1}^2 \|\overline{u}\|_\infty^2 m^{2-n}. \tag{4.54}$$

Pela Proposição 3.1, temos que

$$\|e_i\|_{H_0^1}^2 = \lambda_i \|e_i\|_{L^2}^2 \quad \text{e} \quad \langle e_i, e_j \rangle_{H_0^1} = \langle e_i, e_j \rangle_{L^2} = 0, \ \ i \neq j. \tag{4.55}$$

Como $\{e_i\} \subset H_0^1(\Omega)$ é uma base normalizada em $L^2(\Omega)$, então $\|e_i\|_{L^2}^2 = 1$.

Assim, por (4.55), temos que

$$\int_\Omega |\nabla e_i|^2 dx = \|e_i\|_{H_0^1}^2 = \lambda_i, \tag{4.56}$$

e

$$\int_\Omega \nabla e_i \nabla e_j dx = \langle e_i, e_j \rangle_{H_0^1} = 0 = \langle e_i, e_j \rangle_{L^2} = \int_\Omega e_i e_j dx, \ \ i \neq j. \tag{4.57}$$

Como $\overline{u} \in H^- \cap \partial B$, então $\overline{u} = \sum_{i=1}^k \overline{\alpha}_i e_i$ com $\sum_{i=1}^k (\overline{\alpha}_i)^2 = 1$.

Além disso,

$$\nabla \overline{u} = \sum_{i=1}^k \overline{\alpha}_i \nabla e_i.$$

Logo,

$$\|\overline{u}\|_{H_0^1}^2 = \int_\Omega |\nabla \overline{u}|^2 dx = \int_\Omega \nabla \overline{u} \nabla \overline{u} dx = \int_\Omega \langle \nabla \overline{u}, \nabla \overline{u} \rangle_{\mathbb{R}^n} dx,$$

e portanto,

$$\begin{aligned}\|\overline{u}\|_{H_0^1}^2 &= \int_\Omega \langle \overline{\alpha}_1 \nabla e_1 + ... + \overline{\alpha}_k \nabla e_k, \overline{\alpha}_1 \nabla e_1 + ... + \overline{\alpha}_k \nabla e_k \rangle_{\mathbb{R}^n} dx \\ &= \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^k \overline{\alpha}_i^2 \nabla e_i \nabla e_i + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq k} \overline{\alpha}_i \overline{\alpha}_j \nabla e_i \nabla e_j \right) dx \\ &= \sum_{i=1}^k \left(\overline{\alpha}_i^2 \int_\Omega |\nabla e_i|^2 dx \right) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq k} \left(\overline{\alpha}_i \overline{\alpha}_j \int_\Omega \nabla e_i \nabla e_j dx \right) \\ &= \sum_{i=1}^k \left(\overline{\alpha}_i^2 \|e_i\|_{H_0^1}^2 \right) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq k} \left(\overline{\alpha}_i \overline{\alpha}_j \int_\Omega \nabla e_i \nabla e_j dx \right). \end{aligned}$$

Substituindo (4.56) e (4.57) na igualdade acima, obtemos

$$\|\overline{u}\|^2_{H^1_0} = \sum_{i=1}^{k}\left(\overline{\alpha}_i^2 \cdot \lambda_i\right) + 2\sum_{1\leq i<j\leq k}(\overline{\alpha}_i\overline{\alpha}_j \cdot 0) = \sum_{i=1}^{k}\left(\overline{\alpha}_i^2 \cdot \lambda_i\right). \tag{4.58}$$

Como a seqüência (λ_k) formada pelos autovalores é crescente, então de (4.58), segue que

$$\|\overline{u}\|^2_{H^1_0} = \sum_{i=1}^{k}\overline{\alpha}_i^2 \cdot \lambda_i \leq \lambda_k \sum_{i=1}^{k}\overline{\alpha}_i^2 \leq \lambda_k.(1) = \lambda_k,$$

pois $\overline{u} \in \partial B$.

Utilizando a desigualdade acima em (4.54), temos que

$$\begin{aligned}
\|\overline{u}_m\|^2_{H^1_0} &\leq c\,\|\overline{u}\|^2_\infty m^{2-n} + c\,\|\overline{u}\|_\infty \|\nabla\overline{u}\|_\infty m^{1-n} + \lambda_k + c_3\lambda_k\|\overline{u}\|^2_\infty m^{2-n}\\
&= (c + c_3\lambda_k)\,\|\overline{u}\|^2_\infty m^{2-n} + c\,\|\overline{u}\|_\infty \|\nabla\overline{u}\|_\infty m^{1-n} + \lambda_k\\
&= \left[(c + c_3\lambda_k)\,\|\overline{u}\|^2_\infty + c\,\|\overline{u}\|_\infty \|\nabla\overline{u}\|_\infty m^{-1}\right] \cdot m^{2-n} + \lambda_k.
\end{aligned}$$

Definindo $c_k := (c + c_3\lambda_k)\,\|\overline{u}\|^2_\infty + c\,\|\overline{u}\|_\infty \|\nabla\overline{u}\|_\infty m^{-1}$, podemos reescrever a desigualdade acima da forma

$$\|\overline{u}_m\|^2_{H^1_0} \leq c_k m^{2-n} + \lambda_k,$$

onde m é escolhido como o maior inteiro positivo, de modo que as estimativas tomadas sejam satisfeitas ao mesmo tempo. □

Agora, apresentamos uma proposição que nos ajudará a verificar que o funcional J satisfaz uma das condições geométricas do Teorema de Linking.

Proposição 4.1. *Temos que*

$$\|v\|^2_{H^1_0} \geq \lambda_{k+1}\,\|v\|^2_{L^2} \quad \forall\, v \in H^+,$$

onde λ_{k+1} (k fixo) é autovalor do operador $-\Delta$ em relação ao problema homogêneo de Dirichlet em Ω, e H^+ foi definido no início dessa Seção.

Demonstração. Seja $v \in H^+$, então $v = \sum_{i=k+1}^{\infty} \alpha_i e_i$, com $e_i \in H^1_0(\Omega)$.

Assim,

$$\nabla v = \sum_{i=k+1}^{\infty}\alpha_i \nabla e_i,$$

implica

$$|\nabla v|^2 = \sum_{i=k+1}^{\infty}\alpha_i^2\nabla e_i\nabla e_i + 2\sum_{k+1\leq i<j}\alpha_i\alpha_j\nabla e_i\nabla e_j.$$

Então,

$$\|v\|^2_{H^1_0} = \int_\Omega |\nabla v|^2 dx = \int_\Omega \left(\sum_{i=k+1}^{\infty}\alpha_i^2\nabla e_i\nabla e_i + 2\sum_{k+1\leq i<j}\alpha_i\alpha_j\nabla e_i\nabla e_j\right) dx,$$

isto é,

$$\begin{aligned}\|v\|^2_{H^1_0} &= \sum_{i=k+1}^{\infty}\left(\alpha_i^2\int_\Omega \nabla e_i \nabla e_i dx\right) + 2\sum_{k+1\le i<j}\left(\alpha_i\alpha_j\int_\Omega \nabla e_i\nabla e_j dx\right)\\ &= \sum_{i=k+1}^{\infty}\left(\alpha_i^2\,\|e_i\|^2_{H^1_0}\right) + 2\sum_{k+1\le i<j}\left(\alpha_i\alpha_j\langle e_i, e_j\rangle_{H^1_0}\right).\end{aligned}$$

Usando a Proposição 3.1, segue que

$$\|v\|^2_{H^1_0} = \sum_{i=k+1}^{\infty}\left(\alpha_i^2\lambda_i\,\|e_i\|^2_{L^2}\right) + 2\sum_{k+1\le i<j}\left(\alpha_i\alpha_j\cdot(0)\right) = \sum_{i=k+1}^{\infty}\left(\alpha_i^2\lambda_i\,\|e_i\|^2_{L^2}\right).$$

Como $0<\lambda_1<\lambda_2\le ... \le\lambda_k\le\lambda_{k+1}\le ...$, da igualdade acima, temos que

$$\|v\|^2_{H^1_0} = \sum_{i=k+1}^{\infty}\left(\alpha_i^2\lambda_i\,\|e_i\|^2_{L^2}\right) \ge \lambda_{k+1}\sum_{i=k+1}^{\infty}\alpha_i^2\,\|e_i\|^2_{L^2}.$$

Fazendo um cálculo análogo para $|v|^2$, como foi feito para $|\nabla v|^2$, obtemos que

$$\|v\|^2_{L^2} = \sum_{i=k+1}^{\infty}\alpha_i^2\,\|e_i\|^2_{L^2}.$$

Portanto,

$$\|v\|^2_{H^1_0} \ge \lambda_{k+1}\,\|v\|^2_{L^2}, \quad \forall\, v\in H^+.$$

□

4.2 GEOMETRIA DE LINKING

Nesta seção, enunciamos e demonstram as proposições que nos permitem concluir que o funcional J satisfaz todas as hipóteses do Teorema de Linking, com exceção da condição (PS). Para isso, precisamos dos seguintes conceitos:

Considere uma função cut-off (de corte) positiva $\eta\in C_c^\infty(B_{1/m})$ tal que $\eta\equiv 1$ em $B_{1/2m}$, $\eta\le 1$ em $B_{1/m}$ e $\|\nabla\eta\|_\infty\le 4m$.

Considere a seqüência de funções

$$u_\varepsilon(x) := \eta(x)\cdot u_\varepsilon^*(x)\in H^1_0(\Omega), \tag{4.59}$$

onde u_ε^* é a família de funções definida em (4.1), com a função η estendida a todo o conjunto Ω, isto é,

$$\eta\in C_c^\infty(\Omega) = \{\psi:\Omega\subset\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}\ :\ \psi\in C^\infty(\Omega)\,\text{e}\ supp(\psi)\subset K\,\text{compacto},\ K\subset\Omega\}.$$

Temos as seguintes estimativas devido a Brezis-Nirenberg [7]:

$$\text{Para } \varepsilon\approx 0: \quad \|u_\varepsilon\|^2_{H^1_0} = S^{n/2} + O(\varepsilon^{n-2}) \ \text{ e } \ \|u_\varepsilon\|^{2^*}_{L^{2^*}} = S^{n/2} + O(\varepsilon^n) \quad \text{(ver [16])}. \tag{4.60}$$

Para cada $v \in H_m^- \oplus \mathbb{R}^+\{u_\varepsilon\}$, onde H_m^- foi definido na seção anterior, escrevemos $v = w + \alpha u_\varepsilon$ com $\alpha > 0$. Pela definição de u_ε e de H_m^-, segue que

$$supp(u_\varepsilon) \cap supp(w) = \emptyset. \tag{4.61}$$

Proposição 4.2. *Suponha que as condições (3.3) e (3.5) (ou (3.3) e (3.8)) sejam verificadas. Então existem $\alpha, \rho > 0$ tais que*

$$J(v) \geq \alpha, \quad \forall\, v \in \partial B_\rho \cap H^+.$$

Demonstração. Seja $v \in H^+$. Pela condição (3.3), para $\varepsilon > 0$ existe $a_\varepsilon \in L^{\frac{2n}{n+2}}(\Omega)$ tal que

$$|g(x,s)| \leq a_\varepsilon(x) + \varepsilon |s|^{\frac{n+2}{n-2}}, \quad \text{para } x \in \Omega \text{ q.t.p e } \forall\, s \in \mathbb{R}.$$

Como $G(x,s) = \displaystyle\int_0^s g(x,t)dt$, então

$$G(x,s) \leq |G(x,s)| = \left| \int_0^s g(x,t)dt \right| \leq \int_0^s |g(x,t)|dt.$$

Utilizando a condição (3.3) na desigualdade acima, temos que

$$\begin{aligned} G(x,s) \leq \int_0^s |g(x,t)|dt &\leq \int_0^s \left(a_\varepsilon(x) + \varepsilon |t|^{\frac{n+2}{n-2}} \right) dt \\ &\leq a_\varepsilon(x)|s| + \varepsilon \frac{1}{2^*}|s|^{2^*} \\ &\leq |a_\varepsilon(x)||s| + \varepsilon \frac{1}{2^*}|s|^{2^*}, \end{aligned}$$

para $x \in \Omega$ q.t.p e $\forall\, s \in \mathbb{R}$.

Assim,

$$G(x,s) \leq |a_\varepsilon(x)||s| + \varepsilon \frac{1}{2^*}|s|^{2^*}, \quad \text{para } x \in \Omega \text{ q.t.p e } \forall\, s \in \mathbb{R}. \tag{4.62}$$

Pela condição (3.5), existem $k \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$, $\sigma > 0$ e $\mu \in (\lambda_k, \lambda_{k+1})$ tais que

$$\frac{1}{2}(\lambda_k + \sigma)s^2 \leq G(x,s) \leq \frac{1}{2}\mu s^2 \quad \text{para } x \in \Omega \text{ q.t.p e } \forall\, |s| \leq \delta. \tag{4.63}$$

Logo, por (4.62) e (4.63), é possível encontrar um $C > 0$ tal que

$$G(x,s) \leq \frac{1}{2}\mu s^2 + C|s|^{2^*} \quad \text{para } x \in \Omega \text{ q.t.p e } \forall\, s \in \mathbb{R}.$$

Da desigualdade acima, para $s = v \in H^+$, temos

$$G(x,v) \leq \frac{1}{2}\mu v^2 + C|v|^{2^*},$$

implicando

$$\begin{aligned} -\int_\Omega G(x,v)dx &\geq -\frac{1}{2}\mu \int_\Omega |v|^2 dx - C \int_\Omega |v|^{2^*} dx \\ &= -\frac{1}{2}\mu \|v\|_{L^2}^2 - C \|v\|_{L^{2^*}}^{2^*}. \end{aligned}$$

Para o funcional J, da desigualdade acima, temos que

$$\begin{aligned} J(v) &= \frac{1}{2}\|v\|_{H_0^1}^2 - \int_\Omega G(x,v)dx - \frac{1}{2^*}\|v\|_{L^{2^*}}^{2^*} \\ &\geq \frac{1}{2}\|v\|_{H_0^1}^2 - \frac{1}{2}\mu\|v\|_{L^2}^2 - C\|v\|_{L^{2^*}}^{2^*} - \frac{1}{2^*}\|v\|_{L^{2^*}}^{2^*} \\ &= \frac{1}{2}\|v\|_{H_0^1}^2 - \frac{1}{2}\mu\|v\|_{L^2}^2 - (C + \frac{1}{2^*})\|v\|_{L^{2^*}}^{2^*} \\ &= \frac{1}{2}\|v\|_{H_0^1}^2 - \frac{1}{2}\mu\|v\|_{L^2}^2 - c\|v\|_{L^{2^*}}^{2^*}, \end{aligned} \tag{4.64}$$

onde $c = C + \dfrac{1}{2^*}$.

Pela definição de S, para $v \in H^+$, temos $S\|v\|_{L^{2^*}}^2 \leq \|v\|_{H_0^1}^2$. Logo

$$S^{2^*/2}\|v\|_{L^{2^*}}^{2^*} \leq \|v\|_{H_0^1}^{2^*},$$

e assim,

$$-\|v\|_{L^{2^*}}^{2^*} \geq -S^{-2^*/2}\|v\|_{H_0^1}^{2^*}.$$

Por (4.64) e da desigualdade acima, segue que

$$J(v) \geq \frac{1}{2}\|v\|_{H_0^1}^2 - \frac{1}{2}\mu\|v\|_{L^2}^2 - c \cdot S^{-2^*/2}\|v\|_{H_0^1}^{2^*}. \tag{4.65}$$

Pela Proposição 4.1, para $v \in H^+$, temos $\|v\|_{H_0^1}^2 \geq \lambda_{k+1}\|v\|_{L^2}^2$.

Logo,

$$-\frac{1}{2}\mu\|v\|_{L^2}^2 \geq -\frac{1}{2} \cdot \frac{\mu}{\lambda_{k+1}}\|v\|_{H_0^1}^2.$$

Por (4.65) e da desigualdade acima, temos que

$$\begin{aligned} J(v) &\geq \frac{1}{2}\|v\|_{H_0^1}^2 - \frac{1}{2}\mu\|v\|_{L^2}^2 - c \cdot S^{-2^*/2}\|v\|_{H_0^1}^{2^*} \\ &= \frac{1}{2}\|v\|_{H_0^1}^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu}{\lambda_{k+1}}\|v\|_{H_0^1}^2 - c \cdot S^{-2^*/2}\|v\|_{H_0^1}^{2^*} \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mu}{\lambda_{k+1}}\right)\|v\|_{H_0^1}^2 - c \cdot S^{-2^*/2}\|v\|_{H_0^1}^{2^*} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_{k+1} - \mu}{\lambda_{k+1}}\right)\|v\|_{H_0^1}^2 - c \cdot S^{-2^*/2}\|v\|_{H_0^1}^{2^*}. \end{aligned} \tag{4.66}$$

Pela condição (3.5), $\lambda_k < \mu < \lambda_{k+1}$, então $\frac{\lambda_{k+1}-\mu}{\lambda_{k+1}} > 0$. Considerando $c_1 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\lambda_{k+1} - \mu}{\lambda_{k+1}}\right)$ e $c_2 = c \cdot S^{-2^*/2}$, então de (4.66), temos

$$J(v) \geq c_1\|v\|_{H_0^1}^2 - c_2\|v\|_{H_0^1}^{2^*}.$$

Como $2 < 2^*$, podemos escolher ρ suficientemente pequeno tal que

$$J(v) \geq c_1\rho^2 - c_2\rho^{2^*} = \alpha > 0, \quad \forall\, v \in \partial B_\rho \cap H^+,$$

com $\rho < \left(\dfrac{c_1}{c_2}\right)^{\frac{1}{2^*-2}}$. $\square$

Na Proposição anterior, o caso é análogo quando, em vez da condição (3.5), assumimos a condição (3.8).

Proposição 4.3. *Suponha que as condições (3.4) e (3.6) sejam verificadas. Então existe* $R > \rho$ *tal que* $\max\limits_{v \in \partial Q_m^\varepsilon} J(v) \leq w_m$, *com* $w_m \to 0$, *quando* $m \to \infty$;
onde

$$Q_m^\varepsilon := \left[(\overline{B_R} \cap H_m^-) \oplus [0,R]\{u_\varepsilon\}\right]$$

e $\rho > 0$ *é como na Proposição 4.2.*

Demonstração. Afirmamos que $\lim\limits_{m\to\infty} \max\limits_{v \in H_m^-} J(v) = 0$.

De fato, como

$$\begin{aligned}
\|e_i^m\|_{H_0^1}^2 - \|e_i\|_{H_0^1}^2 &= \int_\Omega |\nabla e_i^m|^2 dx - \int_\Omega |\nabla e_i|^2 dx \\
&= \int_\Omega |\nabla(\zeta_m e_i)|^2 dx - \int_\Omega |\nabla e_i|^2 dx \\
&= \int_\Omega |\zeta_m \nabla e_i + e_i \nabla \zeta_m|^2 dx - \int_\Omega |\nabla e_i|^2 dx \\
&= \int_\Omega \zeta_m^2 |\nabla e_i|^2 dx + 2\int_\Omega \zeta_m e_i \nabla e_i \nabla \zeta_m dx + \int_\Omega e_i^2 |\nabla \zeta_m|^2 dx - \int_\Omega |\nabla e_i|^2 dx.
\end{aligned}$$

Da igualdade acima, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue que

$$\begin{aligned}
\|e_i^m\|_{H_0^1}^2 - \|e_i\|_{H_0^1}^2 \leq &\int_\Omega |\zeta_m|^2 |\nabla e_i|^2 dx + 2\int_\Omega |\zeta_m||e_i||\nabla e_i||\nabla \zeta_m| dx \\
&+ \int_\Omega |e_i|^2 |\nabla \zeta_m|^2 dx - \int_\Omega |\nabla e_i|^2 dx. \qquad (4.67)
\end{aligned}$$

Como $|\zeta_m| \leq 1$ em Ω, da desigualdade (4.67), temos que

$$\begin{aligned}
\|e_i^m\|_{H_0^1}^2 - \|e_i\|_{H_0^1}^2 \leq &\int_\Omega |\nabla e_i|^2 dx + 2\int_\Omega |e_i||\nabla e_i||\nabla \zeta_m| dx \\
&+ \int_\Omega |e_i|^2 |\nabla \zeta_m|^2 dx - \int_\Omega |\nabla e_i|^2 dx.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\|e_i^m\|_{H_0^1}^2 - \|e_i\|_{H_0^1}^2 \leq 2\int_\Omega |e_i||\nabla e_i||\nabla \zeta_m| dx + \int_\Omega |e_i|^2 |\nabla \zeta_m|^2 dx.$$

Agora, na desigualdade acima, pela definição da função ζ_m, segue que

$$\|e_i^m\|_{H_0^1}^2 - \|e_i\|_{H_0^1}^2 \leq 2\int_{A_m} |e_i||\nabla e_i||\nabla \zeta_m| dx + \int_{A_m} |e_i|^2 |\nabla \zeta_m|^2 dx.$$

Sobre A_m temos que $|\nabla\zeta_m| = m$, assim

$$\|e_i^m\|_{H_0^1}^2 - \|e_i\|_{H_0^1}^2 \leq 2m\int_{A_m}|e_i||\nabla e_i|dx + m^2\int_{A_m}|e_i|^2dx. \tag{4.68}$$

Vamos estimar cada integral do lado direito da desigualdade (4.68).

($1^{\underline{o}}$) Estimativa de $2m\displaystyle\int_{A_m}|e_i||\nabla e_i|dx$.

Como $e_i \in C^\infty(\Omega)$, então $|\nabla e_i| \in C^\infty(\Omega)$, logo e_i e $|\nabla e_i|$ são limitadas em $\overline{B}_{2/m}$, assim

$$\begin{aligned} |e_i| &\leq \|e_i\|_\infty\,, \\ |\nabla e_i| &\leq \|\nabla e_i\|_\infty\,. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} 2m\int_{A_m}|e_i||\nabla e_i|dx &= 2m\int_{\overline{A}_m}|e_i||\nabla e_i|dx \\ &\leq 2m\,\|e_i\|_\infty\,\|\nabla e_i\|_\infty\int_{\overline{A}_m}1dx \\ &= 2m\,\|e_i\|_\infty\,\|\nabla e_i\|_\infty\Big(med(B_{2/m}) - med(B_{1/m})\Big) \\ &\leq 2m\,\|e_i\|_\infty\,\|\nabla e_i\|_\infty\,med(B_{2/m}) \\ &= 2m\,\|e_i\|_\infty\,\|\nabla e_i\|_\infty\left(w_n\left(\frac{2}{m}\right)^n\right) \\ &= C_1\,\|e_i\|_\infty\,\|\nabla e_i\|_\infty\,m^{1-n}, \end{aligned}$$

onde w_n denota o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^n$ e $C_1 = 2^{n+1}w_n$.

($2^{\underline{o}}$) Estimativa de $m^2\displaystyle\int_{A_m}|e_i|^2dx$.

Analogamente à estimativa ($1^{\underline{o}}$), temos que $|e_i| \leq \|e_i\|_\infty$ em $\overline{B}_{2/m}$, então

$$\begin{aligned} m^2\int_{A_m}|e_i|^2dx &= m^2\int_{\overline{A}_m}|e_i|^2dx \\ &\leq m^2\,\|e_i\|_\infty^2\int_{\overline{A}_m}1dx \\ &= m^2\,\|e_i\|_\infty^2\Big(med(B_{2/m}) - med(B_{1/m})\Big) \\ &\leq m^2\,\|e_i\|_\infty^2\,med(B_{2/m}). \end{aligned}$$

Logo,

$$m^2\int_{A_m}|e_i|^2dx \leq m^2\,\|e_i\|_\infty^2\left(w_n\left(\frac{2}{m}\right)^n\right) = C_2\,\|e_i\|_\infty^2\,m^{2-n},$$

onde w_n denota o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^n$ e $C_2 = 2^n w_n$.

Substituindo as estimativas em (4.68), obtemos que

$$\|e_i^m\|_{H_0^1}^2 - \|e_i\|_{H_0^1}^2 \leq C_1 \|e_i\|_\infty \|\nabla e_i\|_\infty m^{1-n} + C_2 \|e_i\|_\infty^2 m^{2-n},$$

onde C_1 e C_2 são constantes positivas independentes de e_i.

Assim,

$$\|e_i^m\|_{H_0^1}^2 \leq \|e_i\|_{H_0^1}^2 + C_1 \|e_i\|_\infty \|\nabla e_i\|_\infty m^{1-n} + C_2 \|e_i\|_\infty^2 m^{2-n}. \tag{4.69}$$

Como e_i é uma autofunção normalizada em $L^2(\Omega)$, pela Proposição 3.1, segue que

$$\|e_i\|_{H_0^1}^2 = \lambda_i \|e_i\|_{L^2}^2 = \lambda_i \cdot (1) = \lambda_i.$$

Logo, de (4.69), temos que

$$\|e_i^m\|_{H_0^1}^2 \leq \lambda_i + C_1 \|e_i\|_\infty \|\nabla e_i\|_\infty m^{1-n} + C_2 \|e_i\|_\infty^2 m^{2-n},$$

isto é,

$$\|e_i^m\|_{H_0^1}^2 \leq \lambda_i + o_m(1), \tag{4.70}$$

onde $C_1 \|e_i\|_\infty \|\nabla e_i\|_\infty m^{1-n} + C_2 \|e_i\|_\infty^2 m^{2-n} = o_m(1)$, quando $m \to +\infty$.

Vamos estimar $\|v\|_{H_0^1}^2$.

Seja $v \in H_m^- = span\{e_i^m \, : \, i = 1, ..., k\}$, então $v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i^m$.

Além disso,

$$\nabla v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \nabla e_i^m.$$

Logo,

$$\|v\|_{H_0^1}^2 = \int_\Omega |\nabla v|^2 dx = \int_\Omega \nabla v \nabla v dx = \int_\Omega \langle \nabla v, \nabla v \rangle_{\mathbb{R}^n} dx,$$

então,

$$\begin{aligned}
\|v\|_{H_0^1}^2 &= \int_\Omega \langle \alpha_1 \nabla e_1^m + ... + \alpha_k \nabla e_k^m, \alpha_1 \nabla e_1^m + ... + \alpha_k \nabla e_k^m \rangle_{\mathbb{R}^n} dx \\
&= \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 \nabla e_i^m \nabla e_i^m + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq k} \alpha_i \alpha_j \nabla e_i^m \nabla e_j^m \right) dx \\
&= \sum_{i=1}^{k} \left(\alpha_i^2 \int_\Omega |\nabla e_i^m|^2 dx \right) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq k} \left(\alpha_i \alpha_j \int_\Omega \nabla e_i^m \nabla e_j^m dx \right) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \left(\alpha_i^2 \|e_i^m\|_{H_0^1}^2 \right) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq k} \left(\alpha_i \alpha_j \langle e_i^m, e_j^m \rangle_{H_0^1} \right).
\end{aligned} \tag{4.71}$$

Em (4.71), vamos estimar $\langle e_i^m, e_j^m \rangle_{H_0^1} = \int_\Omega \nabla e_i^m \nabla e_j^m dx$.

Como
$$\langle e_i^m, e_j^m\rangle_{H_0^1} = \int_\Omega \nabla e_i^m \nabla e_j^m dx = \int_\Omega \langle \nabla(\zeta_m e_i), \nabla(\zeta_m e_j)\rangle_{\mathbb{R}^n} dx.$$
Então,
$$\langle e_i^m, e_j^m\rangle_{H_0^1} = \int_\Omega \langle e_i \nabla\zeta_m + \zeta_m \nabla e_i, e_j\nabla\zeta_m + \zeta_m \nabla e_j\rangle_{\mathbb{R}^n} dx.$$
Logo,
$$\begin{aligned}\langle e_i^m, e_j^m\rangle_{H_0^1} &= \int_\Omega e_i e_j |\nabla\zeta_m|^2 dx + \int_\Omega \zeta_m e_i \nabla\zeta_m \nabla e_j dx + \int_\Omega \zeta_m e_j \nabla e_i \nabla\zeta_m dx \\ &+ \int_\Omega |\zeta_m|^2 \nabla e_i \nabla e_j dx.\end{aligned}$$
Pela definição de ζ_m, da igualdade acima, temos que
$$\begin{aligned}\langle e_i^m, e_j^m\rangle_{H_0^1} &= \int_{A_m} e_i e_j |\nabla\zeta_m|^2 dx + \int_{A_m} \zeta_m e_i \nabla\zeta_m \nabla e_j dx + \int_{A_m} \zeta_m e_j \nabla e_i \nabla\zeta_m dx \\ &+ \int_\Omega |\zeta_m|^2 \nabla e_i \nabla e_j dx. \qquad (4.72)\end{aligned}$$
De (4.72), pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue que
$$\begin{aligned}\langle e_i^m, e_j^m\rangle_{H_0^1} &\leq \int_{A_m} |e_i||e_j||\nabla\zeta_m|^2 dx + \int_{A_m} |\zeta_m||e_i||\nabla\zeta_m||\nabla e_j| dx \\ &+ \int_{A_m} |\zeta_m||e_j||\nabla e_i||\nabla\zeta_m| dx + \int_\Omega |\zeta_m|^2 \nabla e_i \nabla e_j dx.\end{aligned}$$
Como $|\zeta_m| \leq 1$ em Ω e $|\nabla\zeta_m| = m$ sobre A_m, da desigualdade acima, temos
$$\begin{aligned}\langle e_i^m, e_j^m\rangle_{H_0^1} &\leq m^2 \int_{A_m} |e_i||e_j| dx + m\int_{A_m} |e_i||\nabla e_j| dx \\ &+ m\int_{A_m} |e_j||\nabla e_i| dx + \int_\Omega \nabla e_i \nabla e_j dx. \qquad (4.73)\end{aligned}$$
Pela Proposição 3.1, $\langle e_i, e_j\rangle_{H_0^1} = \displaystyle\int_\Omega \nabla e_i \nabla e_j dx = 0$, logo de (4.73), segue que
$$\langle e_i^m, e_j^m\rangle_{H_0^1} \leq m^2 \int_{A_m} |e_i||e_j| dx + m\int_{A_m} |e_i||\nabla e_j| dx + m\int_{A_m} |e_j||\nabla e_i| dx.$$
Seguindo o argumento feito no início da Proposição, da desigualdade acima, temos que
$$\begin{aligned}\langle e_i^m, e_j^m\rangle_{H_0^1} &\leq m^2 \cdot w_n \left(\frac{2}{m}\right)^n \|e_i\|_\infty \|e_j\|_\infty + m\cdot w_n \left(\frac{2}{m}\right)^n \|e_i\|_\infty \|\nabla e_j\|_\infty \\ &+ m\cdot w_n \left(\frac{2}{m}\right)^n \|e_j\|_\infty \|\nabla e_i\|_\infty,\end{aligned}$$
onde w_n denota o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^n$.

Assim,
$$\begin{aligned}\langle e_i^m, e_j^m\rangle_{H_0^1} &\leq c\cdot m^{2-n} \|e_i\|_\infty \|e_j\|_\infty + c\cdot m^{1-n} \|e_i\|_\infty \|\nabla e_j\|_\infty \\ &+ c\cdot m^{1-n} \|e_j\|_\infty \|\nabla e_i\|_\infty,\end{aligned}$$

onde $c = 2^n w_n$.

Portanto,

$$\langle e_i^m, e_j^m \rangle_{H_0^1} \leq o_m(1). \tag{4.74}$$

De (4.71), utilizando as estimativas (4.70) e (4.74), temos

$$\begin{aligned}
\|v\|_{H_0^1}^2 &= \sum_{i=1}^{k} \left(\alpha_i^2 \, \|e_i^m\|_{H_0^1}^2 \right) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq k} \left(\alpha_i \alpha_j \langle e_i^m, e_j^m \rangle_{H_0^1} \right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} \left(\alpha_i^2 \cdot (\lambda_i + o_m(1)) \right) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq k} \left(\alpha_i \alpha_j \cdot (o_m(1)) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 \cdot \lambda_i + o_m(1).
\end{aligned}$$

Como $\lambda_1 < \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_k \leq \lambda_{k+1} \leq ...$, da desigualdade acima, segue que

$$\|v\|_{H_0^1}^2 \leq \lambda_k \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 + o_m(1). \tag{4.75}$$

Agora, vamos estimar $\|v\|_{L^2}^2$.

Para $v \in H_m^- = span\{e_i^m \, : \, i = 1, ..., k\}$, então $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i^m$.

Logo,

$$\|v\|_{L^2}^2 = \int_\Omega |v|^2 dx = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i^m \right) \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i^m \right) dx$$

Então,

$$\begin{aligned}
\|v\|_{L^2}^2 &= \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 e_i^m e_i^m + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq k} \alpha_i \alpha_j e_i^m e_j^m \right) dx \\
&= \sum_{i=1}^{k} \left(\alpha_i^2 \int_\Omega |e_i^m|^2 dx \right) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq k} \left(\alpha_i \alpha_j \int_\Omega e_i^m e_j^m dx \right) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \left(\alpha_i^2 \, \|e_i^m\|_{L^2}^2 \right) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq k} \left(\alpha_i \alpha_j \langle e_i^m, e_j^m \rangle_{L^2} \right).
\end{aligned} \tag{4.76}$$

Uma vez que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, temos que

$$0 \leq \|e_i^m - e_i\|_{L^2} \leq c \, \|e_i^m - e_i\|_{H_0^1}, \ \text{ para algum } \ c > 0.$$

Pelo Lema 4.2, segue que $e_i^m \to e_i$ em $H_0^1(\Omega)$ para $i = 1, ..., k$, quando $m \to +\infty$.

Então, da desigualdade acima, temos

$$e_i^m \to e_i \ \text{ em } \ L^2(\Omega). \tag{4.77}$$

Assim,

$$\|e_i^m\|_{L^2} \to \|e_i\|_{L^2} = 1. \tag{4.78}$$

Para $1 \leq i < j \leq k$, vemos que

$$\begin{aligned}
|\langle e_i^m, e_j^m\rangle_{L^2} - \langle e_i, e_j\rangle_{L^2}| &= |\langle e_i^m, e_j^m\rangle_{L^2} - \langle e_i^m, e_j\rangle_{L^2} + \langle e_i^m, e_j\rangle_{L^2} - \langle e_i, e_j\rangle_{L^2}| \\
&= |\langle e_i^m, e_j^m - e_j\rangle_{L^2} + \langle e_i^m - e_i, e_j\rangle_{L^2}| \\
&\leq |\langle e_i^m, e_j^m - e_j\rangle_{L^2}| + |\langle e_i^m - e_i, e_j\rangle_{L^2}| \\
&\leq \|e_i^m\|_{L^2} \left\|e_j^m - e_j\right\|_{L^2} + \|e_i^m - e_i\|_{L^2} \|e_j\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Da desigualdade acima, como $\|e_j\|_{L^2} = 1$ e utilizando (4.77) e (4.78), temos que

$$\langle e_i^m, e_j^m\rangle_{L^2} \to \langle e_i, e_j\rangle_{L^2}, \quad \text{quando } m \to +\infty.$$

Assim, pela Proposição 3.1, segue que

$$\langle e_i^m, e_j^m\rangle_{L^2} \to \langle e_i, e_j\rangle_{L^2} = 0, \quad \text{quando } m \to +\infty. \tag{4.79}$$

Logo, de (4.76), utilizando (4.78) e (4.79), temos

$$\|v\|_{L^2}^2 = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2.$$

Por (4.75) e da igualdade acima, segue que

$$\|v\|_{H_0^1}^2 \leq \lambda_k \|v\|_{L^2}^2 + o_m(1). \tag{4.80}$$

Como

$$J(v) = \frac{1}{2}\|v\|_{H_0^1}^2 - \int_\Omega G(x,v)dx - \frac{1}{2^*}\|v\|_{L^{2^*}}^{2^*},$$

utilizando a estimativa (4.80) e a condição (3.6), temos que

$$\begin{aligned}
J(v) &= \frac{1}{2}\|v\|_{H_0^1}^2 - \int_\Omega G(x,v)dx - \frac{1}{2^*}\|v\|_{L^{2^*}}^{2^*} \\
&\leq \frac{1}{2}\lambda_k \|v\|_{L^2}^2 + o_m(1) + \int_\Omega \left[-\frac{1}{2}(\lambda_k + \sigma)v^2 + \frac{1}{2^*}|v|^{2^*}\right] dx - \frac{1}{2^*}\|v\|_{L^{2^*}}^{2^*} \\
&= \frac{1}{2}\lambda_k \|v\|_{L^2}^2 + o_m(1) - \frac{1}{2}(\lambda_k + \sigma)\int_\Omega |v|^2 dx + \frac{1}{2^*}\int_\Omega |v|^{2^*} dx - \frac{1}{2^*}\|v\|_{L^{2^*}}^{2^*} \\
&= \frac{1}{2}\lambda_k \|v\|_{L^2}^2 + o_m(1) - \frac{1}{2}(\lambda_k + \sigma)\|v\|_{L^2}^2 \\
&= -\frac{\sigma}{2}\|v\|_{L^2}^2 + o_m(1) \leq o_m(1).
\end{aligned}$$

Como $J(0) = 0$, então $0 \leq \max\limits_{v \in H_m^-} J(v) \leq o_m(1)$.

Assim,

$$\lim_{m \to +\infty} \max_{v \in H_m^-} J(v) = 0.$$

Então, a afirmação é comprovada.

Se denotamos $w_m = \max\limits_{v \in H_m^-} J(v)$, então para todo $v \in H_m^-$ temos que

$$J(v) \leq w_m \quad \text{com} \quad w_m \to 0, \quad \text{quando} \quad m \to +\infty. \tag{4.81}$$

Para $0 \leq r \leq R$ temos que

$$J(ru_\varepsilon) = \frac{1}{2} \|ru_\varepsilon\|_{H_0^1}^2 - \int_\Omega G(x, ru_\varepsilon)dx - \frac{1}{2^*} \|ru_\varepsilon\|_{L^{2^*}}^{2^*}.$$

Pela condição (3.4), obtemos

$$J(ru_\varepsilon) \leq \frac{1}{2} r^2 \|u_\varepsilon\|_{H_0^1}^2 - \frac{1}{2^*} r^{2^*} \|u_\varepsilon\|_{L^{2^*}}^{2^*}.$$

Se $r = R$, pelas estimativas de Brezis-Nirenberg [7] para $\varepsilon \approx 0$, da desigualdade acima, segue que

$$\begin{aligned} J(Ru_\varepsilon) &\leq \frac{1}{2} R^2 \|u_\varepsilon\|_{H_0^1}^2 - \frac{1}{2^*} R^{2^*} \|u_\varepsilon\|_{L^{2^*}}^{2^*} \\ &= \frac{1}{2} R^2 \left(S^{n/2} + O(\varepsilon^{n-2})\right) - \frac{1}{2^*} R^{2^*} \left(S^{n/2} + O(\varepsilon^n)\right) \\ &= \frac{1}{2} R^2 S^{n/2} - \frac{1}{2^*} R^{2^*} S^{n/2} + \frac{1}{2} R^2 O(\varepsilon^{n-2}) - \frac{1}{2^*} R^{2^*} O(\varepsilon^n). \end{aligned}$$

Sabemos que existe R suficientemente grande tal que

$$J(Ru_\varepsilon) < 0. \tag{4.82}$$

Note que $\partial Q_m^\varepsilon = H_m^- \cup (H_m^- \oplus R\{u_\varepsilon\}) \cup \left[(\partial \overline{B_R} \cap H_m^-) \oplus [0, R]\{u_\varepsilon\}\right]$.

Seja $\Gamma_1 := H_m^- \cup (H_m^- \oplus R\{u_\varepsilon\})$.

Se $v \in H_m^-$, de (4.81), temos que $J(v) \leq w_m$. Por outro lado, se $v \in H_m^- \oplus R\{u_\varepsilon\}$, então $v = w + Ru_\varepsilon$, com $w \in H_m^-$. Assim, pela Proposição 3.3 e de (4.82), temos que

$$J(v) = J(w + Ru_\varepsilon) = J(w) + J(Ru_\varepsilon) \leq w_m.$$

Para $0 < r < R$, como R foi escolhido suficientemente grande, segue que

$$\begin{aligned} J(ru_\varepsilon) &\leq \frac{1}{2} r^2 \|u_\varepsilon\|_{H_0^1}^2 - \frac{1}{2^*} r^{2^*} \|u_\varepsilon\|_{L^{2^*}}^{2^*} \\ &\leq \frac{1}{2} r^2 \|u_\varepsilon\|_{H_0^1}^2 + \frac{1}{2^*} r^{2^*} \|u_\varepsilon\|_{L^{2^*}}^{2^*} \\ &\leq \frac{1}{2} R^2 \|u_\varepsilon\|_{H_0^1}^2 + \frac{1}{2^*} R^{2^*} \|u_\varepsilon\|_{L^{2^*}}^{2^*} \\ &\leq M, \end{aligned}$$

onde $M > 0$.

Assim, existe $M > 0$ tal que se $0 < r < R$, temos $J(ru_\varepsilon) \leq M$.

Portanto,

$$\max_{0 \leq r \leq R} J(ru_\varepsilon) \leq M. \tag{4.83}$$

Seja $\Gamma_2 := \left[(\partial \overline{B_R} \cap H_m^-) \oplus [0, R]\{u_\varepsilon\}\right]$. Se $v \in \Gamma_2$, então $v = w + \alpha u_\varepsilon$, com $w \in \partial \overline{B_R} \cap H_m^-$ e $0 \leq \alpha \leq R$. Logo, pela Proposição 3.3 e por (4.83), temos que

$$J(v) = J(w + \alpha u_\varepsilon) = J(w) + J(\alpha u_\varepsilon) \leq J(w) + M. \tag{4.84}$$

Como $w \in \partial \overline{B_R} \cap H_m^-$, então $w \in \partial \overline{B_R}$ e $w \in H_m^-$.

Logo,

$$\|w\|_{L^2} = \left(\int_\Omega |w|^2 dx\right)^{1/2} = R \quad \text{e} \quad \frac{w}{\|w\|_{L^2}} \in H_m^- \quad \text{com} \quad \left\| \frac{w}{\|w\|_{L^2}} \right\|_{L^2} = 1. \tag{4.85}$$

Assim, pelo Lema 4.2, segue que

$$\left\| \frac{w}{\|w\|_{L^2}} \right\|_{H_0^1}^2 \leq \max_{\{u \in H_m^- \ ; \ \|u\|_{L^2}^2 = \int_\Omega u^2 dx = 1\}} \|u\|_{H_0^1}^2 \leq \lambda_k + c_k m^{2-n},$$

implicando

$$\|w\|_{H_0^1}^2 \leq \lambda_k \|w\|_{L^2}^2, \ \text{ quando } \ m \to +\infty. \tag{4.86}$$

Como $L^{2^*}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, então

$$\|w\|_{H_0^1}^2 \leq \lambda_k \|w\|_{L^2}^2 \leq \lambda_k C_0 \|w\|_{L^{2^*}}^2,$$

onde C_0 é uma constante positiva.

Assim,

$$\|w\|_{H_0^1}^2 \leq C \|w\|_{L^{2^*}}^2,$$

onde $C = \lambda_k C_0$ é uma constante positiva.

Logo,

$$\begin{aligned} \|w\|_{H_0^1} \leq C^{1/2} \|w\|_{L^{2^*}} \quad &\Rightarrow \quad -\|w\|_{H_0^1}^{2^*} \geq -(C)^{2^*/2} \|w\|_{L^{2^*}}^{2^*} \\ &\Rightarrow \quad -(C)^{-2^*/2} \|w\|_{H_0^1}^{2^*} \geq -\|w\|_{L^{2^*}}^{2^*}. \end{aligned}$$

Pela condição (3.4) e da desigualdade acima, segue que

$$\begin{aligned} J(w) &\leq \frac{1}{2} \|w\|_{H_0^1}^2 - \frac{1}{2^*} \|w\|_{L^{2^*}}^{2^*} \\ &\leq \frac{1}{2} \|w\|_{H_0^1}^2 - \frac{1}{2^*} (C)^{-2^*/2} \|w\|_{H_0^1}^{2^*} \\ &= \frac{1}{2} \|w\|_{H_0^1}^2 - \frac{1}{2^*} \cdot \frac{1}{C_1} \|w\|_{H_0^1}^{2^*}, \end{aligned} \tag{4.87}$$

onde $C_1 = (C)^{2^*/2}$.

Por (4.85) e (4.86), temos que

$$\|w\|^2_{H^1_0} \leq C' R^2, \tag{4.88}$$

com $C' = \lambda_k$.

Como $H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ (pelo Teorema 2.13), então existe $k > 0$ tal que

$$\|w\|_{L^2} \leq k \|w\|_{H^1_0}, \ \ \forall\, w \in H^1_0(\Omega).$$

Assim,

$$\|w\|^{2^*}_{L^2} \leq k^{2^*} \|w\|^{2^*}_{H^1_0} \ \ \Rightarrow \ \ -\left(\frac{1}{k}\right)^{2^*} \|w\|^{2^*}_{L^2} \geq - \|w\|^{2^*}_{H^1_0}. \tag{4.89}$$

Substituindo (4.88) e (4.89) em (4.87), temos que

$$\begin{aligned} J(w) &\leq \frac{1}{2} C' R^2 - \frac{1}{2^*} \cdot \frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{k}\right)^{2^*} R^{2^*} \\ &= \frac{1}{2} C' R^2 - \frac{1}{2^*} \cdot C_2 R^{2^*}, \end{aligned}$$

com $C_2 = \dfrac{1}{C_1}\left(\dfrac{1}{k}\right)^{2^*}$.

Então,

$$J(w) + M \leq \frac{1}{2} C' R^2 - \frac{1}{2^*} \cdot C_2 R^{2^*} + M. \tag{4.90}$$

Seja $f(R) = \dfrac{1}{2} C' R^2 - \dfrac{1}{2^*} \cdot C_2 R^{2^*} + M$, note que para R suficientemente grande, temos que $f(R) = \dfrac{1}{2} C' R^2 - \dfrac{1}{2^*} \cdot C_2 R^{2^*} + M < 0$. Assim, de (4.90), segue que

$$J(w) + M < 0 \tag{4.91}$$

Substituindo (4.91) em (4.84), para cada $v \in \Gamma_2$, temos que

$$J(v) = J(w + \alpha u_\varepsilon) = J(w) + J(\alpha u_\varepsilon) \leq J(w) + M < 0 \leq w_m.$$

Assim, $J(w) \leq w_m$ com $w_m \to 0$, quando $m \to +\infty$.

Portanto, $\max\limits_{v \in \partial Q^\varepsilon_m} J(v) \leq w_m$. □

Proposição 4.4. *Para m suficientemente grande, temos*

$$P_k(H^-_m) = H^- \quad e \quad H^-_m \oplus H^+ = H^1_0(\Omega),$$

onde $P_k : H^1_0(\Omega) \longrightarrow H^-$ é o operador projeção ortogonal definido no início da Seção 4.1.

Demonstração. Pelo Lema 4.2 temos que $e^m_i \to e_i$ em $H^1_0(\Omega)$, para $i = 1 \ldots, k$. Como o operador projeção ortogonal P_k é contínuo, segue que $P_k(e_i^m) \to P_k(e_i) = e_i$, quando $m \to \infty$.

Assim, obtemos que $P_k(H_m^-) \subseteq P_k(H_0^1(\Omega)) = H^-$. Logo, basta mostrar que, para m suficientemente grande,

$$P_k(H_m^-) = H^-.$$

Para isto, só precisamos provar que $\{P_k(e_i^m)\}_{i=1}^k$ é um conjunto linearmente independente quando m é grande.

Suponha por contradição que existe $(\alpha_1^m, \ldots, \alpha_k^m) \neq (0, \ldots, 0)$ tal que

$$\alpha_1^m P_k(e_1^m) + \ldots + \alpha_k^m P_k(e_k^m) = 0.$$

Normalizando o vetor $(\alpha_1^m, \ldots, \alpha_k^m) \neq (0, \ldots, 0)$, podemos supor que $(\alpha_1^m)^2 + \ldots + (\alpha_k^m)^2 = 1$ e assim, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass obter uma subseqüência $(\alpha_1^{m_j}, \ldots, \alpha_k^{m_j})$ convergente para $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$.

Logo,

$$0 = \alpha_1^{m_j} P_k(e_1^{m_j}) + \ldots + \alpha_k^{m_j} P_k(e_k^{m_j}).$$

Passando o limite na igualdade acima, quando $m_j \to +\infty$, e pela continuidade do operador projeção ortogonal, obtemos

$$0 = \alpha_1 P_k(e_1) + \ldots + \alpha_k P_k(e_k) = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_k e_k,$$

isto é,

$$\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_k e_k = 0 \quad \text{com} \quad \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_k^2 = 1,$$

o que é uma contradição, pois $\{e_i\}_{i=1}^k$ é uma base de H^-.

Portanto, obtemos que $P_k(H_m^-) = H^-$, assim,

$$H_m^- \oplus H^+ = H_0^1(\Omega),$$

para m suficientemente grande. $\square$

Observação 4.1. A Proposição 4.4 garante que $\partial B_\rho \cap H^+$ e ∂Q_m^ε se enlaçam (ver [15]).

Observação 4.2. Das Proposições 4.2, 4.3, 4.4 e da Observação 4.1, concluímos que o funcional J satisfaz a geometria do Teorema de Linking (Teorema 2.20).

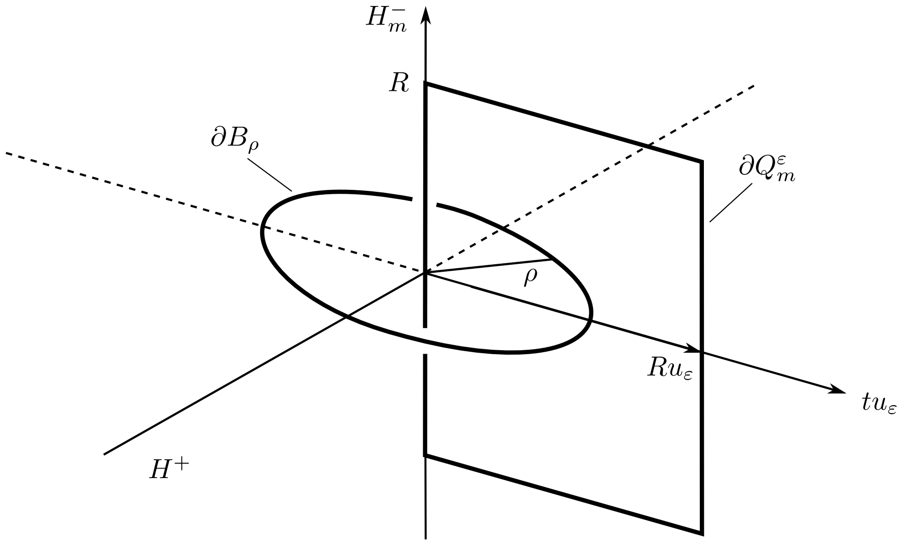

Figura 5 – Geometria de Linking para a decomposição do espaço $H_0^1(\Omega) = H_m^- \oplus H^+$, quando m é suficientemente grande.

5 EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO NO CASO DE NÃO RESSONÂNCIA PERTO DA ORIGEM

Este e o próximo capítulo são dedicados à construção de uma seqüência PS no nível minimax $c < \frac{S^{n/2}}{n}$, que pelo Lema 4.1, produzem uma solução não trivial da equação (3.1).

Vamos proceder da seguinte forma:

Seja $\Gamma := \{h \in C(\overline{Q^\varepsilon_m}, H) \ : \ h(v) = v, \ \forall\, v \in \partial Q^\varepsilon_m\}$, onde Q^ε_m é como na Proposição 4.3. Pelas Proposições 4.2, 4.3, 4.4 e da Observação 4.1, concluímos que o funcional J satisfaz as condições geométricas do Teorema de Linking sem a condição (PS) (Teorema 2.22), assim, obtemos uma seqüência PS para J no nível

$$c = \inf_{h\in\Gamma} \max_{v\in Q^\varepsilon_m} J(h(v)),$$

onde a seqüência PS é da forma dada na Proposição 4.3.

Além disso, como a identidade $id \in \Gamma$, temos que

$$c \leq \max_{v\in Q^\varepsilon_m} J(v).$$

O objetivo principal desse capítulo é provar que para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno

$$\sup_{v\in Q^\varepsilon_m} J(v) < \frac{1}{n} S^{n/2}. \tag{5.1}$$

Vamos iniciar com o seguinte resultado.

Lema 5.1. *Assuma as hipóteses (3.5) e (3.6), e escolha m suficientemente grande tal que*

$$c_k m^{2-n} < \sigma, \tag{5.2}$$

onde c_k é como no Lema 4.2, e $\sigma > 0$ é como em (3.5). Suponha também que, para cada $\varepsilon > 0$, nós temos que

$$\sup_{v\in Q^\varepsilon_m} J(v) \geq \frac{1}{n} S^{n/2}. \tag{5.3}$$

Então, existem $t_\varepsilon \geq 0$ e $w_\varepsilon \in H^-_m$ tais que

$$J(w_\varepsilon) \leq 0,$$

onde $supp(u_\varepsilon) \cap supp(w_\varepsilon) = \emptyset$ e (u_ε) é a seqüência de funções definida em (4.59).

Demonstração. Considere o conjunto $X := \{v \in Q^\varepsilon_m \ : \ J(v) \geq 0\}$. Note que o conjunto Q^ε_m é compacto, pois se $Y := H^-_m \oplus \langle u_\varepsilon\rangle$, temos que $dim\, Y < +\infty$ e $Q^\varepsilon_m \subset Y$ é fechado e limitado, então Q^ε_m é compacto em Y.

Afirmação: O conjunto $X := \{v \in Q_m^\varepsilon \ : \ J(v) \geq 0\}$ é compacto.

De fato, sejam $(v_j) \subset X$ uma seqüência e $v \in Q_m^\varepsilon$ tais que $v_j \to v$ em $H_0^1(\Omega)$, quando $j \to \infty$.
Pela continuidade de J, temos que

$$J(v_j) \to J(v) \ \text{ em } \mathbb{R}, \ \text{ quando } \ j \to \infty. \tag{5.4}$$

Como $v_j \in X,$ para todo $j \in \mathbb{N}$; então

$$J(v_j) \geq 0, \ \text{para todo } j \in \mathbb{N}. \tag{5.5}$$

Logo, passando (5.5) ao limite, obtemos que

$$\lim_{j \to \infty} J(v_j) \geq 0. \tag{5.6}$$

De (5.4) e (5.6), temos que

$$J(v) \geq 0.$$

Assim,

$$v \in X$$

e portanto, o conjunto X é compacto.

Como o funcional J é contínuo, seu máximo sobre o conjunto Q_m^ε é atingido. Assim, para todo $\varepsilon > 0$, existe $v_\varepsilon \in Q_m^\varepsilon$ tal que

$$J(v_\varepsilon) = \max_{v \in Q_m^\varepsilon} J(v).$$

Pela hipótese (5.3), temos que

$$J(v_\varepsilon) = \max_{v \in Q_m^\varepsilon} J(v) \geq \frac{1}{n} S^{n/2}.$$

Além disso, pela definição do conjunto Q_m^ε, existem $t_\varepsilon \geq 0$ e $w_\varepsilon \in \overline{B_R} \cap H_m^-$ tais que

$$v_\varepsilon = w_\varepsilon + t_\varepsilon u_\varepsilon,$$

onde $supp(u_\varepsilon) \cap supp(w_\varepsilon) = \emptyset$.

Assim,

$$J(v_\varepsilon) = \frac{1}{2} \|v_\varepsilon\|_{H_0^1}^2 - \int_\Omega G(x, v_\varepsilon) dx - \frac{1}{2^*} \|v_\varepsilon\|_{L^{2^*}}^{2^*} \geq \frac{1}{n} S^{n/2} \ , \ \forall \varepsilon > 0. \tag{5.7}$$

Como $(t_\varepsilon) \subset [0, R]$ e $w_\varepsilon \in \overline{B_R} \cap H_m^-$, onde H_m^- tem dimensão finita, existem subseqüências das seqüências (t_ε) e (w_ε), ainda denotada da mesma forma, tais que

$$t_\varepsilon \to t_0 \geq 0 \quad \text{e} \quad w_\varepsilon \to w_0 \ \text{ na norma de } \ H_0^1(\Omega) \ (w_0 \in H_m^-), \ \text{ quando } \varepsilon \to 0.$$

Note que a convergência de (w_ε) pode ser vista em qualquer norma (por exemplo na norma de $L^2(\Omega)$), uma vez que o espaço H_m^- é de dimensão finita.

Como $w_\varepsilon \in H_m^-$, usando o Lema 4.2, temos

$$\left\| \frac{w_\varepsilon}{\|w_\varepsilon\|_{L^2}} \right\|_{H_0^1}^2 \leq \max_{\{u \in H_m^- \ : \ |u|_{L^2}^2 = \int_\Omega u^2 dx = 1\}} \|u\|_{H_0^1}^2 \leq \lambda_k + c_k m^{2-n},$$

isto é,

$$\|w_\varepsilon\|_{H_0^1}^2 \leq \left(\lambda_k + c_k m^{2-n}\right) \|w_\varepsilon\|_{L^2}^2 . \tag{5.8}$$

Utilizando a hipótese (3.6), obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega G(x, w_\varepsilon) dx &\geq \int_\Omega \left(\frac{1}{2}(\lambda_k + \sigma) |w_\varepsilon|^2 - \frac{1}{2^*} |w_\varepsilon|^{2^*} \right) dx \\
&= \frac{1}{2}(\lambda_k + \sigma) \int_\Omega |w_\varepsilon|^2 dx - \frac{1}{2^*} \int_\Omega |w_\varepsilon|^{2^*} dx \\
&= \frac{1}{2}(\lambda_k + \sigma) \|w_\varepsilon\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2^*} \|w_\varepsilon\|_{L^{2^*}}^{2^*} .
\end{aligned}$$

Logo,

$$-\int_\Omega G(x, w_\varepsilon) dx - \frac{1}{2^*} \|w_\varepsilon\|_{L^{2^*}}^{2^*} \leq -\frac{1}{2}(\lambda_k + \sigma) \|w_\varepsilon\|_{L^2}^2 .$$

De (5.8) e da desigualdade acima, temos que

$$\begin{aligned}
J(w_\varepsilon) &= \frac{1}{2} \|w_\varepsilon\|_{H_0^1}^2 - \int_\Omega G(x, w_\varepsilon) dx - \frac{1}{2^*} \|w_\varepsilon\|_{L^{2^*}}^{2^*} \\
&\leq \frac{1}{2} \left(\lambda_k + c_k m^{2-n}\right) \|w_\varepsilon\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2}(\lambda_k + \sigma) \|w_\varepsilon\|_{L^2}^2 \\
&= \frac{1}{2} \left(c_k m^{2-n} - \sigma\right) \|w_\varepsilon\|_{L^2}^2 .
\end{aligned}$$

Agora, pela hipótese (5.2), segue que, para m suficientemente grande,

$$J(w_\varepsilon) \leq \frac{1}{2} \left(c_k m^{2-n} - \sigma\right) \|w_\varepsilon\|_{L^2}^2 \leq 0. \tag{5.9}$$

$\square$

Observação 5.1. Em relação à seqüência (t_ε) do Lema 5.1, podemos afirmar que $t_\varepsilon > C_0$ para algum $C_0 > 0$ e qualquer $\varepsilon > 0$ pequeno. De fato, suponha por contradição que para alguma seqüência $\varepsilon_k \to 0^+$ tenhamos $t_{\varepsilon_k} \to 0$, quando $k \to +\infty$. Então, pelo o que foi feito no Lema 5.1 o máximo no conjunto Q_m^ε é atingido pelo funcional J. Assim, podemos usar a Proposição 3.3 para obter

$$0 < \frac{1}{n} S^{n/2} \leq \max_{v \in Q_m^\varepsilon} J(v) = J(v_\varepsilon) = J(w_\varepsilon + t_\varepsilon u_\varepsilon) = J(w_\varepsilon) + J(t_\varepsilon u_\varepsilon) \leq J(t_\varepsilon u_\varepsilon),$$

que pela continuidade de J, segue que $J(t_\varepsilon u_\varepsilon) \to J(0) = 0$, o que é uma contradição.

Lema 5.2. *Suponha as mesmas hipóteses do Lema 5.1 e a condição (3.3), então* $t_0 = 1$.

Demonstração. Como fizemos no Lema 5.1, a estimativa (5.7) é válida.

Sejam $v_\varepsilon = w_\varepsilon + t_\varepsilon u_\varepsilon$ com $supp(u_\varepsilon) \cap supp(w_\varepsilon) = \emptyset$, e (t_ε) e (w_ε) as subseqüências convergentes que foram encontradas na prova do Lema 5.1.

Afirmação: $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega G(x, t_\varepsilon u_\varepsilon)dx = 0$.

De fato, pela definição de u_ε temos que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon = 0$. Além disso, a seqüência $(t_\varepsilon) \subset \mathbb{R}^+$ é limitada.

Pela condição (3.3), para $\varepsilon = 1$ existe $a_1 \in L^{\frac{2n}{n+2}}(\Omega)$ tal que

$$|g(x,s)| \leq a_1(x) + |s|^{\frac{n+2}{n-2}}, \quad \text{para } x \in \Omega \text{ q.t.p e } \forall\, s \in \mathbb{R}.$$

Assim, temos que

$$|G(x,s)| \leq \int_0^s |g(x,t)|dt \leq \int_0^s \left(a_1(x) + |t|^{\frac{n+2}{n-2}}\right) dt \leq a_1(x)|s| + \frac{1}{2^*}|s|^{2^*} \leq |a_1(x)||s| + \frac{1}{2^*}|s|^{2^*},$$

com $x \in \Omega$ q.t.p e $\forall\, s \in \mathbb{R}$.

Para $s = t_\varepsilon u_\varepsilon$, integrando a estimativa acima sobre Ω, segue que

$$0 \leq |\int_\Omega G(x, t_\varepsilon u_\varepsilon)dx| \leq \int_\Omega |G(x, t_\varepsilon u_\varepsilon)|dx \leq t_\varepsilon \int_\Omega |a_1(x)||u_\varepsilon|dx + \frac{1}{2^*} t_\varepsilon^{2^*} \int_\Omega |u_\varepsilon|^{2^*} dx.$$

Pelo Teorema 2.5 (Desigualdade de Hölder), com $p = \frac{2n}{n+2}$ e $q = 2^*$, da desigualdade acima segue que

$$0 \leq |\int_\Omega G(x, t_\varepsilon u_\varepsilon)dx| \leq t_\varepsilon \left\|a_1\right\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}} \left\|u_\varepsilon\right\|_{L^{2^*}} + \frac{1}{2^*} t_\varepsilon^{2^*} \left\|u_\varepsilon\right\|_{L^{2^*}}^{2^*},$$

onde $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}$.

Como $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon = 0$ e a seqüência $(t_\varepsilon) \subset \mathbb{R}^+$ é limitada, pela continuidade da norma $(\left\|\cdot\right\|_{L^{2^*}})$, segue que o lado direito da desigualdade acima converge para zero.

Portanto,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega G(x, t_\varepsilon u_\varepsilon)dx = 0.$$

Assim,

$$\int_\Omega G(x, t_\varepsilon u_\varepsilon)dx = o_\varepsilon(1), \quad \forall \varepsilon \leq \varepsilon_0, \tag{5.10}$$

onde ε_0 é fixo e é suficientemente pequeno.

Como $t_\varepsilon \to t_0$, quando $\varepsilon \to 0$; então $t_\varepsilon \approx t_0$, quando $\varepsilon \approx 0$,

assim, escrevemos

$$t_\varepsilon = t_0 + o_\varepsilon(1), \quad \text{quando } \varepsilon \approx 0. \tag{5.11}$$

Agora,

$$J(t_\varepsilon u_\varepsilon) = \frac{1}{2}t_\varepsilon^2 \|u_\varepsilon\|_{H_0^1}^2 - \int_\Omega G(x, t_\varepsilon u_\varepsilon)dx - \frac{1}{2^*}t_\varepsilon^{2^*} \|u_\varepsilon\|_{L^{2^*}}^{2^*}, \tag{5.12}$$

utilizando (5.10), (5.11) e as estimativas de Brezis-Nirenberg dadas em [7] para $\varepsilon \approx 0$, obtemos

$$J(t_\varepsilon u_\varepsilon) = \frac{1}{2}(t_0 + o_\varepsilon(1))^2 \left(S^{n/2} + O(\varepsilon^{n-2})\right) - o_\varepsilon(1) - \frac{1}{2^*}(t_0 + o_\varepsilon(1))^{2^*} \left(S^{n/2} + O(\varepsilon^n)\right).$$

Logo,

$$J(t_\varepsilon u_\varepsilon) = \frac{1}{2}\left(t_0^2 + o_\varepsilon(1)\right) \left(S^{n/2} + O(\varepsilon^{n-2})\right) - o_\varepsilon(1) - \frac{1}{2^*}\left(t_0^{2^*} + o_\varepsilon(1)\right) \left(S^{n/2} + O(\varepsilon^n)\right);$$

pois, $(t_0 + o_\varepsilon(1))^p = t_0^p + o_\varepsilon(1)$, para $p \geq 1$.

Assim,

$$J(t_\varepsilon u_\varepsilon) = \frac{1}{2}t_0^2 S^{n/2} + \frac{1}{2}t_0^2 O(\varepsilon^{n-2}) - o_\varepsilon(1) - \frac{1}{2^*}t_0^{2^*} S^{n/2} - \frac{1}{2^*}t_0^{2^*} O(\varepsilon^n).$$

Então,

$$J(t_\varepsilon u_\varepsilon) = S^{n/2}\left(\frac{t_0^2}{2} - \frac{t_0^{2^*}}{2^*}\right) + \frac{1}{2}t_0^2 O(\varepsilon^{n-2}) - \frac{1}{2^*}t_0^{2^*} O(\varepsilon^n) - o_\varepsilon(1).$$

Na igualdade acima é possível encontrar uma função $o(1)$ tal que

$$J(t_\varepsilon u_\varepsilon) \leq S^{n/2}\left(\frac{t_0^2}{2} - \frac{t_0^{2^*}}{2^*}\right) - |o(1)|. \tag{5.13}$$

Por outro lado, como $v_\varepsilon = w_\varepsilon + t_\varepsilon u_\varepsilon$ e $supp(u_\varepsilon) \cap supp(w_\varepsilon) = \emptyset$, utilizando as estimativas (5.9) e (5.13), segue que

$$J(v_\varepsilon) = J(w_\varepsilon) + J(t_\varepsilon u_\varepsilon) \leq S^{n/2}\left(\frac{t_0^2}{2} - \frac{t_0^{2^*}}{2^*}\right) - |o(1)|. \tag{5.14}$$

Definindo $\phi(x) := \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^{2^*}}{2^*}$ para $x \geq 0$, de (5.14), segue que

$$J(v_\varepsilon) \leq \phi(t_0) \cdot S^{n/2} - |o(1)|. \tag{5.15}$$

Para concluir, note que os pontos críticos da função ϕ são 0 e 1, como $\phi'(x) = x - x^{2^*-1}$ e $2^* - 1 > 1$, então:

i) Para $0 < x < 1$, temos que $x^{2^*-1} < x$, isto é, $\phi'(x) = x - x^{2^*-1} > 0$, portanto ϕ é uma função crescente em $(0, 1)$.

ii) Para $x > 1$, temos que $x < x^{2^*-1}$, isto é, $\phi'(x) = x - x^{2^*-1} < 0$, portanto ϕ é uma função decrescente em $(1, +\infty)$.

Além disso,

$$\phi(0) = 0, \quad \phi(1) = \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} \phi(x) = -\infty.$$

Logo, ϕ assume um valor máximo em $[0,+\infty)$ dado por $\max\limits_{x\geq 0}\phi(x)=\phi(1)=\dfrac{1}{n}$, e portanto,

$$\phi(x)<\frac{1}{n}\quad \forall x\geq 0,\ x\neq 1.$$

Assim, se $t_0\neq 1$, em (5.15), temos que

$$J(v_\varepsilon)\leq \phi(t_0)\cdot S^{n/2}-|o(1)|<\frac{1}{n}S^{n/2}-|o(1)|<\frac{1}{n}S^{n/2},$$

o que contradiz a hipótese (5.7). Portanto, $t_0=1$. □

Lema 5.3. *Sob as mesmas hipóteses do Lema 5.1, para $\varepsilon\to 0$, é válida a seguinte estimativa*

$$\frac{1}{2}\left\|t_\varepsilon u_\varepsilon\right\|^2_{H^1_0}-\frac{1}{2^*}\left\|t_\varepsilon u_\varepsilon\right\|^{2^*}_{L^{2^*}}\leq \frac{1}{n}S^{n/2}+O(\varepsilon^{n-2}).$$

Demonstração. Consideremos

$$a=\left\|u_\varepsilon\right\|^2_{H^1_0}\quad \text{e}\quad b=\left\|u_\varepsilon\right\|^{2^*}_{L^{2^*}}. \tag{5.16}$$

Definimos a função $\phi:[0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por

$$\phi(t)=\frac{1}{2}\,a\,t^2-\frac{1}{2^*}\,b\,t^{2^*}. \tag{5.17}$$

Como fizemos no Lema 5.2, encontraremos os extremos da função ϕ. Note que os pontos críticos da função ϕ são 0 e $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2^*-2}}$, como $\phi'(x)=a\,t-b\,t^{2^*-1}$ e $2^*>2$, então:

i) Para $0<t<\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2^*-2}}$, temos que $t^{2^*-2}<\dfrac{a}{b}$, logo $b\,t^{2^*-1}<a\,t$, isto é, $\phi'(x)=a\,t-b\,t^{2^*-1}>0$, portanto ϕ é uma função crescente em $\left(0,\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2^*-2}}\right)$.

ii) Para $t>\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2^*-2}}$, temos que $\dfrac{a}{b}<t^{2^*-2}$, logo $a\,t<b\,t^{2^*-1}$, isto é, $\phi'(x)=a\,t-b\,t^{2^*-1}<0$, portanto ϕ é uma função decrescente em $\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2^*-2}},+\infty\right)$.

Além disso,

$$\phi(0)=0,\qquad \phi\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2^*-2}}\right)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^*}\right)\frac{a^{\frac{2^*}{2^*-2}}}{b^{\frac{2}{2^*-2}}}=\frac{1}{n}\frac{a^{\frac{n}{2}}}{b^{\frac{n-2}{2}}}\quad \text{e}\quad \lim_{x\to+\infty}\phi(x)=-\infty.$$

Logo, ϕ assume um valor máximo em $[0,+\infty)$ dado por

$$\max_{x\geq 0}\phi(x)=\phi\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2^*-2}}\right)=\frac{1}{n}\frac{a^{\frac{n}{2}}}{b^{\frac{n-2}{2}}}. \tag{5.18}$$

Note que,

$$\frac{1}{2}\left\|t_\varepsilon u_\varepsilon\right\|^2_{H^1_0}-\frac{1}{2^*}\left\|t_\varepsilon u_\varepsilon\right\|^{2^*}_{L^{2^*}}=\frac{1}{2}\left\|u_\varepsilon\right\|^2_{H^1_0}t_\varepsilon^2-\frac{1}{2^*}\left\|u_\varepsilon\right\|^{2^*}_{L^{2^*}}t_\varepsilon^{2^*}. \tag{5.19}$$

Utilizando (5.16) e (5.17) em (5.19), segue que

$$\frac{1}{2}\,\|t_\varepsilon u_\varepsilon\|^2_{H^1_0} - \frac{1}{2^*}\,\|t_\varepsilon u_\varepsilon\|^{2^*}_{L^{2^*}} = \frac{1}{2}\,a\,t_\varepsilon^2 - \frac{1}{2^*}\,b\,t_\varepsilon^{2^*} = \phi(t_\varepsilon). \tag{5.20}$$

Em (5.20), utilizamos (5.18) e (5.16), temos

$$\frac{1}{2}\,\|t_\varepsilon u_\varepsilon\|^2_{H^1_0} - \frac{1}{2^*}\,\|t_\varepsilon u_\varepsilon\|^{2^*}_{L^{2^*}} = \phi(t_\varepsilon) \le \frac{1}{n}\frac{a^{\frac{n}{2}}}{b^{\frac{n-2}{2}}} = \frac{1}{n}\frac{\left(\|u_\varepsilon\|^2_{H^1_0}\right)^{\frac{n}{2}}}{\left(\|u_\varepsilon\|^{2^*}_{L^{2^*}}\right)^{\frac{n-2}{2}}}. \tag{5.21}$$

As estimativas de Brezis-Nirenberg dadas em [7] aplicadas a desigualdade (5.21), para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, garantem que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\,\|t_\varepsilon u_\varepsilon\|^2_{H^1_0} - \frac{1}{2^*}\,\|t_\varepsilon u_\varepsilon\|^{2^*}_{L^{2^*}} &\le \frac{1}{n}\frac{(S^{n/2} + O(\varepsilon^{n-2}))^{\frac{n}{2}}}{(S^{n/2} + O(\varepsilon^{n}))^{\frac{n-2}{2}}} \\
&= \frac{1}{n}\frac{[S^{n/2}(1 + c\,O(\varepsilon^{n-2}))]^{\frac{n}{2}}}{[S^{n/2}(1 + c\,O(\varepsilon^{n}))]^{\frac{n-2}{2}}} \\
&= \frac{1}{n}S^{n/2}\frac{(1 + c\,O(\varepsilon^{n-2}))^{\frac{n}{2}}}{(1 + c\,O(\varepsilon^{n}))^{\frac{n-2}{2}}},
\end{aligned} \tag{5.22}$$

onde $c = \dfrac{1}{S^{n/2}}$.

Como $1 + c\,O(\varepsilon^n) > 1$, então

$$\frac{1}{1 + c\,O(\varepsilon^n)} < 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{(1 + c\,O(\varepsilon^n))^{\frac{n-2}{2}}} < 1. \tag{5.23}$$

De (5.22) e (5.23), temos que

$$\frac{1}{2}\,\|t_\varepsilon u_\varepsilon\|^2_{H^1_0} - \frac{1}{2^*}\,\|t_\varepsilon u_\varepsilon\|^{2^*}_{L^{2^*}} \le \frac{1}{n}S^{n/2}(1 + c\,O(\varepsilon^{n-2}))^{\frac{n}{2}}.$$

Uma vez que $(1 + c\,O(\varepsilon^{n-2}))^{\frac{n}{2}} < (1 + c\,O(\varepsilon^{n-2}))^n$, da desigualdade acima, segue que

$$\frac{1}{2}\,\|t_\varepsilon u_\varepsilon\|^2_{H^1_0} - \frac{1}{2^*}\,\|t_\varepsilon u_\varepsilon\|^{2^*}_{L^{2^*}} \le \frac{1}{n}S^{n/2}(1 + c\,O(\varepsilon^{n-2}))^n. \tag{5.24}$$

Por (5.24), note que existe $c_0 > 0$ tal que

$$\frac{1}{2}\,\|t_\varepsilon u_\varepsilon\|^2_{H^1_0} - \frac{1}{2^*}\,\|t_\varepsilon u_\varepsilon\|^{2^*}_{L^{2^*}} \le \frac{1}{n}S^{n/2}(1 + C\,\varepsilon^{n-2})^n, \tag{5.25}$$

onde $C = c \cdot c_0$.

Como

$$(1 + C\,\varepsilon^{n-2})^n = 1 + C_1\,\varepsilon^{n-2} + C_2\,\varepsilon^{2(n-2)} + ... + C_n\,\varepsilon^{n(n-2)}, \tag{5.26}$$

onde $C_1, C_2, ..., C_n$ são constantes positivas.

Uma vez que ε é suficientemente pequeno ($\varepsilon < 1$), temos que

$$C_i\,\varepsilon^{i(n-2)} < C_i\,\varepsilon^{n-2}, \quad \forall\, i = 2, ..., n.$$

Assim, por (5.26), temos

$$
\begin{aligned}
1 + C_1\,\varepsilon^{n-2} + C_2\,\varepsilon^{2(n-2)} + ... + C_n\,\varepsilon^{n(n-2)} &< 1 + C_1\,\varepsilon^{n-2} + C_2\,\varepsilon^{n-2} + ... + C_n\,\varepsilon^{n-2} \\
&= 1 + (C_1 + C_2 + ... + C_n)\varepsilon^{n-2} \\
&= 1 + K\,\varepsilon^{n-2}, \qquad (5.27)
\end{aligned}
$$

onde $K = C_1 + C_2 + ... + C_n$.

Substituindo (5.26) e (5.27) em (5.25), segue que

$$
\frac{1}{2}\,\|t_\varepsilon u_\varepsilon\|^2_{H_0^1} - \frac{1}{2^*}\,\|t_\varepsilon u_\varepsilon\|^{2^*}_{L^{2^*}} \leq \frac{1}{n}S^{n/2}(1 + K\,\varepsilon^{n-2}) = \frac{1}{n}S^{n/2} + C_0\,\varepsilon^{n-2},
$$

onde $C_0 = \dfrac{1}{n}S^{n/2} \cdot K$.

Portanto,

$$
\frac{1}{2}\,\|t_\varepsilon u_\varepsilon\|^2_{H_0^1} - \frac{1}{2^*}\,\|t_\varepsilon u_\varepsilon\|^{2^*}_{L^{2^*}} \leq \frac{1}{n}S^{n/2} + O(\varepsilon^{n-2}).
$$

□

Lema 5.4. *Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, sob as mesmas hipóteses do Lema 5.1 e supondo as condições (3.4) e (3.7), existe uma função $\tau = \tau(\varepsilon)$ tal que $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \tau(\varepsilon) = +\infty$ e*

$$
\int_\Omega G(x, t_\varepsilon u_\varepsilon)dx \geq \tau(\varepsilon) \cdot \varepsilon^{n-2}.
$$

Demonstração. **1º caso:** $n = 3$.

Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos $B_\varepsilon \subset B_{1/2m} \subset \Omega_0$. Assim, pelas definições de u_ε^* e $u_\varepsilon(x) = \eta(x) \cdot u_\varepsilon^*(x)$ e pela condição (3.4), segue que

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega G(x, t_\varepsilon u_\varepsilon)dx &\geq \int_{B_\varepsilon} G(x, t_\varepsilon u_\varepsilon)dx \\
&= \int_{B_\varepsilon} G(x, t_\varepsilon u_\varepsilon^*)dx,
\end{aligned}
$$

pois $\eta(x) = 1$ em $B_\varepsilon \subset B_{1/2m}$.

Portanto,

$$
\int_\Omega G(x, t_\varepsilon u_\varepsilon)dx \geq \int_{B_\varepsilon} G\left(x, t_\varepsilon \frac{[3\varepsilon^2]^{1/4}}{\left[\varepsilon^2 + |x|^2\right]^{1/2}}\right) dx. \qquad (5.28)
$$

Pela condição (3.7), dada uma seqüência $(z_m) \subset \mathbb{R}^+$ crescente, existe uma seqüência $(\bar{t}_m) \subset \mathbb{R}^+$ crescente ($\bar{t}_m = \bar{t}_m(z_m)$) tal que:

$$
\text{se } t > \bar{t}_m \;\Rightarrow\; \frac{G(x,t)}{t^4} > z_m, \;\; \forall\, x \in \Omega_0.
$$

Assim, $\dfrac{G(x,t)}{t^4}$ é limitado inferiormente por z_m se $t > \bar{t}_m$.

Portanto, dado $z \in \mathbb{R}^+$, existe $\bar{t} = \bar{t}(z) \in \mathbb{R}^+$ tal que o ínfimo do conjunto $\left\{ \dfrac{G(x,t)}{t^4} \right\}$ existe para $t > \bar{t}(z)$.

Assim, podemos definir a função $\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ dada por

$$\varphi(z) = \inf_{t > \bar{t}(z)} \left\{ \frac{G(x,t)}{t^4} \right\},$$

que por construção é crescente e contínua com $\lim\limits_{z \to +\infty} \varphi(z) = +\infty$.

Seja $\bar{s} = g(s) = \bar{t}(z) \in \mathbb{R}^+$. Segue que

$$\varphi(s) = \inf_{t > \bar{s}} \left\{ \frac{G(x,t)}{t^4} \right\} \leq \frac{G(x,s)}{s^4}, \text{ para } s > \bar{s}. \tag{5.29}$$

Então, se $s > \bar{s}$, por (5.29), temos que

$$G(x,s) \geq \varphi(s) \cdot s^4, \quad \text{para } x \in \Omega_0 \text{ q.t.p.} \tag{5.30}$$

Agora, note que se ε for suficientemente pequeno (lembre-se que $t_\varepsilon \to 1$ pelo Lema 5.2), temos

$$t_\varepsilon \frac{\left[3\varepsilon^2\right]^{1/4}}{\left[\varepsilon^2 + |x|^2\right]^{1/2}} > \bar{s}, \quad \forall x \in B_\varepsilon.$$

Logo, de (5.30), segue que

$$\int_{B_\varepsilon} G\left(x, t_\varepsilon \frac{\left[3\varepsilon^2\right]^{1/4}}{\left[\varepsilon^2 + |x|^2\right]^{1/2}}\right) dx \geq \int_{B_\varepsilon} \varphi\left(t_\varepsilon \frac{\left[3\varepsilon^2\right]^{1/4}}{\left[\varepsilon^2 + |x|^2\right]^{1/2}}\right) \cdot \left(t_\varepsilon \frac{\left[3\varepsilon^2\right]^{1/4}}{\left[\varepsilon^2 + |x|^2\right]^{1/2}}\right)^4 dx. \tag{5.31}$$

De (5.28) e (5.31), temos que

$$\int_\Omega G(x, t_\varepsilon u_\varepsilon) dx \geq \int_{B_\varepsilon} \varphi\left(t_\varepsilon \frac{\left[3\varepsilon^2\right]^{1/4}}{\left[\varepsilon^2 + |x|^2\right]^{1/2}}\right) \cdot \left(t_\varepsilon \frac{\left[3\varepsilon^2\right]^{1/4}}{\left[\varepsilon^2 + |x|^2\right]^{1/2}}\right)^4 dx. \tag{5.32}$$

Como $t_\varepsilon \to 1$, quando $\varepsilon \to 0$; então existe $c_1 > 0$ tal que $c_1 \leq t_\varepsilon$. Consideremos $\dfrac{1}{2^{1/2}3^{1/4}} < c_1 < 1$.

Para $x \in B_\varepsilon$, temos que

$$\begin{aligned} t_\varepsilon \frac{\left[3\varepsilon^2\right]^{1/4}}{\left[\varepsilon^2 + |x|^2\right]^{1/2}} &> t_\varepsilon \frac{\left[3\varepsilon^2\right]^{1/4}}{\left[\varepsilon^2 + \varepsilon^2\right]^{1/2}} \\ &> c_1 \frac{3^{1/4} \cdot \varepsilon^{1/2}}{2^{1/2} \cdot \varepsilon} \\ &= c_1 \frac{3^{1/4}}{2^{1/2}} \varepsilon^{-1/2}. \end{aligned} \tag{5.33}$$

Como
$$c_1 > \frac{1}{2^{1/2}3^{1/4}} \quad \Rightarrow \quad c_1\frac{3^{1/4}}{2^{1/2}} > \frac{1}{2^{1/2}2^{1/2}} \quad \Rightarrow \quad c_1\frac{3^{1/4}}{2^{1/2}}\varepsilon^{-1/2} > \frac{1}{2}\varepsilon^{-1/2}.$$
De (5.33) e da desigualdade acima, segue que
$$t_\varepsilon \frac{[3\varepsilon^2]^{1/4}}{\left[\varepsilon^2 + |x|^2\right]^{1/2}} > \frac{1}{2}\varepsilon^{-1/2}. \tag{5.34}$$

Como φ é uma função crescente, então
$$\varphi\left(t_\varepsilon \frac{[3\varepsilon^2]^{1/4}}{\left[\varepsilon^2 + |x|^2\right]^{1/2}}\right) > \varphi\left(\frac{1}{2}\varepsilon^{-1/2}\right). \tag{5.35}$$

Agora, substituindo (5.34) e (5.35) em (5.32), concluímos que
$$\int_\Omega G(x, t_\varepsilon u_\varepsilon)dx \geq \int_{B_\varepsilon} \varphi\left(\frac{1}{2}\varepsilon^{-1/2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\varepsilon^{-1/2}\right)^4 dx.$$

Logo,
$$\int_\Omega G(x, t_\varepsilon u_\varepsilon)dx \geq \frac{1}{16}\varepsilon^{-2}\varphi\left(\frac{1}{2}\varepsilon^{-1/2}\right)\int_{B_\varepsilon} 1dx = \frac{1}{16}\varepsilon^{-2}\varphi\left(\frac{1}{2}\varepsilon^{-1/2}\right)\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3$$
e consequentemente
$$\int_\Omega G(x, t_\varepsilon u_\varepsilon)dx \geq c\varphi\left(\frac{1}{2}\varepsilon^{-1/2}\right) \cdot \varepsilon,$$
onde $c = \dfrac{\pi}{12}$.

Tomando $\tau(\varepsilon) = c\varphi\left(\dfrac{1}{2}\varepsilon^{-1/2}\right)$, segue que
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \tau(\varepsilon) = +\infty \quad \text{e} \quad \int_\Omega G(x, t_\varepsilon u_\varepsilon)dx \geq \tau(\varepsilon) \cdot \varepsilon.$$

2º caso: $n \geq 4$.

Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos que $B_\varepsilon \subset B_{1/2m} \subset \Omega$. Seja $t_\varepsilon u_\varepsilon^*(x) = \gamma$, então
$$t_\varepsilon u_\varepsilon^*(x) = \gamma \quad \Leftrightarrow \quad |x| = \left((t_\varepsilon/\gamma)^{2/(n-2)}\sqrt{n(n-2)} \cdot \varepsilon - \varepsilon^2\right)^{1/2}.$$

Definindo $\Phi(\gamma) := \left((t_\varepsilon/\gamma)^{2/(n-2)}\sqrt{n(n-2)} \cdot \varepsilon - \varepsilon^2\right)^{1/2}$. Assim,
$$t_\varepsilon u_\varepsilon^*(x) = \gamma \quad \Leftrightarrow \quad |x| = \Phi(\gamma).$$

Afirmação: Existe $c_2 > 0$ tal que, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos que $\Phi(\delta) < c_2\sqrt{\varepsilon} < (2m)^{-1}$, onde δ é como na condição (3.5) do Lema 5.1.

De fato, para δ como na condição (3.5) do Lema 5.1, na definição de Φ considere $k_1 = (t_\varepsilon/\delta)^{2/(n-2)}\sqrt{n(n-2)} > 0$, assim, $\Phi(\delta) = \sqrt{k_1 \cdot \varepsilon - \varepsilon^2} = \sqrt{\varepsilon(k_1 - \varepsilon)}$, logo para

$\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno temos que:

$$0 < k_1 - \varepsilon < k_1 < 1 + k_1 < (1 + k_1)^2.$$

Assim, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe $c_2 = 1 + k_1 > 0$ tal que $\sqrt{k_1 - \varepsilon} < c_2$.

Logo, $\Phi(\delta) = \sqrt{\varepsilon(k_1 - \varepsilon)} = \sqrt{\varepsilon}\sqrt{k_1 - \varepsilon} < \sqrt{\varepsilon} \cdot c_2$.

Lembre-se que, m suficientemente grande foi fixado neste lema e nos lemas e proposições do Capítulo 4, assim, escolhendo m o maior de todos eles e tomando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $c_2\sqrt{\varepsilon} < (2m)^{-1}$, a afirmação está provada.

Pela condição (3.4), como $G(x, s) \geq 0$ para $x \in \Omega$ q.t.p e $\forall\, s \in \mathbb{R}$, então

$$\int_\Omega G(x, t_\varepsilon u_\varepsilon)dx \geq \int_{B_{1/2m}} G(x, t_\varepsilon u_\varepsilon)dx. \tag{5.36}$$

Para $x \in B_\varepsilon \subset B_{1/2m}$, pela definição da seqüência u_ε, temos que

$$t_\varepsilon u_\varepsilon(x) = t_\varepsilon\, \eta(x) \cdot u_\varepsilon^*(x) = t_\varepsilon u_\varepsilon^*, \quad \text{pois } \eta \equiv 1 \text{ em } B_{1/2m}. \tag{5.37}$$

Além disso, de (5.37), se $t_\varepsilon u_\varepsilon^*(x) = \delta$, onde δ é como na condição (3.5) do Lema 5.1, garante que

$$|t_\varepsilon u_\varepsilon(x)| = |t_\varepsilon u_\varepsilon^*(x)| = t_\varepsilon u_\varepsilon^*(x) = \delta. \tag{5.38}$$

De (5.38), pela condição (3.5), segue que

$$G(x, t_\varepsilon u_\varepsilon) \geq \frac{1}{2}(\lambda_k + \sigma)(t_\varepsilon u_\varepsilon)^2,$$

para alguns $k \in \mathbb{N}$, $\sigma > 0$ e $\mu \in (\lambda_k, \lambda_{k+1})$.

Integrando a desigualdade acima sobre a bola $B_{1/2m}$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{B_{1/2m}} G(x, t_\varepsilon u_\varepsilon)dx &\geq \frac{1}{2}(\lambda_k + \sigma) \int_{B_{1/2m}} t_\varepsilon^2 u_\varepsilon^2 dx \\ &= \frac{1}{2}(\lambda_k + \sigma)t_\varepsilon^2 \int_{B_{1/2m}} u_\varepsilon^2 dx. \end{aligned} \tag{5.39}$$

Como $t_\varepsilon \to 1$, quando $\varepsilon \to 0$; então existe $c_0 \in \mathbb{R}^+$ tal que $0 < 1 - c_0 < t_\varepsilon < 1 + c_0$, logo de (5.39), concluímos que

$$\int_{B_{1/2m}} G(x, t_\varepsilon u_\varepsilon)dx \geq c_3 \int_{B_{1/2m}} u_\varepsilon^2 dx, \tag{5.40}$$

onde c_3 é uma constante positiva.

De (5.36) e (5.40), obtemos

$$\int_\Omega G(x, t_\varepsilon u_\varepsilon)dx \geq c_3 \int_{B_{1/2m}} u_\varepsilon^2 dx. \tag{5.41}$$

Além disso, como $u_\varepsilon^2(x) = \eta^2(x) \cdot (u_\varepsilon^*(x))^2 = (u_\varepsilon^*(x))^2$ em $B_{1/2m}$, uma vez que u_ε^* é uma função radial para todo $\varepsilon > 0$, então u_ε^2 é uma função radial.

Logo, por (5.41) e pela Proposição 3.4, uma vez que $u_\varepsilon^2(x) = (u_\varepsilon^*(x))^2 > 0$ em $B_{1/2m}$; temos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega G(x, t_\varepsilon u_\varepsilon)dx &\geq c_3 \int_{B_{1/2m}} u_\varepsilon^2 dx \\
&= c_3 \int_0^{1/2m} u_\varepsilon^2(r)\, r^{n-1}\, dr \\
&\geq c_3 \int_{c_2\sqrt{\varepsilon}}^{1/2m} u_\varepsilon^2(r)\, r^{n-1}\, dr \\
&= c_4 \int_{c_2\sqrt{\varepsilon}}^{1/2m} \frac{\varepsilon^{n-2} \cdot r^{n-1}}{[\varepsilon^2 + r^2]^{n-2}}\, dr \\
&= c_4\, \varepsilon^{n-2} \int_{c_2\sqrt{\varepsilon}}^{1/2m} \frac{r^{n-1}}{[\varepsilon^2 + r^2]^{n-2}}\, dr \\
&= c_4\, \varepsilon^{n-2} \int_{c_2\sqrt{\varepsilon}}^{1/2m} \frac{r^{n-1}}{r^{2n-4}\left[\dfrac{\varepsilon^2}{r^2} + 1\right]^{n-2}}\, dr \\
&= c_4\, \varepsilon^{n-2} \int_{c_2\sqrt{\varepsilon}}^{1/2m} \frac{r^{3-n}}{\left[\dfrac{\varepsilon^2}{r^2} + 1\right]^{n-2}}\, dr,
\end{aligned} \tag{5.42}$$

onde c_4 é uma constante positiva.

Agora, vamos estimar o denominador da integral dada em (5.42):

Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos $0 < c_2\sqrt{\varepsilon} < r$ e consequentemente $c_2^2\,\varepsilon^2 < c_2^2\,\varepsilon < r^2$. Logo de $c_2^2\,\varepsilon^2 < r^2$, segue que

$$\frac{\varepsilon^2}{r^2} < \frac{1}{c_2^2} \;\Rightarrow\; \left(\frac{\varepsilon^2}{r^2} + 1\right)^{n-2} < \left(\frac{1}{c_2^2} + 1\right)^{n-2} \;\Rightarrow\; \frac{1}{\left(\dfrac{1}{c_2^2} + 1\right)^{n-2}} < \frac{1}{\left(\dfrac{\varepsilon^2}{r^2} + 1\right)^{n-2}}. \tag{5.43}$$

De (5.42) e (5.43), temos que

$$\int_\Omega G(x, t_\varepsilon u_\varepsilon)dx \geq c_4\, \varepsilon^{n-2} \int_{c_2\sqrt{\varepsilon}}^{1/2m} \frac{r^{3-n}}{\left[\dfrac{1}{c_2^2} + 1\right]^{n-2}}\, dr.$$

Assim,

$$\int_\Omega G(x, t_\varepsilon u_\varepsilon)dx \geq c_5\, \varepsilon^{n-2} \int_{c_2\sqrt{\varepsilon}}^{1/2m} r^{3-n}\, dr, \tag{5.44}$$

onde c_5 é uma constante positiva.

Nosso objetivo agora, é estimar a integral do lado direito de (5.44) para o caso que $n = 4$:

Como $c_2\sqrt{\varepsilon} < (2m)^{-1}$, para ε suficientemente pequeno $(0 < \varepsilon < 1)$, temos que $c_2\sqrt{\varepsilon} < c_2\,\varepsilon^{1/4} < (2m)^{-1}$, logo

$$\int_{c_2\sqrt{\varepsilon}}^{1/2m} r^{-1}\, dr \geq \int_{c_2\sqrt{\varepsilon}}^{c_2\varepsilon^{1/4}} r^{-1}\, dr = ln(c_2\varepsilon^{1/4}) - ln(c_2\varepsilon^{1/2}).$$

Então,

$$\int_{c_2\sqrt{\varepsilon}}^{1/2m} r^{-1}\,dr \geq ln\,c_2 + ln\,\varepsilon^{1/4} - (ln\,c_2 + ln\,\varepsilon^{1/2}) = \frac{1}{4}ln\,\varepsilon - \frac{1}{2}ln\,\varepsilon = -\frac{1}{4}ln\,\varepsilon.$$

Como $ln\,\varepsilon < 0$, pois $0 < \varepsilon < 1$, da desigualdade acima segue que

$$\int_{c_2\sqrt{\varepsilon}}^{1/2m} r^{-1}\,dr \geq \frac{1}{4}|ln\,\varepsilon| = \frac{1}{4}C_1|log\,\varepsilon|, \tag{5.45}$$

onde $C_1 = \dfrac{1}{log\,e}$.

Pela estimativa (5.44) (para $n = 4$) e (5.45), temos que

$$\int_\Omega G(x, t_\varepsilon u_\varepsilon)dx \geq c\,\varepsilon^2 \cdot |log\,\varepsilon|,$$

onde $c = \dfrac{1}{4}c_5 \cdot C_1$.

Tomando $\tau(\varepsilon) = c \cdot |log\,\varepsilon|$, segue que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \tau(\varepsilon) = +\infty \quad \text{e} \quad \int_\Omega G(x, t_\varepsilon u_\varepsilon)dx \geq \tau(\varepsilon)\cdot\varepsilon^2.$$

Agora, vamos estimar a integral do lado direito de (5.44) para o caso que $n \geq 5$:

Como $c_2\sqrt{\varepsilon} < (2m)^{-1}$ para ε suficientemente pequeno $(0 < \varepsilon < 1)$, seja $d_2 > c_2$ tal que $c_2\sqrt{\varepsilon} < d_2\,\sqrt{\varepsilon} < (2m)^{-1}$. Logo

$$\begin{aligned}\int_{c_2\sqrt{\varepsilon}}^{1/2m} r^{3-n}\,dr \geq \int_{c_2\sqrt{\varepsilon}}^{d_2\sqrt{\varepsilon}} r^{3-n}\,dr &= \frac{1}{4-n}\left[(d_2\,\varepsilon^{1/2})^{4-n} - (c_2\,\varepsilon^{1/2})^{4-n}\right]\\ &= \frac{1}{4-n}\left[d_2^{4-n}\,\varepsilon^{\frac{4-n}{2}} - c_2^{4-n}\,\varepsilon^{\frac{4-n}{2}}\right]\\ &= \frac{1}{4-n}\left[d_2^{4-n} - c_2^{4-n}\right]\varepsilon^{\frac{4-n}{2}}.\end{aligned} \tag{5.46}$$

Como $d_2 > c_2$ e $n \geq 5$ $(n - 4 \geq 1)$, uma vez que

$$d_2^{4-n} - c_2^{4-n} = \frac{1}{d_2^{n-4}} - \frac{1}{c_2^{n-4}} = \frac{c_2^{n-4} - d_2^{n-4}}{d_2^{n-4}\cdot c_2^{n-4}},$$

temos que $c_2^{n-4} - d_2^{n-4} < 0$, então $d_2^{4-n} - c_2^{4-n} < 0$.

Além disso, como $4 - n \leq -1$, de (5.46), segue que

$$\int_{c_2\sqrt{\varepsilon}}^{1/2m} r^{3-n}\,dr \geq c_0\,\varepsilon^{2-\frac{n}{2}}, \tag{5.47}$$

onde $c_0 = \dfrac{1}{4-n}\left[d_2^{4-n} - c_2^{4-n}\right] > 0$.

Assim, (5.44) e (5.47), garantem que

$$\int_\Omega G(x, t_\varepsilon u_\varepsilon)dx \geq c\,\varepsilon^{n-2}\cdot\varepsilon^{2-\frac{n}{2}},$$

onde $c = c_5 \cdot c_0$.

Logo, tomando $\tau(\varepsilon) = c \cdot \varepsilon^{2-\frac{n}{2}}$, segue que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \tau(\varepsilon) = +\infty \quad \text{e} \quad \int_\Omega G(x, t_\varepsilon u_\varepsilon)dx \geq \tau(\varepsilon) \cdot \varepsilon^{n-2}.$$

Portanto, o resultado é provado para todos os $n \geq 3$. $\square$

Observação 5.2. Fixado m suficientemente grande (como $m \in \mathbb{N}$ é o maior que aparece nos resultados anteriores), o ε também é fixado suficientemente pequeno de modo que sejam válidos os Lemas 5.1, 5.2, 5.3 e 5.4.

Teorema 5.1. *Assuma as hipóteses (3.3) - (3.6) se $n \geq 4$ (ou (3.3) - (3.7) se $n = 3$) e escolha m suficientemente grande tal que*

$$c_k m^{2-n} < \sigma,$$

onde c_k é como no Lema 4.2 e $\sigma > 0$ é como em (3.5). Então a equação (3.1) admite uma solução não trivial.

Demonstração. Pelas Proposições 4.2, 4.3, 4.4 e pela Observação 4.1, concluímos que o funcional J satisfaz as hipóteses do Teorema de Linking sem a condição (PS) (Teorema 2.22), onde Q_m^ε é definido na Proposição 4.3. Assim, obtemos uma seqüência PS para o funcional J no nível

$$c = \inf_{h \in \Gamma} \max_{v \in Q_m^\varepsilon} J(h(v)),$$

que pelo Lema 4.1, se $c \in (0, \frac{1}{n}S^{n/2})$, existirá uma solução não trivial para a equação (3.1).

Portanto, é suficiente mostrar que $c < \frac{1}{n}S^{n/2}$.

De fato, como $id \in \Gamma$, temos que

$$c \leq \max_{v \in Q_m^\varepsilon} J(v),$$

assim, basta provar que, para algum $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e $m \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{v \in Q_m^\varepsilon} J(v) < \frac{1}{n}S^{n/2}.$$

Suponha por contradição que

$$\forall \varepsilon > 0 \ : \ \sup_{v \in Q_m^\varepsilon} J(v) \geq \frac{1}{n}S^{n/2}. \tag{5.48}$$

Agora, pela condição (5.48), temos que as hipóteses do Lema 5.1 são satisfeitas, portanto são também satisfeitas as hipóteses dos Lemas 5.2, 5.3 e 5.4.

Assim, pela Proposição 3.3 e pelo Lema 5.1, segue que

$$J(v_\varepsilon) = J(w_\varepsilon) + J(t_\varepsilon u_\varepsilon) \leq 0 + J(t_\varepsilon u_\varepsilon).$$

Pela desigualdade acima, usando os Lemas 5.3 e 5.4, quando $\varepsilon \to 0$, temos que

$$\begin{aligned} J(v_\varepsilon) \leq J(t_\varepsilon u_\varepsilon) &= \frac{1}{2}\left\| t_\varepsilon u_\varepsilon \right\|_{H_0^1}^2 - \int_\Omega G(x, t_\varepsilon u_\varepsilon)dx - \frac{1}{2^*}\left\| t_\varepsilon u_\varepsilon \right\|_{L^{2^*}}^{2^*} \\ &\leq \frac{1}{n}S^{n/2} + O(\varepsilon^{n-2}) - \tau(\varepsilon)\cdot\varepsilon^{n-2} \\ &= \frac{1}{n}S^{n/2} + C\cdot\varepsilon^{n-2} - \tau(\varepsilon)\cdot\varepsilon^{n-2} \\ &= \frac{1}{n}S^{n/2} + (C - \tau(\varepsilon))\varepsilon^{n-2} \end{aligned}$$

onde $C > 0$ e $C - \tau(\varepsilon) < 0$.

Assim,

$$J(v_\varepsilon) < \frac{1}{n}S^{n/2},$$

o que é uma contradição com (5.48).

Portanto, para algum $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e $m \in \mathbb{N}$, temos

$$\sup_{v \in Q_m^\varepsilon} J(v) < \frac{1}{n}S^{n/2},$$

o que prova o teorema. $\square$

6 EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO NO CASO DE RESSONÂNCIA EM UMA VIZINHANÇA DA ORIGEM

A prova da existência de solução para o caso ressonante (Teorema 6.1) deste capítulo segue as mesmas linhas do Teorema 5.1, no entanto, alguns refinamentos das estimativas são necessários. Para enfatizar a dependência de m, denotamos v_ε^m, w_ε^m e u_ε^m ao invés de v_ε, w_ε e u_ε do Capítulo 5 (essa dependência está “oculta” na função de corte η).

Como no capítulo anterior, queremos mostrar que para ε suficientemente pequeno

$$\sup_{v\in Q_m^\varepsilon} J(v) < \frac{1}{n}S^{n/2}. \tag{6.1}$$

Vamos iniciar com o seguinte resultado:

Lema 6.1. *Suponha que para todo m suficientemente grande (digamos $m \geq \bar{m}$) e para cada $\varepsilon > 0$, nós temos que*

$$\sup_{v\in Q_m^\varepsilon} J(v) \geq \frac{1}{n}S^{n/2}. \tag{6.2}$$

Então, existem $t_\varepsilon \geq 0$ e $w_\varepsilon^m \in H_m^-$ com $v_\varepsilon^m = w_\varepsilon^m + t_\varepsilon u_\varepsilon^m$, tais que

$$J(v_\varepsilon^m) = \frac{1}{2}\left\|v_\varepsilon^m\right\|_{H_0^1}^2 - \int_\Omega G(x, v_\varepsilon^m)dx - \frac{1}{2^*}\left\|v_\varepsilon^m\right\|_{L^{2^*}}^{2^*} \geq \frac{1}{n}S^{n/2}\ ,\ \forall\varepsilon > 0 \ \text{ e } \ \forall\, m \geq \bar{m}, \tag{6.3}$$

onde $supp(u_\varepsilon^m) \cap supp(w_\varepsilon^m) = \emptyset$ e (u_ε^m) é a seqüência de funções definida em (4.59).

Além disso, as seqüências (t_ε) e (w_ε^m) satisfazem

$$t_\varepsilon \geq c > 0 \quad \text{e} \quad \left\|w_\varepsilon^m\right\|_{H_0^1} \leq R. \tag{6.4}$$

Demonstração. Como o que foi feito no Lema 5.1 o máximo no conjunto Q_m^ε é atingido pelo funcional J. Assim, para todo m suficientemente grande (digamos $m \geq \bar{m}$) e para cada $\varepsilon > 0$, existe $v_\varepsilon^m \in Q_m^\varepsilon$ tal que

$$J(v_\varepsilon^m) = \max_{v\in Q_m^\varepsilon} J(v).$$

Pela hipótese (6.2), temos que

$$J(v_\varepsilon^m) = \max_{v\in Q_m^\varepsilon} J(v) \geq \frac{1}{n}S^{n/2}.$$

Além disso, pela definição do conjunto Q_m^ε, existem $t_\varepsilon \geq 0$ e $w_\varepsilon^m \in \overline{B_R} \cap H_m^-$ tais que

$$v_\varepsilon^m = w_\varepsilon^m + t_\varepsilon u_\varepsilon^m,$$

onde $supp(u_\varepsilon^m) \cap supp(w_\varepsilon^m) = \emptyset$.

Assim,

$$J(v_\varepsilon^m) = \frac{1}{2}\left\|v_\varepsilon^m\right\|_{H_0^1}^2 - \int_\Omega G(x, v_\varepsilon^m)dx - \frac{1}{2^*}\left\|v_\varepsilon^m\right\|_{L^{2^*}}^{2^*} \geq \frac{1}{n}S^{n/2}\ ,\ \forall\varepsilon > 0 \ \text{ e } \ \forall\, m \geq \bar{m}.$$

Como $w_\varepsilon^m \in \overline{B_R} \cap H_m^-$, então $\|w_\varepsilon^m\| \le R$. Além disso, como $(t_\varepsilon) \subset [0, R]$ e pela Observação 5.1 da página 78, temos que $t_\varepsilon \ge c > 0$ para algum $c > 0$, o que completa a prova do lema. □

O lema a seguir contém um refinamento das estimativas (4.60) que destacam a dependência de m.

Lema 6.2. *Suponha que $\varepsilon = \varepsilon(m) = o(1/m)$, quando $m \to +\infty$; então*

$$\|u_\varepsilon^m\|_{H_0^1}^2 = S^{n/2} + O[(\varepsilon m)^{n-2}] \quad e \quad \|u_\varepsilon^m\|_{L^{2^*}}^{2^*} = S^{n/2} + O[(\varepsilon m)^n],$$

onde (u_ε^m) é a seqüência de funções definida em (4.59).

Demonstração. A prova desse lema é direta, uma vez que $\|\nabla \eta\|_\infty \le 4m$ e podemos usar as fórmulas de Brezis-Nirenberg dadas em [7]. □

Lema 6.3. *Suponha a mesma hipótese do Lema 6.1 e as condições (3.4) e (3.10) sejam verificadas, então existe uma função ϕ tal que $\lim\limits_{z \to +\infty} \phi(z) = +\infty$ e*

$$\int_\Omega G(x, t_\varepsilon u_\varepsilon^m)dx \ge \varepsilon^{\frac{n(n-2)}{n+2}} \phi(\varepsilon^{-1}),$$

onde $\varepsilon > 0$ é como no Lema 6.2.

Demonstração. Analogamente como fizemos no Lema 5.4, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos que $B_\varepsilon \subset B_{1/2m} \subset \Omega_0$. Assim, pelas definições de u_ε^* e $u_\varepsilon^m(x) = \eta(x) \cdot u_\varepsilon^*(x)$ e pela condição (3.4), segue que

$$\begin{aligned}\int_\Omega G(x, t_\varepsilon u_\varepsilon^m)dx &\ge \int_{B_\varepsilon} G(x, t_\varepsilon u_\varepsilon^m)dx \\ &= \int_{B_\varepsilon} G(x, t_\varepsilon u_\varepsilon^*)dx,\end{aligned}$$

pois $\eta(x) = 1$ em $B_{1/2m}$.

Portanto,

$$\int_\Omega G(x, t_\varepsilon u_\varepsilon^m)dx \ge \int_{B_\varepsilon} G\left(x, t_\varepsilon \frac{[n(n-2)\varepsilon^2]^{\frac{n-2}{4}}}{[\varepsilon^2 + |x|^2]^{\frac{n-2}{2}}}\right)dx. \tag{6.5}$$

Usando a condição (3.10) e raciocinando como na prova do Lema 5.4, existe $\bar{s} > 0$ e existe uma função crescente τ tal que $\lim\limits_{z \to +\infty} \tau(z) = +\infty$ satisfazendo

$$G(x, s) \ge \tau(s) \cdot s^{\frac{8n}{n^2-4}} \quad \text{para } x \in \Omega_0 \text{ q.t.p e para todo } s \ge \bar{s}. \tag{6.6}$$

Agora, note que se ε for suficientemente pequeno (lembre-se que $t_\varepsilon \to 1$ pelo Lema 5.2), temos

$$t_\varepsilon \frac{[n(n-2)\varepsilon^2]^{\frac{n-2}{4}}}{[\varepsilon^2 + |x|^2]^{\frac{n-2}{2}}} > \bar{s}, \quad \forall\, x \in B_\varepsilon.$$

Logo, de (6.6) integrando sobre B_ε, segue que

$$\int_{B_\varepsilon} G\left(x, t_\varepsilon \frac{[n(n-2)\varepsilon^2]^{\frac{n-2}{4}}}{[\varepsilon^2+|x|^2]^{\frac{n-2}{2}}}\right) dx \geq \int_{B_\varepsilon} \tau\left(t_\varepsilon \frac{[n(n-2)\varepsilon^2]^{\frac{n-2}{4}}}{[\varepsilon^2+|x|^2]^{\frac{n-2}{2}}}\right)\cdot\left(t_\varepsilon \frac{[n(n-2)\varepsilon^2]^{\frac{n-2}{4}}}{[\varepsilon^2+|x|^2]^{\frac{n-2}{2}}}\right)^{\frac{8n}{n^2-4}} dx$$

e consequentemente, por (6.5), temos que

$$\int_\Omega G(x, t_\varepsilon u_\varepsilon^m) dx \geq \int_{B_\varepsilon} \tau\left(t_\varepsilon \frac{[n(n-2)\varepsilon^2]^{\frac{n-2}{4}}}{[\varepsilon^2+|x|^2]^{\frac{n-2}{2}}}\right)\cdot\left(t_\varepsilon \frac{[n(n-2)\varepsilon^2]^{\frac{n-2}{4}}}{[\varepsilon^2+|x|^2]^{\frac{n-2}{2}}}\right)^{\frac{8n}{n^2-4}} dx. \qquad (6.7)$$

Pelo Lema 6.1, como $t_\varepsilon \geq c > 0$, assim, para ε suficientemente pequeno consideremos $c \geq \dfrac{1}{3^{1/4}}$.

Chamando de $c_1(n) = [n(n-2)]^{\frac{n-2}{4}}$ (c_1 depende de n); como $c_1(n) \geq 3^{1/4}$, $\forall n \geq 3$; segue que $t_\varepsilon\, c_1 \geq 1$, então

$$t_\varepsilon\, c_1 \frac{\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}}{[\varepsilon^2+|x|^2]^{\frac{n-2}{2}}} \geq \frac{\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}}{[\varepsilon^2+|x|^2]^{\frac{n-2}{2}}}.$$

Logo, de (6.7) e como τ é uma função crescente, segue que

$$\int_\Omega G(x, t_\varepsilon u_\varepsilon^m) dx \geq c_2 \int_{B_\varepsilon} \tau\left(\frac{\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}}{[\varepsilon^2+|x|^2]^{\frac{n-2}{2}}}\right)\cdot\left(\frac{\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}}{[\varepsilon^2+|x|^2]^{\frac{n-2}{2}}}\right)^{\frac{8n}{n^2-4}} dx,$$

onde c_2 é uma constante positiva.

Como o integrando do lado direito da desigualdade acima é uma função radial, pela Proposição 3.4, temos

$$\int_\Omega G(x, t_\varepsilon u_\varepsilon^m) dx \geq c_2 \int_0^\varepsilon \tau\left(\frac{\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}}{[\varepsilon^2+|r|^2]^{\frac{n-2}{2}}}\right)\cdot\left(\frac{\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}}{[\varepsilon^2+|r|^2]^{\frac{n-2}{2}}}\right)^{\frac{8n}{n^2-4}} r^{n-1}\, dr.$$

Assim, como $0 \leq r \leq \varepsilon$, segue que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega G(x, t_\varepsilon u_\varepsilon^m) dx &\geq c_4\, \tau\left(c_3\, \varepsilon^{\frac{2-n}{2}}\right)\cdot\left(\varepsilon^{\frac{2-n}{2}}\right)^{\frac{8n}{n^2-4}} \int_0^\varepsilon r^{n-1}\, dr \\
&= c_5\, \varepsilon^n \cdot \varepsilon^{\frac{-4n}{n+2}} \cdot \tau\left(c_3\, \varepsilon^{\frac{2-n}{2}}\right) \\
&= c_5\, \varepsilon^{\frac{n(n-2)}{n+2}} \cdot \tau\left(c_3\, \varepsilon^{\frac{2-n}{2}}\right),
\end{aligned}$$

onde c_3 e c_5 são constantes positivas.

Definindo $\phi(z) = c_5\, \tau\left(c_3\, z^{\frac{n-2}{2}}\right)$, como τ é crescente, segue que

$$\lim_{z\to+\infty} \phi(z) = +\infty \quad \text{e} \quad \int_\Omega G(x, t_\varepsilon u_\varepsilon^m) dx \geq \varepsilon^{\frac{n(n-2)}{n+2}} \phi(\varepsilon^{-1}).$$

$\square$

Agora escolhemos um $\varepsilon = \varepsilon(m)$ adequado para lidar apenas com o parâmetro m. Logo, nós tomamos

$$\varepsilon(m) = m^{\frac{-(n+2)}{2}}; \tag{6.8}$$

e portanto, quando $m \to +\infty$, $\varepsilon(m) = o(1/m)$ e assim, os Lemas 6.2 e 6.3 podem ser aplicados.

De agora em diante, denotamos por v^m, w^m, u^m as funções v_ε^m, w_ε^m, u_ε^m com a escolha acima de ε e com t_m o correspondente t_ε.

O próximo lema é uma estimativa para $J(t_m u^m)$.

Lema 6.4. *Sob as mesmas hipóteses do Lema 6.3. Se m é suficientemente grande, temos que*

$$J(t_m u^m) \leq \frac{1}{n} S^{n/2} - c\, m^{\frac{n(2-n)}{2}} \phi(m^{\frac{n+2}{2}}),$$

onde ϕ é a função definida no Lema 6.3.

Demonstração. No momento, assuma apenas que $\varepsilon = \varepsilon(m) = o(1/m)$, quando m é suficientemente grande; então pelo Lema 6.2, raciocinando como na prova do Lema 5.3, temos que

$$\frac{1}{2} \|t_\varepsilon u_\varepsilon^m\|_{H_0^1}^2 - \frac{1}{2^*} \|t_\varepsilon u_\varepsilon^m\|_{L^{2^*}}^{2^*} \leq \frac{1}{n} S^{n/2} + O[(\varepsilon m)^{n-2}].$$

Da desigualdade acima, pelo Lema 6.3, segue que

$$J(t_\varepsilon u_\varepsilon^m) \leq \frac{1}{n} S^{n/2} + O[(\varepsilon m)^{n-2}] - \varepsilon^{\frac{n(n-2)}{n+2}} \phi(\varepsilon^{-1}).$$

Com a escolha de $\varepsilon > 0$ como em (6.8), obtemos

$$\begin{aligned} J(t_m u^m) = J(t_\varepsilon u_\varepsilon^m) &\leq \frac{1}{n} S^{n/2} + O[m^{\frac{n(2-n)}{2}}] - m^{\frac{n(2-n)}{2}} \phi(m^{\frac{n+2}{2}}) \\ &\leq \frac{1}{n} S^{n/2} + c_1\, m^{\frac{n(2-n)}{2}} - m^{\frac{n(2-n)}{2}} \phi(m^{\frac{n+2}{2}}) \\ &= \frac{1}{n} S^{n/2} + m^{\frac{n(2-n)}{2}} \left(c_1 - \phi(m^{\frac{n+2}{2}})\right), \end{aligned} \tag{6.9}$$

onde c_1 é uma constante positiva.

Como $\lim\limits_{m \to +\infty} \phi(m^{\frac{n+2}{2}}) = +\infty$, então para m suficientemente grande, existe $0 < c < 1$ tal que $c_1 < (1-c)\phi(m^{\frac{n+2}{2}})$, isto é, $c_1 - \phi(m^{\frac{n+2}{2}}) < -c\,\phi(m^{\frac{n+2}{2}})$.

Assim, da estimativa (6.9), segue que

$$J(t_m u^m) \leq \frac{1}{n} S^{n/2} - c\, m^{\frac{n(2-n)}{2}} \phi(m^{\frac{n+2}{2}}).$$

$\square$

Finalmente, vamos estimar $J(w^m)$.

Lema 6.5. *Suponha as mesmas hipóteses do Lema 6.1 e as condições (3.8) e (3.9). Se m é suficientemente grande, temos*

$$J(w^m) \leq c\, m^{\frac{n(2-n)}{2}}.$$

Demonstração. Analogamente, como fizemos no Lema 5.1, como $w^m \in H_m^-$, utilizando o Lema 4.2 (para m suficientemente grande), temos que

$$\left\| \frac{w^m}{\|w^m\|_{L^2}} \right\|_{H_0^1}^2 \leq \max_{\{u \in H_m^- \,:\, |u|_{L^2}^2 = \int_\Omega u^2 dx = 1\}} \|u\|_{H_0^1}^2 \leq \lambda_k + c_k m^{2-n},$$

isto é,

$$\|w^m\|_{H_0^1}^2 \leq \left(\lambda_k + c_k m^{2-n}\right) \|w^m\|_{L^2}^2 . \tag{6.10}$$

Pela condição (3.9), obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega G(x, w^m) dx &\geq \frac{1}{2}\lambda_k \int_\Omega |w^m|^2 dx - (\frac{1}{2^*} - \sigma) \int_\Omega |w^m|^{2^*} dx \\
&= \frac{1}{2}\lambda_k \|w^m\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2^*} \|w^m\|_{L^{2^*}}^{2^*} + \sigma \|w^m\|_{L^{2^*}}^{2^*} .
\end{aligned}$$

Logo,

$$-\int_\Omega G(x, w^m) dx - \frac{1}{2^*} \|w^m\|_{L^{2^*}}^{2^*} \leq -\frac{1}{2}\lambda_k \|w^m\|_{L^2}^2 - \sigma \|w^m\|_{L^{2^*}}^{2^*} .$$

Utilizando a estimativa acima e (6.10), temos

$$\begin{aligned}
J(w^m) &= \frac{1}{2} \|w^m\|_{H_0^1}^2 - \int_\Omega G(x, w^m) dx - \frac{1}{2^*} \|w^m\|_{L^{2^*}}^{2^*} \\
&\leq \frac{1}{2} \left(\lambda_k + c_k m^{2-n}\right) \|w^m\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2}\lambda_k \|w^m\|_{L^2}^2 - \sigma \|w^m\|_{L^{2^*}}^{2^*} \\
&= \frac{1}{2} c_k\, m^{2-n} \|w^m\|_{L^2}^2 - \sigma\, \|w^m\|_{L^{2^*}}^{2^*} .
\end{aligned} \tag{6.11}$$

Como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, então existe $C > 0$ tal que $\|w^m\|_{L^2} \leq C \|w^m\|_{L^{2^*}}$.

Logo,

$$-\frac{\sigma}{C^{2^*}} \|w^m\|_{L^2}^{2^*} \geq -\sigma \|w^m\|_{L^{2^*}}^{2^*} .$$

Utilizando a estimativa acima em (6.11), segue que

$$J(w^m) \leq c_1\, m^{2-n} \|w^m\|_{L^2}^2 - c_2\, \|w^m\|_{L^2}^{2^*} , \tag{6.12}$$

onde $c_1 = \dfrac{1}{2} c_k$ e $c_2 = \dfrac{\sigma}{C^{2^*}}$ são constantes positivas.

Definimos a função $h : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(z) = c_1\, m^{2-n} \cdot z^2 - c_2 \cdot z^{\frac{2n}{n-2}}.$$

Como fizemos nos Lemas 5.2 e 5.3, a função h assume um valor máximo em $[0,+\infty)$ para $z = c_0\, m^{\frac{-(n-2)^2}{4}}$, onde c_0 é uma constante positiva.

Assim,

$$\max_{z\geq 0} h(z) = h(c_0\, m^{\frac{-(n-2)^2}{4}}) = c_1\, m^{2-n}\cdot (c_0\, m^{\frac{-(n-2)^2}{4}})^2 - c_2\cdot (c_0\, m^{\frac{-(n-2)^2}{4}})^{\frac{2n}{n-2}}.$$

Logo,

$$\max_{z\geq 0} h(z) = c\, m^{\frac{n(2-n)}{2}},$$

onde c é uma constante positiva.

Pelo Lema 6.1, temos que $\|w^m\|_{L^2} \leq kR$, onde $k > 0$ é a constante da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$; assim, $h(\|w^m\|_{L^2}) \leq c\, m^{\frac{n(2-n)}{2}}$.

Portanto, de (6.12), segue que

$$J(w^m) \leq c_1\, m^{2-n}\, \|w^m\|_{L^2}^2 - c_2\, \|w^m\|_{L^2}^{2^*} = h(\|w^m\|_{L^2}) \leq c\, m^{\frac{n(2-n)}{2}}.$$

□

Teorema 6.1. *Assuma as hipóteses (3.3), (3.4), (3.8) - (3.10). Então a equação (3.1) admite uma solução não trivial.*

Demonstração. Analogamente como foi provado o Teorema 5.1, pelas Proposições 4.2, 4.3, 4.4 e pela Observação 4.1, concluímos que o funcional J satisfaz as hipóteses do Teorema de Linking sem a condição (PS) (Teorema 2.22), onde Q_m^ε é definido na Proposição 4.3. Assim, obtemos uma seqüência PS para o funcional J no nível

$$c = \inf_{h\in\Gamma} \max_{v\in Q_m^\varepsilon} J(h(v)),$$

que pelo Lema 4.1, se $c \in (0, \frac{1}{n}S^{n/2})$, existirá uma solução não trivial para a equação (3.1).

Portanto, é suficiente mostrar que $c < \frac{1}{n}S^{n/2}$. De fato, como $id \in \Gamma$, temos que

$$c \leq \max_{v\in Q_m^\varepsilon} J(v),$$

assim, basta provar que, para algum $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e $m \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{v\in Q_m^\varepsilon} J(v) < \frac{1}{n}S^{n/2}.$$

Suponha por contradição que para todo m suficientemente grande (digamos $m \geq \bar{m}$) e para cada $\varepsilon > 0$, nós temos

$$\sup_{v\in Q_m^\varepsilon} J(v) \geq \frac{1}{n}S^{n/2}. \tag{6.13}$$

Agora, pela condição (6.13), temos que as hipóteses dos Lemas 6.4 e 6.5 são satisfeitas.

Logo, pela Proposição 3.3 e pelos Lemas 6.4 e 6.5 para m suficientemente grande, segue que

$$\begin{aligned} J(v^m) = J(w^m) + J(t_m u^m) &\leq c_1\, m^{\frac{n(2-n)}{2}} + \frac{1}{n} S^{n/2} - c_2\, m^{\frac{n(2-n)}{2}} \phi(m^{\frac{n+2}{2}}) \\ &= \frac{1}{n} S^{n/2} - m^{\frac{n(2-n)}{2}} \left(c_2\, \phi(m^{\frac{n+2}{2}}) - c_1 \right). \end{aligned}$$

Como $c_2\, \phi(m^{\frac{n+2}{2}}) - c_1 > 0$ para m grande, pois $\lim\limits_{m \to +\infty} \phi(m^{\frac{n+2}{2}}) = +\infty$, segue que

$$J(v^m) < \frac{1}{n} S^{n/2},$$

o que é uma contradição com (6.13).

Portanto, para algum $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e $m \in \mathbb{N}$, temos

$$\sup_{v \in Q_m^{\varepsilon}} J(v) < \frac{1}{n} S^{n/2},$$

o que prova o teorema. $\square$

Observação 6.1. O funcional J satisfaz a condição $(PS)_c$ para todo $0 < c < \frac{1}{n} S^{n/2}$, ou seja, $\left\| u_{m_j} - u \right\|_{H_0^1} \to 0$, quando $j \to +\infty$, onde u é como no Lema 4.1.

REFERÊNCIAS

[1] AMBROSETTI, A.; MALCHIODI, A. *Nonlinear Analysis and Semilinear Elliptic Problems.* New York: Cambridge University Press, 2007.

[2] AMBROSETTI, A.; RABINOWITZ, P. H. *Dual variational methods in critical point theory and applications.* Journal of Functional Analysis 14 (1973) 349-381.

[3] BIEZUNER, R. J. *Análise Funcional. Notas de aula do curso Análise Funcional,* UFMG, Brasil, 2009.

[4] BIEZUNER, R. J. *Autovalores do Laplaciano. Notas de aula do curso Tópicos em Análise,* UFMG, Brasil, 2006.

[5] BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* New York: Springer, 2010.

[6] BREZIS, H. *Some variational problems with lack of compactness.* Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 45, part 1 (1986) 165-201.

[7] BREZIS, H.; NIRENBERG, L. *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents.* Communications on Pure and Applied Mathematics 36 (1983) 437-477.

[8] CAPOZZI, A.; FORTUNATO, D.; PALMIERI, G. *An existence result for nonlinear elliptic problems involving critical Sobolev exponent.* Ann. Inst. H. Poincaré Analise Non Linéaire 2 (1985) 463-470.

[9] CERAMI, G.; FORTUNATO, D.; STRUWE, M. *Bifurcation and multiplicity results for nonlinear elliptic problems involving critical Sobolev exponents.* Ann. Inst. H. Poincaré Analise Non Linéaire 1 (1984) 341-350.

[10] FURTADO, M. *Notas de EDP2,* UnB, Brasil, 2012.

[11] GAZZOLA, F.; RUF, B. *Lower-order perturbations of critical growth nonlinearities in semilinear elliptic equations.* Advances in Differential Equations 2 (1997) 555-572.

[12] KAVIAN, O. *Introduction à la Théorie des Points Critiques: et Applications aux Problèmes Elliptiques.* Berlim: Springer-Verlag, 1993.

[13] MITROVIĆ, D.; ŽUBRINIĆ, D. *Fundamentals of Applied Functional Analysis.* England: Logman, 1998.

[14] PALAIS, R. S.; SMALE, S. *A generalized Morse theory.* Bull. AMS 70 (1964) 165-171.

[15] RABINOWITZ, P. H. *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations.* CBMS, Regional Conference Series in Mathematics 65, American Matematical Society, Providence, 1986.

[16] STRUWE, M. *Variational Methods: Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems.* Berlim: Springer-Verlag, 1990.

[17] TALENTI, G. *Best constant in Sobolev inequality.* Ann. Mat. Pura Appl. 110 (1976) 353-372.

[18] WILLEM, M. *Analyse Harmonique Réelle.* Paris: Hermann, 1995.

[19] WILLEM, M. *Minimax Theorems, in: Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications,* vol 24. Boston: Birkhäuser, 1996.

[20] <http://anhngq.wordpress.com/tag/brezis-lieb-lemma/>. Site consultada em: 16 de março de 2018.

APÊNDICE A – Teoria do Grau

Neste apêndice nosso objetivo é definir o grau topológico de Brouwer num espaço de dimensão finita para qualquer função contínua, suas propriedades e consequências. Isso será feito em 3 etapas:

(i) Para a função φ de classe C^1 e b valor regular de φ.

(ii) Para a função φ de classe C^2 e b valor singular de φ.

(iii) Para qualquer φ contínua.

Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e limitado.
Para o espaço $C^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ (O espaço das funções k-vezes continuamente diferenciáveis em $\overline{\Omega}$) iremos considerar a seguinte norma:

$$\|\varphi\|_k = \max_{0 \le j \le k} \sup_{x \in \overline{\Omega}} \|D^j \varphi(x)\|.$$

Denotaremos o Jacobiano de φ no ponto $x_0 \in \Omega$ por $J_\varphi(x_0) = det\varphi'(x_0)$.
Dizemos que x_0 é ponto crítico de φ se $J_\varphi(x_0) = 0$, caso contrário dizemos que x_0 é ponto regular de φ.
Dado $b \in \mathbb{R}$, o ponto b é chamado valor singular de φ se for imagem de algum ponto crítico. Caso contrário é chamado de valor regular.
Denotaremos po S_φ o conjunto dos pontos críticos de uma função φ, isto é,

$$S_\varphi = \{x \in \Omega \ : \ J_\varphi(x) = 0\}.$$

Teorema A.1 (Teorema de Sard)**.** *Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$, φ uma função de classe $C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, então $\varphi(S_\varphi)$ tem medida nula.*

Observação: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto limitado, $\varphi \in C^1(\Omega)$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. Se b é um valor regular de φ, então $\varphi^{-1}(b)$ é finito.

Definição A.1. Sejam $\varphi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega) \cap \varphi(S_\varphi)$. Definimos o grau topológico de φ em relacão a Ω no ponto b sendo o número inteiro:

$$d(\varphi, \Omega, b) = \sum_{x \in \varphi^1(b)} Sgn(J_\varphi(x)),$$

onde a função Sgn é a função sinal definida por:

$$Sgn(t) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad t > 0 \\ -1, & \text{se} \quad t < 0 \end{cases}$$

Definição A.2. Sejam $\varphi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ e $b \in \mathbb{R}^n$ tal que $b \notin \varphi(\partial\Omega)$ e $b \in \varphi(S_\varphi)$. Considere C_b a componente conexa de $\mathbb{R}^n \backslash \varphi(\partial\Omega)$ que comtém b. Definimos o grau topológico de φ em Ω no ponto b, sendo

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega, x), \ \forall x \in C_b \text{ e } x \notin \varphi(S_\varphi).$$

Definição A.3. [O grau topológico de uma função contínua] Sejam $\varphi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. Definimos o grau topológico de φ em Ω no ponto b, sendo

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b), \ \forall \ \psi \in U,$$

onde

$$U = \{\psi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}) \quad : \quad \|\psi - \varphi\|_\infty < \frac{r}{2}\} \ \text{ e}$$
$$r = dist(b, \varphi(\partial\Omega)) = \inf\{\|b - \varphi(x)\| \quad : \quad x \in \partial\Omega\} > 0.$$

Propriedades Básicas

1.- Normalização:

Seja I a projeção canônica de $\overline{\Omega}$ em $\mathbb{R}^n$, isto é, $I(x) = x$, $x \in \overline{\Omega}$, então

$$d(I, \Omega, b) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad b \in \Omega \\ 0, & \text{se} \quad b \notin \overline{\Omega} \end{cases}$$

2.- A propriedade aditiva:

Sejam $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$, disjuntos abertos, limitados em $\mathbb{R}^n$ e não-vazios com $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ e $\varphi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ contínua tal que $b \notin \varphi(\partial\Omega_i), \ i = 1, 2$, então

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega_1, b) + d(\varphi, \Omega_2, b).$$

3.- Invariância do grau por Homotopia:

Se $H \in C([0,1] \times \overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ e $b \notin H([0,1] \times \partial\Omega)$, então

$$d(H(t, .), \Omega, b) = \text{constante}, \ \forall \ t \in [0,1],$$

isto é, o grau topologico de $H(t, .)$ não depende de t.

4.- A propriedade de existência (Princípio de Kronecker):

Seja $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. Se $d(\varphi, \Omega, b) \neq 0$, então existe um ponto $x_0 \in \Omega$ tal que $\varphi(x_0) = b$.

Observação: Estas quatro propiedades do grau topológico podem ser consideradas como axiomas da Teoria do grau topológico, no sentido de que todas as propriedades da Teoria do grau que se seguem, podem ser derivados a partir dessas.

5.- Continuidade:

Sejam $\varphi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. Existe uma vizinhança V de φ na topologia $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, tal que para toda $\psi \in V$ temos que

$$b \notin \psi(\partial\Omega) \;\text{ e }\; d(\psi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega, b).$$

6.- Dependência da fronteira:

Suponha que $\varphi = \psi$ em $\partial\Omega$ e que $\varphi, \psi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, então

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b), \ \forall\, b \notin \varphi(\partial\Omega).$$

7.- Excisão:

Sejam $K \subset \Omega$ um subconjunto fechado de $\overline{\Omega}$ e $b \notin \varphi(K) \cup \varphi(\partial\Omega)$, então

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega \backslash K, b).$$

8.- O grau topológico é constante em componentes conexas:

Se b_1 e b_2 estão na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^n \backslash \varphi(\partial\Omega)$, tem-se que

$$d(\varphi, \Omega, b_1) = d(\varphi, \Omega, b_2).$$

9.- A formula do produto do grau:

Sejam $\varphi_i \in C(\overline{\Omega_i}, \mathbb{R}^n)$, onde Ω_i são abertos e limitados em $\mathbb{R}^n$ e $b_i \in \mathbb{R}^n \backslash \varphi_i(\partial\Omega_i)$, $\forall\, i = 1, 2$, então

$$d((\varphi_1, \varphi_2), \Omega_1 \times \Omega_2, (b_1, b_2)) = d(\varphi_1, \Omega_1, b_1) d(\varphi_2, \Omega_2, b_2).$$