Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Alejandro Rossini Espinoza Penadillo

Funções Convexas em Escalas Temporais

Juiz de Fora

2017

Alejandro Rossini Espinoza Penadillo

Funções Convexas em Escalas Temporais

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Análise , como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Eduard Toon

Juiz de Fora

2017

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Espinoza Penadillo, Alejandro Rossini.
Funções Convexas em Escalas Temporais / Alejandro Rossini Espinoza Penadillo. – 2017.
103 f.

Orientador: Eduard Toon
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2017.

1. Escalas Temporais. 2. Convexidade. 3. Subdiferenciabilidade. I. Toon, Eduard, orient. II. Título.

Alejandro Rossini Espinoza Penadillo

Funções Convexas em Escalas Temporais

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Análise , como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Eduard Toon - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professora Dra. Jaqueline G. Mesquita
Universidade de Brasilia

Professor Dr. Grigori Chapiro
Universidade Federal Juiz de Fora

Dedico este trabalho a minha linda sobrinha Luhana que com seu carisma e sorriso traz alegrias a minha vida.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, que foram e são a pedra angular da minha educação, agradeço-lhes eternamente por seu apoio em cada um dos meus projetos. Aos meus amigos do mestrado que formaram parte importante deste processo, com quem partilhei muitos dias de estudo na sala para uma das muitas provas difíceis que tivemos que enfrentar. Aos meus professores por dar-me a oportunidade de crescer não só como um matemático, mas como uma pessoa, especialmente ao Professor Eduard Toon que me acolheu e guiou pacientemente na preparação da minha dissertação, dedicando o seu tempo para corrigir e melhorar este trabalho. Por isso estou eternamente grato. Finalmente, agradeço também à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), porque tem investido em minha formação como mestre e tornou possível meu acesso ao conhecimento científico.

RESUMO

Neste trabalho estudamos alguns resultados da teoria de escalas temporais, as quais são subconjuntos fechados não vazios dos números reais. As escalas temporais são ferramentas eficazes para descrever modelos que envolvem evolução de tempo, onde $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Z}$ são considerados casos particulares, chamados tempo contínuo e tempo discreto, respectivamente.
A teoria e aplicações da derivação (delta, nabla e α-diamante) e a integração no sentido de Riemann em escalas temporais tem recebido recentemente uma atenção considerável.
O objetivo principal deste trabalho é estudar as funções convexas em escalas temporais e apresentar algumas propriedades como: a convexidade de uma função é uma condição necessária e suficiente para sua subdiferenciabilidade. A subdiferencial de uma função f é dada como um conjunto de certas funções estendidas. Utilizando a convexidade de uma função demonstramos uma versão generalizada da desigualdade de Jensen em escalas temporais através da integral delta. Além disso, apresentamos alguns corolários e uma aplicação em cálculo variacional.

Palavras-chave: Escalas temporais, convexidade, subdiferenciabilidade.

ABSTRACT

In this work we study some results of the theory of time scales, which are closed non-empty subsets of the real numbers. The time scales represent a powerful tool to describe models which involve evolution of time, where $\mathbb{R}$ and $\mathbb{Z}$ are considered special cases, called continuous and discrete time respectively.

The theory and applications of the derivation (delta, nabla and α-diamond) and the Riemann's integration in time scales have recently received considerable attention. The main objective of this work is to study convex functions on time scales and to present some properties such as: the convexity of a function is a necessary and sufficient condition for its sub-differentiability. The subdifferential of a function f is given as a set of certain extended functions. Using the convexity of a function we prove a generalized version of Jensen's inequality on time scales via the delta integral. In addition, we present some corollaries and an application in variational calculus.

Key-words: time scales, convexity, subdifferentiability.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\forall$	Para todo
$\in$	Pertence
$\mathbb{T}$	Escala temporal
σ	Operador de avanço.
ρ	Operador de recuo.
μ	Função de rarefação de avanço.
ν	Função de rarefação de recuo.
f^σ	Função f composta com σ.
f^ρ	Função f composta com ρ.
$\mathbb{T}^k$	Conjunto $\mathbb{T} \setminus \{m\}$ onde m é o elemento máximo discreto à esquerda.
$\mathbb{T}_k$	Conjunto $\mathbb{T} \setminus \{m\}$ onde m é o elemento mínimo discreto à direita.
$\mathbb{T}^\kappa_\kappa$	É a interseção de $\mathbb{T}^k$ com $\mathbb{T}_k$.
f^Δ	A derivada delta de f.
f^∇	A derivada nabla de f.
f_α	A derivada alfa de f.
$f^{\Diamond_\alpha}$	A $\Diamond_\alpha$-derivada de f.
$f^{\Delta\Delta}$	A segunda derivada delta de f.
$C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$	Conjunto das funções rd-contínuas
$C^1_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$	O conjunto das funções $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ diferenciáveis com derivada rd-contínua.
∂f	A subdiferencial de f.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 9
1.1 Objetivos 10

2 Cálculo em Escalas Temporais 12
2.1 Definições básicas 12
2.2 Diferenciação 15
2.3 Integração 25

3 Extensão de Derivadas 36
3.1 Derivada Alfa 36
3.2 Derivada $\alpha - diamante$ 42

4 Integração de Riemann 48
4.1 Delta e Nabla Integrais de Riemann 48
4.2 Propriedades da Integral de Riemann 57
4.3 O Teorema Fundamental do Cálculo 66

5 Funções Convexas em Escalas Temporais 73
5.1 Conceito de Convexidade 73
5.2 Propriedades das Funções Convexas 78
5.3 Subdiferenciais 84
5.4 Resultados Conhecidos Referentes à Desigualdade de Jensen 95
5.5 Aplicação ao Cálculo Variacional 98

6 Conclusão 101

REFERÊNCIAS 102

1 INTRODUÇÃO

O cálculo em escalas temporais é uma teoria relativamente nova que foi iniciada em 1988 por Stefan Hilger em sua tese de doutorado. Seu orientador, Bernd Aulbach, pediu que desenvolvesse uma teoria unindo análise discreta e contínua, atualmente conhecida como equações dinâmicas. Hilger estendeu suas ideias para subconjuntos fechados arbitrários de $\mathbb{R}$ na topologia usual. Ele chamou esses conjuntos de escalas temporais ou cadeias de medida e, por este motivo, foi denominado cálculo em escalas temporais. Seu trabalho foi esquecido até 1997, quando foi redescoberto por Martin Bohner. Desde então, o número de pesquisas tem crescido nesta área. Podemos citar, por exemplo, [2], [4], [14], [19], [20].

O objetivo principal desta teoria é encontrar uma solução para uma equação dinâmica onde o domínio de uma função desconhecida é chamado de escala temporal. Portanto, se escolhemos a escala temporal dos números reais, teremos uma solução para as equações diferenciais ordinárias (caso contínuo) e se a escala temporal é o conjunto dos números inteiros, teremos uma solução para as equações diferenças (caso discreto).

Existe todo um espectro de diferentes escalas temporais que servem como modelos do tempo. A teoria do cálculo em escalas temporais é aplicável a qualquer campo em que os processos dinâmicos possam ser descritos como modelos discretos ou contínuos. Como muitos modelos econômicos são modelos dinâmicos, os resultados do cálculo em escala temporal são diretamente aplicáveis à economia. A economia é uma disciplina ideal para aplicações de escalas temporais. Modelos econômicos dinâmicos padrões são criados em tempo contínuo ou discreto e, no artigo pioneiro [3] podemos encontrar uma descrição de um modelo econômico nos casos contínuo, discreto e o mesmo modelo numa escala temporal qualquer.

Um outro exemplo de aplicação em modelos econômicos pode ser encontrado em [13]. Neste artigo, os autores apresentam um problema que usualmente é chamado o problema de 'comer o bolo': Consideremos primeiro um modelo com tempo discreto. Suponhamos que um consumidor tem um bolo de tamanho f_0. Ele só vive T períodos e o tempo é discreto. Ele só pode consumir ou poupar (não há nada mais para comer e não há possibilidade de pedir emprestado a ninguém). O bolo não se pode estragar. Em cada ponto no tempo, t= 1, 2,. . . ,T, o consumidor precisa tomar uma decisão sobre a quantidade de consumo e poupança. Portanto, a pergunta natural é: como determinaríamos a quantidade ótima de consumo de bolo (poupança) em cada ponto no tempo? Para responder esta questão, precisamos conhecer as propriedades de sua preferência, seu fator de desconto de tempo e as condições iniciais / finais. Portanto, é um problema de maximização discreta.

Além da aplicação à economia, também temos outras aplicações das escalas temporais em áreas como dinâmica populacional [7], cálculo quântico [15], teoria de controle

[5] e a área do cálculo de variações em escalas temporais [6, 20] que está em seu início e é uma área fértil de pesquisa. Como casos particulares, obtém-se o cálculo usual das variações, o cálculo do tempo discreto das variações e o q-cálculo das variações.

Nosso objetivo é apresentar uma extensão do conceito de convexidade e subdiferenciabilidade para funções definidas em escalas temporais. O conceito de convexidade é fundamental para a análise funcional, otimização, cálculo variacional, assim como em outras áreas da matemática. Também discutimos a noção de subdiferencial de funções definidas em escalas temporais. Para isto apresentaremos algumas propriedades cruciais das funções convexas, suas derivadas dinâmicas (derivada delta Δ, derivada nabla ∇ e a derivada α-diamante $\Diamond_\alpha$) e sua subdiferenciabilidade ao mesmo tempo são apresentadas algumas generalizações de desigualdades como a desigualdade de Jensen em escalas temporais.

A seguir, damos uma breve descrição do conteúdo de cada um dos capítulos.

No Capítulo 2, apresentamos a definição da escala temporal que denotamos por $\mathbb{T}$. Na Seção 2.2, introduzimos a definição da delta derivada de uma função $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, assim como suas propriedades e alguns exemplos. Na Seção 2.3, apresentamos a teoria de integração, definindo as funções regradas e rd-contínuas.

No Capítulo 3, apresentamos a definição da alfa derivada e alfa-diamante, onde a alfa derivada é uma extensão da delta derivada e nabla derivada. Definimos a derivada alfa-diamante independente das derivadas Δ e ∇ e mostramos como uma propriedade que $\Diamond_\alpha$ é uma combinação linear da delta e nabla derivada.

No Capítulo 4, fornecemos uma introdução à teoria de integração de Riemann em escalas temporais. Apresentamos propriedades da integral de Riemann, teorema fundamental do cálculo, integração por partes e mudança de variável.

No Capítulo 5, apresentamos a teoria de funções convexas em escalas temporais, introduzimos as propriedades de funções convexas definidas num intervalo da escala temporal e provamos a seguinte equivalência: a função $f : I \subseteq \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ é convexa se, e somente se, $\bar{f} : \bar{I} \to \mathbb{R}$ também é convexa, onde $I = \bar{I} \cap \mathbb{T}$. Além disso, apresentamos a definição de subdiferencial de uma função definida num intervalo da escala temporal, assim como suas propriedades, e mostramos que a convexidade de uma função f é uma condição necessária e suficiente para sua subdiferenciabilidade. Finalmente, apresentamos uma aplicação de cálculo de variações para escalas temporais.

1.1 Objetivos

- Apresentar o cálculo em escalas temporais.

- Descrever algumas extensões da noção de derivada em escalas temporais.
- Estudar as integrais de Darboux e de Riemann em escalas temporais.
- Apresentar o conceito de funções convexas e subdiferenciais de funções convexas em escalas temporais.
- Mostrar a desigualdade de Jensen em escalas temporais e uma breve aplicação desta desigualdade no cálculo variacional convexo.

2 Cálculo em Escalas Temporais

Vamos começar com algumas definições básicas. A seguir, apresentamos a definição de diferenciabilidade em escalas temporais, assim como alguns exemplos. Na última seção, introduzimos a teoria de integração em escalas temporais, apresentamos resultados fundamentais como o Teorema do Valor Médio em escalas temporais. A principal referência para este capítulo é [7].

2.1 Definições básicas

Nesta seção, apresentamos as principais definições e características do cálculo em escalas temporais iniciadas por Stefan Hilger.

Definição 2.1.1. *Uma escala temporal, $\mathbb{T}$, é um subconjunto não vazio fechado de $\mathbb{R}$.*

Exemplo 2.1.1. Os conjuntos $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, $\mathbb{T} = h\mathbb{Z} = \{hn : n \in \mathbb{Z}\}$ com $h > 0$, e $\mathbb{T} = \overline{q^{\mathbb{Z}}} := \{q^k : \ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$, $\quad q > 1$ e o conjunto de Cantor são exemplos de escalas temporais. Enquanto $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$, $(0, 1)$ não são.

Assumimos que uma escala temporal $\mathbb{T}$ tem a topologia inerente a dos números reais com a topologia padrão, ou seja, um intervalo aberto na escala temporal $\mathbb{T}$ é definido por

$$(a, b)_{\mathbb{T}} = \{t \in \mathbb{T} : a < t < b\} \quad onde \quad a, b \in \mathbb{T}.$$

Intervalos fechados e intervalos semi-fechados, etc., são definidos da mesma forma.

Definição 2.1.2. *Seja $\mathbb{T}$ uma escala temporal. Para $t \in \mathbb{T}$, definimos o operador de avanço (é o ponto mais próximo a t à direita):*

$$\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$$

por

$$\sigma(t) := \inf \{s \in \mathbb{T} : s > t\},$$

e o operador de récuo (é o ponto mais próximo a t à esquerda)

$$\rho : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$$

por

$$\rho(t) := \sup \{s \in \mathbb{T} : s < t\}.$$

Em nossa definição, definimos $\inf \emptyset = \sup \mathbb{T}$ e $\sup \phi = \inf \mathbb{T}$ de modo que $\sigma(t) = t$ se $\mathbb{T}$ tem um máximo t e $\rho(t) = t$ se $\mathbb{T}$ tem um mínimo t, onde $\emptyset$ denota o conjunto vazio. Se $\sigma(t) > t$, então dizemos que t é discreto à direita, e se $\sigma(t) = t$ dizemos que t é denso à

direita. Do mesmo modo, se $\rho(t) < t$, então t é discreto à esquerda, e se $\rho(t) = t$, então t é denso à esquerda. Se t é simultaneamente discreto à esquerda e discreto à direita, então dizemos que t é isolado. Pontos que são densos à esquerda e densos à direita ao mesmo tempo são chamados densos.
Finalmente, definimos a função de rarefação de avanço $\mu : \mathbb{T} \to [0, +\infty[$ por $\mu(t) = \sigma(t) - t$ e a função de rarefação de récuo $\nu : \mathbb{T} \to [0, +\infty[$ por $\nu(t) = t - \rho(t)$

Para a composição de uma função $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ com os operadores $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ e $\rho : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ usamos as seguintes abreviaturas: $f^{\sigma}(t) = f(\sigma(t))$ e $f^{\rho}(t) = f(\rho(t))$.

Seja $I \subset \mathbb{T}$. Definimos o conjunto

$$I^k = \begin{cases} I \setminus (\rho(\sup\ I), \sup I], & \text{se } \sup I < \infty \\ I, & \text{se } \sup I = \infty \end{cases}$$

e o conjunto

$$I_k = \begin{cases} I \setminus [\inf I, \sigma(\inf I)), & \text{se } \inf I > -\infty \\ I, & \text{se } \inf I = -\infty. \end{cases}$$

Também definimos, $I^{\kappa}_{\kappa} := I^{\kappa} \cap I_{\kappa}$. Em particular, podemos usar a descrição acima para $I = \mathbb{T}$.

Exemplo 2.1.2. Vamos considerar os exemplos $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ e $\mathbb{T} = \overline{q^{\mathbb{Z}}}$

(i) Se $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, então temos para qualquer $t \in \mathbb{R}$

$$\sigma(t) := \inf \{s \in \mathbb{R} : s > t\} = \inf(t, \infty) = t$$

e da mesma forma

$$\rho(t) := \sup \{s \in \mathbb{R} : s < t\} = \sup(-\infty, t) = t.$$

Portanto, cada ponto $t \in \mathbb{R}$ é denso. A função rarefação é

$$\mu(t) = \sigma(t) - t = t - t = 0 \ \text{ para todo } \ t \in \mathbb{R}.$$

(ii) Se $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, então para qualquer $t \in \mathbb{Z}$, temos

$$\sigma(t) := \inf \{s \in \mathbb{Z} : s > t\} = \inf \{t + 1, t + 2, t + 3, ...\} = t + 1$$

e da mesma forma

$$\rho(t) := \sup \{s \in \mathbb{Z} : s < t\} = \sup \{t - 1, t - 2, t - 3, ...\} = t - 1$$

A partir dessas afirmações, vemos que cada ponto em $\mathbb{Z}$ é isolado, e que

$$\mu(t) = \sigma(t) - t = t + 1 - t = 1 \ \text{ para todo } \ t \in \mathbb{Z}.$$

(iii) Se $\mathbb{T} = \overline{q^{\mathbb{Z}}} := \{q^k : \ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}, \ q > 1$, temos $\sigma(t) = \inf\left\{s \in \overline{q^{\mathbb{Z}}} : s > t\right\}$.
Seja $t \in \overline{q^{\mathbb{Z}}}$ então $t = q^k$ ou $t = 0$ para algum $k \in \mathbb{Z}$.
Se $t = q^k$, então

$$\sigma(t) = \inf\left\{s \in \overline{q^{\mathbb{Z}}} : s > q^k\right\} = \inf\left\{q^{k+1}, q^{k+2}, q^{k+3}, ...\right\} = q^{k+1} = q^k.q = tq \text{ e}$$

$$\rho(t) = \sup\left\{s \in \overline{q^{\mathbb{Z}}} : s < q^k\right\} = \sup\left\{q^{k-1}, q^{k-2}, q^{k-3}, ...\right\} = q^{k-1} = \frac{q^k}{q} = \frac{t}{q}$$

Se $t = 0$, então

$$\sigma(0) = \inf\left\{s \in \overline{q^{\mathbb{Z}}} : s > 0\right\} = 0 \text{ e } \rho(0) = \sup\left\{s \in \overline{q^{\mathbb{Z}}} : s < 0\right\} = 0.$$

Logo, todo ponto $t \neq 0$ é isolado e o ponto $t = 0$ é denso. A função de rarefação de avanço é dada por

$$\mu(t) = \begin{cases} (q-1)t, & \text{se } t \in \mathbb{T} \setminus \{0\} \\ 0, & \text{se } t = 0; \end{cases}$$

enquanto que a função de rarefação de récuo é dada por

$$\nu(t) = \begin{cases} (1-q^{-1})t, & \text{se } t \in \mathbb{T} \setminus \{0\} \\ 0, & \text{se } t = 0. \end{cases}$$

Eventualmente, usamos o seguinte princípio de indução em nossas provas, e por isso o introduzimos e provamos aqui.

Teorema 2.1.1. *(Princípio de Indução). Seja $t_0 \in \mathbb{T}$ e assuma que*

$$\{S(t) : t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}\}$$

é uma família de afirmações que satisfazem:

I. A afirmação $S(t_0)$ é verdadeira.

II. Se $t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ é discreto à direita e $S(t)$ é verdadeira, então $S(\sigma(t))$ também é verdadeira.

III. Se $t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ é denso à direita e $S(t)$ é verdadeira, então existe uma vizinhança U de t tal que $S(s)$ é verdadeira para todo $s \in U \cap (t, \infty)_{\mathbb{T}}$.

IV. Se $t \in (t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ é denso à esquerda e $S(s)$ é verdadeira para todo $s \in [t_0, t)_{\mathbb{T}}$, então $S(t)$ é verdadeira.

Então $S(t)$ é verdadeira para todo $t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$.

Demonstração. Seja $S^* := \{t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}} : S(t) \ \ \textit{não} \ \ \textit{é} \ \ \textit{verdade}\}$. Queremos mostrar que S^* é vazio. Assim, suponha $S^* \neq \emptyset$. Como S^* é não vazio e $\mathbb{T}$ é fechado, temos

$$\inf S^* := t^* \in \mathbb{T}.$$

Afirmamos que $S(t^*)$ é verdadeira. Se $t^* = t_0$ então $S(t^*)$ é verdadeiro por *I*. Se $t^* \neq t_0$ e $\rho(t^*) = t^*$, então t^* é denso à esquerda e como $t^* \leq s$, para todo $s \in S^*$, então $s \notin S^*$, para todo $s \in [t_0, t^*)_{\mathbb{T}}$, então $S(s)$ é verdade para todo $s \in [t_0, t^*)$, e portanto $S(t^*)$ é verdade por IV. Se $t^* \neq t_0$ e $\rho(t^*) < t^*$, então $\rho(t^*) \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$, pois $t_0 < t^*$. Além disso, $S(\rho(t^*))$ é verdadeiro e como $t^* \neq \inf \mathbb{T}$ pois $t_0 < t^*$, então $\sigma(\rho(t^*)) = t^*$, ou seja, $\sigma(\rho(t^*)) > \rho(t^*)$. Logo, por *II* temos que $S(\sigma(\rho(t^*)))$ é verdadeira e, portanto $S(t^*)$ é verdadeira. Assim, estas afirmações mostram que

$$t^* \notin S^*.$$

Segue que, t^* não é discreto à direita, e já que $t^* \neq \max \mathbb{T}$, então t^* é denso à direita. Mas, *III* nos diz que $S(t^*)$ é verdadeiro, o que é uma contradição. Assim, $S^* = \emptyset$ e assim nossa conclusão segue. □

2.2 Diferenciação

A seguir, introduzimos a delta derivada de uma função $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ em um ponto $t \in \mathbb{T}^\kappa$:

Definição 2.2.1. *Seja $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ uma função e seja $t \in \mathbb{T}^\kappa$. A delta derivada de f em t, denotada por $f^\Delta(t)$, é o número real (caso exista) tal que para qualquer $\epsilon > 0$, existe uma vizinhança U de t em $\mathbb{T}$ (i.e., $U = (t-\delta, t+\delta) \cap \mathbb{T}$ para algum δ>0) tal que*

$$|[f(\sigma(t)) - f(s)] - f^\Delta(t)[\sigma(t) - s]| \leq \epsilon|\sigma(t) - s|, \text{ para todo } s \in U$$

Dizemos que f é delta-diferenciável em $\mathbb{T}$ se existe a delta derivada de f em t para todo $t \in \mathbb{T}^\kappa$. A função $f^\Delta : \mathbb{T}^\kappa \to \mathbb{R}$ diz-se a derivada delta de f em $\mathbb{T}^\kappa$. Observamos que a delta derivada está bem definida, como o seguinte teorema afirma:

Teorema 2.2.1. *A delta derivada, se existir, é única.*

Demonstração. Suponhamos que f tem duas derivadas $f^\Delta(t) = g(t)$ e $f^\Delta(t) = h(t)$ em t. Afirmamos que $g(t) = h(t)$. Com efeito, por definição da derivada $g(t)$ e $h(t)$ temos para todo $\epsilon > 0$, existem

$$U_1 = (t - \delta_1, t + \delta_1) \cap \mathbb{T}, \quad \delta_1 > 0,$$
$$U_2 = (t - \delta_2, t + \delta_2) \cap \mathbb{T}, \quad \delta_2 > 0,$$

tais que

$$|[f(\sigma(t)) - f(s)] - g(t)[\sigma(t) - s]| \leq \frac{\epsilon}{2}|\sigma(t) - s|, \quad \text{para todo } s \in U_1,$$
$$|[f(\sigma(t)) - f(s)] - h(t)[\sigma(t) - s]| \leq \frac{\epsilon}{2}|\sigma(t) - s|, \quad \text{para todo } s \in U_2.$$

Note que a primeira desigualdade pode ser escrita na forma equivalente

$$|g(t)[\sigma(t) - s] - f(\sigma(t)) + f(s)| \leq \frac{\epsilon}{2}|\sigma(t) - s|.$$

Somando esta desigualdade com a outra desigualdade, obtemos:

$$|g(t)[\sigma(t)-s]-f(\sigma(t))+f(s)|+|[f(\sigma(t))-f(s)]-h(t)[\sigma(t)-s]|\leq\epsilon|\sigma(t)-s|,$$

para todo $s\in U=(t-\delta,t+\delta)\cap\mathbb{T}$, onde $\delta=min\{\delta_1,\delta_2\}$.
Se aplicarmos a desigualdade triangular ao lado esquerdo desta desigualdade, obtemos

$$|(g(t)-h(t))(\sigma(t)-s)|\leq\epsilon|\sigma(t)-s|.$$

Por definição de $\mathbb{T}^\kappa$, toda a vizinhança de t contém algum $s\in\mathbb{T}^\kappa$ com $s\neq\sigma(t)$. Isto implica que

$$|g(t)-h(t)|\leq\epsilon,\quad \text{para todo}\quad \epsilon>0$$

Assim, esta última desigualdade diz que $g(t)=h(t)$. Portanto, a delta derivada é única. □

Exemplo 2.2.1. Vejamos alguns exemplos da delta derivada [7].

(i) Se $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ é uma função definida por $f(t)=\alpha$, para todo $t\in\mathbb{T}$, onde $\alpha\in\mathbb{R}$ é constante, então $f^\Delta(t)=0$. Com efeito, dado $\epsilon>0$,

$$|[f(\sigma(t))-f(s)]-0.[\sigma(t)-s]|=|\alpha-\alpha|=0\leq\epsilon|\sigma(t)-s|,\quad \text{para todo } s\in\mathbb{T}.$$

(ii) Se $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ é uma função definida por $f(t)=t$, para todo $t\in\mathbb{T}$, então $f^\Delta(t)=1$. De fato, dado $\epsilon>0$,

$$|f(\sigma(t))-f(s)-1.(\sigma(t)-s)|=|\sigma(t)-s-(\sigma(t)-s)|=0\leq\epsilon|\sigma(t)-s|,\ \text{para todo } s\in\mathbb{T}.$$

(iii) Se $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ é uma função definido por $f(t)=t^2$, para todo $t\in\mathbb{T}$, então $f^\Delta(t)=\sigma(t)+t$ para todo $t\in\mathbb{T}^\kappa$. De fato, dado $\epsilon>0$, existe $U=(t-\epsilon,t+\epsilon)\cap\mathbb{T}$ tal que

$$|[f(\sigma(t))-f(s)]-(\sigma(t)+t).[\sigma(t)-s]|=|s-t||\sigma(t)-s|<\epsilon|\sigma(t)-s|,\ \text{para todo } s\in U.$$

Agora mostramos algumas propriedades da derivada delta no seguinte teorema.

Teorema 2.2.2. *Seja $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ uma função e seja $t\in\mathbb{T}^\kappa$. Então temos o seguinte:*

(i) Se f é delta diferenciável em t, então f é contínua em t.

(ii) Se f é contínua em t e t é discreto à direita, então f é delta diferenciável em t com

$$f^\Delta(t)=\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}.$$

(iii) Se t é denso à direita, então f é diferenciável em t se, e somente se, o limite

$$\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}$$

existe como um número finito. Neste caso,

$$f^{\Delta}(t)=\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}.$$

(iv) Se f é delta diferenciável em t, então

$$f((\sigma(t))=f(t)+\mu(t)f^{\Delta}(t).$$

Demonstração. (i) Suponha que f seja delta diferenciável em t. Seja $\epsilon\in(0,1)$. Definimos

$$\epsilon^*=\epsilon[1+|f^{\Delta}(t)|+2\mu(t)]^{-1}.$$

logo $\epsilon^*\in(0,1)$. Pela definição 2.2.1, existe uma vizinhança U de t tal que

$$|[f(\sigma(t))-f(s)]-f^{\Delta}(t)[\sigma(t)-s]|\leq\epsilon^*|\sigma(t)-s|,\quad \text{para todo } s\in U$$

Portanto, para todo $s\in U\cap(t-\epsilon^*,t+\epsilon^*)$, temos

$$\begin{aligned}
|f(t)-f(s)| &\leq \left|\left\{f(\sigma(t))-f(s)-f^{\Delta}(t)[\sigma(t)-s]\right\}-\left\{f(\sigma(t))-f(t)-\mu(t)f^{\Delta}(t)\right\}\right|\\
&\quad+\left|(t-s)f^{\Delta}(t)\right|\\
&\leq |f(\sigma(t))-f(s)-f^{\Delta}(t)[\sigma(t)-s]|+|f(\sigma(t))-f(t)-(\sigma(t)-t)f^{\Delta}(t)|\\
&\quad+|(t-s)||f^{\Delta}(t)|\\
&\leq \epsilon^*|\sigma(t)-s|+\epsilon^*\mu(t)+\epsilon^*|f^{\Delta}(t)|\\
&= \epsilon^*[|\sigma(t)-s|+\mu(t)+|f^{\Delta}(t)|]\\
&\leq \epsilon^*[|\sigma(t)-t|+|t-s|+\mu(t)+|f^{\Delta}(t)|]\\
&= \epsilon^*[2\mu(t)+|t-s|+|f^{\Delta}(t)|]\\
&\leq \epsilon^*[2\mu(t)+\epsilon^*+|f^{\Delta}(t)|]\\
&\leq \epsilon^*[1+2\mu(t)+|f^{\Delta}(t)|]\\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, f é contínua em t.

(ii) Suponhamos que f seja contínua em t e t seja discreto à direita. Pela continuidade de f em t, temos

$$\lim_{s\to t}\frac{f(\sigma(t))-f(s)}{\sigma(t)-t}=\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\sigma(t)-t}=\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}.$$

Logo, dado $\epsilon>0$, existe uma vizinhança U de t tal que

$$\left|\frac{f(\sigma(t))-f(s)}{\sigma(t)-s}-\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}\right|\leq\epsilon,$$

para todo $s \in U$. Assim,

$$\left|f(\sigma(t)) - f(s) - \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}[\sigma(t) - s]\right| \leq \epsilon|\sigma(t) - s|,$$

para todo $s \in U$. Portanto, obtemos o resultado desejado

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}.$$

Assim, f é delta diferenciável em t.

(iii) Suponhamos que f seja delta diferenciável em t e t seja denso à direita. Seja $\epsilon > 0$ dado. Como f é delta diferenciável em t, existe uma vizinhança U de t tal que

$$|[f(\sigma(t)) - f(s)] - f^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s]| \leq \epsilon|\sigma(t) - s|,$$

para todo $s \in U$. Como $\sigma(t) = t$, temos

$$|[f(t) - f(s)] - f^{\Delta}(t)[t - s]| \leq \epsilon|t - s|,$$

para todo $s \in U$. Assim,

$$\left|\frac{f(t) - f(s)}{t - s} - f^{\Delta}(t)\right| \leq \epsilon,$$

para todo $s \in U$, $s \neq t$. Portanto, obtemos que

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}.$$

Reciprocamente, suponha que $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ é denso à direita e $\lim\limits_{s \to t} \dfrac{f(t) - f(s)}{t - s}$ seja finito, ou seja,

$$\lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = L.$$

Então, dado $\epsilon > 0$, existe uma vizinhança U de t tal que

$$\left|\frac{f(t) - f(s)}{t - s} - L\right| \leq \epsilon,$$

para todo $s \in U$. Como $\sigma(t) = t$, então

$$\left|\frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} - L\right| \leq \epsilon,$$

para todo $s \in U$. Logo,

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - L(\sigma(t) - s)| \leq \epsilon|\sigma(t) - s|,$$

para todo $s \in U$. Portanto f é delta diferenciável em t e $f^{\Delta}(t) = L$. Além disso,

$$\lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f^{\Delta}(t).$$

(iv) Se $\sigma(t) = t$, então $\mu(t) = 0$ e temos que

$$f(\sigma(t)) = f(t) = f(t) + \mu(t)f^{\Delta}(t).$$

Se $\sigma(t) > t$, então por (ii) temos

$$\begin{aligned} f(\sigma(t)) &= f(t) + \mu(t)\frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} \\ &= f(t) + \mu(t)f^{\Delta}(t). \end{aligned}$$

□

Exemplo 2.2.2. Vejamos algumas aplicações do Teorema anterior.

(i) Se $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, então o teorema anterior (iii) mostra que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é delta diferenciável em $t \in \mathbb{T}$ se, e somente se, o limite

$$f'(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s},$$

existe, i.e., se, e somente se, f é diferenciável (no sentido usual) em t. Neste caso, obtemos

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f'(t).$$

(ii) Seja $\mathbb{T} = \left\{\dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$ e $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = \sigma(t)$. Determinemos $f^{\Delta}(t)$: temos

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{1-t}, & \text{se } t \in \mathbb{T} \setminus \{1\}; \\ 1, & \text{se } t = 1. \end{cases}$$

Seja $t \in \mathbb{T}^{\kappa} = \mathbb{T} \setminus \{1\}$ tal que $t \neq 0$. Note que $\sigma(t) > t$, para todo $t \in \mathbb{T}^{\kappa} \setminus \{0\}$, e, portanto t é discreto à direita para todo $t \in \mathbb{T}^{\kappa} \setminus \{0\}$. Além disso, f é contínua em $t \in \mathbb{T}^{\kappa} \setminus \{0\}$. Com efeito, dado $\epsilon > 0$, existe $U = (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T}$ vizinhança de t, para algum $\delta > 0$, tal que

$$|f(s) - f(t)| = 0 < \epsilon,$$

para todo $s \in U$. Logo f é contínua em $t \in \mathbb{T}^{\kappa} \setminus \{0\}$. Portanto, pelo teorema anterior (ii) temos que f é diferenciável em $t \in \mathbb{T}^{\kappa} \setminus \{0\}$, com

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = \frac{f\left(\dfrac{t}{1-t}\right) - \dfrac{t}{1-t}}{\dfrac{t}{1-t} - t} = \frac{1}{1-2t},$$

para todo $t \in \mathbb{T}^{\kappa} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$. Além disso, temos $\rho(0) = 0 = \sigma(0)$. Então, 0 é denso à direita. Como

$$\lim_{s \to 0} \frac{f(0) - f(s)}{0 - s} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{1 - s} = 1,$$

então pelo teorema anterior (iii), temos que f é diferenciável em 0 e $f^{\Delta}(0) = 1$. Segue que f é diferenciável em $\mathbb{T}^{\kappa} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ e $f^{\Delta}(t) = \dfrac{1}{1-2t}$, para todo $t \in \mathbb{T}^{\kappa} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

O teorema a seguir nos dá algumas propriedades das delta derivadas [7].

Teorema 2.2.3. *Sejam $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ diferenciáveis em $t \in \mathbb{T}^\kappa$. Então,*

(i) A soma $f + g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ é diferenciável em t com

$$(f+g)^\Delta(t) = f^\Delta(t) + g^\Delta(t).$$

(ii) Para qualquer constante α, $\alpha f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ é diferenciável em t com

$$(\alpha f)^\Delta(t) = \alpha f^\Delta(t).$$

(iii) O produto $f.g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ é diferenciável em t com

$$(f.g)^\Delta(t) = f^\Delta(t)g(t) + f(\sigma(t))g^\Delta(t) = f(t)g^\Delta(t) + f^\Delta(t)g(\sigma(t)).$$

(iv) Se $f(t)f(\sigma(t)) \neq 0$, então $\dfrac{1}{f}$ é diferenciável em t com

$$\left(\frac{1}{f}\right)^\Delta(t) = -\frac{f^\Delta(t)}{f(t)f(\sigma(t))}.$$

(v) Se $g(t)g(\sigma(t)) \neq 0$, então $\dfrac{f}{g}$ é diferenciável em t e

$$\left(\frac{f}{g}\right)^\Delta(t) = \frac{f^\Delta(t)g(t) - f(t)g^\Delta(t)}{g(t)g(\sigma(t))}.$$

Demonstração. Suponhamos que as funções f e g sejam diferenciáveis em $t \in \mathbb{T}^\kappa$.

(i) Seja $\epsilon > 0$, então existem vizinhanças U_1 e U_2 de t com

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| \leq \frac{\epsilon}{2}|\sigma(t) - s|, \quad \forall s \in U_1 \text{ e}$$

$$|g(\sigma(t)) - g(s) - g^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| \leq \frac{\epsilon}{2}|\sigma(t) - s|, \quad \forall s \in U_2.$$

Seja $U = U_1 \cap U_2$. Então, temos

$$\begin{aligned}
&|(f+g)(\sigma(t)) - (f+g)(s) - [f^\Delta(t) + g^\Delta(t)](\sigma(t) - s)| \\
&= |f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s) + g(\sigma(t)) - g(s) - g^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| \\
&\leq |f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| + |g(\sigma(t)) - g(s) - g^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| \\
&\leq \frac{\epsilon}{2}|\sigma(t) - s| + \frac{\epsilon}{2}|\sigma(t) - s| \\
&\leq \epsilon|\sigma(t) - s|,
\end{aligned}$$

para todo $s \in U$. Portanto $f + g$ é diferenciável em t e

$$(f+g)^\Delta(t) = f^\Delta(t) + g^\Delta(t).$$

(ii) Seja $\epsilon > 0$, então existe uma vizinhança U de t tal que

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)| \leq \frac{\epsilon}{|\alpha|}|\sigma(t) - s|, \quad \forall s \in U, \alpha \neq 0.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}|(\alpha f)(\sigma(t)) - (\alpha f)(s) - \alpha f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)| &= |\alpha||f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)| \\ &\leq |\alpha|\frac{\epsilon}{|\alpha|}|\sigma(t) - s| \\ &= \epsilon|\sigma(t) - s|, \quad \forall s \in U.\end{aligned}$$

Portanto, αf é diferenciável em t e $(\alpha f)^{\Delta}(t) = \alpha f^{\Delta}(t)$.
Se $\alpha = 0$, então $\alpha f \equiv 0$, logo αf é diferenciável em t. Além disso, temos $(\alpha f)^{\Delta}(t) = \alpha f^{\Delta}(t) = 0$ em t.

(iii) Seja $\epsilon \in (0, 1)$. Definimos $\epsilon^* = \epsilon[1 + |f(t)| + |g(\sigma(t))| + |g^{\Delta}(t)|]^{-1}$. Então $\epsilon^* \in (0, 1)$. Logo, existem vizinhanças U_1, U_2 e U_3 de t tais que

$$\begin{aligned}|f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)| &\leq \epsilon^*|\sigma(t) - s|, \quad \forall s \in U_1; \\ |g(\sigma(t)) - g(s) - g^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)| &\leq \epsilon^*|\sigma(t) - s|, \quad \forall s \in U_2;\end{aligned}$$

e pelo T eorema 2.3 (i) temos que f é contínua em t. Logo

$$|f(t) - f(s)| \leq \epsilon^*, \qquad \forall\ s \in U_3$$

Seja $U = U_1 \cap U_2 \cap U_3$, e seja $s \in U$, então

$$\begin{aligned}&|(fg)(\sigma(t)) - (fg)(s) - [f^{\Delta}(t)g(\sigma(t)) + f(t)g^{\Delta}(t)](\sigma(t) - s)| \\ &= |f(\sigma(t))g(\sigma(t)) - f(s)g(s) - f^{\Delta}(t)g(\sigma(t))(\sigma(t) - s) - f(t)g^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)| \\ &= |[f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)]g(\sigma(t)) + [g(\sigma(t)) - g(s) - g^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)]f(t) \\ &+[g(\sigma(t)) - g(s) - g^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)][f(s) - f(t)] + (\sigma(t) - s)g^{\Delta}(t)[f(s) - f(t)]| \\ &\leq \epsilon^*|\sigma(t) - s||g(\sigma(t))| + \epsilon^*|\sigma(t) - s||f(t)| + \epsilon^*\epsilon^*|\sigma(t) - s| + \epsilon^*|\sigma(t) - s||g^{\Delta}(t)| \\ &= \epsilon^*|\sigma(t) - s|[|g(\sigma(t))| + |f(t)| + \epsilon^* + |g^{\Delta}(t)|] \\ &\leq \epsilon^*|\sigma(t) - s|[1 + |f(t)| + |g(\sigma(t))| + |g^{\Delta}(t)|] \\ &\leq \epsilon|\sigma(t) - s|.\end{aligned}$$

Portanto, $f.g$ é diferenciável em t com

$$(f.g)^{\Delta}(t) = f(t)g^{\Delta}(t) + f^{\Delta}(t)g(\sigma(t)).$$

A outra igualdade do produto da parte (iii) deste teorema se deduz da última equação trocando as funções f e g.

(iv) Temos que $f(t)\left(\dfrac{1}{f(t)}\right) = 1$, para todo $t \in \mathbb{T}$. Logo $\left(f.\dfrac{1}{f}\right)^{\Delta}(t) = 0$, para todo $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$. Pela parte (iii) deste teorema, obtemos:

$$f^{\Delta}(t)\frac{1}{f(t)} + f(\sigma(t))\left(\frac{1}{f}\right)^{\Delta}(t) = 0.$$

Assim, temos que $\left(\dfrac{1}{f}\right)$ é diferenciável com $\left(\dfrac{1}{f}\right)^{\Delta}(t) = \dfrac{-f^{\Delta}(t)}{f(t)f(\sigma(t))}$.

(v) Usamos (iii) e (iv) para calcular $\left(\dfrac{f}{g}\right)^{\Delta}(t)$. Como f é diferenciável e $\dfrac{1}{g}$ é diferenciável por (iv), então por (iii) temos que $\dfrac{f}{g} = f.\dfrac{1}{g}$ é diferenciável. Então

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t) = \left(f.\frac{1}{g}\right)^{\Delta}(t) &= f(t)\left(\frac{1}{g}\right)^{\Delta}(t) + f^{\Delta}(t)\left(\frac{1}{g}\right)(\sigma(t)) \\
&= -f(t)\frac{g^{\Delta}(t)}{g(t)g(\sigma(t))} + f^{\Delta}(t)\frac{1}{g(\sigma(t))} \\
&= \frac{-f(t)g^{\Delta}(t) + f^{\Delta}(t)g(t)}{g(t)g(\sigma(t))} \\
&= \frac{f^{\Delta}(t)g(t) - f(t)g^{\Delta}(t)}{g(t)g(\sigma(t))}.
\end{aligned}$$

e o resultado desejado segue. $\square$

Teorema 2.2.4. *Sejam α uma constante real e $m \in \mathbb{N}$.*

(i) Para f definido por $f(t) = (t-\alpha)^m$, temos

$$f^{\Delta}(t) = \sum_{\nu=0}^{m-1}(\sigma(t)-\alpha)^{\nu}(t-\alpha)^{m-1-\nu}.$$

(ii) Para g definido por $g(t) = \dfrac{1}{(t-\alpha)^m}$, temos

$$g^{\Delta}(t) = -\sum_{\nu=0}^{m-1}\frac{1}{(\sigma(t)-\alpha)^{m-\nu}(t-\alpha)^{\nu+1}},$$

sempre que $(t-\alpha)(\sigma(t)-\alpha) \neq 0$.

Demonstração. (i) Provamos a fórmula por indução. Se $m = 1$, então $f(t) = t - \alpha$, logo

$$f^{\Delta}(t) = \sum_{\nu=0}^{1-1}(\sigma(t)-\alpha)^{0}(t-\alpha)^{1-1-0} = 1.$$

Suponhamos que a fórmula seja verdadeira para $m = h$, então $f^{\Delta}(t) = \sum_{\nu=0}^{h-1}(\sigma(t)-\alpha)^{\nu}(t-\alpha)^{h-1-\nu}$ para $f(t) = (t-\alpha)^m$.

Provemos que a fórmula é verdadeira para $F(t) = (t-h)^{h+1} = (t-h)f(t)$. Com efeito, usando a regra do produto (Teorema 2.2.3 (iii)) obtemos

$$\begin{aligned}
F^{\Delta}(t) &= (t-\alpha)^{\Delta} f(\sigma(t)) + (t-\alpha) f^{\Delta}(t) = f(\sigma(t)) + (t-\alpha) f^{\Delta}(t) \\
&= (\sigma(t)-\alpha)^h + (t-\alpha)\sum_{\nu=0}^{h-1} (\sigma(t)-\alpha)^{\nu}(t-\alpha)^{h-1-\nu} \\
&= (\sigma(t)-\alpha)^h + \sum_{\nu=0}^{h-1} (\sigma(t)-\alpha)^{\nu}(t-\alpha)^{h-\nu} \\
&= \sum_{\nu=0}^{h} (\sigma(t)-\alpha)^{\nu}(t-\alpha)^{h-\nu}.
\end{aligned}$$

Portanto, $f^{\Delta}(t) = \sum_{\nu=0}^{m-1} (\sigma(t)-\alpha)^{\nu}(t-\alpha)^{m-1-\nu}$ para $f(t) = (t-\alpha)^m$, $m \in \mathbb{N}$.

(ii) Se $f(t) = (t-\alpha)^m$, então $g(t) = \dfrac{1}{f(t)}$. Aplicando o Teorema 2.2.3 (iv), obtemos

$$\begin{aligned}
g^{\Delta}(t) = \frac{-f^{\Delta}(t)}{f(t)f(\sigma(t))} &= \frac{-\sum_{\nu=0}^{m-1} (\sigma(t)-\alpha)^{\nu}(t-\alpha)^{m-1-\nu}}{(t-\alpha)^m(\sigma(t)-\alpha)^m} \\
&= -\sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{(\sigma(t)-\alpha)^{\nu}(t-\alpha)^{m-1-\nu}}{(t-\alpha)^m(\sigma(t)-\alpha)^m} \\
&= -\sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{1}{(t-\alpha)^{\nu+1}(\sigma(t)-\alpha)^{m-\nu}},
\end{aligned}$$

sempre que $(t-\alpha)(\sigma(t)-\alpha) \neq 0$. Logo o resultado desejado segue.

□

Exemplo 2.2.3. A derivada de t^3 é $t^2+\sigma(t)t+\sigma(t)^2$, pois, fazendo $f(t) = t^3$, obtemos

$$f^{\Delta}(t) = \sum_{\nu=0}^{3-1} (\sigma(t))^{\nu}(t)^{1-\nu} = t^2 + \sigma(t)t + \sigma(t)^2,$$

e a derivada de $\dfrac{1}{t}$ é $\dfrac{-1}{t\sigma(t)}$, $t\sigma(t) \neq 0$ pois, fazendo $g(t) = \dfrac{1}{t}$, $t \neq 0$, obtemos

$$g^{\Delta}(t) = -\sum_{\nu=0}^{1-1} \frac{1}{(\sigma(t))^{1-\nu}t^{\nu+1}} = \frac{-1}{\sigma(t)t} = \frac{-1}{t\sigma(t)}.$$

Definimos agora derivadas de ordem superior de funções em escalas temporais.

Definição 2.2.2. *Para uma função $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ dizemos que a segunda derivada existe e a denotamos por $f^{\Delta\Delta}$, sempre que f^{Δ} seja diferenciável em $\mathbb{T}^{\kappa^2} = (\mathbb{T}^{\kappa})^{\kappa}$ com derivada $f^{\Delta\Delta} = (f^{\Delta})^{\Delta} : \mathbb{T}^{\kappa^2} \to \mathbb{R}$. Similarmente, definimos a derivada de ordem superior $f^{(\Delta)^n} : \mathbb{T}^{\kappa^n} \to \mathbb{R}$. Finalmente, para $t \in \mathbb{T}$, denotamos $\sigma^2(t) = \sigma(\sigma(t))$ e $\rho^2(t) = \rho(\rho(t))$, e $\sigma^n(t)$ e $\rho^n(t)$ para $n \in \mathbb{N}$ são definidos da mesma maneira. Por conveniência, também colocamos*

$$\rho^0(t) = \sigma^0(t) = t, f^{\Delta^0} = f, \mathbb{T}^{\kappa^0} = \mathbb{T}.$$

Exemplo 2.2.4. Encontre a segunda derivada da função $f(t) = \sigma(t)$ para $t \in \mathbb{T} := \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$.

Temos pelo Exemplo 2.2.2 (ii) que $f^{\Delta}(t) = \dfrac{1}{1-2t}$, para todo $t \in \mathbb{T}^{\kappa} = \mathbb{T} \setminus \{1\}$, então pelo Teorema 2.2.3 (iv), obtemos

$$(f^{\Delta})^{\Delta}(t) = \frac{-(1-2t)^{\Delta}}{(1-2t)(1-2\sigma(t))} = \frac{2(1-t)}{(1-2t)(1-3t)}, \qquad \forall\ t \in \mathbb{T}^{\kappa^2} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}.$$

Agora damos a fórmula para a derivada enésima sob certas condições.

Teorema 2.2.5. *(Fórmula de Leibniz.) Seja $S_k^{(n)}$ o conjunto formado por todas as possíveis sequências de comprimento n, que contém exatamente k-vezes σ e (n-k) vezes Δ. Se f^{Λ} existe para todo $\Lambda \in S_k^{(n)}$, então*

$$(fg)^{\Delta^n} = \sum_{k=0}^{n}\Big(\sum_{\Lambda \in S_k^{(n)}} f^{\Lambda}\Big) g^{\Delta^k}, \textit{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Vamos mostrar a fórmula por indução.

Para $n = 1$ a fórmula é verdadeira pelo Teorema 2.2.3 (iii). Agora, suponha que a fórmula é verdadeira para $n = h$. Então, usando o Teorema 2.4 (i) e (iii), obtemos

$$\begin{aligned}
(fg)^{\Delta^{m+1}} &= ((fg)^{\Delta^m})^{\Delta} = \left\{\sum_{k=0}^{h}\Big(\sum_{\Lambda \in S_k^{(h)}} f^{\Lambda}\Big) g^{\Delta^k}\right\}^{\Delta} = \sum_{k=0}^{h}\left\{\Big(\sum_{\Lambda \in S_k^{(h)}} f^{\Lambda}\Big) g^{\Delta^k}\right\}^{\Delta} \\
&= \sum_{k=0}^{h}\left\{\Big(\sum_{\Lambda \in S_k^{(h)}} f^{\Lambda}\Big)^{\sigma} g^{\Delta^{k+1}} + \Big(\sum_{\Lambda \in S_k^{(h)}} f^{\Lambda}\Big)^{\Delta} g^{\Delta^k}\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{h}\left\{\Big(\sum_{\Lambda \in S_k^{(h)}} f^{\Lambda^{\sigma}}\Big) g^{\Delta^{k+1}} + \Big(\sum_{\Lambda \in S_k^{(h)}} f^{\Lambda^{\Delta}}\Big) g^{\Delta^k}\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{h}\Big(\sum_{\Lambda \in S_k^{(h)}} f^{\Lambda\sigma}\Big) g^{\Delta^{k+1}} + \sum_{k=0}^{h}\Big(\sum_{\Lambda \in S_k^{(h)}} f^{\Lambda\Delta}\Big) g^{\Delta^k} \\
&= \Big(\sum_{\Lambda \in S_k^{(h)}} f^{\Lambda\Delta}\Big) g^{\Delta^k}\Big(\sum_{\Lambda \in S_{k-1}^{(h)}} f^{\Lambda\sigma}\Big) g^{\Delta^k} + \sum_{k=0}^{h}\Big(\sum_{\Lambda \in S_k^{(h)}} f^{\Lambda\Delta}\Big) g^{\Delta^k} \\
&= \Big(\sum_{\Lambda \in S_h^{(h)}} f^{\Lambda\sigma}\Big) g^{\Delta^{k+1}} + \Big(\sum_{\Lambda \in S_0^{(h)}} f^{\Lambda\Delta}\Big) g + \sum_{k=1}^{h}\Big(\sum_{\Lambda \in S_{k-1}^{(h)}} f^{\Lambda\sigma} + \sum_{\Lambda \in S_k^{h}} f^{\Lambda\Delta}\Big) g^{\Delta^k} \\
&= \Big(\sum_{\Lambda \in S_{h+1}^{(h+1)}} f^{\Lambda}\Big) g^{\Delta^{h+1}} + \Big(\sum_{\Lambda \in S_0^{(h+1)}} f^{\Lambda}\Big) g + \sum_{k=1}^{h}\Big(\sum_{\Lambda \in S_k^{(h+1)}} f^{\Lambda}\Big) g^{\Delta^k} \\
&= \sum_{k=0}^{h+1}\Big(\sum_{\Lambda \in S_k^{(h+1)}} f^{\Lambda}\Big) g^{\Delta^k}.
\end{aligned}$$

Assim, a fórmula é válida para $n = h + 1$. Logo, pelo princípio da indução matemática, a fórmula é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

2.3 Integração

Nesta seção, descrevemos uma classe de funções integráveis. Além disso, introduzimos algumas conceitos necessários para a descrição de tal classe [7],[8].

Definição 2.3.1. *Uma função $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ é chamada regrada sempre que seu limite pelo lado direito existe em todos os pontos densos à direita em $\mathbb{T}$ e seu limite pelo lado esquerdo existe em todos os pontos densos à esquerda em $\mathbb{T}$.*

Definição 2.3.2. *Uma função $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ é chamada rd-contínua sempre que seja contínua em todos os pontos densos à direita em $\mathbb{T}$ e seu limite pelo lado esquerdo existe em todos os pontos densos à esquerda em $\mathbb{T}$. O conjunto de funções rd-contínuas $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ será denotado por*

$$C_{rd} = C_{rd}(\mathbb{T}) = C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}).$$

O conjunto de funções $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ diferenciáveis com derivada rd-contínua será denotado por

$$C^1_{rd} = C^1_{rd}(\mathbb{T}) = C^1_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}).$$

Teorema 2.3.1. *Seja $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ uma função dada*

(i) Se f é contínua, então f é rd-contínua.

(ii) Se f é rd-contínua, então f é regrada.

(iii) O operador de avanço σ é rd-contínuo.

(iv) Se f é regrada ou rd-contínua, então f^σ também é regrada ou rd-contínua.

(v) Seja f contínua. Se $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ é regrada ou rd-contínua, então $f \circ g$ tem a mesma propriedade

Demonstração. (i) Seja f contínua. Então o limite de f existe em todos os pontos de $\mathbb{T}$ e, portanto, f é rd-contínua.

(ii) Seja f rd-contínua. Então o limite existe em todos os pontos densos à esquerda de $\mathbb{T}$, e como f é contínua em todos os pontos densos à direita de $\mathbb{T}$, o limite também existe em todos os pontos densos à direita de $\mathbb{T}$. Assim, f é regrada.

(iii) Inicialmente mostramos que os limites do lado esquerdo existem em todos os pontos densos à esquerda em $\mathbb{T}$. Seja $t \in \mathbb{T}$ denso à esquerda e seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{T}$ uma sequência crescente tal que $x_n < t$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n\to\infty} x_n = t$. Além disso, temos que

$$\sigma(x_n) = \inf\{s \in \mathbb{T}; s > x_n\} = \inf\{x_{n+1}, x_{n+2}, ...\} = x_{n+1}.$$

Logo, $\lim_{n\to\infty} \sigma(x_n) = t = \rho(t)$. Portanto, existe $\lim_{\xi\to t^-} \sigma(\xi) = t = \rho(t)$. Agora, vejamos que $\sigma(t)$ é contínua em pontos densos à direita em $t \in \mathbb{T}$. Para demonstrar isso, devemos considerar dois casos:

Se $\rho(t) = t$, então os limites à direita e à esquerda são iguais em t pois t é denso à direita, e assim σ é contínuo em t. Isto implica então que σ é contínua em pontos densos à direita em t.

Se $\rho(t) < t$, então note que $\sigma(\rho(t)) = t$ pois t é denso à direita. Assim, os limites do lado esquerdo e direito são iguais ao valor da função em t, e assim σ é contínuo em t. Assim, σ é contínua em pontos densos à direita.

(iv) Seja t denso à direita e suponhamos que f é rd-contínua. Pela parte (iii), temos que σ é rd-contínua. Logo,

$$\lim_{s\to t^+} (f\circ\sigma)(s) = \lim_{s\to t^+} f(\sigma(s)) = f(\sigma(t)).$$

Agora, seja t um ponto denso à esquerda, então como f e σ são rd-contínuas, temos

$$\lim_{s\to t^-} (f\circ\sigma)(s) = \lim_{s\to t^-} f(\sigma(s)), \quad \textit{existe.}$$

Analogamente, sejam t denso à direita e f regrada. Então pela parte (ii) e (iii) temos que σ também é regrada. Logo

$$\lim_{s\to t^+} (f\circ\sigma)(s) = \lim_{s\to t^+} f(\sigma(s)), \quad \textit{existe}$$

Da mesma forma se tem $\lim_{s\to t^-} f(\sigma(s))$, existe. Portanto, f^σ é regrada ou rd-contínua.

(v) Seja g regrada. Se $t \in \mathbb{T}$ é denso à direita, então pela continuidade de f, obtemos que

$$\lim_{s\to t^+} (f\circ g)(s) = \lim_{s\to t^+} f(g(s)) = f(g(t)),$$

do mesmo modo se t é denso à esquerda, obtemos

$$\lim_{s\to t^-} (f\circ g)(s) = \lim_{s\to t^-} f(g(s)) = f(g(t))$$

e, portanto $f\circ g$ é regrada.

Se g é rd-contínua, seja t um ponto denso à direita em $\mathbb{T}$. Pela continuidade de f, obtemos

$$\lim_{s\to t^+} (f\circ g)(s) = \lim_{s\to t^+} f(g(s)) = f(g(t)),$$

do mesmo modo se t é denso à esquerda obtemos o mesmo resultado pela continuidade de f. Logo, o limite existe em pontos densos à direita. Portanto, $f\circ g$ é rd-contínua.

□

Definição 2.3.3. *Uma função $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ é chamada pré-diferenciável com região de diferenciação D, sempre que $D \subseteq \mathbb{T}^\kappa$, $\mathbb{T}^\kappa \setminus D$ é contável e não contém elementos de $\mathbb{T}$ discretos à direita, e f é delta diferenciável em cada $t \in D$.*

Teorema 2.3.2. *Toda função regrada em um intervalo compacto é limitada.*

Demonstração. Suponhamos que $f : [a, b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ é não limitada, logo para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $t_n \in [a, b]_{\mathbb{T}}$ com $|f(t_n)| > n$. Como $t_n \in [a, b]_{\mathbb{T}}$, existe uma subsequência convergente $(t_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, de $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i.e.,

$$\lim_{k\to\infty} t_{n_k} = t_0,$$

para algum $t_0 \in [a, b]_{\mathbb{T}}$. Temos que $t_0 \in \mathbb{T}$, pois $(t_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{T}$ e $\mathbb{T}$ é fechado. Temos da subsequência $(t_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{T}$ que t_0 não é isolado, e existe uma subsequência que tende a t_0 pela direita ou uma subsequência que tende a t_0 pela esquerda. Em qualquer caso, temos que o limite de $f(t)$ quando $t \to t_0$ é finito, pois f é regrada, o que é uma contradição. □

Teorema 2.3.3. *Sejam f e g funções reais definidas em $\mathbb{T}$, ambas pré-diferenciáveis em D. Se*

$$|f^{\Delta}(t)| \leq g^{\Delta}(t), \ \forall \ t \in D,$$

então

$$|f(s) - f(r)| \leq g(s) - g(r), \ \forall \ r, s \in \mathbb{T}, \ r \leq s$$

Demonstração. Sejam $r, s \in \mathbb{T}$ com $r \leq s$ e denote $[r, s) \setminus D = \{t_n : n \in \mathbb{N}\}$. Seja $\epsilon > 0$. Mostramos agora por indução que

$$S(t) : |f(t) - f(r)| \leq g(t) - g(r) + \epsilon(t - r + \sum_{t_n<t} 2^{-n}),$$

para todo $t \in [r, s]$. Note que uma vez que mostramos $S(t)$, a afirmação do teorema segue. Agora, verificamos as quatro condições dadas no Teorema 2.1.1

(I) A afirmação $S(r)$ é trivialmente satisfeita.

(II) Seja t discreto à direita e suponha que $S(t)$ é verdadeiro. Então $t \in D$ e

$$\begin{aligned}
|f(\sigma(t)) - f(r)| &= |f(t) + \mu(t)f^{\Delta}(t) - f(r)| \\
&\leq \mu(t)|f^{\Delta}(t)| + |f(t) - f(r)| \\
&\leq \mu(t)g^{\Delta}(t) + g(t) - g(r) + \epsilon(t - r + \sum_{t_n<t} 2^{-n}) \\
&= g(\sigma(t)) - g(r) + \epsilon(t - r + \sum_{t_n<\sigma(t)} 2^{-n}) \\
&< g(\sigma(t)) - g(r) + \epsilon(\sigma(t) - r + \sum_{t_n<\sigma(t)} 2^{-n}).
\end{aligned}$$

Portanto, $S(\sigma(t))$ é valido.

(III) Suponhamos que $S(t)$ é válido e $t \neq s$ é denso à direita, i.e., $\sigma(t) = t$. Consideramos dois casos, a saber $t \in D$ e $t \notin D$. Primeiro suponha $t \in D$. Então f e g são diferenciáveis em t e portanto existe uma vizinhança U de t com

$$|f(t) - f(\tau)| - |f^{\Delta}(t)(t-\tau)| \leq |f(t) - f(\tau) - f^{\Delta}(t)(t-\tau)| \leq \frac{\epsilon}{2}|t-\tau|, \quad \forall \tau \in U$$

e

$$|g(t) - g(\tau) - g^{\Delta}(t)(t-\tau)| \leq \frac{\epsilon}{2}|t-\tau|, \quad \forall \tau \in U.$$

Assim,

$$|f(t) - f(\tau)| \leq [|f^{\Delta}(t)| + \frac{\epsilon}{2}]|t-\tau|, \quad \forall \tau \in U$$

e

$$g(\tau) - g(t) - g^{\Delta}(t)(\tau - t) \geq -\frac{\epsilon}{2}|t-\tau|, \quad \forall \tau \in U.$$

e, portanto, $g^{\Delta}(t)|t-\tau| \leq g(\tau) - g(t) + \frac{\epsilon}{2}|t-\tau|$.
Portanto, para todo $\tau \in U \cap (t, \infty)$, temos

$$\begin{aligned}
|f(\tau) - f(r)| &\leq |f(\tau) - f(t)| + |f(t) - f(r)| \\
&\leq [|f^{\Delta}(t)| + \frac{\epsilon}{2}]|t-\tau| + |f(t) - f(r)| \\
&\leq [g^{\Delta}(t) + \frac{\epsilon}{2}]|t-\tau| + g(t) - g(r) + \epsilon(t - r + \sum_{t_n < t} 2^{-n}) \\
&= g^{\Delta}(t)|t-\tau| + \frac{\epsilon}{2}|t-\tau| + g(t) - g(r) + \epsilon(t-r) + \epsilon \sum_{t_n < t} 2^{-n} \\
&\leq g(\tau) - g(t) + \frac{\epsilon}{2}|t-\tau| + \frac{\epsilon}{2}|t-\tau| + g(t) - g(r) \\
&\quad + \epsilon(t-r) + \epsilon \sum_{t_n < t} 2^{-n} \\
&= g(\tau) - g(r) + \epsilon(\tau - r + \sum_{t_n < \tau} 2^{-n}).
\end{aligned}$$

De modo que $S(\tau)$ é válido para todo $\tau \in U \cap (t, \infty)$.
Para o segundo caso, suponha $t \notin D$. Então $t = t_m$ para algum $m \in \mathbb{N}$. Como f e g são pré-diferenciáveis, ambas são contínuas e, portanto, existe uma vizinhança U de t tal que

$$|f(\tau) - f(t)| \leq \frac{\epsilon}{2} 2^{-m}, \qquad \forall \tau \in U$$

e

$$|g(\tau) - g(t)| \leq \frac{\epsilon}{2} 2^{-m}, \qquad \forall \tau \in U$$

assim

$$g(\tau) - g(t) \geq -\frac{\epsilon}{2} 2^{-m}, \qquad \forall \tau \in U$$

e, portanto

$$
\begin{aligned}
|f(\tau)-f(r)| &\leq |f(\tau)-f(t)|+|f(t)-f(r)| \\
&\leq \frac{\epsilon}{2}2^{-m}+g(t)-g(r)+\epsilon(t-r+\sum_{t_n<t}2^{-n}) \\
&\leq \frac{\epsilon}{2}2^{-m}+g(\tau)+\frac{\epsilon}{2}2^{-m}-g(r)+\epsilon(\tau-r+\sum_{t_n<t}2^{-n}) \\
&= \epsilon 2^{-m}+g(\tau)-g(r)+\epsilon(\tau-r+\sum_{t_n<t}2^{-n}) \\
&\leq g(\tau)-g(r)+\epsilon(\tau-r+\sum_{t_n<\tau}2^{-n})
\end{aligned}
$$

de modo que $S(\tau)$ é válido para todo $\tau \in U \cap (t,\infty)$.

(IV) Agora, seja t denso à esquerda e suponha que $S(\tau)$ é verdadeiro para todo $\tau < t$. Então

$$
\begin{aligned}
|f(\tau)-f(r)| &\leq g(\tau)-g(r)+\epsilon(\tau-r+\sum_{t_n<\tau}2^{-n}) \\
&\leq g(\tau)-g(r)+\epsilon(\tau-r+\sum_{t_n<t}2^{-n}).
\end{aligned}
$$

Tomando o limite quando τ tende à t pela esquerda, temos

$$\lim_{\tau\to t^-}|f(\tau)-f(r)| \leq \lim_{\tau\to t^-}\left\{g(\tau)-g(r)+\epsilon(\tau-r+\sum_{t_n<t}2^{-n})\right\}.$$

Pela continuidade de f e g, obtemos

$$|f(t)-f(r)| \leq g(t)-g(r)+\epsilon(t-r+\sum_{t_n<t}2^{-n}).$$

Logo, $S(t)$ é verdadeiro. Portanto,

$$|f(t)-f(r)| \leq g(t)-g(r)+\epsilon(t-r+\sum_{t_n<t}2^{-n}),$$

para todo $t \in [r,s]$, concluindo a demonstração.

$\square$

Corolário 2.3.1. *Suponhamos que f e g sejam pré-diferenciáveis em D.*

(i) Se U é um intervalo compacto com pontos finais $r, s \in \mathbb{T}$, então

$$|f(s)-f(r)| \leq \left\{\sup_{t\in U^k\cap D}|f^{\Delta}(t)|\right\}|s-r|.$$

(ii) Se $f^{\Delta}(t)=0$ para todo $t \in D$, então f é uma função constante.

(iii) Se $f^{\Delta}(t) = g^{\Delta}(t)$ para todo $t \in D$, então

$$f(t) = g(t) + C \quad \textit{para todo } t \in \mathbb{T},$$

onde C é uma constante.

Demonstração. (i) Suponhamos que f é pré-diferenciável em D e sejam $r, s \in \mathbb{T}$ com $r \leq s$. Se definimos

$$g(t) := \left\{ \sup_{\tau \in [r,s]^{\kappa} \cap D} |f^{\Delta}(\tau)| \right\} (t - r) \quad \text{para } t \in \mathbb{T},$$

então

$$g^{\Delta}(t) = \sup_{\tau \in [r,s]^{\kappa} \cap D} |f^{\Delta}(\tau)| \geq |f^{\Delta}(t)| \quad \text{para todo } t \in D \cap [r, s]^{\kappa}.$$

Pelo Teorema 2.3.3, obtemos

$$g(t) - g(r) \geq |f(t) - f(r)| \quad \textit{para todo } t \in [r, s]$$

de modo que

$$|f(s) - f(r)| \leq g(s) - g(r) = g(s) = \left\{ \sup_{\tau \in [r,s]^{k} \cap D} |f^{\Delta}(\tau)| \right\} (s - r).$$

Isto completa a prova da parte (i).

(ii) Sejam $r, s \in \mathbb{T}$ com $r \leq s$. Pela parte (i), temos

$$|f(s) - f(r)| \leq \left\{ \sup_{t \in U^{k} \cap D} |f^{\Delta}(t)| \right\} |s - r|.$$

Como $f^{\Delta}(t) = 0$ para todo $t \in D$, então

$$|f(s) - f(r)| \leq 0.$$

Logo, $f(s) = f(r)$, ou seja, f é constante.

(iii) Seja $h(t) = f(t) - g(t)$, para todo $t \in \mathbb{T}$, então $h^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t) - g^{\Delta}(t)$, para todo $t \in D$. Além disso, $f^{\Delta}(t) = g^{\Delta}(t)$ para todo $t \in D$. Então $h^{\Delta}(t) = 0$ para todo $t \in D$. Pela parte (ii), temos que h é constante, i.e., existe uma constante C tal que $h(t) = C$ para todo $t \in D$. Portanto, $f(t) = g(t) + C$, para todo $t \in \mathbb{T}$.

□

Teorema 2.3.4. *(Existência de Pré-Antiderivadas). Seja f regrada. Então existe uma função F que é pré-diferenciável com região de diferenciação D tal que*

$$F^{\Delta}(t) = f(t) \quad \textit{para todo } t \in D$$

Demonstração. Veja [3, Teorema 8.13]

Definição 2.3.4. *Suponhamos que $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ é uma função regrada. Qualquer função F como no Teorema 2.3.4 é chamada uma pré-antiderivada de f. Definimos a integral indefinida de uma função regrada f por*

$$\int f(t)\Delta t = F(t) + C,$$

onde C é uma constante arbitrária e F é uma pré-antiderivada de f. Definimos a integral de Cauchy por

$$\int_r^s f(t)\Delta t = F(s) - F(r), \quad \text{para todo } r, s \in \mathbb{T}.$$

Uma função $F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ é chamada uma antiderivada de $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ sempre que

$$F^{\Delta}(t) = f(t), \quad \text{para todo } t \in \mathbb{T}^{\kappa}.$$

Exemplo 2.3.1. Se $\mathbb{T}$=$\mathbb{Z}$, avaliemos a integral indefinida

$$\int a^t \Delta t,$$

onde $a \neq 1$ é uma constante. Seja $f(t) = a^t$, então, como f é contínua em $t \in \mathbb{Z}$ e t é discreto à direita, então

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = \frac{f(t+1) - f(t)}{\mu(t)} = f(t+1) - f(t) = a^{t+1} - a^t.$$

Além disso,

$$\left(\frac{a^t}{a-1}\right)^{\Delta} = \frac{1}{a-1}(a^t)^{\Delta} = \frac{a^{t+1} - a^t}{a-1} = a^t,$$

assim,

$$\int a^t \Delta t = \frac{a^t}{a-1} + C,$$

onde C é uma constante arbitrária.

Teorema 2.3.5. *(Existência de Antiderivadas). Cada função rd-contínua tem uma antiderivada. Em particular se $t_0 \in \mathbb{T}$, então F definido por*

$$F(t) := \int_{t_0}^t f(\tau)\Delta\tau \quad \text{para } t \in \mathbb{T}$$

é uma antiderivada de f.

Demonstração. Suponhamos que f é uma função rd-contínua. Pelo Teorema 2.3.1 (ii), f é regrado. Seja F uma função (que existe pelo Teorema 2.3.4) que satisfaz

$$F^{\Delta}(t) = f(t)$$

para todo $t \in D$. Então F é pré-diferenciável em D. Temos de provar que $F^{\Delta}(t) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{T}^{\kappa} \setminus D$. Seja $t \in \mathbb{T}^{\kappa} \setminus D$. Então t é denso à direita, pois $\mathbb{T}^{\kappa} \setminus D$ não pode conter pontos discretos à direita de acordo à Definição 2.3.3. Como f é rd-contínua, é contínua em t. Seja $\epsilon > 0$. Então existe uma vizinhança U de t tal que

$$|f(s) - f(t)| \leq \epsilon,$$

para todo $s \in U$. Definimos

$$h(\tau) := F(\tau) - f(t)(\tau - t_0) \quad \text{para } \tau \in \mathbb{T}.$$

Então h é pré-diferenciável em D e temos

$$h^{\Delta}(\tau) = F^{\Delta}(\tau) - f(t) = f(\tau) - f(t), \quad \text{para todo } \tau \in D.$$

Portanto,

$$|h^{\Delta}(s)| = |f(s) - f(t)| \leq \epsilon, \quad \text{para todo } s \in D \cap U.$$

Assim,

$$\sup_{s \in D \cap U} |h^{\Delta}(s)| \leq \epsilon.$$

Logo, pelo Corolário 2.3.1, temos para $r \in U$

$$\begin{aligned} |F(t) - F(r) - f(t)(t - r)| &= |h(t) + f(t)(t - t_0) - [h(r) + f(t)(r - t_0)] - f(t)(t - r)| \\ &= |h(t) - h(r)| \\ &\leq \left\{ \sup_{s \in D \cap U} |h^{\Delta}(s)| \right\} (t - r) \\ &\leq \epsilon |t - r|. \end{aligned}$$

Mas isso mostra que F é diferenciável em t com

$$F^{\Delta}(t) = f(t).$$

□

Teorema 2.3.6. *Se $f \in C_{rd}$ e $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$, então*

$$\int_t^{\sigma(t)} f(\tau)\Delta t = \mu(t) f(t).$$

Demonstração. Pelo Teorema 2.3.4, existe uma antiderivada F de f, e

$$\begin{aligned} \int_t^{\sigma(t)} f(\tau)\Delta t &= F(\sigma(t)) - F(t) \\ &= \mu(t) F^{\Delta}(t) \\ &= \mu(t) f(t). \end{aligned}$$

Teorema 2.3.7. *Se $a, b, c \in \mathbb{T}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, e $f, g \in C_{rd}$, então*

(i) $\displaystyle\int_a^b [f(t) + g(t)]\Delta t = \int_a^b f(t)\Delta t + \int_a^b g(t)\Delta t;$

(ii) $\displaystyle\int_a^b (\alpha f)(t)\Delta t = \alpha \int_a^b f(t)\Delta t$*;*

(iii) $\displaystyle\int_a^b f(t)\Delta t = -\int_b^a f(t)\Delta t$*;*

(iv) $\displaystyle\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^c f(t)\Delta t + \int_c^b f(t)\Delta t$*;*

(v) $\displaystyle\int_a^b f(\sigma(t))g^{\Delta}(t)\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^{\Delta}(t)g(t)\Delta t$*;*

(vi) $\displaystyle\int_a^b f(t)g^{\Delta}(t)\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^{\Delta}(t)g(\sigma(t))\Delta t$*;*

(vii) $\displaystyle\int_a^a f(t)\Delta t = 0$*;*

(viii) Se $|f(t)| \leq g(t)$ *em* $[a, b)$*, então*

$$\left|\int_a^b f(t)\Delta t\right| \leq \int_a^b g(t)\Delta t;$$

(ix) Se $f(t) \geq 0$ *para todo* $a \leq t < b$*, então* $\displaystyle\int_a^b f(t)\Delta t \geq 0$*.*

Demonstração. (i) Como f e g são rd-contínuas, elas possuem antiderivadas F e G pelo Teorema 2.3.5 logo, pelo Teorema 2.2.3 (i), $F + G$ é uma antiderivada de $f + g$ de modo que

$$\begin{aligned}\int_a^b (f+g)(t)\Delta t &= (F+G)(b) - (F+G)(a) \\ &= F(b) - F(a) + G(b) - G(a) \\ &= \int_a^b f(t)\Delta t + \int_a^b g(t)\Delta t.\end{aligned}$$

(ii) Como f é rd-contínua, ela tem uma antiderivada F e pelo Teorema 2.2.3 (ii), αF é uma antiderivada de αf, de modo que

$$\begin{aligned}\int_a^b (\alpha f)(t)\Delta t &= (\alpha F)(b) - (\alpha F)(a) \\ &= \alpha F(b) - \alpha F(a) \\ &= \alpha[F(b) - F(a)] \\ &= \alpha \int_a^b f(t)\Delta t.\end{aligned}$$

(iii) Temos pelo Teorema 2.3.5 que f tem uma antiderivada F. Logo,

$$\int_a^b f(t)\Delta t = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(t)\Delta t.$$

(iv) De igual maneira temos que existe uma antiderivada F de f. Assim,

$$\int_a^b f(t)\Delta t = F(b) - F(a) = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = \int_a^c f(t)\Delta t + \int_c^b f(t)\Delta t.$$

(v) Temos que fg é uma antiderivada de $f^\sigma g^\Delta + f^\Delta g$. Logo,

$$\int_a^b (f^\sigma g^\Delta + f^\Delta g)(t)\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a),$$

pela parte (i) deste teorema, concluímos que

$$\int_a^b f(\sigma(t))g^\Delta(t)\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^\Delta(t)g(t)\Delta t.$$

(vi) Analogamente ao item (v), temos que fg é uma antiderivada de $fg^\Delta + f^\Delta g^\sigma$. Logo

$$\int_a^b (fg^\Delta + f^\Delta g^\sigma)(t) = (fg)(b) - (fg)(a).$$

Obtemos

$$\int_a^b f(t)g^\Delta(t)\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^\Delta(t)g(\sigma(t))\Delta t.$$

(vii) Como f é rd-contínua, ela tem uma antiderivada F. Portanto,

$$\int_a^a f(t)\Delta t = F(a) - F(a) = 0.$$

(viii) Como $f, g \in C_{rd}$, então para $a \in \mathbb{T}$, temos que

$$F(t) := \int_a^t f(\tau)\Delta\tau, \quad t \in \mathbb{T} \quad e$$
$$G(t) := \int_a^t g(\tau)\Delta\tau, \quad t \in \mathbb{T}$$

são uma antiderivada de f e g, respectivamente, tais que

$$F^\Delta(t) = f(t) \quad e \quad G^\Delta(t) = g(t), \quad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{T}^\kappa.$$

Logo, por hipótese, temos

$$|F^\Delta(t)| \leq G^\Delta(t), \quad \text{para todo} \quad t \in [a, b).$$

Assim, pelo Teorema 2.3.3, temos

$$|F(b) - F(a)| \leq G(b) - G(a).$$

Logo, como $F(a) = G(a) = 0$, pela parte (vii), temos $|F(b)| \leq G(b)$, i.e.,

$$\left|\int_a^b f(\tau)\Delta\tau\right| \leq \int_a^b g(\tau)\Delta\tau.$$

(ix) Pelo item (viii) temos $\left|\int_a^b 0\Delta t\right| \leq \int_a^b f(t)\Delta t$. Logo o resultado segue. $\square$

Teorema 2.3.8. *Seja $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ delta diferenciável e suponhamos que $f^\Delta \geq 0$. Então f é não-decrescente.*

Demonstração. Seja $f^\Delta \geq 0$ em $[a, b]$ e sejam $s, t \in \mathbb{T}$ com $a \leq s \leq t \leq b$. Então

$$f(t) = f(s) + \int_s^t f^\Delta(\tau)\Delta\tau \geq f(s).$$

Assim, $f(t) \geq f(s)$, e a conclusão segue.

Teorema 2.3.9. *Seja f uma função contínua em $[a, b] \subseteq \mathbb{T}$ que é pre-diferenciável em $[a, b)$ com região de diferenciação $D \subseteq [a, b)$. Suponhamos que $f(a) = f(b)$. Então existe $\xi, \tau \in D$ tal que*

$$f^\Delta(\tau) \leq 0 \leq f^\Delta(\xi).$$

Demonstração. Se f é uma função constante, então $f^\Delta(t) = 0$ para todo $t \in [a, b)$ e, portanto, o teorema é válido neste caso. Agora, suponhamos que f não é constante. Para provar que existe $\tau \in D$ tal que $f^\Delta(\tau) \leq 0$, suponhamos por contradição que $f^\Delta(t) > 0$ para todo $t \in D$. Aplicando o teorema anterior à função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, temos que f é não-decrescente em $[a, b]$. Mas isso é uma contradição, já que $f(a) = f(b)$ e f não é constante. Portanto, o ponto desejado $\tau \in D$ existe. Da mesma forma, considerando a função $-f$, podemos provar que existe $\xi \in D$ tal que $f^\Delta(\xi) \geq 0$. $\square$

Teorema 2.3.10. *(Teorema do valor médio). Seja f uma função contínua em $[a, b] \subseteq \mathbb{T}$ que é pre-diferenciável em $[a, b)$ com região de diferenciação D. Então existem $\xi, \tau \in D$ tais que*

$$f^\Delta(\tau) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f^\Delta(\xi).$$

Demonstração. Considere a função ϕ definida em $[a, b]$ por

$$\phi(t) = f(t) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(t - a).$$

Então, ϕ é contínua em $[a, b]$ e pre-diferenciável em $[a, b)$. Também $\phi(a) = \phi(b) = 0$, onde $\phi^\Delta(\tau) \leq 0 \leq \phi^\Delta(\xi)$, para algum $\tau, \xi \in [a, b)$. Assim, tendo em conta que

$$\phi^\Delta(t) = f^\Delta(t) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

Chegamos à afirmação do teorema, utilizando o teorema anterior. $\square$

3 Extensão de Derivadas

Neste capítulo apresentamos algumas formas de derivadas de funções, que são chamadas a derivada alfa e a derivada α-diamante, onde mostramos que a derivada delta é um caso particular da derivada alfa. As principais referências para este capítulo são [7, 1, 18].

3.1 Derivada Alfa

Agora apresentamos a derivada alfa. De acordo com Ahlbrandt, Bohner e Ridenhour [1], uma escala temporal generalizada é um par $(\mathbb{T}, \alpha)$ satisfazendo

(i) $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}$ é não vazio tal que cada sequência de Cauchy em $\mathbb{T}$ converge a um ponto em $\mathbb{T}$ com a possível exceção de sequências de Cauchy que convergem para um ínfimo finito ou supremo finito de $\mathbb{T}$;

(ii) α é uma função de $\mathbb{T}$ em $\mathbb{T}$.

Pensamos em α como uma função salto (generalizada). Se $\alpha = \sigma$, então isso é consistente com definição da função $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$.
Vamos definir o interior de $\mathbb{T}$ em relação a α como o conjunto

$$\mathbb{T}^\kappa = \{t \in \mathbb{T} : \text{ou } \alpha(t) \neq t \text{ ou } \alpha(t) = t \text{ e } t \text{ não é isolado } \}$$

Exemplo 3.1.1. Seja $\mathbb{T} = [0, 1] \cup \{-1, 2, 3\}$.
O ponto $t = 3$ não está no interior de $\mathbb{T}$ com relação a σ, enquanto que -1 não está no interior de $\mathbb{T}$ com relação a ρ

Definição 3.1.1. *(A Derivada alfa [1]). Seja $(\mathbb{T}, \alpha)$ uma escala temporal generalizada. A função $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ é alfa diferenciável em $t \in \mathbb{T}^\kappa$ se*

(i) g é definido em uma vizinhança U de t;

(ii) g é definido em $\alpha(t)$;

(iii) existe um único número real $g_\alpha(t)$, chamado a derivada alfa de g em t, tal que para cada $\epsilon > 0$, existe uma vizinhança $\mathcal{N}$ de t com $\mathcal{N} \subseteq U$ e

$$|g(\alpha(t)) - g(s) - g_\alpha(t)(\alpha(t) - s)| \leq \epsilon |\alpha(t) - s|,$$

para cada $s \in \mathcal{N}$.

Também usamos a notação $\dfrac{dg(t)}{d\alpha(t)}$ para $g_\alpha(t)$. Se $\alpha = \sigma$, então a derivada alfa é a derivada delta usual.

Observação 3.1.1. Se t é um ponto isolado de t com $\alpha(t) = t$, então o conjunto unitário $N = \{t\}$ é uma vizinhança de t e para qualquer real L e qualquer $\epsilon > 0$, a condição

$$|g(\alpha(t)) - g(s) - L(\alpha(t) - s)| = 0 = \epsilon|\alpha(t) - s|$$

para cada $s \in \mathcal{N}$, i.e., para $s = t$. Logo, chegamos à conclusão de que nenhuma função pode ser alfa diferenciável no ponto $t \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{T}^\kappa$.

Vejamos a existência e unicidade da derivada alfa através do seguinte lema:

Lema 3.1.1. *Se $t \in \mathbb{T}^\kappa$, g é definido em uma vizinhança U de t, g está definida em $\alpha(t)$ e existem números L_1 e L_2 tais que para cada $\epsilon > 0$, existem vizinhanças $\mathcal{N}_1$ e $\mathcal{N}_2$ de t com*

$$|g(\alpha(t)) - g(s) - L_i(\alpha(t) - s)| \leq \epsilon|\alpha(t) - s|,$$

para cada $s \in \mathcal{N}_i$, então $L_1 = L_2$ e existe $g_\alpha(t)$.

Demonstração. Suponhamos que $L_1 \neq L_2$ e seja $\epsilon = \dfrac{|L_1 - L_2|}{4}$. Então, para $s \in \mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_2$ temos as desigualdades

$$-\epsilon|\alpha(t) - s| \leq g(\alpha(t)) - g(s) - L_1(\alpha(t) - s) \leq \epsilon|\alpha(t) - s|$$

e

$$-\epsilon|\alpha(t) - s| \leq g(\alpha(t)) - g(s) - L_2(\alpha(t) - s) \leq \epsilon|\alpha(t) - s|$$

multiplicando por (-1), obtemos

$$-\epsilon|\alpha(t) - s| \leq -g(\alpha(t)) + g(s) + L_2(\alpha(t) - s) \leq \epsilon|\alpha(t) - s|$$

somando esta desigualdade com a primeira desigualdade, obtemos

$$-2\epsilon|\alpha(t) - s| \leq (\alpha(t) - s)L_2 - (\alpha(t) - s)L_1 \leq 2\epsilon|\alpha(t) - s|.$$

Assim,

$$|(\alpha(t) - s)||(L_1 - L_2)| \leq \frac{|L_1 - L_2|}{2}|\alpha(t) - s|.$$

Logo,

$$|\alpha(t) - s| \leq \frac{|\alpha(t) - s|}{2}.$$

Se $\alpha(t) \neq t$, escolhemos $s = t$, então $\alpha(t) - s \neq 0$, logo $1 \leq \frac{1}{2}$, o que é uma contradição. Se $\alpha(t) = t$ e t não é isolado, então existe um ponto $s \in \mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_2$ diferente de t, o que também nos levaria a uma contradição. Assim, $L_1 = L_2$ e $g_\alpha(t)$ existe. $\square$

No seguinte teorema provamos que toda função alfa diferenciável é contínua.

Teorema 3.1.1. *Se f é alfa diferenciável em t, então é contínua em t.*

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$. Definimos $\epsilon^* = \epsilon[1 + |f_\alpha(t)| + 2|\alpha(t) - t|]^{-1}$ onde, sem perda de generalidade, $\epsilon^* \in (0, 1)$. Como f é alfa diferenciável em t, existe uma vizinhança $\mathcal{N}$ de t (sem perda de generalidade, o diâmetro de N é $\leq \epsilon^*$), tal que

$$|f(\alpha(t)) - f(s) - f_\alpha(t)(\alpha(t) - s)| \leq \epsilon^*|\alpha(t) - s|,$$

para todo $s \in \mathcal{N}$. Se $s \in \mathcal{N}$, então

$$\begin{aligned}
|f(t) - f(s)| &= |f(t) - f(s) + f(\alpha(t)) - f(\alpha(t)) + \alpha(t)f_\alpha(t) - \alpha(t)f_\alpha(t) \\
&\quad +tf_\alpha(t) - tf_\alpha(t) + sf_\alpha(t) - sf_\alpha(t)| \\
&= |(f(\alpha(t)) - f(s) - f_\alpha(t)(\alpha(t) - s)) - (f(\alpha(t)) - f(t) \\
&\quad -f_\alpha(t)(\alpha(t) - t)) + f_\alpha(t)(t - s)| \\
&\leq \epsilon^*|\alpha(t) - s| + \epsilon^*|\alpha(t) - t| + |f_\alpha(t)||t - s| \\
&\leq \epsilon^*|\alpha(t) - s| + \epsilon^*|\alpha(t) - t| + \epsilon^*|f_\alpha(t)| \\
&\leq \epsilon^*|\alpha(t) - t + t - s| + \epsilon^*|\alpha(t) - t| + \epsilon^*|f_\alpha(t)| \\
&\leq \epsilon^*|\alpha(t) - t| + \epsilon^*|t - s| + \epsilon^*|\alpha(t) - t| + \epsilon^*|f_\alpha(t)| \\
&\leq \epsilon^*[|\alpha(t) - t| + |t - s| + |\alpha(t) - t| + |f_\alpha(t)|] \\
&\leq \epsilon^*[|\alpha(t) - t| + \epsilon^* + |\alpha(t) - t| + |f_\alpha(t)|] \\
&< \epsilon^*[1 + |f_\alpha(t)| + 2|\alpha(t) - t|] = \epsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, f é contínua em t. □

Fazendo $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ e $\alpha(t) = t$, obtemos do cálculo habitual que existem exemplos de funções que são contínuas em um ponto, mas não são alfa diferenciáveis. Vejamos agora no seguinte teorema quais condições deve ter a função contínua f para ser diferenciável.

Teorema 3.1.2. *Sejam $(\mathbb{T}, \alpha)$ uma escala temporal generalizada e $t \in \mathbb{T}^\kappa$ tal que $\alpha(t) \neq t$. Suponhamos que f é contínua em t e que f está definida em $\alpha(t)$. Então f é alfa diferenciável em t com*

$$f_\alpha(t) = \frac{df(t)}{d\alpha(t)} = \frac{f(\alpha(t)) - f(t)}{\alpha(t) - t}.$$

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$ dado. Como $\alpha(t) - t \neq 0$, a função g definida por

$$g(s) = \frac{f(\alpha(t)) - f(s)}{\alpha(t) - s}, \qquad s \in \mathbb{T}, s \neq \alpha(t)$$

é contínua em t. Logo, existe uma vizinhança $\mathcal{N}$ de t tal que

$$|g(s) - g(t)| < \epsilon, \qquad \text{para todo } s \in \mathcal{N}.$$

Então

$$\left| \frac{f(\alpha(t)) - f(s)}{\alpha(t) - s} - \frac{f(\alpha(t)) - f(t)}{\alpha(t) - t} \right| < \epsilon$$

logo
$$\left|f(\alpha(t)) - f(s) - \frac{f(\alpha(t)) - f(t)}{\alpha(t) - t}(\alpha(t) - s)\right| < \epsilon|\alpha(t) - s|.$$
Portanto, f é alfa diferenciável em t com
$$f_\alpha(t) = \frac{f(\alpha(t)) - f(t)}{\alpha(t) - t}.$$
□

No seguinte teorema, vamos provar a regra do produto para as funções alfa diferenciáveis como vimos para as funções delta diferenciáveis.

Teorema 3.1.3. *(Regra do Produto). Se $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ são alfa diferenciáveis em $t \in \mathbb{T}^\kappa$, então fg é alfa diferenciável em t e as fórmulas*
$$(fg)_\alpha = f_\alpha g^\alpha + fg_\alpha = f_\alpha g + f^\alpha g_\alpha, \text{ onde } g^\alpha = g \circ \alpha$$
valem para todo $t \in \mathbb{T}^\kappa$.

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$ dado. Definimos
$$\epsilon^* = \epsilon[1 + |f(t)| + |g^\alpha(t)| + |g_\alpha(t)|]^{-1},$$
onde, sem perda de generalidade, $\epsilon^* \in (0, 1)$. Logo, existem vizinhanças $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$ e $\mathcal{N}_3$ de t com
$$|f(\alpha(t)) - f(s) - f_\alpha(t)(\alpha(t) - s)| \leq \epsilon^*|\alpha(t) - s|, \qquad \text{para todo s} \in \mathcal{N}_1,$$
$$|g(\alpha(t)) - g(s) - g_\alpha(t)(\alpha(t) - s)| \leq \epsilon^*|\alpha(t) - s|, \qquad \text{para todo s} \in \mathcal{N}_2,$$
e do Teorema 3.1.1, temos
$$|f(t) - f(s)| \leq \epsilon^*, \qquad \text{para todo s} \in \mathcal{N}_3.$$
Fazemos $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_2 \cap \mathcal{N}_3$ e seja $s \in \mathcal{N}$. Então,
$$\begin{aligned}
|(fg)(\alpha(t)) - (fg)(s) - [f_\alpha(t)g(\alpha(t)) + f(t)g_\alpha(t)](\alpha(t) - s)| &= |(fg)(\alpha(t)) - (fg)(s) \\
-f_\alpha(t)g(\alpha(t))(\alpha(t) - s) - f(t)g_\alpha(t)(\alpha(t) - s) + f(s)g(\alpha(t)) - f(s)g(\alpha(t)) \\
+g(\alpha(t))f(t) - g(\alpha(t))f(t) + g(s)f(t) - g(s)f(t) + (\alpha(t) - s)g_\alpha(t)(f(s) - f(t)) \\
-(\alpha(t) - s)g_\alpha(t)(f(s) - f(t))| \\
= |[f(\alpha(t)) - f(s) - f_\alpha(t)(\alpha(t) - s)]g(\alpha(t)) + [g(\alpha(t)) - g(s) - g_\alpha(t)(\alpha(t) - s)]f(t) \\
+[g(\alpha(t)) - g(s) - g_\alpha(t)(\alpha(t) - s)](f(s) - f(t)) + (\alpha(t) - s)g_\alpha(t)(f(s) - f(t))| \\
\leq \epsilon^*|\alpha(t) - s||g(\alpha(t))| + \epsilon^*|\alpha(t) - s||f(t)| \\
+\epsilon^*\epsilon^*|\alpha(t) - s| + \epsilon^*|\alpha(t) - s||g_\alpha(t)| \\
= \epsilon^*|\alpha(t) - s|[|g(\alpha(t))| + |f(t)| + \epsilon^* + |g_\alpha(t)|] \\
\leq |\alpha(t) - s[1 + |f(t)| + |g(\alpha(t))| + |g_\alpha(t)|] \\
= \epsilon|\alpha(t) - s|.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 3.1.1, a existência da derivada num ponto $t \in \mathbb{T}^\kappa$ implica a unicidade. Assim,

$$(fg)_\alpha = f_\alpha g^\alpha + f g_\alpha$$

A segunda fórmula decorre da primeira pois os produtos comutam. $\square$

Teorema 3.1.4. *(Regra da Cadeia). Sejam* $(\mathbb{T}, \alpha)$ *e* $(\tilde{\mathbb{T}}, \tilde{\alpha})$ *escalas temporais relacionadas por uma função* $g : \mathbb{T} \to \tilde{\mathbb{T}}$*. Seja* $w : \tilde{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ *e seja* $z = w \circ g$*. Suponhamos que* t *é um ponto de* $\mathbb{T}^\kappa$ *tal que* g *tem a propriedade* $g(\alpha(t)) = \tilde{\alpha}(g(t))$*. Se* $g_\alpha(t)$ *e* $w_{\tilde{\alpha}}(g(t))$ *existem, então* $z_\alpha(t)$ *existe e satisfaz a regra da cadeia*

$$z_\alpha = (w \circ g)_\alpha = (w_{\tilde{\alpha}} \circ g) g_\alpha, \ \textit{em } t$$

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$ dado. Definimos $\epsilon^* = \epsilon[1 + |g_\alpha(t)| + |w_{\tilde{\alpha}}(g(t))|]^{-1}$ onde, sem perda de generalidade, tomamos $\epsilon^* \in (0, 1)$. De acordo com as hipóteses, existem vizinhanças $\mathcal{N}$ de t e $\mathcal{V}$ de $g(t)$ tais que,

$$|g(\alpha(t)) - g(s) - g_\alpha(t)(\alpha(t) - s)| \leq \epsilon^* |\alpha(t) - s|, \qquad s \in \mathcal{N} \text{ e}$$
$$|w(\tilde{\alpha}(g(t))) - w(r) - w_{\tilde{\alpha}}(g(t))(\tilde{\alpha}(g(t)) - r)| \leq \epsilon^* |\tilde{\alpha}(g(t)) - r|, \qquad r \in \mathcal{V}.$$

Como g é alfa diferenciável em $t \in \mathbb{T}^\kappa$, então é contínua em t, logo existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de t tal que $s \in \mathcal{U}$ implica que $g(s) \in \mathcal{V}$. Fazemos $\mathcal{N}_1 = \mathcal{N} \cap \mathcal{U}$ e seja $s \in \mathcal{N}_1$. Então $s \in \mathcal{N}$, $g(s) \in \mathcal{V}$, e

$$\begin{aligned}
&|w(g(\alpha(t))) - w(g(s)) - [w_{\tilde{\alpha}}(g(t)) g_\alpha(t)](\alpha(t) - s)| \\
&= |w(g(\alpha(t))) - w(g(s)) - w_{\tilde{\alpha}}(g(t))(\tilde{\alpha}(g(t)) - g(s)) \\
&\quad + w_{\tilde{\alpha}}(g(t))(\tilde{\alpha}(g(t)) - g(s)) - w_{\tilde{\alpha}}(g(t)) g_\alpha(t)(\alpha(t) - s)| \\
&= |w(g(\alpha(t))) - w(g(s)) - w_{\tilde{\alpha}}(g(t))(\tilde{\alpha}(g(t)) - g(s)) \\
&\quad + [\tilde{\alpha}(g(t)) - g(s) - (\alpha(t) - s) g_\alpha(t)] w_{\tilde{\alpha}}(g(t))| \\
&\leq |w(g(\alpha(t))) - w(g(s)) - w_{\tilde{\alpha}}(g(t))(\tilde{\alpha}(g(t)) - g(s))| \\
&\quad + |\tilde{\alpha}(g(t)) - g(s) - (\alpha(t) - s) g_\alpha(t)| |w_{\tilde{\alpha}}(g(t))| \\
&\leq \epsilon^* |\tilde{\alpha}(g(t)) - g(s)| + \epsilon^* |\alpha(t) - s| |w_{\tilde{\alpha}}(g(t))| \\
&= \epsilon^* |\tilde{\alpha}(g(t)) - g(s) - (\alpha(t) - s) g_\alpha(t) + (\alpha(t) - s) g_\alpha(t)| \\
&\quad + \epsilon^* |\alpha(t) - s| |w_{\tilde{\alpha}}(g(t))| \\
&\leq \epsilon^* \left\{ |\tilde{\alpha}(g(t)) - g(s) - (\alpha(t) - s) g_\alpha(t)| + |\alpha(t) - s| |g_\alpha(t)| + |\alpha(t) - s| |w_{\tilde{\alpha}}(g(t))| \right\} \\
&\leq \epsilon^* \left\{ \epsilon^* |\alpha(t) - s| + |\alpha(t) - s| |g_\alpha(t)| + |\alpha(t) - s| |w_{\tilde{\alpha}}(g(t))| \right\} \\
&= \epsilon^* |\alpha(t) - s| \left\{ \epsilon^* + |g_\alpha(t)| + |w_{\tilde{\alpha}}(g(t))| \right\} \\
&\leq \epsilon^* |\alpha(t) - s| \left\{ 1 + |g_\alpha(t)| + |w_{\tilde{\alpha}}(g(t))| \right\} \\
&= \epsilon |\alpha(t) - s|
\end{aligned}$$

Isto establece a regra da cadeia. $\square$

A hipotese $g(\alpha(t)) = \tilde{\alpha}(g(t))$ vale na regra da cadeia usual do cálculo, pois nesse caso temos $\alpha(t) = t$ e $\tilde{\alpha}(x) = x$.

Exemplo 3.1.2. (A Regra da Cadeia discreta). Suponhamos que $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ e $\alpha = \sigma$, i.e., $\alpha(t) = t + 1$ para $t \in \mathbb{N}$. Sejam $g(t) := \dfrac{1}{t}$ em $\mathbb{N}$, e $\tilde{\mathbb{T}} = \left\{\dfrac{1}{t} : t \in \mathbb{N}\right\}$. Consideremos $w : \tilde{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ definido por $w(x) = x^2$. Então, $z(t) = w(g(t)) = \dfrac{1}{t^2}$ e a função de salto induzida $\tilde{\alpha}$ em $\tilde{\mathbb{T}}$ é tal que $\tilde{\alpha}(x) = g(\alpha(t))$ para $x = g(t)$ e $\tilde{\alpha}(g(t)) = \dfrac{1}{t+1}$. Como $x = \dfrac{1}{t}$, então $t = \dfrac{1}{x}$. Logo, $\tilde{\alpha}(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

Assim, pelo Teorema 3.1.2, temos

$$w_{\tilde{\alpha}}(x) = \frac{w(\tilde{\alpha}(x)) - w(x)}{\tilde{\alpha}(x) - x},$$

$\dfrac{x}{x+1} = \dfrac{1}{t+1}$ e a regra da cadeia diz

$$z_\alpha(t) = (w \circ g)_\alpha(t) = w_{\tilde{\alpha}}(g(t))g_\alpha(t) = w_{\tilde{\alpha}}\left(\frac{1}{t}\right)g_\alpha(t)$$

$$= \left(\frac{w(\tilde{\alpha}(\frac{1}{t})) - w(\frac{1}{t})}{\tilde{\alpha}(\frac{1}{t}) - \frac{1}{t}}\right)g_\alpha(t)$$

$$= \left(\frac{w(\frac{1}{t+1}) - w(\frac{1}{t})}{\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t}}\right)\left(\frac{g(t+1) - g(t)}{t+1-t}\right)$$

$$= \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{t^2}$$

$$= \frac{-2t-1}{(t(t+1))^2}.$$

Observação 3.1.2. Se fazemos $\alpha = \rho$ na definição da alfa derivada então temos o que Atici e Guseinov [4] chamam a derivada nabla que eles denotam por $f^\nabla(t)$. Lembremos algumas definições que fizemos no inicio deste trabalho

$$\nu(t) := t - \rho(t) \quad \text{e} \quad f^\rho(t) := f(\rho(t))$$

Também precisamos do conjunto $\mathbb{T}_k$, que é derivado a partir da escala temporal como segue:

Se $\mathbb{T}$ tem um mínimo m discreto à direita, então $\mathbb{T}_k = \mathbb{T} - \{m\}$. Caso contrário, $\mathbb{T}_k = \mathbb{T}$.

É possível provar teoremas análogos aos teoremas demostrados para a derivada delta e integral delta.

3.2 Derivada $\alpha - diamante$

Nesta seção, usaremos a referencia [18], para apresentar a definição da derivada $\alpha-$ *diamante* independentemente das derivadas delta e nabla e examinamos suas propriedades e relações com as derivadas delta e nabla. Por uma questão de legibilidade das fórmulas seguintes, apresentamos as seguintes notações. Sejam $t, s \in \mathbb{T}$. Definimos

$$\mu_{ts} = \sigma(t) - s, \qquad \nu_{ts} = \rho(t) - s.$$

Definição 3.2.1. *Seja $\mathbb{T}$ uma escala temporal, $\alpha \in [0,1]$, e $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ uma função dada. A $\Diamond_\alpha -$ derivada de f em t é definido como o número $f^{\Diamond_\alpha}(t)$, se existe, tal que para todo $\epsilon > 0$, existe uma vizinhança $U \subseteq \mathbb{T}$ de t (i.e.,$U = (t-\delta, t+\delta) \cap \mathbb{T}$ para algum $\delta > 0$), tal que*

$$|\alpha[f^\sigma(t) - f(s)]\nu_{ts} + (1-\alpha)[f^\rho(t) - f(s)]\mu_{ts} - f^{\Diamond_\alpha}(t)\mu_{ts}\nu_{ts}| \leq \epsilon|\mu_{ts}\nu_{ts}|,$$

para todo $s \in U$. Dizemos que f é $\Diamond_\alpha$-diferenciável em $\mathbb{T}_k^k$, sempre que $f^{\Diamond_\alpha}(t)$ existir para todo $t \in \mathbb{T}_k^k$.

A derivada $\alpha - diamante$ se reduz à $\Delta - derivada$ para $\alpha = 1$ e à $\nabla - derivada$ para $\alpha = 0$.

Teorema 3.2.1. *A derivada $\alpha - diamante$, se existe, é única*

Demonstração. Suponha que f tem duas derivadas $f^{\Diamond_\alpha}(t) = \phi_1(t)$ e $f^{\Diamond_\alpha}(t) = \phi_2(t)$ em t. Logo, para todo $\epsilon > 0$, existem vizinhanças U_1 e U_2 de t tais que

$$|\alpha[f^\sigma(t) - f(s)]\nu_{ts} + (1-\alpha)[f^\rho(t) - f(s)]\mu_{ts} - \phi_1(t)\mu_{ts}\nu_{ts}| \leq \frac{\epsilon}{2}|\mu_{ts}\nu_{ts}|, \quad \forall s \in U_1 \;\; e$$
$$|\alpha[f^\sigma(t) - f(s)]\nu_{ts} + (1-\alpha)[f^\rho(t) - f(s)]\mu_{ts} - \phi_2(t)\mu_{ts}\nu_{ts}| \leq \frac{\epsilon}{2}|\mu_{ts}\nu_{ts}|. \quad \forall s \in U_2.$$

Seja $s \in U = U_1 \cap U_2$. Então,

$$\begin{aligned}
&|\phi_1(t) - \phi_2(t)||\mu_{ts}\nu_{ts}| = |\phi_1(t)\mu_{ts}\nu_{ts} - \phi_2(t)\mu_{ts}\nu_{ts}| \\
&= | - \alpha[f^\sigma(t) - f(s)]\nu_{ts} - (1-\alpha)[f^\rho(t) - f(s)]\mu_{ts} + \phi_1(t)\mu_{ts}\nu_{ts} \\
&\quad +\alpha[f^\sigma(t) - f(s)]\nu_{ts} + (1-\alpha)[f^\rho(t) - f(s)]\mu_{ts} - \phi_2(t)\mu_{ts}\nu_{ts}| \\
&\leq |\alpha[f^\sigma(t) - f(s)]\nu_{ts} + (1-\alpha)[f^\rho(t) - f(s)]\mu_{ts} - \phi_1(t)\mu_{ts}\nu_{ts}| \\
&\quad +|\alpha[f^\sigma(t) - f(s)]\nu_{ts} + (1-\alpha)[f^\rho(t) - f(s)]\mu_{ts} - \phi_2(t)\mu_{ts}\nu_{ts}| \\
&\leq \frac{\epsilon}{2}|\mu_{ts}\nu_{ts}| + \frac{\epsilon}{2}|\mu_{ts}\nu_{ts}| \\
&= \epsilon|\mu_{ts}\nu_{ts}| \text{ para todo } s \in U.
\end{aligned}$$

Assim, $|\phi_1(t) - \phi_2(t)| \leq \epsilon$ e deixando ϵ vá para zero, vemos que $\phi_1(t) = \phi_2(t)$. □

Teorema 3.2.2. *Seja $0 \leq \alpha \leq 1$. Se f é Δ e ∇ diferenciável em $t \in \mathbb{T}$, então f é $\Diamond_\alpha$ diferenciável em t e $f^{\Diamond_\alpha}(t) = \alpha f^\Delta(t) + (1-\alpha)f^\nabla(t)$.*

Demonstração. Suponhamos que $f^{\Delta}(t)$ e $f^{\nabla}(t)$ existem. Então para todo $\epsilon > 0$, existem vizinhanças U_1 e U_2 de t tais que

$$|f^{\sigma}(t) - f(s) - f^{\Delta}(t)\mu_{ts}| \leq \epsilon|\mu_{ts}|, \quad \forall\ s \in U_1,$$
$$|f^{\rho}(t) - f(s) - f^{\nabla}(t)\nu_{ts}| \leq \epsilon|\nu_{ts}|, \quad \forall\ s \in U_2,$$

então

$$|\alpha[f^{\sigma}(t) - f(s)]\nu_{ts} - \alpha f^{\Delta}(t)\mu_{ts}\nu_{ts}| \leq \alpha\epsilon|\mu_{ts}\nu_{ts}|, \quad \forall\ s \in U_1.$$
$$|(1-\alpha)[f^{\rho}(t) - f(s)]\mu_{ts} - (1-\alpha)f^{\nabla}(t)\mu_{ts}\nu_{ts}| \leq (1-\alpha)\epsilon|\mu_{ts}\nu_{ts}|, \quad \forall\ s \in U_2.$$

Assim, seja $s \in U = U_1 \cap U_2$, logo

$$\begin{aligned}
|\alpha[f^{\sigma}(t) - f(s)]\nu_{ts} + (1-\alpha)[f^{\rho}(t) - f(s)]\mu_{ts} - [\alpha f^{\Delta}(t) + (1-\alpha)f^{\nabla}(t)]\mu_{ts}\nu_{ts}| \\
\leq |\alpha[f^{\sigma}(t) - f(s)]\nu_{ts} - \alpha f^{\Delta}(t)\mu_{ts}\nu_{ts}| \\
+|(1-\alpha)[f^{\rho}(t) - f(s)]\mu_{ts} - (1-\alpha)f^{\nabla}(t)f^{\nabla}(t)| \\
\leq \alpha\epsilon|\mu_{ts}\nu_{ts}| + (1-\alpha)\epsilon|\mu_{ts}\nu_{ts}| \\
= \epsilon|\mu_{ts}\nu_{ts}|.
\end{aligned}$$

Assim, $f^{\diamondsuit_{\alpha}}(t)$ existe e $f^{\diamondsuit_{\alpha}}(t) = \alpha f^{\Delta}(t) + (1-\alpha)f^{\nabla}(t)$. □

Corolário 3.2.1. *Seja $t \in \mathbb{T}$ denso. Se $f'(t)$ existe, temos*

$$f^{\diamondsuit_{\alpha}}(t) = f^{\Delta}(t) = f^{\nabla}(t) = f'(t).$$

Demonstração. Seja o ponto t denso e $f'(t) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(t+h) - f(t)}{h}$ existe como um valor finito. Para uma vizinhança suficientemente pequena U de t, podemos substituir $h = s - t$ para todo $s, t \in U$ e obtemos $f'(t) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(t+h) - f(t)}{h} = \lim_{s\to t} \dfrac{f(t) - f(s)}{t - s}$. Então, pelo Teorema 2.2.2 (iii), temos $f^{\Delta}(t) = f'(t)$, e pela Observação 3.1.2 temos, $f^{\nabla}(t) = f'(t)$. Assim pelo Teorema 3.2.2 obtemos

$$f^{\diamondsuit_{\alpha}}(t) = \alpha f^{\Delta}(t) + (1-\alpha)f^{\nabla}(t) = \alpha f'(t) + (1-\alpha)f'(t) = f'(t).$$

□

Lema 3.2.1. *Seja $t \in \mathbb{T}$ isolado. Então f é contínua em t.*

Demonstração. Suponha que $t \in \mathbb{T}$ é discreto. Então $\mu(t) > 0$ e $\nu(t) > 0$. Seja $0 < \delta < min(\mu(t), \nu(t))$. Então, para todo $\epsilon > 0$, existe uma vizinhança $U = (t-\delta, t+\delta) \cap \mathbb{T}$ de t tal que, para todo $s \in U$, $s = t$ e assim $|f(t) - f(s)| = 0 < \epsilon$. □

Corolário 3.2.2. *Seja $t \in \mathbb{T}$ isolado. Então* *(i)* $f^{\Delta}(t)$ *existe e*

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f^{\sigma}(t) - f(t)}{\sigma(t) - t};$$

(ii) $f^{\nabla}(t)$ *existe e*

$$f^{\nabla}(t) = \frac{f^{\rho}(t) - f(t)}{\rho(t) - t};$$

(iii) $f^{\diamondsuit_\alpha}(t)$ *existe e*

$$f^{\diamondsuit_\alpha}(t) = \alpha\frac{f^{\sigma}(t) - f(t)}{\sigma(t) - t} + (1-\alpha)\frac{f^{\rho}(t) - f(t)}{\rho(t) - t}.$$

Demonstração. Pelo lema 3.2.1 temos que f é contínua em t. Então a parte (i) se segue do Teorema 2.2.2 (ii), e a parte (ii) se segue da observação 3.1.2. Então pelo Teorema 3.2.2, obtemos

$$f^{\diamondsuit_\alpha}(t) = \alpha f^{\Delta}(t) + (1-\alpha)f^{\nabla}(t) = \alpha\frac{f^{\sigma}(t) - f(t)}{\sigma(t) - t} + (1-\alpha)\frac{f^{\rho}(t) - f(t)}{\rho(t) - t}.$$

□

Corolário 3.2.3. *Seja* $t \in \mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}$ *discreto à esquerda, denso à direita e suponha que*

$$f'(t^+) = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

existe. Então,

(i) $f^{\Delta}(t) = f'(t^+)$*;*

(ii) $f^{\nabla}(t) = \dfrac{f^{\rho}(t) - f(t)}{\rho(t) - t}$*;*

(iii) $f^{\diamondsuit_\alpha}(t) = \alpha f'(t^+) + (1-\alpha)\dfrac{f^{\rho}(t) - f(t)}{\rho(t) - t}$.

Demonstração. (i) Para toda vizinhança $U = (t-\delta, t+\delta)$ de t tal que $\delta < t - \rho(t)$, temos que $s - t > 0$, para todo $s \in U$. Assim, podemos substituir $h = s - t$ no limite da direita para ter

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \lim_{s\to t^+}\frac{f(t) - f(s)}{t - s}.$$

Então, pelo Teorema 2.2.2 (iii), temos que

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s\to t}\frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f'(t^+).$$

(ii) Como $f'(t^+)$ existe, então f é continua em t, logo pela observação 3.1.2 se tem o resultado.

(iii) Como f é Δ e ∇ diferenciável em $t \in \mathbb{T}$, então pelo Teorema 3.2.2, temos que $f^{\Diamond_\alpha}(t)$ existe e

$$f^{\Diamond_\alpha}(t) = \alpha f^{\Delta}(t) + (1-\alpha) f^{\nabla}(t) = \alpha f'(t^+) + (1-\alpha)\frac{f^\rho(t) - f(t)}{\rho(t) - t}.$$

□

A demonstração do seguinte corolário é análogo a do corolário acima e, portanto, a omitimos aqui.

Corolário 3.2.4. *Seja $t \in \mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}$ discreto à direita, denso à esquerda e suponha que*

$$f'(t^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

existe. Então

(i) $f^{\Delta}(t) = \dfrac{f^\sigma(t) - f(t)}{\sigma(t) - t}$;

(ii) $f^{\nabla}(t) = f'(t^-)$;

(iii) $f^{\Diamond_\alpha}(t) = \alpha\dfrac{f^\sigma(t) - f(t)}{\sigma(t) - t} + (1-\alpha) f'(t^-)$.

Teorema 3.2.3. *Seja $\mathbb{T}$ uma escala temporal e $0 \le \alpha \le 1$. Se f é $\Diamond_\alpha$-diferenciável em t, então f é contínua em t.*

Demonstração. Suponha que f é $\Diamond_\alpha$ diferenciável em $t \in \mathbb{T}$. Se t é um ponto denso ou isolado, o resultado segue dos Corolários 3.2.2 e 3.2.1, respectivamente. Resta considerar os casos onde t é denso à direita e discreto à esquerda, ou t é discreto à direita e denso à esquerda. Suponha que t é denso a direita e discreto à esquerda. Assim, $\sigma(t) = t$, e $\rho(t) < t$. Seja $\epsilon \in (0,1)$ e

$$\epsilon_* = \frac{\epsilon\alpha|\rho(t) - t|}{-|(1-\alpha)[f^\rho(t) - f(t)] - f^{\Diamond_\alpha}(t)[(\rho(t) - t) - 1]| + |\rho(t) - t| + 1}.$$

Assim, $\epsilon_* \in (0,1)$. Então, existe uma vizinhança U_1 de t tal que

$$\begin{aligned}
&|\alpha[f^\sigma(t) - f(s)]\nu_{ts} + (1-\alpha)[f^\rho(t) - f(s)]\mu_{ts} - f^{\Diamond_\alpha}(t)\mu_{ts}\nu_{ts}| \\
&= |\alpha[f(t) - f(s)][(\rho(t) - t) + (t-s)] \\
&\quad + (1-\alpha)[(f^\rho(t) - f(t)) + (f(t) - f(s))](t-s) \\
&\quad - f^{\Diamond_\alpha}(t)(t-s)[(\rho(t) - t) + (t-s)]| \\
&= |\alpha[f(t) - f(s)](\rho(t) - t) + (1-\alpha)[f^\rho(t) - f(t)](t-s) \\
&\quad + [f(t) - f(s)](t-s) - f^{\Diamond_\alpha}(t)(t-s)[(\rho(t) - t) + (t-s)]| \\
&= |[f(t) - f(s)][\alpha(\rho(t) - t) + (t-s)] \\
&\quad + [(1-\alpha)[f^\rho(t) - f(t)] - f^{\Diamond_\alpha}(t)[(\rho(t) - t) + (t-s)]](t-s)| \\
&\le \epsilon_*|\mu_{ts}\nu_{ts}| \\
&= \epsilon_*|t-s||[(\rho(t) - t) + (t-s)]|,
\end{aligned}$$

para todo $s \in U_1$. Assim,

$$\begin{aligned} &|[f(t) - f(s)][\alpha(\rho(t) - t) + (t - s)]| \\ &+|[(1-\alpha)[f^\rho(t) - f(t)] - f^{\Diamond_\alpha}(t)[(\rho(t) - t) + (t - s)]](t - s)| \\ &\leq \epsilon_*|t - s||[(\rho(t) - t) + (t - s)]|. \end{aligned}$$

Como t é discreto à esquerda e denso à direita, temos que $\rho(t) < t \leq s$, para todo $s \in U_1$. Seja $s \in U = U_1 \cap (t - \epsilon_*, t + \epsilon_*)$, então

$$\begin{aligned} &|[f(t) - f(s)]\alpha(\rho(t) - t)| \\ &\leq |[f(t) - f(s)][\alpha(\rho(t) - t) + (t - s)]| \\ &\leq -|(1-\alpha)[f^\rho(t) - f(t)] - f^{\Diamond_\alpha}(t)[(\rho(t) - t) + (t - s)]||t - s| \\ &+\epsilon_*|t - s||(\rho(t) - t) + (t - s)| \\ &< -\epsilon_*|(1-\alpha)[f^\rho(t) - f(t)] - f^{\Diamond_\alpha}(t)[(\rho(t) - t) - 1]| + \epsilon_*[|\rho(t) - t| + 1]. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} |f(t) - f(s)| &< \frac{\epsilon_*[-|(1-\alpha)[f^\rho(t) - f(t)] - f^{\Diamond_\alpha}(t)[(\rho(t) - t) - 1]| + [|\rho(t) - t| + 1]]}{\alpha|\rho(t) - t|} \\ &= \epsilon, \end{aligned}$$

para todo $s \in U$. Portanto f é contínua em t. $\square$

Teorema 3.2.4. *Seja $\mathbb{T}$ uma escala temporal e $0 < \alpha < 1$. Se f é $\Diamond_\alpha$ diferenciável em t, então f é Δ e ∇ diferenciável em t.*

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$ dado, e seja $\epsilon_* = \epsilon\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha} > 0$. Suponha que f seja $\Diamond_\alpha$-diferenciável em $t \in \mathbb{T}$. Assim, pelo teorema anterior, f é contínua em t. Se t é um ponto denso ou isolado, o resultado segue dos Corolários 3.2.1 e 3.2.2, respetivamente. Resta examinar os dois casos onde t é denso à direita e discreto à esquerda, ou t é discreto à direita e denso à esquerda.

Suponhamos que t é discreto à direita e denso à esquerda. Assim, $\sigma(t) > t$ e $\rho(t) = t$. Também, como f é contínua em t, pelo Teorema 2.2.2 (ii) f é Δ-diferenciável em t. Então, para todo $\epsilon_* > 0$, existem vizinhanças U_1 e U_2 de t tais que:

$$|\alpha[f^\sigma(t) - f(s)]\nu_{ts} + (1-\alpha)[f^\rho(t) - f(s)]\mu_{ts} - f^{\Diamond_\alpha}(t)\mu_{ts}\nu_{ts}| \leq \epsilon_*|\mu_{ts}\nu_{ts}|,$$

para todo $s \in U_1$ e

$$|f^\sigma(t) - f(s) - f^\Delta(t)\mu_{ts}| \leq \epsilon_*|\mu_{ts}|,$$

para todo $s \in U_2$.

Escolhemos $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $f^{\Diamond_\alpha}(t) = \alpha f^\Delta(t) + (1-\alpha)\gamma$. Então, existe uma vizinhança

$U = U_1 \cap U_2$ de t tal que,

$$\begin{aligned}
&|\alpha[f^\sigma(t) - f(s)]\nu_{ts} + (1-\alpha)[f^\rho(t) - f(s)]\mu_{ts} - [\alpha f^\Delta(t) + (1-\alpha)\gamma]\mu_{ts}\nu_{ts}| \\
&= |\alpha[f^\sigma(t) - f(s) - f^\Delta(t)\mu_{ts}]\nu_{ts} + (1-\alpha)[f^\rho(t) - f(s) - \gamma\nu_{ts}]\mu_{ts}| \\
&\le \epsilon_*|\mu_{ts}\nu_{ts}|.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
|(1-\alpha)[f^\rho(t) - f(s) - \gamma\nu_{ts}]\mu_{ts}| &\le \epsilon_*|\mu_{ts}\nu_{ts}| + |\alpha[f^\sigma(t) - f(s) - f^\Delta(t)\mu_{ts}]\nu_{ts}| \\
&\le \epsilon_*|\mu_{ts}\nu_{ts}| + \alpha\epsilon_*|\mu_{ts}\nu_{ts}| = (1+\alpha)\epsilon_*|\mu_{ts}\nu_{ts}|.
\end{aligned}$$

Então,

$$|[f^\rho(t) - f(t)] - \gamma\nu_{ts}| \le \epsilon_* \frac{1+\alpha}{1-\alpha}|\nu_{ts}| = \epsilon|\nu_{ts}|$$

Portanto $f^\nabla(t) = \gamma$ existe.

O caso t denso à direita e discreto à esquerda é similar. $\square$

4 Integração de Riemann

No Capítulo 2, o conceito de integração em escalas temporais foi definido por meio de uma antiderivada (ou pré-antiderivada) de uma função e é chamada a Integral de Cauchy.
Neste capítulo, daremos um tratamento das integrais de Riemann e Darboux em escalas temporais. Mostraremos a equivalência das definições da integral de Darboux e Riemann. Os resultados apresentados neste capítulo podem ser encontrados em [8].

4.1 Delta e Nabla Integrais de Riemann

Seja $\mathbb{T}$ uma escala temporal, $a < b$ pontos em $\mathbb{T}$, e $[a,b]_{\mathbb{T}}$ o intervalo fechado e limitado em $\mathbb{T}$. Uma partição de $[a,b]_{\mathbb{T}}$ é qualquer subconjunto finito ordenado P dado por

$$P = \{t_0, t_1, ..., t_n\} \subseteq [a,b]_{\mathbb{T}}, \quad \text{onde} \quad a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b.$$

O número n depende da partição particular, assim temos $n = n(P)$. Os intervalos $[t_{i-1}, t_i)$ para $1 \leq i \leq n$ são chamados os subintervalos da partição P. Denotamos o conjunto de todas as partições de $[a,b]$ por $\mathcal{P} = \mathcal{P}(a,b)$. Seja f uma função de valor real que é limitada em $[a,b]$. Definimos

$$M = \sup\{f(t) : t \in [a,b)_{\mathbb{T}}\} \text{ e } m = \inf\{f(t) : t \in [a,b)_{\mathbb{T}}\}$$

para $1 \leq i \leq n$. Além disso, definimos

$$M_i = \sup\{f(t) : t \in [t_{i-1}, t_i)_{\mathbb{T}}\} \text{ e } m_i = \inf\{f(t) : t \in [t_{i-1}, t_i)_{\mathbb{T}}\}.$$

A Δ-soma superior de Darboux $U(f,P)$ e a Δ-soma inferior de Darboux $L(f,P)$ de f com respeito a P são definidos por

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) \quad \text{e} \quad L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1})$$

Observe que, como $M_i \leq M$ para todo i, temos

$$U(f,P) \leq \sum_{i=1}^{n} M(t_i - t_{i-1}) = M(b-a).$$

Da mesma forma, $L(f,P) \geq m(b-a)$ já que $m_i \geq m$ para todo i e, assim, temos

$$m(b-a) \leq L(f,P) \leq U(f,P) \leq M(b-a)$$

Usando estas ideias, definimos a Δ-integral superior de Darboux $U(f)$ de f de a até b como

$$U(f) = \inf\{U(f,P) : P \in \mathcal{P}(a,b)\}$$

e a Δ-integral inferior de Darboux $L(f)$ de f de a até b é definida por

$$L(f) = \sup \{L(f, P) : P \in \mathcal{P}(a, b)\}.$$

Note que, a partir das desigualdades acima, estes dois valores são números reais finitos.

Definição 4.1.1. *Dizemos que f é integrável (ou delta integrável ou Δ-integrável) de a até b (ou em $[a, b]$) sempre que $L(f) = U(f)$. Neste caso, escrevemos $\int_a^b f(t)\Delta t$ para este valor comum. Chamamos esta integral a Δ-integral de Darboux.*

Se $P, Q \in \mathcal{P}(a, b)$ tal que $P \subseteq Q$, então dizemos que Q é um refinamento de (ou é mais fina do que) P.

Lema 4.1.1. *Seja f uma função limitada em $[a, b]$. Se $P, Q \in \mathcal{P}(a, b)$ e Q é um refinamento de P, então*

$$L(f, P) \leq L(f, Q) \leq U(f, Q) \leq U(f, P).$$

Demonstração. A desigualdade do meio é valida para qualquer partição Q. Assim, primeiro provamos que

$$L(f, P) \leq L(f, Q).$$

Podemos assumir, sem perda de generalidade, que Q tem apenas mais um ponto que P. Se Q tem mais de um ponto do que P, poderíamos usar um argumento de indução para reduzir ao caso em que Q tem apenas mais um ponto que P. Assim, denotamos esse ponto por τ. Se P é dado por

$$a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b,$$

então, existe algum $k \in \{1, 2, ..., n\}$ tal que Q é dado por

$$a = t_0 < t_1 < ... < t_{k-1} < \tau < t_k < ... < t_n = b.$$

Fazemos $m_k = \inf \{f(t) : t \in [t_{k-1}, t_k)_{\mathbb{T}}\}$, $m_k^{(1)} = \inf \{f(t) : t \in [t_{k-1}, \tau)_{\mathbb{T}}\}$ e $m_k^{(2)} = \inf \{f(t) : t \in [\tau, t_k)_{\mathbb{T}}\}$. Então $m_k^{(1)} \geq m_k$ e $m_k^{(2)} \geq m_k$ de modo que

$$\begin{aligned} L(f, Q) - L(f, P) &= m_k^{(1)}(\tau - t_{k-1}) + m_k^{(2)}(t_k - \tau) - m_k(t_k - t_{k-1}) \\ &\geq m_k(\tau - t_{k-1}) + m_k(t_k - \tau) - m_k(t_k - t_{k-1}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

e, assim, temos $L(f, P) \leq L(f, Q)$. De forma análoga, é possível mostrar que

$$U(f, Q) \leq U(f, P).$$

$\square$

Lema 4.1.2. *Se f é limitada em $[a, b]_{\mathbb{T}}$ e $P, Q \in \mathcal{P}(a, b)$, então $L(f, P) \leq U(f, Q)$*

Demonstração. Como $P, Q \in \mathcal{P}(a,b)$, então $P \cup Q \in \mathcal{P}(a,b)$. Além disso, $P \subseteq P \cup Q$ e $Q \subseteq P \cup Q$, logo aplicando o Lema 4.1.1 obtemos

$$L(f,P) \leq L(f, P \cup Q) \leq U(f, P \cup Q) \leq U(f,Q),$$

de modo que $L(f,P) \leq U(f,Q)$. □

Teorema 4.1.1. *Se f é uma função limitada em $[a,b]$, então $L(f) \leq U(f)$.*

Demonstração. Seja $P \in \mathcal{P}(a,b)$ fixo. Pelo Lema 4.1.2., $L(f,P)$ é um limite inferior para o conjunto

$$\{U(f,Q) : Q \in \mathcal{P}(a,b)\}$$

Portanto,

$$L(f,P) \leq U(f)$$

pois, $U(f)$ é o ínfimo das somas superiores. Assim, a afirmação anterior mostra que $U(f)$ é um limite superior para o conjunto

$$\{L(f,P) : P \in \mathcal{P}(a,b)\}$$

e, portanto, $U(f) \geq L(f)$. □

Teorema 4.1.2. *Se $L(f,P) = U(f,P)$ para algum $P \in \mathcal{P}(a,b)$, então a função f é integrável de a até b e*

$$\int_a^b f(t)\Delta t = L(f,P) = U(f,P).$$

Demonstração. Do Teorema 4.1.1, segue-se que

$$L(f,P) \leq L(f) \leq U(f) \leq U(f,Q) \text{ para todo } P, Q \in \mathcal{P}(a,b).$$

Em particular,

$$L(f,P) \leq L(f) \leq U(f) \leq U(f,P) \text{ para todo } P \in \mathcal{P}(a,b).$$

Assim, se $L(f,P) = U(f,P)$, então $U(f) = L(f)$ e, portanto, f é integrável com

$$\int_a^b f(t)\Delta t = U(f) = U(f,P) = L(f) = L(f,P).$$

□

Teorema 4.1.3. *(Primeiro Critério de Cauchy para Integrabilidade) Uma função limitada f em $[a,b]_{\mathbb{T}}$ é integrável se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$, existe um $P \in \mathcal{P}(a,b)$ tal que,*

$$U(f,P) - L(f,P) < \epsilon$$

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$ e suponha primeiro que f é integrável. Como $U(f)$ e $L(f)$ representam o supremo e o ínfimo dos conjuntos das respectivas somas, então existem $P_1, P_2 \in \mathcal{P}(a,b)$ satisfazendo

$$L(f,P_1) > L(f) - \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad U(f,P_2) < U(f) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Para $P = P_1 \cup P_2$, aplicamos o Lema 4.1.1 e obtemos

$$\begin{aligned} U(f,P) - L(f,P) &\leq U(f,P_2) - L(f,P_1) \\ &< U(f) + \frac{\epsilon}{2} - \left(L(f) - \frac{\epsilon}{2}\right) \\ &= U(f) - L(f) + \epsilon. \end{aligned}$$

Como f é integrável, $U(f) = L(f)$ e assim a desigualdade dada no enunciado do Teorema é válido. Reciprocamente, suponha que para cada $\epsilon > 0$ a desigualdade dada no enunciado do Teorema é válida. Então,

$$U(f) \leq U(f,P) = U(f,P) - L(f,P) + L(f,P) < \epsilon + L(f,P) \leq \epsilon + L(f).$$

Como ϵ é arbitrário, temos $U(f) \leq L(f)$. Ao aplicar o Teorema 4.1.1, vemos que $U(f) = L(f)$ e, assim, f é integrável. $\square$

Lema 4.1.3. *Para cada $\delta > 0$, existe alguma partição $P \in \mathcal{P}(a,b)$ dada por $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ tal que para cada $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ ou*

$$t_i - t_{i-1} \leq \delta$$

ou

$$t_i - t_{i-1} > \delta \quad \text{e} \quad \rho(t_i) = t_{i-1}.$$

Demonstração. Definimos os pontos $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ indutivamente, deixando $t_0 = a$ e

$$t_i = \begin{cases} \sup A_i, & \text{se} \quad A_i \neq \emptyset \\ \sigma(t_{i-1}), & \text{se} \quad A_i = \emptyset, \end{cases}$$

onde $A_i = (t_{i-1}, t_{i-1} + \delta] \cap [a,b]_{\mathbb{T}}$ e $[a,b]_{\mathbb{T}} \subseteq \mathbb{T}$. Então $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ para algum $n \in \mathbb{N}$.
Se $t_{i-1} < t_i$ e $t_i = \sigma(t_{i-1})$, então $A_i = \emptyset$, logo $t_i \notin (t_{i-1}, t_{i-1} + \delta]$. Assim, $t_i > t_{i-1} + \delta$ e $\rho(t_i) = t_{i-1}$.
Se $t_{i-1} < t_i$ e $t_i = \sup A_i$, então $A_i \neq \emptyset$ e $t_i \leq t_{i-1} + \delta$. O resultado segue. Observe que a desigualdade $t_{i-1} < t_i$ com $\sigma(t_{i-1}) = t_i$ é equivalente a $t_{i-1} < t_i$ com $\rho(t_i) = t_{i-1}$. $\square$

Definição 4.1.2. *Denotamos por $\mathcal{P}_\delta = \mathcal{P}_\delta(a,b)$ o conjunto de todos os $P \in \mathcal{P}(a,b)$ que possuem a propriedade indicada no Lema 4.1.3*

Teorema 4.1.4. *(Segundo Critério de Cauchy para Integrabilidade). Uma função limitada f em $[a,b]_{\mathbb{T}}$ é integrável se, e somente, se para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$P \in \mathcal{P}_\delta(a,b) \text{ implica } U(f,P) - L(f,P) < \epsilon.$$

Demonstração. O Teorema 4.1.3 mostra que a condição épsilon-delta implica integrabilidade. Reciprocamente, suponha que f é integrável de a até b. Seja $\epsilon > 0$ e seja $P_0 \in \mathcal{P}$ dado por

$$a = \tau_0 < \tau_1 < ... < \tau_l = b$$

tal que

$$U(f,P_0) - L(f,P_0) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Sem perda de generalidade, $f \neq 0$. Seja

$$\delta = \frac{\epsilon}{8lB}, \text{ onde } B = \sup\{|f(t)| : t \in [a,b]\}$$

e l é o número de pontos na partição P_0.
Para verificar a afirmação dada no teorema, consideremos qualquer $P \in \mathcal{P}_\delta(a,b)$ dada por

$$a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$$

Seja $Q = P \cup P_0$. Se Q tem um elemento a mais, que P, digamos τ, então temos que $\tau \in (t_{k-1}, t_k)_{\mathbb{T}}$ para algum $k \in \{1,2,...,n\}$, onde $t_k - t_{k-1} \leq \delta$. Certamente, se $t_k - t_{k-1} > \delta$, então pela condição $P \in P_\delta$ temos $\rho(t_k) = t_{k-1}$, e portanto $(t_{k-1}, t_k) = \emptyset$. Agora, como na demonstração do Lema 4.1.1, temos

$$\begin{aligned} L(f,Q) - L(f,P) &= m_k^{(1)}(\tau - t_{k-1}) + m_k^{(2)}(t_k - \tau) - m_k(t_k - t_{k-1}) \\ &\leq B(\tau - t_{k-1} + t_k - \tau + t_k - t_{k-1}) \\ &= 2B(t_k - t_{k-1}) \\ &\leq 2B\delta. \end{aligned}$$

Como Q tem $l-1$ elementos que não estão em P, mostramos por indução que

$$L(f,Q) - L(f,P) \leq 2(l-1)B\delta = 2(l-1)B\frac{\epsilon}{8lB} < \frac{\epsilon}{4}.$$

Pelo Lema 4.1.1, temos $L(f,P_0) \leq L(f,Q)$ e, assim

$$L(f,P_0) - L(f,P) < \frac{\epsilon}{4}.$$

Similarmente,

$$U(f,P) - U(f,P_0) < \frac{\epsilon}{4}$$

e, portanto,

$$U(f,P) - L(f,P) < U(f,P_0) - L(f,P_0) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Pela primeira desigualdade dada na demonstração deste teorema, obtemos

$$U(f,P) - L(f,P) < \epsilon$$

e a conclusão segue. $\square$

Após examinarmos a integral de Darboux, damos a definição da integral de Riemann.

Definição 4.1.3. *Seja f uma função limitada em $[a,b]_{\mathbb{T}}$ e seja $P \in \mathcal{P}(a,b)$ dado por $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$. Em cada intervalo $[t_{i-1}, t_i)_{\mathbb{T}}$ com $1 \leq i \leq n$, escolhemos um ponto arbitrário ξ_i e a forma da soma*

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}).$$

S é uma Δ-soma de Riemann de f com partição $P \in \mathcal{P}$. Dizemos que f é Riemann integrável em $[a,b]_{\mathbb{T}}$ se existe um numero I tal que para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|S - I| < \epsilon$$

para cada Δ-soma de Riemann S de f correspondente a qualquer $P \in \mathcal{P}_\delta(a,b)$ e independente da escolha de $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i)_{\mathbb{T}}$ para $1 \leq i \leq n$. O número I é chamado Δ-integral de Riemann de f de a até b.

Teorema 4.1.5. *A Δ-integral de Riemann, se existe, é única*

Demonstração. Seja f Riemann integrável em $[a,b]_{\mathbb{T}}$ e suponha que I_1 e I_2 sejam dois valores da integral de f neste intervalo. Mostremos que $I_1 = I_2$. Como f é integrável, então para todo $\epsilon > 0$, existem δ_1, $\delta_2 > 0$ tais que

$$|S - I_1| < \frac{\epsilon}{2}$$
$$|S - I_2| < \frac{\epsilon}{2}$$

para cada Δ-soma de Riemann S de f correspondente a qualquer $P \in \mathcal{P}_{\delta_1}(a,b)$ e $P \in \mathcal{P}_{\delta_2}(a,b)$, respectivamente. Seja $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$. Então, as desigualdades acima são válidas para cada δ-soma de Riemann correspondente a $P \in \mathcal{P}_\delta(a,b)$. Logo temos

$$|I_1 - I_2| \leq |S - I_1| + |S - I_2| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Logo $|I_1 - I_2| < \epsilon$ para cada Δ-soma de Riemann correspondente a $P \in \mathcal{P}_\delta(a,b)$. Assim, como ϵ é arbitrário, o resultado segue. $\square$

Teorema 4.1.6. *Uma função f limitada em $[a,b]_{\mathbb{T}}$ é Riemann integrável se, e somente se, é Darboux integrável. Neste caso, os valores das integrais são iguais.*

Demonstração. Suponhamos primeiro que f é Darboux integrável de a até b no sentido da Definição 4.1.1. Dado $\epsilon > 0$, pelo Teorema 4.1.4, existe $\delta > 0$ tal que

$$P \in \mathcal{P}_\delta(a,b) \text{ implica } U(f,P) - L(f,P) < \epsilon.$$

Queremos mostrar que

$$\left| S - \int_a^b f(t)\Delta t \right| < \epsilon,$$

para cada Δ-soma de Riemann S associada com alguma $P \in \mathcal{P}_\delta(a,b)$. Agora, como $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$ para todo i, temos que $L(f,P) \leq S \leq U(f,P)$ e assim a afirmação segue das seguintes desigualdades

$$S \leq U(f,P) < L(f,P) + \epsilon \leq L(f) + \epsilon = \int_a^b f(t)\Delta t + \epsilon$$

e

$$S \geq L(f,P) > U(f,P) - \epsilon \geq U(f) - \epsilon = \int_a^b f(t)\Delta t - \epsilon$$

Logo, $\int_a^b f(t)\Delta t - \epsilon < S < \int_a^b f(t)\Delta t + \epsilon$ e o resultado segue. Portanto, f é Riemann integrável e $I = \int_a^b f(t)\Delta t$.

Agora, suponhamos que f é Riemann integrável no sentido da Definição 4.1.3 e consideremos $\epsilon > 0$. Sejam $\delta > 0$ e I dados como na Definição 4.1.3. Escolhemos algum $P \in \mathcal{P}_\delta(a,b)$ dado por $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ e, para cada $1 \leq i \leq n$, tomamos $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i)_{\mathbb{T}}$, tal que $f(\xi_i) < m_i + \epsilon$, onde $m_i = \inf\{f(t) : t \in [t_{i-1}, t_i)_{\mathbb{T}}\}$. A Δ-soma de Riemann S para esta escolha dos $\xi_i^{'}s$ satisfaz

$$S < L(f,P) + \epsilon(b-a).$$

Além disso, $|S - I| < \epsilon$. Então,

$$L(f) \geq L(f,P) > S - \epsilon(b-a) > I - \epsilon - \epsilon(b-a).$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, segue que $L(f) \geq I$. Agora, tomamos $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i)_{\mathbb{T}}$ tal que $f(\xi_i) < M_i - \epsilon$, onde $M_i = \sup\{f(t) : t \in [t_{i-1}, t_i)_{\mathbb{T}}\}$. A Δ-soma de Riemann S para esta escolha dos $\xi_i^{'}s$ satisfaz

$$S < U(f,P) - \epsilon(b-a).$$

Além disso, $|S - I| < \epsilon$. Logo,

$$U(f) \leq U(f,P) < S + \epsilon(b-a) < I + \epsilon + \epsilon(b-a).$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, temos que $U(f) \leq I$ e do fato que $L(f) \leq U(f)$, obtemos

$$L(f) = U(f) = I.$$

Portanto, f é Darboux integrável, e $\int_a^b f(t)\Delta t = I$.

Na definição de $\int_a^b f(t)\Delta t$, assumimos que $a < b$. Se $a = b$ ou $a > b$, definimos as integrais correspondentes da mesma maneira que são definidas no caso contínuo. Assim, $\int_a^a f(t)\Delta t = 0$, e se $a > b$, então $\int_a^b f(t)\Delta t = -\int_b^a f(t)\Delta t$. $\square$

Teorema 4.1.7. *Suponha que $a, b \in \mathbb{T}$. Cada função constante $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ é Δ-integrável de a até b e*

$$\int_a^b c\Delta t = c(b-a).$$

Demonstração. Seja c uma constante e definimos $f(t) = c$ para todo $t \in \mathbb{T}$. Primeiro, seja $a < b$. Considere $P \in \mathcal{P}(a, b)$ dado por $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$. Como $M_i = m_i = c$ para todo $1 \leq i \leq n$, temos

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) = c\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) = c(b-a).$$

e

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) = c\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) = c(b-a).$$

Assim

$$U(f, P) = L(f, P) = c(b-a)$$

e o Teorema 4.1.2 mostra que f é integrável e $\int_a^b c\Delta t = c(b-a)$. Para $a = b$, temos $\int_a^a c\Delta t = 0 = c(a-a)$, analogamente para $a > b$ temos $\int_a^b c\Delta t = -\int_b^a c\Delta t = -c(a-b) = c(b-a)$. □

Teorema 4.1.8. *Seja $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ e seja $t \in \mathbb{T}$. Então f é Δ-integrável de t até $\sigma(t)$ e*

$$\int_t^{\sigma(t)} f(s)\Delta s = \mu(t)f(t)$$

Demonstração. Se $\sigma(t) = t$, então $\int_t^{\sigma(t)} f(s)\Delta s = 0 = \mu(t)f(t)$. Se $\sigma(t) > t$, então $\mathcal{P}(t, \sigma(t))$ contém um único elemento dado por

$$t = s_0 < s_1 = \sigma(t)$$

como $[s_0, s_1) = [t, \sigma(t)) = \{t\}$, temos

$$L(f, P) = U(f, P) = f(t)(\sigma(t) - t) = \mu(t)f(t).$$

Portanto, pelo Teorema 4.1.2 temos que f é Δ-integrável de t até $\sigma(t)$ e

$$\int_t^{\sigma(t)} f(s)\Delta s = \mu(t)f(t).$$

□

Teorema 4.1.9. *Sejam $a, b \in \mathbb{T}$. Então, temos o seguinte:*

(i) Se $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, então a função f limitada em $[a, b]_{\mathbb{T}}$ é Δ-integrável de a até b se, e somente se, f é Riemann integrável em $[a, b]_{\mathbb{T}}$ no sentido clássico. Neste caso,

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^b f(t)dt$$

(ii) Se $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, então cada função f definida em $\mathbb{Z}$ é Δ-integrável de a até b, e

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum_{t=a}^{b-1} f(t), & se \quad a < b \\ 0, & se \quad a = b \\ -\sum_{t=b}^{a-1} f(t), & se \quad a > b. \end{cases}$$

(iii) Se $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$, então cada função f definida em $h\mathbb{Z}$ é Δ-integrável de a até b, e

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum_{k=\frac{a}{h}}^{\frac{b}{h}-1} f(kh)h, & se \quad a < b \\ 0, & se \quad a = b \\ -\sum_{k=\frac{b}{h}}^{\frac{a}{h}-1} f(kh)h, & se \quad a > b. \end{cases}$$

Demonstração. (i) Pelas definições dadas das integrais de Riemann e Darboux, temos que são as mesmas definições das integrais no caso contínuo. Isto é, se $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, $\mathcal{P}_\delta(a, b)$ consiste de todas as partições de $[a, b]$ com norma menor ou igual a δ e o resultado segue.

(ii) Fazendo $h = 1$ na parte (iii) temos o resultado.

(iii) Seja $a < b$. Então $b = a + ph$ para algum $p \in \mathbb{N}$. Considere $P^* \in \mathcal{P}(a, b)$ dado por

$$a = t_0 < t_1 < ... < t_p = b, \text{ onde } t_k = a + kh \text{ para } 0 \leq k \leq p.$$

Então P^* contém todos os pontos de $[a, b]$ e $[t_{i-1}, t_i) = \{t_{i-1}\}$ para todo $1 \leq i \leq p$. Agora,

$$U(f, P^*) = \sum_{i=1}^{p} M_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{p} f(t_{i-1})h$$

e

$$L(f, P^*) = \sum_{i=1}^{p} m_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{p} f(t_{i-1})h$$

assim, temos que

$$U(f, P^*) = L(f, P^*) = \sum_{i=1}^{p} f(t_{i-1})h = \sum_{i=1}^{p} f(a + (i-1)h)h = \sum_{k=\frac{a}{h}}^{\frac{b}{h}-1} f(kh)h.$$

Segue do Teorema 4.1.2 que f é Δ-integrável e temos o resultado para $a < b$. As definições para as integrais quando $a = b$ e $a > b$ mostram que as afirmações no teorema são válidas.

$\square$

4.2 Propriedades da Integral de Riemann

Após as definições e teoremas de existência provados para a integral de Riemann, voltamos nossa atenção para uma discussão de diferentes tipos de funções que são integráveis. Em particular, assim como no caso contínuo, funções monótonas, contínuas e funções contínuas por partes são todas Riemann integráveis. Além disso, vemos que as funções regradas são também integráveis [8].

Teorema 4.2.1. *Toda função monótona em* $[a,b]_{\mathbb{T}}$ *é* Δ*-integrável.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, assumimos que f é não-descrecente em $[a,b]_{\mathbb{T}}$. Como $f(a) \leq f(t) \leq f(b)$ para todo $t \in [a,b]_{\mathbb{T}}$, então f é limitada em $[a,b]_{\mathbb{T}}$. Dado $\epsilon > 0$, tomemos

$$\delta = \frac{\epsilon}{f(b) - f(a) + 1} > 0,$$

tal que para $P \in \mathcal{P}_\delta$ dado por $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ temos

$$\begin{aligned}
U(f,P) - L(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} f(\rho(t_i))(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} [f(\rho(t_i)) - f(t_{i-1})](t_i - t_{i-1}) \\
&= \sum_{t_i - t_{i-1} \leq \delta} [f(\rho(t_i)) - f(t_{i-1})](t_i - t_{i-1}) \\
&+ \sum_{t_i - t_{i-1} > \delta} [f(\rho(t_i)) - f(t_{i-1})](t_i - t_{i-1}).
\end{aligned}$$

Se tem a desigualdade na segunda linha pois $M_i \leq f(\rho(t_i))$ e $m_i = f(t_{i-1})$. A segunda soma no lado direito da última equação é zero, pois a condição $P \in \mathcal{P}_\delta$ e $t_i - t_{i-1} > \delta$ implica que $\rho(t_i) = t_{i-1}$. Logo,

$$\begin{aligned}
U(f,P) - L(f,P) &\leq \sum_{t_i - t_{i-1} \leq \delta} [f(\rho(t_i)) - f(t_{i-1})](t_i - t_{i-1}) \leq \delta \sum_{i=1}^{n} [f(\rho(t_i)) - f(t_{i-1})] \\
&\leq \delta \sum_{i=1}^{n} [f(t_i) - f(t_{i-1})] = \delta[f(b) - f(a)] < \epsilon.
\end{aligned}$$

Assim, $U(f,P) - L(f,P) < \epsilon$, e do Teorema 4.1.4 segue que f é Δ-integrável. □

Teorema 4.2.2. *Cada função f contínua em* $[a,b]_{\mathbb{T}}$ *é* Δ*-integrável.*

Demonstração. Novamente aplicamos o Teorema 4.1.4. Seja $\epsilon > 0$. Como f é contínua, é uniformemente contínua no subconjunto compacto $[a,b]_{\mathbb{T}}$ de $\mathbb{T}$. Portanto, existe $\delta > 0$ tal que

$$t, \tau \in [a,b] \ \ e \ \ |t - \tau| \leq \delta \ \ \text{implicam} \ \ |f(t) - f(\tau)| < \frac{\epsilon}{b - a + 1}.$$

Considere qualquer $P \in \mathcal{P}_\delta$ dado por $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ e seja

$$\tilde{M}_i = \sup\left\{f(t) : t \in [t_{i-1}, \rho(t_i)]_{\mathbb{T}}\right\} \quad e \quad \tilde{m}_i = \inf\left\{f(t) : t \in [t_{i-1}, \rho(t_i)]_{\mathbb{T}}\right\},$$

para $1 \leq i \leq n$. Então, como $[t_{i-1}, t_i) \subseteq [t_{i-1}, \rho(t_i)]_{\mathbb{T}}$, temos

$$\tilde{m}_i \leq m_i \leq M_i \leq \tilde{M}_i.$$

Portanto, como f assume seu máximo e mínimo em cada intervalo compacto $[t_{i-1}, \rho(t_i)]_{\mathbb{T}}$, segue da primeira desigualdade acima que

$$\begin{aligned} U(f,P) - L(f,P) &= \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}(\tilde{M}_i - \tilde{m}_i)(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{t_i - t_{i-1} \leq \delta}(\tilde{M}_i - \tilde{m}_i)(t_i - t_{i-1}) \\ &+ \sum_{t_i - t_{i-1} > \delta}(\tilde{M}_i - \tilde{m}_i)(t_i - t_{i-1}) \\ &< \frac{\epsilon}{b-a+1}\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) \\ &= \frac{\epsilon}{b-a+1}(b-a) \\ &< \epsilon, \end{aligned}$$

onde usamos o resultado que se $t_i - t_{i-1} > \delta$, então $\rho(t_i) = t_{i-1}$ e portanto $\tilde{M}_i = \tilde{m}_i$. Assim, $U(f,P) - L(f,P) < \epsilon$ e, novamente pelo Teorema 4.1.4 segue que f é integrável. A seguir, mostramos que funções contínuas por partes são integráveis. $\square$

Teorema 4.2.3. *Cada função f limitada em $[a,b]_{\mathbb{T}}$ com uma quantidade finita de descontinuidades é Δ-integrável*

Demonstração. Sejam M e m o supremo e o ínfimo de f em $[a,b)_{\mathbb{T}}$, respetivamente. Se $M = m$, então f é constante em $[a,b]_{\mathbb{T}}$ e pelo Teorema 4.1.7 temos que f é Δ-integrável. Agora suponhamos $M > m$.

Seja $\epsilon > 0$. Notemos que f é contínua em cada ponto isolado e também nos pontos de extremidade a e b se a é discreto à direita e b é discreto à esquerda. Denotamos os pontos de descontinuidade de f por $a \leq \tau_1 < \tau_2 < ... < \tau_p \leq b$. Para cada $1 \leq j \leq p$, definimos o intervalo $V_j \subseteq [a,b]_{\mathbb{T}}$ como segue

(i) Se τ_j é denso à esquerda e à direita ao mesmo tempo, então

$$V_j = (\alpha_j, \beta_j), \quad \text{onde} \quad \alpha_j < \tau_j < \beta_j, \quad \alpha_j, \beta_j \in [a,b]_{\mathbb{T}},$$

e

$$\beta_j - \alpha_j < \frac{\epsilon}{2(p+1)(M-m)}.$$

(ii) Se τ_j é denso à esquerda e discreto à direita (ou $\tau_j = b$), então

$$V_j = (\alpha_j, \tau_j]_{\mathbb{T}}, \quad onde \quad \tau_j < \beta_j \in [a,b] \quad e \quad \tau_j - \alpha_j < \frac{\epsilon}{2(p+1)(M-m)}.$$

(iii) Se τ_j é denso à direita e discreto à esquerda (ou $\tau_j = a$), então

$$V_j = [\tau_j, \beta_j)_{\mathbb{T}}, \quad onde \quad \tau_j < \beta_j \in [a,b]_{\mathbb{T}} \quad e \quad \beta_j - \tau_j < \frac{\epsilon}{2(p+1)(M-m)}.$$

O conjunto

$$N = [a,b]_{\mathbb{T}} \backslash \bigcup_{j=1}^{p} V_j$$

consiste de vários intervalos fechados finitos J_j $(1 \leq j \leq p+1)$; chamamos estes intervalos de intervalos complementários. Portanto, N é um subconjunto compacto de $[a,b]_{\mathbb{T}}$. Como f é contínua em N, então é uniformemente contínua em N, e, portanto, existe $\delta_0 > 0$ tal que

$$t, \tau \in N \quad e \quad |t - \tau| \leq \delta_0, \text{ implicam } |f(t) - f(\tau)| < \frac{\epsilon}{2(b-a+1)}.$$

Para cada intervalo complementário J_j, tomamos $P_j \in \mathcal{P}_{\delta_0}(J_j)$. Definimos

$$P = (\bigcup_{j=1}^{p+1} P_j) \cup \{\tau_i : \tau_i \ \text{ é discreto à esquerda } \ ou \ \text{ é } \ \text{discreto à direita}\}.$$

Assim, $P \in \mathcal{P}$ e

$$\begin{aligned} U(f,P) - L(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum\nolimits' (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) + \sum\nolimits'' (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}), \end{aligned}$$

onde $\sum'$ inclui os termos correspondentes a $[t_{i-1}, t_i)$ com $t_{i-1} = \inf V_i$ e $t_i = \sup V_i$, e $\sum''$ inclui todos os termos restantes. Primeiro, consideremos $\sum'$. Como $M_i - m_i \leq M - m$ para todo i, temos

$$\begin{aligned} \sum\nolimits' (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) &\leq (M-m) \sum\nolimits' (t_i - t_{i-1}) \\ &\leq (M-m) \sum\nolimits' \frac{\epsilon}{2(p+1)(M-m)} \\ &\leq \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Para $\sum''$ estimamos, como na prova do Teorema 4.2.2,

$$\begin{aligned} \sum\nolimits'' (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) &\leq \frac{\epsilon}{2(b-a+1)} \sum\nolimits'' (t_i - t_{i-1}) \\ &\leq \frac{\epsilon}{2(b-a+1)} (b-a) \\ &< \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

Assim, $U(f,P) - L(f,P) < \epsilon$, e pelo Teorema 4.1.3, f é Δ-integrável. $\square$

Agora procedemos a mostrar que as funções regradas são Δ-integráveis. Para isso, utilizamos que as funções regradas são limitadas.

Teorema 4.2.4. *Toda função regrada em $[a,b]_{\mathbb{T}}$ é Δ-integrável.*

Demonstração. Como f é regrada em $[a,b]_{\mathbb{T}}$, então f é limitada (veja Teorema 2.3.2). Sejam M e m o supremo e ínfimo de f em $[a,b)_{\mathbb{T}}$, respectivamente. Se $M=m$, então f é constante em $[a,b]_{\mathbb{T}}$ e, portanto, Δ-integrável pelo Teorema 4.1.7. Suponha agora que $M>m$ e seja $\epsilon>0$. Como f é regrada, para cada ponto $p\in(a,b]_{\mathbb{T}}$ denso à esquerda e para cada ponto $q\in[a,b)_{\mathbb{T}}$, os limites

$$f(p^-)=\lim_{t\to p^-}f(t) \;\; e \;\; f(q^+)=\lim_{t\to q^+}f(t)$$

existem. Consequentemente, para cada $\tau\in[a,b]$, podemos encontrar $\delta(\tau)>0$ tal que

$$r,s\in U_{\delta(\tau)} \;\; e \;\; r,s<\tau \;\; ou \;\; r,s>\tau$$

implicam

$$|f(r)-f(s)|<\frac{\epsilon}{2(b-a+1)},$$

onde

$$U_{\delta(\tau)}=\{t\in\mathbb{T}:|t-\tau|<\delta(\tau)\}.$$

Em nossa afirmação acima, assumimos só $r,s>a$ para $\tau=a$ e só $r,s<b$ para $\tau=b$. Além disso, se τ é isolado ou um ponto final unilateral discreto, então tomamos $\delta(\tau)>0$ tal que $U_{\delta(\tau)}=\{\tau\}$ e não precisamos verificar a condição acima para tais pontos τ. A coleção

$$\left\{U_{\delta(\tau)}:\tau\in[a,b]\right\}$$

forma uma cobertura aberta de os subconjuntos compactos $[a,b]$ de $\mathbb{T}$. Então, pelo teorema generalizado de Heine-Borel esta cobertura aberta tem uma subcobertura finita

$$\left\{U_{\delta(\tau_1)},...,U_{\delta(\tau_p)}\right\}.$$

Agora, usando os pontos $\tau_1,...,\tau_p$, definimos os intervalos $V_1,...,V_p\subseteq[a,b]$ como na demonstração do Teorema 4.2.3, adicionando $V_j=\emptyset$ se τ_j é isolado ou um ponto final unilateral discreto à direita. O conjunto

$$N=[a,b]_{\mathbb{T}}\backslash\bigcup_{j=1}^{p}V_j$$

consiste em intervalos fechados finitos $J_1,...,J_{P+1}$. Portanto, podemos assumir $\tau_1<\tau_2<...<\tau_P$. Tomamos $\delta_0>0$ tal que

$$\delta_0<\min\left\{\inf U_{\delta(\tau_{j+1})}-\sup U_{\delta(\tau_j)}:1\le j\le p-1\right\}.$$

Então, a partir de nossas declarações iniciais acima sobre $U_{\delta(\tau)}$, temos que

$$t,s\in N \;\; e \;\; |t-s|\le\delta_0 \text{ implicam } |f(t)-f(s)|<\frac{\epsilon}{2(b-a+1)}.$$

Em seguida, construímos uma partição P, como na demonstração do Teorema 4.2.3, e mostramos exatamente da mesma maneira que $U(f,P)-L(f,P)<\epsilon$. Portanto, o Teorema 4.1.3 implica que f é Δ-integrável. $\square$

Antes do próximo teorema, dizemos como de costume que $\varphi:[a,b]_{\mathbb{T}}\to\mathbb{R}$ satisfaz uma condição de Lipschitz, se existe $B>0$ tal que

$$|\varphi(x)-\varphi(y)|\leq B|x-y| \ \ \textit{para} \ \ \textit{todo} \ \ x,y\in[a,b]_{\mathbb{T}}.$$

O numero B é chamado a constante de Lipschitz.

Teorema 4.2.5. *Seja f uma função Δ-integrável em $[a,b]_{\mathbb{T}}$ e sejam M e m seu supremo e ínfimo em $[a,b)_{\mathbb{T}}$, respectivamente. Seja, $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função definida em $[m,M]$ satisfazendo uma condição de Lipschitz com constante B. Então, a função composta $h=\varphi\circ f$ é Δ-integrável em $[a,b]_{\mathbb{T}}$.*

Demonstração. Seja $\epsilon>0$. Pelo Teorema 4.1.3, existe $P\in\mathcal{P}$ tal que

$$U(f,P)-L(f,P)<\frac{\epsilon}{B},$$

onde B é a constante de Lipschitz de φ. Sejam M_i e m_i o supremo e ínfimo de f em $[t_{i-1},t_i)$, respectivamente, e sejam M_i^* e m_i^* os números correspondentes para h. Como φ satisfaz uma condição de Lipschitz, encontramos que

$$\begin{aligned}
h(s)-h(\tau)&\leq|h(s)-h(\tau)|\\
&=|\varphi(f(s))-\varphi(f(\tau))|\\
&\leq B|f(s)-f(\tau)\\
&\leq B(M_i-m_i)
\end{aligned}$$

é válido para todo $s,\tau\in[t_{i-1},t_i)$. Disto segue que $M_i^*-m_i^*\leq B(M_i-m_i)$ pois existem duas sequências $\{s_k\}$ e $\{\tau_k\}$ de pontos em $[t_{i-1},t_i)$ tais que $h(s_k)\to M_i^*$ e $h(\tau_k)\to m_i^*$ quando $k\to\infty$. Consequentemente,

$$\begin{aligned}
U(h,P)-L(h,P)&=\sum_{i=1}^{n}(M_i^*-m_i^*)(t_i-t_{i-1})\\
&\leq B\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)(t_i-t_{i-1})\\
&=B[U(f,P)-L(f,P)]\\
&<\epsilon.
\end{aligned}$$

Portanto h é Δ-integrável pelo Teorema 4.1.3. $\square$

A seguir provamos o seguinte resultado mais geral.

Teorema 4.2.6. *Seja f uma função Δ-integrável em $[a,b]_{\mathbb{T}}$ e sejam M e m seu supremo e ínfimo em $[a,b)_{\mathbb{T}}$, respectivamente. Além disso, seja $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função contínua definida em $[m,M]$. Então, a função composta $h=\varphi\circ f$ é Δ-integrável em $[a,b]_{\mathbb{T}}$.*

Demonstração. Definimos

$$B = \max_{m \leq x \leq M} |\varphi(x)|$$

e seja $\epsilon > 0$. Também, seja $\epsilon_1 = \dfrac{\epsilon}{b - a + 2B}$. Como φ é contínua, é uniformemente contínua em $[m, M]$. Portanto, existe $\delta \in (0, \epsilon_1)$ tal que

$$x, y \in [m, M] \;\; e \;\; |x - y| \leq \delta \text{ implicam } |\varphi(x) - \varphi(y)| < \epsilon_1.$$

Como f é Δ-integrável, o Teorema 4.1.3 garante a existência de $P \in \mathcal{P}$ tal que

$$U(f, P) - L(f, P) < \delta^2.$$

Sejam M_i e m_i o supremo e ínfimo de f em $[t_{i-1}, t_i)_{\mathbb{T}}$, respectivamente, e sejam M_i^* e m_i^* os correspondentes números para h. Em seguida, dividimos os números $1, 2, ..., n$ dentro de dois subconjuntos J e J' como segue: $i \in J$ se $M_i - m_i < \delta$ e $i \in J'$, caso contrário. Agora se $i \in J$, então nossa segunda afirmação acima nos leva a

$$|h(s) - h(\tau)| = |\varphi(f(s)) - \varphi(f(\tau))| < \epsilon_1 \text{ para todo } s, \tau \in [t_{i-1}, t_i)_{\mathbb{T}}.$$

Segue que $M_i^* - m_i^* \leq \epsilon_1$, para todo $i \in J$. Tendo em conta que $M_i^* - m_i^* \leq 2B$ para todo i, temos

$$\begin{aligned} U(h, P) - L(h, P) &= \sum_{i=1}^{n} (M_i^* - m_i^*)(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i \in J} (M_i^* - m_i^*)(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i \in J'} (M_i^* - m_i^*)(t_i - t_{i-1}) \\ &\leq \epsilon_1 (b - a) + 2B \sum_{i \in J'} (t_i - t_{i-1}). \end{aligned}$$

Resta estimarmos $\sum_{i \in J'} (t_i - t_{i-1})$. Temos

$$\begin{aligned} \delta \sum_{i \in J'} (t_i - t_{i-1}) &\leq \sum_{i \in J'} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) \\ &= U(f, P) - L(f, P). \end{aligned}$$

Portanto, da primeira desigualdade acima, obtemos

$$\delta \sum_{i \in J'} (t_i - t_{i-1}) < \delta^2, \;\; i.e., \;\; \sum_{i \in J'} (t_i - t_{i-1}) < \delta$$

Assim, podemos usar $\delta < \epsilon_1$ para obter

$$U(h, P) - L(h, P) \leq \epsilon_1 (b - a) + 2B\delta < \epsilon_1 (b - a + 2B) = \epsilon,$$

e o Teorema 4.1.3 mostra que h é Δ-integrável em $[a, b]_{\mathbb{T}}$. $\square$

Corolário 4.2.1. *Se f é Δ-integrável em $[a,b]_{\mathbb{T}}$, então para um $\alpha > 0$ arbitrário, a função $|f|^{\alpha}$ é Δ-integrável em $[a,b]_{\mathbb{T}}$.*

Demonstração. Sejam M e m o supremo e ínfimo de f em $[a,b)_{\mathbb{T}}$, respectivamente. Além disso, seja $\varphi(x) = |x|^{\alpha}$ uma função contínua definida em $[m,M]$. Como f é Δ-integrável em $[a,b]_{\mathbb{T}}$, então pelo Teorema 4.2.6, temos que a função $h = \varphi \circ f = |f|^{\alpha} : [a,b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ definida por $|f|^{\alpha}(x) = |f(x)|^{\alpha}$ é Δ-integrável. $\square$

Teorema 4.2.7. *Seja f uma função limitada que é Δ-integrável em $[a,b]_{\mathbb{T}}$. Então f é Δ-integrável em cada subintervalo $[c,d]_{\mathbb{T}}$ de $[a,b]_{\mathbb{T}}$.*

Demonstração. Como f é Δ-integrável em $[a,b]_{\mathbb{T}}$, então dado $\epsilon > 0$ existe $P \in \mathcal{P}(a,b)$ tal que $U(f,P) - L(f,P) < \epsilon$. Então $P' := P \cup \{c,d\} \in \mathcal{P}(a,b)$. Pelo Lema 4.1.1, $U(f,P') - L(f,P') < \epsilon$. Agora consideremos $P'' \in \mathcal{P}(c,d)$ consistindo de todos os pontos de P' pertencentes a $[c,d]_{\mathbb{T}}$. Se $\tilde{U}$ e $\tilde{L}$ são a Δ-soma superior e inferior associadas com P'', então

$$\tilde{U}(f,P'') - \tilde{L}(f,P'') \leq U(f,P') - L(f,P') < \epsilon,$$

e, portanto, pelo Teorema 4.1.3 f é Δ-integrável em $[c,d]_{\mathbb{T}}$. $\square$

Teorema 4.2.8. *Sejam f e g funções Δ-integráveis em $[a,b]_{\mathbb{T}}$ e seja $c \in \mathbb{R}$. Então*

(i) cf *é Δ-integrável e* $\displaystyle\int_a^b cf(t)\Delta t = c\int_a^b f(t)\Delta t$

(ii) $f+g$ *é Δ-integrável e* $\displaystyle\int_a^b (f+g)(t)\Delta t = \int_a^b f(t)\Delta t + \int_a^b g(t)\Delta t.$

Demonstração. (i) Se $c = 0$, então a afirmação é óbvia. Seja $c \neq 0$ e seja $\epsilon > 0$. Pela definição da Δ-integral de Riemann (definição 4.1.3), existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| S_f - \int_a^b f(t)\Delta t \right| < \frac{\epsilon}{|c|}$$

para cada Δ-soma de Riemann S_f de f para $P \in \mathcal{P}_{\delta}(a,b)$. Seja S_{cf} uma Δ-soma de Riemann para cf associado com $P = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b\} \in \mathcal{P}_{\delta}(a,b)$. Como

$$S_c f = \sum_{i=1}^{n} (cf)(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) = c\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) = cS_f,$$

temos

$$\left| S_c f - c\int_a^b f(t)\Delta t \right| = |c| \left| S_f - \int_a^b f(t)\Delta t \right| < |c|\frac{\epsilon}{|c|} = \epsilon.$$

(ii) Seja $\epsilon > 0$. Como f e g são Δ-integráveis em $[a,b]$, existe $\delta > 0$ tal que para qualquer $P \in \mathcal{P}_{\delta}(a,b)$

$$\left| S_f - \int_a^b f(t)\Delta t \right| < \frac{\epsilon}{2} \quad e \quad \left| S_g - \int_a^b g(t)\Delta t \right| < \frac{\epsilon}{2},$$

onde S_f e S_g são as Δ-somas de Riemann para f e g, respectivamente, associadas a P. Por outro lado,

$$\begin{aligned} S_{f+g} &= \sum_{i=1}^{n}(f+g)(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) \\ &= S_f + S_g. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \left| S_{f+g} - \left[\int_a^b f(t)\Delta t + \int_a^b g(t)\Delta t \right] \right| &\leq \left| S_f - \int_a^b f(t)\Delta t \right| + \left| S_g - \int_a^b g(t)\Delta t \right| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

□

Teorema 4.2.9. *O produto de duas funções Δ-integráveis é Δ-integrável.*

Demonstração. Primeiro, provamos que se f é Δ-integrável em $[a,b]_{\mathbb{T}}$, então f^2 também é Δ-integrável em $[a,b]_{\mathbb{T}}$. De fato, como $f^2(t) = \varphi(f(t))$ com $\varphi(x) = x^2$ e como φ satisfaz uma condição de Lipschitz em qualquer intervalo $[m, M]$, pois $|\varphi(x) - \varphi(y)| = |x^2 - y^2| = |x+y||x-y| \leq B|x-y|$, onde $B = \max\{2|m|, 2|M|\}$, pelo Teorema 4.2.5, temos que f^2 é Δ-integrável em $[a,b]_{\mathbb{T}}$. Agora, sejam f e g duas funções Δ-integráveis em $[a,b]_{\mathbb{T}}$. A identidade

$$fg = \frac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{4}$$

juntamente com o Teorema 4.2.8 e a afirmação acima, implicam o resultado desejado. □

Teorema 4.2.10. *Seja f uma função definida em $[a,b]_{\mathbb{T}}$ e seja $c \in \mathbb{T}$ com $a < c < b$. Se f é Δ-integrável de a até c e de c até b, então f é Δ-integrável de a até b e*

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^c f(t)\Delta t + \int_c^b f(t)\Delta t.$$

Demonstração. Como f é limitado em $[a,c]$ e $[c,b]$, então f é limitada em $[a,b]$. Pelo Teorema 4.1.3, existem partições $P_1 \in \mathcal{P}(a,c)$ e $P_2 \in \mathcal{P}(c,b)$ tais que

$$U_a^c(f,P_1) - L_a^c(f,P_1) < \frac{\epsilon}{2} \;\; e \;\; U_c^b(f,P_2) - L_c^b(f,P_2) < \frac{\epsilon}{2},$$

onde $\epsilon > 0$. Seja $P = P_1 \cup P_2$. Então $P \in \mathcal{P}(a,b)$ e

$$U_a^b(f,P) = U_a^c(f,P_1) + U_c^b(f,P_2) \;\; e \;\; L_a^b(f,P) = L_a^c(f,P_1) + L_c^b(f,P_2).$$

Logo,

$$\begin{aligned} U_a^b(f,P) - L_a^b(f,P) &= U_a^c(f,P_1) - L_a^c(f,P_1) + U_c^b(f,P_2) - L_c^b(f,P_2) \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Segue que

$$U_a^b(f,P) - L_a^b(f,P) < \epsilon,$$

de modo que f é integrável de a até b pelo Teorema 4.1.3. Além disso, temos

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)\Delta t &\leq U_a^b(f,P) \\ &= U_a^c(f,P_1) + U_c^b(f,P_2) \\ &< L_a^c(f,P_1) + L_c^b(f,P_2) + \epsilon \\ &\leq \int_a^c f(t)\Delta t + \int_c^b f(t)\Delta t + \epsilon. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\int_a^b f(t)\Delta t > \int_a^c f(t)\Delta t + \int_c^b f(t)\Delta t - \epsilon,$$

então

$$\left| \int_a^b f(t)\Delta t - \left[\int_a^c f(t)\Delta t + \int_c^b f(t)\Delta t \right] \right| < \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, a afirmação do Teorema segue. $\square$

Teorema 4.2.11. *Se f e g são Δ-integráveis em $[a,b]_{\mathbb{T}}$ e se $f(t) \leq g(t)$ para todo $t \in [a,b)_{\mathbb{T}}$, então*

$$\int_a^b f(t)\Delta t \leq \int_a^b g(t)\Delta t$$

Demonstração. Pelo Teorema 4.2.8, $h = g - f$ é integrável em $[a,b]_{\mathbb{T}}$. Como $h(t) \leq 0$ em $[a,b)_{\mathbb{T}}$, temos que $L(h,P) \geq 0$ para todo $P \in \mathcal{P}(a,b)$ e assim $\int_a^b h(t)\Delta t = L(h) \geq 0$. Novamente aplicando o Teorema 4.2.8, temos

$$\int_a^b g(t)\Delta t - \int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^b h(t)\Delta t \geq 0$$

e, assim,

$$\int_a^b g(t)\Delta t \geq \int_a^b f(t)\Delta t$$

$\square$

Teorema 4.2.12. *Se f é Δ-integrável em $[a,b]_{\mathbb{T}}$, então $|f|$ também é Δ-integrável em $[a,b]_{\mathbb{T}}$ e*

$$\left| \int_a^b f(t)\Delta t \right| \leq \int_a^b |f(t)|\Delta t.$$

Demonstração. Mostramos primeiro que $|f|$ é Δ-integrável. Considere a função $\varphi(x) = |x|$. Esta função satisfaz uma condição Lipschitz em qualquer intervalo, pois

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = ||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

Além disso, temos $|f(t)| = \varphi(f(t))$. Portanto, $|f|$ é integrável pelo Teorema 4.2.5.
O outro resultado segue facilmente do Teorema 4.2.11, pois sabemos que $|f|$ é integrável em $[a, b]_{\mathbb{T}}$. De fato, temos que $-|f| \leq f \leq |f|$, de modo que

$$-\int_a^b |f(t)|\Delta t \leq \int_a^b f(t)\Delta t \leq \int_a^b |f(t)|\Delta t.$$

Logo,

$$\left|\int_a^b f(t)\Delta t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\Delta t.$$

□

Corolário 4.2.2. *Sejam f e g Δ-integráveis em $[a, b]_{\mathbb{T}}$. Então*

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\Delta t\right| \leq \int_a^b |f(t)g(t)|\Delta t \leq \left(\sup_{t\in[a,b)} |f(t)|\right)\left(\int_a^b |g(t)|\Delta t\right).$$

Demonstração. Como $|f(t)| \leq \sup_{t\in[a,b)} |f(t)|$ então

$$|f(t)||g(t)| \leq \sup_{t\in[a,b)} |f(t)||g(t)|.$$

Pelos Teoremas 4.2.11 e 4.2.12, temos

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\Delta t\right| \leq \int_a^b |f(t)g(t)|\Delta t \leq \int_a^b \sup_{t\in[a,b)} |f(t)||g(t)|\Delta t = \sup_{t\in[a,b)} |f(t)| \int_a^b |g(t)|\Delta t$$

e o resultado desejado segue. □

4.3 O Teorema Fundamental do Cálculo

Existem duas versões do teorema fundamental do cálculo em escalas temporais. Cada uma diz, a grosso modo, que a diferenciação e a integração são operações inversas. De fato, nosso primeiro teorema diz que a "Δ-integral da Δ-derivada de uma função é dada pela função"e nossa segunda versão diz que a "Δ-derivada da Δ-integral de uma função contínua é a própria função".

Teorema 4.3.1. *(Teorema Fundamental do Cálculo, Parte I). Seja g uma função contínua em $[a, b] \subseteq \mathbb{T}$ tal que g é Δ-diferenciável em $[a, b)_{\mathbb{T}}$. Se g^{Δ} é Δ-integrável de a até b, então*

$$\int_a^b g^{\Delta}(t)\Delta t = g(b) - g(a).$$

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$. Existe $P = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b\} \in \mathcal{P}(a, b)$ tal que

$$U(g^\Delta, P) - L(g^\Delta, P) < \epsilon.$$

Aplicando o teorema do valor médio a $g : [t_{i-1}, t_i]_\mathbb{T} \to \mathbb{R}$ para cada $1 \leq i \leq n$, obtemos a existência de $\xi_i, \tau_i \in [t_{i-1}, t_i)$, satisfazendo

$$(t_i - t_{i-1})g^\Delta(\tau_i) \leq g(t_i) - g(t_{i-1}) \leq (t_i - t_{i-1})g^\Delta(\xi_i).$$

Somando em i de 1 até n, encontramos

$$\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})g^\Delta(\tau_i) \leq g(b) - g(a) \leq \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})g^\Delta(\xi_i).$$

Segue que

$$L(g^\Delta, P) \leq g(b) - g(a) \leq U(g^\Delta, P),$$

logo

$$L(g^\Delta, P) \leq \int_a^b g^\Delta(t)\Delta t \leq U(g^\Delta, P) \text{ para todo } P \in \mathcal{P}(a, b).$$

Além disso, da desigualdade acima temos que $-L(g^\Delta, P) \geq -[g(b) - g(a)] \geq -U(g^\Delta, P)$ e, somando com a desigualdade anterior, obtemos

$$L(g^\Delta, P) - U(g^\Delta, P) \leq \int_a^b g^\Delta(t)\Delta t - [g(b) - g(a)] \leq U(g^\Delta, P) - L(g^\Delta, P).$$

Logo, temos que $\left|\int_a^b g^\Delta(t)\Delta t - [g(b) - g(a)]\right| \leq U(g^\Delta, P) - L(g^\Delta, P) < \epsilon$. Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, o resultado segue. □

Teorema 4.3.2. *(Integração por partes). Sejam u e v funções contínuas em $[a, b]_\mathbb{T}$ que são Δ-diferenciáveis em $[a, b)_\mathbb{T}$. Se u^Δ e v^Δ são Δ-integráveis de a até b, então*

$$\int_a^b u^\Delta(t)v(t)\Delta t + \int_a^b u^\sigma(t)v^\Delta(t)\Delta t = u(b)v(b) - u(a)v(a).$$

Demonstração. Seja $g = uv$. Então $g^\Delta = u^\Delta v + u^\sigma v^\Delta$ e g^Δ é Δ-integrável. Agora, o Teorema 4.3.1 mostra que

$$\int_a^b g^\Delta(t)\Delta t = g(b) - g(a) = u(b)v(b) - u(a)v(a).$$

Logo,

$$\int_a^b [u^\Delta(t)v(t) + u^\sigma(t)v^\Delta(t)]\Delta t = u(b)v(b) - u(a)v(a).$$

e o resultado segue. □

Teorema 4.3.3. *(Teorema Fundamental do Cálculo, Parte II). Seja f uma função Δ-integrável de a até b. Para $t \in [a, b]_\mathbb{T}$, definimos*

$$F(t) = \int_a^t f(\tau)\Delta\tau.$$

Então, F é contínua em $[a,b]_{\mathbb{T}}$. Se $t_0 \in [a,b)_{\mathbb{T}}$ e se f é contínua em t_0 sempre que t_0 é denso à direita, então F é Δ-diferenciável em t_0 e

$$F^{\Delta}(t_0) = f(t_0).$$

Demonstração. Seja $B > 0$ tal que $|f(t)| \leq B$ para todo $t \in [a,b)_{\mathbb{T}}$. Se $s, t \in [a,b]_{\mathbb{T}}$ e $|t-s| < \dfrac{\epsilon}{B}$ onde $t < s$, então

$$|F(s) - F(t)| = \left| \int_t^s f(\tau)\Delta\tau \right| \leq \int_t^s |f(\tau)|\Delta\tau \leq \int_t^s B\Delta\tau = B(s-t) < \epsilon.$$

Isso mostra que F é uniformemente contínua em $[a,b]_{\mathbb{T}}$. Seja $t_0 \in [a,b)_{\mathbb{T}}$. Suponhamos primeiro que t_0 é discreto à direita. Então, em vista da continuidade, F é Δ-diferenciável em t_0, e pelo Teorema 4.2.10 e o Teorema 4.1.8, temos

$$\begin{aligned} F^{\Delta}(t_0) &= \frac{F(\sigma(t_0)) - F(t_0)}{\sigma(t_0) - t_0} \\ &= \frac{\int_a^{\sigma(t_0)} f(\tau)\Delta\tau - \int_a^{t_0} f(\tau)\Delta\tau}{\mu(t_0)} \\ &= \frac{1}{\mu(t_0)} \int_{t_0}^{\sigma(t_0)} f(\tau)\Delta\tau \\ &= f(t_0), \end{aligned}$$

Agora, suponhamos que t_0 é denso à direita e f contínua em t_0. Nesse caso,

$$F^{\Delta}(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0}.$$

Por outro lado,

$$\frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = \frac{\int_a^t f(\tau)\Delta\tau - \int_a^{t_0} f(\tau)\Delta\tau}{t - t_0} = \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t f(\tau)\Delta\tau.$$

Por conseguinte, basta provar que

$$\lim_{t \to t_0} \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t f(\tau)\Delta\tau = f(t_0).$$

Seja $\epsilon > 0$. Como f é contínua em t_0, existe $\delta > 0$ tal que

$$s \in [a,b]_{\mathbb{T}} \text{ e } |s - t_0| < \delta \text{ implicam } |f(s) - f(t_0)| < \epsilon.$$

Então

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t f(\tau)\Delta\tau - f(t_0) \right| &= \left| \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t |f(\tau) - f(t_0)|\Delta\tau \right| \\ &\leq \frac{1}{|t - t_0|} \left| \int_{t_0}^t |f(\tau) - f(t_0)|\Delta\tau \right| \\ &\leq \frac{\epsilon}{|t - t_0|} \left| \int_{t_0}^t \Delta\tau \right| \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

para todo $t \in [a,b]_{\mathbb{T}}$ tal que $|t - t_0| < \delta$ e $t \neq t_0$. Portanto, nossa afirmação segue. $\square$

No seguinte teorema, que generaliza o Teorema 4.3.3, denotamos a delta derivada de $f(t,s)$ com respeito a t, para s fixo, por $f^{\Delta}(t,s)$.

Teorema 4.3.4. *Se f e f^{Δ} são contínuas, então*

$$\left[\int_a^t f(t,s)\Delta s\right]^{\Delta} = f(\sigma(t),t) + \int_a^t f^{\Delta}(t,s)\Delta s.$$

Demonstração. Denotamos

$$g(t) = \int_a^t f(t,s)\Delta s, \text{ para } t \in \mathbb{T}^{\kappa}.$$

É fácil mostrar que g é uma função contínua. Se t é discreto à direita, então

$$\begin{aligned} g^{\Delta}(t) &= \frac{g(\sigma(t)) - g(t)}{\sigma(t) - t} \\ &= \frac{\int_a^{\sigma(t)} f(\sigma(t),s)\Delta s - \int_a^t f(t,s)\Delta s}{\mu(t)} \\ &= \int_a^t \frac{f(\sigma(t),s) - f(t,s)}{\sigma(t) - t}\Delta s + \frac{1}{\mu(t)}\int_t^{\sigma(t)} f(\sigma(t),s)\Delta s \\ &= \int_a^t f^{\Delta}(t,s)\Delta s + f(\sigma(t),t). \end{aligned}$$

Em seguida, consideramos o caso quando t é denso à direita. Neste caso,

$$g^{\Delta}(t) = \lim_{r \to t} \frac{g(t) - g(r)}{t - r}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{g(t) - g(r)}{t - r} &= \frac{\int_a^t f(t,s)\Delta s - \int_a^r f(r,s)\Delta s}{t - r} \\ &= \int_a^t \frac{f(t,s) - f(r,s)}{t - r}\Delta s + \frac{1}{t - r}\int_r^t f(r,s)\Delta s. \end{aligned}$$

Portanto, basta provar que

$$\lim_{r \to t} \frac{1}{t - r}\int_r^t f(r,s)\Delta s = f(t,t)$$

e

$$\lim_{r \to t} \int_a^t \frac{f(t,s) - f(r,s)}{t - r}\Delta s = \int_a^t f^{\Delta}(t,s)\Delta s.$$

Como f é contínua, é uniformemente contínua em cada subconjunto compacto de $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$. Portanto, para $\epsilon > 0$ arbitrário, podemos encontrar uma vizinhança U de t tal que

$$|f(r,s) - f(t,t)| < \epsilon, \text{ para todo } r, s \in U.$$

Então,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{t-r}\int_r^t f(r,s)\Delta s - f(t,t)\right| &= \left|\frac{1}{t-r}\int_r^t [f(r,s)-f(t,t)]\Delta s\right| \\ &\leq \frac{1}{|t-r|}\left|\int_r^t |f(r,s)-f(t,t)|\Delta s\right| \\ &\leq \frac{\epsilon}{|t-r|}\left|\int_r^t \Delta s\right| \\ &= \epsilon\end{aligned}$$

para todo $r \in U\backslash\{t\}$ e, portanto, a primeira igualdade é válida. Para provar a segunda igualdade, aplicamos o teorema do valor médio à função $f(t,s)$ com respeito à variável t para s fixo. Então, podemos escrever

$$f^{\Delta}(\tau,s) \leq \frac{f(t,s)-f(r,s)}{t-r} \leq f^{\Delta}(\xi,s),$$

onde ξ e τ estão entre r e t. Evidentemente $\xi \to t$ e $\tau \to t$ quando $r \to t$. Por outro lado, como f^{Δ} é contínua, é uniformemente contínua em cada subconjunto compacto de $\mathbb{T}\times\mathbb{T}$. Portanto, da desigualdade acima temos que

$$\lim_{r\to t}\frac{f(t,s)-f(r,s)}{t-r} = f^{\Delta}(t,s),$$

onde o limite é uniforme com respeito a s em subconjuntos compactos de $\mathbb{T}$. Daí a segunda igualdade dada acima é válida e isso completa a demonstração. $\square$

A seguir, apresentamos a fórmula de mudança de variáveis

Teorema 4.3.5. *(Mudança de Variável). Seja $\nu : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ uma função estritamente crescente tal que $\tilde{\mathbb{T}} = \nu(\mathbb{T})$ é uma escala temporal. Denote por $\tilde{\Delta}$ a Δ-derivada em $\tilde{\mathbb{T}}$. Suponha que $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ é uma função localmente Δ-integrável (i.e., Δ-integrável em cada intervalo finito) e que ν é Δ-diferenciável com Δ-derivada localmente Δ-integrável, se $f\nu^{\Delta}$ possui uma Δ-antiderivada e se $a, b \in \mathbb{T}$, então:*

$$\int_a^b f(t)\nu^{\Delta}(t)\Delta t = \int_{\nu(a)}^{\nu(b)} (f\circ\nu^{-1})(s)\tilde{\Delta}s.$$

Demonstração. Pelas hipóteses, $f\nu^{\Delta}$ possui uma Δ-antiderivada F, i.e., $F^{\Delta} = f\nu^{\Delta}$. Portanto, o Teorema 4.3.1 implica

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)\nu^{\Delta}(t)\Delta t &= \int_a^b F^{\Delta}(t)\Delta t \\
&= F(b) - F(a) \\
&= (F \circ \nu^{-1})(\nu(b)) - (F \circ \nu^{-1})(\nu(a)) \\
&= \int_{\nu(a)}^{\nu(b)} (F \circ \nu^{-1})^{\tilde{\Delta}}(s)\tilde{\Delta}s \\
&= \int_{\nu(a)}^{\nu(b)} (F^{\Delta} \circ \nu^{-1})(s)(\nu^{-1})^{\tilde{\Delta}}(s)\tilde{\Delta}s \\
&= \int_{\nu(a)}^{\nu(b)} ((f\nu^{\Delta}) \circ \nu^{-1})(s)(\nu^{-1})^{\tilde{\Delta}}(s)\tilde{\Delta}s \\
&= \int_{\nu(a)}^{\nu(b)} (f \circ \nu^{-1})(s)[(\nu^{\Delta} \circ \nu^{-1})(\nu^{-1})^{\tilde{\Delta}}](s)\tilde{\Delta}s \\
&= \int_{\nu(a)}^{\nu(b)} (f \circ \nu^{-1})(s)\tilde{\Delta}s,
\end{aligned}$$

onde na quinta linha, usamos a regra de cadeia estabelecida e na última etapa usamos uma consequência da regra de cadeia. □

Exemplo 4.3.1. (i) Seja $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$. Desejamos calcular $\int_a^b t\Delta t$. Agora, pelo Teorema 4.2.8 partes (i) e (ii) temos

$$\begin{aligned}
\int_a^b t\Delta t &= \frac{1}{2}\int_a^b 2t\Delta t = \frac{1}{2}\int_a^b [(2t+h) - h]\Delta t \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_a^b (2t+h)\Delta t - \int_a^b h\Delta t\right]
\end{aligned}$$

Como $F(t) = t^2$ é diferenciável com derivada $F^{\Delta}(t) = 2t + h$, para todo $a, b \in \mathbb{T}$, o Teorema Fundamental do Cálculo implica que

$$\int_a^b (2t+h)\Delta t = t^2|_a^b = b^2 - a^2$$

para todo $a, b \in \mathbb{T}$. A segunda integral na diferença acima é encontrada usando o Teorema 4.1.7. Assim,

$$\int_a^b h\Delta t = h(b-a).$$

A partir disso, deduzimos que

$$\int_a^b t\Delta t = \frac{(b^2 - a^2) - h(b-a)}{2}$$

que é válido para todos $a, b \in \mathbb{T}$.

(ii) Seja $\mathbb{T} = \overline{q^{\mathbb{Z}}} := \{q^k : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}, \quad q > 1$. Desejamos calcular $\displaystyle\int_a^b t^2\Delta t$. Note que, como q é uma constante, o Teorema 4.2.8 parte (i) garante que

$$\int_a^b t^2\Delta t = \frac{1}{q^2+q+1}\int_a^b t^2(q^2+q+1)\Delta t.$$

Como $F(t) = t^3$ é diferenciável com derivada $F^{\Delta}(t) = t^2(q^2 + q + 1)$, para todo $a, b \in \mathbb{T}$, o Teorema Fundamental do Cálculo implica que

$$\frac{1}{q^2 + q + 1} \int_a^b t^2(q^2 + q + 1)\Delta t = \left.\frac{t^3}{q^2 + q + 1}\right|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{q^2 + q + 1}$$

e, assim,

$$\int_a^b t^2 \Delta t = \frac{b^3 - a^3}{q^2 + q + 1}$$

para todo $a, b \in \mathbb{T}$.

5 Funções Convexas em Escalas Temporais

As funções convexas desempenham um papel crucial em quase todas as áreas da matemática, bem como em outras áreas da ciência e engenharia. Veremos que a convexidade de uma função dada garante a sua subdiferenciabilidade e, consequentemente, o subdiferencial de uma função convexa é não vazio. As principais referências deste capítulo são [11],[22].

5.1 Conceito de Convexidade

A propriedade de convexidade está definida para funções reais em intervalos. Aqui apresentamos a definição de função convexa em um intervalo de escala temporal $I = \bar{I} \cap \mathbb{T} \subseteq \mathbb{T}$, onde $\bar{I}$ é um intervalo arbitrário de $\mathbb{R}$. Além disso, mostramos algumas propriedades das funções convexas em relação às propriedades do caso contínuo e o caso discreto.

Definição 5.1.1. *Seja $I \subseteq \mathbb{T}$. Uma função f definida em I é chamada convexa em I se para quaisquer $t_1, t_2 \in I$*

$$(t_2 - t)f(t_1) + (t_1 - t_2)f(t) + (t - t_1)f(t_2) \geq 0, \quad \forall t \in I. \tag{5.1}$$

Similarmente, f é dita côncava em I se (5.1) vale com a desigualdade $'' \geq ''$ substituída por $'' \leq ''$.
Uma função que é convexa e côncava em I é chamada afim em I.

Observação 5.1.1. (a) Note que $I \subseteq \mathbb{T}$ pode ser fechado, aberto, finito ou infinito ou pode não ser nem aberto e nem fechado.

(b) Para $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, a definição (5.1) coincide com a definição usual de convexidade e concavidade de uma função. Sejam $t_1, t_2 \in I$ *e* $t_1 < t_2$. Se $t \in I$ *e* $t_1 \leq t \leq t_2$, então existe $\alpha \in [0,1]$ tal que $t = \alpha t_1 + (1-\alpha)t_2$ com $\alpha = \dfrac{t_2 - t}{t_2 - t_1}$ e $1 - \alpha = \dfrac{t - t_1}{t_2 - t_1}$. Assim, definimos convexidade usando combinações convexas de pontos de I. Certamente, a condição (5.1) pode ser reescrita como

$$f(t) = f(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2) \leq \alpha f(t_1) + (1-\alpha)f(t_2).$$

(c) Seja $\overline{I}$ um intervalo qualquer de $\mathbb{R}$. Se $f : \overline{I} \to \mathbb{R}$ é convexa (côncava) em $\overline{I}$ (no sentido usual para uma função no intervalo real), então a função $f|_{\mathbb{T}} : I \to \mathbb{R}$ é convexa (côncava) em $I = \overline{I} \cap \mathbb{T}$. Com efeito, sejam $t_1, t_2 \in I \subseteq \overline{I}$ com $t_1 < t_2$. Para $t \in I$, temos

(i) Se $t_1 \leq t \leq t_2$, então, existe $\alpha \in [0,1]$ tal que $t = \alpha t_1 + (1-\alpha)t_2$ e $f(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2) \leq \alpha f(t_1) + (1-\alpha)f(t_2)$, ($f$ é convexa em $\overline{I}$) com $\alpha = \dfrac{t_2 - t}{t_2 - t_1}$ e

$1-\alpha = \dfrac{t-t_1}{t_2-t_1}$, então

$$f(t) = f\left(\frac{t_2-t}{t_2-t_1}t_1 + \frac{t-t_1}{t_2-t_1}t_2\right) \leq \frac{t_2-t}{t_2-t_1}f(t_1) + \frac{t-t_1}{t_2-t_1}f(t_2),$$

ou seja,

$$f(t) \leq \frac{(t_2-t)f(t_1)+(t-t_1)f(t_2)}{t_2-t_1}.$$

Logo,

$$(t_2-t)f(t_1)+(t_1-t_2)f(t)+(t-t_1)f(t_2) \geq 0,$$

e, portanto,

$$(t_2-t)f|_{\mathbb{T}}(t_1)+(t_1-t_2)f|_{\mathbb{T}}(t)+(t-t_1)f|_{\mathbb{T}}(t_2) \geq 0, \quad t \in I.$$

(ii) Se $t > t_2 > t_1$, então existe $\alpha \in (0,1)$ tal que $t_2 = \alpha t_1 + (1-\alpha)t$, onde $\alpha = \dfrac{t_2-t}{t_1-t}$ e $1-\alpha = \dfrac{t_1-t_2}{t_1-t}$, então

$$f(t_2) \leq \frac{t_2-t}{t_1-t}f(t_1) + \frac{t_1-t_2}{t_1-t}f(t) = \frac{(t_2-t)f(t_1)+(t_1-t_2)f(t)}{t_1-t},$$

ou seja,

$$(t_2-t)f(t_1)+(t_1-t_2)f(t)+(t-t_1)f(t_2) \geq 0,$$

e, portanto,

$$(t_2-t)f|_{\mathbb{T}}(t_1)+(t_1-t_2)f|_{\mathbb{T}}(t)+(t-t_1)f|_{\mathbb{T}}(t_2) \geq 0 \text{ , para todo } t \in I.$$

(iii) Se $t < t_1 < t_2$, então existe $\alpha \in (0,1)$ tal que $t_1 = \alpha t + (1-\alpha)t_2$ onde $\alpha = \dfrac{t_1-t_2}{t-t_2}$ e $1-\alpha = \dfrac{t-t_1}{t-t_2}$, então

$$f(t_1) \leq \frac{t_1-t_2}{t-t_2}f(t) + \frac{t-t_1}{t-t_2}f(t_2) = \frac{(t_1-t_2)f(t)+(t-t_1)f(t_2)}{t-t_2},$$

ou seja,

$$(t_2-t)f(t_1)+(t_1-t_2)f(t)+(t-t_1)f(t_2) \geq 0, \text{ para todo } t \in I$$

e, portanto,

$$(t_2-t)f|_{\mathbb{T}}(t_1)+(t_1-t_2)f|_{\mathbb{T}}(t)+(t-t_1)f|_{\mathbb{T}}(t_2) \geq 0, \text{ para todo } t \in I$$

(d) Se $\mathbb{T} = \{a, b\}$ (Consiste apenas em dois pontos) ou $\mathbb{T} = \{a\}$ (apenas um ponto), então qualquer função $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ é afim.

(e) A função $f : I \subseteq \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ é convexa em I se, e somente se,

$$f(\lambda t + (1-\lambda)s) \leq \lambda f(t) + (1-\lambda)f(s)$$

para todo $t, s \in I$ e todo $\lambda \in [0,1]$ tal que $\lambda t + (1-\lambda)s \in I$.

Demonstração. Sejam $t, s \in I$, $t < s$ e $\lambda \in [0,1]$ tal que $\lambda t + (1-\lambda)s \in I$, como f é convexa em I, então

$$[s - (\lambda t + (1-\lambda)s)]f(t) + (t-s)f(\lambda t + (1-\lambda)s) + [\lambda t + (1-\lambda)s - t]f(s) \geq 0$$
$$(-\lambda t + \lambda s)f(t) + (t-s)f(\lambda t + (1-\lambda)s) + [(1-\lambda)s - (1-\lambda)t]f(s) \geq 0$$
$$\lambda(s-t)f(t) - (s-t)f(\lambda t + (1-\lambda)s) + (1-\lambda)(s-t)f(s) \geq 0$$
$$\lambda f(t) - f(\lambda t + (1-\lambda)s) + (1-\lambda)f(s) \geq 0$$

logo se tem $f(\lambda t+(1-\lambda)s) \leq \lambda f(t)+(1-\lambda)f(s)$. Assim, se tem provado a condição necessária. Vejamos agora a condição suficiente. Sejam $t_1, t_2 \in I$ e $t \in I$

(i) Seja $t_1 < t < t_2$, então existe $\lambda = \dfrac{t_2 - t}{t_2 - t_1}$ e $1 - \lambda = \dfrac{t - t_1}{t_2 - t_1}$ tal que $t = \lambda t_1 + (1-\lambda)t_2 \in I$, então

$$\begin{aligned} f(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) &\leq \lambda f(t_1) + (1-\lambda)f(t_2) \\ f(t) &\leq \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1}f(t_1) + \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}f(t_2) \\ (t_2 - t_1)f(t) &\leq (t_2 - t)f(t_1) + (t - t_1)f(t_2) \end{aligned}$$

então $(t_2 - t)f(t_1) + (t_1 - t_2)f(t) + (t - t_1)f(t_2) \geq 0$.
Portanto, f é convexa em I.

(ii) Seja $t < t_1 < t_2$, então $t_1 = \lambda t+(1-\lambda)t_2 \in I$ onde $\lambda = \dfrac{t_1 - t_2}{t - t_2}$ e $1-\lambda = \dfrac{t - t_1}{t - t_2}$, então

$$\begin{aligned} f(\lambda t + (1-\lambda)t_2) &\leq \lambda f(t) + (1-\lambda)f(t_2) \\ f(t_1) &\leq \frac{t_1 - t_2}{t - t_2}f(t) + \frac{t - t_1}{t - t_2} \\ (t - t_2)f(t_1) &\leq (t_1 - t_2)f(t) + (t - t_1)f(t_2) \end{aligned}$$

então $(t_2 - t)f(t_1) + (t_1 - t_2)f(t) + (t - t_1)f(t_2) \geq 0$.
Portanto, f é convexa em I.

(iii) Seja $t_1 < t_2 < t$, então $t_2 = \lambda t_1 + (1-\lambda)t$, onde $\lambda = \dfrac{t_2 - t}{t_1 - t}$, $1 - \lambda = \dfrac{t_1 - t_2}{t_1 - t}$, então

$$\begin{aligned} f(\lambda t_1 + (1-\lambda)t) &\leq \lambda f(t_1) + (1-\lambda)f(t) \\ f(t_2) &\leq \frac{t_2 - t}{t_1 - t}f(t_1) + \frac{t_1 - t_2}{t_1 - t}f(t) \\ (t_1 - t)f(t_2) &\leq (t_2 - t)f(t_1) + (t_1 - t_2)f(t) \end{aligned}$$

então $(t - t_1)f(t_2) + (t_2 - t)f(t_1) + (t_1 - t_2)f(t) \geq 0$.
Portanto f é convexa em I.

$\square$

Definição 5.1.2. *Se $I \subseteq \mathbb{T}$ é um intervalo não vazio da escala temporal $\mathbb{T}$, tal que $I = \bar{I} \cap \mathbb{T}$, então podemos estender a definição da função $f : I \to \mathbb{R}$ da seguinte maneira*

$$\bar{f}(t) = \begin{cases} f(t), & \text{se } t \in \mathbb{T} \\ \\ f(s) + \dfrac{f(\sigma(s)) - f(s)}{\mu(s)}(t-s), & \text{se } t \in (s, \sigma(s)) \end{cases} \tag{5.2}$$

quando $s \in \mathbb{T}$ é discreto à direita; ou

$$\bar{f}(t) = \begin{cases} f(t), & \text{se } t \in \mathbb{T} \\ \\ f(s) + \dfrac{f(s) - f(\rho(s))}{\nu(s)}(t-s), & \text{se } t \in (\rho(s), s) \end{cases} \tag{5.3}$$

quando $s \in \mathbb{T}$ é discreto à esquerda.

Teorema 5.1.1. *A função $f : I \subseteq \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ é convexa em $I = \overline{I} \cap \mathbb{T}$ se, e somente se, existe uma função convexa $\overline{f} : \overline{I} \to \mathbb{R}$ tal que $\overline{f}(t) = f(t)$, para todo $t \in I$.*

Demonstração. Para provar a condição necessária, definimos $\bar{f}$ usando f e unindo todos os pontos discretos por linhas. Mais precisamente

$$\bar{f}(t) = \begin{cases} f(t), & \text{se } t \in I \\ \\ f(s) + \dfrac{f(\sigma(s)) - f(s)}{\mu(s)}(t-s), & \text{se } t \in (s, \sigma(s)), s \in I, \end{cases} \tag{5.4}$$

onde s é discreto à direita.
Agora, vamos provar que essa função é convexa em $\bar{I}$. Para isso, basta mostrar que para quaisquer $x, y \in \bar{I}$ e $\lambda \in [0,1]$, temos

$$\bar{f}(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda \bar{f}(x) + (1-\lambda)\bar{f}(y). \tag{5.5}$$

(i) Se $I = \{s, \sigma(s)\}$, (isto é, I tem apenas dois pontos) então $\bar{f}$ é convexa em I pois $\bar{f}$ é uma função afim em I. Sejam $x, y \in (s, \sigma(s))$ e $\lambda \in [0,1]$, então $\lambda x + (1-\lambda)y \in (s, \sigma(s))$. Logo, pela definição da função $\bar{f}$, temos

$$\bar{f}(\lambda x + (1-\lambda)y) = f(s) + \frac{f(\sigma(s)) - f(s)}{\mu(s)}(\lambda x + (1-\lambda)y - s). \tag{5.6}$$

Além disso,

$$\lambda \bar{f}(x) = \lambda f(s) + \frac{f(\sigma(s)) - f(s)}{\mu(s)}(x-s)\lambda \quad e \tag{5.7}$$

$$(1-\lambda)\bar{f}(y) = (1-\lambda)f(s) + \frac{f(\sigma(s)) - f(s)}{\mu(s)}(y-s)(1-\lambda). \tag{5.8}$$

Somando as equações (5.7) e (5.8) obtemos $\bar{f}(\lambda x + (1-\lambda)y)$. Portanto, $\bar{f}$ é convexa em $\bar{I} = [s, \sigma(s)]$

(ii) Se $x, y, \lambda x + (1-\lambda)y \in I$, então da convexidade de f temos

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Por definição temos $\bar{f}(t) = f(t)$ em I e, portanto, $\bar{f}$ satisfaz a desigualdade (5.5)

(iii) Se $x, y \in I$ e $y = \sigma(x)$, então pela parte (i), $\bar{f}$ é convexa em $[x, y]$.

(iv) Se $x, y \in I$ e $y > \sigma(x)$, então notamos que a corda unindo os pontos $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$ está acima de todos os pontos $(z, f(z))$, com $z \in I$. Com efeito, seja $z \in I$ tal que $\sigma(x) \leq z \leq y$, e seja (z, p) o ponto sobre a reta unido pelos pontos $(\sigma(x), f(\sigma(x)))$ e $(y, f(y))$. Então, encontrando p por meio da equação da reta que une estes pontos, temos

$$p = \frac{f(y) - f(\sigma(x))}{y - \sigma(x)}(z - y) + f(y).$$

Além disso, pela convexidade de f em I, para $\sigma(x) \leq z \leq y$ temos

$$\frac{f(y) - f(\sigma(x))}{y - \sigma(x)} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}.$$

Então, $f(z) \leq \frac{f(y)-f(\sigma(x))}{y-\sigma(x)}(z - y) + f(y)$. Portanto, $f(z) \leq p$ para todo $z \in I$. Assim $\bar{f}$ é convexa em $[x, y]$.

(v) Se $x \in I$ e $y \in \bar{I} \backslash \mathbb{T}$, com $y \leq \sigma(x)$, então $(y, f(y))$ está na reta de $(x, f(x))$ a $(\sigma(x), f(\sigma(x)))$ e, assim, são todos os pontos $(\lambda x + (1-\lambda)y, f(\lambda x + (1-\lambda)y))$ e obtemos novamente a igualdade (5.5)

(vi) Se $y > \sigma(x)$, então podemos encontrar $z \in I$ tal que $x < z$ e $z < y < \sigma(z)$. Usando a convexidade de f em $x, z, \sigma(z)$ temos

$$\frac{f(x) - f(z)}{x - z} \leq \frac{f(x) - f(\sigma(z))}{x - \sigma(z)},$$

enquanto da convexidade de $\bar{f}$ em $[z, \sigma(z)]$, obtemos

$$\frac{f(x) - f(z)}{x - z} \leq \frac{f(x) - \bar{f}(y)}{x - y} \leq \frac{f(x) - f(\sigma(z))}{x - \sigma(z)},$$

isto é, a reta de $(x, f(x))$ a $(y, f(y))$ está entre a reta de $(x, f(x))$ a $(z, f(z))$ e a reta de $(x, f(x))$ a $(\sigma(z), f(\sigma(z)))$. Se $\lambda x + (1-\lambda)y \in [z, y]$ a conclusão segue da convexidade de $\bar{f}$, enquanto se $\lambda x + (1-\lambda)y \in [x, z]$, então a conclusão se baseia nos mesmos argumentos que no caso $x, y \in I$ e $y > \sigma(x)$.

□

Observação 5.1.2. Se $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$, $h > 0$ e a função $f : h\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ é convexa em $h\mathbb{Z}$, então a condição (5.1) pode ser reescrito como $f(\rho(t)) + f(\sigma(t)) = f(t-h) + f(t+h) \geq 2f(t)$ para todo $t \in h\mathbb{Z}$. Com efeito, seja $t \in \mathbb{T}$ tal que $\rho(t) < t < \sigma(t)$. Como $f : h\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ é convexa em $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$, então

$$\begin{aligned} (t-\rho(t))f(\sigma(t)) + (\sigma(t)-t)f(\rho(t)) + (\rho(t)-\sigma(t))f(t) &\geq 0 \\ hf(\sigma(t)) + hf(\rho(t)) + (t-h-(t+h))f(t) &\geq 0 \\ hf(\sigma(t)) + hf(\rho(t)) - 2hf(t) &\geq 0 \\ f(\sigma(t)) + f(\rho(t)) &\geq 2f(t). \end{aligned}$$

Portanto, $f(\rho(t)) + f(\sigma(t)) = f(t-h) + f(t+h) \geq 2f(t)$ para todo $t \in h\mathbb{Z}$.

Proposição 5.1.1. *Uma combinação linear de funções convexas com coeficientes não negativos é ainda uma função convexa.*

Demonstração. Sejam $f_i : I \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$ funções convexas e $a_i \geq 0$, $i = 1, ..., n$. Então, para quaisquer $t_1, t_2, t \in I$ temos

$$(t_2 - t)f_i(t_1) + (t_1 - t_2)f_i(t) + (t - t_1)f_i(t_2) \geq 0, \quad i = 1, ...n.$$

Multiplicando a desigualdade acima por a_i e somando-os, obtemos

$$(t_2 - t)(\sum_{i=1}^{n} a_i f_i)(t_1) + (t_1 - t_2)(\sum_{i=1}^{n} a_i f_i)(t) + (t - t_1)(\sum_{i=1}^{n} a_i f_i)(t_2) \geq 0,$$

e isto mostra a convexidade de $\sum_{i=1}^{n} a_i f_i$. Portanto, a tese é válida. $\square$

Proposição 5.1.2. *Sejam $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ uma função convexa em $I \subseteq \mathbb{T}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função convexa e crescente em $f(I)$. Então, a composição $g \circ f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ é convexa em I.*

Demonstração. Sejam $\varphi = g \circ f$ e $t_1, t_2 \in I$. Se não houver mais pontos em I, então é óbvio que a tese é válida. Seja $t_1 < t_2$ e $t_1 \leq t \leq t_2$, $t \in I$. Então existe $\alpha \in [0, 1]$ tal que $t = \alpha t_1 + (1-\alpha)t_2$. Da convexidade de f temos que $f(t) = f(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2) \leq \alpha f(t_1) + (1-\alpha)f(t_2)$. Como g é crescente, temos $g(f(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2)) \leq g(\alpha f(t_1) + (1-\alpha)f(t_2))$ e da convexidade de g temos

$$(g \circ f)(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2) \leq g(\alpha f(t_1) + (1-\alpha)f(t_2)) \leq \alpha(g \circ f)(t_1) + (1-\alpha)(g \circ f)(t_2).$$

Logo, $\varphi(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2) \leq \alpha\varphi(t_1) + (1-\alpha)\varphi(t_2)$, o que termina a prova. $\square$

5.2 Propriedades das Funções Convexas

Mostramos algumas propriedades básicas caracterizando as funções convexas em escalas temporais [22].

Proposição 5.2.1. *Seja* $f : I \subseteq \mathbb{T} \to \mathbb{R}$*. A função* f *é convexa em* I *se, e somente se,* $\frac{f(b_1)-f(a_1)}{b_1-a_1} \leq \frac{f(b_2)-f(a_2)}{b_2-a_2}$ *para todo* $a_1, a_2, b_1, b_2 \in I$ *tal que* $a_1 < b_1$*,* $a_2 < b_2$*,* $a_1 \leq a_2$ *e* $b_1 \leq b_2$*.*

Demonstração. Suponhamos que f é convexa em $I \subseteq \mathbb{T}$ e $a_1, a_2, b_1, b_2 \in I$.

(i) Se $a_1 = a_2 < b_1 = b_2$, temos $\frac{f(b_1)-f(a_1)}{b_1-a_1} \leq \frac{f(b_2)-f(a_2)}{b_2-a_2}$

(ii) Se $a_1 = a_2 < b_1 < b_2$. Então pela convexidade de f, temos $(b_2 - b_1)f(a_1) + (a_1 - b_2)f(b_1) + (b_1 - a_1)f(b_2) \geq 0$. Somando $(b_1 - a_1)f(a_1)$ em ambos os lados e usando o fato de que $a_1 = a_2$, obtemos

$$(b_2 - b_1)f(a_1) + (a_2 - b_2)f(b_1) + (b_1 - a_1)f(b_2) + (b_1 - a_2)f(a_1) \geq (b_1 - a_1)f(a_1).$$

Logo, agrupando convenientemente os termos, temos

$$(b_1 - a_1)(f(b_2) - f(a_1)) + (b_2 - a_2)(f(a_1) - f(b_1)) \geq 0$$

e, portanto, $\frac{f(b_1)-f(a_1)}{b_1-a_1} \leq \frac{f(b_2)-f(a_2)}{b_2-a_2}$

(iii) O caso $a_1 < a_2 < b_1 = b_2$ é análogo ao anterior.

(iv) Se $a_1 < b_1 < a_2 < b_2$, então pela convexidade de f em I temos

$$(b_1 - a_1)f(a_2) + (a_1 - a_2)f(b_1) + (a_2 - b_1)f(a_1) \geq 0 \tag{5.9}$$

e

$$(b_1 - b_2)f(a_2) + (b_2 - a_2)f(b_1) + (a_2 - b_1)f(b_2) \geq 0 \tag{5.10}$$

adicionando $-f(b_1)b_1$ em ambos lados da desigualdade (5.9), obtemos

$$(b_1 - a_1)f(a_2) + (a_1 - a_2)f(b_1) + (a_2 - b_1)f(a_1) - f(b_1)b_1 \geq -f(b_1)b_1,$$
$$b_1 f(a_2) - a_1 f(a_2) + a_1 f(b_1) - b_1 f(b_1) \geq a_2 f(b_1) - a_2 f(a_1) + b_1 f(a_1) - b_1 f(b_1)$$

logo, agrupando os termos convenientemente, temos

$$[f(b_1) - f(a_1)](a_2 - b_1) \leq [f(a_2) - f(b_1)](b_1 - a_1)$$

assim,
$$\frac{f(b_1) - f(a_1)}{b_1 - a_1} \leq \frac{f(a_2) - f(b_1)}{a_2 - b_1}.$$
Analogamente adicionando $-f(a_2)a_2$ em ambos lados da desigualdade (5.10), obtemos
$$\frac{f(a_2) - f(b_1)}{a_2 - b_1} \leq \frac{f(b_2) - f(a_2)}{b_2 - a_2}.$$
Logo,
$$\frac{f(b_1) - f(a_1)}{b_1 - a_1} \leq \frac{f(a_2) - f(b_1)}{a_2 - b_1} \leq \frac{f(b_2) - f(a_2)}{b_2 - a_2}$$
e o resultado segue.

(v) Se $a_1 < a_2 < b_1 < b_2$, então pela parte anterior temos

$$\frac{f(a_2)-f(a_1)}{a_2-a_1} \leq \frac{f(b_1)-f(a_2)}{b_1-a_2} \leq \frac{f(b_2)-f(b_1)}{b_2-b_1}.$$

Portanto

$$\begin{aligned}(b_1-a_2)[f(a_2)-f(a_1)] &\leq (a_2-a_1)[f(b_1)-f(a_2)],\\(b_2-b_1)[f(b_1)-f(a_2)] &\leq (b_1-a_2)[f(b_2)-f(b_1)],\\(b_2-b_1)[f(a_2)-f(a_1)] &\leq (a_2-a_1)[f(b_2)-f(b_1)].\end{aligned}$$

Por conseguinte, somando ambos lados das desigualdades e reduzindo os termos semelhantes obtemos

$$b_2f(b_1)-b_2f(a_1)-a_2f(b_1)+a_2f(a_1) \leq b_1f(b_2)-b_1f(a_2)-a_1f(b_2)+a_1f(a_2).$$

Logo,

$$(b_2-a_2)[f(b_1)-f(a_1)] \leq (b_1-a_1)[f(b_2)-f(a_2)].$$

assim,

$$\frac{f(b_1)-f(a_1)}{b_1-a_1} \leq \frac{f(b_2)-f(a_2)}{b_2-a_2}.$$

Portanto, a condição necessária está provada.
Agora provamos a condição suficiente. Com efeito, sejam $t_1, t_2, t \in I$ tais que $t_1 < t < t_2$. Então por hipótese, temos

$$\frac{f(t)-f(t_1)}{t-t_1} \leq \frac{f(t_2)-f(t)}{t_2-t}.$$

Assim, $(f(t)-f(t_1))(t_2-t) \leq (f(t_2)-f(t))(t-t_1)$ e, portanto,

$$(t_2-t)f(t_1)+(t_1-t_2)f(t)+(t-t_1)f(t_2) \geq 0.$$

Assim, temos que f é convexa em I. □

Corolário 5.2.1. *Seja $\bar{I} = (a,b)$ onde $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Então $\bar{f} : \bar{I} \to \mathbb{R}$ é convexo em $\bar{I}$ se, e somente se, $\frac{\bar{f}(b_1)-\bar{f}(a_1)}{b_1-a_1} \leq \frac{\bar{f}(b_2)-\bar{f}(a_2)}{b_2-a_2}$ para todo $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \bar{I}$ tais que $a < a_1 < b_1$, $a_2 < b_2 < b$, $a_1 \leq a_2$ e $b_1 \leq b_2$.*

Demonstração. Fazendo $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ e $I = \bar{I} = (a,b)$ no teorema anterior, obtemos o resultado desejado. □

Teorema 5.2.1. *Se f é convexa em $I \subseteq \mathbb{T}$, então f é Lipschitz em $[a,b]_{\mathbb{T}} := [a,b] \cap \mathbb{T} \subsetneq I$, onde $a, b \in I$, $I \cap (-\infty, a) \neq \emptyset$ e $I \cap (b, +\infty) \neq \emptyset$.*

Demonstração. Suponhamos que f é convexa em $I \subseteq \mathbb{T}$. Sejam $a', b' \in I \backslash [a,b]$, $t_1, t_2 \in [a,b] \cap \mathbb{T}$ e $a' < a \leq t_1 < t_2 \leq b < b'$. Então pela Proposição 5.2.1 temos

$$\frac{f(a)-f(a')}{a-a'} \leq \frac{f(t_1)-f(t_2)}{t_1-t_2} \leq \frac{f(b')-f(b)}{b'-b},$$

para todo $t_1, t_2 \in [a,b]_{\mathbb{T}}$. Logo,

$$\left|\frac{f(t_1)-f(t_2)}{t_1-t_2}\right| \leq \max\left\{\left|\frac{f(a)-f(a')}{a-a'}\right|, \left|\frac{f(b')-f(b)}{b'-b}\right|\right\}.$$

Fazendo $L = \max\left\{\left|\frac{f(a)-f(a')}{a-a'}\right|, \left|\frac{f(b')-f(b)}{b'-b}\right|\right\}$, temos que f é Lipschitz em $[a,b]_{\mathbb{T}}$ e a constante de Lipschitz é L, o que termina a prova. □

Corolário 5.2.2. *Se f é convexa em $I \subseteq \mathbb{T}$, então é contínua em $[a,b]_{\mathbb{T}} := [a,b] \cap \mathbb{T} \subseteq I$, onde $a, b \in I$, $I \cap (-\infty, a) \neq \emptyset$ e $I \cap (b, +\infty) \neq \emptyset$.*

Demonstração. Pelo teorema anterior, temos que f é Lipschitz em $[a,b]_{\mathbb{T}}$, logo f é contínua em $[a,b]_{\mathbb{T}}$. □

Proposição 5.2.2. *Se $\bar{f} : (a,b) \to \mathbb{R}$ é convexa em (a,b) e $t_0 \in (a,b)$, então $\bar{f}(t) \geq \bar{f}(t_0) + (t-t_0)p$, $a < t < b$ se, e somente se, $\overline{f}'_-(t) \leq p \leq \overline{f}'_+(t)$, onde*

$$\overline{f}'_-(t) = \lim_{s \to t^-} \frac{\bar{f}(t)-\bar{f}(s)}{t-s} \quad e \quad \overline{f}'_+(t) = \lim_{s \to t^+} \frac{\bar{f}(t)-\bar{f}(s)}{t-s}.$$

Demonstração. Seja $t > t_0$. Se $t = t_0 + h$, então $\bar{f}(t_0+h) \geq \bar{f}(t_0) + hp$.
Logo $\frac{\bar{f}(t_0+h)-\bar{f}(t_0)}{h} \geq p$. Tomando o limite $h \to 0^+$ temos $p \leq \overline{f}'_+(t_0) \leq \overline{f}'_+(t)$. Analogamente, para $t < t_0$ e $t = t_0 - h$, temos $\bar{f}(t_0-h) - \bar{f}(t_0) \geq -hp$, logo $\frac{\bar{f}(t_0-h)-\bar{f}(t_0)}{-h} \leq p$. Tomando o limite $h \to 0^-$, temos $-h \to 0^+$ logo $\overline{f}'_-(t) \leq \overline{f}'_+(t_0) \leq p$. Portanto,

$$\overline{f}'_-(t) \leq p \leq \overline{f}'_+(t).$$

Reciprocamente, seja $t_0 < t_0 + h < t$, então pela convexidade de f temos

$$\frac{\bar{f}(t_0+h)-\bar{f}(t_0)}{h} \leq \frac{\bar{f}(t)-\bar{f}(t_0)}{t-t_0}.$$

Tomando $h \to 0^+$, temos $\overline{f}'_+(t) \leq \frac{\bar{f}(t)-\bar{f}(t_0)}{t-t_0}$ para $t > t_0$. Se $p \leq \overline{f}'_+(t)$, então $p \leq \frac{\bar{f}(t)-\bar{f}(t_0)}{t-t_0}$ e, portanto, $\bar{f}(t) \geq \bar{f}(t_0) + (t-t_0)p$, para $t > t_0$.
Analogamente, se $t < t_0 - h < t_0$, temos

$$\frac{\bar{f}(t_0)-\bar{f}(t_0-h)}{h} \geq \frac{\bar{f}(t)-\bar{f}(t_0)}{t-t_0}.$$

Tomando $h \to 0^+$, temos $\overline{f}'_-(t) \geq \frac{\bar{f}(t)-\bar{f}(t_0)}{t-t_0}$, para $t < t_0$. Se $p \geq \overline{f}'_-(t)$, então $p \geq \frac{\bar{f}(t)-\bar{f}(t_0)}{t-t_0}$.
Logo, $\bar{f}(t) \geq \bar{f}(t_0) + (t-t_0)p$, para $t < t_0$. Portanto, a afirmação é válida. □

Com base na construção de $\overline{f}$, podemos mostrar a seguinte consequência da proposição anterior.

Corolário 5.2.3. *Se $f : I \to \mathbb{R}$ é convexa em I e $t_0 \in I \backslash \{\inf I, \sup I\}$, então*

$$f(t) \geq f(t_0) + (t - t_0)p, \quad t \in I$$

se, e somente se, $\overline{f}'_{-}(t) \leq p \leq \overline{f}'_{+}(t)$.

Demonstração. $f : I \to \mathbb{R}$ é convexa em I se, e somente se, $\overline{f} : \overline{I} \to \mathbb{R}$ é convexa em $\overline{I}$, onde $I = \overline{I} \cap \mathbb{T}$. Então, $\overline{f}(t) \geq \overline{f}(t_0) + (t - t_0)p$, $t \in \overline{I}$ se, e somente se, $\overline{f}'_{-}(t) \leq p \leq \overline{f}'_{+}(t)$. Em particular, a afirmação é valida para $t \in I$. $\square$

Para funções delta e nabla diferenciáveis temos as seguintes propriedades caracterizando a convexidade.

Teorema 5.2.2. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ delta diferenciável em I^k. Se f^{Δ} é não-decrescente (não-crescente) em I^k, então f é convexa (côncava) em I.*

Demonstração. Suponhamos que $t_1, t, t_2 \in I$ e $t_1 < t < t_2$. Então, provar que f é convexa em I é equivalente a provar que

$$\frac{f(t) - f(t_1)}{t - t_1} \leq \frac{f(t_2) - f(t)}{t_2 - t} \tag{5.11}$$

Do Teorema do Valor Médio (Teorema 2.3.10) temos a existência de pontos $\tau_1, \xi_1 \in [t_1, t)$ e $\tau_2, \xi_2 \in [t, t_2)$ tais que

$$f^{\Delta}(\tau_1) \leq \frac{f(t) - f(t_1)}{t - t_1} \leq f^{\Delta}(\xi_1) \quad e \quad f^{\Delta}(\tau_2) \leq \frac{f(t_2) - f(t)}{t_2 - t} \leq f^{\Delta}(\xi_2).$$

Como $t_1 \leq \xi_1 < \tau_2$, e f^{Δ} é não decrescente, então $f^{\Delta}(\xi_1) \leq f^{\Delta}(\tau_2)$, logo

$$\frac{f(t) - f(t_1)}{t - t_1} \leq f^{\Delta}(\xi_1) \leq f^{\Delta}(\tau_2) \leq \frac{f(t_2) - f(t)}{t_2 - t},$$

o que prova a convexidade de f em I. $\square$

Corolário 5.2.4. *Seja f uma função definida e contínua num intervalo I tal que f^{Δ^2} existe e é finito em I^{κ^2}. Se $f^{\Delta^2}(t) \geq 0$ ($f^{\Delta^2}(t) \leq 0$) para todo $t \in I^{\kappa^2}$, então f é convexa (côncava) em I.*

Demonstração. Como $f^{\Delta^2}(t) \geq 0$ para todo $t \in I^{\kappa^2}$ então f^{Δ} é uma função não decrescente, logo pelo teorema anterior, temos que f é convexa em I. $\square$

Teorema 5.2.3. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função nabla diferenciável em I_{κ}. Se f^{∇} é não-decrescente (não-crescente) em I_{κ}, então f é convexa (côncava) em I.*

Demonstração. Análogo à demonstração do Teorema 5.2.2

Corolário 5.2.5. *Seja f uma função definida e contínua num intervalo I de escala temporal tal que f^{∇^2} existe e é finito em I_{κ^2}. Se $f^{\nabla^2} \geq 0$ ($f^{\nabla^2} \leq 0$) para todo $t \in I_{\kappa^2}$, então f é convexa (côncava) em I.*

Demonstração. Analogamente como no corolário anterior, temos que f^{∇} é uma função não decrescente e pelo teorema anterior, temos que f é convexa em I. □

Teorema 5.2.4. *Seja I constituído de pelo menos três pontos diferentes e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função delta diferenciável em I^{κ}. Se f é convexa (côncava) em I, então para cada $t_0 \in I^{\kappa^2}$, f^{Δ} é crescente à direita (decrescente à direita) em t_0*

Demonstração. Seja f uma função convexa em I. Seja $t_0 \in I^{\kappa^2}$. Primeiro vamos supor que t_0 é discreto à direita. Então $t_0 < \sigma(t_0) \in I$. Se $\sigma(t_0)$ é discreto à direita, isto é $\sigma(t_0) < \sigma^2(t_0) \in I$, então para a função convexa f, temos imediatamente que

$$\frac{f(\sigma(t_0)) - f(t_0)}{\sigma(t_0) - t_0} \leq \frac{f(\sigma^2(t_0)) - f(\sigma(t_0))}{\sigma^2(t_0) - \sigma(t_0)}.$$

Logo $f^{\Delta}(t_0) \leq f^{\Delta}(\sigma(t_0))$.
Se $\sigma(t_0)$ é denso à direita, então para uma sequência arbitrária (t_n) convergente a $\sigma(t_0)$ tal que $t_0 < \sigma(t_0) < t_n$ e $t_n \in I$, temos

$$\frac{f(\sigma(t_0)) - f(t_0)}{\sigma(t_0) - t_0} \leq \frac{f(t_n) - f(\sigma(t_0))}{t_n - \sigma(t_0)}.$$

Como o lado esquerdo da última desigualdade é constante, e igual a $f^{\Delta}(t_0)$, podemos tomar o limite com n tendendo ao infinito. Logo $f^{\Delta}(t_0) \leq f^{\Delta}(\sigma(t_0))$. Assim, f^{Δ} é não decrescente em t_0.
Agora consideremos t_0 denso à direita. Então, existe uma vizinhança U de t_0 tal que para todo $t \in U$, com $t > t_0$, t é isolado ou t é denso. Consideremos primeiro U tal que para $t > t_0$, $t \in U \cap I^{k^2}$ e $t < \sigma(t)$ com $\sigma(t) \in I^{k^2}$. Ou seja, todos os pontos $t \in U$ com $t > t_0$ são isolados. Agora como t_0 é denso à direita, há uma sequência $(t_n) \in I$, $t_0 < t_n$, tal que $\lim_{n\to\infty} t_n = t_0$. Seja $t_0 < t_n < t < \sigma(t)$. Como f é convexa, temos

$$\frac{f(t_n) - f(t_0)}{t_n - t_0} \leq \frac{f(t) - f(t_n)}{t - t_n} \quad e \quad \frac{f(t) - f(t_n)}{t - t_n} \leq \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t}.$$

Em seguida, tomando limites para $n \to \infty$ em ambas desigualdades, obtemos

$$f^{\Delta}(t_0) \leq \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \leq f^{\Delta}(t).$$

Finalmente, devemos considerar o caso quando todo $t \in U$, uma vizinhança de t_0, com $t > t_0$ são densos. Aqui temos uma situação como para $\mathbb{T} = \mathbb{R}$. □

A convexidade também pode ser caracterizada por ∇-derivadas da seguinte forma:

Teorema 5.2.5. *Seja I constituído de pelo menos três pontos diferentes e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função nabla diferenciável em I_κ. Se f é convexa (côncava) em I, então para cada $t_0 \in I_{\kappa^2}$, f^∇ é crescente à esquerda (decrescente à esquerda) em t_0.*

Demonstração. Análoga à demonstração do Teorema 5.2.4

Teorema 5.2.6. *Se $f : I \subseteq \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ é convexa em I e delta diferenciável (nabla diferenciável) em I^κ (I_κ), então f^Δ (f^∇) é contínua em I^κ (I_κ).*

Demonstração. Fazemos a prova para funções delta diferenciáveis. A prova para funções nabla diferenciáveis pode ser feita de forma semelhante. Seja $t \in I^\kappa \subseteq \mathbb{T}$. Se t é isolado, implica que cada função é contínua em $t \in I^\kappa$, logo a função f^Δ também o é. Se t é denso, seja $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência decrescente arbitrária tal que $t_n \in I$, $t_n > t$ e $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t$. Pelo Teorema 5.2.4, temos que a sequência $(f^\Delta(t_n))$ é não-crescente e

$$\lim_{n\to\infty} f^\Delta(t_n) = \inf\left\{f^\Delta(t_n) : n \in \mathbb{N}\right\} = f^\Delta(t).$$

Analogamente, para uma sequência crescente arbitrária (s_n), $n \in \mathbb{N}$ tal que $s_n \in I$, $s_n < t$ e $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = t$. Pelo Teorema 5.2.4, a sequência $(f^\Delta(s_n))$ é não-decrescente e

$$\lim_{n\to\infty} f^\Delta(s_n) = \sup\left\{f^\Delta(s_n) : n \in \mathbb{N}\right\} = f^\Delta(t).$$

Os casos t denso à direita e t denso à esquerda se reduzem ao caso anterior quando t é denso, pois existe uma sequência (t_n) decrescente tal que $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t$ e existe uma sequência crescente (s_n) tal que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = t$, respectivamente. Analogamente se tem quando t é discreto à esquerda e discreto à direita. Portanto, para cada $t \in I^\kappa$, f^Δ é contínua em t. $\square$

É claro que nem toda função convexa é delta e nabla diferenciável. Por exemplo, a função $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ definida por $f(t) = |t|$ não é delta, nem nabla diferenciável em $t_0 = 0$, mas é convexa em $\mathbb{R}$.

Assumindo convexidade de f, podemos provar que f é subdiferenciável, o que será apresentado na próxima seção.

5.3 Subdiferenciais

Seja $\mathbb{T}$ uma escala temporal e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função definida no intervalo da escala temporal $I = \bar{I} \cap \mathbb{T}$

Definição 5.3.1. *A subdiferencial de $f : I \to \mathbb{R}$, denotada por ∂f, é o conjunto de todas as funções estendidas $\varphi : I \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ de tal modo que $\varphi(int(\bar{I}) \cap \mathbb{T}) \subseteq \mathbb{R}$ e*

$$f(t_1) \geq f(t_2) + (t_1 - t_2)\varphi(t_2), \tag{5.12}$$

para quaisquer $t_1, t_2 \in I$.

Como $\partial f = \{\varphi : I \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}\}$, $\partial f(t) := \{\varphi(t)\}$. Assim a subdiferencial de f pode ser considerado como o conjunto das funções valoradas ∂f que atribuem o conjunto $\partial f(t)$ a cada t, i.e., $\partial f : t \to \partial f(t)$. Para cada $t \in I$, denotamos por $\partial f(t)$ o conjunto de todos os sub-gradientes de f em t. Se $\partial f(t) \neq \emptyset$, dizemos que f é subdiferenciável em t.

Exemplo 5.3.1. Sejam $\mathbb{T} = \{\pm 2^{\mathbb{Z}}\} \cup \{0\}$ e $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = |t|$. Se $\varphi \in \partial f$, então $\varphi(t) = -1$, para $t < 0$, $\varphi(t) = 1$, para $t > 0$ e $\varphi(0) \in [-1, 1]$. Com efeito, como $\varphi \in \partial f$ então $f(s) \geq f(t) + (s - t)\varphi(t)$ para quaisquer $t, s \in \mathbb{T}$, então fazendo $s = 0$ e $t = -2^n$, $n \in \mathbb{Z}$ temos

$$\begin{aligned} f(0) &\geq f(-2^n) + 2^n \varphi(-2^n) \\ 0 &\geq 2^n + 2^n \varphi(-2^n) \\ -2^n &\geq 2^n \varphi(-2^n). \end{aligned}$$

Logo, $\varphi(-2^n) \leq -1$, então $\varphi(t) \leq -1$ para $t < 0$
Agora seja $s = -2^{n+1}$, $t = -2^n$, $n \in \mathbb{Z}$ então

$$\begin{aligned} f(-2^{n+1}) &\geq f(-2^n) + (-2^{n+1} + 2^n)\varphi(-2^n) \\ 2^{n+1} &\geq 2^n + 2^n(-2+1)\varphi(-2^n) \\ 2^n.2 &\geq 2^n + 2^n(-2+1)\varphi(-2^n) \\ 2 &\geq 1 - \varphi(-2^n), \end{aligned}$$

então $\varphi(-2^n) \geq -1$. Assim, $\varphi(t) \geq -1$ para $t < 0$. Portanto $\varphi(t) = -1$ para todo $t < 0$
Seja agora $s = 0$ e $t = 2^n$, $n \in \mathbb{Z}$, então

$$\begin{aligned} f(0) &\geq f(2^n) - 2^n \varphi(2^n) \\ 0 &\geq 2^n - 2^n \varphi(2^n) \\ -2^n &\geq -2^n \varphi(2^n). \end{aligned}$$

Então $1 \leq \varphi(2^n)$. Assim, $\varphi(t) \geq 1$ para $t > 0$ Agora para $s = 2^{n+1}$ e $t = 2^n$ temos

$$\begin{aligned} f(2^{n+1}) &\geq f(2^n) + (2^{n+1} - 2^n)\varphi(2^n) \\ 2^n.2 &\geq 2^n + 2^n \varphi(2^n) \\ 2 &\geq 1 + \varphi(2^n), \end{aligned}$$

então $\varphi(2^n) \leq 1$. Assim $\varphi(t) \leq 1$ para $t > 0$. Portanto, $\varphi(t) = 1$ para todo $t > 0$.
Analogamente, calculamos $\varphi(0)$. Sejam $s = -2^n$, $n \in \mathbb{Z}$ e $t = 0$, então

$$\begin{aligned} f(-2^n) &\geq f(0) + (-2^n - 0)\varphi(0) \\ 2^n &\geq 0 - 2^n \varphi(0) \\ 2^n &\geq 2^n[-\varphi(0)] \end{aligned}$$

então $\varphi(0) \geq -1$.
Agora, seja $s = 2^n$, $n \in \mathbb{Z}$ e $t = 0$, então

$$\begin{aligned} f(2^n) &\geq f(0) + (2^n - 0)\varphi(0) \\ 2^n &\geq 2^n\varphi(0). \end{aligned}$$

Então $\varphi(0) \leq 1$. Logo, $-1 \leq \varphi(0) \leq 1$, assim $\varphi(0) \in [-1, 1]$. Portanto,

$$\partial f(t) = \begin{cases} -1, & \text{se} \quad t < 0 \\ [-1, 1], & \text{se} \quad t = 0 \\ 1, & \text{se} \quad t > 0 \end{cases}$$

Assim, a função f é subdiferenciável em cada $t \in \mathbb{T}$. Observe que f não é nabla, nem delta diferenciável em 0.

Exemplo 5.3.2. Sejam $\mathbb{T} = \mathbb{R}_- \cup \mathbb{Z}$, $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = 0$ para $t < 0$, $f(t) = t^2$ para $t \geq 0$. Se $\varphi \in \partial f$, então $\varphi(t) = 0$, para $t < 0$, $\varphi(t) \in [2t - 1, 2t + 1]$, para $t > 0$ e $\varphi(0) \in [0, 1]$. Com efeito, como $\varphi \in \partial f$, então $f(s) \geq f(t) + (s - t)\varphi(t)$ para todo $t, s \in \mathbb{T}$. Sejam $t, s \in \mathbb{T} = \mathbb{R}_- \cup \mathbb{Z}$ tais que $t < 0$, $s = 0$ então

$$\begin{aligned} f(0) &\geq f(t) + (0 - t)\varphi(t) \\ \Leftrightarrow 0 &\geq 0 + (-t)\varphi(t) \\ \Leftrightarrow 0 &\geq (-t)\varphi(t), \end{aligned}$$

logo $\varphi(t) \leq 0$ para $t < 0$.
Agora, sejam $t < 0$, $s = 2t < 0$, então

$$\begin{aligned} f(2t) &\geq f(t) + (2t - t)\varphi(t) \\ \Leftrightarrow 0 &\geq 0 + t\varphi(t) \\ \Leftrightarrow 0 &\geq t\varphi(t). \end{aligned}$$

Como $t < 0$, então $\varphi(t) \geq 0$. Logo $0 \leq \varphi(t) \leq 0$. Portanto $\varphi(t) = 0$ para todo $t < 0$.
Vejamos agora que $\varphi(0) \in [0, 1]$. De fato, sejam $t, s \in \mathbb{T}$ tais que $t = 0$ e $s < 0$, então

$$\begin{aligned} f(s) &\geq f(0) + (s - 0)\varphi(0) \\ \Leftrightarrow 0 &\geq 0 + s\varphi(0) \\ \Leftrightarrow 0 &\geq s\varphi(0). \end{aligned}$$

Como $s < 0$, então $\varphi(0) \geq 0$.
Tomando agora $s = 1$ e $t = 0$ temos

$$\begin{aligned} f(1) &\geq f(0) + (1 - 0)\varphi(0) \\ \Leftrightarrow 1 &\geq 0 + \varphi(0) \\ \Leftrightarrow 1 &\geq \varphi(0). \end{aligned}$$

Logo, $0 \leq \varphi(0) \leq 1$. Portanto, $\varphi(0) \in [0,1]$.
Agora consideremos $s > 0$, $t > 0$. Então,

$$\begin{aligned} f(s) &\geq f(t) + (s-t)\varphi(t) \\ \Leftrightarrow s^2 &\geq t^2 + (s-t)\varphi(t) \\ \Leftrightarrow s^2 - t^2 &\geq (s-t)\varphi(t) \\ \Leftrightarrow (s-t)(s+t) &\geq (s-t)\varphi(t) \\ \Leftrightarrow (s-t)[(s+t) - \varphi(t)] &\geq 0 \end{aligned}$$

para $s = t+1$, temos $[2t+1-\varphi(t)] \geq 0$, então $\varphi(t) \leq 2t+1$, para todo $t > 0$. Seja agora $s = t-1$, então $t-1 \geq 0$

(i) Se $t - 1 = 0$, então

$$\begin{aligned} f(t-1) &\geq f(t) - \varphi(t) \\ \Leftrightarrow 0 &\geq t^2 - \varphi(t) \\ \Leftrightarrow \varphi(t) &\geq t^2 \geq 2t-1 \end{aligned}$$

(ii) Se $t - 1 > 0$, então

$$\begin{aligned} f(t-1) &\geq f(t) - \varphi(t) \\ \Leftrightarrow (t-1)^2 &\geq t^2 - \varphi(t) \\ \Leftrightarrow -2t+1 &\geq -\varphi(t). \end{aligned}$$

Logo, $\varphi(t) \geq 2t-1$.

Assim, $\varphi(t) \in [2t-1, 2t+1]$. Logo

$$\partial f(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } \ t < 0 \\ [0,1], & \text{se } \ t = 0 \\ [2t-1, 2t+1], & \text{se } \ t > 0 \end{cases}$$

Portanto, a função f é subdiferenciável em cada $t \in \mathbb{T}$. Observe que f não é nabla, nem delta diferenciável em 0. Além disso, $f^{\nabla}(t) = f^{\Delta}(t) = 0$ para $t < 0$ e $f^{\nabla}(t) = 2t-1$, $f^{\Delta}(t) = 2t+1$ para $t > 0$.

Proposição 5.3.1. *Sejam $f : I \to \mathbb{R}$ subdiferenciável em cada $t \in I$ e $\varphi \in \partial f$. Então a função φ é não-descrecente*

Demonstração. Suponhamos que a função $f : I \to \mathbb{R}$ é subdiferenciável em cada $t \in I$. Então, de (5.12) segue que para quaisquer $t_1, t_2 \in I$, temos

$$\begin{aligned} f(t_1) &\geq f(t_2) + (t_1 - t_2)\varphi(t_2) \\ f(t_2) &\geq f(t_1) + (t_2 - t_1)\varphi(t_1). \end{aligned}$$

Portanto,

$$(t_1 - t_2)[\varphi(t_2) - \varphi(t_1)] \leq 0.$$

Logo, se $t_1 < t_2$, então $\varphi(t_1) \leq \varphi(t_2)$, donde segue que a função φ é não-decrescente. $\square$

Proposição 5.3.2. *Sejam $f : I \to \mathbb{R}$ subdiferenciável em $t_1, t_2 \in I$. Se $t_1 < t_2$ e $p_1 \in \partial f(t_1)$, $p_2 \in \partial f(t_2)$, então $p_1 \leq p_2$.*

Demonstração. Suponhamos que a função $f : I \to \mathbb{R}$ é subdiferenciável em $t_1, t_2 \in I$ e $p_1 \in \partial f(t_1)$, $p_2 \in \partial f(t_2)$. Então, de (5.12)

$$\begin{aligned} f(t_1) &\geq f(t_2) + (t_1 - t_2)p_2 \\ f(t_2) &\geq f(t_1) + (t_2 - t_1)p_1. \end{aligned}$$

Portanto,

$$(t_1 - t_2)[p_2 - p_1] \leq 0.$$

Disto segue que, se $t_1 < t_2$, então $p_1 \leq p_2$. $\square$

Proposição 5.3.3. *Sejam $t_1, t, t_2 \in I \subseteq \mathbb{T}$ tais que $t_1 < t < t_2$. Se $f : I \to \mathbb{R}$ é convexa em I, então*

$$\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} \in \partial f(t).$$

Demonstração. Suponhamos que a função $f : I \to \mathbb{R}$ é convexa em I. Então, a condição (5.1) é equivalente a

$$\begin{aligned} (t_2 - t_1)f(t_1) &\geq (t_2 - t_1)f(t) + (t_1 - t)(f(t_2) - f(t_1)) \\ (t_2 - t_1)f(t_2) &\geq (t_2 - t_1)f(t) + (t_2 - t)(f(t_2) - f(t_1)) \end{aligned}$$

Como $t_1 < t_2$. Então,

$$\begin{aligned} f(t_1) &\geq f(t) + (t_1 - t)\frac{f(t_2 - f(t_1))}{t_2 - t_1} \\ f(t_2) &\geq f(t) + (t_2 - t)\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}. \end{aligned}$$

Consequentemente, da definição de subdiferencial temos $\dfrac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} \in \partial f(t)$. $\square$

Proposição 5.3.4. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ subdiferenciável em cada $t \in I$. Então, ∂f é um conjunto convexo, i.e. se $\varphi_1, \varphi_2 \in \partial f$, então $\alpha\varphi_1 + (1-\alpha)\varphi_2 \in \partial f$, para qualquer $\alpha \in [0, 1]$*

Demonstração. Suponhamos que a função $f : I \to \mathbb{R}$ é subdiferenciável em cada $t \in I$. Então, segue da condição (5.12) que para quaisquer $t_1, t_2 \in I$ e qualquer $\alpha \in [0, 1]$ temos

$$\begin{aligned} \alpha f(t_1) &\geq \alpha f(t_2) + \alpha(t_1 - t_2)\varphi_1(t_2) \\ (1 - \alpha)f(t_1) &\geq (1 - \alpha)f(t_2) + (1 - \alpha)(t_1 - t_2)\varphi_2(t_2) \end{aligned}$$

e, portanto,

$$f(t_1) \geq f(t_2) + (t_1 - t_2)(\alpha\varphi_1 + (1-\alpha)\varphi_2)(t_2),$$

ou seja, $\alpha\varphi_1 + (1-\alpha)\varphi_2 \in \partial f$. □

Teorema 5.3.1. *Se f é convexa em I, então $\partial f(t) \neq \emptyset$ para $t \in I_\kappa^\kappa$.*

Demonstração. Sejam $t_1 < t < t_2$ e $t_1, t, t_2 \in I$. Então, a partir da Proposição 5.3.3, obtém-se $\dfrac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} \in \partial f(t)$, assim $\partial f(t) \neq \emptyset$. □

Teorema 5.3.2. *Se $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função tal que $\partial f(t) \neq \emptyset$ para todo $t \in I_\kappa^\kappa$, então f é convexa em I.*

Demonstração. Sejam $t_1, t, t_2 \in I$ e $t_1 < t < t_2$. Então $t \in I_\kappa^\kappa$. Suponhamos que o conjunto de todos os subgradientes de f em t é não vazio, i.e., $\partial f(t) \neq \emptyset$. Portanto, existe φ tal que o subgradiente $\varphi(t) \in \partial f(t)$ e

$$\begin{aligned} f(t_1) &\geq f(t) + (t_1 - t)\varphi(t), \\ f(t_2) &\geq f(t) + (t_2 - t)\varphi(t). \end{aligned}$$

Das desigualdades acima, temos

$$f(t_1) - f(t) \geq (t_1 - t)\varphi(t) \tag{5.13}$$

$$f(t_2) - f(t) \geq (t_2 - t)\varphi(t) \tag{5.14}$$

multiplicando a desigualdade (5.13) por $t_2 - t$ e a desigualdade (5.14) por $t_1 - t$ temos $(t_2 - t)(f(t_1) - f(t)) \geq (t_2 - t)(t_1 - t)\varphi(t)$ e $(t_1 - t)(f(t_2) - f(t)) \leq (t_2 - t)(t_1 - t)\varphi(t)$ e, portanto,

$$(t_1 - t)(f(t_2) - f(t)) \leq (t_2 - t)(t_1 - t)\varphi(t) \leq (t_2 - t)(f(t_1) - f(t)).$$

Logo, $(t_1 - t)(f(t_2) - f(t)) \leq (t_2 - t)(f(t_1) - f(t))$ e, por conseguinte, se tem

$$(t_2 - t)f(t_1) + (t_1 - t_2)f(t) + (t - t_1)f(t_2) \geq 0.$$

Portanto f é convexa. □

Observação 5.3.1. Pelos Teoremas 5.3.1 e 5.3.2 temos que a convexidade da função f é condição suficiente e necessária para sua subdiferenciabilidade.

Definição 5.3.2. *Sejam $\bar{I}$ um intervalo real e $\bar{f} : \bar{I} \to \mathbb{R}$. Definimos*

$$D\bar{f}(t)(v) := \lim_{h \to 0^+} \frac{\bar{f}(t + hv) - \bar{f}(t)}{h}. \tag{5.15}$$

$D\bar{f}(t)(v)$ é chamada a derivada à direita de $\bar{f}$ em t na direção v, desde que o limite do lado direito de (5.15) exista. Se $D\bar{f}(t)(v)$ existe para todas as direções v, dizemos que $\bar{f}$ é diferenciável à direita em t.

Observação 5.3.2. É claro que $D\overline{f}(t)(1) = \overline{f}'_+(t)$ e $D\overline{f}(t)(-1) = -\overline{f}'_-(t)$.

Proposição 5.3.5. *Seja $\overline{I} := (a,b) \subseteq \mathbb{R}$. Se $\overline{f} : \overline{I} \to \mathbb{R}$ é convexa em $\overline{I}$. Então $\overline{f}$ é diferenciável à direita em $t \in \overline{I}$ e $\overline{f}'_-(t) \leq \overline{f}'_+(t)$*

Demonstração. Seja $h > 0$. Então, $\dfrac{\overline{f}(t+h) - \overline{f}(t)}{h}$ é uma função crescente de h, pois pelo Corolário 5.2.1, dados $h \leq k$ e $a < h < t+h$, $k < t+k < b$ temos

$$\frac{\overline{f}(t+h) - \overline{f}(t)}{h} \leq \frac{\overline{f}(t+k) - \overline{f}(t)}{k}.$$

Assim, $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{\overline{f}(t+h) - \overline{f}(t)}{h}$ existe. Agora seja $t - h < t < t + k$. Então pelo Corolário 5.2.1 temos

$$\frac{\overline{f}(t) - \overline{f}(t-h)}{h} \leq \frac{\overline{f}(t+k) - \overline{f}(t)}{k}.$$

Logo, tomando limites quando $h, k \to 0^+$, temos $\overline{f}'_-(t) \leq \overline{f}'_+(t)$. □

Podemos expor a seguinte relação entre delta e nabla derivadas de f em t (se existirem) e a derivada à direita de $\overline{f}$ em t na direção v.

Teorema 5.3.3. *Sejam $t \in I \subseteq \mathbb{T}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função*

(a) Se $f^\Delta(t)$ existe, então para $v \geq 0$:

$$D\bar{f}(t)(v) = vf^\Delta(t).$$

(b) Se $f^\nabla(t)$ existe, então para $v < 0$:

$$D\bar{f}(t)(v) = vf^\nabla(t).$$

Demonstração. Damos a prova para a parte (a), enquanto a parte (b) pode-se provar de forma análoga. Primeiro, observamos que se f é delta-diferenciável em t e $\overline{f}$ é diferenciável à direita em t, então para $v = 0$ temos a fórmula (a). Seja t discreto à direita. Então, para todo $s \in [t, \sigma(t)]$ temos que $\bar{f}(s) = f^\Delta(t)(s-t) + f(t)$ com $f(t) = \bar{f}(t)$ e $f(\sigma(t)) = \bar{f}(\sigma(t))$. Além disso,

$$D\bar{f}(t)(v) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f^\Delta(t)(t+hv-t) + f(t) - \bar{f}(t)}{h} = vf^\Delta(t).$$

Seja t denso à direita. Então, para $v > 0$

$$vf^\Delta(t) = v \lim_{t_n \to t} \frac{f(t_n) - f(t)}{t_n - t}.$$

Como t é denso à direita, existe uma sequência (h_n) tal que $t_n = t + h_n v \in I$ e como n tendendo ao infinito, temos que h_n tende a zero e, consequentemente, $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t$. Portanto,

$vf^{\Delta}(t) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{f(t+h_n v) - f(t)}{h_n} = D\bar{f}(t)(v)$, o que conclui a demonstração. □

Vamos formular a relação entre a derivada $D\overline{f}(t)(v)$ à direita de f em t na direção v e a subdiferencial de f em t.

Teorema 5.3.4. *Sejam $t \in I$ e f subdiferenciável em t. Então, para todo $v \in \mathbb{R}$*

$$v \cdot \varphi(t) \leq D\bar{f}(t)(v), \tag{5.16}$$

onde $\varphi \in \partial f$.

Demonstração. Suponhamos que f é subdiferenciável em $t \in I$. Então para $v = 0$, $D\overline{f}(t)(0) = 0$, e vale o resultado. Seja $v > 0$ e $t \in I$ discreto à direita. Então $\sigma(t) > t$ e da definição de subdiferenciabilidade, temos

$$f(\sigma(t)) \geq f(t) + \mu(t)\varphi(t).$$

Logo, $\varphi(t) \leq \dfrac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}$. Além disso, pelo Teorema 5.3.2, temos que f é convexa, logo f é contínua. Portanto, $\varphi(t) \leq f^{\Delta}(t)$ e consequentemente $\varphi(t)v \leq vf^{\Delta}(t)$. Pelo Teorema 5.3.3, temos $vf^{\Delta}(t) = D\bar{f}(t)(v)$, assim $v \cdot \varphi(t) \leq D\bar{f}(t)(v)$.

Se $v > 0$ e $t \in I$ é denso à direita, então existe um $h > 0$ suficientemente pequeno, tal que $t + hv \in I$. Da definição de subdiferenciabilidade, temos

$$f(t+hv) \geq f(t) + hv\varphi(t).$$

Portanto $v\varphi(t) \leq \dfrac{f(t+hv) - f(t)}{h}$. Como $f(t) = \overline{f}(t)$ para $t \in I$, $v\varphi(t) \leq \dfrac{\overline{f}(t+hv) - \overline{f}(t)}{h}$.
Logo tomando limite quando $h \to 0^+$ temos

$$v\varphi(t) \leq D\overline{f}(t)(v).$$

Seja agora $v < 0$ e $t \in I$ discreto à esquerda. Então $\rho(t) < t$ e da definição de subdiferenciabilidade temos

$$f(\rho(t)) \geq f(t) - \nu(t)\varphi(t).$$

Logo, $\dfrac{f(t) - f(\rho(t))}{\nu(t)} \leq \varphi(t)$. Portanto $\varphi(t) \geq f^{\nabla}(t)$ e consequentemente desde $v \leq 0$, $v \cdot \varphi(t) \leq vf^{\nabla}(t)$. Pelo Teorema 5.3.3 temos $vf^{\nabla}(t) = D\overline{f}(t)(v)$, assim $v \cdot \varphi(t) \leq D\bar{f}(t)(v)$ para $v < 0$.

Se $v < 0$ e $t \in I$ é denso à esquerda, então existe um $h > 0$ suficientemente pequeno, tal que $t + hv \in I$. Da definição de subdiferenciabilidade temos

$$f(t+hv) \geq f(t) + hv\varphi(t).$$

Portanto $v\varphi(t) \leq \dfrac{f(t+hv) - f(t)}{h}$. Como $f(t) = \overline{f}(t)$ para $t \in I$, $v\varphi(t) \leq \dfrac{\overline{f}(t+hv) - \overline{f}(t)}{h}$.
Logo, tomando limite quando $h \to 0^+$, temos

$$v\varphi(t) \leq D\overline{f}(t)(v).$$

□

Corolário 5.3.1. *Se f é subdiferenciável em $t \in I$, então para $\varphi \in \partial f$*

$$\overline{f}'_{-}(t) \leq \varphi(t) \leq \overline{f}'_{+}(t).$$

Demonstração. Pelo Teorema 5.3.4 temos

$$-D\overline{f}(t)(-1) \leq \varphi(t) \leq D\overline{f}(t)(1)$$

e da Observação 5.3.2 temos $-D\overline{f}(t)(-1) = -\overline{f}'_{-}(t)$ e $D\overline{f}(t)(1) = \overline{f}'_{+}(t)$, assim $\overline{f}'_{-}(t) \leq \varphi(t) \leq \overline{f}'_{+}(t)$. □

O resultado a seguir segue dos Teoremas 5.3.3 e 5.3.4.

Teorema 5.3.5. *Se $f : I \to \mathbb{R}$ é convexa em I e f^{Δ} e f^{∇} existem, então as Δ e ∇ derivadas são elementos de ∂f e para $\varphi \in \partial f$ valem as seguintes desigualdades*

$$f^{\nabla}(t) \leq \varphi(t) \leq f^{\Delta}(t), t \in I_{\kappa}^{\kappa}.$$

Demonstração. Primeiramente provamos que tanto Δ e ∇-derivadas são elementos de ∂f. Suponha que f é convexa em I e $t \in I_{\kappa}^{\kappa}$. Se t é isolado, i.e., $\rho(t) < t < \sigma(t)$, então da convexidade de f temos

$$(\sigma(t) - t)f(\rho(t)) + (\rho(t) - \sigma(t))f(t) + (t - \rho(t))f(\sigma(t)) \geq 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
(\sigma(t) - t)f(\rho(t)) &\geq (\sigma(t) - \rho(t))f(t) + (\rho(t) - t)f(\sigma(t)) \\
&= \sigma(t)f(t) - \rho(t)f(t) + \rho(t)f(\sigma(t)) - tf(\sigma(t)) - tf(t) + tf(t) \\
&= (\sigma(t) - t)f(t) + \rho(t)(f(\sigma(t)) - f(t)) - t(f(\sigma(t)) - f(t)) \\
&= (\sigma(t) - t)f(t) + (\rho(t) - t)(f(\sigma(t)) - f(t))
\end{aligned}$$

Portanto,

$$f(\rho(t)) \geq f(t) + (\rho(t) - t)\frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t} = f(t) + (\rho(t) - t)f^{\Delta}(t).$$

Analogamente,

$$f(\sigma(t)) \geq f(t) + (\sigma(t) - t)\frac{f(t) - f(\rho(t))}{t - \rho(t)} = f(t) + (\sigma(t) - t)f^{\nabla}(t).$$

Por conseguinte, da definição de subdiferencial, temos que $f^{\Delta}(t), f^{\nabla}(t) \in \partial f(t)$ para t sendo isolado.

Se t é denso à esquerda e discreto à direita, i.e., $\rho(t) = t < \sigma(t)$, então da convexidade de f temos

$$(\sigma(t) - t)f(s) + (s - \sigma(t))f(t) + (t - s)f(\sigma(t)) \geq 0,$$

para $I \ni s < t$. Logo,

$$\begin{aligned}(\sigma(t)-t)f(s) &\geq (\sigma(t)-s)f(t)+(s-t)f(\sigma(t))\\ &= \sigma(t)f(t)-sf(t)+sf(\sigma(t))-tf(\sigma(t))-tf(t)+tf(t)\\ &= (\sigma(t)-t)f(t)+(f(\sigma(t))-f(t))+t(f(t)-f(\sigma(t)))\\ & (\sigma(t)-t)f(t)+(s-t)(f(\sigma(t))-f(t))\end{aligned}$$

Portanto,

$$f(s) \geq f(t)+(s-t)\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\sigma(t)-t} = f(t)+(s-t)f^{\Delta}(t).$$

Analogamente,

$$f(\sigma(t)) \geq f(t)+(\sigma(t)-t)\frac{f(s)-f(t)}{s-t}.$$

Como $\lim\limits_{s\to t}\dfrac{f(s)-f(t)}{s-t} = f^{\nabla}(t)$, pois t é denso à esquerda, tomando s tendendo a t na segunda desigualdade, temos $f(\sigma(t)) \geq f(t)+(\sigma(t)-t)f^{\nabla}(t)$. Assim, da definição de subdiferencial temos $f^{\Delta}(t), f^{\nabla}(t) \in \partial f(t)$ para t sendo denso à esquerda e discreto à direita. Seja agora t discreto à esquerda e denso à direita, i.e., $\rho(t) < t = \sigma(t)$, então da convexidade de f temos

$$(\tau-t)f(\rho(t))+(\rho(t)-\tau)f(t)+(t-\rho(t))f(\tau) \geq 0,$$

para $t < \tau \in I$. Portanto

$$\begin{aligned}f(\rho(t)) &\geq f(t)+(\rho(t)-t)\frac{f(\tau)-f(t)}{\tau-t}\\ f(\tau) &\geq f(t)+(\tau-t)\frac{f(t)-f(\rho(t))}{t-\rho(t)}\\ &= f(t)+(\tau-t)f^{\nabla}(t).\end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{\tau\to t}\dfrac{f(\tau)-f(t)}{\tau-t} = f^{\Delta}(t)$, pois t é denso à direita, tomando τ tendendo para t na primeira desigualdade temos $f(\rho(t)) \geq f(t)+(\rho(t)-t)f^{\Delta}(t)$. Portanto, da definição de subdiferenciável, temos $f^{\Delta}(t), f^{\nabla}(t) \in \partial f(t)$ para t sendo discreto à esquerda e denso à direita.

Se t é denso, i.e., $\rho(t) = t = \sigma(t)$, então $f^{\nabla}(t) = f^{\Delta}(t)$. Da convexidade de f temos

$$(\tau-t)f(s)+(s-\tau)f(t)+(t-s)f(\tau) \geq 0,$$

para $s < t < \tau$ e $s, \tau \in I$. Portanto

$$\begin{aligned}f(s) &\geq f(t)+(s-t)\frac{f(\tau)-f(t)}{\tau-t},\\ f(\tau) &\geq f(t)+(\tau-t)\frac{f(t)-f(s)}{t-s}.\end{aligned}$$

Como $\lim_{s\to t}\dfrac{f(s)-f(t)}{s-t}=\lim_{\tau\to t}\dfrac{f(\tau)-f(t)}{\tau-t}=f^{\Delta}(t)=f^{\nabla}(t)$, tomando τ tendendo a t e s tendendo a t temos

$$f(s)\geq f(t)+(s-t)f^{\Delta}(t)=f(t)+(s-t)f^{\nabla}(t) \quad e$$
$$f(\tau)\geq f(t)+(\tau-t)f^{\Delta}(t)=f(t)+(\tau-t)f^{\nabla}(t).$$

Da definição de subdiferencial temos $f^{\Delta}(t), f^{\nabla}(t)\in\partial f(t)$.
Agora provamos as desigualdades dadas no teorema. Do Teorema 5.3.4, temos

$$v\varphi(t)\leq D\overline{f}(t)v.$$

Além disso, pelo Teorema 5.3.3, temos

$$D\overline{f}(t)(v)=\begin{cases} v\cdot f^{\Delta}(t), & \text{se } \ v\geq 0\\ v\cdot f^{\nabla}(t), & \text{se } \ v<0\end{cases}$$

então $v\varphi(t)\leq vf^{\Delta}(t)$, para $v>0$. Assim,

$$\varphi(t)\leq f^{\Delta}(t).$$

Se $v<0$, então $v\varphi(t)\leq vf^{\nabla}(t)$ e, portanto,

$$\varphi(t)\geq f^{\nabla}(t).$$

Logo, $f^{\nabla}(t)\leq\varphi(t)\leq f^{\Delta}(t)$. □

Agora vamos dar as relações entre derivadas α-diamante de funções definidas em escalas temporais e suas subdiferenciais.

Teorema 5.3.6. *Se $f: I\to\mathbb{R}$ é uma função convexa, delta e nabla diferenciável, então*

$$\partial f=\left\{f^{\Diamond_\alpha},\alpha\in[0,1]\right\}$$

Demonstração. Seja $\varphi\in\partial f$. Pelo Teorema 5.3.5, temos $f^{\nabla}(t)\leq\varphi(t)\leq f^{\Delta}(t)$, para $t\in I_\kappa^\kappa$. Logo, existe $\alpha=\frac{f^{\Delta}(t)-\varphi(t)}{f^{\Delta}(t)-f^{\nabla}(t)}\in[0,1]$, com $f^{\Delta}(t)\neq f^{\nabla}(t)$ tal que $\varphi(t)=\alpha f^{\nabla}(t)+(1-\alpha)f^{\Delta}(t)$. Então pelo Teorema 3.2.2, temos $\varphi(t)=f^{\Diamond_\alpha}(t)$, donde segue a inclusão $\partial f\subseteq\left\{f^{\Diamond_\alpha},\alpha\in[0,1]\right\}$. Reciprocamente, pelo Teorema 5.3.5 temos que $f^{\nabla}, f^{\Delta}\in\partial f$. Além disso, usando o Teorema 3.2.2 e a Proposição 5.3.4, temos $f^{\Diamond_\alpha}=\alpha f^{\Delta}+(1-\alpha)f^{\nabla}\in\partial f$, para $\alpha\in[0,1]$. Portanto $\left\{f^{\Diamond_\alpha},\alpha\in[0,1]\right\}\subseteq\partial f$, assim o resultado segue. □

Corolário 5.3.2. *Se $f: I\to\mathbb{R}$ é uma função convexa e f^{∇} e f^{Δ} existem. Então para cada $\alpha\in[0,1]$ e $t\in I_\kappa^\kappa$ temos*

$$f^{\nabla}(t)\leq f^{\Diamond_\alpha}(t)\leq f^{\Delta}(t).$$

Demonstração. Seja $\varphi \in \partial f$. Do Teorema 5.3.6, temos que $\varphi \in \left\{f^{\Diamond_\alpha}, \alpha \in [0,1]\right\}$. Assim, $\varphi(t) = f^{\Diamond_\alpha}(t)$ para todo $t \in I_k^k$ e algum $\alpha \in [0,1]$. Pelo Teorema 3.2.2 temos $f^{\Diamond_\alpha}(t) = \alpha f^{\Delta}(t) + (1-\alpha) f^{\nabla}(t)$, para $\alpha \in [0,1]$, assim pelo Teorema 5.3.5 temos $f^{\nabla}(t) \leq f^{\Diamond_\alpha}(t) \leq f^{\Delta}(t)$. □

Proposição 5.3.6. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ delta e nabla diferenciável em $[a,b] \cap \mathbb{T} \subseteq I_\kappa^\kappa$. Se f é convexa num intervalo aberto da escala temporal I contendo $[a,b] \cap \mathbb{T}$, então para $\varphi \in \partial f$ arbitrário temos*

$$\int_a^b \varphi(t)\Delta t \leq f(b) - f(a) \quad e \quad \int_a^b \varphi(t)\nabla t \geq f(b) - f(a).$$

Demonstração. Seja $\varphi \in \partial f$. Então pelo Teorema 5.3.6, existe um $\alpha \in [0,1]$ tal que $\varphi = f^{\Diamond_\alpha}$. Pelo Corolário anterior, temos que $\varphi(t) \leq f^{\Delta}(t)$ e $\varphi(t) \geq f^{\nabla}(t)$, $t \in [a,b] \cap \mathbb{T} \subseteq I_k^k$. Então,

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi(t)\Delta t \leq \int_a^b f^{\Delta}(t)\Delta t = f(b) - f(a) \quad e \\ \int_a^b \varphi(t)\nabla t \geq \int_a^b f^{\nabla}(t)\nabla t = f(b) - f(a). \end{aligned}$$

□

5.4 Resultados Conhecidos Referentes à Desigualdade de Jensen

A desigualdade de Jensen é de grande interesse nas teorias de equações diferenciais e de diferenças, bem como em outras áreas da matemática [2], [19], [21]. A desigualdade original de Jensen pode ser apresentada como segue.

Teorema 5.4.1. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, e suponha $J \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo. Se $\Phi \in C(J, \mathbb{R})$ é convexa e $f \in C([a,b], J)$, então*

$$\Phi\left(\frac{\int_a^b f(t)dt}{b-a}\right) \leq \frac{\int_a^b \Phi(f(t))dt}{b-a}$$

A seguir, apresentamos a desigualdade de Jensen em escalas temporais. para isto, precisamos do seguinte lema.

Lema 5.4.1. *Seja $f \in C((c,d), \mathbb{R})$ convexa. Então, para cada $t \in (c,d)$, existe $a_t \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) - f(t) \geq a_t(x-t)$, para todo $x \in (c,d)$.*

Demonstração. Veja [12, Exercício 3.42 C]

Teorema 5.4.2 (A desigualdade de Jensen)**.** *Seja $a, b \in \mathbb{T}$ tal que $b \neq a$ e $c, d \in \mathbb{R}$. Se $g : [a, b]_{\mathbb{T}} \to (c, d)$ é rd-contínua e $\Phi : (c, d) \to \mathbb{R}$ é contínua e convexa, então*

$$\Phi\left(\frac{\int_a^b g(t)\Delta t}{b-a}\right) \leq \frac{\int_a^b \Phi(g(t))\Delta t}{b-a}$$

Demonstração. Seja $x_0 \in (c, d)$. Então, pelo lema anterior, existe $\beta_{x_0} \in \mathbb{R}$ tal que

$$\Phi(x) - \Phi(x_0) \geq \beta_{x_0}(x - x_0), \qquad \text{para todo } x \in (c, d). \tag{5.17}$$

Como $g \in C_{rd}$, $\quad x_0 = \frac{\int_a^b g(\tau)\Delta\tau}{b-a}$ está bem definido. Como Φ é contínua e g é rd-contínua, então $\Phi \circ g$ também é rd-contínua, e portanto podemos aplicar (5.17) com $x = g(t)$ e integrar de a a b para obter

$$\begin{aligned}
\int_a^b \Phi(g(t))\Delta t - (b-a)\Phi\left(\frac{\int_a^b g(\tau)\Delta\tau}{b-a}\right) &= \int_a^b \Phi(g(t))\Delta t - (b-a)\Phi(x_0) \\
&= \int_a^b \Phi(g(t))\Delta t - \int_a^b \Phi(x_0)\Delta t \\
&= \int_a^b [\Phi(g(t)) - \Phi(x_0)]\Delta t \\
&\geq \beta_{x_0} \int_a^b [g(t) - x_0]\Delta t \\
&= \beta_{x_0}\left[\int_a^b g(t)\Delta t - x_0(b-a)\right] \\
&= \beta_{x_0}\left[x_0(b-a) - x_0(b-a)\right] = 0.
\end{aligned}$$

Então, $\int_a^b \Phi(g(t))\Delta t - (b-a)\Phi\left(\frac{\int_a^b g(\tau)\Delta\tau}{b-a}\right) \geq 0$. Logo $\Phi\left(\frac{\int_a^b g(\tau)\Delta\tau}{b-a}\right) \leq \frac{\int_a^b \Phi(g(t))\Delta t}{b-a}$. $\square$

Quando $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ no Teorema 5.4.2, obtemos o Teorema 5.4.1. Quando $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ no Teorema 5.4.2, obtemos a desigualdade usual entre a média aritmética e a média geométrica.

Exemplo 5.4.1. Consideremos a escala temporal $\mathbb{T} = \mathbb{R}$. Sejam $a, b \in \mathbb{T}$ onde $a = 0$ e $b = 1$. Definimos $\Phi : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ por $\Phi(t) = -log(t)$. É claro que Φ é contínua e convexa. Além disso, seja $g : [0, 1] \to (0, \infty)$ uma função contínua qualquer. Aplicando o Teorema 5.4.2 obtemos

$$-\log\left(\int_0^1 g(t)dt\right) \leq \int_0^1 -\log(g(t))dt.$$

logo,

$$\int_0^1 \log(g(t))dt \leq \log\left(\int_0^1 g(t)dt\right).$$

Aplicando a função exponencial, temos

$$\exp\left(\int_0^1 \log(g(t))dt\right) \leq \int_0^1 g(t)dt.$$

Corolário 5.4.1. *Sejam* $a, b \in \mathbb{T}$ *e* $c, d \in \mathbb{R}$. *Suponha que* $f : [a, b] \to (c, d)$ *é rd-contínua e* $\Phi : (c, d) \to \mathbb{R}$ *é tal que* $\Phi'' \geq 0$ *(resp.,*$\Phi'' \leq 0$*). Então,*

$$\Phi\left(\frac{\int_a^b f(t)\Delta t}{b-a}\right) \leq \frac{\int_a^b f(t)\Delta t}{b-a} \tag{5.18}$$

(resp, a desigualdade inversa). Além disso, se $\Phi'' > 0$ *ou* $\Phi'' < 0$*, a igualdade em (5.18) é válida se, e somente se,* f *for constante.*

Demonstração. Isto segue imediatamente do Teorema 5.4.2 e os fatos de que uma função Φ com $\Phi'' \geq 0$ (resp.,$\Phi'' \leq 0$) é convexa (resp., côncava). □

Corolário 5.4.2. *Se* $f : [a, b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ *é rd-contínua e positiva, então*

$$\int_a^b f(t)\Delta t \ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\Delta t\right) \leq \int_a^b f(t)\ln(f(t))\Delta t \tag{5.19}$$

Além disso, a igualdade em (5.19) é válida se e somente se, f *for constante.*

Demonstração. Seja $\Phi(x) = x\ln(x)$, $x > 0$. Então, $\Phi^{''}(x) = \dfrac{1}{x}$, i.e., $\Phi^{''}(x) > 0$ para todo $x > 0$. Pelo Corolário 5.4.1, temos

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\Delta t \ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\Delta t\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\ln(f(t))\Delta t.$$

Logo,

$$\int_a^b f(t)\Delta t \ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\Delta t\right) \leq \int_a^b f(t)\ln(f(t))\Delta t.$$

□

A seguir, apresentamos uma segunda versão da desigualdade de Jensen em escalas temporais [21].

Teorema 5.4.3 (A desigualdade de Jensen II)**.** *Sejam* $g \in C_{rd}([a, b]_{\mathbb{T}}, (c, d))$ *e* $h \in C_{rd}([a, b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ *com* $\int_a^b |h(s)|\Delta s > 0$*, onde* $a, b \in \mathbb{T}$ *e* $c, d \in \mathbb{R}$. *Se* $f \in C((c, d), \mathbb{R})$ *é convexa, então*

$$f\left(\frac{\displaystyle\int_a^b |h(s)|g(s)\Delta s}{\displaystyle\int_a^b |h(s)|\Delta s}\right) \leq \frac{\displaystyle\int_a^b |h(s)|f(g(s))\Delta s}{\displaystyle\int_a^b |h(s)|\Delta s}.$$

Demonstração. Como f é contínua e convexa, pelo Lema 5.4.1, temos que para cada $t \in (c, d)$, existe $a_t \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) - f(t) \geq a_t(x - t) \text{ para todo } x \in (c, d).$$

Seja

$$t = \frac{\displaystyle\int_a^b |h(s)|g(s)\Delta s}{\displaystyle\int_a^b |h(s)|\Delta s}.$$

Assim,

$$\int_a^b |h(s)|f(g(s))\Delta s - \left(\int_a^b |h(s)|\Delta s\right) f\left(\frac{\displaystyle\int_a^b |h(s)|g(s)\Delta s}{\displaystyle\int_a^b |h(s)|\Delta s}\right)$$

$$= \int_a^b |h(s)|f(g(s))\Delta s - \left(\int_a^b |h(s)|\Delta s\right) f(t)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^b |h(s)|[f(g(s)) - f(t)]\Delta s \\
&\geq a_t \int_a^b |h(s)|[g(s) - t]\Delta s \\
&= \int_a^b (a_t|h(s)|g(s) - a_t|h(s)|t)\Delta s \\
&= a_t\left[\int_a^b |h(s)|g(s)\Delta s - t\int_a^b |h(s)|\Delta s\right] \\
&= a_t\left[\int_a^b |h(s)|g(s)\Delta s - \frac{\displaystyle\int_a^b |h(s)|g(s)\Delta s}{\displaystyle\int_a^b |h(s)|\Delta s}\int_a^b |h(s)|\Delta s\right] \\
&= a_t\left[\int_a^b |h(s)|g(s)\Delta s - \int_a^b |h(s)|g(s)\Delta s\right] = 0.
\end{aligned}$$

Então

$$\int_a^b |h(s)|f(g(s))\Delta s - \left(\int_a^b |h(s)|\Delta s\right) f\left(\frac{\displaystyle\int_a^b |h(s)|g(s)\Delta s}{\displaystyle\int_a^b |h(s)|\Delta s}\right) \geq 0.$$

Logo,

$$f\left(\frac{\displaystyle\int_a^b |h(s)|g(s)\Delta s}{\displaystyle\int_a^b |h(s)|\Delta s}\right) \leq \frac{\displaystyle\int_a^b |h(s)|f(g(s))\Delta s}{\displaystyle\int_a^b |h(s)|\Delta s} \geq 0.$$

□

5.5 Aplicação ao Cálculo Variacional

Mostramos agora como os resultados da seção 5.4 podem ser aplicados para determinar o mínimo ou máximo de problemas de cálculo de variações e controle ótimo em escalas temporais [9].

Teorema 5.5.1. *Seja $\varphi : [a,b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ uma função positiva e rd-contínua. Então, entre todas as C^1_{rd}-funções $y : [a,b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ satisfazendo $y^\Delta > 0$, $y(a) = 0$, e $y(b) = B$, com*

$$\frac{B + \int_a^b \varphi(s)\Delta s}{b-a} > \varphi(t), \quad t \in [a,b]_{\mathbb{T}}, \tag{5.20}$$

o funcional

$$\mathcal{F}(y(\cdot)) = \int_a^b [\varphi(t) + y^\Delta(t)] \ln[\varphi(t) + y^\Delta(t)]\Delta t$$

tem valor mínimo $\mathcal{F}_{min} = (b-a)C\ln(C)$ *alcançado quando*

$$y(t) = C(t-a) - \int_a^b \varphi(s)\Delta s, \quad t \in [a,b]_{\mathbb{T}},$$

onde

$$C = \frac{B + \int_a^b \varphi(s)\Delta s}{b-a}. \tag{5.21}$$

Demonstração. Por hipótese, temos $\varphi + y^\Delta$ é rd-contínua e positiva. Logo, pelo Corolário 5.4.2 temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(y(\cdot)) &\geq \int_a^b [\varphi(t) + y^\Delta(t)]\Delta t \ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b [\varphi(t) + y^\Delta(t)]\Delta t\right)\\
&= \left(\int_a^b \varphi(t)\Delta t + \int_a^b y^\Delta \Delta t\right) \ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(t)\Delta t + \frac{1}{b-a}\int_a^b y^\Delta(t)\Delta t\right)\\
&= \left(\int_a^b \varphi(t) + y(b) - y(a)\right) \ln\left(\frac{\int_a^b \varphi(t)\Delta t + y(b) - y(a)}{b-a}\right)\\
&= \left(\int_a^b \varphi(t)\Delta t + B\right) \ln\left(\frac{\int_a^b \varphi(t)\Delta t + B}{b-a}\right)
\end{aligned}$$

com $\mathcal{F}(y(\cdot)) = \left(\int_a^b \varphi(t)\Delta t + B\right) \ln\left(\frac{\int_a^b \varphi(t)\Delta t + B}{b-a}\right)$ se, e somente se

$$\varphi(t) + y^\Delta(t) = c \text{ para algum } c \in \mathbb{R}, \quad t \in [a,b]_{\mathbb{T}}.$$

Assim, $y^\Delta(t) = c - \varphi(t)$ $t \in [a,b]$. Integrando de a até t (note que $y(a) = 0$), obtemos

$$y(t) = c(t-a) - \int_a^t \varphi(s)\Delta s, \quad t \in [a,b].$$

Usando a condição de contorno $y(b) = B$, temos

$$y(b) = c(b-a) - \int_a^b \varphi(s)\Delta s.$$

Então

$$c = \frac{B + \int_a^b \varphi(s)\Delta s}{b-a} = C.$$

Com esta escolha de y, temos usando (5.20), que $y^\Delta(t) = C - \varphi(t) > 0$, $t \in [a,b]_{\mathbb{T}}$. Segue que $\mathcal{F}_{min} = (b-a)C\ln(C)$. □

Exemplo 5.5.1. Seja $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, $a = 0$, $b = 5$, $B = 25$ e $\varphi(t) = 2t + 1$ no Teorema 5.5.1. O funcional

$$\mathcal{F}(y(\cdot)) = \sum_{t=0}^{4}[(2t+1) + (y(t+1) - y(t))]\ln[(2t+1) + (y(t+1) - y(t))],$$

definido para toda $y : [0,5] \cap \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ tal que $y(t+1) > y(t)$ para todo $t \in [0,4] \cap \mathbb{T}$, atinge seu mínimo quando

$$y(t) = 10t - t^2, \quad t \in [0,5] \cap \mathbb{Z},$$

e $\mathcal{F}_{min} = 50 \ln(10)$.

Demonstração. Notamos que $\max\{\varphi(t) : t \in [0,4] \cap \mathbb{Z}\} = 9$. Portanto,

$$\frac{B + \sum_{k=0}^{4} \varphi(k)}{b-a} = \frac{25+25}{5} = 10 > 9 \geq \varphi(t).$$

Temos que, quando $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, $(t^2)^{\Delta} = 2t + 1$. Aplicando o Teorema 5.5.1, temos o resultado desejado.

6 Conclusão

(i) A teoria das escalas temporais desenvolve o cálculo diferencial e integral em forma geral, onde a diferenciabilidade no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é um caso particular. O objetivo principal desta teoria é unir o análise discreto e contínuo.

(ii) O cálculo subdiferencial é atualmente um tema da análise não diferenciável que é reconhecido por muitas aplicações para a teoria de otimização. A principal fonte deste ramo da análise funcional é a teoria de problemas extremos.

(iii) Recentemente condições de otimização são consideradas para o cálculo de escalas temporais de problemas de variações, e são derivados para os problemas de controle da escala temporal, por isso é importante introduzir a noção de convexidade de funções definidas em escalas temporais.

REFERÊNCIAS

[1] AHLBRANDT, C. D.; BOHNER, M.; RIDENHOUR, J. Hamiltonian Systems on Time Scales. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* v. 250, p. 561-578, 2000.

[2] ANWAR, M.; BIBI, R.; BOHNER, M.; PEČARIC, J. Integral Inequalities on Time Scales via Theory of Isotonic Linear Functionals. *Abstract and Applied Analysis* v. 2011, 16 pages, 2011.

[3] ATICI, F. M.; BILES, D. C.; LEBEDINSKY, A. An Application of Time Scales to Economics. *Mathematical and Computer Modelling* v.43, p. 718-726, 2006

[4] ATICI, F. M.; GUSEINOV, G. Sh. On Green's Functions and Positive Solutions for Boundary Value Problems on Time Scales. *Journal of Computational and Applied Mathematics* v. 141, p. 75-99, 1 April 2002.

[5] BARTOSIEWICZ, Z.; PAWLUSZEWICZ, E. Realizations of Nonlinear Control Systems on Time Scales. *Institute of Electrical and Electronics Engineers Transactions on Automatic Control* v. 53, p. 571–575, 2008.

[6] BOHNER, M. Calculus of Variations on Time Scales. *Dynamic Systems and Applications* v. 13, p. 339–349, 2004.

[7] BOHNER, M.; PETERSON, A. *Dynamic Equations on Time Scales, an Introduction with Applications.* Birkhäuser, Boston, 2001.

[8] BOHNER, M.; PETERSON, A. *Advances in Dynamic Equations on Time Scales.* Birkhäuser Boston, MA, 2003.

[9] BOHNER, M.; FERREIRA, A. C.; TORRES, D. F. M. Integral Inequalities and Their Applications to the Calculus of Variations on Time Scales. *Mathematical Inequalities & Applications* v. 13, p. 511-522, 2010.

[10] BRITO DA CRUZ, A. M. C.; RODRIGUES, H. S.; TORRES D. F. M. Escalas Temporais e Mathematica. *Boletim da SPM 62* p. 1-18, Maio 2010.

[11] DINU, C. Convex Functions on Time Scales. *Annals of the University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser* v. 35, p. 87-96, 2008.

[12] FOLLAND, G. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications.* John Wiley & Sons, Inc., New York, second edition, 1999.

[13] GUZOWSKA, M.; MALINOWSKA, A. B.; SIDI, M. R. A. Calculus of Variations on Time Scales: Applications to Economic Models. *Advances in Difference Equations* v. 203, 15 pages, 2015.

[14] HILGER, S. *Ein Mabkettenkalküll Mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten.* PhD Thesis. Universiatät Wurzburg, 1988.

[15] KAC, V.; CHEUNG, P. *Quantum Calculus.* Universitext Springer-Verlag, New York, 2002

[16] MESQUITA, J. G. *Minicurso: Uma Introdução à Teoria de Escalas Temporais.* II Colóquio da região Norte. 25 de Fevereiro a 02 de Março de 2013.

[17] NICULESCU, C. P.; PERSSON, L. E. *Convex Functions and their Applications. A Contemporary Approach.* CMS Books in Mathematics vol. 23, Springer-Verlag, New York, 2006.

[18] ROGERS, J. W.; SHENG, Q. Notes on the diamond-α dynamic derivative on time scales, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* v. 326, p. 228-241, 2007.

[19] SIDI, A. M. R.; FERREIRA, R. A. C.; TORRES, D. F. M. Diamond-α Jensen's Inequality on Time Scales. *Journal of inequalities and Applications.* v. 2008, 13 pages, 2008.

[20] TORRES, D. F. M. The Variational Calculus on Time Scales. *International Journal of Simulation and Multidisciplinary Design Optimization* v. 4, p. 11-25, 2010.

[21] WONG, F. H.; YEH, C. C.; LIAN, W. C. An extension of Jensen's inequality on Time Scales. *Advances in Dynamical Systems and Applications* v. 1, p. 113-120, 2006.

[22] WYRWAS, M.; MOZYRSKA, D.; GIREJKO, E. Subdifferentials of Convex Functions on Time Scales. *Discrete and Continuous Dynamical Systems* v. 29, p. 671-691, February 2011.