Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Natália Moreira Eleutério Alves

ANÁLISE DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO NÃO LINEAR COM POTÊNCIAS FRACIONÁRIAS DO LAPLACIANO VIA GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO

Juiz de Fora
2016

Natália Moreira Eleutério Alves

ANÁLISE DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO NÃO LINEAR COM POTÊNCIAS FRACIONÁRIAS DO LAPLACIANO VIA GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Análise, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Eduard Toon

Coorientadora: Prof(a). Dra. Jussara de Matos Moreira

Juiz de Fora
2016

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, meu refúgio e força, por estar sempre ao meu lado e por ter colocado pessoas boas em meu caminho, que me ajudaram a concluir mais essa fase em minha vida.

Aos professores Eduard e Jussara, pelo incentivo e acompanhamento que tornou possível o desenvolvimento desta dissertação de mestrado.

Aos professores Régis, Carlão, Laura, Flaviana e Willian, pela colaboração e conhecimentos transmitidos.

Aos meus pais, Geraldo e Raimunda, que em nenhum momento mediram esforços para realização dos meus sonhos, que me guiaram pelos caminhos corretos, me ensinaram a fazer as melhores escolhas, me mostraram que a honestidade e o respeito são essenciais à vida, e que devemos sempre lutar pelo que queremos. A eles devo a pessoa que me tornei, sou extremamente feliz e tenho muito orgulho por chamá-los de pai e mãe. AMO VOCÊS!

Ao meu irmão Júnior e minha irmã Sabrina, pelo carinho, pela ajuda e pela compreensão.

Aos amigos da matemática, em especial a Talita e o Miguel.

Enfim a todos que direta ou indiretamente fazem parte dessa história. Meu carinho e muito obrigada!

RESUMO

O principal objetivo deste trabalho consiste em descrever e aplicar as técnicas do Grupo de Renormalização (RG), desenvolvida por Bricmont et al em [3], no estudo do comportamento assintótico da solução do seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} u_t = Mu - \eta u_{xxx} - \rho u^p u_x, \quad t > 1,\ p \in \mathbb{N},\ p \geq 2, \\ u(x,1) = f(x), \end{cases}$$

em que f é o dado inicial, $\rho, \eta \in [0,1]$ e M é um operador no espaço de Fourier definido por $M \equiv -(-\triangle)^{\beta}$ com $\frac{3}{4} < \beta \leq 1$. O método do Grupo de Renormalização(RG) surgiu no final dos anos 50 em Teoria Quântica de Campos [10] sendo em seguida utilizado para estudar Fenômenos Críticos em Mecânica Estatística. No início dos anos 90, foi aplicado ainda na análise assintótica de soluções de equações diferenciais [3], através da utilização de conceitos como invariância por escalas e universalidade, na busca por conjuntos de dados iniciais e perturbações de equações cujas soluções apresentassem mesmo comportamento assintótico. Tal método envolve um problema de escalas múltiplas, cuja ideia é procurar por uma solução que seja invariante por mudança de escalas, e esta solução surge então como um ponto fixo de um operador. Visando um melhor entendimento do método, dividimos o estudo da solução em três casos: caso linear ($\eta = \rho = 0$), caso linear com termo dispersivo ($\rho = 0$) e caso não linear ($\eta \neq 0$ e $\rho \neq 0$). Em todos os casos, veremos que as soluções se comportam da seguinte maneira:

$$u(x,t) \sim \frac{A}{t^{\theta}}\ f^{*}\left(\frac{x}{t^{\gamma}}\right), \ \ (t \to \infty),$$

sendo θ e γ expoentes críticos, A é um pré-fator que contém informações do dado inicial e do termo não linear $\rho u^p u_x$ e f^{*} é chamada função perfil. O estudo desenvolvido nesse trabalho foi baseado no artigo [1].

ABSTRACT

The main objective of this study is to describe and apply the techniques of the Renormalization Group (RG) in the study of the asymptotic behavior of the solution to the following initial value problem:

$$\begin{cases} u_t = Mu - \eta u_{xxx} - \rho u^p u_x, \quad t > 1,\ p \in \mathbb{N},\ p \geq 2, \\ u(x,1) = f(x), \end{cases}$$

where f is the initial data, $\rho, \eta \in [0,1]$ and M is an operator in the Fourier space defined by $M \equiv -(-\triangle)^{\beta}$ with $\frac{3}{4} < \beta \leq 1$. The method of the Renormalization Group (RG) emerged in the late 1950s in Quantum Field Theory [10] and later it was used to study Critical Phenomena in Statistical Mechanics. In the early 1990s, it was applied to the asymptotic analysis of solutions of differential equations [3], through the use of concepts such as scales invariance and universality, in the search for sets of initial data and perturbations of equations whose solutions presented the same asymptotic behavior. This method involves a multi-scale problem, whose idea is to look for a solution that is scales invariant, and this solution then appears as a fixed point of an operator. For a better understanding of the method, this study was divided in three cases: linear case ($\eta = \rho = 0$), linear case with dispersive term ($\rho = 0$) and nonlinear case ($\eta \neq 0$ e $\rho \neq 0$). In all the cases, we see that the solutions behave as follows:

$$u(x,t) \sim \frac{A}{t^{\theta}}\ f^{*}\left(\frac{x}{t^{\gamma}}\right), \quad (t \to \infty),$$

where θ and γ are critical exponents, A is a pre-factor that has the information of the initial data and the nonlinear term $\rho u^p u_x$ and f^* is the profile function. The study developed in this work was based on Article [1].

Sumário

Capítulo 1

Introdução

1.1 Objetivo

Nesse trabalho descreveremos e aplicaremos a técnica do Grupo de Renormalização, desenvolvida por Bricmont et al em [3], com o objetivo de analisar o comportamento assintótico da solução do problema de valor inicial (PVI) abaixo:

$$\begin{cases} u_t = Mu - \eta u_{xxx} - \rho u^p u_x, & t > 1,\ p \in \mathbb{N},\ p \geq 2, \\ u(x,1) = f(x), & f \in \mathcal{B}_3, \end{cases} \tag{1.1}$$

em que $\rho, \eta \in [0,1]$ e $\mathcal{B}_3$ é um espaço de Banach definido por

$$\mathcal{B}_3 \equiv \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \hat{f} \in C^1(\mathbb{R}) \text{ e } \|f\| < \infty\}, \tag{1.2}$$

sendo

$$\|f\| = \sup_{w \in \mathbb{R}} \left[(1 + |w|^3) \left(|\hat{f}(w)| + |\hat{f}'(w)| \right) \right].^1 \tag{1.3}$$

M é um operador no espaço de Fourier, definido como $M \equiv -(-\triangle)^\beta$, sendo $\frac{3}{4} < \beta \leq 1$ e tal que $[\widehat{-(\triangle)^\beta u}] = |w|^{2\beta}\hat{u}$, isto é,

$$\widehat{Mu} = -|w|^{2\beta}\hat{u}. \tag{1.4}$$

Provaremos que, para tempos suficientemente longos e para uma determinada classe de dados iniciais, a solução do PVI (1.1) se comporta da seguinte forma:

$$u(x,t) \sim \frac{A}{t^\theta}\ f^*\left(\frac{x}{t^\gamma}\right),\ \ (t \to \infty), \tag{1.5}$$

[1] Na verdade, todos os resultados poderiam ser obtidos no espaço $\mathcal{B}_q \equiv \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \hat{f} \in C^1(\mathbb{R}) \text{ e } \|f\| = \sup_{w \in \mathbb{R}} \left[(1 + |w|^q)|\hat{f}(w)| + |\hat{f}'(w)| \right] < \infty\}$, com $q > 1$. A opção por $q = 3$ foi inspirada em [1] para tornar as estimativas independentes de q.

em que $\theta = \gamma = \frac{1}{2\beta}$ são expoentes críticos, A é um pré-fator que depende do dado inicial e do termo não linear $\rho u^p u_x$ e f^* é chamada função perfil dada por

$$\widehat{f^*}(w) = e^{-|w|^{2\beta}}. \tag{1.6}$$

Em outras palavras, obteremos o seguinte limite:

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t^{\frac{1}{2\beta}}\cdot, t) - At^{-\frac{1}{2\beta}} f^*(\cdot)\| = 0,$$

sendo a norma acima dada por (1.3). O estudo desenvolvido nesse trabalho foi baseado no artigo [1].

Para melhor compreensão do método do Grupo de Renormalização no estudo do comportamento assintótico de EDP's, é conveniente simplificarmos a equação (1.1) fazendo $\eta = \rho = 0$ (caso linear) e em seguida, $\rho = 0$ (caso linear com termo dispersivo), e buscar por soluções do tipo (1.5).

Posteriormente, consideraremos o problema não linear (1.1) com $p \geq 2$. Nesse caso, a solução pode ser escrita como

$$u(x,t) = u_f(x,t) + N(u)(x,t), \tag{1.7}$$

sendo $u_f(x,t)$ a solução da equação no caso linear com termo dispersivo

$$u_f(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(|w|^{2\beta} - i\eta w^3)(t-1)} e^{iwx} \widehat{f}(w) dw, \tag{1.8}$$

e $N(u)$ definido por:

$$N(u)(x,t) = \int_1^t S(t-s+1) u^p(x,s) ds = \int_0^{t-1} S(\tau+1) u^p(x, t-\tau) d\tau, \tag{1.9}$$

em que,

$$S(t)f = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(|w|^{2\beta} - i\eta w^3)(t-1)} e^{iwx} \widehat{f}(w) dw,$$

sendo $\hat{f}$ a transformada de Fourier de f, definida em (2.2).

Após essa análise, provaremos que o comportamento assintótico é o mesmo em ambos os casos (linear, linear com termo dispersivo e não linear), exceto pelo pré-fator, que no caso não linear será obtido como o limite de uma determinada sequência. Assim, soluções de equações que diferem apenas quanto à pertubação podem ser consideradas em uma mesma *classe de universalidade*, pois possuem mesmos expoentes críticos e funções perfil.

Enfim, ficará claro neste trabalho, que a técnica do *Grupo de Renormalização* é uma poderosa ferramenta no estudo do comportamento, para tempos longos, de soluções de equações diferenciais parciais.

1.2 Descrição da dissertação

A dissertação foi dividida da seguinte forma: na seção 1.3, explicaremos um pouco mais sobre a história e o método do *Grupo de Renormalização*, que denotaremos por RG. No Capítulo 2, daremos definições e enunciaremos teoremas, lemas e proposições que serão utilizados ao longo do trabalho. No Capítulo 3, estudaremos o caso linear ($\eta = \rho = 0$) da equação (1.1) e mostraremos que a mesma é invariante por mudanças de escalas. Com isso, definiremos o operador RG, provaremos algumas de suas propriedades e obteremos o comportamento assintótico da equação linear. Em seguida, no Capítulo 4, vamos analisar a equação linear com termo dispersivo ($\rho = 0$). Novamente, definiremos o operador RG para esse caso e mostraremos que a função f^* definida em (1.6) não será ponto fixo do operador como no caso anterior. Entrentanto, veremos que isso não afetará o comportamento assintótico da equação linear com termo dispersivo. No Capítulo 5, provaremos a existência e unicidade de soluções do problema de valor inicial (1.1), que será de grande importância no estudo, para tempos longos, do mesmo. Finalmente, obteremos o comportamento assintótico da solução do problema não linear (1.1).

1.3 O Método do Grupo de Renormalização

A técnica do Grupo de Renormalização (RG) surgiu no final dos anos 50 em Teoria Quântica de Campos (veja [10]). Em seguida, estas idéias foram utilizadas em teorias críticas de Mecânica Estatística do Equilíbrio. As idéias consistiam em introduzir um operador, atuando sobre o espaço das energias, que implementava a mudança de escalas. Iterando este operador um número muito grande de vezes ele convergia para seu ponto fixo e a taxa de tal convergência estava associada aos expoentes críticos da Mecânica Estatística.

A partir de 1960, foram desenvolvidas técnicas para a realização de experiências na vizinhança de pontos críticos. Observou-se que existia uma classe de universalidade definida por alguns expoentes críticos diferentes dos expoentes clássicos. Com isso, na década de 1970, essas idéias foram incorporadas por Kenneth Wilson (veja [20]), que propôs uma teoria para os fenômenos críticos, baseada numa modificação de um método utilizado em Física Teórica, chamado teoria do Grupo de Renormalização. Esse método permitiu a descrição do comportamento dos sistemas próximos ao ponto crítico e resultados destes estudos mostraram que quando a escala muda, as equações que descrevem o sistema mudam de tal forma que no limite termodinâmico apenas alguns aspectos são relevantes.

Nos anos 90, o RG foi aplicado às equações diferenciais na obtenção do comportamento assintótico de soluções de problemas de valor inicial (veja [3]). A ideia nesse caso novamente era relacionar o comportamento assintótico das soluções de EDPs com a existência e estabilidade de pontos fixos de um operador apropriado (o operador Grupo de Renormalização) e assim resolver o problema iterativamente, de forma que aplicações sucessivas do operador evoluem progressivamente a solução no tempo e simultaneamente renormalizam os termos da EDP, transformando o problema do limite assintótico em iterações de problemas (renormalizados), definidos em intervalos de tempo fixo, seguidas por uma mudança de escalas.

A cada passo da iteração, subtrai-se da condição inicial a contribuição em uma direção dita marginal com respeito ao operador, no sentido em que essa componente não se altera a cada etapa do método. A diferença obtida é dita então irrelevante, pois, à medida que é iterado o procedimento, ela é contraída pelo operador. Assim, repete-se esse procedimento até que se atinja o regime assintótico. Escolhendo a escala apropriada, a cada iteração o problema torna-se mais simples, justificando a grande utilidade da técnica do Grupo de Renormalização.

No início dos anos 90, foi também proposta uma versão numérica (veja [5]) para o Grupo de Renormalização, tendo sido aplicada a diversas equações, como a equação dos meios porosos, equação de Barenblatt, equação de difusão com coeficiente periódico, dentre outras. Embora a técnica do Grupo de Renormalização seja um pouco antiga, a mesma ainda é muito utilizada na física (veja [4, 7, 9, 13]). Na área de estudo do comportamento assintótico de soluções de equações diferenciais parciais, também, encontramos trabalhos mais recentes (veja [2, 17]), mostrando assim, a grande aplicabilidade do método.

Capítulo 2

Conceitos Preliminares

Nesse capítulo, daremos importantes definições, dentre elas, a definição da Transformada de Fourier para funções em $L^1(\mathbb{R})$ e provaremos algumas de suas propriedades. Também enunciaremos alguns resultados que serão utilizados ao longo do trabalho.

2.1 Transformada de Fourier

A Transformada de Fourier é uma ferramenta de grande importância no estudo de equações diferenciais parciais, como por exemplo na solução de problemas de processamento digital de imagens (veja [18]). No contexto de estudo do comportamento assintótico de soluções de EDPs, utilizando a técnica do Grupo de Renormalização, é preciso analisar o problema no espaço de Fourier, uma vez que, o PVI (1.1) é definido com operador multiplicador de Fourier dado por (1.4) e o operador Grupo de Renormalização (RG) que será definido na Seção 3.3 é uma contração quando age no espaço das funções cujas Transformadas de Fourier se anulam na origem. Antes de definirmos a Transformada de Fourier definiremos o espaço $L^p(\mathbb{R})$.

Definição 2.1 (**Espaço** $L^p(\mathbb{R})$)**.** *Seja p tal que $1 \leq p < \infty$. Definimos o espaço $L^p(\mathbb{R})$ como sendo o espaço das classes de equivalência de funções reais p-integráveis no sentindo de Lebesgue, isto é,*

$$L^p(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx < \infty \right\},$$

munido da norma

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

e o espaço $L^\infty(\mathbb{R})$ como sendo o espaço das classes de equivalência de funções reais mensuráveis limitadas, isto é,

$$L^\infty(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \sup |f| < \infty \right\},$$

munido da norma
$$\|f\|_\infty = \sup_w\{|f(x)|\}.$$
L^p é um espaço vetorial normado e completo. Em particular, $\|f\|_p$ satisfaz as desigualdades de Minkowski, isto é, para toda $f, g \in L^p(\mathbb{R})$ temos

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p,$$

e de Hölder
$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p\|g\|_q,$$
desde que $f \in L^p(\mathbb{R})$, $g \in L^q(\mathbb{R})$ e $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Uma consequência imediata da desigualdade de Hölder é a desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_2\|g\|_2. \tag{2.1}$$

Além disso, $L^2(\mathbb{R})$ é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$< f, g >= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx,$$

para toda $f, g \in L^2(\mathbb{R})$.

Definição 2.2 (**Transformada de Fourier**). *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de $L^1(\mathbb{R})$. Definimos a Transformada de Fourier de f como*

$$\hat{f}(w) = \mathcal{F}\{f(.)\}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwx} f(x)dx. \tag{2.2}$$

Definição 2.3 (**Transformada de Fourier Inversa**). *Definimos a Transformada de Fourier Inversa de uma função $f \in L^1(\mathbb{R})$ por*

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{\widehat{f(.)}\}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iwx}\hat{f}(w)dw. \tag{2.3}$$

É natural fazermos a seguinte pergunta: Quando a função f poder ser obtida a partir de $\hat{f}$, isto é, $f(x) = (\mathcal{F}^{-1}\hat{f})(x)$?

Lema 2.1. *Seja $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Então*

$$f(x) = (\mathcal{F}^{-1}\hat{f})(x)$$

em todos os pontos x onde f é contínua.

Veja demonstração em [8].

Definição 2.4 (Convolução). *Dadas duas funções $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, a convolução de f com g, denotada por $f * g$, é definida por:*

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy. \tag{2.4}$$

Lema 2.2. *Se $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, então*

$$(\widehat{f * g})(w) = \hat{f}(w)\hat{g}(w).$$

Prova: Tomando a Transformada de Fourier de (2.4) e pelo Teorema de Mudança de Variáveis, fazendo $z = x - y$, temos:

$$(\widehat{f * g})(w) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)e^{-iwx}dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)g(y)e^{-iw(z+y)}dzdy.$$

Pelo Teorema de Fubini,

$$(\widehat{f * g})(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{-iwz}dz \int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-iwy}dy = \hat{f}(w)\hat{g}(w).$$

∎

Lema 2.3. *Seja $a > 0$ uma constante positiva.*

Se $f \in L^1(\mathbb{R})$, então:

$$\mathcal{F}\{f(ax)\}(w) = \frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{w}{a}\right). \tag{2.5}$$

Prova: Pela Definição 2.2, temos:

$$\mathcal{F}\{f(ax)\}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iwx}f(ax)dx.$$

Fazendo a mudança de variáveis $y = ax$, temos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f(y)\}(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a}e^{iw\frac{y}{a}}f(y)dy \\
&= \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iw\frac{y}{a}}f(y)dy \\
&= \frac{1}{a}\hat{f}(\frac{w}{a}).
\end{aligned}$$

∎

As demonstrações do Teorema 2.1 e do Lema 2.4 podem ser encontradas em [8].

Teorema 2.1 (Identidade de Parseval). *Para toda $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, temos*

$$< f, g >= \frac{1}{2\pi} < \hat{f}, \hat{g} > .$$

Em particular, $\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\|\hat{f}\|_2^2$.

Lema 2.4. *A Transformada de Fourier é uma bijeção de $L^2(\mathbb{R})$ em $L^2(\mathbb{R})$.*

Isto é, para cada $g \in L^2(\mathbb{R})$, existe um único $f \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $\hat{f} = g$.

Uma importante propriedade da Transformada de Fourier que será utilizada no capítulo 5 é a transformada do produto de n funções em $L^2(\mathbb{R})$ ser o produto de $n-1$ convoluções das transformadas de cada função.

Lema 2.5. *Se $f_1, \cdots, f_n \in L^2(\mathbb{R})$, então:*

$$\mathcal{F}\{f_1 \cdots f_n\}(w) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}}(\hat{f}_1 * \cdots * \hat{f}_n)(w). \tag{2.6}$$

Prova: Usaremos indução para provar esse resultado. Tome $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, então:

$$\mathcal{F}\{f(\cdot)g(\cdot)\}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwx}(f \cdot g)(x)dx.$$

Pela Identidade de Parseval e como $g \in L^2(\mathbb{R})$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f(\cdot)g(\cdot)\}(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwx}(f \cdot g)(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(w')e^{iw'x}dw'\right] f(x)e^{-iwx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(w')\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(w-w')x}dx\right]dw' \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w-w')\hat{g}(w')dw' \\
&= \frac{1}{2\pi}(\hat{f} * \hat{g})(w).
\end{aligned}$$

Agora, suponhamos que (2.6) seja verdadeira para $n \in \mathbb{N}$. Então:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f_1 \cdots f_n \cdot f_{n+1}\}(w) &= \frac{1}{2\pi}(\mathcal{F}[f_1 \cdots f_n] * \widehat{f_{n+1}})(w) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\hat{f}_1 * \cdots * \hat{f}_n * \widehat{f_{n+1}}\right)(w) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}(\hat{f}_1 * \cdots * \hat{f}_n * \widehat{f_{n+1}})(w).
\end{aligned}$$

Portanto, a igualdade (2.6) vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

∎

Uma consequência imediata do Lema anterior é

$$\widehat{f^p}(w) = \frac{1}{(2\pi)^{p-1}}(\hat{f} \cdots \hat{f})(w), \tag{2.7}$$

com $p-1$ convoluções de $\hat{f}$.

Considere a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [-1,1], \\ 0, & \text{se } x \notin [-1,1]. \end{cases} \tag{2.8}$$

Claramente $g \in L^1(\mathbb{R})$, e sua Transformada de Fourier é dada por:

$$\hat{g}(\theta) = \begin{cases} \frac{2\sin\theta}{\theta}, & \text{se } \theta \neq 0, \\ 2, & \text{se } \theta = 0. \end{cases} \tag{2.9}$$

Porém, $\hat{g}(w)$ não pertence a $L^1(\mathbb{R})$. Assim, concluímos que, nem sempre $f \in L^1(\mathbb{R})$ implica $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, ou seja, uma vez conhecida a Transformada de Fourier de uma dada função em $L^1(\mathbb{R})$, não garantimos a existência de uma aplicação que seja a inversa da mesma. Assim, faz-se necessário definirmos um espaço de funções na qual garantimos que para toda f que tomarmos nesse espaço sua tranformada de Fourier também pertença a ele. Uma escolha possível seria tomar o espaço C_0^∞ das funções infinitamente diferenciáveis, de suporte compacto em $\mathbb{R}$. Porém, nesse espaço, podemos tomar funções na qual sua Transformada de Fourier não tenha suporte compacto. Por exemplo, a função

$$g(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{a}, & \text{se } x \in [-a,a], \\ 0, & \text{se } x \notin [-a,a], \end{cases} \tag{2.10}$$

sua Transformada de Fourier é $\hat{g}(w) = \frac{2(1-\cos(aw))}{aw^2}$, que não tem suporte compacto. Com isso, escolhemos um outro subespaço de $L^1(\mathbb{R})$, o espaço de Schwartz ou das funções rapidamente decrescentes, que é um pouco maior que C_0^∞ e que denotaremos por $S(\mathbb{R})$.

Definição 2.5 (Espaço de Schwartz). *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é rapidamente decrescente se $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ e para todo $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$*

$$\|f\|_{m,n} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^m D^n f(x)| < \infty.$$

Ou seja, f e suas derivadas tendem a zero mais rapidamente que as potências x^m vão para o infinito. Toda função em $S(\mathbb{R})$ é absolutamente integrável (veja [8]).

Teorema 2.2. *Se $f \in S(\mathbb{R})$, então $\hat{f} \in S(\mathbb{R})$ e, além disso, dados $m, n \geq 0$,*

$$(ix)^m \left(\frac{d}{dx}\right)^n \hat{f} = \mathcal{F}\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^m [(-ix)^n f]\right]. \tag{2.11}$$

Prova: Primeiro, provaremos para todo $n \geq 0$ que

$$\mathcal{F}[D^n f](w) = (iw)^n \hat{f}(w). \tag{2.12}$$

Seja $f \in S(\mathbb{R})$ e pela Definição 2.2 obtemos:

$$\hat{f}'(w) = \mathcal{F}(f'(x))(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwx} f'(x) dx.$$

Fazendo $u = e^{-iwx}$ e $dv = f'(x)dx$, e usando integral por partes, temos:

$$\begin{aligned}
\hat{f}'(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwx} f'(x) dx \\
&= e^{-iwx} f(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-iw) e^{-iwx} dx \\
&= e^{-iwx} f(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} + (iw) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwx} f(x) dx \\
&= (iw) \hat{f}(w).
\end{aligned}$$

Suponhamos que, $\mathcal{F}[D^n f](w) = (iw)^n \hat{f}(w)$ seja verdadeira para todo $n \geq 0$. Então

$$\mathcal{F}(D^{(n+1)f})(w) = \mathcal{F}[D(D^{(n)})f](w) = (iw)\mathcal{F}(D^{(n)})(w) = (iw)[(iw)^n \hat{f}](w) = (iw)^{n+1} \hat{f}(w),$$

e assim, (2.12) vale para todo $n \geq 0$.

Agora, provaremos para todo $n \geq 0$ que

$$D^n \hat{f} = \mathcal{F}[(-ix)^n f]. \tag{2.13}$$

Se $f \in S(\mathbb{R})$, podemos diferenciar sobre o sinal da integral, obtendo para n=1:

$$D\hat{f} = \int_{-\infty}^{\infty} (-ix) e^{-iwx} f(x) dt = \mathcal{F}[(-ix) f(x)](w). \tag{2.14}$$

Suponha que, $D^n \hat{f} = \mathcal{F}[(-ix)^n f]$ seja válida para todo $n \geq 0$. Então,

$$D^{n+1} \hat{f} = D(D^n \hat{f}) = D[\mathcal{F}\{(-ix)^n f\}] = \mathcal{F}\{(-ix)(-ix)^n f\} = \mathcal{F}\{(-ix)^{n+1} f\}.$$

Logo, (2.13) é verdadeira para todo $n \geq 0$. E portanto, de (2.12) e (2.13) obtemos (2.11).

Finalmente, mostraremos que $\hat{f} \in S(\mathbb{R})$. Considerando $f \in S(\mathbb{R})$, $m, n \geq 0$ e (2.11),

$$\begin{aligned}
\|\hat{f}\|_{m,n} &= \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^m D^n \hat{f}(x)| \\
&= \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \mathcal{F} \left[\left(\frac{d}{dx} \right)^m [(-ix)^n f(x)] \right] \right| \\
&= \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwx} \left(\frac{d}{dx} \right)^m [(-ix)^n f(x)] dx \right| \\
&\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{-iwx} \left(\frac{d}{dx} \right)^m [(-ix)^n f(x)] dx \right| \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| \left(\frac{d}{dx} \right)^m [x^n f(x)] \right| dx < \infty.
\end{aligned}$$

já que $D^m(x^n f) \in L^1(\mathbb{R})$. ∎

2.2 O Espaço $\mathcal{B}_3$

Seja $\mathcal{B}_3$ o espaço de funções reais definido por

$$\mathcal{B}_3 \equiv \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ | \ \hat{f} \in C^1(\mathbb{R}) \text{ e } \|f\| < \infty\},$$

sendo

$$\|f\| = \sup_{w\in\mathbb{R}}(1+|w|^3)\left[|\hat{f}(w)| + |\hat{f}'(w)|\right].$$

Provaremos que o espaço $\mathcal{B}_3$ é um espaço de Banach e que se $f \in \mathcal{B}_3$ então $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$. Além disso, mostraremos que dado $L > 1$ o espaço

$$C(1, L^{2\beta}; \mathcal{B}_3) \equiv \{u(x,t) : u(.,t) \in \mathcal{B}_3, \forall t \in [1, L^{2\beta}]\} \tag{2.15}$$

com a norma

$$\|u\|_L = \sup_{t\in[1,L^{2\beta}]} \|u(.,t)\|. \tag{2.16}$$

também é um espaço de Banach.

Proposição 2.1. $\mathcal{B}_3 \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.

Prova:

Tome $f \in \mathcal{B}_3$ então $\hat{f} \in C^1$ e $\|f\| < \infty$. Pela definição da norma em $\mathcal{B}_3$ (veja equação (1.3)) temos $|\hat{f}'(w)|, |\hat{f}(w)| \le \frac{C}{1+|w|^3}$ sendo $C = \|f\|$. Assim,

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(w)|dw \le \int_{\mathbb{R}} \frac{C}{1+|w|^3}dw < \infty \qquad \text{e} \qquad \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}'(w)|dw \le \int_{\mathbb{R}} \frac{C}{1+|w|^3}dw < \infty.$$

Logo, $\hat{f}, \hat{f}' \in L^1(\mathbb{R})$. Analogamente, temos que $\hat{f}, \hat{f}' \in L^2(\mathbb{R})$, e portanto, $\hat{f}, \hat{f}' \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

Pelo Lema 2.4, como a Transformada de Fourier é uma bijeção em $L^2(\mathbb{R})$, existe a inversa de $\hat{f}$. Assim, $\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = f \in L^2(\mathbb{R})$. Pelo Teorema 2.2, temos que $\hat{f}' = \mathcal{F}[-ixf]$. Logo, $\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}') = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}[-ixf]) = -ixf \in L^2(\mathbb{R})$. Portanto, pela Definição 2.1, temos $\|f\|_2 < \infty$ e $\|xf\|_2 < \infty$.

Agora, vamos escrever $f = (1+|x|)^{-1} \cdot (1+|x|)f$. Então, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz dada por (2.1), temos:

$$\begin{aligned}
\|f\|_1 &= \|(1+|x|)^{-1} \cdot (1+|x|)f\|_1 \\
&\le \|(1+|x|)^{-1}\|_2 \cdot \|(1+|x|)f\|_2 \\
&\le K_1(\|(1+|x|)f\|_2) \\
&\le K_1(\|f\|_2 + \|xf\|_2) \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

sendo $K_1 = \|(1+|x|)^{-1}\|_2$. Logo, $f \in L^1(\mathbb{R})$ e com isso, $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

Finalmente, falta mostrar que $f \in L^\infty(\mathbb{R})$. Como $f \in L^2(\mathbb{R})$, então $f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f(.)})$. Logo, considerando a Definição 2.3 e que $\|f\| < \infty$, obtemos:

$$\begin{aligned}
|f(x)| &= |\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f(.)})| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{iwx} \hat{f}(w) dw \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |e^{iwx}| |\hat{f}(w)| dw \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\|f\|}{1+|w|^3} dw \\
&\leq \|f\| K_2 < \infty
\end{aligned}$$

sendo $K_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+|w|^3} dw$. Pela Definição 2.1, concluímos que $f \in L_\infty(\mathbb{R})$.

$\blacksquare$

Proposição 2.2. *$\mathcal{B}_3$ é um espaço de Banach munido da norma*

$$\|f\| = \sup_{w \in \mathbb{R}} \left[(1+|w|^3) \left(|\hat{f}(w)| + |\hat{f}'(w)| \right) \right].$$

Prova: $\mathcal{B}_3$ é um espaço vetorial. De fato, se $f, g \in \mathcal{B}_3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então pela linearidade da Transformada de Fourier e do operador derivada, temos que $(f+g) \in \mathcal{B}_3$ e $\alpha f \in \mathcal{B}_3$. Além disso, temos que (1.3) é uma norma. De fato,

1. $\|f\| \geq 0$ e $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

   Claramente $\|f\|$ é não negativa. Se $\|f\| = 0$, então $\sup\limits_{w}(1+|w|^3)[|\hat{f}(w)| + |\hat{f}'(w)|] = 0$. Logo,

   $$(1+|w|^3)[|\hat{f}(w)| + |\hat{f}'(w)|] \leq \sup_{w}(1+|w|^3)[|\hat{f}(w)| + |\hat{f}'(w)|] = 0, \forall\ w.$$

   Então, $|\hat{f}(w)| = |\hat{f}'(w)| = 0, \forall\ w$. Como $f \in L^1(\mathbb{R})$ e pela definição da Transformada Inversa de Fourier de f, temos:

   $$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{\widehat{f(.)}\}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iwx} \hat{f}(w) dw = 0$$

   Portanto, $f = 0$. Por outro lado, se $f = 0$ então $\hat{f}(w) = 0$ e $\hat{f}'(w) = 0$. Logo, $\|f\| = 0$.

2. $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$.

   Note que

   $$|\widehat{(\lambda f)}(w)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwx} \lambda f(x) dx \right| = |\lambda| \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwx} f(x) dx \right| = |\lambda| |\widehat{f}(w)|.$$

Analogamente, $|\widehat{(\lambda f)}'(w)| = |\lambda||\hat{f}'(w)|$. Logo,

$$\|\lambda f\| = \sup_w (1+|w|^3)[|\widehat{(\lambda f)}(w)| + |\widehat{(\lambda f)}'(w)|] = |\lambda| \sup_w (1+|w|^3)[|\hat{f}(w)| + |\hat{f}'(w)|] = |\lambda|\|f\|.$$

3. $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

   Pela linearidade da Transformada de Fourier e da derivada, temos que

$$|\widehat{(f+g)}(w)| = |\hat{f}(w) + \hat{g}(w)| \leq |\hat{f}(w)| + |\hat{g}(w)|$$

   e

$$|\widehat{(f+g)}'(w)| = |\hat{f}'(w) + \hat{g}'(w)| \leq |\hat{f}'(w)| + |\hat{g}'(w)|.$$

   Logo,

$$\begin{aligned} \|f+g\| &= \sup_w (1+|w|^3)\left[|\widehat{(f+g)}(w)| + |\widehat{(f+g)}'(w)|\right] \\ &\leq \sup_w (1+|w|^3)[(|\hat{f}(w)| + |\hat{g}(w)|) + |\hat{f}'(w)| + |\hat{g}'(w)|] \\ &\leq \sup_w (1+|w|^3)[|\hat{f}(w)| + |\hat{f}'(w)|] + \sup_w (1+|w|^3)[|\hat{g}(w)| + |\hat{g}'(w)|] \\ &= \|f\| + \|g\|. \end{aligned}$$

Agora, vamos provar que $\mathcal{B}_3$ é um espaço completo. Para isso, temos que mostrar que toda sequência (f_n) de Cauchy em $\mathcal{B}_3$ é convergente. Seja $(f_n) \in \mathcal{B}_3$ uma sequência de Cauchy. Então, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} \|f_n - f_m\| &= \sup_w (1+|w|^3)\left[|\widehat{(f_n - f_m)}(w)| + |\widehat{(f_n - f_m)}'(w)|\right] \\ &= \sup_w (1+|w|^3)\left[|\widehat{f_n}(w) - \widehat{f_m}(w)| + |\widehat{f_n}'(w) - \widehat{f_m}'(w)|\right] \\ &< \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n, m \geq n_0. \end{aligned}$$

Daí, segue que, $(1+|w|^3)|[\widehat{f_n}(w) - \widehat{f_m}(w)| + |\widehat{f_n}'(w) - \widehat{f_m}'(w)|] < \frac{\varepsilon}{2}$.

Logo,

$$\sup_w (1+|w|^3)\left|\widehat{f_n}(w) - \widehat{f_m}(w)\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n, m \geq n_0 \tag{2.17}$$

e

$$\sup_w (1+|w|^3)\left|\widehat{f_n}'(w) - \widehat{f_m}'(w)\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n, m \geq n_0.$$

Pelo Critério de Cauchy (veja capítulo V em [15]), $(\widehat{f_n}(w))$ e $(\widehat{f_n}'(w))$ convergem uniformemente em $\mathbb{R}$. Logo, $\widehat{f_n}(w) \to h(w) \in \mathbb{R}$ e $\widehat{f_n}'(w) \to h'(w) \in \mathbb{R}$. Agora, precisamos mostrar que $h(w) \in L^2(\mathbb{R})$. De (2.17), temos que, para todo $w \in \mathbb{R}$

$$|h(w)| = |\widehat{f_n}(w) - h(w) + \widehat{f_n}(w)| \leq |\widehat{f_n}(w) - h(w)| + |\widehat{f_n}(w)| < \frac{\varepsilon}{(1+|w|^3)} + \frac{C}{(1+|w|^3)}.$$

Assim, para todo $w \in \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} |h(w)|^2 dw \leq \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{\varepsilon + C}{(1+|w|^3)}\right]^2 dw \leq [\varepsilon + C]^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+|w|^3} dw < \infty.$$

Logo, $h(w) \in L^2(\mathbb{R})$ e pelo Lema 2.4 existe $f(w) \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $h(w) = \hat{f}(w)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\|f_n - f\| &= \sup_w (1+|w|^3)\left[|(\widehat{f_n} - \hat{f})(w)| + |(\widehat{f_n}' - \hat{f}')(w)|\right] \\
&= \sup_w \lim_{m\to\infty} (1+|w|^3)\left[|(\widehat{f_n} - \widehat{f_m})(w)| + |(\widehat{f_n}' - \widehat{f_m}')(w)|\right] \\
&\leq \sup_w \left\{\sup_{m\geq n} (1+|w|^3)\left[|(\widehat{f_n} - \widehat{f_m})(w)| + |(\widehat{f_n}' - \widehat{f_m}')(w)|\right]\right\} \\
&\leq \sup_w \left\{\sup_{m\geq n} (1+|w|^3)|(\widehat{f_n} - \widehat{f_m})(w)|\right\} + \sup_w \left\{\sup_{m\geq n} (1+|w|^3)|(\widehat{f_n}' - \widehat{f_m}')(w)|\right\} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0.
\end{aligned}$$

Logo, $f_n \longrightarrow f$. Além disso, $\|f\| = \|f_n - f - f_n\| \leq \|f_n - f\| + \|f_n\| < \infty$. Portanto $f \in \mathcal{B}_3$.

∎

Proposição 2.3. *Seja $L > 1$, então*

$$C(1, L^{2\beta}; \mathcal{B}_3) \equiv \{u(x,t) : u(.,t) \in \mathcal{B}_3, \forall t \in [1, L^{2\beta}]\} \tag{2.18}$$

com a norma

$$\|u\|_L = \sup_{t\in[1,L^{2\beta}]} \|u(.,t)\|,$$

é um espaço de Banach.

Prova: $(C(1, L^{2\beta}; \mathcal{B}_3), \|\cdot\|_L)$ é um espaço vetorial normado. De fato, tome $u_1(x,t), u_2(x,t) \in C(1, L^{2\beta}, \mathcal{B}_3)$ e considere $\alpha \in \mathbb{R}$ então $u_1(.,t), u_2(.,t) \in \mathcal{B}_3$ para todo $t \in [1, L^{2\beta}]$. Como $\mathcal{B}_3$ é um espaço vetorial temos $u_1(\cdot,t) + u_2(\cdot,t) \in \mathcal{B}_3$ e $\alpha u_1(\cdot,t) \in \mathcal{B}_3$. Logo, $u_1(x,t) + u_2(x,t) \in C(1, L^{2\beta}; \mathcal{B}_3)$ e $\alpha u_1(x,t) \in C(1, L^{2\beta}; \mathcal{B}_3)$. Como $\|\cdot\|$ é uma norma e pelas propriedades do *sup* temos que $\|\cdot\|_L$ é uma norma. Agora, vamos mostrar que $C(1, L^{2\beta}; \mathcal{B}_3)$ é completo. Para isso, tome (f_n) uma sequência de Cauchy em $C(1, L^{2\beta}; \mathcal{B}_3)$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\|f_n - f_m\|_L < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0.$$

Mas,

$$\|f_n - f_m\|_L = \sup_{t\in[1,L^{2\beta}]} \|f_n(\cdot,t) - f_m(\cdot,t)\|.$$

Logo, $\|f_n(\cdot,t) - f_m(\cdot,t)\| < \varepsilon$, e portanto, $(f_n(\cdot,t))$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{B}_3$. Pela proposição anterior, $\mathcal{B}_3$ é um espaço completo. Logo, a sequência $(f_n(\cdot,t))$ é convergente em $\mathcal{B}_3$, isto é, $f_n(\cdot,t) \longrightarrow f(\cdot,t) \in \mathcal{B}_3$. Portanto, $(f_n(x,t)) \longrightarrow f(x,t) \in C(1, L^{2\beta}, \mathcal{B}_3)$, o que finaliza a demonstração.

∎

2.3 Teorema do ponto fixo para contrações

Definição 2.6. *Um ponto fixo de uma aplicação* $T : X \to X$ *é um elemento de* $x \in X$ *cuja imagem coincide com ele mesmo, isto é,* $Tx = x$.

Definição 2.7. *Seja* (X, d) *um espaço métrico, sendo* d *a função distância. Uma aplicação* $f : X \to X$ *é uma contração se existir um número real positivo* $\alpha < 1$ *tal que, para todo* $x, y \in X$,

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y). \tag{2.19}$$

Enunciaremos, a seguir, um importante resultado que será utilizado na prova da existência e unicidade de soluções do problema de valor inicial (1.1), o Teorema do ponto fixo para contrações em espaços métricos completos. A demonstração desse teorema encontra-se em [14].

Teorema 2.3. *Seja* (X, d) *um espaço métrico completo. Se* $f : X \to X$ *é uma contração, então* f *tem um ponto fixo em* X.

Capítulo 3

O Grupo de Renormalização Aplicado à Equação Linear

Nesse capítulo, definiremos e aplicaremos o operador Grupo de Renormalização (RG) para o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} u_t = Mu, \ t > 1, \ x \in \mathbb{R} \\ u(x,1) = f(x), \ f \in \mathcal{B}_3. \end{cases} \tag{3.1}$$

Na primeira seção, encontraremos a solução do PVI (3.1). Na Seção 3.2, motivaremos a definição do operador Grupo de Renormalização, que será definido na Seção 3.3, através da definição de soluções invariantes por uma mudança de escala adequada. Também, na Seção 3.3 provaremos importantes propriedades do operador RG. Finalmente, na Seção 3.4, obteremos o comportamento assintótico da solução do PVI (3.1).

3.1 A Solução da equação

Iremos obter formalmente uma expressão para a solução do PVI (3.1), através da Transformada de Fourier (veja Definição 2.2). Aplicando a Transformada de Fourier em ambos os lados da equação (3.1) e usando (1.4), obtemos:

$$\hat{u}_t = -|w|^{2\beta}\hat{u} \Rightarrow \frac{d\hat{u}}{\hat{u}} = -|w|^{2\beta}dt.$$

Integrando,

$$\ln(\hat{u}) = -|w|^{2\beta}t + C \quad \Rightarrow \quad \hat{u} = e^{-|w|^{2\beta}t+C} \quad \Rightarrow \quad \hat{u} = e^{-|w|^{2\beta}t}e^c.$$

Fazendo $e^c = C_0$,

$$\hat{u}(w,t) = C_0 e^{-|w|^{2\beta}t}.$$

Assim, para $t = 1$ temos,

$$\hat{u}(w,1) = C_0 e^{-|w|^{2\beta}} = \hat{f}(w).$$

Então,

$$C_0 = \frac{\hat{f}(w)}{e^{-|w|^{2\beta}}}.$$

Logo, para todo t:

$$\hat{u}(w,t) = \hat{f}(w) e^{-|w|^{2\beta}(t-1)}. \tag{3.2}$$

Tomando a Transformada Inversa de Fourier(veja Definição 2.3) da equação acima, obtemos:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|w|^{2\beta}(t-1)} e^{iwx} \widehat{f}(w) dw. \tag{3.3}$$

3.2 Soluções invariantes por mudança de escalas

Nas últimas décadas do século XX, grupos de físicos passaram a se interessar pela dinâmica de sistemas ditos complexos, cujas partes se interagem de forma não linear. Uma das propriedades marcantes de tais sistemas é a presença de leis de escala. A tentativa de se construir um esquema teórico para esses fenômenos deu origem a novos ramos da física, como a teoria do caos e a física dos sistemas complexos. Conceitos como criticalidade, autossimilaridade e leis de escala passaram a fazer parte da física contemporânea (veja [10, 20]). Nos anos 90 tais ideias começaram a surgir no contexto de EDP, na busca pelo comportamento assintótico de soluções (veja [1, 3]). Apresentaremos nessa seção como a ideia de invariância por escalas se aplica nesse contexto, para o caso particular da solução de $u_t = Mu$.

Queremos obter aqui uma mudança de escalas adequada de maneira que após a mudança de escalas a função ainda seja solução de tal equação. Assim, se reescalonarmos a variável espacial por $L > 1$, gostaríamos de determinar qual deverá ser a mudança de escalas na variável temporal e na própria solução de forma que a equação fique invariante, isto é, quais deverão ser os expoentes α e λ de maneira que:

$$v(x,t) = L^{\alpha} u(Lx, L^{\lambda} t) \tag{3.4}$$

seja também solução da mesma equação. Mostraremos que os expoentes λ e α devem ser, respectivamente 2β e 1.

Definindo as variáveis $y = Lx$ e $s = L^{\lambda} t$ e tomando a derivada de v em relação a t, temos, pela regra da cadeia:

$$v_t(x,t) = L^{\alpha+\lambda} u_s(Lx, L^{\lambda} t).$$

Como u é solução de (3.1), então $u_s = Mu$ e podemos escrever a equação acima em função do operador M, isto é,

$$v_t(x,t) = L^{\alpha+\lambda} Mu(Lx, L^{\lambda} t). \tag{3.5}$$

Usando o Lema 2.3 e (1.4), temos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{Mu(Lx, L^{\lambda}t)\}(w) &= \frac{1}{L}\left[-\left|\frac{w}{L}\right|^{2\beta}\hat{u}\left(\frac{w}{L}, L^{\lambda}t\right)\right] \\
&= \frac{1}{L^{1+2\beta}}\left[-|w|^{2\beta}\hat{u}\left(\frac{w}{L}, L^{\lambda}t\right)\right].
\end{aligned}$$

Observe que, aplicando a Transformada de Fourier em (3.4), obtemos novamente do Lema 2.3:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{v(x,t)\}(w) &= \mathcal{F}\{L^{\alpha}u(Lx, L^{\lambda}t)\}(w) \\
&= L^{\alpha}\cdot\frac{1}{L}\hat{u}\left(\frac{w}{L}, L^{\lambda}t\right) \\
&= L^{\alpha-1}\hat{u}\left(\frac{w}{L}, L^{\lambda}t\right).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{Mu(Lx, L^{\lambda}t)\}(w) &= \frac{1}{L^{1+2\beta}}\left[-|w|^{2\beta}\cdot\frac{1}{L^{\alpha-1}}\hat{v}(w,t)\right] \\
&= \frac{1}{L^{\alpha+2\beta}}\widehat{Mv}(w).
\end{aligned}$$

Tomando a Transformada Inversa de Fourier da equação acima, obtemos:

$$Mu(Lx, L^{\lambda}t) = \frac{1}{L^{\alpha+2\beta}}Mv(x,t). \tag{3.6}$$

Substituindo (3.6) em (3.5), temos:

$$\frac{v_t(x,t)}{L^{\alpha+\lambda}} = \frac{1}{L^{\alpha+2\beta}}Mv(x,t).$$

Logo, para que a equação fique invariante, devemos ter:

$$\lambda = 2\beta.$$

Observe que, se fizermos $\beta = 1$ na equação (3.1) obtemos a equação do calor ($u_t = u_{xx}$). A princípio, α poderia assumir qualquer valor, porém, motivados pelos resultados obtidos para a equação do calor (veja [16]), mostraremos, através de uma "lei de conservação" que o expoente α deve ser igual a 1.

Seja $u(x,t)$ a solução da equação (3.1), então, para $L > 1$:

$$v(x,t) = L^{\alpha}u(Lx, L^{2\beta}t), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t > 0.$$

Para a determinação de α, definiremos a *massa* M de uma função f por:

$$M \equiv \int_{\mathbb{R}} f(x)dx.$$

Considerando a conservação da massa para o problema em questão, obtemos:

$$M \equiv \int_{\mathbb{R}} u(x,1)dx = \int_{\mathbb{R}} u(x,t)dx, \quad \forall t \geq 1,$$

em que $u(x,t)$ é solução do PVI (3.1).

Assim,

$$M = \int_{\mathbb{R}} u(x,1)dx = \int_{\mathbb{R}} u(x,t)dx = \int_{\mathbb{R}} L^{\alpha} u(Lx, L^{2\beta}t)dx = L^{\alpha-1}\int_{\mathbb{R}} u(x, L^{2\beta}t)dx.$$

Fazendo $t = 1/L^{2\beta}$ na última integral, obtemos que $M = L^{\alpha-1}M$, e, portanto, $\alpha = 1$.

Logo, a mudança de escalas que será utilizada é

$$v(x,t) = Lu(Lx, L^{2\beta}t). \tag{3.7}$$

3.3 Definição do operador RG

Motivados pelo resultado obtido na seção anterior, definiremos o operador RG para a equação (3.1) e veremos algumas de suas propriedades. Dado $L > 1$, faremos o seguinte:

1. Integramos a equação (3.1) e evoluímos o dado inicial $f(x) = u(x,1)$ do tempo $t = 1$ ao tempo $t = L^{2\beta}$, obtendo assim, $u(x, L^{2\beta})$;
2. Reescalonamos, então, a variável espacial por L e obtemos, $u(Lx, L^{2\beta})$;
3. Por fim, reescalonamos a solução u por L, obtendo $Lu(Lx, L^{2\beta})$.

Os três passos descritos acima podem ser resumidos pela seguinte expressão:

$$R_L f(x) \equiv Lu(Lx, L^{2\beta}). \tag{3.8}$$

Observe que a função obtida após a realização dos três passos descritos acima é a imagem do dado inicial do PVI (3.1) pelo operador R_L. Assim, R_L é um operador atuando sobre o espaço dos dados iniciais. Ele possui as seguintes propriedades:

1. $R_L f \in \mathcal{B}_3, \forall f \in \mathcal{B}_3$;
2. $R_L f$ é linear;
3. R_L possui a *propriedade de semi-grupo*, ou seja, $R_L^n \equiv R_L \circ \cdots \circ R_L = R_{L^n}$;
4. $R_L f^* = f^*$, sendo $\widehat{f^*}(w) = e^{-|w|^{2\beta}}$.

Provaremos essas propriedades a seguir.

Propriedade 1: Pela Definição do operador R_L em (3.8) e pelo Lema 2.3

$$\widehat{R_L f}(w) = \widehat{Lu}(Lx, L^{2\beta}) = L \cdot \frac{1}{L}\hat{u}\left(\frac{w}{L}, L^{2\beta}\right) = \hat{u}\left(\frac{w}{L}, L^{2\beta}\right). \tag{3.9}$$

Além disso, da solução (3.2),

$$\widehat{R_L f}(w) = \hat{f}\left(\frac{w}{L}\right) e^{-|w|^{2\beta}(1-L^{-2\beta})}. \tag{3.10}$$

De (1.3), definimos a norma de $R_L f$ da seguinte maneira:

$$\|R_L f\| = \sup_{w\in\mathbb{R}} \left[(1+|w|^3)\left(|\widehat{R_L f}(w)| + |\widehat{R_L f}'(w)|\right)\right]. \tag{3.11}$$

Como $f \in \mathcal{B}_3$, temos que $\hat{f}(\frac{w}{L}) \in C^1(\mathbb{R})$. Logo, derivando a equação (3.10), encontramos:

$$(\widehat{R_L f})'(w) = \left[\frac{1}{L}\hat{f}'\left(\frac{w}{L}\right) + \hat{f}\left(\frac{w}{L}\right)(-2\beta|w|^{2\beta-1})(1-L^{-2\beta})\right] e^{-|w|^{2\beta}(1-L^{-2\beta})}. \tag{3.12}$$

Portanto, da Definição (3.11), temos:

$$\|R_L f\| \leq \sup_{w\in\mathbb{R}} (1+|w|^3)\left[\left(\left|\hat{f}\left(\frac{w}{L}\right)\right| + \frac{1}{L}\left|\hat{f}'\left(\frac{w}{L}\right)\right| + 2\beta|w|^{2\beta-1}(1-L^{-2\beta})\left|\hat{f}\left(\frac{w}{L}\right)\right|\right) e^{-|w|^{2\beta}(1-L^{-2\beta})}\right].$$

Usando que $L > 1$ temos que $1 + w^3 \leq L^3 + w^3$ e, tomando

$$C(\beta) \equiv \sup_{w\in\mathbb{R}} \left(1 + 2\beta|w|^{2\beta-1}(1-L^{-2\beta})\right) e^{-|w|^{2\beta}(1-L^{-2\beta})},$$

então,

$$\|R_L f\| \leq C(\beta) \sup_{w\in\mathbb{R}} \left\{L^3\left[1 + \left|\frac{w}{L}\right|^3\right]\left(\left|\hat{f}\left(\frac{w}{L}\right)\right| + \left|\hat{f}'\left(\frac{w}{L}\right)\right|\right)\right\} \leq L^3 C(\beta)\|f\| < \infty,$$

pois $f \in B_3$. Portanto, $R_L f \in B_3$.

∎

Propriedade 2: Considere u solução da equação (3.1) tal que $u(x,1) = (cf+g)(x)$ para funções $f, g \in \mathcal{B}_3$ e $c \in \mathbb{R}$. Então aplicando o operador Grupo de Renormalização em u, temos

$$R_L u(x,1) = R_L(cf+g)(x) = Lu(Lx, L^{2\beta})$$

sendo u dada por (3.3). Reescalonando devidamente a equação (3.3), temos

$$R_L(cf+g)(x) = L\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|w|^{2\beta}(L^{2\beta}-1)} e^{iwLx}(\widehat{cf+g})(w)dw$$

Como a Transformada de Fourier é uma aplicação linear e pela linearidade da integral, temos

$$\begin{aligned} R_L(cf+g)(x) &= cL\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|w|^{2\beta}(L^{2\beta}-1)} e^{iwLx}\widehat{f}(w)dw + L\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|w|^{2\beta}(L^{2\beta}-1)} e^{iwLx}\widehat{g}(w)dw \\ &= cR_L f + R_L g. \end{aligned}$$

Logo, o operador RG é linear. ∎

Propriedade 3: Considere a solução u, para $1 \leq t \leq L^{4\beta}$ e defina $v(x,t) = Lu(Lx, L^{2\beta}t)$. Então, como já provamos, $v(x,t)$ é também solução da equação, mas com o dado inicial $Lu(Lx, L^{2\beta})$ e está bem definida, para todo $t \in [1, L^{2\beta}]$. Então, por (3.7) e (3.8), obtemos:

$$v(Lx, L^{2\beta}) = Lu(LLx, L^{2\beta}L^{2\beta}) = Lu(L^2x, L^{4\beta}).$$

Assim,

$$R_{L^2}f = L^2u(L^2x, L^{4\beta}) = Lv(Lx, L^{2\beta}).$$

Mas, $v(x,1) = Lu(Lx, L^{2\beta})$ e $R_Lv(x,1) = Lv(Lx, L^{2\beta})$. Logo,

$$R_{L^2}f = R_Lv(x,1) = R_L(Lu(Lx, L^{2\beta})) = R_L(R_Lf) = R_L^2f.$$

Esse exato procedimento segue para obtermos $R_L^n \equiv R_L \circ \cdots \circ R_L = R_{L^n}$.

∎

Propriedade 4: Substituindo

$$\widehat{f^*}(w) = e^{-|w|^{2\beta}}$$

em (3.10) obtemos:

$$\begin{aligned} \widehat{R_Lf^*}(w) &= e^{-|w|^{2\beta}(1-L^{-2\beta})}\widehat{f^*}\left(\frac{w}{L}\right) \\ &= e^{-w^{2\beta}(1-L^{-2\beta})}e^{-(\frac{w}{L})^{2\beta}} \\ &= e^{-w^{2\beta}+(\frac{w}{L})^{2\beta}-(\frac{w}{L})^{2\beta}} \\ &= e^{-w^{2\beta}}. \end{aligned}$$

Logo, $\widehat{R_Lf^*}(w) = \widehat{f^*}(w)$ e tomando a Transformada Inversa de Fourier obtemos o resultado.

3.3.1 Lema da Contração em $\mathcal{B}_3$

Outra importante propriedade do operador R_L é que funções com certas propriedades podem ser contraídas pela aplicação do Grupo de Renormalização. De fato, para L suficientemente grande, veremos que o operador R_L será uma contração no espaço das funções $g \in \mathcal{B}_3$ tais que $\hat{g}(0) = 0$.

Lema 3.1. *Suponha $g \in \mathcal{B}_3$ tal que $\hat{g}(0) = 0$. Então, dado $L_0 > 1$, existe uma constante C_1 (dependente apenas de β) tal que para todo $L \geq L_0$:*

$$\|R_Lg\| \leq \frac{C_1(\beta)}{L}\|g\|. \tag{3.13}$$

Prova: De (3.2) e (3.9), temos:

$$\widehat{R_Lg}(w) = \hat{u}\left(\frac{w}{L}, L^{2\beta}\right) = \hat{g}\left(\frac{w}{L}\right)e^{-(\frac{w}{L})^{2\beta}(L^{2\beta}-1)} = \hat{g}\left(\frac{w}{L}\right)e^{-w^{2\beta}(1-L^{-2\beta})}.$$

Derivando a equação acima,

$$\widehat{R_Lg}'(w) = -2\beta w^{2\beta-1}(1-L^{-2\beta})e^{-w^{2\beta}(1-L^{-2\beta})}\hat{g}\left(\frac{w}{L}\right) + \hat{g}'\left(\frac{w}{L}\right)\frac{1}{L}e^{-w^{2\beta}(1-L^{-2\beta})}.$$

Como $g \in \mathcal{B}_3$, segue que $\hat{g} \in C^1(\mathbb{R})$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\hat{g}\left(\frac{w}{L}\right) = \hat{g}(0) + \int_0^{\frac{w}{L}} \hat{g}'(t)dt.$$

Da definição de norma em $\mathcal{B}_3$ temos que $|\hat{g}'(w)| \leq \|g\|$. Assim,

$$\left|\hat{g}\left(\frac{w}{L}\right)\right| \leq \int_0^{\frac{w}{L}} \|g\|dt \leq \|g\| \int_0^{\frac{w}{L}} dt \leq \left|\frac{w}{L}\right| \|g\|.$$

Usando ainda que $\left|\hat{g}'\left(\frac{w}{L}\right)\right| \leq \|g\|$ e $1 - L^{-2\beta} \leq 1$,

$$\begin{aligned}
\|R_L g\| &\leq \sup_{w\in\mathbb{R}}(1+|w|^3)\left[\left|\hat{g}\left(\frac{w}{L}\right)\right| e^{-w^{2\beta}(1-L^{-2\beta})} + 2\beta|w|^{2\beta-1}(1-L^{-2\beta})e^{-w^{2\beta}(1-L^{-2\beta})}\left|\hat{g}\left(\frac{w}{L}\right)\right| + \right. \\
&\qquad \left. \left|\hat{g}'\left(\frac{w}{L}\right)\right| \left|\frac{1}{L}\right| e^{-w^{2\beta}(1-L^{-2\beta})}\right] \\
&\leq \sup_{w\in\mathbb{R}}(1+|w|^3)e^{-w^{2\beta}(1-L^{-2\beta})}\left[\left|\frac{w}{L}\right| \|g\| + 2\beta|w|^{2\beta-1}(1-L^{-2\beta})\left|\frac{w}{L}\right| \|g\| + \frac{1}{L}\|g\|\right] \\
&\leq \sup_{w\in\mathbb{R}}(1+|w|^3)e^{-w^{2\beta}(1-L^{-2\beta})}\left[|w| + 2\beta|w|^{2\beta} + 1\right]\frac{\|g\|}{L}.
\end{aligned}$$

Definindo,

$$C_1(\beta) = \sup_{w\in\mathbb{R}}(1+|w|^3)e^{-w^{2\beta}(1-L_0^{-2\beta})}\left[|w| + 2\beta|w|^{2\beta} + 1\right]$$

obtemos,

$$\|R_L g\| \leq C_1(\beta)L^{-1}\|g\|.$$

que é o resultado desejado.[1] ∎

3.4 Análise assintótica para o caso linear

Provaremos, nessa seção, que através do operador RG é possível caracterizar o comportamento assintótico da solução de um problema de valor inicial, desde que este pertença a $\mathcal{B}_3$ e seja suficientemente pequeno. A ideia para obtenção do comportamento assintótico consiste em decompor o dado inicial em duas parcelas, sendo uma delas na direção da função f^*, ou seja, do ponto fixo do operador RG:

$$f(x) = \hat{f}(0)f^*(x) + g_0(x), \tag{3.14}$$

isto é, definiremos uma função $g_0 \equiv f - \hat{f}(0)f^*$ de forma a obter a decomposição acima. Seguindo os passos descritos na Seção 3.3 encontraremos a solução reescalonada para o primeiro problema, que será utilizada como condição inicial para o próximo PVI, similiar ao anterior. Então, o problema de tomar $t \to \infty$ irá se tranformar em iterações de aplicações do operador RG ao dado inicial e obteremos uma sequência de PVIs em intervalos limitados de tempo fixo. O procedimento se resume portanto em estudar a evolução do dado inicial, sendo que em cada iteração, uma das componentes sempre estará na direção do ponto fixo e a componente restante decairá para zero quando n tende para infinito.

[1] Observe que L_0 pode ser qualquer constante maior que um. A imposição de que $L \geq L_0$ é para que as estimativas sejam uniformes em L de forma que a constante C_1 independa de L.

Teorema 3.1. *Sejam u solução do PVI (3.1) e f^* definida em (1.6). Então,*

$$\lim_{t\to\infty} \|t^{\frac{1}{2\beta}} u(t^{\frac{1}{2\beta}}\cdot, t) - \hat{f}(0) f^*(\cdot)\| = 0. \tag{3.15}$$

Para demonstrar o teorema acima precisaremos do seguinte lema:

Lema 3.2. *Seja f^* o ponto fixo do operador R_L. Então existe uma constante $\overline{C}_\beta$ tal que $\|f^*\| \leq \overline{C}_\beta$.*

De fato, da definição da norma em B_3:

$$\|f^*\| = \sup_{w\in\mathbb{R}} \left[(1+|w|^3)\left(|\hat{f^*}(w)| + |\hat{f^*}'(w)|\right)\right].$$

Como $\widehat{f^*}(w) = e^{-|w|^{2\beta}}$,

$$\begin{aligned}
\|f^*\| &= \sup_{w\in\mathbb{R}} (1+|w|^3)\left(e^{-|w|^{2\beta}} + 2\beta|w|^{2\beta-1}e^{-|w|^{2\beta}}\right)\\
&= \sup_{w\in\mathbb{R}} \left(e^{-|w|^{2\beta}} + 2\beta|w|^{2\beta-1}e^{-|w|^{2\beta}} + |w|^3 e^{-|w|^{2\beta}} + 2\beta|w|^{2\beta+2}e^{-|w|^{2\beta}}\right).
\end{aligned}$$

Encontraremos uma cota superior (independente de w) para cada parcela da equação acima, encontrando os máximos, que serão obtidos através da derivada de cada função:

1. Para a primeira parcela não é necessária a obtenção do máximo da função, visto que obtemos facilmente uma cota superior para a primeira função acima: $\Omega(w) = e^{-|w|^{2\beta}} \leq 1$.

2. $\varphi(w) = 2\beta|w|^{2\beta-1}e^{-|w|^{2\beta}}$.
   $\varphi'(w) = (4\beta^2|w|^{2\beta-2} + 2\beta|w|^{2\beta-2} - 4\beta^2|w|^{4\beta-2})e^{-|w|^{2\beta}} = 0 \quad\Rightarrow\quad w = \left(1-\frac{1}{2\beta}\right)^{\frac{1}{2\beta}}$.
   Então, $\varphi(w) \leq 2\beta\left(1-\frac{1}{2\beta}\right)^{1-\frac{1}{2\beta}} e^{\left(\frac{1}{2\beta}-1\right)}$.

3. $\psi(w) = |w|^3 e^{-|w|^{2\beta}}$.
   $\psi'(w) = (3|w|^2 - 2\beta|w|^{2\beta+2})e^{-|w|^{2\beta}} = 0 \quad\Rightarrow\quad w = \left(\frac{3}{2\beta}\right)^{\frac{1}{2\beta}}$.
   Entao, $\psi(w) \leq \left(\frac{3}{2\beta}\right)^{\frac{3}{2\beta}} e^{-\frac{3}{2\beta}}$.

4. $\chi(w) = 2\beta|w|^{2\beta+2}e^{-|w|^{2\beta}}$.
   $\chi'(w) = 4\beta^2|w|^{2\beta+1} + 4\beta|w|^{2\beta+1} - 4\beta^2|w|^{4\beta+1} = 0 \quad\Rightarrow\quad w = \left(1-\frac{1}{\beta}\right)^{\frac{1}{2\beta}}$.
   Então, $\chi(w) \leq 2\beta\left(1+\frac{1}{\beta}\right)^{1+\frac{1}{\beta}} e^{-\frac{1}{\beta}+1}$.

Logo, $\|f^*\| \leq \overline{C}_\beta$, sendo:

$$\overline{C}_\beta \equiv \left[1 + 2\beta\left(1-\frac{1}{2\beta}\right)^{1-\frac{1}{2\beta}} e^{\left(\frac{1}{2\beta}-1\right)} + \left(\frac{3}{2\beta}\right)^{\frac{3}{2\beta}} e^{-\frac{3}{2\beta}} + 2\beta\left(1+\frac{1}{\beta}\right)^{1+\frac{1}{\beta}} e^{-\left(1+\frac{1}{\beta}\right)}\right]. \tag{3.16}$$

$\blacksquare$

Prova do Teorema: Como $f, f^* \in \mathcal{B}_3$ e explicitamos uma constante $\overline{C}_\beta$, dependente apenas de β tal que $\|f^*\| \leq \overline{C}_\beta$, podemos definir uma função $g_0 \in \mathcal{B}_3$ por:

$$g_0(x) \equiv f(x) - \hat{f}(0)f^*(x).$$

Pela definição da norma em $\mathcal{B}_3$, e como $\|f^*\| \leq \overline{C}_\beta$ temos,

$$\|g_0\| \leq \|f\| + |\hat{f}(0)|\|f^*\| \leq (1 + \overline{C}_\beta)\|f\|. \tag{3.17}$$

Dado $L \geq L_0 > 1$, como R_L é um operador linear, f^* é ponto fixo do R_L e definindo $g_1 \equiv R_L g_0$, obtemos:

$$\begin{aligned} R_L f &= R_L[\hat{f}(0)f^*] + R_L g_0 \\ &= \hat{f}(0)R_L f^* + g_1 \\ &= \hat{f}(0)f^* + g_1. \end{aligned}$$

Fazendo $A_0 = \hat{f}(0)$, temos

$$R_L f = A_0 f^* + g_1 \equiv f_1.$$

Observe que como $\widehat{f^*}(0) = 1$, então $\widehat{g_0}(0) = 0$. Logo, pelo Lema da Contração,

$$\|g_1\| = \|R_L g_0\| \leq \frac{C_1}{L}\|g_0\|.$$

Observe que por (3.10)

$$\widehat{g_1}(w) = \widehat{R_L g_0}(w) = e^{-|w|^{2\beta}(1-L^{-2\beta})}\hat{g}_0\left(\frac{w}{L}\right),$$

e assim, $\widehat{g_1}(0) = 0$. Em seguida, definimos $g_2 \equiv R_L g_1$:

$$\begin{aligned} R_L^2 f &= R_L(f_1) = R_L\left[\hat{f}(0)f^*(x)\right] + R_L g_1 \\ &= A_0 f^* + R_L g_1 \\ &= A_0 f^* + g_2. \end{aligned}$$

Como $\widehat{g_1}(0) = 0$, podemos aplicar o Lema da contração, e obtemos:

$$\|g_2\| = \|R_L g_1\| \leq \frac{C_1}{L}\|g_1\|.$$

Mas,

$$\|g_1\| \leq \frac{C_1}{L}\|g_0\| \qquad \Rightarrow \qquad \|g_2\| \leq \left(\frac{C_1}{L}\right)^2 \|g_0\|.$$

Além disso, mais uma vez, temos:

$$\widehat{g_2}(w) = \widehat{R_L g_1}(w) = e^{-|w|^{2\beta}(1-L^{-2\beta})}\hat{g}_1\left(\frac{w}{L}\right) \Rightarrow \hat{g}_2(0) = 0.$$

Usaremos um raciocínio indutivo para provar o teorema. Portanto, suponhamos que $R_L^n f = A_0 f^* + g_n$, com $\widehat{g_n}(0) = 0$ e

$$\|g_n\| \leq \left(\frac{C_1}{L}\right)^n \|g_0\|. \tag{3.18}$$

Assim,

$$R_L^{n+1} f = R_L(R_L^n f) = R_L(A_0 f^* + g_n) = A_0 f^* + R_L g_n.$$

Agora, seja $g_{n+1} = R_L g_n$. Então, pelo Lema da Contração,

$$\|g_{n+1}\| = \|R_L g_n\| \leq \frac{C_1}{L}\|g_n\| \leq \left(\frac{C_1}{L}\right)^{n+1} \|g_0\|.$$

Temos ainda $\widehat{g_{n+1}}(0) = 0$, pois,

$$\widehat{g_{n+1}}(w) = \widehat{R_L g_n}(w) = e^{-|w|^{2\beta}(1-L^{-2\beta})} \hat{g}_n\left(\frac{w}{L}\right) \Rightarrow \hat{g}_{n+1}(0) = 0.$$

Portanto, (3.18) é válida, para todo $n \in \mathbb{N}$ e, como $R_L^n f(x) = L^n u(L^n x, L^{2n\beta})$ pela propriedade de semi-grupo do RG,

$$\|L^n u(L^n x, L^{2n\beta}) - A_0 f^*(x)\| \leq \left(\frac{C_1}{L}\right)^n \|g_0\|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Considerando $L > C_1$, quando $n \to \infty$ obtemos:

$$\lim_{n\to\infty} \|L^n u(L^n x, L^{2n\beta}) - A_0 f^*(x)\| = 0. \tag{3.19}$$

Tomando $t = L^{2n\beta}$, obtemos finalmente:

$$\lim_{t\to\infty} \|t^{\frac{1}{2\beta}} u(t^{\frac{1}{2\beta}} x, t) - \hat{f}(0) f^*(x)\| = 0,$$

que é o resultado desejado.

∎

Capítulo 4

O Grupo de Renormalização Aplicado à Equação Linear com Termo Dispersivo

Nesse capítulo, obteremos o comportamento assintótico do seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} u_t = Mu - \eta u_{xxx}, \ t > 1, \ x \in \mathbb{R} \\ u(x,1) = f(x), \ f \in \mathcal{B}_3, \end{cases} \tag{4.1}$$

sendo $\eta \in [0,1]$. Para esse estudo seguiremos as mesmas ideias usadas no capítulo anterior, isto é, na Seção 4.1 encontraremos a solução do PVI (4.1). Na Seção 4.2 definiremos o operador RG que possui as mesmas propriedades definidas na Seção 3.3, exceto a propriedade 4. Mostraremos, na Seção 4.2, que para o caso linear com termo dispersivo, a função f^* não será ponto fixo do operador como no caso linear. No entanto, isso não afetará a caracterização do comportamento assintótico do PVI acima que será obtido na Seção 4.3.

4.1 A Solução da equação

Para obtermos uma solução para o PVI acima utilizaremos o Teorema 2.2 que relaciona a transformada de Fourier de uma função com sua derivada.

Para $n = 0$ e $m = 1$,

$$(ix)\left(\frac{d}{dx}\right)^0 \hat{f} = \mathcal{F}\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^1 [(-ix)^0 f]\right] \quad \rightarrow \quad \hat{u}_x = iw\hat{u}.$$

Para $n = 0$ e $m = 2$,

$$(ix)^2\left(\frac{d}{dx}\right)^0 \hat{f} = \mathcal{F}\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^2 [(-ix)^0 f]\right] \quad \rightarrow \quad \hat{u}_{xx} = -w^2\hat{u}.$$

Para $n = 0$ e $m = 3$,

$$(ix)^3 \left(\frac{d}{dx}\right)^0 \hat{f} = \mathcal{F}\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^3 [(-ix)^0 f]\right] \quad \rightarrow \quad \hat{u}_{xxx} = -iw^3\hat{u}.$$

Aplicando a Transformada de Fourier em ambos os lados da equação (4.1), obtemos:

$$\hat{u}_t = -|w|^{2\beta}\hat{u} + i\eta w^3\hat{u}. \tag{4.2}$$

Integrando,

$$\ln(\hat{u}) = -(|w|^{2\beta} - i\eta w^3)t + C \quad \Rightarrow \quad \hat{u} = e^{-(|w|^{2\beta}-i\eta w^3)t+C} \quad \Rightarrow \quad \hat{u} = e^{-(|w|^{2\beta}-i\eta w^3)t}e^c$$

Fazendo $e^c = \overline{C}$,

$$\hat{u}(w,t) = \overline{C}e^{-(|w|^{2\beta}-i\eta w^3)t}$$

Temos que:

$$\hat{u}(w,1) = \overline{C}e^{-(|w|^{2\beta}-i\eta w^3)} = \hat{f}(w)$$

Logo, para todo t:

$$\hat{u}(w,t) = \hat{f}(w)e^{-(|w|^{2\beta}-i\eta w^3)(t-1)}. \tag{4.3}$$

Tomando a Transformada Inversa de Fourier (veja definição (2.3)) da equação acima, obtemos:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(|w|^{2\beta}-i\eta w^3)(t-1)}e^{iwx}\widehat{f}(w)dw.$$

4.2 Definição do operador RG e suas propriedades

Seja u a solução de (4.1) e defina, para $L > 1$,

$$u_1(x,t) = Lu(Lx, L^{2\beta}t).$$

Gostaríamos de mostrar que u_1 também é solução da mesma equação (4.1), com $u_1(x,1) = Lu(Lx, L^{2\beta})$. Para isso, definimos $y = Lx$ e $s = L^{2\beta}t$ e tomemos a derivada de u_1 em relação a t, e pela regra da cadeia,

$$(u_1)_t = L^{2\beta+1}u_s.$$

Tomando agora a derivada em relação a x, temos que $(u_1)_x = L^2u_y$, e com isso,

$$(u_1)_{xxx} = L^4u_{yyy}.$$

Na Seção 3.2 mostramos que $Mu = \frac{1}{L^{1+2\beta}}Mu_1$ (veja (3.6) e como u é solução de (4.1), temos:

$$u_s = Mu - \eta u_{yyy} \quad \Rightarrow \quad \frac{(u_1)_t}{L^{1+2\beta}} = \frac{1}{L^{1+2\beta}}Mu_1 - \eta\frac{(u_1)_{xxx}}{L^4} \quad \Rightarrow \quad (u_1)_t = Mu_1 - \eta L^{2\beta-3}(u_1)_{xxx}.$$

Logo, u_1 satisfaz o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} (u_1)_t = Mu_1 - \eta L^{2\beta-3}(u_1)_{xxx}, \\ u_1(x,1) = Lu(Lx, L^{2\beta}) \equiv f_1(x). \end{cases} \tag{4.4}$$

Agora, iteramos esse procedimento, considerando u_1 solução de (4.4) e definindo

$$u_2(x,t) = Lu_1(Lx, L^{2\beta}t).$$

Novamente, usando que $Mu_1 = \frac{1}{L^{1+2\beta}} Mu_2$, temos

$$(u_2)_t = L^{2\beta+1}\left[\frac{1}{L^{1+2\beta}}Mu_2 - \eta L^{2\beta-3}\left(\frac{(u_2)_{xxx}}{L^4}\right)\right].$$

Logo, u_2 satisfaz o PVI:

$$\begin{cases} (u_2)_t = Mu_2 - \eta L^{4\beta-6}(u_2)_{xxx}, \\ u_2(x,1) = Lu_1(Lx, L^{2\beta}) = L^2 u(L^2x, L^{4\beta}) \equiv f_2(x). \end{cases} \tag{4.5}$$

Assim, para obter a sequência de PVIs, procederemos indutivamente. Então, suponha u_k solução de:

$$\begin{cases} (u_k)_t = Mu_k - \eta L^{k(2\beta-3)}(u_k)_{xxx}, \\ u_k(x,1) = Lu_{k-1}(Lx, L^{2\beta}) = L^k u(L^k x, L^{2k\beta}) \equiv f_k(x) \end{cases} \tag{4.6}$$

e seja u_{k+1} definida por

$$u_{k+1}(x,t) = Lu_k(Lx, L^{2\beta}t).$$

Então,

$$(u_{k+1})_t = L^{2\beta+1}u_s = L^{2\beta+1}(Mu_k - \eta L^{k(2\beta-3)}(u_k)_{yyy}).$$

Novamente temos,

$$Mu_k = \frac{1}{L^{1+2\beta}}Mu_{k+1}.$$

Assim,

$$(u_{k+1})_t = L^{2\beta+1}\left[\frac{1}{L^{1+2\beta}}Mu_{k+1} - \eta L^{k(2\beta-3)}\left(\frac{(u_{k+1})_{xxx}}{L^4}\right)\right].$$

Logo, u_{k+1} satisfaz: o novo PVI:

$$\begin{cases} (u_{k+1})_t = Mu_{k+1} - \eta L^{(k+1)(2\beta-3)}(u_{k+1})_{xxx}, \\ u_{k+1}(x,1) = Lu_k(Lx, L^{2\beta}) = L^{k+1}u(L^{k+1}x, L^{2(k+1)\beta}) \equiv f_{k+1}(x). \end{cases} \tag{4.7}$$

Vimos que, definindo a sequência de funções renormalizados $u_k(x,t) = L^k u(L^k x, L^{2k\beta}t)$, em que u é solução de (4.1), então u_k satisfaz, para cada k o PVI (4.7). Assim, somos motivados a definir o operador RG para o problema (4.1). Considerando $\eta \in [0,1]$ e f_k o dado inicial do problema (4.6), então,

$$R_{L,\eta_k} f_k(x) \equiv Lu_k(Lx, L^{2\beta}), \tag{4.8}$$

sendo $\eta_k = \eta L^{(2\beta-3)k}$ com $k = 0, 1, 2, \ldots$. O segundo índice na definição do operador RG diz respeito ao coeficiente do termo dispersivo u_{xxx}. Além disso, como $L > 1$, $\eta \in [0,1]$ e $2\beta - 3 \leq -1$ então $|\eta_k| \leq |\eta| \leq 1$. Considerando a solução do problema (4.1) dada por (4.3) é fácil ver que as propriedades 1, 2 e 3 da seção 3.3 são verdadeiras para o operador R_{L,η_k}. Além disso, veremos, mais adiante, que o operador R_{L,η_k} também satisfaz o Lema da Contração (Lema 4.3).

Para o problema (3.1) vimos que a função f^* dado por (1.6) é ponto fixo do operador R_L definido em (3.8). O mesmo não ocorre no caso linear com termo dispersivo, isto é, f^* não é ponto fixo do operador R_{L,η_k}. Entretanto, mostraremos que assintoticamente ele será. Para isto, considere o seguinte lema:

Lema 4.1 (Ponto fixo assintótico). *Suponha $\frac{3}{4} < \beta \leq 1$. Então, existem constantes $L_0(\beta)$ e C_β tais que:*

$$\|R_{L,\eta_k} f^* - f^*\| \leq \frac{C_\beta}{L^{k+1}}, \quad \forall L \geq L_0(\beta). \tag{4.9}$$

Prova: Pela definição (1.3) temos:

$$\|R_{L,\eta_k} f^* - f^*\| = \sup_{w\in\mathbb{R}} (1+|w|^3) \left[|\widehat{R_{L,\eta_k} f}^*(w) - \widehat{f^*}(w)| + |(\widehat{R_{L,\eta_k} f}^*(w) - \widehat{f^*}(w))'| \right].$$

Além disso, a transformada de Fourier de f^* é dada por:

$$\widehat{f^*}(w) = e^{-|w|^{2\beta}}.$$

Observe que $R_{L,\eta_k} f^* = L u_k(Lx, L^{2\beta})$, em que u_k é solução do problema (4.6) com dado inicial f^*. Assim, analogamente ao que foi feito na análise do problema (3.1), obtemos portanto

$$\widehat{R_{L,\eta_k} f}^*(w) = e^{-(|\frac{w}{L}|^{2\beta} - i\eta L^{(2\beta-3)k}(|\frac{w}{L}|^3)(L^{2\beta}-1)} \hat{f}^*\left(\frac{w}{L}\right) = e^{-(|w|^{2\beta} - i\eta L^{(2\beta-3)k} L^{(2\beta-3)}|w|^3)(1-L^{-2\beta})} e^{-|\frac{w}{L}|^{2\beta}}.$$

Como $\eta_k = \eta L^{(2\beta-3)k}$, podemos escrever:

$$\widehat{R_{L,\eta_k} f}^*(w) \quad = \quad e^{-(|w|^{2\beta} - i\eta_{k+1}|w|^3)(1-L^{-2\beta})} e^{-|\frac{w}{L}|^{2\beta}} = e^{-|w|^{2\beta} + i\eta_{k+1}|w|^3(1-L^{-2\beta})}.$$

Assim,

$$\widehat{R_{L,\eta_k} f}^*(w) - \widehat{f^*}(w) = e^{-|w|^{2\beta}} (e^{i\eta_{k+1}|w|^3(1-L^{-2\beta})} - 1). \tag{4.10}$$

Para estimar o termo $\sup\limits_{w\in\mathbb{R}} (1+|w|^3)|\widehat{R_{L,\eta_k} f}^*(w) - \widehat{f^*}(w)|$, analisaremos dois casos. Fixado $\mu \in \left(0, \frac{2-2\beta}{3-2\beta}\right]$, consideraremos inicialmente que w, L e k são tais que $|w|^3 < L^{-(2\beta-3)(k+1)\mu}$.

Caso 1: $|w|^3 < L^{-(2\beta-3)(k+1)\mu}$.

Defina $\varphi \equiv |e^{i\eta L^{(2\beta-3)(k+1)}|w|^3(1-L^{-2\beta})} - 1|$, $\alpha = L^{(2\beta-3)}$ e $x = \eta\alpha^{k+1}|w|^3(1-L^{-2\beta})$.

Assim, $\varphi(x) = |e^{ix} - 1|$. Temos:

$$\int_0^x e^{it} dt = \frac{e^{it}}{i}\Bigg|_0^x = \frac{1}{i}(e^{ix} - 1).$$

Então,

$$\varphi(x) = |e^{ix} - 1| = \left| i\int_0^x e^{it} dt \right| \leq \int_0^x |e^{it}| dt \leq \int_0^x dt = x.$$

Como $L > 1$, $0 \leq \eta \leq 1$ e $|w|^3 < L^{-(2\beta-3)(k+1)\mu}$, temos:

$$|e^{ix} - 1| \leq x = \eta\alpha^{k+1}|w|^3(1-L^{-2\beta}) \leq \alpha^{k+1} \cdot L^{-(2\beta-3)(k+1)\mu} \leq \alpha^{k+1} \cdot \alpha^{-(k+1)\mu} \leq \alpha^{(k+1)(1-\mu)}.$$

Assim,

$$\sup_{|w|^3 < \alpha^{-(k+1)\mu}} (1+|w|^3)|\widehat{R_{L,\eta_k}} f^*(w) - \widehat{f^*}(w)| \quad \leq \quad \sup_{|w|^3 < \alpha^{-(k+1)\mu}} (1+|w|^3) e^{-|w|^{2\beta}} \alpha^{(k+1)(1-\mu)}.$$

Como $\mu \in \left(0, \frac{2-2\beta}{3-2\beta}\right]$,

$$\begin{aligned} \alpha^{(k+1)(1-\mu)} &= L^{(2\beta-3)(k+1)(1-\mu)} = L^{(k+1)(2\beta-3)} \cdot L^{\mu(k+1)(3-2\beta)} \\ &\leq L^{(k+1)(2\beta-3)} \cdot L^{(k+1)(2-2\beta)} = \frac{1}{L^{k+1}}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\sup_{|w|^3<\alpha^{-(k+1)\mu}} (1+|w|^3)|\widehat{R_{L,\eta_k} f}^*(w) - \widehat{f^*}(w)| \leq \frac{C_1(\beta)}{L^{k+1}}, \tag{4.11}$$

sendo $C_1(\beta) = \sup\limits_{|w|^3<\alpha^{-(k+1)\mu}} (1+|w|^3)e^{-|w|^{2\beta}}$.

Caso 2: $|w|^3 \geq L^{-(2\beta-3)(k+1)\mu}$.

Vamos estimar

$$\sup_{|w|^3\geq\alpha^{-(k+1)\mu}} (1+|w|^3)|\widehat{R_{L,\eta_k} f}^*(w) - \widehat{f^*}(w)| = \sup_{|w|^3\geq\alpha^{-(k+1)\mu}} (1+|w|^3)|e^{-|w|^{2\beta}}(e^{i\eta_{k+1}|w|^3(1-L^{-2\beta})} - 1)|.$$

Como $|e^{ix}-1| \leq |e^{ix}|+1 \leq 2$ e $\frac{|w|^{2\beta}}{2} = \frac{|w|^{3\frac{2\beta}{3}}}{2} \geq \frac{\alpha^{-(k+1)\cdot\frac{2\beta}{3}\mu}}{2}$, podemos cotar o termo acima superiormente por

$$\sup_{|w|^3\geq\alpha^{-(k+1)\mu}} (1+|w|^3)e^{-\frac{|w|^{2\beta}}{2}} \cdot e^{-\frac{|w|^{2\beta}}{2}} |e^{i\eta_{k+1}|w|^3(1-L^{-2\beta})}-1)| \leq \sup_{|w|^3\geq\alpha^{-(k+1)\mu}} 2(1+|w|^3)e^{-\frac{|w|^{2\beta}}{2}} \cdot e^{-\frac{\alpha^{-(k+1)\cdot\frac{2\beta}{3}\mu}}{2}},$$

isto é, obtemos como cota superior

$$\sup_{|w|^3\geq\alpha^{-(k+1)\mu}} 2(1+|w|^3)e^{-\frac{|w|^{2\beta}}{2}} \cdot e^{-\frac{L^{(3-2\beta)(k+1)\cdot\frac{2\beta}{3}\mu}}{2}}$$

e, portanto, existem $L_1(\beta)$ e $C_2(\beta)$ tais que, se $L > L_1(\beta)$,

$$\sup_{|w|^3\geq\alpha^{-(k+1)\mu}} (1+|w|^3)|\widehat{R_{L,\eta_k} f}^*(w) - \widehat{f^*}(w)| \quad\leq\quad C_2(\beta)\frac{1}{L^{k+1}},$$

sendo $C_2 = \sup\limits_{|w|^3\geq\alpha^{-(k+1)\mu}} 2(1+|w|^3)e^{-\frac{|w|^{2\beta}}{2}}$.

Com isso, obtemos:

$$\sup_{w\in\mathbb{R}}(1+|w|^3)|\widehat{R_{L,\eta_k} f}^*(w) - \widehat{f^*}(w)| \leq \frac{C_1(\beta)+C_2(\beta)}{L^{k+1}}, \quad \forall L \geq L_1(\beta). \tag{4.12}$$

Agora, vamos estimar o termo $\sup\limits_{w\in\mathbb{R}} |(\widehat{R_{L,\eta_k} f}^*(w) - \widehat{f^*}(w))'|$. Derivando (4.10) obtemos

$$e^{-|w|^{2\beta}}[-2\beta|w|^{2\beta-1}(e^{i\eta_{k+1}|w|^3(1-L^{-2\beta})} - 1) + 3i\eta_{k+1}(1-L^{-2\beta})|w|^2 e^{i\eta_{k+1}|w|^3(1-L^{-2\beta})}]. \tag{4.13}$$

Assim, como $\eta_{k+1} = \eta L^{(2\beta-3)(k+1)}$ e $\eta \in [0,1]$, podemos cotar (4.13) superiormente por

$$(2\beta|w|^{2\beta} + 3|w|^2)e^{-|w|^{2\beta}}[|e^{i\eta_{k+1}|w|^3(1-L^{-2\beta})} - 1| + L^{(2\beta-3)(k+1)}(1-L^{-2\beta})|e^{i\eta_{k+1}|w|^3(1-L^{-2\beta})}|].$$

Portanto, de maneira análoga ao que fizemos anteriormente, nos casos 1 e 2, obtemos que, existem $L_2(\beta)$ e $C_3(\beta)$ tais que, se $L > L_2(\beta)$,

$$\sup_{w\in\mathbb{R}}(1+|w|^3)|(\widehat{R_{L,\eta_k} f}^*(w) - \widehat{f^*}(w))'| \quad\leq\quad C_3(\beta)\frac{1}{L^{k+1}}.$$

Portanto, tomando $L_0(\beta) = \max\{L_1(\beta), L_2(\beta)\}$ e $C_\beta = C_1(\beta) + C_2(\beta) + C_3(\beta)$, temos, para $L > L_0(\beta)$,

$$\|R_{L,\eta_k} f^* - f^*\| \leq \frac{C_\beta}{L^{k+1}}.$$

∎

Note que f^* não é ponto fixo do operador como no caso da equação linear ($\eta = 0$), mas pelo resultado acima mostramos que assintoticamente ele será, isto é, para $k \to \infty$ temos

$$\|R_{L,\eta_k} f^* - f^*\| \to 0.$$

Com o lema anterior mostramos que a sequência $R_{L,\eta_k} f^*$ converge para f^*. Daí, segue que, a sequência $R_{L,\eta_k} f^*$ é limitada. No lema abaixo, encontraremos uma cota superior para essa sequência, que será utilizada na seção 5.3.

Lema 4.2. *Dados $L > 1$, $\eta \in [0,1]$ e $\eta_k = \eta L^{(2\beta-3)k}$, existe uma constante K dependente de β tal que*

$$\|R_{L,\eta_k} f^*\| \leq K. \tag{4.14}$$

Prova: Temos que

$$\widehat{R_{L,\eta_k} f}^*(w) = e^{-|w|^{2\beta} + i\eta_{k+1}|w|^3(1-L^{-2\beta})}. \tag{4.15}$$

Derivando a equação acima, obtemos:

$$\left(\widehat{R_{L,\eta_k} f}^*(w)\right)' = [-2\beta|w|^{2\beta-1} + 3i\eta_{k+1}|w|^2(1-L^{-2\beta})]e^{-|w|^{2\beta} + i\eta_{k+1}|w|^3(1-L^{-2\beta})}.$$

Da definição da norma em $\mathcal{B}_3$,

$$\|R_{L,\eta_k} f^*\| = \sup_{w\in\mathbb{R}} (1+|w|^3)\left[|\widehat{R_{L,\eta_k} f}^*(w)| + |(\widehat{R_{L,\eta_k} f}^*(w))'|\right].$$

Então, usando que $\eta_{k+1}(1-L^{-2\beta}) \leq 1$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\|R_{L,\eta_k} f^*\| &\leq \sup_{w\in\mathbb{R}} (1+|w|^3)e^{-|w|^{2\beta}}\left[1 + |-2\beta|w|^{2\beta-1}| + |3\eta_{k+1}w^2(1-L^{-2\beta})|\right] \\
&\leq \sup_{w\in\mathbb{R}} (1+|w|^3)e^{-|w|^{2\beta}}[1 + 2\beta|w|^{2\beta-1} + 3w^2].
\end{aligned}$$

Logo,

$$\|R_{L,\eta_k} f^*\| \leq K,$$

sendo $K = \sup_{w\in\mathbb{R}} (1+|w|^3)e^{-|w|^{2\beta}}[1 + 2\beta|w|^{2\beta-1} + 3w^2]$. ∎

Outra importante propriedade do Grupo de Renormalização será tratada no Lema 4.3. Neste lema provaremos que para L suficientemente grande, o operador R_{L,η_k} é uma contração quando age em funções cuja transformada de Fourier se anula na origem, e a demonstração do mesmo é semelhante à descrita na Seção 3.3.1.

Lema 4.3 (Lema da Contração). *Dados $\eta \in [0,1]$ e $g \in \mathcal{B}_3$ tal que $\hat{g}(0) = 0$, existe uma constante $C = C(\beta)$ tal que:*

$$\|R_{L,\eta} g\| \leq \frac{C}{L}\|g\| \quad \forall L \geq 2^{\frac{1}{2\beta}}. \tag{4.16}$$

Prova: De (2.5) e da definição do operador RG em (4.8), obtemos:

$$\begin{aligned}
\widehat{R_{L,\eta}g}(w) &= \hat{g}\left(\frac{w}{L}\right) e^{-\left(\left|\frac{w}{L}\right|^{2\beta} - i\eta\left|\frac{w}{L}\right|^{3}\right)(L^{2\beta}-1)} \\
&= \hat{g}\left(\frac{w}{L}\right) e^{-(L^{-2\beta}|w|^{2\beta} - i\eta L^{-3}|w|^3)(L^{2\beta}-1)} \\
&= \hat{g}\left(\frac{w}{L}\right) e^{-(|w|^{2\beta} - i\eta L^{2\beta-3}|w|^3)(1-L^{-2\beta})}.
\end{aligned}$$

Derivando a expressão encontrada, temos que $\widehat{R_{L,\eta}g}'(w)$ é

$$= \left\{\frac{1}{L}\hat{g}'\left(\frac{w}{L}\right) + \hat{g}\left(\frac{w}{L}\right)\left[-(2\beta|w|^{2\beta-1} - 3i\eta L^{2\beta-3}|w|^2)(1-L^{-2\beta})\right]\right\} e^{-(|w|^{2\beta} - i\eta L^{2\beta-3}|w|^3)(1-L^{-2\beta})}.$$

Como no Lema 3.1, $\left|\hat{g}\left(\frac{w}{L}\right)\right| \leq \left|\frac{w}{L}\right| \|g\|$ e usando que $\eta \in [0,1]$, $\left|\hat{g}'\left(\frac{w}{L}\right)\right| \leq \|g\|$, $1 - L^{-2\beta} \leq 1$, temos como cota superior para $\left[|\widehat{R_{L,\eta}g}(w)| + |(\widehat{R_{L,\eta}g}'(w))|\right]$,

$$\begin{aligned}
&\left[\left|\hat{g}\left(\frac{w}{L}\right)\right| + \left|\frac{1}{L}\hat{g}'\left(\frac{w}{L}\right) + \hat{g}\left(\frac{w}{L}\right)\left(-(2\beta|w|^{2\beta-1} - 3i\eta L^{2\beta-3}|w|^2)(1-L^{-2\beta})\right)\right|\right] e^{-(|w|^{2\beta} - i\eta L^{2\beta|-3}|w|^3)(1-L^{-2\beta})} \\
\leq\ &\left[\left|\hat{g}\left(\frac{w}{L}\right)\right| + \left|\frac{1}{L}\right|\left|\hat{g}'\left(\frac{w}{L}\right)\right| + (2\beta|w|^{2\beta-1} + 3\eta L^{2\beta-3}|w|^2)(1-L^{-2\beta}) \cdot \left|\hat{g}\left(\frac{w}{L}\right)\right|\right] e^{-(|w|^{2\beta}(1-L^{-2\beta})} \\
\leq\ &\left[1 + |w| + (2\beta|w|^{2\beta-1} + 3\eta L^{2\beta-3}|w|^2)(1-L^{-2\beta})\right] e^{-(|w|^{2\beta}(1-L^{-2\beta})}\frac{\|g\|}{L} \\
\leq\ &\left[1 + |w| + 3|w|^2 + 2\beta|w|^{2\beta-1}\right] e^{-(|w|^{2\beta}(1-L^{-2\beta})}\frac{\|g\|}{L},
\end{aligned}$$

em que, na última desigualdade, usamos que $\eta L^{2\beta-3} \leq 1$ e $1 - L^{-2\beta} \leq 1$.

Finalmente, tomando $L \geq 2^{\frac{1}{2\beta}}$, obtemos $1 - \frac{1}{L^{2\beta}} \geq \frac{1}{2}$, e portanto,

$$e^{-|w|^{2\beta}(1-L^{-2\beta})} \leq e^{-\frac{w^{2\beta}}{2}}.$$

Assim,

$$\|R_{L,\eta}g\| \leq C(\beta)L^{-1}\|g\|, \quad \forall L \geq 2^{\frac{1}{2\beta}},$$

sendo,

$$C = C(\beta) = \sup_{w\in\mathbb{R}}(1+|w|^3)e^{-\frac{w^{2\beta}}{2}}\left[1 + |w| + 3|w|^2 + 2\beta|w|^{2\beta-1}\right]. \qquad (4.17)$$

Assim, como fizemos nesse Lema da Contração escolhendo $L \geq 2^{\frac{1}{2\beta}}$, poderíamos ter feito o mesmo no Lema 3.1 para que as estimativas obtidas fossem uniformes em L. ∎

4.3 Análise do comportamento assintótico

Para obtermos o comportamento assintótico do PVI (4.1) usaremos as mesmas ideias do caso linear com $\eta = 0$, isto é, vamos decompor o dado inicial em duas parcelas, uma na direção da função f^* dada por

(1.6) e a outra na direção de uma função que será contraída à medida que iterarmos o operador RG, isto é, definimos a função

$$g_k = f_k - A_k f^*,$$

de forma a obter a decomposição descrita acima. Assim, novamente, transforma-se o problema de tomar $t \to \infty$ em iterações de aplicações do operador $R_{L,\eta}$ ao dado inicial, obtendo-se uma sequência de PVI's em tempo fixo. A obtenção do comportamento assintótico da solução do problema inicial (4.1) se dará portanto, com a análise da convergência do operador $R_{L,\eta}$.

Teorema 4.1. *Seja u solução de (4.1), com $\beta \leq 1$, $\eta \in [0,1]$ e dado inicial $f_0 \in \mathcal{B}_3$ e seja f^* definido em (1.6). Então, dado $\delta \in (0,1)$, existem $C = C(\beta) > 0$ e $t_0 = t_0(\beta,\delta) > 1$, tais que*

$$\|t^{\frac{1}{2\beta}} u(\cdot t^{\frac{1}{2\beta}}, t) - Af^*\| \leq \frac{\ln t}{2\beta t^{\frac{(1-\delta)}{2\beta}}} \|f_0\|, \tag{4.18}$$

sendo $A = \hat{f}_0(0)$, para todo $t > t_0$.

Prova: Considere o PVI (4.1) e defina $g_0 = f_0 - \hat{f}_0(0) f^*$. Então,

$$\|g_0\| \leq \|f_0\| + \|f^*\| \|f_0\| \leq (1 + \overline{C}_\beta) \|f_0\|,$$

sendo $\overline{C}_\beta$ dada por (3.16).

Aplicando o operador, definido em (4.8), ao dado inicial, temos

$$R_{L,\eta_0} f_0 = \hat{f}_0(0) R_{L,\eta_0} f^* + R_{L,\eta_0} g_0 = \hat{f}_0(0) f^* + \hat{f}_0(0)(R_{L,\eta_0} f^* - f^*) + R_{L,\eta_0} g_0.$$

Definindo $f_1 = R_{L,\eta_0} f_0$ e $g_1 = \hat{f}_0(0)(R_{L,\eta_0} f^* - f^*) + R_{L,\eta_0} g_0$, obtemos a decomposição

$$f_1 = \hat{f}_0(0) f^* + g_1.$$

Além disso,

$$\|g_1\| \leq |\hat{f}_0(0)| \|R_{L,\eta_0} f^* - f^*\| + \|R_{L,\eta_0} g_0\|.$$

Observe que, $\hat{g}_0(0) = \hat{f}_0(0) - \hat{f}_0(0) f^*(0) = 0$. Logo, usando os Lemas 4.1 e 4.3

$$\|g_1\| \leq \frac{C_\beta}{L} \|f_0\| + \frac{C}{L} \|g_0\| \leq \frac{C_\beta}{L} \|f_0\| + \frac{C(1 + \overline{C}_\beta)}{L} \|f_0\| \leq \frac{C_1}{L} \|f_0\|,$$

sendo $C_1 = \max\{1, C_\beta + C(1 + \overline{C}_\beta)\}$.

Novamente aplicamos o operador, agora à função f_1, obtendo:

$$R_{L,\eta_1} f_1 = \hat{f}_0(0) R_{L,\eta_1} f^* + R_{L,\eta_1} g_1 = \hat{f}_0(0) f^* + \hat{f}_0(0)(R_{L,\eta_1} f^* - f^*) + R_{L,\eta_1} g_1.$$

Definindo $f_2 = R_{L,\eta_1} f_1 = (R_{L,\eta_1} \circ R_{L,\eta_0}) f_0$ e $g_2 = \hat{f}_0(0)(R_{L,\eta_1} f^* - f^*) + R_{L,\eta_1} g_1$, obtemos a decomposição

$$f_2 = \hat{f}_0(0) f^* + g_2.$$

Além disso,

$$\|g_2\| \leq |\hat{f}_0(0)| \|R_{L,\eta_1} f^* - f^*\| + \|R_{L,\eta_1} g_1\|$$

Novamente, note que, $\hat{g}_1(0) = \hat{f}_0(0)(\widehat{R_{L,\eta_0}f}^*(0) - \hat{f}^*(0)) + \widehat{R_{L,\eta_0}g_0}(0) = 0$ e usando novamente os lemas 4.1 e 4.3,

$$\|g_2\| \leq \frac{C_\beta}{L^2}\|f_0\| + \frac{C}{L}\|g_1\| \leq \frac{C_\beta}{L^2}\|f_0\| + \frac{C}{L}\frac{C_1}{L}\|f_0\| \leq 2\left(\frac{C_1}{L}\right)^2\|f_0\|.$$

Provaremos agora por indução que podemos obter decomposições e cotas análogas para $f_k = R_{L,\eta_{k-1}}f_{k-1} = (R_{L,\eta_{k-1}} \circ \cdots \circ R_{L,\eta_0})f_0$, para todo $k = 1, 2, \cdots$, isto é, mostraremos que podemos escrever

$$f_k = \hat{f}_0(0)f^* + g_k, \tag{4.19}$$

em que $g_k = \hat{f}_0(0)(R_{L,\eta_{k-1}}f^* - f^*) + R_{L,\eta_{k-1}}g_{k-1}$ e

$$\|g_k\| \leq k\left(\frac{C_1}{L}\right)^k\|f_0\|. \tag{4.20}$$

Para isso, considere (4.19) e (4.20) válidas para todo $k = 1, 2, \cdots, m$. Mostraremos que valem também para $k = m+1$. Como $f_{m+1} = R_{L,\eta_m}f_m$, temos:

$$f_{m+1} = \hat{f}_0(0)R_{L,\eta_m}f^* + R_{L,\eta_m}g_m,$$

com $g_m = \hat{f}_0(0)(R_{L,\eta_{m-1}}f^* - f^*) + R_{L,\eta_{m-1}}g_{m-1}$ e

$$\|g_m\| \leq m\left(\frac{C_1}{L}\right)^m\|f_0\|.$$

Assim,

$$f_{m+1} \;=\; \hat{f}_0(0)R_{L,\eta_m}f^* + R_{L,\eta_m}g_m = \hat{f}_0(0)f^* + \hat{f}_0(0)(R_{L,\eta_m}f^* - f^*) + R_{L,\eta_m}g_m$$

e, definindo $g_{m+1} = \hat{f}_0(0)(R_{L,\eta_m}f^* - f^*) + R_{L,\eta_m}g_m$, obtemos a decomposição $f_{m+1} = \hat{f}_0(0)f^* + g_{m+1}$.

Além disso, $\hat{g}_m(0) = \hat{f}_0(0)(\widehat{R_{L,\eta_{m-1}}}f^*(0) - \hat{f}^*(0)) + \widehat{R_{L,\eta_{m-1}}}g_{m-1}(0) = 0$. Logo, usando os Lemas 4.1, 4.3 e a hipótese de indução,

$$\begin{aligned}\|g_{m+1}\| \;&\leq\; \frac{C_\beta}{L^{m+1}}\|f_0\| + \frac{C}{L}\|g_m\| \leq \frac{C_\beta}{L^{m+1}}\|f_0\| + m\frac{C}{L}\left(\frac{C_1}{L}\right)^m\|f_0\| \\ &\leq\; \frac{C_1^{m+1}}{L^{m+1}}\|f_0\| + m\frac{C_1}{L}\left(\frac{C_1}{L}\right)^m\|f_0\| \leq (m+1)\left(\frac{C_1}{L}\right)^{m+1}\|f_0\|,\end{aligned}$$

o que finaliza a indução. De (4.19), (4.20) e fazendo $A = \hat{f}_0(0)$, obtemos portanto,

$$\|f_k - Af^*\| \leq k \cdot \left(\frac{C_1}{L}\right)^k\|f_0\|.$$

Agora, se u é solução de (4.1), então de (4.6) temos $u_k(x,1) = Lu_{k-1}(Lx, L^{2\beta}) = L^k u(L^k x, L^{2k\beta}) \equiv f_k(x)$, e assim,

$$\|L^k u(L^k\cdot, L^{2k\beta}) - Af^*\| \leq k \cdot \left(\frac{C_1}{L}\right)^k\|f_0\|, \forall k \in \mathbb{N}. \tag{4.21}$$

Assim, tomando $t = L^{2k\beta}$, obtemos que a solução devidamente reescalonada do PVI (4.1) se comporta, assintoticamente, como um múltiplo de f^*. Estenderemos esse resultado agora para $L^{2\beta k} < t < L^{2\beta(k+1)}$, bem como obteremos a taxa com que a solução se aproxima de Af^*.

Para isso, dado $\delta \in (0,1)$, tome $L_1 > \overline{L}_0$ sendo $\overline{L}_0 > e$ tal que $L_1^\delta > C_1$. Agora, se $t^{\frac{1}{2\beta}} > L_1$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $L_1^{k_0} \leq t^{\frac{1}{2\beta}} \leq L_1^{k_0+1}$, ou seja, $L_1^{2\beta k_0} \leq t \leq L_1^{2\beta(k_0+1)}$. Assim, existe $\tau \in [1, L^{2\beta}]$ tal que $t = \tau L_1^{2\beta k_0}$.

Agora, seja L_2 tal que $L_2^{k_0} = \tau^{\frac{1}{2\beta}} L_1^{k_0}$. Logo, $L_2 \geq L_1 \geq \overline{L}_0$, $C_1 \leq L_1^\delta \leq L_2^\delta$ e

$$\left(\frac{C_1}{L_2}\right)^{k_0} = \left(\frac{C_1}{L_2^\delta}\right)^{k_0} \cdot \frac{1}{L_2^{k_0(1-\delta)}} \leq \frac{1}{L_2^{k_0(1-\delta)}}.$$

Como (4.21) é válida para todo $L > \overline{L}_0$ e para todo $k \in \mathbb{N}$, temos

$$\|L_2^{k_0} u(L_2^{k_0}\cdot, L_2^{2k_0\beta}) - Af^*\| \leq k_0 \cdot \left(\frac{C_1}{L_2}\right)^{k_0} \|f_0\| \leq \frac{k_0}{L_2^{k_0(1-\delta)}} \|f_0\|.$$

Logo,

$$\|\tau^{\frac{1}{2\beta}} L_1^{k_0} u(\tau^{\frac{1}{2\beta}} L_1^{k_0}\cdot, \tau L_1^{2k_0\beta}) - Af^*\| \leq \frac{k_0}{(\tau^{\frac{1}{2\beta}} L_1^{k_0})^{(1-\delta)}} \|f_0\|.$$

Como $L_1^{k_0} \leq t^{\frac{1}{2\beta}}$ e $L_1 > e$, temos

$$k_0 \leq \frac{1}{2\beta} \ln t.$$

Além disso, como $t = \tau L_1^{2\beta k_0}$, obtemos

$$\|t^{\frac{1}{2\beta}} u(t^{\frac{1}{2\beta}}\cdot, t) - Af^*\| \leq \frac{\ln t}{2\beta t^{\frac{(1-\delta)}{2\beta}}} \|f_0\|,$$

o que finaliza a demonstração. ∎

Observe que, quando fazemos $t \to \infty$ o termo $\frac{1}{t^{\frac{(1-\delta)}{2\beta}}}$ decai para 0 muito mais rápido do que $\ln t \to \infty$. Logo,

$$\lim_{t\to\infty} \|t^{\frac{1}{2\beta}} u(t^{\frac{1}{2\beta}} x, t) - \hat{f}(0) f^*(x)\| = 0.$$

Capítulo 5

O Grupo de Renormalização Aplicado à Equação Não Linear

Nesse capítulo obteremos, através do método do Grupo de Renormalização, o comportamento assintótico da solução do problema de valor inicial (1.1). Uma pergunta natural que surge é se, ao acrescentarmos a pertubação $u^p u_x$, com $p \geq 2$, na equação (4.1) é possível obter um comportamento similar aos casos lineares tratados nos capítulos anteriores. Veremos que a resposta é positiva, como mostra o teorema abaixo, que é o resultado mais importante desse trabalho. Além disso, veremos que obtenção do comportamento para tempos longos difere apenas pelo pré-fator A, que nesse caso, será obtido como o limite de uma determinada sequência.

Teorema 5.1. *Considere o PVI (1.1) e sejam $\frac{3}{4} < \beta \leq 1$, $p \geq 2$ e f^* a função dada por (1.6). Então, dado $\delta \in (0,1)$, para cada $L > L_\delta$ existe $\overline{\varepsilon} = \overline{\varepsilon}(L, p, \delta) > 0$ tal que, se $\|f\| < \overline{\varepsilon}$ o PVI (1.1) tem uma única solução u para todo $t > 1$. Além disso, existe uma constante $A = A(f, p)$ tal que se $\|f\| < \overline{\varepsilon}$ e $t > L_\delta^{2\beta}$ então:*

$$\lim_{t \to \infty} \|u(\cdot t^{\frac{1}{2\beta}}, t) - At^{-\frac{1}{2\beta}} f^*(\cdot)\| = 0 \tag{5.1}$$

onde

$$L_\delta = \max\{2^{\frac{1}{2\beta}}, [2C(1 + \overline{C}_\beta)]^{\frac{1}{\delta}}\},$$

sendo C dada no Lema da contração 4.3 e $\overline{C}_\beta$ a constante definida no Lema 3.2.

Para provarmos esse teorema seguiremos os mesmos passos descritos na Seção 3.3, isto é, reescanolamos a solução do PVI (1.1), obtendo um novo dado inicial, que será utilizado no segundo problema. Esse é rescalonado, gerando mais um dado inicial, que será utilizado no terceiro problema. Esse procedimento é iterado e com isso obtém-se uma sequência de equações e dados iniciais, cuja convergência desses últimos indicará o comportamento assintótico desejado da solução de (1.1).

5.1 Existência e unicidade da solução local

Nesta seção, através do Teorema do ponto fixo para contrações, apresentaremos a prova da existência e unicidade de soluções do problema de valor inicial (1.1). Inicialmente é importante especificar o espaço de Banach onde tomaremos o nosso dado inicial pois nele provaremos a existência e unicidade.

Considere o problema (1.1). Temos que em $\mathcal{B}_3$, munido da norma

$$\|f\| = \sup_{w\in\mathbb{R}}(1+|w|^3)\left[|\hat{f}(w)| + |\hat{f}'(w)|\right],$$

é um espaço de Banach (veja Seção 2.2). Dado $L > 1$ e a partir do espaço $\mathcal{B}_3$, definimos o espaço

$$C(1, L^{2\beta}; \mathcal{B}_3) \equiv \{u(x,t) : u(\cdot,t) \in \mathcal{B}_3, \forall t \in [1, L^{2\beta}]\} \tag{5.2}$$

com a norma

$$\|u\|_L = \sup_{t\in[1,L^{2\beta}]} \|u(\cdot,t)\|. \tag{5.3}$$

O espaço $C(1, L^{2\beta}; \mathcal{B}_3)$ também é um espaço de Banach (veja Proposição 2.3) e é de suma importância para a prova da existência e unicidade da solução do PVI (1.1).

Considere o operador $T : C(1, L^{2\beta}; \mathcal{B}_3) \to C(1, L^{2\beta}; \mathcal{B}_3)$ definido por

$$T(u) = u_f(x,t) + \rho N(u)(x,t), \tag{5.4}$$

sendo u_f a solução do caso linear com termo dispersivo dado por

$$u_f(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(|w|^{2\beta} - i\eta w^3)(t-1)} e^{iwx} \widehat{f}(w)dw$$

e $N(u)$ dado por:

$$N(u)(x,t) = \int_1^t S(t-s+1)u^p(x,s)u_x(x,s)ds = \int_0^{t-1} S(\tau+1)u^p(x,t-\tau)u_x(x,t-\tau)d\tau, \tag{5.5}$$

em que,

$$S(t)f = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(|w|^{2\beta} - i\eta w^3)(t-1)} e^{iwx} \widehat{f}(w)dw. \tag{5.6}$$

Então definimos a bola $B^f \subset C(1, L^{2\beta}; \mathcal{B}_3)$ por:

$$B^f \equiv \{u \in C(1, L^{2\beta}; \mathcal{B}_3) : \|u - u_f\|_L \leq \|f\|\}. \tag{5.7}$$

Mostraremos que, dado $L > 1$ é possível obter um número positivo $\varepsilon > 0$ tal que: se o dado inicial f satisfaz $\|f\| \leq \varepsilon$, então o operador T é uma contração em B^f e T mapeia a bola B^f nela mesma, o que é equivalente a provar o seguinte teorema:

Teorema 5.2. *Dados $L > 1$, $p \geq 2$ e $\rho \in [0,1]$, com $p \in \mathbb{N}$, existe $\varepsilon = \varepsilon(L,p) > 0$ tal que, se $f \in \mathcal{B}_3$ e $\|f\| < \varepsilon$, então o problema de valor inicial (1.1) tem uma única solução em B^f.*

Para provarmos o Teorema 5.2 precisaremos dos seguintes resultados:

Lema 5.1. *Dados $L > 1$ e $p \geq 2$, com $p \in \mathbb{N}$, existe $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(L,p) > 0$ tal que, se $f \in \mathcal{B}_3$ e $\|f\| < \varepsilon_1$, então $\|N(u)\|_L \leq \|f\|$.*

Lema 5.2. *Sob as hipóteses do lema anterior, existe $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(L,p) > 0$ tal que , se $f \in \mathcal{B}_3$ e $\|f\| < \varepsilon_2$, então $\|N(u) - N(v)\|_L \leq \frac{1}{2}\|u - v\|_L$ para todo $u, v \in B^f$.*

5.1.1 Resultados preliminares

Precisamos de alguns resultados preliminares que nos serão úteis para provar os Lemas 5.1 e 5.2.

Lema 5.3. *Sejam $f \in \mathcal{B}_3$ e u_f solução do problema (4.1) com dado inicial f. Então*

$$\|u_f\|_L \leq C_L \|f\|,$$

sendo $C_L = 7 + 5(L^{2\beta} - 1)$.

Prova: Pela definição da norma em $\mathcal{B}_3$,

$$\|u_f(\cdot, t)\| = \sup_{w \in \mathbb{R}} (1 + |w|^3) \left[|\widehat{u_f}(w, t)| + |\widehat{u_f}'(w, t)| \right].$$

Como u_f é solução do problema (4.1) com dado inicial f temos:

$$\widehat{u}_f(w, t) = \hat{f}(w) e^{-(|w|^{2\beta} - i\eta w^3)(t-1)}.$$

Derivando a equação acima,

$$\widehat{u_f}'(w, t) = \hat{f}'(w) e^{-(|w|^{2\beta} - i\eta w^3)(t-1)} - (2\beta w^{2\beta-1} - 3i\eta w^2)(t-1)\hat{f}(w) e^{-(|w|^{2\beta} - i\eta w^3)(t-1)}. \tag{5.8}$$

Usando, para todo $t > 1$, que $|e^{-(|w|^{2\beta} - i\eta w^3)(t-1)}| \leq 1$, temos:

$$|\widehat{u_f}(w, t)| \leq |\hat{f}(w)| \tag{5.9}$$

e

$$|\widehat{u_f}'(w, t)| \leq |\hat{f}'(w)| + |\hat{f}(w)||(2\beta|w|^{2\beta-1} - 3i\eta w^2)(t-1) e^{-(|w|^{2\beta} - i\eta w^3)(t-1)}|.$$

Vamos analisar dois casos para (5.8):

Se $|w| \leq 1$ então $|w|^{2\beta-1} \leq 1$, $|w|^2 \leq 1$ e $|e^{-(|w|^{2\beta} - i\eta w^3)(t-1)}| \leq 1$. Logo,

$$|\widehat{u_f}'(w, t)| \leq |\hat{f}'(w)| + |\hat{f}(w)|(t-1)|2\beta + 3i\eta| \leq |\hat{f}'(w)| + 5|\hat{f}(w)|(t-1). \tag{5.10}$$

Se $|w| \geq 1$, como $\frac{3}{4} < \beta \leq 1$ então $|w|^{2\beta-1} \leq |w|^{2\beta}$. Logo,

$$\begin{aligned} |\widehat{u_f}'(w, t)| &\leq |\hat{f}'(w)| + |\hat{f}(w)||(2\beta|w|^{2\beta-1} - 3i\eta w^2)(t-1) e^{-(|w|^{2\beta} - i\eta w^3)(t-1)}| \\ &\leq |\hat{f}'(w)| + 3|\hat{f}(w)||(|w|^{2\beta} - i\eta w^2)(t-1)||e^{-(|w|^{2\beta} - i\eta w^3)(t-1)}|. \end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned} |(|w|^{2\beta} - i\eta w^2)(t-1) e^{-(|w|^{2\beta} - i\eta w^3)(t-1)}| &\leq [|w|^{2\beta}(t-1) + w^2(t-1)] e^{-|w|^{2\beta}(t-1)} \\ &\leq 1 + w^2(t-1) e^{-|w|^{\frac{3}{2}}(t-1)} \\ &\leq 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

Logo, para $|w| \geq 1$ obtemos:

$$|\widehat{u_f}'(w, t)| \leq |\hat{f}'(w)| + 6|\hat{f}(w)| \tag{5.11}$$

Somando as estimativas (5.10) e (5.11) obtemos para todo $w \in \mathbb{R}$,

$$|\widehat{u_f}'(w,t)| \leq 2|\hat{f}'(w)| + [6 + 5(t-1)]|\hat{f}(w)|.$$

Assim, da desigualdade acima e de (5.9) para todo $w \in \mathbb{R}$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\|u_f(\cdot,t)\| &= \sup_{w\in\mathbb{R}}(1+|w|^3)\left[|\widehat{u_f}(w,t)| + |\widehat{u_f}'(w,t)|\right] \\
&\leq \sup_{w\in\mathbb{R}}(1+|w|^3)\left[|\hat{f}(w)| + 2|\hat{f}'(w)| + [6+5(t-1)]|\hat{f}(w)|\right] \\
&\leq [7+5(t-1)]\sup_{w\in\mathbb{R}}(1+|w|^3)\left[|\hat{f}(w)| + |\hat{f}'(w)|\right] \\
&\leq [7+5(t-1)]\|f\|.
\end{aligned}$$

Tomando o supremo em t, $t \in [1, L^{2\beta}]$, obtêm-se o resultado desejado.

∎

Lema 5.4. *Se $u \in C(1, L^{2\beta}; \mathcal{B}_3)$ e existem $\hat{u}(w,t)$ e $\hat{u}_x(w,t)$ então para todo $w \in \mathbb{R}$, $t > 1$ e $l = 0, 1$*

$$|\widehat{D^l u}(w,t)| \leq \frac{2\|u\|_L}{1+w^2}, \tag{5.12}$$

em que $D^l u$ representa a l-ésima derivada parcial de $u(x,t)$ com respeito a x.

Prova: Da definição da norma em $\mathcal{B}_3$ e de (5.3), temos para todo $t \in [1, L^{2\beta}]$:

$$\|u\|_L = \sup_{t\in[1,L^{2\beta}]}\|u(\cdot,t)\| \geq (1+|w|^3)|\hat{u}(w,t)| \quad \Rightarrow \quad |\hat{u}(w,t)| \leq \frac{\|u\|_L}{1+|w|^3}.$$

Se $|w| \geq 1$ temos $\frac{1}{1+|w|^3} \leq \frac{1}{1+|w|^2}$ e se $|w| \leq 1$ então $1 + w^2 \leq 2 \;\; \Rightarrow \;\; 1 \leq \frac{2}{1+w^2}$.

Logo, para todo $w \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{1+|w|^3} \leq \frac{2}{1+w^2}.$$

Assim, para todo $t \in [1, L^{2\beta}]$ e $w \in \mathbb{R}$

$$|\widehat{u}(w,t)| \leq \frac{2\|u\|_L}{1+w^2},$$

o que prova o resultado para $l = 0$.

Agora, para $l = 1$ basta observar que, pelo Teorema 2.2 com $n = 0$ e $m = 1$,

$$\widehat{u}_x(w,t) = iw\hat{u}(w,t) \quad \Rightarrow \quad |\widehat{u}_x(w,t)| \leq \frac{|w|\|u\|_L}{1+|w|^3}$$

.

Se $|w| \leq 1$ então $|w| + |w|^3 \leq 2 \leq 2(1+|w|^3) \quad \Rightarrow \quad \frac{|w|}{1+|w|^3} \leq \frac{2}{1+w^2}$.

Se $|w| \geq 1$ então $|w| + |w|^3 \leq 2|w|^3 \leq 2(1+|w|^3) \quad \Rightarrow \quad \frac{|w|}{1+|w|^3} \leq \frac{2}{1+w^2}$.

Assim, obtemos para todo w:

$$\frac{|w|}{1+|w|^3} \leq \frac{2}{1+w^2}.$$

Portanto, para todo $t \in [1, L^{2\beta}]$ e $l = 0, 1$,

$$|\widehat{D^l u}(w,t)| \leq \frac{2\|u\|_L}{1+w^2}.$$

∎

Lema 5.5. *Sejam $q > 1$ e $w \in \mathbb{R}$, então:*

$$I(w) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+|x|^q} \cdot \frac{1}{1+|x-w|^q} dx \leq \frac{\overline{C_q}}{1+|w|^q},$$

sendo $\overline{C_q} = (2^{q+1}+3) \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+|x|^q} dx$.

Prova: Se $|w| \leq 1$ então $1 \leq \frac{2}{1+|w|^q}$. Além disso, $\sup\limits_{w \in \mathbb{R}} \dfrac{1}{1+|x-w|^q} \leq 1$. Portanto, para $|w| \leq 1$:

$$I(w) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+|x|^q} \cdot \frac{1}{1+|x-w|^q} dx \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+|x|^q} dx \leq \frac{2}{1+|w|^q} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+|x|^q} dx = \frac{C^*}{1+|w|^q},$$

onde $C^* = 2 \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+|x|^q}$.

Suponhamos agora $|w| > 1$. É suficiente tomar $w > 1$, visto que $I(w)$ é uma função par. De fato, usando uma mudança de variáveis, obtemos:

$$I(w) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+|-x|^q} \cdot \frac{1}{1+|-x-w|^q} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+|x|^q} \cdot \frac{1}{1+|x+w|^q} dx = I(-w).$$

Assim, para $w > 1$, reescrevemos a integral $I(w)$ como soma de três parcelas e estimamos cada parcela separadamente:

$$I(w) = \left(\int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{\frac{w}{2}} + \int_{\frac{w}{2}}^{\infty} \right) \cdot \frac{1}{1+|x|^q} \cdot \frac{1}{1+|x-w|^q} dx.$$

Analisando a primeira integral, para $x < 0$, como $w > 1$, temos que $|x-w|^q \geq |-w|^q$:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+|x|^q} \cdot \frac{1}{1+|x-w|^q} dx \leq \frac{1}{1+|-w|^q} \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+|x|^q} dx \leq \frac{1}{1+|w|^q} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+|x|^q} dx.$$

Analisando a terceira integral:

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{w}{2}}^{\infty} \frac{1}{1+|x|^q} \cdot \frac{1}{1+|x-w|^q} dx &\leq \frac{1}{1+|\frac{w}{2}|^q} \int_{\frac{w}{2}}^{\infty} \frac{1}{1+|x-w|^q} dx \\
&\leq \frac{2^q}{2^q+|w|^q} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+|x-w|^q} dx \\
&\leq \frac{2^q}{2^q+|w|^q} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+|y|^q} dy.
\end{aligned}$$

onde $y = x - w$.

Analisando a segunda integral:

$$
\begin{aligned}
(1+|x|^q)(1+|x-w|^q) &\geq (1+|x|^q)\left(1+\left|\frac{w}{2}\right|^q\right)\\
&\geq (1+|x|^q)\left(1+\frac{w^q}{2^q}\right)\\
&= (1+|x|^q)\left(\frac{2^q+w^q}{2^q}\right)\\
&\geq (1+|x|^q)\left(\frac{1+w^q}{2^q}\right).
\end{aligned}
$$

Então,

$$\int_0^{\frac{w}{2}} \frac{1}{1+|x|^q}\cdot\frac{1}{1+|x-w|^q}dx \leq \frac{2^q}{1+|w|^q}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+|x|^q}dx.$$

Somando as estimativas obtidas para cada integral, encontramos:

$$\overline{C_q} = (2^{q+1}+3)\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+|x|^q}dx.$$

e o lema está provado.

∎

Lema 5.6. *Seja $p \geq 1$ um inteiro. Então existem constantes C_1 e C_2 dependentes somente de p tais que para todo $w \in \mathbb{R}$ temos*

$$|\widehat{u^{p+1}}(w,t)| \leq \frac{C_1}{1+|w|^3}\|u(\cdot,t)\|^{p+1} \tag{5.13}$$

$$\left|\frac{d}{dw}\widehat{u^{p+1}}(w,t)\right| \leq \frac{C_1}{1+|w|^3}\|u(\cdot,t)\|^{p+1} \tag{5.14}$$

$$|\widehat{u^p u_x}(w,t)| \leq \frac{C_2}{1+w^2}\|u(\cdot,t)\|^{p+1} \tag{5.15}$$

$$\left|\frac{d}{dw}\widehat{u^p u_x}(w,t)\right| \leq \frac{C_2}{1+w^2}\|u(\cdot,t)\|^{p+1} \tag{5.16}$$

Prova: Estimativa (5.13).

Pelo Lema 2.5 e pela Definição 2.4, temos:

$$
\begin{aligned}
\widehat{u^{p+1}}(w,t) &= \frac{1}{(2\pi)^p}\left(\hat{u}*\hat{u}*\cdots*\hat{u}\right)\\
&= \frac{1}{(2\pi)^p}\int_{\mathbb{R}^p} \hat{u}(w_p,t)\cdot\hat{u}(w_{p-1}-w_p,t)\cdots\hat{u}(w_1-w_2,t)\cdot\hat{u}(w-w_1,t)dw_p dw_{p-1}\cdots dw_1.
\end{aligned}
$$

Da definição da norma em $\mathcal{B}_3$, segue que, $|\hat{u}(w,t)|, |\widehat{u}'(w,t)| \leq \frac{\|u(\cdot,t)\|}{1+|w|^3}$.

Assim, usando o Lema 5.5 e a desigualdade acima, obtemos:

$$\begin{aligned}
|\widehat{u^{p+1}}(w,t)| &\leq \frac{1}{(2\pi)^p}\int_{\mathbb{R}^p} \frac{\|u(\cdot,t)\|}{1+|w_p|^3}\cdot\frac{\|u(\cdot,t)\|}{1+|w_{p-1}-w_p|^3}\cdots\frac{\|u(\cdot,t)\|}{1+|w_1-w_2|^3}\cdot\frac{\|u(\cdot,t)\|}{1+|w-w_1|^3}dw_p dw_{p-1}\cdots dw_1\\
&\leq \frac{\|u(\cdot,t)\|^{p+1}}{(2\pi)^p}\int_{\mathbb{R}^p} \frac{1}{1+|w_p|^3}\cdot\frac{1}{1+|w_{p-1}-w_p|^3}\cdots\frac{1}{1+|w_1-w_2|^3}\cdot\frac{1}{1+|w-w_1|^3}dw_p dw_{p-1}\cdots dw_1\\
&\leq \frac{C_1}{1+|w|^3}\|u(\cdot,t)\|^{p+1},
\end{aligned}$$

sendo $C_1 = \left(\frac{\overline{C_3}}{2\pi}\right)^p$ e $\overline{C_3}$ a constante definida no Lema 5.5, com $q=3$.

Prova: Estimativa (5.14).

Usando as mesmas ideias da estimativa anterior, obtemos:

$$\left|\frac{d}{dw}\widehat{u^{p+1}}(w,t)\right| \leq \frac{1}{(2\pi)^p}\int_{\mathbb{R}^p} \hat{u}(w_p,t)\cdot\hat{u}(w_{p-1}-w_p,t)\cdots\hat{u}(w_1-w_2,t)\cdot\hat{u}'(w-w_1,t)dw_p dw_{p-1}\cdots dw_1$$

$$\leq \frac{\|u(\cdot,t)\|^{p+1}}{(2\pi)^p}\int_{\mathbb{R}^p} \frac{1}{1+|w_p|^3}\cdot\frac{1}{1+|w_{p-1}-w_p|^3}\cdots\frac{1}{1+|w_1-w_2|^3}\cdot\frac{1}{1+|w-w_1|^3}dw_p dw_{p-1}\cdots dw_1$$

$\leq \frac{C_1}{1+|w|^3}\|u(\cdot,t)\|^{p+1}$, sendo C_1 a constante definida na desigualdade acima.

Prova: Estimativa (5.15).

Considerando a Definição 2.4 e o Lema 2.5, obtemos $\widehat{u^p u_x}(w,t) = \hat{u}*\hat{u}*\cdots*\widehat{u}_x$, com $p-1$ convoluções de $\hat{u}$ com ela mesma. Assim,

$$\begin{aligned}
\widehat{u^p u_x}(w,t) &= \frac{1}{(2\pi)^p}\int_{\mathbb{R}} \hat{u}(w-w_1,t)(\hat{u}*\cdots*\hat{u}*\widehat{u}_x)(w_1,t)dw_1\\
&= \frac{1}{(2\pi)^p}\int\int \hat{u}(w_1-w_2,t)\hat{u}(w-w_1,t)(\hat{u}*\cdots*\hat{u}*\widehat{u}_x)(w_2,t)dw_2 dw_1\\
&= \frac{1}{(2\pi)^p}\int_{\mathbb{R}^p} \widehat{u}_x(w_p,t)\hat{u}(w_{p-1}-w_p,t)\cdots\hat{u}(w_1-w_2,t)\hat{u}(w-w_1,t)dw_p dw_{p-1}\cdots dw_1.
\end{aligned}$$

Assim, usando o Lema 5.4 e o Lema 5.5, obtemos:

$$\begin{aligned}
|\widehat{u^p u_x}(w,t)| &\leq \frac{1}{(2\pi)^p}\int_{\mathbb{R}^p} \frac{2\|u(\cdot,t)\|}{1+|w_p|^2}\cdot\frac{2\|u(\cdot,t)\|}{1+|w_{p-1}-w_p|^2}\cdots\frac{2\|u(\cdot,t)\|}{1+|w_1-w_2|^2}\cdot\frac{2\|u(\cdot,t)\|}{1+|w-w_1|^2}dw_p dw_{p-1}\cdots dw_1\\
&\leq \frac{2^{p+1}\|f\|^{p+1}}{(2\pi)^p}\int_{\mathbb{R}^p} \frac{1}{1+|w_p|^2}\cdot\frac{1}{1+|w_{p-1}-w_p|^2}\cdots\frac{1}{1+|w-w_1|^2}dw_p dw_{p-1}\cdots dw_1\\
&\leq \frac{C_2}{1+w^2}\|u(\cdot,t)\|^{p+1},
\end{aligned}$$

sendo $C_2 = 2\left(\frac{\overline{C_2}}{\pi}\right)^p$ e $\overline{C_2}$ a constante definida no Lema 5.5, com $q=2$.

Prova: Estimativa (5.16).

Note que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dw}\widehat{u^p u^x}(w,t) &= \frac{d}{dw}\left[\frac{1}{(2\pi)^p}\int_{\mathbb{R}^p}\widehat{u}_x(w_p,t)\hat{u}(w_{p-1}-w_p,t)\cdots\hat{u}(w_1-w_2,t)\hat{u}(w-w_1,t)dw_p dw_{p-1}\cdots dw_1\right]\\
&= \frac{1}{(2\pi)^p}\int_{\mathbb{R}^p}\widehat{u}_x(w_p,t)\hat{u}(w_{p-1}-w_p,t)\cdots\hat{u}(w_1-w_2,t)\hat{u}'(w-w_1,t)dw_p dw_{p-1}\cdots dw_1.
\end{aligned}$$

Considerando os Lema 5.4 e Lema 5.5, obtemos para todo $w\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{d}{dw}\widehat{u^p u^x}(w,t)\right| &\le \frac{1}{(2\pi)^p}\int_{\mathbb{R}^p}\frac{2\|u(\cdot,t)\|}{1+|w_p|^2}\cdot\frac{2\|u(\cdot,t)\|}{1+|w_{p-1}-w_p|^2}\cdots\frac{2\|u(\cdot,t)\|}{1+|w-w_1|^2}dw_p dw_{p-1}\cdots dw_1\\
&\le \frac{2^{p+1}\|u\|^{p+1}}{(2\pi)^p}\int_{\mathbb{R}^p}\frac{1}{1+|w_p|^2}\cdot\frac{1}{1+|w_{p-1}-w_p|^2}\cdots\frac{1}{1+|w-w_1|^2}dw_p dw_{p-1}\cdots dw_1\\
&\le \frac{C_2}{1+w^2}\|u(\cdot,t)\|^{p+1},
\end{aligned}$$

sendo C_2 a constante definida na desigualdade anterior.

∎

Lema 5.7. *Se $t\ge 1$ então*

$$\left|\int_0^{t-1}e^{-s(|w|^{2\beta}-i\eta w^3)}ds\right|\le C_{t,w}=\begin{cases}\frac{1}{|w|^{2\beta}}, & se\ |w|\ge 1\\ t-1, & se\ |w|<1.\end{cases}$$

Prova: Observe inicialmente que

$$\left|\int_0^{t-1}e^{-s(|w|^{2\beta}-i\eta w^3)}ds\right|\le\int_0^{t-1}|e^{-s(|w|^{2\beta}-i\eta w^3)}|ds\le\int_0^{t-1}e^{-s|w|^{2\beta}}ds.$$

Assim, se $|w|\ge 1$, temos, para todo $t\ge 1$,

$$\left|\int_0^{t-1}e^{-s(|w|^{2\beta}-i\eta w^3)}ds\right|\le\frac{1-e^{-(t-1)|w|^{2\beta}}}{|w|^{2\beta}}\le\frac{1}{|w|^{2\beta}}.$$

Se $|w|<1$, então, para todo $t\ge 1$,

$$\left|\int_0^{t-1}e^{-s(|w|^{2\beta}-i\eta w^3)}ds\right|\le\int_0^{t-1}ds=t-1. \tag{5.17}$$

∎

Lema 5.8. *Sejam $C_{t,w}$ a cota superior do lema anterior e $C_t=2t-1$. Então, para todo $t\ge 1$ e $w\in\mathbb{R}$,*

$$\frac{C_{t,w}}{1+w^2}\le\frac{C_t}{1+|w|^3}. \tag{5.18}$$

Prova: Se $|w|\ge 1$, então, usando que $2\beta+2>3$,

$$|w|^{2\beta}+|w|^{2\beta+2}\ge 1+|w|^3 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{|w|^{2\beta}(1+w^2)}\le\frac{1}{1+|w|^3}\quad\Rightarrow\quad\frac{C_{t,w}}{1+w^2}\le\frac{1}{1+|w|^3}.$$

Se $|w|<1$ então

$$1+|w|^3\le 2\le 2(1+w^2)\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{1+w^2}\le\frac{2}{1+|w|^3}\quad\Rightarrow\quad\frac{C_{t,w}}{1+w^2}\le\frac{2t-2}{1+|w|^3}.$$

Somando as cotas acima, obtemos o resultado. ∎

5.1.2 Prova do Lema 5.1

Queremos mostrar que, dados $L > 1$ e $p \geq 2$, com $p \in \mathbb{N}$, existe $\epsilon_1 = \epsilon_1(L,p) > 0$ tal que, se $f \in \mathcal{B}_3$ e $\|f\| < \epsilon_1$, então $\|N(u)\|_L \leq \|f\|$. Para todo $u \in C(1, L^{2\beta}; \mathcal{B}_3)$ definimos a função $N : C(1, L^{2\beta}; \mathcal{B}_3) \to C(1, L^{2\beta}; \mathcal{B}_3)$ por:

$$N(u)(x,t) = \int_1^t S(t-s+1)u^p(x,s)u_x(x,s)ds,$$

sendo

$$S(t)f = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(|w|^{2\beta}-i\eta w^3)(t-1)} e^{iwx} \widehat{f}(w)dw,$$

onde $\hat{f}$ é a Transformada de Fourier de f, definida em (2.2).

Observe que,

$$S(t)f = \mathcal{F}^{-1}\{e^{-(|w|^{2\beta}-i\eta w^3)(t-1)}\hat{f}(w)\},$$

e

$$\widehat{S(t)f} = \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}\{e^{-(|w|^{2\beta}-i\eta w^3)(t-1)}\hat{f}(w)\}] = e^{-(|w|^{2\beta}-i\eta w^3)(t-1)}\hat{f}(w).$$

Além disso,

$$\|N(u)\| = \sup_{w\in\mathbb{R}}(1+|w|^3)\left[|\widehat{N(u)}(w,t)| + |\widehat{N(u)}'(w,t)|\right].$$

Então, tomando a Transformada de Fourier de $N(u)$,

$$\widehat{N(u)}(w,t) = \int_1^t e^{-(|w|^{2\beta}-i\eta w^3)(t-s)}\widehat{u^p u_x}(w,s)ds. \tag{5.19}$$

Usando os Lemas 5.6, 5.7 e 5.8, a equação (5.3) e fazendo as mudanças $\theta(w) = |w|^{2\beta} - i\eta w^3$ e $\tau = t-s$, obtemos para todo $w \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
|\widehat{N(u)}(w,t)| &= \left|\int_1^t e^{-(|w|^{2\beta}-i\eta w^3)(t-s)}\widehat{u^p u_x}(w,s)ds\right| \\
&\leq \int_1^t |e^{-(t-s)\theta(w)}||\widehat{u^p u_x}(w,s)|ds \\
&\leq \int_1^t |e^{-(t-s)\theta(w)}|\left(\frac{C_2}{1+w^2}\right)\|u(\cdot,s)\|^{p+1}ds \\
&\leq \sup_{1\leq s\leq L^{2\beta}}\left(\frac{C_2}{1+w^2}\right)\|u(.,s)\|^{p+1}\int_1^t e^{-(t-s)Re\theta(w)}ds \\
&\leq \|u\|_L^{p+1}\frac{C_2}{1+w^2}\int_0^{t-1} e^{-\tau|w|^{2\beta}}d\tau \\
&\leq \|u\|_L^{p+1}\left(\frac{C_2 C_{t,w}}{1+w^2}\right) \\
&\leq \|u\|_L^{p+1}\left(\frac{C_2(2t-1)}{1+|w|^3}\right).
\end{aligned}$$

Logo,

$$|\widehat{N(u)}(w,t)| \leq \|u\|_L^{p+1}\left(\frac{C_2(2t-1)}{1+|w|^3}\right). \tag{5.20}$$

Portanto,

$$\sup_{w\in\mathbb{R}}(1+|w|^3)|\widehat{N(u)}(w,t)| \leq (2t-1)C_2\|u\|_L^{p+1}, \tag{5.21}$$

sendo C_2 a constante definida no Lema 5.6.

Agora, estimaremos o termo $|\widehat{N(u)}'(w,t)|$. Para isto, precisaremos de resultados semelhantes aos Lemas 5.7 e 5.8 que serão mostrados abaixo.

Lema 5.9. *Se $t \geq 1$ e $\frac{3}{4} < \beta \leq 1$ então*

$$\left|\int_0^{t-1} \frac{d}{dw} e^{-s(|w|^{2\beta}-i\eta w^3)} ds\right| \leq I_{t,w} = \begin{cases} \frac{18}{w}, & se\ |w| \geq 1 \\ 3(t-1)^2, & se\ |w| < 1. \end{cases}$$

Prova: Temos que

$$\left|\int_0^{t-1} \frac{d}{dw} e^{-s(|w|^{2\beta}-i\eta w^3)} ds\right| = |2\beta|w|^{2\beta-1} - 3i\eta w^2| \left|\int_0^{t-1} s e^{-s|w|^{2\beta}}\, ds\right|.$$

Note que se $|w| \neq 0$ e usando que $\beta < \frac{3}{2}$ e $\eta \leq 1$, temos:

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^{t-1} \frac{d}{dw} e^{-s(|w|^{2\beta}-i\eta w^3)} ds\right| &= |2\beta|w|^{2\beta-1} - 3i\eta w^2 \left|\int_0^{t-1} s e^{-s|w|^{2\beta}} ds\right| \\
&\leq 3|w|^{2\beta-1}(1+\eta|w|^{3-2\beta}) \left|\left[s\left(\frac{-e^{-s|w|^{2\beta}}}{|w|^{2\beta}}\right)\Big|_0^{t-1} - \int_0^{t-1} \left(-\frac{1}{|w|^{2\beta}} e^{-s|w|^{2\beta}}\, ds\right)\right]\right| \\
&\leq 3|w|^{2\beta-1}(1+\eta|w|^{3-2\beta}) \left|\left[s\left(\frac{-e^{-s|w|^{2\beta}}}{|w|^{2\beta}}\right)\Big|_0^{t-1} - \left(\frac{1}{|w|^{4\beta}} e^{-s|w|^{2\beta}}\right)\Big|_0^{t-1}\right]\right| \\
&\leq 3(1+|w|^{3-2\beta})|w|^{2\beta-1} \left|\left[-(t-1)\frac{e^{-(t-1)|w|^{2\beta}}}{|w|^{2\beta}} - \frac{1}{|w|^{4\beta}} e^{-(t-1)|w|^{2\beta}} + \frac{1}{|w|^{4\beta}}\right]\right| \\
&= 3(1+|w|^{3-2\beta}) \left|\left[\frac{1}{|w|}\left(-(t-1)e^{-(t-1)|w|^{2\beta}} - \frac{1}{|w|^{2\beta}} e^{-(t-1)|w|^{2\beta}} + \frac{1}{|w|^{2\beta}}\right)\right]\right| \\
&= 3(1+|w|^{3-2\beta}) \left|\left[-\frac{1}{|w|}\left(e^{-(t-1)|w|^{2\beta}}\left(\frac{|w|^{2\beta}(t-1)+1}{|w|^{2\beta}}\right) - \frac{1}{|w|^{2\beta}}\right)\right]\right|.
\end{aligned}$$

E, se $|w| = 0$,

$$\left|\int_0^{t-1} s ds\right| = \frac{(t-1)^2}{2} \leq 3(t-1)^2.$$

Agora, se $|w| \geq 1$ e usando que $\frac{3}{4} < \beta \leq 1$, então podemos estimar o termo $3(1 + |w|^{3-2\beta}) \left|\frac{1+e^{-(t-1)|w|^{2\beta}}\left[|w|^{2\beta}(t-1)+1\right]}{|w|^{2\beta+1}}\right|$ superiormente por

$$\begin{aligned}
3(|w|^{3-2\beta}+|w|^{3-2\beta})\left(\left|\frac{1}{|w|^{2\beta+1}}\right| + \left|\frac{e^{-(t-1)|w|^{2\beta}}\left[|w|^{2\beta}(t-1)+1\right]}{|w|^{2\beta+1}}\right|\right) &\leq 3(|w|^{3-2\beta}+|w|^{3-2\beta}) \cdot \frac{3}{|w|^{2\beta+1}} \\
&\leq \frac{18|w|^{3-2\beta}}{|w|^{2\beta+1}} \leq 18|w|^{2-4\beta} \leq \frac{18}{|w|}.
\end{aligned}$$

Se $|w| < 1$ e $|w| \neq 0|$, colocando $\frac{1}{|w|^{2\beta+1}}$ e $e^{-(t-1)|w|^{2\beta}}$ em evidência e expandindo a exponencial, obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{e^{-(t-1)|w|^{2\beta}}}{|w|^{2\beta+1}}\left[-(|w|^{2\beta}(t-1)+1)+\frac{1}{e^{-(t-1)|w|^{2\beta}}}\right] &= \frac{e^{-(t-1)|w|^{2\beta}}}{|w|^{2\beta+1}}\left[e^{(t-1)|w|^{2\beta}}-\left(1+(t-1)|w|^{2\beta}\right)\right] \\
&= \frac{e^{-(t-1)|w|^{2\beta}}}{|w|^{2\beta+1}}\left[\sum_{n\geq 2}\frac{(|w|^{2\beta}(t-1))^n}{n!}\right] \\
&\leq \frac{e^{-(t-1)|w|^{2\beta}}}{|w|^{2\beta+1}}.\frac{\left[|w|^{2\beta}(t-1)\right]^2}{2!}e^{(t-1)|w|^{2\beta}} \\
&= \frac{|w|^{2\beta-1}(t-1)^2}{2!} \leq \frac{(t-1)^2}{2}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$3(1+|w|^{3-2\beta})\left|\frac{1-e^{-(t-1)w^{2\beta}}\left[|w|^{2\beta}(t-1)+1\right]}{|w|^{2\beta+1}}\right| \leq 3(t-1)^2.$$

Combinando as cotas $|w| \geq 1$ e $|w| < 1$ obtêm-se o resultado desejado.

∎

Lema 5.10. *Sejam $I_{t,w}$ a cota superior do lema anterior e $F_t = 6[3+(t-1)^2]$. Então, para todo $t \geq 1$ e $w \in \mathbb{R}$,*

$$\frac{I_{t,w}}{1+w^2} \leq \frac{F_t}{1+|w|^3}. \tag{5.22}$$

Prova: Se $|w| \geq 1$,

$$|w|(1+w^2) \geq 1+|w|^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{|w|(1+w^2)} \leq \frac{1}{1+|w|^3} \quad \Rightarrow \quad \frac{I_{t,w}}{1+w^2} \leq \frac{18}{1+|w|^3}.$$

Se $|w| < 1$ então

$$1+|w|^3 \leq 2 \leq 2(1+w^2) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1+w^2} \leq \frac{2}{1+|w|^3} \quad \Rightarrow \quad \frac{I_{t,w}}{1+w^2} \leq \frac{6(t-1)^2}{1+|w|^3}.$$

Somando as estimativas anteriores obtemos o resultado. ∎

Usando os Lemas 5.6, 5.7, 5.8, 5.9 e 5.10 e fazendo a mudança $\tau = t-s$, obtemos para todo $w \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
|\widehat{N(u)}'(w,t)| &= \left|\frac{d}{dw}\int_1^t e^{-(|w|^{2\beta}-i\eta w^3)(t-s)}\widehat{u^p u_x}(w,s)ds\right| \\
&= \left|\int_1^t\left[\frac{d}{dw}(e^{-(|w|^{2\beta}-i\eta w^3)(t-s)})\widehat{u^p u_x}(w,s)+e^{-(|w|^{2\beta}-i\eta w^3)(t-s)}\frac{d}{dw}(\widehat{u^p u_x})(w,s)\right]ds\right| \\
&\leq \left|\int_1^t\frac{d}{dw}e^{-(|w|^{2\beta}-i\eta w^3)(t-s)}\widehat{u^p u_x}(w,s)ds\right|+\int_1^t|e^{-(|w|^{2\beta}-i\eta w^3)(t-s)}|\left|\frac{d}{dw}(\widehat{u^p u_x})(w,s)\right|ds \\
&\leq \|u\|_L^{p+1}\frac{C_2}{1+w^2}\left|\int_0^{t-1}\frac{d}{dw}e^{-(|w|^{2\beta}-i\eta w^3)\tau}d\tau\right|+\|u\|_L^{p+1}\frac{C_2}{1+w^2}\int_0^{t-1}e^{-|w|^{2\beta}\tau}d\tau \\
&\leq \|u\|_L^{p+1}C_2\left(\frac{I_{w,t}}{1+w^2}+\frac{C_{t,w}}{1+w^2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \|u\|_L^{p+1} C_2 \left(\frac{F_t}{1+|w|^3} + \frac{C_t}{1+|w|^3} \right) \\ &= \|u\|_L^{p+1} C_2 \left(\frac{18+6(t-1)^2}{1+|w|^3} + \frac{2t-1}{1+|w|^3} \right). \end{aligned}$$

Logo,

$$|\widehat{N(u)}'(w,t)| \leq \|u\|_L^{p+1} C_2 \left(\frac{18+6(t-1)^2}{1+|w|^3} + \frac{2t-1}{1+|w|^3} \right). \tag{5.23}$$

Assim,

$$\sup_{w\in\mathbb{R}} (1+|w|^3)|\widehat{N'(u)}(w,t)| \leq [17+6(t-1)^2+2t] C_2 \|u\|_L^{p+1}. \tag{5.24}$$

Portanto, somando as estimativas (5.21) e (5.24), e tomando o supremo em $t \in [1, L^{2\beta}]$, obtemos:

$$\|N(u)\|_L \leq (16+6(L^{2\beta}-1)^2+4L^{2\beta}) C_2 \|u\|_L^{p+1}, \tag{5.25}$$

sendo C_2 a constante definida no Lema 5.6.

Para finalizar o argumento e mostrar que T mapeia a bola B^f, definida em (5.7), nela mesma precisamos que a cota para $\|N(u)\|_L$ dependa da norma do dado inicial. Note que, para todo $u \in \mathcal{B}^f$ e pelo Lema 5.3, as normas de u e f se relacionam por

$$\|u\|_L = \|u-u_f+u_f\|_L \leq \|u-u_f\|_L + \|u_f\|_L \leq \|f\| + C_L\|f\| = (1+C_L)\|f\|, \tag{5.26}$$

sendo C_L a constante dada no Lema 5.3.

Usando a desigualdade acima, tomando $\|f\|$ tal que $\|u\|_L \leq 1$ e considerando $p \geq 1$ temos $\|u\|_L^{p+1} \leq \|u\|_L^2$. Assim,

$$\begin{aligned} \|N(u)\|_L &\leq (16+6(L^{2\beta}-1)^2+4L^{2\beta}) C_2 \|u\|_L^{p+1} \\ &\leq (16+6(L^{2\beta}-1)^2+4L^{2\beta}) C_2 \|u\|_L^2 \\ &\leq (16+6(L^{2\beta}-1)^2+4L^{2\beta}) (1+C_L)^2 C_2 \|f\|^2, \end{aligned}$$

sendo C_2 a constante definida no Lema 5.6. Logo,

$$\|N(u)\|_L \leq C_{L,p}\|f\|^2, \tag{5.27}$$

sendo

$$C_{L,p} = (16+6(L^{2\beta}-1)^2+4L^{2\beta})(1+C_L)^2 C_2. \tag{5.28}$$

A condição $\|u\|_L \leq 1$ é satisfeita desde que tomemos f tal que $\|f\| < (1+C_L)^{-1}$. Assim, seja

$$\varepsilon_1 \equiv \min\left\{ \frac{1}{1+C_L}, \frac{1}{C_{L,p}} \right\}. \tag{5.29}$$

Então, se $\|f\| < \varepsilon_1$, obtemos $\|N(u)\|_L \leq \|f\|$.

∎

5.1.3 Prova do Lema 5.2

Provaremos que, dados $L > 1$ e $p \geq 2$, com $p \in \mathbb{N}$, existe $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(L,p) > 0$ tal que, se $f \in \mathcal{B}_3$ e $\|f\| < \varepsilon_2$, então $\|N(u) - N(\nu)\|_L \leq \frac{1}{2}\|u - v\|_L$, para todo $u, \nu \in B^f$. Para isto, considere o seguinte lema:

Lema 5.11. *Seja $p \geq 1$ um inteiro. Então para todo $u, \nu \in B^f$ temos*

$$|\widehat{u^{p+1}} - \widehat{\nu^{p+1}}| \leq \frac{C_p\|u - v\|_L(\|u\|_L^p + \|u\|_L^{p-1}\|\nu\|_L + \cdots + \|u\|_L\|\nu\|_L^{p-1} + \|\nu\|_L^p)}{1 + |w|^3},$$

sendo $C_p = (p+1)\left(\frac{\overline{C}_3}{2\pi}\right)^p$, com a constante $\overline{C}$ dada no Lema 5.5 para $q = 3$.

Prova: Pela Definição 2.5, temos:

$$\widehat{u^{p+1}} - \widehat{\nu^{p+1}} = (\hat{u} * \hat{u} * \cdots * \hat{u}) - (\hat{\nu} * \hat{\nu} * \cdots * \hat{\nu}),$$

sendo p convoluções de $\hat{u}$ e p convoluções de $\hat{\nu}$. Somando e subtraindo na equação acima o termo $\hat{\nu} * \hat{u} * \cdots * \hat{u}$, com $p-1$ convoluções de $\hat{u}$ com si mesmo, e usando que a convolução é linear em cada entrada, obtemos:

$$\widehat{u^{p+1}} - \widehat{\nu^{p+1}} = [(\hat{u} - \hat{\nu}) * \hat{u} * \cdots * \hat{u}] + [\hat{\nu} * \hat{u} * \cdots * \hat{u}] - [\hat{\nu} * \hat{\nu} * \cdots * \hat{\nu}].$$

Novamente, somando e subtraindo na equação acima o termo $\hat{\nu} * \hat{\nu} * \cdots * \hat{u}$, obtemos:

$$\widehat{u^{p+1}} - \widehat{\nu^{p+1}} = [(\hat{u} - \hat{\nu}) * \hat{u} * \cdots * \hat{u}] + [\hat{\nu} * (\hat{u} - \hat{\nu}) * \hat{u} * \cdots * \hat{u}] + [\hat{\nu} * \hat{\nu} * \cdots * \hat{u}] - [\hat{\nu} * \hat{\nu} * \cdots * \hat{\nu}].$$

Esse procedimento de somar e subtrair parcelas terminará após p passos, onde o último termo a ser somado e subtraído será $(\hat{\nu} * \hat{\nu} * \cdots * \hat{\nu} * \hat{u})$. Da Definição 1.3 da norma em $\mathcal{B}_3$ e da equação (5.3), temos para todo $t \in [1, L^{2\beta}]$, que $|\hat{u}(w,t)| \leq \frac{\|u\|_L}{1+|w|^3}$ e $|\hat{\nu}(w,t)| \leq \frac{\|\nu\|_L}{1+|w|^3}$. Logo, usando a Definição 2.4, o Lema 2.5 e o Lema 5.5, obtemos:

$$\begin{aligned}
|\widehat{u^{p+1}} - \widehat{\nu^{p+1}}| \leq\; & \frac{1}{(2\pi)^p}\int_{\mathbb{R}} [|\hat{u}(w_p)||\hat{u}(w_{p-1} - w_p)| \cdots |\hat{u}(w_1 - w_2)||(\hat{u} - \hat{\nu})(w - w_1)| + \\
+\; & |\hat{u}(w_p)||\hat{u}(w_{p-1} - w_p)| \cdots |(\hat{u} - \hat{\nu})(w_1 - w_2)||\hat{\nu}(w - w_1)| + \cdots \\
+\; & |(\hat{u} - \hat{\nu})(w_p)||\hat{\nu}(w_{p-1} - w_p)| \cdots |\hat{\nu}(w_1 - w_2)||\hat{\nu}(w - w_1)|] dw_p dw_{p-1} \cdots dw_1 \\
\leq\; & \frac{C_p\|u - v\|_L(\|u\|_L^p + \|u\|_L^{p-1}\|\nu\|_L + \cdots + \|u\|_L\|\nu\|_L^{p-1} + \|\nu\|_L^p)}{1 + |w|^3},
\end{aligned}$$

sendo $C_p = (p+1)\left(\frac{\overline{C}_3}{2\pi}\right)^p$. ∎

Usando os mesmos argumentos anteriores, encontramos

$$\left|\frac{d}{dw}(\widehat{u^{p+1}} - \widehat{\nu^{p+1}})\right| \leq \frac{C_p\|u - v\|_L(\|u\|_L^p + \|u\|_L^{p-1}\|\nu\|_L + \cdots + \|u\|_L\|\nu\|_L^{p-1} + \|\nu\|_L^p)}{1 + |w|^3},$$

já que, $|\hat{u}'(w,t)| \leq \frac{\|u\|_L}{1+|w|^3}$ e $|\hat{\nu}'(w,t)| \leq \frac{\|\nu\|_L}{1+|w|^3}$.

De (5.19), temos:

$$[\widehat{N(u)} - \widehat{N(\nu)}](w,t) = \int_1^t e^{-(|w|^{2\beta} - i\eta w^3)(t-s)}[\widehat{u^p u_x} - \widehat{\nu^p \nu_x}](w,s)ds. \tag{5.30}$$

Note que do Lema 2.5 e do Teorema 2.2,

$$\widehat{u^p u_x} = \mathcal{F}\{u \cdot u \cdots u \cdot u_x\} = \frac{1}{(2\pi)^p}[\hat{u} * \hat{u} * \cdots * (iw)\hat{u}] = (iw)\frac{1}{(2\pi)^p}[\hat{u} * \hat{u} * \cdots * \hat{u}] = iw\widehat{u^{p+1}}. \quad (5.31)$$

Então, usando o Lema 5.11, e fazendo $\tau = t - s$, obtemos:

$$\begin{aligned}
|\widehat{N(u)} - \widehat{N(\nu)}| &= \left| \int_1^t e^{-(|w|^{2\beta} - i\eta w^3)(t-s)} [\widehat{u^p u_x} - \widehat{\nu^p \nu_x}](w,s) ds \right| \\
&\leq |w| \int_1^t |e^{-s(|w|^{2\beta} - i\eta w^3)(t-s)}||[\widehat{u^{p+1}} - \widehat{\nu^{p+1}}](w,s)| ds \\
&\leq \frac{C_p |w| \|u - v\|_L (\|u\|_L^p + \|u\|_L^{p-1}\|\nu\|_L + \cdots + \|u\|_L \|\nu\|_L^{p-1} + \|\nu\|_L^p)}{1 + |w|^3} \int_0^{t-1} e^{-s|w|^{2\beta}\tau} d\tau.
\end{aligned}$$

Do Lema 5.7 e usando que $\frac{|w|}{1+|w|^3} \leq \frac{2}{1+w^2}$:

$$\begin{aligned}
|\widehat{N(u)} - \widehat{N(\nu)}| &\leq \frac{|w| C_p C_{t,w} \|u - v\|_L (\|u\|_L^p + \|u\|_L^{p-1}\|\nu\|_L + \cdots + \|u\|_L \|\nu\|_L^{p-1} + \|\nu\|_L^p)}{1 + |w|^3} \\
&\leq \frac{2 C_p C_{t,w} \|u - v\|_L (\|u\|_L^p + \|u\|_L^{p-1}\|\nu\|_L + \cdots + \|u\|_L \|\nu\|_L^{p-1} + \|\nu\|_L^p)}{1 + w^2}.
\end{aligned}$$

Finalmente, usando o Lema 5.8, obtemos:

$$|\widehat{N(u)} - \widehat{N(\nu)}| \leq \frac{2 C_p C_t \|u - v\|_L (\|u\|_L^p + \|u\|_L^{p-1}\|\nu\|_L + \cdots + \|u\|_L \|\nu\|_L^{p-1} + \|\nu\|_L^p)}{1 + |w|^3},$$

sendo C_t a constante definida no Lema 5.8 e C_p é a constante definida no Lema 5.11.

Assim, tomando $\|f\|$ tais que $\|u\|_L, \|\nu\|_L \leq 1$ (estas desigualdades são satisfeitas desde que tomemos $\|f\| < (1 + C_L)^{-1}$) e como $p \geq 1$, obtemos:

$$|\widehat{N(u)} - \widehat{N(\nu)}| \leq \frac{2(p+1) C_p C_t (1 + C_L) \|f\| \|u - v\|_L}{1 + |w|^3}, \quad (5.32)$$

onde usamos que $\|u\|_L^p \leq \|u\|_L \leq (1 + C_L)\|f\|$, $\|\nu\|_L^p \leq \|\nu\|_L \leq (1 + C_L)\|f\|$ para todo $p \geq 1$ e C_L é a constante definida no Lema 5.3.

Agora, vamos calcular o termo $|[\widehat{N(u)} - \widehat{N(\nu)}]'|$. Derivando a equação (5.30), obtemos:

$$\begin{aligned}
|[\widehat{N(u)} - \widehat{N(\nu)}]'(w,t)| &\leq \left| \int_1^t \frac{d}{dw} (e^{-(|w|^{2\beta} - i\eta w^3)(t-s)}) [\widehat{u^p u_x} - \widehat{\nu^p \nu_x}](w,s) ds \right| \\
&+ \left| \int_1^t e^{(|w|^{2\beta} - i\eta w^3)(t-s)} [\widehat{u^p u_x} - \widehat{\nu^p \nu_x}]'(w,s) ds \right| \\
&\leq |w| \left| \int_0^{t-1} \frac{d}{dw} (e^{-(|w|^{2\beta} - i\eta w^3)\tau}) (\widehat{u^{p+1}} - \widehat{\nu^{p+1}})(w,s) d\tau \right| + \\
&+ \int_0^{t-1} e^{-|w|^{2\beta}\tau} \left| \frac{d}{dw} \left[|w| (\widehat{u^{p+1}} - \widehat{\nu^{p+1}})(w,s) \right] \right| d\tau.
\end{aligned}$$

A primeira integral pode ser limitada como anteriormente, bastando usar os Lemas 5.9 e 5.10 no lugar dos Lemas 5.7 e 5.8. Assim,

$$\begin{aligned}
|[\widehat{N(u)} - \widehat{N(\nu)}]'(w,t)| &\leq \frac{2(p+1) C_p F_t (1 + C_L) \|f\| \|u - v\|_L}{1 + |w|^3} \\
&+ \int_0^{t-1} e^{-|w|^{2\beta}\tau} \left[\left| (\widehat{u^{p+1}} - \widehat{\nu^{p+1}})(w,s) \right| + |w| \left| \frac{d}{dw} |w| (\widehat{u^{p+1}} - \widehat{\nu^{p+1}})(w,s) \right| \right] d\tau.
\end{aligned}$$

Agora, a segunda integral da desigualdade anterior pode ser cotada usando os Lemas 5.7, 5.8 e 5.11, por $\frac{(C_{t,w}+2C_t)C_p(p+1)(1+C_L)\|f\|\|u-v\|_L}{1+|w|^3}$.

Como $C_{t,w} \leq C_t$, para todo $w \in \mathbb{R}$ e $t \geq 1$, então

$$|[\widehat{N(u)} - \widehat{N(\nu)}]'(w,t)| \leq \frac{(2F_t + 3C_t)(p+1)C_p(1+C_L)\|f\|\|u-v\|_L}{1+|w|^3}, \tag{5.33}$$

sendo C_L, C_t, F_t, C_p as constantes definidas, respectivamente, nos Lemas 5.3, 5.8, 5.10 e 5.11.

Somando as estimativas (5.32) e (5.33), usando a definição da norma em $\mathcal{B}_3$, tomando o supremo em $t \in [1, L^{2\beta}]$ e observando que F_t e C_t são crescentes no intervalo $[1, L^{2\beta}]$, obtemos:

$$\|N(u) - N(\nu)\|_L \leq (2F_{L^{2\beta}} + 5C_{L^{2\beta}})(p+1)C_p(1+C_L)\|f\|\|u-v\|_L \leq K_{L,p}\|f\|\|u-v\|_L,$$

sendo $K_{L,p} = (12L^{4\beta} - 14L^{2\beta} + 43)(p+1)C_p(1+C_L)$.

Assim, definindo

$$\varepsilon_2 \equiv \min\left\{\frac{1}{2K_{L,p}}, \frac{1}{1+C_L}\right\}. \tag{5.34}$$

Portanto, tomando ε_2 definido pela equação (5.34), temos, para todo $u, \nu \in B_f$

$$\|N(u) - N(\nu)\|_L \leq \frac{1}{2}\|u-v\|_L,$$

desde que $\|f\| < \varepsilon_2$.

$\blacksquare$

5.1.4 Prova do Teorema 5.2

Usando os Lemas 5.1 e 5.2 provaremos que, dados $L > 1$ e $p \geq 2$, com $p \in \mathbb{N}$, existe $\varepsilon = \varepsilon(L,p) > 0$ tal que, se $f \in \mathcal{B}_3$ e $\|f\| < \varepsilon$, então o problema de valor inicial (1.1) tem uma única solução em B^f.

De (5.4),

$$T(u) = u_f(x,t) + \rho N(u)(x,t).$$

Dados $L > 1$, $p \geq 2$, $\rho \in [0,1]$ e definindo $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, sendo ε_1 e ε_2 dados por (5.29) e (5.34), pelo Lema 5.1 temos, para todo $u \in B^f$, que

$$\|T(u) - u_f\|_L = |\rho|\|N(u)(x,t)\|_L \leq \|f\|.$$

Além disso, pelo lema 5.2, temos para todo $u, \nu \in B^f$,

$$\|T(u) - T(\nu)\|_L = |\rho|\|N(u) - N(\nu)\|_L \leq \frac{1}{2}\|u-\nu\|_L.$$

Logo, o operador T é uma contração em B^f e mapeia a bola B^f nela mesma, desde que $\|f\| < \varepsilon$. Portanto, pelo Teorema do ponto fixo para contrações (veja Seção 2.3), T tem um único ponto fixo em B^f, o que significa que o PVI (1.1) tem uma única solução em B^f.

$\blacksquare$

5.2 O Grupo de Renormalização para o caso não linear

Seja u a solução de (1.1) e considere a versão renormalizada

$$u_1(x,t) = Lu(Lx, L^{2\beta}t) \tag{5.35}$$

de u com $f \in \mathcal{B}_3$. Definimos $y = Lx$ e $s = L^{2\beta}t$ e lembrando que $Mu = \frac{1}{L^{1+2\beta}}Mu_1$, como u é solução de (1.1), temos:

$$u_s = Mu - \eta u_{yyy} + \rho u^p u_y \quad \Rightarrow \quad \frac{(u_1)_t}{L^{1+2\beta}} = \frac{1}{L^{1+2\beta}}Mu_1 - \eta\frac{(u_1)_{xxx}}{L^4} - \rho\left(\frac{u_1}{L}\right)^p\frac{(u_1)_x}{L^2}$$

Logo, u_1 satisfaz a equação:

$$(u_1)_t = Mu_1 - \eta L^{2\beta-3}(u_1)_{xxx} - \rho L^{2\beta-p-1}(u_1)^p(u_1)_x.$$

e com isso obtemos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} (u_1)_t = Mu_1 - \eta L^{2\beta-3}(u_1)_{xxx} - \rho L^{2\beta-p-1}(u_1)^p(u_1)_x, \\ u_1(x,1) = Lu(Lx, L^{2\beta}) \equiv f_1(x). \end{cases} \tag{5.36}$$

Para encontrarmos a sequência de equações e dados iniciais basta procedermos indutivamente. Porém, omitiremos essa passagem, já que a mesma é análoga à descrita na Seção 4.2. Então, assumiremos que, no k-ésimo passo o problema de valor inicial é dado por:

$$\begin{cases} (u_k)_t = Mu_k - \eta_k(u_k)_{xxx} - \rho_k(u_k)^p(u_k)_x, \\ u_k(x,1) = L^k u(L^k x, L^{2k\beta}) \equiv f_k(x), \end{cases} \tag{5.37}$$

sendo $\eta_k = \eta L^{(2\beta-3)k}$ e $\rho_k = \rho L^{(2\beta-p-1)k}$ para todo $k = 0, 1, 2...$ e $u_0 = u$. Note que, como $\frac{3}{4} < \beta \leq 1$, $\eta, \rho \in [0,1]$ e $p \geq 2$ então $|\eta_k| \leq |\eta| \leq 1$ e $|\rho_k| \leq |\rho| \leq 1$. Dessa forma, tomando $\varepsilon = \varepsilon(L,p)$ do Teorema 5.2, temos que se $\|f_k\| < \varepsilon$, então o PVI (5.37) possui uma única solução em B^f, para todo $t \in [1, L^{2\beta}]$, que é dada por:

$$u_k(x,t) = u_k^0(x,t) + \nu_k(x,t) \tag{5.38}$$

em que $u_k^0(x,t)$ é a solução da equação no caso linear dispersivo, isto é, $(u_k^0)_t = Mu_k^0 - \eta_k(u_k^0)_{xxx}$ e para todo $k \geq 0$

$$u_k^0(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(|w|^{2\beta} - i\eta_k w^3)(t-1)} e^{iwx}\widehat{f}(w)dw$$

e

$$\nu_k(x,t) = \rho_k \int_1^t S(t-s+1)(u_k)^p(x,s)(u_k)_x(x,s)ds = \rho_k \int_0^{t-1} S(\tau+1)(u_k)^p(x,t-\tau)(u_k)_x(x,t-\tau)d\tau,$$

sendo

$$S(t)f = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(|w|^{2\beta} - i\eta_k w^3)(t-1)} e^{iwx}\widehat{f}(w)dw,$$

$\hat{f}$ a Transformada de Fourier de f, $u_0^0 = u$ e $\nu_k = \rho_k N(u_k)$.

A partir da equação (5.38) definimos o Grupo de Renormalização para a equação não linear da seguinte forma:

$$R_{L,\eta_k,\rho_k} f_k = L u_k(Lx, L^{2\beta}). \tag{5.39}$$

Assim, a aplicação do operador ao dado inicial f_k é

$$(R_{L,\eta_k,\rho_k} f_k)(x) = L u_k^0(Lx, L^{2\beta}) + L\nu_k(Lx, L^{2\beta}) = R^0_{L,\eta_k} f_k(x) + L\nu_k(Lx, L^{2\beta}), \tag{5.40}$$

sendo R^0_{L,η_k} é o operador linear definido em (4.8) e $k = 0, 1, 2...$. A sequência de dados iniciais (f_k) será obtida recursivamente através da aplicação do operador RG, isto é,

$$f_{k+1} = R_{L,\eta_k,\rho_k} f_k. \tag{5.41}$$

sendo $f_k(x) = L^k u(L^k x, L^{2\beta k})$ para todo k.

5.3 Análise do comportamento assintótico

Nosso objetivo nessa seção é provar o Teorema 5.1, e com isso, mostrar que o comportamento assintótico da solução do PVI (1.1) é o mesmo obtido nos casos lineares. Sendo assim, a ideia consistirá na decomposição dos dados iniciais em duas parcelas, onde uma parcela é múltiplo da função f^* e a outra parcela é irrelevante no sentindo que será contraída pela aplicação sucessiva do operador RG. Como foi visto nos capítulos anteriores o método RG é indutivo. Portanto, obteremos as primeiras iterações, isto é, os primeiros passos da indução necessários para facilitar o entendimento do método.

Definição 5.1. *Considere as constantes C e L_3 dadas pelo Lema da Contração 4.3 e $\overline{C}_\beta$ a constante definida no Lema 3.2. Dado $\delta \in (0,1)$, definimos*

$$L_\delta = \max\{2^{\frac{1}{2\beta}}, [2C(1+\overline{C}_\beta)]^{\frac{1}{\delta}}\}. \tag{5.42}$$

Passo 1: (k=0) Vamos analisar o problema:

$$\begin{cases} u_t = Mu - \eta u_{xxx} - \rho u^p u_x, & t > 1,\ p \geq 2, \\ u(x,1) = f_0(x) \equiv f(x), & f \in \mathcal{B}_3. \end{cases}$$

Seja $A_0 = \hat{f}_0(0)$ e defina g_0 da seguinte maneira:

$$f_0 = A_0 f^* + g_0. \tag{5.43}$$

Daí, segue que, $g_0 \in \mathcal{B}_3$ com $\widehat{g}_0(0) = 0$ e

$$|A_0| = |\hat{f}_0(0)| \leq \|f_0\|. \tag{5.44}$$

Foi provado no Lema 3.2 que $\|f^*\| \leq \overline{C}_\beta$. Logo,

$$\|g_0\| = \|f_0 - A_0 f^*\| \leq \|f_0\| + |A_0|\|f^*\| \leq (1+\overline{C}_\beta)\|f_0\|. \tag{5.45}$$

Aplicando o operador RG no dado inicial f_0 temos:

$$f_1 = R_{L,\eta_0,\rho_0} f_0 = Lu(L\cdot, L^{2\beta}) = Lu_0^0(L\cdot, L^{2\beta}) + L\nu_0(L\cdot, L^{2\beta}).$$

Então,

$$f_1 = R^0_{L,\eta_0}(A_0 f^* + g_0) + L\nu_0(L\cdot, L^{2\beta}).$$

Somando e subtraindo o termo $\widehat{\nu_0}(0, L^{2\beta})R^0_{L,\eta_0} f^*$ em f_1,

$$\begin{aligned} f_1 &= R^0_{L,\eta_0}(A_0 f^* + g_0) + L\nu_0(L\cdot, L^{2\beta}) + \widehat{\nu_0}(0, L^{2\beta})R^0_{L,\eta_0} f^* - \widehat{\nu_0}(0, L^{2\beta})R^0_{L,\eta_0} f^* \\ &= [A_0 + \widehat{\nu_0}(0, L^{2\beta})]R^0_{L,\eta_0} f^* + L\nu_0(L\cdot, L^{2\beta}) - \widehat{\nu_0}(0, L^{2\beta})R^0_{L,\eta_0} f^* + R^0_{L,\eta_0} g_0 \\ &= A_1 R^0_{L,\eta_0} f^* + g_1, \end{aligned}$$

onde $A_1 = A_0 + \widehat{\nu_0}(0, L^{2\beta})$ e $g_1 = R^0_{L,\eta_0} g_0 + L\nu_0(L\cdot, L^{2\beta}) - \widehat{\nu_0}(0, L^{2\beta})R^0_{L,\eta_0} f^*$.

Da definição de g_1, temos:

$$\begin{aligned} \|g_1\| &= \|R^0_{L,\eta_0} g_0 + L\nu_0(L\cdot, L^{2\beta}) - \widehat{\nu_0}(0, L^{2\beta})R^0_{L,\eta_0} f^*\| \\ &\leq \|R^0_{L,\eta_0} g_0\| + \|L\nu_0(L\cdot, L^{2\beta})\| + |\widehat{\nu_0}(0, L^{2\beta})|\|R^0_{L,\eta_0} f^*\|. \end{aligned} \tag{5.46}$$

Agora, vamos calcular os termos $\|L\nu_0(L\cdot, L^{2\beta})\|$ e $|\widehat{\nu_0}(0, L^{2\beta})|\|f^*\|$. Como $A_1 - A_0 = \widehat{\nu_0}(0, L^{2\beta})$, $\|\nu_0\|_L = \|\rho N(u)\|_L \leq \|N(u)\|_L$ pois $|\rho| \leq 1$, e da desigualdade (5.27), temos:

$$|A_1 - A_0| = |\widehat{\nu_0}(0, L^{2\beta})| \leq \|\nu_0\|_L \leq C_{L,p}\|f_0\|^2. \tag{5.47}$$

Pelo Lema 4.2,

$$|\widehat{\nu_0}(0, L^{2\beta})|\|R^0_{L,\eta_0} f^*\| \leq K C_{L,p}\|f_0\|^2. \tag{5.48}$$

Considerando a definição da norma em $\mathcal{B}_3$, o Lema 2.3, as desigualdades (5.20) e (5.23), $L > 1$ e que $|\rho| \leq 1$, temos:

$$\begin{aligned} \|L\nu_0(L\cdot, L^{2\beta})\| &= \sup_{w\in\mathbb{R}} \left\{(1+|w|^3)\left[\left|\widehat{L\nu_0}(Lw, L^{2\beta})\right| + \left|\widehat{L\nu_0'}(Lw, L^{2\beta})\right|\right]\right\} \\ &= \sup_{w\in\mathbb{R}} \left\{(1+|w|^3)\left[\left|L\cdot\frac{1}{L}\widehat{\nu_0}\left(\frac{w}{L}, L^{2\beta}\right)\right| + \left|L\cdot\frac{1}{L}\widehat{\nu_0}'\left(\frac{w}{L}, L^{2\beta}\right)\right|\right]\right\} \\ &= \sup_{w\in\mathbb{R}} \left\{(1+|w|^3)\left[\left|\widehat{\nu_0}\left(\frac{w}{L}, L^{2\beta}\right)\right| + \left|\widehat{\nu_0}'\left(\frac{w}{L}, L^{2\beta}\right)\right|\right]\right\} \\ &\leq L^3 \sup_{w\in\mathbb{R}} \left\{(1+\left|\frac{w}{L}\right|^3)\left[\left|\widehat{\nu_0}\left(\frac{w}{L}, L^{2\beta}\right)\right| + \left|\widehat{\nu_0}'\left(\frac{w}{L}, L^{2\beta}\right)\right|\right]\right\} = L^3\|\nu_0(\cdot, L^{2\beta})\|. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|L\nu_0(L\cdot, L^{2\beta})\| \leq L^3 C_{L,p}\|f_0\|^2, \tag{5.49}$$

sendo $C_{L,p}$ a constante definida em (5.28).

Assim, de (5.46), (5.48) e (5.49), $\|g_1\| \leq CL^{-1}\|g_0\| + (L^3 + K)C_{L,p}\|f_0\|^2$, e definindo

$$E_{L,p} = (L^3 + K)C_{L,p}, \tag{5.50}$$

obtemos, considerando $\delta \in (0,1)$ e usando (5.45),

$$\|g_1\| \leq \frac{C}{L}\|g_0\| + E_{L,p}\|f_0\|^2 \leq \frac{1}{L^{1-\delta}}\left[\frac{C}{L^\delta}(1 + \overline{C}_\beta) + L^{1-\delta}E_{L,p}\|f_0\|\right]\|f_0\|. \tag{5.51}$$

Tomando $L > L_\delta$ (com L_δ dado pela equação (5.42)), então $\frac{C(1+\overline{C}_\beta)}{L^\delta} < \frac{1}{2}$. Assim, tomando o dado inicial suficientemente pequeno de maneira que

$$L^{(1-\delta)} E_{L,p} \|f_0\| < \frac{1}{2}, \tag{5.52}$$

temos:

$$\|g_1\| \leq \frac{1}{L^{1-\delta}} \|f_0\|. \tag{5.53}$$

Como $f_1 = A_1 R^0_{L,\eta_0} f^* + g_1$ e de (5.53), temos:

$$\|f_1\| \leq |A_1| \|R^0_{L,\eta_0} f^*\| + \|g_1\| \leq K|A_1| + \frac{1}{L^{1-\delta}} \|f_0\|,$$

sendo K a constante definida no Lema 4.2. Usando ainda que $|A_1| \leq |A_1 - A_0| + |A_0| \leq C_{L,p}\|f_0\|^2 + \|f_0\|$,

$$\|f_1\| \leq \left[K(C_{L,p}\|f_0\| + 1) + \frac{1}{L^{1-\delta}} \right] \|f_0\| = D_1 \|f_0\|, \tag{5.54}$$

sendo $D_1 = \frac{1}{L^{1-\delta}} + K(C_{L,p}\|f_0\| + 1)$.

Passo 2: (k=1) O próximo passo é iterar o procedimento descrito acima e, para isto, teremos que analisar o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} (u_1)_t = M u_1 - \eta_1 (u_1)_{xxx} - \rho_1 (u_1)^p (u_1)_x, & t > 1, \ p \geq 2, \\ u_1(x,1) = f_1(x), \end{cases}$$

em que $\eta_1 = \eta L^{(2\beta - 3)}$ e $\rho_1 = \rho L^{(2\beta - p - 1)}$.

Novamente, gostaríamos de evoluir o dado inicial f_1 de $t = 1$ a $t = L^{2\beta}$, e com isso renormalizar a solução evoluída. Observe que para $\frac{3}{4} < \beta \leq 1$ temos $|\rho_1| \leq |\rho| \leq 1$ e que o novo dado inicial $f_1 = R_{L,\eta_0,\rho_0} f_0$ pertence a $\mathcal{B}_3$. Então, pelo Teorema 5.2 se $\|f_1\| < \varepsilon$, o PVI acima possui única solução para todo $t \in [1, L^{2\beta}]$. Assim, a solução para este novo problema pode ser escrita como $u_1(x,t) = u_1^0(x,t) + \nu_1(x,t)$, sendo u_1^0 a solução da equação linear com termo dispersivo com dado inicial f_1 e

$$\nu_1(x,t) = \rho L^{(2\beta - p - 1)} \int_0^{t-1} S(\tau + 1)(u_1)^p(x, t - \tau)(u_1)_x(x, t - \tau) d\tau.$$

Como no passo anterior, vamos decompor o dado inicial do problema renormalizado em duas parcelas,

$$f_1 = A_1 R^0_{L,\eta_0} f^* + g_1. \tag{5.55}$$

Aplicando o operador RG em f_1, somando e subtraindo o termo $\widehat{\nu_1}(0, L^{2\beta}) R^0_{L,\eta_1}(R^0_{L,\eta_0} f^*)$ e usando a propriedade de semi-grupo do operador RG linear, obtemos:

$$\begin{aligned} f_2 &= R_{L,\eta_1,\rho_1} f_1 = R^0_{L,\eta_1}(A_1 R^0_{L,\eta_0} f^* + g_1) + L\nu_1(L\cdot, L^{2\beta}) \\ &= A_1 R^0_{L,\eta_1}(R^0_{L,\eta_0} f^*) + R^0_{L,\eta_1} g_1 + L\nu_1(L\cdot, L^{2\beta}) + \widehat{\nu_1}(0, L^{2\beta}) R^0_{L,\eta_1}(R^0_{L,\eta_0} f^*) - \widehat{\nu_1}(0, L^{2\beta}) R^0_{L,\eta_1}(R^0_{L,\eta_0} f^*) \\ &= A_2 R^0_{L^2,\eta_0} f^* + g_2, \end{aligned}$$

sendo $A_2 = A_1 + \widehat{\nu_1}(0, L^{2\beta})$ e $g_2 = R^0_{L,\eta_1} g_1 + L\nu_1(L\cdot, L^{2\beta}) - \widehat{\nu_1}(0, L^{2\beta}) R^0_{L^2,\eta_0} f^*$. Assim,

$$|A_2 - A_1| = |\widehat{\nu_1}(0, L^{2\beta})| \leq \|\widehat{\nu_1}(\cdot, L^{2\beta})\| = \|\rho_1 N(u_1)\| \leq \frac{C_{L,p}}{L^{p+1-2\beta}} \|f_1\|^2, \tag{5.56}$$

em que a última desigualdade segue através de contas análogas às realizadas na obtenção de (5.27). Lembrando que $g_1 = R^0_{L,\eta_0} g_0 + L\nu_0(Lx, L^{2\beta}) - \widehat{\nu_0}(0, L^{2\beta}) R^0_{L^2,\eta_0} f^*$, é fácil ver que $\hat{g}_1(0) = 0$, e portanto, podemos usar o Lema da Contração. Além disso, de (4.15) e (5.55) temos $|A_1| = |\hat{f}_1(0)| \leq \|f_1\|$ e $\|g_1\| \leq (1+K)\|f_1\|$. Logo, usando as mesmas ideias do passo anterior, obtemos:

$$\begin{aligned}
\|g_2\| &\leq \|R^0_{L,\eta_1} g_1\| + \|L\nu_1(L\cdot, L^{2\beta})\| + |\widehat{\nu_1}(0, L^{2\beta})|\|R^0_{L^2,\eta_0} f^*\| \\
&\leq \frac{C}{L}\|g_1\| + \frac{L^3 C_{L,p}}{L^{p+1-2\beta}}\|f_1\|^2 + \frac{K C_{L,p}}{L^{p+1-2\beta}}\|f_1\|^2 \\
&\leq \frac{C}{L}\|g_1\| + \frac{E_{L,p}}{L^{p+1-2\beta}}\|f_1\|^2,
\end{aligned}$$

sendo $E_{L,p}$ a constante definida em (5.50).

Assim, supondo $\|f_0\|, \|f_1\| < \varepsilon$ e supondo válida (5.52), podemos usar (5.53) e (5.54) na expressão acima para obter,

$$\begin{aligned}
\|g_2\| &\leq \frac{C}{L} \cdot \frac{1}{L^{1-\delta}}\|f_0\| + \frac{E_{L,p} D_1^2}{L^{p+1-2\beta}}\|f_0\|^2 \\
&= \frac{1}{L^{2(1-\delta)}} \left[\frac{C}{L^\delta} + \frac{L^{2(1-\delta)} E_{L,p} D_1^2 \|f_0\|}{L^{p+1-2\beta}} \right] \|f_0\|.
\end{aligned}$$

Como $L > L_\delta$ e $\overline{C}_\beta > 0$ então $\frac{C}{L^\delta} < \frac{C(1+\overline{C}_\beta)}{L^\delta} < \frac{1}{2}$ e se:

$$\frac{L^{2(1-\delta)} E_{L,p} D_1^2 \|f_0\|}{L^{p+1-2\beta}} < \frac{1}{2}, \tag{5.57}$$

obtemos:

$$\|g_2\| \leq \frac{1}{L^{2(1-\delta)}}\|f_0\|. \tag{5.58}$$

Logo, assumindo 5.52 e 5.57, e usando (4.14), (5.44), (5.47), (5.56) e (5.58) na decomposição de f_2, obtemos:

$$\begin{aligned}
\|f_2\| &\leq K|A_2| + \|g_2\| \\
&\leq K(|A_2 - A_1| + |A_1 - A_0| + |A_0|) + \frac{1}{L^{2(1-\delta)}}\|f_0\| \\
&\leq K \left[\frac{C_{L,p}}{L^{p+1-2\beta}}\|f_1\|^2 + C_{L,p}\|f_0\|^2 + \|f_0\| \right] + \frac{1}{L^{2(1-\delta)}}\|f_0\|.
\end{aligned}$$

Por fim, substituindo $\|f_1\| \leq D_1\|f_0\|$ na expressão acima,

$$\|f_2\| \leq \frac{1}{L^{2(1-\delta)}}\|f_0\| + K\left[\frac{C_{L,p}}{L^{p+1-2\beta}} D_1^2 \|f_0\|^2 + C_{L,p}\|f_0\|^2 + \|f_0\| \right] = D_2\|f_0\|, \tag{5.59}$$

sendo $D_2 = \frac{1}{L^{2(1-\delta)}} + K\left[\frac{C_{L,p}}{L^{p+1-2\beta}} D_1^2 \|f_0\| + C_{L,p}\|f_0\| + 1 \right]$ e K a constante definida no Lema 4.2.

Passo 3: (k=2) Considere agora o problema de valor inicial

$$\begin{cases} (u_2)_t = Mu_2 - \eta_1 (u_2)_{xxx} - \rho_1 (u_2)^p (u_2)_x, & t > 1,\ p \geq 2, \\ u_2(x,1) = f_2(x) & f_2 \in \mathcal{B}_3, \end{cases}$$

onde $\eta_2 = \eta L^{2(2\beta-3)}$ e $\rho_2 = \rho L^{2(2\beta-p-1)}$. Se $\|f_2\| < \varepsilon$ então pelo Teorema 5.2 o PVI acima tem uma única solução, para $t \in [1, L^{2\beta}]$, que pode ser escrita como $u_2(x,t) = u_2^0(x,t) + \nu_2(x,t)$ sendo u_2^0 a solução da equação linear com termo dispersivo com dado inicial f_2 e

$$\nu_2(x,t) = \rho L^{2(2\beta-p-1)} \int_0^{t-1} S(\tau+1)(u_2)^p(x,t-\tau)(u_2)_x(x,t-\tau)d\tau.$$

Como nos passos anteriores, decompondo o dado incial em duas parcelas temos

$$f_2 = A_2 R^0_{L^2,\eta_0} f^* + g_2.$$

Aplicando o operador RG em f_2 e somando e subtraindo o termo e $\widehat{\nu_2}(0, L^{2\beta}) R^0_{L,\eta_2}(R^0_{L^2,\eta_0} f^*)$ em f_3,

$$\begin{aligned}
f_3 &= R_{L,\eta_2,\rho_2} f_2 = R_{L,\eta_2,\rho_2}(A_2 R^0_{L^2,\eta_0} f^* + g_2) \\
&= A_2 R^0_{L,\eta_2}(R^0_{L^2,\eta_0} f^*) + R^0_{L,\eta_2} g_2 + L\nu_2(Lx, L^{2\beta}) + \widehat{\nu_2}(0, L^{2\beta}) R^0_{L,\eta_2}(R^0_{L^2,\eta_0} f^*) - \widehat{\nu_2}(0, L^{2\beta}) R^0_{L,\eta_2}(R^0_{L^2,\eta_0} f^*) \\
&= A_3 R^0_{L^3,\eta_0} f^* + g_3,
\end{aligned}$$

sendo $A_3 = A_2 + \widehat{\nu_2}(0, L^{2\beta})$ e $g_3 = R^0_{L,\eta_2} g_2 + L\nu_2(Lx, L^{2\beta}) - \widehat{\nu_2}(0, L^{2\beta}) R^0_{L^3,\eta_0} f^*$. Assim, $|A_2| \leq \|f_2\|$ e $\|g_2\| \leq (1+K)\|f_2\|$. Além disso,

$$|A_3 - A_2| \leq \frac{C_{L,p}}{L^{2(p+1-2\beta)}} \|f_2\|^2. \tag{5.60}$$

e

$$\|g_3\| \leq \frac{C}{L}\|g_2\| + \frac{E_{L,p}}{L^{2(p+1-2\beta)}} \|f_2\|^2, \tag{5.61}$$

sendo $E_{L,p} = (L^3 + K) C_{L,p}$.

Novamente, supondo $\|f_0\|, \|f_1\|, \|f_2\| < \varepsilon$ e supondo válida as cotas (5.52) e (5.57), podemos usar (5.58) e (5.59) na expressão acima, obtendo:

$$\begin{aligned}
\|g_3\| &\leq \frac{C}{L} \cdot \frac{1}{L^{2(1-\delta)}} \|f_0\| + \frac{E_{L,p} D_2^2}{L^{2(p+1-2\beta)}} \|f_0\|^2 \\
&\leq \frac{1}{L^{3(1-\delta)}} \left[\frac{C}{L^\delta} + \frac{L^{3(1-\delta)} E_{L,p} D_2^2 \|f_0\|}{L^{2(p+1-2\beta)}} \right] \|f_0\|.
\end{aligned}$$

Como $\frac{C}{L^\delta} < \frac{C(1+\overline{C}_\beta)}{L^\delta} < \frac{1}{3}$, e se,

$$\frac{L^{3(1-\delta)} E_{L,p} D_2^2 \|f_0\|}{L^{2(p+1-2\beta)}} < \frac{1}{3}, \tag{5.62}$$

temos,

$$\|g_3\| \leq \frac{1}{L^{3(1-\delta)}} \|f_0\|. \tag{5.63}$$

Usando (5.44), (5.56), (5.60) e (5.63), temos:

$$\begin{aligned}
\|f_3\| &\leq K|A_3| + \|g_3\| \\
&\leq K(|A_3 - A_2| + |A_2 - A_1| + |A_1 - A_0| + |A_0|) + \frac{1}{L^{3(1-\delta)}} \|f_0\| \\
&\leq K \left[\frac{C_{L,p}}{L^{2(p+1-2\beta)}} \|f_2\|^2 + \frac{C_{L,p}}{L^{p+1-2\beta}} \|f_1\|^2 + C_{L,p} \|f_0\|^2 + \|f_0\| \right] + \frac{1}{L^{3(1-\delta)}} \|f_0\|.
\end{aligned}$$

Finalmente, usando que $\|f_2\| \leq D_2\|f_0\|$ e $\|f_1\| \leq D_2\|f_0\|$,

$$\|f_3\| \leq K\left[\frac{C_{L,p}}{L^{2(p+1-2\beta)}}D_2^2\|f_0\|^2 + \frac{C_{L,p}}{L^{p+1-2\beta}}D_1^2\|f_0\|^2 + C_{L,p}\|f_0\|^2 + \|f_0\|\right] + \frac{1}{L^{3(1-\delta)}}\|f_0\| = D_3\|f_0\|,$$

sendo, $D_3 = \frac{1}{L^{3(1-\delta)}} + K\left[\frac{C_{L,p}}{L^{2(p+1-2\beta)}}D_2^2\|f_0\| + \frac{C_{L,p}}{L^{p+1-2\beta}}D_1^2\|f_0\| + C_{L,p}\|f_0\| + 1\right]$ e K a constante definida no Lema 4.2.

Seguindo esse raciocínio, podemos continuar iterando o procedimento, isto é aplicar o operador RG ao PVI com dado inicial f_3 e obter as estimativas para as normas g_4 e f_4 que serão definidas de maneira análoga ao que foi feito anteriormente, bem como g_k e f_k, com $k = 5, 6, \cdots$. Sendo assim, faremos argumentações semelhantes para provar a indução.

5.3.1 Passo k

Para cada $k = 0, 1, 2, \cdots$ e $u_0 = u$, considere o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} (u_k)_t = Mu_k - \eta_k(u_k)_{xxx} - \rho_k(u_k)^p(u_k)_x, & t > 1,\ p \geq 2 \\ u_k(x,1) = f_k(x), & f_k \in \mathcal{B}_3, \end{cases} \tag{5.64}$$

sendo $\eta_k = \eta L^{(2\beta-3)k}$ e $\rho_k = \rho L^{(2\beta-p-1)k}$.

Pelo Teorema 5.2, se $\|f_k\| < \varepsilon$ o PVI acima possui uma única solução para todo $t \in [1, L^{2\beta}]$. Assim, a solução para este problema é dada por $u_k(x,t) = u_k^0(x,t) + \nu_k(x,t)$, sendo u_k^0 a solução da equação linear com termo dispersivo com dado inicial f_k e

$$\nu_k(x,t) = \rho L^{k(2\beta-p-1)}\int_0^{t-1} S(\tau+1)(u_k)^p(x,t-\tau)(u_k)_x(x,t-\tau)d\tau.$$

Provaremos, com o lema a seguir, que, como nos passos 1, 2 e 3 descritos anteriormente, todos os dados iniciais f_k podem ser escritos como uma soma de um múltiplo da função f^* mais uma função g_k tal que $\widehat{g_k}(0) = 0$ e obteremos estimativas semelhantes às anteriores para suas normas em $\mathcal{B}_3$.

Lema 5.12. *Dados $p \geq 2$ e $\eta, \rho \in [0,1]$, tome $L > L_3$, sendo L_3 obtido no Lema da Contração 4.3 e seja $\varepsilon > 0$ dado pelo Teorema 5.2. Fixado $k = 0, 1, 2, \cdots$, se f_k for tal que $\|f_k\| < \varepsilon$, $f_0 = A_0 f^* + g_0$ e $f_k = A_k R^0_{L^k,\eta_0} f^* + g_k$, sendo $\widehat{g_k}(0) = 0$, então f_{k+1} está bem definida e admite a decomposição idêntica*

$$f_{k+1} = A_{k+1}R^0_{L^{k+1},\eta_0}f^* + g_{k+1},$$

com $\widehat{g_{k+1}}(0) = 0$,

$$|A_{k+1} - A_k| \leq \frac{C_{L,p}}{L^{k(p+1-2\beta)}}\|f_k\|^2, \tag{5.65}$$

e

$$\|g_{k+1}\| \leq \frac{C}{L}\|g_k\| + \frac{E_{L,p}}{L^{k(p+1-2\beta)}}\|f_k\|^2, \tag{5.66}$$

sendo $C_{L,p}$ definida em (5.28) e $E_{L,p} = (L^3 + K)C_{L,p}$ com K definida no lema 4.2.

Prova: Como $|\rho| \leq 1$ e $\|f_k\| < \varepsilon$, podemos usar a cota (5.27) e considerando $\rho_k = \rho L^{(2\beta-p-1)k}$, temos:

$$\|\nu_k\| = \|\rho_k N(u_k)\| \leq |\rho_k| C_{L,p}\|f_k\|^2 \leq \frac{C_{L,p}}{L^{k(p+1-2\beta)}}\|f_k\|^2. \tag{5.67}$$

Pela Definição (5.40) e pela decomposição de f_k,

$$\begin{aligned} f_{k+1} &= R_{L,\eta_k,\rho_k} f_k = R^0_{L,\eta_k}(A_k R^0_{L^k,\eta_0} f^* + g_k) + L\nu_k(Lx, L^{2\beta}) \\ &= A_k R^0_{L,\eta_k}(R^0_{L^k,\eta_0} f^*) + R^0_{L,\eta_k} g_k + L\nu_k(Lx, L^{2\beta}). \end{aligned}$$

Somando e subtraindo o termo $\widehat{\nu_k}(0, L^{2\beta}) R^0_{L^{k+1},\eta_0} f^*$ e usando a propriedade de semi-grupo do operador RG linear em f_{k+1}, temos:

$$\begin{aligned} f_{k+1} &= A_k R^0_{L^{k+1},\eta_0} f^* + R^0_{L,\eta_k} g_k + L\nu_k(Lx, L^{2\beta}) + \widehat{\nu_k}(0, L^{2\beta}) R^0_{L^{k+1},\eta_0} f^* - \widehat{\nu_k}(0, L^{2\beta}) R^0_{L^{k+1},\eta_0} f^* \\ &= A_{k+1} R^0_{L^{k+1},\eta_0} f^* + g_{k+1}, \end{aligned}$$

sendo,

$$A_{k+1} = A_k + \widehat{\nu_k}(0, L^{2\beta}) \tag{5.68}$$

e

$$g_{k+1} = R^0_{L,\eta_k} g_k + L\nu_k(Lx, L^{2\beta}) - \widehat{\nu_k}(0, L^{2\beta}) R^0_{L^{k+1},\eta_0} f^*, \tag{5.69}$$

o que mostra que, se

$$f_k = A_k R^0_{L^k,\eta_0} f^* + g_k, \tag{5.70}$$

então f_{k+1} tem decomposição semelhante. Como já obtivemos a decomposição para os passos 1, 2 e 3 a equação (5.70) é válida para todo k. Por hipótese $\widehat{g_k}(0) = 0$, logo, segue de (5.69) que $\widehat{g_{k+1}}(0) = 0$. Além disso, de (5.67) e (5.68):

$$|A_{k+1} - A_k| \le \|\nu_k\| \le \frac{C_{L,p}}{L^{k(p+1-2\beta)}} \|f_k\|^2,$$

o que prova (5.65).

Agora, vamos provar (5.66). Como por hipótese $\widehat{g_k}(0) = 0$, então podemos usar o Lema da Contração 4.3, obtendo:

$$\begin{aligned} \|g_{k+1}\| &\le \|R^0_{L,\eta_k} g_k\| + \|L\nu_k(L\cdot, L^{2\beta})\| + \|\widehat{\nu_k}(0, L^{2\beta}) R^0_{L^{k+1},\eta_0} f^*\| \\ &\le \frac{C}{L}\|g_k\| + \|L\nu_k(L\cdot, L^{2\beta})\| + |\widehat{\nu_k}(0, L^{2\beta})| \|R^0_{L^{k+1},\eta_0} f^*\|. \end{aligned}$$

Além disso, considerando que $\nu_k = \rho_k N(u_k)$ sendo $\rho_k = \rho L^{(2\beta-p-1)k}$, as desigualdades (5.20) e (5.23) e o Lema 2.3, obtemos:

$$\|L\nu_k(L\cdot, L^{2\beta})\| \le \frac{L^3 C_{L,p}}{L^{k(p+1-2\beta)}} \|f_k\|^2. \tag{5.71}$$

E ainda, como $\|R^0_{L^{k+1},\eta_0} f^*\| \le K$ e $\rho \in [0, 1]$,

$$|\widehat{\nu_k}(0, L^{2\beta})| \|R^0_{L^{k+1},\eta_0} f^*\| \le \|\widehat{\nu_k}(\cdot, L^{2\beta})\| \|R^0_{L^{k+1},\eta_0} f^*\| \le |\rho_k| K C_{L,p} \|f_k\|^2 \le \frac{K C_{L,p}}{L^{k(p+1-2\beta)}} \|f_k\|^2. \tag{5.72}$$

Portanto, definindo $E_{L,p} = (L^3 + K) C_{L,p}$, obtemos:

$$\|g_{k+1}\| \le \frac{C}{L}\|g_k\| + \frac{E_{L,p}}{L^{k(p+1-2\beta)}} \|f_k\|^2,$$

o que prova (5.66). ∎

Pelo Teorema 5.2 garantimos a existência e unicidade local (para $t \in [1, L^{2\beta}]$) da solução do problema (5.64), desde que o dado inicial f_k esteja na bola de raio ε. Agora, veremos que existe uma forma de "colar"essas soluções de maneira que garantimos uma única solução global para o PVI (1.1). Para isso, utilizaremos o Grupo de Renormalização e veremos que, através de um rescalonamento, obteremos uma solução, para cada $t \in [L^{2\beta k}, L^{2\beta k+2\beta}]$, e, portanto, obteremos uma solução para todo $t > 1$.

Lema 5.13. *Considere o PVI (1.1) e defina $f_0 \equiv f$. Seja $\varepsilon > 0$ definido no Teorema 5.2 tal que o PVI (1.1) possua uma única solução, para todo $t \in [1, L^{2\beta}]$. Se, para cada $k \in \{0, 1, 2, \cdots\}, \|f_k\| < \varepsilon$, onde f_k é o dado inicial do PVI (5.37) definido por (5.41), então o problema de valor inicial (1.1) possui uma única solução, definida em $x \in \mathbb{R}$ e $t > 1$.*

Prova: Para cada $k = 0, 1, 2 \cdots$, e seja $u_k(x, t)$ solução do PVI (5.64) em $\mathbb{R} \times [1, L^{2\beta}]$ e defina,

$$u(x,t) = \frac{1}{L^k} u_k \left(\frac{x}{L^k}, \frac{t}{L^{2k\beta}} \right),$$

para todo $t \in [L^{2k\beta}, L^{(2k+2)\beta}]$. Para $t \in [1, L^{2\beta}]$, $u(x, t) = u_0(x, t)$ é solução do PVI (1.1).

Se $t \in [L^{2\beta}, L^{4\beta}]$ então $u(x,t) = \frac{1}{L} u_1 \left(\frac{x}{L}, \frac{t}{L^{2\beta}} \right)$. Assim,

$$u(x, L^{2\beta}) = \frac{1}{L} u_1 \left(\frac{x}{L}, 1 \right).$$

Por (5.37), (5.39) e (5.41), temos:

$$f_1(y) = u_1(y, 1) = R_{L,\eta_0,\rho_0 f_0} = L u_0(Ly, L^{2\beta}).$$

Tome $y = \frac{x}{L}$ e $s = \frac{t}{L^{2\beta}}$. Então $u_1(y, s) = Lu(Ly, L^{2\beta} s)$ é solução de (5.64) para todo $s \in [1, L^{2\beta}]$ e

$$u(x, L^{2\beta}) = \frac{1}{L} \cdot L u_0 \left(\frac{x}{L} L, L^{2\beta} \right) = u_0(x, L^{2\beta}).$$

Daí, segue que, para todo $t \in [L^{2\beta}, L^{4\beta}]$, $u(x, t)$ é solução do PVI (1.1).

Se $t \in [L^{4\beta}, L^{6\beta}]$ então $u(x,t) = \frac{1}{L^2} u_2 \left(\frac{x}{L^2}, \frac{t}{L^{4\beta}} \right)$. Assim,

$$u(x, L^{4\beta}) = \frac{1}{L^2} u_2 \left(\frac{x}{L^2}, 1 \right).$$

Novamente, de (5.37), (5.39) e (5.41), temos:

$$f_2(y) = u_2(y, 1) = R_{L,\eta_1,\rho_1 f_1} = L u_1(Ly, L^{2\beta}) = L^2 u_0(L^2 y, L^{4\beta}).$$

Tome $y = \frac{x}{L^2}$ e $s = \frac{t}{L^{4\beta}}$. Então $u_2(y, s) = L^2 u(L^{2\beta} y, L^{4\beta} s)$ é solução de (5.64) para todo $s \in [1, L^{2\beta}]$ e

$$u(x, L^{4\beta}) = \frac{1}{L^2} u_2 \left(\frac{x}{L^2}, 1 \right) = \frac{1}{L^2} \cdot L^2 u_0 \left(\frac{x}{L^2} L^2, L^{4\beta} \right) = u_0(x, L^{4\beta}).$$

Daí, obtemos que, para todo $t \in [L^{4\beta}, L^{6\beta}]$, $u(x, t)$ é solução do PVI (1.1).

Seguindo os mesmos argumentos acima e tomando $y = \frac{x}{L^k}$ e $s = \frac{t}{L^{2k\beta}}$, obtemos que $u_k(y, s)$ é solução única do PVI (5.64), para todo $s \in [1, L^{2\beta}]$, e assim, para cada k, $u(x, t)$ é a solução do PVI (1.1), para todo $t \in [L^{2k\beta}, L^{(2k+2)\beta}]$. Portanto, (1.1) possui uma única solução, definida em $x \in \mathbb{R}$ e $t > 1$.

Assim, como o operador definido nos casos anteriores, o operador R_{L,η_k,ρ_k} também possui a propriedade de semi grupo, ou seja, k aplicações do operador numa dada escala L é o mesmo que uma única aplicação na escala L^k.

Lema 5.14. *Sob as hipóteses dos Lemas 5.12 e 5.13, para todo $k = 1, 2, 3, \cdots$,*

$$R_{L^k,\eta_0,\rho_0} f = L^k u(L^k x, L^{2k\beta}) = (R_{L,\eta_{k-1},\rho_{k-1}} \circ \cdots \circ R_{L,\eta_1,\rho_1} \circ R_{L,\eta_0,\rho_0} f).$$

Prova: Pelo Lema 5.13 existe $u(x,t)$ solução do PVI (1.1), definida em $x \in \mathbb{R}$ e $t > 1$. Então $u_1(x,t) = Lu(Lx, L^{2\beta}t)$ é solução do PVI com dado inicial $Lu(Lx, L^{2\beta})$ e está bem definida para todo $t \in [1, L^{2\beta}]$. Assim,

$$R_{L^2,\eta_0,\rho_0} f = L^2 u(L^2 x, L^{4\beta}) = Lu_1(Lx, L^{2\beta}) = R_{L,\eta_1,\rho_1} u_1(x,1) = R_{L,\eta_1,\rho_1} Lu(Lx, L^{2\beta}) = R_{L,\eta_1,\rho_1}(R_{L,\eta_0,\rho_0} f).$$

Suponha que

$$L^k u(L^k x, L^{2k\beta}) = (R_{L,\eta_{k-1},\rho_{k-1}} \circ \cdots \circ R_{L,\eta_1,\rho_1} \circ R_{L,\eta_0,\rho_0}) f.$$

Então

$$\begin{aligned} R_{L^{k+1},\eta_0,\rho_0} f &= L^{k+1} u(L^{k+1} x, L^{2k\beta}) = Lu_k(Lx, L^{2\beta}) = R_{L,\eta_k,\rho_k} u_k(x,1) \\ &= R_{L,\eta_k,\rho_k} L^k u(L^k x, L^{2k\beta}) = R_{L,\eta_k,\rho_k}(R_{L,\eta_{k-1},\rho_{k-1}} \circ \cdots \circ R_{L,\eta_1,\rho_1} \circ R_{L,\eta_0,\rho_0} f), \end{aligned}$$

e o lema está provado. ∎

5.3.2 Indução

Nessa seção concluíremos a demonstração do Teorema 5.1. Mostraremos que a contribuição do termo $u^p u_x$ da equação (1.1) é pequena e que a sequência (A_k) é de Cauchy e, com isso, o comportamento assintótico da solução é semelhante aos obtidos nos capítulos anteriores. Para isso, seguindo as argumentações da seção anterior, precisaremos de alguns resultados preliminares.

Definição 5.2. *Dados $\delta \in (0,1)$ e $L > L_\delta$, defina*

$$D \equiv 1 + K \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{L^{(1-\delta)k}} < \infty, \tag{5.73}$$

sendo K a constante definida no Lema 4.2.

Observação 5.1. *Se,*

$$E_{L,p} D^2 \|f_0\| < \frac{1}{2L^{1-\delta}} \tag{5.74}$$

então,

$$\frac{E_{L,p} D^2 \|f_0\|}{L^{k(p+1-2\beta)}} < \frac{1}{2L^{(1-\delta)(k+1)}}, \quad \forall k = 0, 1, 2, \cdots, \tag{5.75}$$

sendo $E_{L,p} = (L^3 + K) C_{L,p}$ e $C_{L,p}$ definida na equação (5.28).

Prova: Como $\frac{3}{4} < \beta \leq 1$ e $p \geq 2$ então $2\beta \leq p$. Logo, considerando que $\delta \in (0,1)$, obtemos:

$$p + 1 - 2\beta \geq 1 \geq 1 - \delta.$$

Como $L > 1$, vale (5.75).

∎

Lema 5.15. *Seja* $D_1 \equiv \frac{1}{L^{1-\delta}} + K(1 + \|f_0\| C_{L,p})$ *e defina* D_{k+1}*, com* $k = 1, 2, 3, \cdots$*, sucessivamente, pela relação:*

$$D_{k+1} \equiv \frac{1}{L^{(1-\delta)(k+1)}} + K\left(1 + \|f_0\| C_{L,p} + \frac{C_{L,p} D_1^2}{L^{k(p+1-2\beta)}} \|f_0\| + \cdots + \frac{C_{L,p} D_k^2}{L^{k(p+1-2\beta)k}} \|f_0\|\right).$$

Se vale (5.74) da Observação 5.1, então,

$$D_{k+1} < D, \quad \forall k = 0, 1, 2, \cdots.$$

Prova: Como $E_{L,p} = (L^3 + K)C_{L,p} > C_{L,p}$, assumindo (5.74), temos do Observação 5.1 que:

$$\frac{C_{L,p} D^2 \|f_0\|}{L^{k(p+1-2\beta)}} < \frac{E_{L,p} D^2 \|f_0\|}{L^{k(p+1-2\beta)}} < \frac{1}{2L^{(1-\delta)(k+1)}}, \quad \forall k = 0, 1, 2, \cdots \tag{5.76}$$

Assim, assumindo (5.74) e usando que $D > 1$, por (5.76) com $k = 0$ obtemos:

$$D_1 \leq \frac{1}{L^{1-\delta}} + K\left[1 + \frac{1}{2L^{1-\delta}}\right] \leq 1 + K\left(1 + \frac{1}{L^{1-\delta}}\right) < D.$$

Agora, suponha $D_{k+1} < D$, $\forall k = 1, 2, \cdots, l-1$. Como $D_k > 1$, para todo $k = 1, 2, \cdots$ (pois $K > 1$), temos, pela definição de D_{k+1}, pela hipótese de indução e por (5.76):

$$D_{l+1} \leq 1 + K\left(1 + \frac{1}{L^{1-\delta}} + \cdots + \frac{1}{L^{(1-\delta)l}}\right) < D,$$

o que prova o lema. ∎

Teorema 5.3. *Considere o problema de valor inicial* (1.1) *com* $\eta, \rho \in [0, 1]$ *e defina* $f_0 \equiv f$*. Dados* $p \geq 2$ *e* $\delta \in (0, 1)$*, para cada* $L > L_\delta$*, com* L_δ *definido em* (5.42)*, defina,*

$$\bar{\varepsilon} \equiv \min\left\{\frac{\varepsilon}{D}, \frac{1}{2E_{L,p} D^2 L^{1-\delta}}\right\}, \tag{5.77}$$

em que ε *é dada pelo Teorema 5.2 e* D *é dada por (5.73). Então, se* $\|f_0\| < \bar{\varepsilon}$*, para todo* $k = 1, 2, 3, \cdots$*, temos:*

$$\|f_k\| \leq D_k \|f_0\|, \tag{5.78}$$

e

$$\|g_k\| \leq \frac{\|f_0\|}{L^{(1-\delta)k}}. \tag{5.79}$$

Em particular, $\|f_k\| < \varepsilon$*,* $\forall k = 1, 2, 3, \cdots$*.*

Prova: Usaremos indução para provar esse teorema. Já vimos que se vale (5.52) então valem (5.53) e (5.54). Como $\|f_0\| < \bar{\varepsilon}$ e $D > 1$, a condição (5.52) é satisfeita, o que prova (5.78) e (5.79) para $k = 1$. Agora, suponha (5.78) e (5.79) para todo $k = 1, 2, 3, \cdots, l$. Mostraremos que essas estimativas valem também para $k = l + 1$. Pelo lema 5.15, $D_k < D$, para todo k. Logo, pela hipótese de indução e como $\|f_0\| < \bar{\varepsilon}$ obtemos $\|f_k\| \leq D\|f_0\| < \varepsilon$, para todo $k = 1, 2, 3, \cdots, l$. Com isso, garantimos a existência e unicidade de cada problema de valor inicial para todo $k = 1, 2, 3, \cdots, l$, e portanto, pelo lema 5.12, f_{1+l} está bem definida e possui decomposição $f_{l+1} = A_{l+1} R^0_{L^{l+1}, \eta_0} f^* + g_{l+1}$. Além disso, vale (5.66) com $k = l$. Assim,

$$\|g_{l+1}\| \leq \frac{C}{L}\|g_l\| + \frac{E_{L,p}}{L^{l(p+1-2\beta)}} \|f_l\|^2.$$

Usando as hipóteses de indução na desigualdade acima,

$$\|g_{l+1}\| \leq \frac{C}{L} \cdot \frac{\|f_0\|}{L^{(1-\delta)l}} + \frac{E_{L,p}}{L^{l(p+1-2\beta)}} D_l^2 \|f_0\|^2 = \frac{1}{L^{(1-\delta)(l+1)}} \left[\frac{C}{L^\delta} + \frac{L^{(1-\delta)(l+1)}}{L^{(p+1-2\beta)l}} E_{L,p} D_l^2 \|f_0\| \right] \|f_0\|.$$

Pela Observação 5.1, vale (5.75) com $k = l$ e como $\frac{C}{L^\delta} < \frac{1}{2}$ e $D_l < D$, temos:

$$\|g_{l+1}\| \leq \frac{\|f_0\|}{L^{(1-\delta)(l+1)}}.$$

Além disso, como $f_{l+1} = A_{l+1} R^0_{L^{l+1},\eta_0} f^* + g_{l+1}$, então:

$$\|f_{l+1}\| \leq K|A_{l+1}| + \frac{\|f_0\|}{L^{(1-\delta)(l+1)}} \leq K \left[\sum_{k=0}^{l} |A_{k+1} - A_k| + |A_0| \right] + \frac{\|f_0\|}{L^{(1-\delta)(l+1)}}.$$

Usando (5.65) e (5.78) com $k = 1, 2, 3, \cdots, l$, e considerando que $|A_0| \leq \|f_0\|$, encontramos:

$$\|f_{l+1}\| \leq K \left[\sum_{k=1}^{l} \frac{C_{L,p} D_k^2}{L^{k(p+1-2\beta)}} \|f_0\|^2 + (C_{L,p}\|f_0\| + 1)\|f_0\| \right] + \frac{\|f_0\|}{L^{(1-\delta)(l+1)}} = D_{l+1}\|f_0\|.$$

Portanto, as estimativas (5.78) e (5.79) são válidas para todo $k \in \mathbb{N}$. Finalmente, como $D_{l+1} < D$ e $\|f_0\| < \bar{\varepsilon}$, obtemos $\|f_{l+1}\| < \varepsilon$, o que finaliza a indução.

∎

Corolário 5.1. *Sob as hipóteses do Teorema 5.3, obtemos:*

$$\|L^k u(L^k \cdot, L^{2k\beta}) - A_k R^0_{L^k,\eta_0} f^*\| \leq \frac{1}{L^{(1-\delta)k}} \|f_0\|, \quad \forall k = 1, 2, 3, \cdots. \tag{5.80}$$

Prova: Como $\|f_0\| < \varepsilon$, existe a solução global para o PVI (1.1), com dado inicial satisfazendo $D\|f_0\| < \varepsilon$ e $E_{L,p} D^2 \|f_0\| < \frac{1}{2L^{1-\delta}}$. Pelo Lema 5.12, $f_k = A_k R^0_{L^k,\eta_0} f^* + g_k$ e pelo lema 5.14

$$f_k = L^k u(L^k x, L^{2k\beta}) = (R_{L,\eta_{k-1},\rho_{k-1}} \circ \cdots \circ R_{L,\eta_1,\rho_1} \circ R_{L,\eta_0,\rho_0}) f.$$

Logo, por (5.79), obtemos:

$$\|f_k - A_k R^0_{L^k,\eta_0} f^*\| \leq \frac{1}{L^{(1-\delta)k}} \|f_0\|.$$

∎

Corolário 5.2. *Sob as hipóteses do Teorema 5.3, existe um número real A tais que*

$$|A_k - A| \leq \frac{L^{-k(p+1-2\beta)}}{2L^{1-\delta}(1 - L^{-(p+1-2\beta)})} \|f_0\|. \tag{5.81}$$

e

$$\lim_{k\to\infty} \|L^k u(L^k \cdot, L^{2k\beta}) - A f^*\| = 0 \tag{5.82}$$

Prova: Como $\|f_0\| < \varepsilon$, pelo Teorema 5.3, $\|f_k\| \leq D_k\|f_0\|$ e pelo Lema 5.12,

$$|A_{k+1} - A_k| \leq \frac{C_{L,p}}{L^{k(p+1-2\beta)}}\|f_k\|^2.$$

Portanto, usando que $D_k \leq D$ para todo $k = 0, 1, 2, \cdots$, obtemos:

$$|A_{k+1} - A_k| \leq \frac{C_{L,p}}{L^{k(p+1-2\beta)}}D_k^2\|f_0\|^2 < \frac{C_{L,p}}{L^{k(p+1-2\beta)}}D^2\|f_0\|^2.$$

Como $E_{L,p} = (L^3 + K)C_{L,p} > C_{L,p}$ e $\|f\|_0 < \varepsilon$, então, da Observação 5.1 $C_{L,p}D^2\|f_0\| < \frac{1}{2L^{1-\delta}}$, o que prova que (A_k) é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ e, portanto, A_k converge para algum $A \in \mathbb{R}$. Além disso, usando (5.65),

$$\begin{aligned}
|A_k - A| &= \lim_{j\to\infty} |A_{j+k} - A_k| \\
&\leq \lim_{j\to\infty} \{|A_{j+k} - A_{j+k-1}| + |A_{j+k-1} - A_{j+k-2}| + \cdots + |A_{k+1} - A_k|\} \\
&\leq \frac{\|f_0\|}{2L^{1-\delta}} \lim_{j\to\infty} \sum_{l=0}^{j-1} \left(\frac{1}{L^{(p+1-2\beta)}}\right)^{k+l} \\
&\leq \frac{L^{-k(p+1-2\beta)}}{2L^{1-\delta}(1 - L^{-(p+1-2\beta)})}\|f_0\|,
\end{aligned}$$

o que prova (5.81).

De (4.9), (4.14), (5.80) e (5.81), obtemos:

$$\begin{aligned}
\|L^k u(L^k\cdot, L^{2k\beta}) - Af^*\| &\leq \|L^k u(L^k\cdot, L^{2k\beta}) - A_k R^0_{L^k,\eta_0} f^*\| + |A|\|R^0_{L^k,\eta_0} f^* - f^*\| + |A_k - A|\|R^0_{L^k,\eta_0} f^*\| \\
&\leq \frac{\|f_0\|}{L^{k(1-\delta)}} + |A|\frac{C_\beta}{L^{k+1}} + \frac{KL^{-k(p+1-2\beta)}}{2L^{1-\delta}(1 - L^{-(p+1-2\beta)})}\|f_0\| \\
&\leq \frac{\|f_0\|}{L^{k(1-\delta)}} + |A|\frac{C_\beta}{L^{k}} + \frac{KL^{-k(p+1-2\beta)}}{2L^{1-\delta}(1 - L^{-(p+1-2\beta)})}\|f_0\| \\
&\leq \frac{1}{L^{k(1-\delta)}}\left[\|f_0\| + \frac{|A|C_\beta L^{k(1-\delta)}}{L^k} + \frac{KL^{k(1-\delta)}L^{-k(p+1-2\beta)}}{2L^{1-\delta}(1 - L^{-(p+1-2\beta)})}\|f_0\|\right].
\end{aligned}$$

Logo,

$$\|L^k u(L^k\cdot, L^{2k\beta}) - Af^*\| \leq \frac{1}{L^{k(1-\delta)}}\left[\|f_0\| + |A|C_\beta + \frac{K}{2L^{1-\delta}(1 - L^{-(p+1-2\beta)})}\|f_0\|\right], \tag{5.83}$$

onde, na desigualdade acima, usamos o fato de que se $L > 1$, $\frac{3}{4} < \beta \leq 1$, $\delta \in (0, 1)$, $p \geq 2$ então $\frac{L^{k(1-\delta)}}{L^k} \leq 1$ e $p + 1 - 2\beta \geq 1 \geq 1 - \delta$. Assim, para obter (5.82) basta tomar o limite quando $k \to \infty$.

∎

Finalmente, concluiremos a demonstração do Teorema 5.1, que seguirá diretamente do corolário anterior, e com isso, obteremos o comportamento assintótico do problema de valor inicial (1.1).

Prova do Teorema 5.1: Mostramos que (5.1) é válida quando o dado inicial $f \equiv f_0$ é suficientemente pequeno e $t = L^{2k\beta}$ (com $k = 1, 2, 3, \ldots$), para $L > L_\delta$. Agora, resta apenas generalizar esse resultado para todo $t > L_\delta^{2\beta}$. Dado $L > L_\delta$, se $t \geq L^{2\beta}$ é tal que $L^{2k\beta} < t < L^{(2k+2)\beta}$ então existe $\tau \in [1, L^{2\beta}]$ tal que $t = \tau L^{2k\beta}$. Como as constantes em (5.83) não dependem do valor de $L > L_\delta$ considerado, podemos estender (5.82) para $t = \tau L^{2k\beta}$ trocando L por $\tau^{\frac{1}{k}} L^{2\beta}$ em todos o resultados anteriores e assim, obtemos (5.1) para todo $t > L_\delta^{2\beta}$, o que conclui a prova do teorema 5.1.

∎

Referências Bibliográficas

[1] Bona, J., Promislow, K. and Wayne, G., *On the Asymptotic Behavior Of Solutions to Nonlinear, Dispersive, Dissipative Wave Equation*, Math. Comput. Simulations, **37**, p.265-277, (1994).

[2] Braga, G. A., Moreira, J. M., *Renormalization Group Analysis of Nonlinear Diffusion Equations with Time Dependent Coefficients and Marginal Perturbations*, Journal of Statistical Physics , v.148, No.2, p.280-295 , (2012).

[3] Bricmont, J., Kupiainen, A. and e Lin, G., *Renormalization Group and Asymptotics of Solutions of Nonlinear Parabolic Equations*, Comm. Pure Appl. Math. 47, p.893-922, (1994).

[4] Carrozza, S., *Discrete renormalization group for SU(2) tensorial group field theory*, Ann. Inst. Henri Poincaré Comb. Phys. Interact, No. 1, p.49-112, (2014).

[5] Chen, L. and Goldenfeld, N., *Numerical renormalization group calculations for similarity solutions and travelling waves*, Phys. Rev. E, **51**, p.5577-5581, (1996).

[6] Conway, J. B., *A Course in Functional Analysis*, Second Edition, Springer-Verlag, New York, Inc., (1990).

[7] Eichhorn, A., *The renormalization group flow of unimodular f(R) gravity*, Journal of High Energy Phys(JHEP), No. 4, 096, (2015).

[8] Figueiredo, D. G., *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*, Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, (1997).

[9] Fisher, M. E., *Renormalization group theory, the epsilon expansion and Ken Wilson as I knew him**, International Journal of Modern Physics B Vol. 29, No. 8 (2015).

[10] Gell-Mann, M. and Low, F. E., *Quantum Electrodynamics at Small Distances*, Phys. Rev., **95**, 1300-1312, (1954).

[11] Iório, R. J. and Iório, V. M., *Fourier Analysis and Partial Differential Equations*, Cambridge University Press, (2001).

[12] Kammler, D. W., *A First Course in Fourier Analysis*, Published in the United States of America by Cambridge University Press, New York, (2008).

[13] Kawamoto, S and Kuroki, T., *Existence of new nonlocal field theory on noncommutative space and spiral flow in renormalization group analysis of matrix models*, Journal High Energy Phys, No. 6, 062, (2015).

[14] Lima, E. L., *Espaços Métricos*, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, (1993).

[15] Lima, L. E., *Curso de Análise, Volume 2*, Rio de Janeiro, décima primeira edição, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, (2011).

[16] Moreira, J. M., *O Comportamento Assintótico de Soluções da Equação do Calor não-Linear Via Grupos de Renormalização*, Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, (2003).

[17] Moreira, J. M., *Análise Via Ggrupo de Renormalização de Equações de Difusão Não-Lineares com Coeficiente Dependentes do Tempo*, Tese de doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, (2007).

[18] Teixeira, R., *Introdução aos Espaços de Escalas (EDPs em Processamento de Imagens)*, Rio de Janeiro, primeira edição, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, (julho/2001).

[19] Teixeira, R., Medeiros, H. e Menezes, M. L., *Séries de Fourier e Eqquações Diferenciais Parciais*, Universidade Federal Fluminense.

[20] Wilson, K., *Renormalization Group and Critical Phenomena I*, IIPhys. Rev. B, **4**, 3174-83, (1976).